

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 25 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2023

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 25, № 4. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 25, NO. 4. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева», 2023

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications, where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Sciences in scientific specialties and their respective branches of science should be published. List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович – профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич – профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович – профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна – профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

- О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, О. А. Муляр**
О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги 223
- О. В. Гермидер, В. Н. Попов**
Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов 242
- К. А. Драгунова, Н. Никбахт, И. Д. Ремизов**
Численное исследование скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности 255
- С. Х. Зинина, А. А. Ноздринов, В. И. Шмуклер**
Надстройки над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности 273
- С. В. Сидоров, Г. В. Уткин**
О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга 284
- Д. Х. Хусанов, А. А. Каххаров**
Об устойчивости нелинейного неавтономного скалярного уравнения с переменным запаздыванием 299
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

- П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова**
Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах 313
- Е. А. Микишанина**
Неголономные механические системы на плоскости с переменным углом наклона 326
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

- Ю. Н. Дерюгин, М. В. Ветчинников, Д. А. Шишканов**
Исследование различных функций влияния в перидинамике 342
- А. Р. Яппарова, Т. В. Маркелова, П. В. Снытников**
Численная модель формирования паро-воздушно-углеводородных смесей 361
-

- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 375
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 379
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 383
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 389
-
- Алфавитный указатель авторов 393

Contents

MATHEMATICS

- O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, O. A. Mulyar**
On logarithmic Hölder condition and local extrema of power Takagi functions 223
- O. V. Germider, V. N. Popov**
Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes . . . 242
- K. A. Dragunova, N. Nikbakht, I. D. Remizov**
Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to
Solutions of the Heat Equation 255
- S. Kh. Zinina, A. A. Nozdrinov, V. I. Shmukler**
Superstructures over Cartesian products of orientation-preserving rough circle
transformations 273
- S. V. Sidorov, G. V. Utkin**
On the similarity over the ring of integers of certain nilpotent matrices of
maximal rank 284
- J. Kh. Khusanov, A. E. Kaxxorov**
On the stability of a nonlinear nonautonomous scalar equation with variable
delay 299
-

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

- P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova**
Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid
media 313
- E. A. Mikishanina**
Nonholonomic mechanical systems on a plane with a variable slope. 326
-

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

- Yu. N. Deryugin, M. V. Vetchinnikov, D. A. Shishkanov**
Investigation of different influence functions in peridynamics 342
- A. R. Yapparova, T. V. Markelova, P. V. Snytnikov**
Numerical model of vapor-air-diesel autothermal reformer 361
-

- The rules of article design (in Russian) 375
- The rules of article design (in English) 379
- The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 383
- The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 389
-
- Author Index 393

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.223-241

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги

О. Е. Галкин¹, С. Ю. Галкина¹, О. А. Муляр²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

² Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена изучению одного класса вещественных функций, которые мы называем степенными функциями Такаги. Такие функции имеют один положительный вещественный параметр, являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми, и задаются на числовой прямой с помощью функционального ряда. Эти ряды аналогичны ряду, задающему непрерывную, нигде не дифференцируемую функцию Такаги, описанную в 1903 г. При каждом значении параметра выведено функциональное уравнение для функций, связанных со степенными функциями Такаги. Затем с помощью этого уравнения получена точная двусторонняя оценка для изучаемых функций. Доказано, что при значениях параметра, не превосходящих 1, степенные функции Такаги удовлетворяют логарифмическому условию Гёльдера, и найдено наименьшее значение константы в этом условии. В результате получено обычное условие Гёльдера, которое вытекает из логарифмического условия Гёльдера. Более того, при значениях параметра, лежащих в пределах от 0 до 1, исследовано поведение степенных функций Такаги в окрестности точек их глобального максимума. Доказано, что в двоично-рациональных точках, и только в них, изучаемые функции достигают строгого локального минимума на числовой оси. В завершение описано множество точек, в которых функции достигают строгого локального максимума. Преимущество нашего исследования состоит в развитии ряда методов, применимых к непрерывным, нигде не дифференцируемым функциям. Это может позволить значительно расширить множество изучаемых функций.

Ключевые слова: степенная функция Такаги, функциональное уравнение, локальные экстремумы, логарифмическое условие Гёльдера

Для цитирования: Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Муляр О. А. О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 223–241. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.223-241>

Об авторах:

Галкин Олег Евгеньевич, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, olegegalkin@ya.ru

© О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, О. А. Муляр



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Галкина Светлана Юрьевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru

Муляр Ольга Александровна, преподаватель кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-2263-4203>, olga.mulyar@itmm.unn.ru

Original article

MSC2020 26A15, 26A16, 26A27

On Logarithmic Hölder Condition and Local Extrema of Power Takagi Functions

O. E. Galkin¹, S. Yu. Galkina¹, O. A. Mulyar²

¹ *National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

² *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper studies one class of real functions, which we call Takagi power functions. Such functions have one positive real parameter; they are continuous, but nowhere differentiable, and are given on a real line using functional series. These series are similar to the series defining the continuous, nowhere differentiable Takagi function described in 1903. For each parameter value, we derive a functional equation for functions related to Takagi power functions. Then, using this equation, we obtain an accurate two-sides estimate for the functions under study. Next, we prove that for parameter values not exceeding 1, Takagi power functions satisfy the Hölder logarithmic condition, and find the smallest value of the constant in this condition. As a result, we get the usual Hölder condition, which follows from the logarithmic Hölder condition. Moreover, for parameter values ranging from 0 to 1, we investigate the behavior of Takagi power functions in the neighborhood of their global maximum points. Then we show that the functions under study reach a strict local minimum on the real axis at binary-rational points, and only at them. Finally, we describe the set of points at which our functions reach a strict local maximum. The benefit of our research lies in the development of methods applicable to continuous functions that cannot be differentiated anywhere. This can significantly expand the set of functions being studied.

Keywords: power Takagi function, functional equation, local extrema, logarithmic Hölder condition

For citation: O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, O. A. Mulyar. On Logarithmic Hölder Condition and Local Extrema of Power Takagi Functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 223–241. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.223-241>

About the authors:

Oleg E. Galkin, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, olegegalkin@ya.ru

Svetlana Yu. Galkina, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru

Olga A. Mulyar, Lecturer, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-2263-4203>, olga.mulyar@itmm.unn.ru

1. Введение

Наша статья посвящена изучению свойств степенных функций Такаги $S_p(x)$. Эти функции имеют один вещественный параметр $p > 0$ и определяются следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1.1. При каждом $p > 0$ степенной функцией Такаги с параметром (показателем) p мы называем функцию $S_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемую с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $S_0(x) = |x - [x + 1/2]| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней целой точкой; $[y]$ — целая часть числа $y \in \mathbb{R}$; $\{y\}$ — дробная часть числа y .

При $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. (см., например, [1–2]).

Частичные суммы ряда (1.1) будем обозначать через $S_{p,m}(x)$:

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

Иллюстрация 1. Графики степенных функций Такаги $y = S_p(x)$, изображенные линией синего цвета, можно увидеть далее на двух рисунках: при $p = 0,5$ — на Рис. 1.1, вместе с графиками частичных сумм $y = S_{p,n}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, изображенными линиями красного либо зеленого цвета; при $p = 0,8$ — на Рис. 2.1, вместе с графиками $y = -x^p \log_2 x$ и $y = x^p (\Phi_p - \log_2 x)$ (см. теорему 2.1), изображенными линиями, соответственно, красного и зеленого цвета. Вертикальные пунктирные линии на этих рисунках указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$ ([3], теорема 5).

При любом $p > 0$ функции S_p являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми на \mathbb{R} (это показано в теоремах 1 и 3 работы [3]).

Один из первых примеров непрерывных, нигде не дифференцируемых функций на \mathbb{R} был построен Вейерштрассом не позднее 1872 г. Краткие очерки истории развития теории непрерывных нигде не дифференцируемых функций можно найти в работах [4, с.

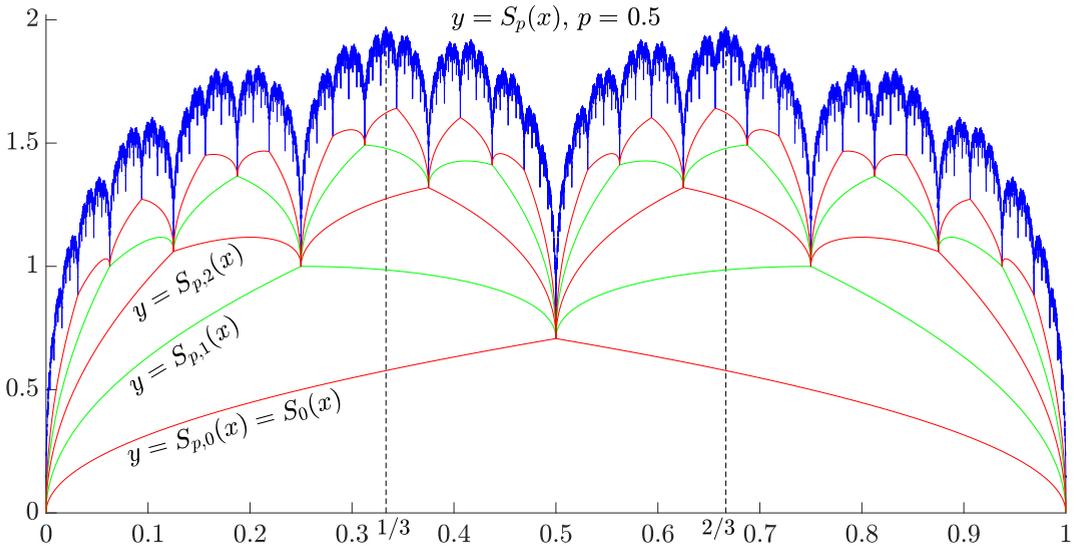


Рис. 1.1. График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0,5$

Fig. 1.1. Graph of the function $y = S_p(x)$ for $p = 0,5$

201–222] и [5, с. 73–76]. Обзор некоторых конструкций непрерывных, нигде не дифференцируемых функций имеется в [6]. В последние годы ряд новых способов построения таких функций был предложен, в частности, в работах [7–8]. Примеры непрерывных, нигде не дифференцируемых функций, у которых множества точек локального экстремума удовлетворяют различным требованиям, приводятся в [9].

Обзоры большого числа работ, посвященных функции Такаги $T(x)$ и её обобщениям, можно найти в [1–2]. В 1959 г. Кахан [10, с. 54–55] нашел точки локальных и глобальных экстремумов этой функции.

Известно, что в пространстве всех периодических непрерывных функций на \mathbb{R} множество нигде не дифференцируемых функций имеет вторую категорию, а его дополнение — первую категорию (см., например, [11]). Отсюда можно сделать вывод, что нигде не дифференцируемые функции составляют большинство (в указанном смысле), и их стоит изучать. Непрерывные нигде не дифференцируемые функции используются не только в различных областях математики: математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и др. (см., например, [1, с. 41–48]), но и в физике [5]. Непрерывным нигде не дифференцируемым функциям, связанным с сингулярной функцией Лебега, посвящена работа [12], где авторы, в частности, находят для них функциональные уравнения, показатели Гёльдера и глобальные экстремумы. В работах [13–14] для поиска глобальных экстремумов произвольных (в т. ч. нигде не дифференцируемых) функций был разработан метод крайних подаргументов и надаргументов. Таким образом, несмотря на сложность изучения нигде не дифференцируемых функций, интерес к ним постоянно растет.

Буссенеску приписывается фраза: «вся польза функции состоит в наличии у неё производной» [15, с. 15]. Тем не менее, остается ещё достаточно количество направлений изучения функций, не имеющих производной. Например, исследуются производные и интегралы дробного порядка [16], функциональные уравнения (см. [12, 14]),

модуль непрерывности и условие Гёльдера [12], экстремумы [12], множества уровня [17], фрактальная размерность графика [17], крайние подаргументы и надаргументы [14], обобщенные вариации [18] и другие характеристики таких функций.

Степенные функции Такаги S_p , задаваемые формулой (1.1), привлекли наше внимание, в частности, тем, что для них оказалось возможным вывести функциональное уравнение (см. формулы (2.2) и (2.3)), частным случаем которого при $p = 1$ является уравнение, полученное Крушпелем в [19]. Некоторые свойства этих функций уже были изучены нами в работе [3], где были получены, частности, следующие результаты:

- 1) доказано, что при любом $p > 0$ функции S_p на \mathbb{R} непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены (теорема 1), а также что при $p \in (0; 1)$ они нигде не дифференцируемы (теорема 3);
- 2) в случае $p > 0$ получено функциональное уравнение $S_p(x) = S_{p,m-1}(x) + S_p(2^m x)/2^{mp}$ при $m \in \mathbb{N}$ (теорема 4) и вычислено значение $S_p(1/3) = 2^p/(3^p(2^p - 1))$ (лемма 1);
- 3) для любого $p \in (0; 1)$ показано, что глобальный максимум функции S_p равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $q + 1/3$ и $q + 2/3$, где $q \in \mathbb{Z}$, а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках (теорема 5).
- 4) получены двусторонние оценки $S_{p,n} \leq S_p \leq S_{p,n} + 1/(3^p(2^p - 1)2^{np})$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, и доказана их точность (предложение 1).

В настоящей статье мы исследуем другие свойства функций S_p . А именно, при различных значениях параметра p мы изучаем их локальные экстремумы и логарифмическое условие Гёльдера. Приведем краткое описание основных результатов и содержание каждого из пяти параграфов работы. Параграф 1 — это введение. В основной теореме 2.1 параграфа 2 мы выводим функциональное уравнение $F_p(2x) = F_p(x)$ для функций $F_p(x) = S_p(x)/x^p + \log_2 x$, а затем с его помощью получаем еще одну точную оценку $-x^p \log_2 x \leq S_p(x) \leq x^p(2^p/(2^p - 1) - \log_2 3 - \log_2 x)$ для функций S_p . В параграфе 3 мы доказываем (теорема 3.2), что при $p \in (0; 1]$ степенная функция Такаги S_p удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера $|S_p(x) - S_p(y)| \leq C \cdot |x - y|^p \cdot \log_3(1/|x - y|)$ (см. определение 3.2) с наименьшей константой $C = 2^p/(2^p - 1)$. Отсюда вытекает «обычное» условие Гёльдера для S_p (предложение 3.1, следствие 3.1). В параграфе 4 мы, исследуя поведение функций S_p в окрестности точки глобального максимума $x = 1/3$, доказываем оценку $L_p|h|^p \leq S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) \leq R_p|h|^p$ для любых $p \in (0; 1)$ и $h \in (-1/12, 1/12)$ (теорема 4.1). Далее в теореме 4.2 мы показываем, что в двоично-рациональных точках, и только в них, функция S_p достигает строгого локального минимума на \mathbb{R} , а в точках вида $q/(3 \cdot 2^n)$, где $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, q — целое и не делится на 3, S_p достигает строгого локального максимума. В параграфе 5 описаны возможные направления дальнейших исследований.

2. Функциональное уравнение

В основной теореме 2.1 этого параграфа мы выводим функциональное уравнение для функции $F_p(x) = S_p(x)/x^p + \log_2 x$, а затем применяем его для получения еще одной точной оценки функций S_p , помимо оценки (19) из предложения 1 работы [3].

Для этого рассмотрим три леммы. Первая из них — техническая.

Л е м м а 2.1. *При любом $p > 0$ верно неравенство $p(1 - p)\Phi_p + (2p - 1)/\ln 2 > 0$, где $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$.*

Доказательство. Подставляя выражение для Φ_p в доказываемое неравенство, после преобразований приходим к равносильному ему неравенству $y(p) = 2^p(p^2 \ln(3/2) + p(2 - \ln(3/2)) - 1) - p^2 \ln 3 + p(\ln 3 - 2) + 1 > 0$. Имеем $y'(p) = 2^p(p^2 \ln 2 \ln(3/2) + p(2 \ln 3 - \ln 2 \ln(3/2)) - \ln 3 + 2) - 2p \ln 3 + \ln 3 - 2$. Отсюда $y''(p) = 2^p(p^2 \ln^2 2 \ln(3/2) + p \ln 2(2 \ln(9/2) - \ln 2 \ln(3/2)) + 2 \ln 6 - \ln 2 \ln(9/2)) - 2 \ln 3$. Здесь все коэффициенты многочлена положительны, поэтому $y''(p)$ возрастает при $p \geq 0$. Таким образом, при $p > 0$ верна оценка $y''(p) > y''(0) = \ln 2(2 - \ln(9/2)) > 0$. Отсюда, т. к. $y'(0) = y(0) = 0$, в силу формулы Тейлора следует, что $y(p) > 0$ при всех $p > 0$.

Доказательство завершено.

Доказательство следующей леммы можно извлечь из первой части доказательства утверждения 2.2 в работе Крушеля [19]. Для полноты изложения приводим эти рассуждения здесь.

Лемма 2.2. При любых $x \in [1/2, 1]$ выполняется неравенство

$$\frac{S_0(x)}{x} + \frac{S_0(2x)}{2x} + \log_2 x \geq 0,$$

причем равенство в нем достигается только при $x = 1/2$ и $x = 1$.

Доказательство. Положим $y(x) = S_0(x)/x + S_0(2x)/(2x) + \log_2 x$ для любого $x \in [1/2; 1]$.

1) Если $x \in [1/2; 3/4]$, то $S_0(x) = 1 - x$ и $S_0(2x) = 2x - 1$ в силу равенства 4 из [3]. Поэтому $y(x) = (1 - x)/x + (2x - 1)/(2x) + \log_2 x = 1/(2x) + \log_2 x$.

Имеем: $y(1/2) = 0$, $y'(x) = (2x - \ln 2)/(2x^2 \ln 2) \geq (1 - \ln 2)/(2x^2 \ln 2) > 0$ при всех $x \in [1/2; 3/4]$. Поэтому $y(x) > 0$ при любых $x \in (1/2; 3/4]$.

2) Если $x \in [3/4; 1]$, то $S_0(x) = 1 - x$ и $S_0(2x) = 2 - 2x$ в силу равенства 4 из [3]. Поэтому $y(x) = (1 - x)/x + (2 - 2x)/(2x) + \log_2 x = 2/x - 2 + \log_2 x$.

Имеем: $y(1) = 0$, $y'(x) = (x - 2 \ln 2)/(x^2 \ln 2) \leq (1 - 2 \ln 2)/(x^2 \ln 2) < 0$ при $x \in [3/4; 1]$. Поэтому $y(x) > 0$ при любых $x \in [3/4; 1)$.

3) Утверждение леммы следует из результатов пунктов 1) и 2).

Доказательство завершено.

Следующая лемма также нужна для доказательства теоремы 2.1.

Лемма 2.3. При любом $p \in (0; 1]$ функция $\psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$, где $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$, строго вогнута на полуинтервале $(0; 1]$.

Доказательство. Нам достаточно показать, что при любом $x \in (0; 1]$ верно неравенство $\psi_p''(x) < 0$. Имеем: $\psi_p'(x) = x^{p-1}(p(\Phi_p - \log_2 x) - 1/\ln 2)$. Отсюда

$$\psi_p''(x) = -x^{p-2}\left(p(1-p)(\Phi_p - \log_2 x) + \frac{2p-1}{\ln 2}\right). \quad (2.1)$$

Так как $x \in (0; 1]$, то $\log_2 x \leq 0$. Поэтому из равенства (2.1) вытекает следующая оценка: $\psi_p''(x) \leq -x^{p-2}\left(p(1-p)\Phi_p + (2p-1)/\ln 2\right)$. Правая часть этого неравенства отрицательна в силу леммы 2.1, поэтому $\psi_p''(x) < 0$.

Доказательство завершено.

Теорема 2.1. Пусть $p > 0$. Зададим функцию $F_p: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$F_p(x) = \frac{S_p(x)}{x^p} + \log_2 x, \quad x > 0. \quad (2.2)$$

Тогда верны следующие три утверждения.

1. Функция $F_p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_p(2x) = F_p(x) \quad \text{при любом } x \in (0; 1/2]. \quad (2.3)$$

2. Если $0 < p < 1$, то

2а. глобальный минимум функции $F_p(x)$ на полуинтервале $(0; 1]$ равен нулю и достигается только в точках вида

$$t_n = 1/2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

2б. глобальный максимум функции $F_p(x)$ на полуинтервале $(0; 1]$ равен величине $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$ и достигается только в точках вида

$$x_n = 1/(3 \cdot 2^n), \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

2в. при всех $x \in (0; 1]$ выполняется соотношение

$$x^p \log_2 \frac{1}{x} = -x^p \log_2 x \leq S_p(x) \leq \psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x), \quad (2.6)$$

в котором левое неравенство превращается в равенство только в точках вида (2.4), а правое — только в точках вида (2.5).

Доказательство.

1. В силу равенства (2.2) имеем:

$$F_p(2x) = \frac{S_p(2x)}{2^p x^p} + 1 + \log_2 x, \quad x > 0. \quad (2.7)$$

Т. к. $S_0(x) = x$ при $x \in (0; 1/2]$, то, подставляя в формулу (2.7) равенство (8) из [3], получаем доказываемое равенство (2.3):

$$F_p(2x) = \frac{2^p(S_p(x) - x^p)}{2^p x^p} + 1 + \log_2 x = F_p(x).$$

2а. Сначала докажем, что $\min_{x \in (0; 1]} F_p(x) = 0$. Так как $F_p(1) = 0$, то достаточно доказать, что $F_p(x) \geq 0$ при всех $x \in (0; 1]$. Сначала докажем это лишь при $x \in [1/2; 1]$. Из равенства (1.1), определяющего функцию S_p , вытекает оценка $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{np} \geq S_0^p(x) + S_0^p(2x)/2^p$. Из нее следует соотношение

$$F_p(x) = \frac{S_p(x)}{x^p} + \log_2 x \geq \left(\frac{S_0(x)}{x}\right)^p + \left(\frac{S_0(2x)}{2x}\right)^p + \log_2 x. \quad (2.8)$$

Далее, т. к. $0 \leq S_0(x) = \rho(x, \mathbb{Z}) \leq x$, то $0 \leq S_0(x)/x \leq 1$. Аналогично имеем: $0 \leq S_0(2x)/(2x) \leq 1$. С учетом этого при $p \in (0; 1]$ из (2.8) следует оценка

$$F_p(x) \geq \frac{S_0(x)}{x} + \frac{S_0(2x)}{2x} + \log_2 x.$$

Отсюда, по лемме 2.2, при всех $x \in [1/2; 1]$ вытекает неравенство $F_p(x) \geq 0$, в котором равенство достигается только в точках $x = 1/2$ и $x = 1$.

Поскольку $F_p(x/2) = F_p(x)$ при всех $x \in (0; 1]$ в силу (2.3), то неравенство $F_p(x) \geq 0$ верно при всех $x \in (0; 1]$, причем равенство в нём достигается только в точках вида $x = t_n = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

26. Поскольку $S_p(1/3) = 2^p/(3^p(2^p - 1))$ в силу леммы 1 из работы [3], то верно равенство $F_p(1/3) = S_p(1/3)/(1/3)^p + \log_2(1/3) = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3 = \Phi_p$. Поэтому нам достаточно доказать, что $F_p(x) \leq \Phi_p$ при всех $x \in (0; 1]$. Сначала докажем это только при $x \in [1/3; 2/3]$. Так как $S_p(x) \leq S_p(1/3)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ по теореме 5 из [3], то при любом $x \in [1/3; 2/3]$ верно соотношение

$$\begin{aligned} F_p(x) - \Phi_p &= \frac{S_p(x)}{x^p} - (\Phi_p - \log_2 x) \leq \frac{S_p(1/3) - x^p(\Phi_p - \log_2 x)}{x^p} = \\ &= \frac{S_p(1/3) - \psi_p(x)}{x^p}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$. Проверим, что $\psi_p(1/3) = S_p(1/3) = \psi_p(2/3)$:

$$\begin{aligned} \psi_p\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^p \left(\Phi_p - \log_2 \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^p \left(\left(\frac{2^p}{2^p - 1} - \log_2 3\right) - 1 + \log_2 3\right) = \\ &= \frac{2^p}{3^p(2^p - 1)} = S_p\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^p \left(\Phi_p - \log_2 \frac{1}{3}\right) = \psi_p\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, согласно лемме 2.3 функция $\psi_p(x)$ строго вогнута на отрезке $[1/3, 2/3]$. Отсюда вытекает соотношение $\psi_p(x) > \psi_p(1/3) = S_p(1/3)$ при всех $x \in (1/3; 2/3)$. Тогда из формулы (2.9) при любом $x \in (1/3; 2/3)$ следует оценка $F_p(x) - \Phi_p < 0$. Итак, $F_p(x) \leq \Phi_p$ при всех $x \in [1/3; 2/3]$, причем равенство достигается лишь в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

Поскольку $F_p(x/2) = F_p(x)$ при $x \in (0; 1]$ в силу (2.3), то неравенство $F_p(x) \leq \Phi_p$ верно при всех $x \in (0; 1]$, причем равенство в нём достигается только в точках вида $x = x_n = 1/(3 \cdot 2^n)$, где $n = -1, 0, 1, 2, \dots$

3. Последнее утверждение данной теоремы, в том числе соотношение (2.6), вытекает из формулы (2.2) и доказанного утверждения пункта 2.

Доказательство завершено.

Иллюстрация 2. В качестве иллюстрации к теореме 2.1 на Рис. 2.1 для случая $p = 0.8$ представлены графики $y = S_p(x)$ (синей линией), а также $y = \varphi_p(x) = -x^p \log_2 x$ (красной линией) и $y = \psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$ (зелёной линией).

З а м е ч а н и е 2.1. 1) Из пункта 2 доказанной теоремы 2.1 следует, что $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3 > 0$ при всех $0 < p < 1$.

2) Вычисления показывают, что функция $\varphi_p(x) = -x^p \log_2 x$ является вогнутой на всем промежутке $(0; 1]$ только в случае $p \in [1/2; 1]$.

3. Логарифмическая гёльдеровость степенных функций Такаги

В этом параграфе мы доказываем (теорема 3.2), что любая степенная функция Такаги S_p с параметром $p \in (0; 1]$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера (см. определение 3.2), из которого вытекает «обычное» условие Гёльдера (предложение 3.1).

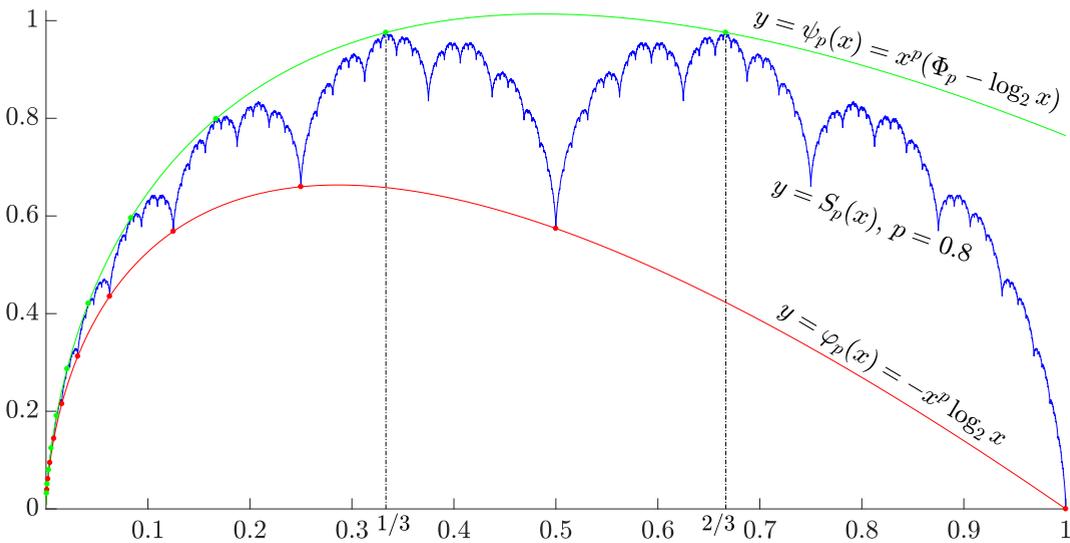


Рис. 2.1. Графики $y = S_p(x)$, $y = \varphi_p(x)$ и $y = \psi_p(x)$ при $p = 0,8$

Fig. 2.1. Graphs $y = S_p(x)$, $y = \varphi_p(x)$ and $y = \psi_p(x)$ for $p = 0,8$

О п р е д е л е н и е 3.1. Говорят, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $p > 0$ и константой $C \geq 0$, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^p$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера с показателем $p > 0$ и константой $C \geq 0$, если для любых различных чисел $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $|x - y| \leq 1/3$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|}. \tag{3.1}$$

З а м е ч а н и е 3.1. В формуле (3.1) у логарифма взято именно основание 3 для того, чтобы упростить формулировку пункта 2 теоремы (3.2).

Установим связь логарифмического и «обычного» условий Гёльдера.

П р е д л о ж е н и е 3.1. Если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера с показателем $p > 0$ и константой $C \geq 0$, то для любого $q \in (0; p)$ функция f удовлетворяет условию Гёльдера (в смысле определения 3.1) с показателем q и некоторой константой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q \in (0; p)$ и $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Сначала рассмотрим случай $0 < |x - y| \leq 1/3$. Известно, что при некотором $A_q > 0$ для любого $t \geq 3$ верна оценка $\log_3 t \leq A_q t^{p-q}$. Подставляя в нее $t = 1/|x - y| \geq 3$, получим неравенство $\log_3(1/|x - y|) \leq A_q/|x - y|^{p-q}$. Из него в рассматриваемом случае получаем условие Гёльдера с показателем q и константой $A_q \cdot C$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|} \leq C|x - y|^p \cdot \frac{A_q}{|x - y|^{p-q}} = A_q \cdot C \cdot |x - y|^q.$$

2. Теперь рассмотрим случай $|x - y| > 1/3$. При этом $3^q|x - y|^q > 1$. Поскольку функция f ограничена, то существует такая константа $M \geq 0$, что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, в этом случае мы приходим к условию Гёльдера с показателем q и константой $2 \cdot 3^q \cdot M$:

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M \leq 2M \cdot 3^q|x - y|^q = 2 \cdot 3^q \cdot M \cdot |x - y|^q.$$

3. Из пунктов 1 и 2 доказательства вытекает, что f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем q и константой $K_q = \max(A_q \cdot C, 2 \cdot 3^q \cdot M)$.

Доказательство завершено.

Следующая теорема, нужная для доказательства теоремы 3.2, представляет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

Теорема 3.1. *Для любых чисел $p \in (0; 1]$ и $x, y \in \mathbb{R}$ верно неравенство*

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leq S_p(x - y). \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $S_0(x) \geq S_0(y)$. Имеем $S_0(t) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |t - q|$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $|x - q| \leq |x - y| + |y - q|$ для любого $q \in \mathbb{Z}$, то, переходя здесь к инфимуму по q , получим: $S_0(x) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q| \leq |x - y| + \inf_{q \in \mathbb{Z}} |y - q| = |x - y| + S_0(y)$. Отсюда, т. к. $S_0(x) \geq S_0(y)$, следует неравенство $|S_0(x) - S_0(y)| \leq |x - y|$. Тогда в силу периодичности функции S_0 для любого $q \in \mathbb{Z}$ получаем соотношение $|S_0(x) - S_0(y)| = |S_0(x - q) - S_0(y)| \leq |(x - y) - q|$. Снова переходя здесь к инфимуму по q , получаем неравенство

$$|S_0(x) - S_0(y)| \leq S_0(x - y). \quad (3.3)$$

Далее воспользуемся известным неравенством $|a^p - b^p| \leq |a - b|^p$, верным для любых $a \geq 0, b \geq 0$ и $p \in (0; 1]$. Из него, взяв $a = S_0(x)$, $b = S_0(y)$ и учитывая формулу (3.3), находим:

$$|S_0^p(x) - S_0^p(y)| \leq |S_0(x) - S_0(y)|^p \leq S_0^p(x - y) \leq |x - y|^p. \quad (3.4)$$

Отсюда и из равенства (1.1) вытекает оценка (3.2):

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|S_0^p(2^n x) - S_0^p(2^n y)|}{2^{np}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n(x - y))}{2^{np}} = S_p(x - y).$$

Доказательство завершено.

Теорема 3.2. *Пусть $p \in (0; 1]$. Тогда верны следующие два утверждения.*

1. *При любых $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $0 < |x - y| \leq 1$, верно неравенство*

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leq |x - y|^p \left(\Phi_p + \log_2 \frac{1}{|x - y|} \right), \quad \text{где } \Phi_p = \frac{2^p}{2^p - 1} - \log_2 3. \quad (3.5)$$

2. *Функция S_p удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера (3.1) с показателем p и константой $C = 2^p/(2^p - 1)$, т. е. при всех $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $0 < |x - y| \leq 1/3$, выполняется неравенство*

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leq \frac{2^p}{2^p - 1} \cdot |x - y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|}. \quad (3.6)$$

Доказательство.

1. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $0 < |x - y| \leq 1$, неравенство (3.5) следует из оценки (3.2) в теореме 3.1 и из неравенства (2.6) в пункте 2в теоремы 2.1.

2. Для доказательства оценки (3.6), перепишем (3.5) в следующем виде:

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leq |x - y|^p \left(\frac{2^p}{2^p - 1} - \log_2 3 + \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|} \right).$$

Отсюда, учитывая, что $1 \leq \log_3(1/|x - y|)$ при $0 < |x - y| \geq 1/3$, получаем неравенство (3.6).

Доказательство завершено.

Замечание 3.2. 1. Из пункта 2в теоремы 2.1 следует, что константу Φ_p в оценке (3.5) нельзя заменить на меньшую.

2. Константу $C = 2^p/(2^p - 1)$ в неравенстве (3.6) также нельзя уменьшить, поскольку при $x = 1/3$ и $y = 0$ оно превращается в равенство.

3. Обзор результатов, связанных с теоремой (3.2), для случая $p = 1$, можно найти в [1, с. 10–12].

Из теоремы 3.2 в силу теоремы 1 из работы [3] и предложения 3.1 вытекает следующий факт, доказанный для частного случая $p = 1$ в работе [20].

Следствие 3.1. При каждом $p \in (0; 1]$ и каждом $q \in (0; p)$ функция S_p удовлетворяет условию Гёльдера с показателем q и некоторой неотрицательной константой.

4. О локальных экстремумах функций S_p при $p \in (0; 1)$

В данном параграфе мы исследуем поведение функций S_p в окрестности точки глобального максимума $x = 1/3$ (теорема 4.1), а также доказываем наличие бесконечной производной в некоторых точках и исследуем локальные экстремумы этих функций (теорема 4.2).

Напомним, прежде всего, стандартные определения левой и правой производной функции в точке.

Определение 4.1. Правой производной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется величина $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$, в том случае, когда этот предел существует (конечный или бесконечный). Аналогично, левая производная функции f в точке x_0 определяется равенством $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} (f(x_0) - f(x_0 - h))/h$.

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 4.1. Пусть $p \in (0; 1)$ и функция $f(t) = 2^p + 1 - (2 + t)^p - (1 - t)^p$ задана на отрезке $[0; 1]$. Тогда для любого $t \in [0; 1]$ верно двойное неравенство

$$p(1 - 2^{p-1})t \leq f(t) \leq (2^p + 1 - 3^p)t.$$

Доказательство. Имеем: $f'(t) = p((1 - t)^{p-1} - (2 + t)^{p-1})$, следовательно $f'(0) = p(1 - 2^{p-1}) > 0$. Кроме того, $f''(t) = p(1 - p)((2 + t)^{p-2} + (1 - t)^{p-2})$. Поскольку $f''(t) > 0$ при любом $t \in [0; 1)$, то f выпукла на $[0; 1]$. Поэтому при $t \in [0; 1]$ верны оценки $f(t) \geq f(0) + f'(0)t = p(1 - 2^{p-1})t$ и $f(t) \leq f(0) + (f(1) - f(0))t = (2^p + 1 - 3^p)t$. Доказательство завершено.

Л е м м а 4.2. Пусть $p \in (0; 1)$. Тогда при любых $h \in (0; 1/12)$ верна оценка

$$\frac{p(1-2^{p-1})2^{p-1}}{2^{1-p}+1}h^p \leq S_p(1/3) - S_p(1/3+h) \leq \left(\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}} + \frac{4^p}{2^p-1} \right) h^p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in (0; 1/6)$. Тогда можно выбрать натуральное число n так, чтобы выполнялись неравенства $4^n h < 2/3$ и $4^{n+1} h \geq 2/3$. Поэтому в силу функционального уравнения (6) из теоремы 4 работы [3] при $m = 2n$ получаем:

$$S_p(1/3) - S_p(1/3+h) = \sigma_{p,n}(h) + \frac{S_p(2^{2n}/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h)}{2^{2np}}, \quad (4.1)$$

где $\sigma_{p,n}(h) = \sum_{k=0}^{2n-1} (S_0^p(2^k/3) - S_0^p(2^k/3 + 2^k h))/2^{kp}$. Сгруппируем слагаемые в этой сумме попарно:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,n}(h) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{S_0^p(2^{2i}/3) - S_0^p(2^{2i}/3 + 2^{2i}h)}{2^{2ip}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_0^p(2^{2i+1}/3) - S_0^p(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h)}{2^{(2i+1)p}} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку функция S_0 периодична с периодом 1, то выполняются следующие два равенства: $S_0(2^{2i}/3 + 2^{2i}h) = S_0(\{2^{2i}/3\} + 2^{2i}h) = S_0(1/3 + 2^{2i}h)$, а также, аналогично, $S_0(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h) = S_0(\{2^{2i+1}/3\} + 2^{2i+1}h) = S_0(2/3 + 2^{2i+1}h)$. Так как $1/3 + 2^{2i}h \in [0; 1/2]$ и $2/3 + 2^{2i+1}h \in [1/2; 1]$, то в силу равенства (4) из [3] имеем: $S_0(2^{2i}/3 + 2^{2i}h) = 1/3 + 2^{2i}h$ и $S_0(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h) = 1/3 - 2^{2i+1}h$. Подставляя эти выражения в формулу (4.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,n}(h) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(1/3)^p - (1/3 + 2^{2i}h)^p}{2^{2ip}} + \frac{(1/3)^p - (1/3 - 2^{2i+1}h)^p}{2^{(2i+1)p}} \right) = \\ &= \frac{1}{6^p} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^p - (2 + 3 \cdot 2^{2i}h)^p + 1 - (1 - 3 \cdot 2^{2i+1}h)^p}{2^{2ip}} = \frac{1}{6^p} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(3 \cdot 2^{2i+1}h)}{2^{2ip}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $f(t) = 2^p + 1 - (2+t)^p - (1-t)^p$. Подставляя формулу (4.3) в формулу (4.1) и учитывая, что $S_p(2^{2n}/3) = S_p(1/3)$, придем к равенству

$$S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) = \frac{1}{6^p} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(3 \cdot 2^{2i+1}h)}{2^{2ip}} + \frac{S_p(1/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h)}{2^{2np}}. \quad (4.4)$$

Поскольку $3 \cdot 2^{2i+1}h \leq 6 \cdot 4^{n-1}h < 1$, то достаточно изучить поведение функции $f(t)$ только на отрезке $[0; 1]$.

1. Для получения оценки снизу применим оценку $f(t) \geq p(1-2^{p-1})t$ из леммы 4.1. Из неё при любом $i = 0, 1, \dots, n-1$ следует неравенство $f(3 \cdot 2^{2i+1}h) \geq 3p(1-2^{p-1}) \cdot 2^{2i+1}h$. Подставляя эти неравенства в (4.4) и учитывая, что $S_p(1/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h) \geq 0$ в силу теоремы 5 из [3], получим:

$$\begin{aligned} S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) &\geq \frac{1}{6^p} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3p(1-2^{p-1}) \cdot 2^{2i+1}h}{2^{2ip}} = \\ &= 3^{1-p} p (2^{1-p} - 1) h \frac{4^{n(1-p)} - 1}{4^{1-p} - 1} = \frac{3^{1-p} p h}{2^{1-p} + 1} (4^{n(1-p)} - 1). \end{aligned}$$

Отсюда, так как $4^n h \geq 1/6$, для любого $h \in (0, 1/6)$ находим:

$$S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) \geq \frac{3^{1-p}ph}{2^{1-p} + 1}((6h)^{p-1} - 1) = \frac{p2^{p-1}h^p}{2^{1-p} + 1}(1 - (6h)^{1-p}).$$

Если же $h \in (0; 1/12)$, то $(6h)^{1-p} < 2^{p-1}$, поэтому верно неравенство

$$S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) \geq \frac{p \cdot 2^{p-1}(1 - 2^{p-1})}{2^{1-p} + 1} h^p.$$

2) Для получения оценки сверху применим второе неравенство из леммы 4.1, из которого следует оценка $f(t) \leq (2^p + 1 - 3^p)t$ при всех $t \in [0; 1]$. Отсюда для любых $i = 0, 1, \dots, n - 1$ вытекает, что $f(3 \cdot 2^{2i+1}h) \leq 3(2^p + 1 - 3^p) \cdot 2^{2i+1}h$. Подставляя эти неравенства в (4.4), учитывая неотрицательность S_p и лемму 1 из [3], получаем:

$$\begin{aligned} S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) &\leq \frac{1}{6^p} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3(2^p + 1 - 3^p) \cdot 2^{2i+1}h}{2^{2ip}} + \frac{S_p(1/3)}{2^{2np}} = \\ &= 6^{1-p}(2^p + 1 - 3^p)h \frac{4^{n(1-p)} - 1}{4^{1-p} - 1} + \frac{2^p}{3^p(2^p - 1)4^{np}} \leq \\ &\leq 6^{1-p}(2^p + 1 - 3^p) \frac{4^{n(1-p)}h}{4^{1-p} - 1} + \frac{2^p}{3^p(2^p - 1)4^{np}}. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $4^n h < 2/3$ и $4^n h \geq 1/6$, а значит $4^{n(1-p)}h < (2/3)^{1-p}h^p$ и $1/4^{np} \leq (6h)^p$, получаем нужную оценку сверху:

$$\begin{aligned} S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) &\leq \frac{6^{1-p}(2^p + 1 - 3^p)}{4^{1-p} - 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-p} h^p + \frac{2^p(6h)^p}{3^p(2^p - 1)} = \\ &= h^p \left(\frac{2^p + 1 - 3^p}{1 - 4^{p-1}} + \frac{4^p}{2^p - 1} \right). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

В следующей лемме аналогичная оценка даётся для приращения слева.

Л е м м а 4.3. Пусть $p \in (0; 1)$. Тогда при любых $h \in (0; 1/3)$ верна оценка

$$\frac{2^{p-1}(1 - 2^{p-1})p}{2^{1-p} + 1} h^p \leq S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} - h\right) \leq \left(\frac{2^p + 1 - 3^p}{(1 - 4^{p-1})2^p} + \frac{2^{p+1} - 1}{2^p - 1} \right) h^p.$$

Доказательство. В силу функционального уравнения (7) из теоремы 4 работы [3] и наличия у функции S_p свойства симметрии (5) из теоремы 1 той же работы [3], для любых $h \in (0; 1/3)$ имеем:

$$S_p\left(\frac{1}{3} - h\right) = S_0^p\left(\frac{1}{3} - h\right) + \frac{S_p(2/3 - 2h)}{2^p} = S_0^p\left(\frac{1}{3} - h\right) + \frac{S_p(1/3 + 2h)}{2^p}.$$

При $h = 0$ это дает нам равенство $S_p(1/3) = S_0^p(1/3) + S_p(1/3)/2^p$. Вычитая из него предыдущее равенство, находим:

$$S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} - h\right) = S_0^p\left(\frac{1}{3}\right) - S_0^p\left(\frac{1}{3} - h\right) + \frac{S_p(1/3) - S_p(1/3 + 2h)}{2^p}. \quad (4.5)$$

Отсюда, пользуясь неотрицательностью функции $S_0^p(1/3) - S_0^p(1/3 - h)$ при $h \in (0, 1/12)$ и леммой 4.2, получаем оценку снизу:

$$S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} - h\right) \geq \frac{2^{p-1}(1 - 2^{p-1})p}{(2^{1-p} + 1)2^p} (2h)^p = \frac{2^{p-1}(1 - 2^{p-1})p}{2^{1-p} + 1} h^p.$$

С помощью той же формулы (4.5), применяя неравенство (3.4) из теоремы 3.1 и еще раз лемму 4.2, получаем:

$$\begin{aligned} S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} - h\right) &\leq \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - h\right)\right)^p + \left(\frac{2^p + 1 - 3^p}{1 - 4^{p-1}} + \frac{4^p}{2^p - 1}\right) h^p = \\ &= \left(\frac{2^p + 1 - 3^p}{1 - 4^{p-1}} + \frac{4^p + 2^p - 1}{2^p - 1}\right) h^p. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Результаты лемм 4.2 и 4.3 можно объединить в следующую теорему.

Теорема 4.1. Для любых $p \in (0; 1)$ и $h \in (-1/12, 1/12)$ верно неравенство

$$L_p |h|^p \leq S_p\left(\frac{1}{3}\right) - S_p\left(\frac{1}{3} + h\right) \leq R_p |h|^p, \quad (4.6)$$

$$\text{где } L_p = \frac{2^{p-1}(1 - 2^{p-1})}{2^{1-p} + 1} \quad \text{и} \quad R_p = \frac{2^p + 1 - 3^p}{1 - 4^{p-1}} + \frac{4^p + 2^p - 1}{2^p - 1}.$$

Замечание 4.1. Как видно из доказанной теоремы 4.1, в окрестности пика в точке глобального максимума $x = 1/3$ приращение $S_p(1/3 + h) - S_p(1/3)$ ведет себя как $C|h|^p$. Это отличается от его поведения $C|x|^p \log_2(1/|x|)$ в общем случае (см. теорему 3.2 и пункт 2в теоремы 2.1).

В следующей теореме мы применяем полученные результаты к изучению локальных экстремумов функций S_p .

Теорема 4.2. Пусть $p \in (0; 1)$. Тогда верны следующие два утверждения:

1. В двоично-рациональных точках, то есть точках вида $x = q/2^n$, где $q \in \mathbb{Z}$ и $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, функция $S_p(x)$ имеет левую производную $(S_p)'_-(q/2^n)$, равную $-\infty$, и правую производную $(S_p)'_+(q/2^n)$, равную $+\infty$. Любая точка такого вида является точкой строгого локального минимума функции S_p на \mathbb{R} , и других точек локального минимума у S_p нет.

2. В точках вида $x = q/(3 \cdot 2^n)$, где q — целое число, не делящееся на 3, и $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, функция $S_p(x)$ имеет левую производную $(S_p)'_-(q/(3 \cdot 2^n))$, равную $+\infty$, и правую производную $(S_p)'_+(q/(3 \cdot 2^n))$, равную $-\infty$. Любая такая точка является точкой строгого локального максимума S_p на \mathbb{R} .

Доказательство.

1. а) Сначала докажем, что $(S_p)'_+(0) = +\infty$. Действительно, в силу соотношения (2.6) и равенства $S_p(0) = 0$ имеем:

$$(S_p)'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{S_p(x) - S_p(0)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^p \log_2(1/x)}{x} = +\infty.$$

б) Пусть $x \in \mathbb{Z}$. Тогда, в силу периодичности функции S_p и доказанного в предыдущем пункте, имеем: $(S_p)'_+(x) = (S_p)'_+(0) = +\infty$.

в) Пусть число $x = q/2^n$ — нецелое. Тогда, сокращая эту дробь при необходимости, можно считать, что число q нечетно. Докажем индукцией по $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, что $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ для любого нечетного q . При $n = 0$ в силу доказанного в пункте б) имеем: $(S_p)'_+(q/2^n) = (S_p)'_+(q) = +\infty$.

Теперь выполним шаг индукции. Дифференцируя функциональное уравнение (7) из теоремы 4 работы [3] в точке $x = q/2^{n+1}$, получим:

$$(S_p)'_+\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right) = pS_0^{p-1}\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right) \cdot (S_0)'_+\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right) + 2^{1-p}(S_p)'_+\left(\frac{q}{2^n}\right). \quad (4.7)$$

Число $q/2^{n+1}$ — нецелое, то величина $(S_0)'_+(q/2^{n+1})$ конечна. В то же время, $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ по предположению индукции. Отсюда и из (4.7) следует, что $(S_p)'_+(q/2^{n+1}) = +\infty$. Шаг индукции выполнен.

г) Тогда, т. к. S_p четна, имеем: $(S_p)'_-(q/2^n) = -(S_p)'_+(-q/2^n) = -\infty$.

д) Все точки вида $q/2^n$ являются точками строгого локального минимума для S_p , поскольку из равенств $(S_p)'_-(q/2^n) = -\infty$ и $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ следует, что при некотором $\delta > 0$ для любых $h \in (0, \delta)$ выполнены неравенства $S_p(q/2^n) - S_p(q/2^n - h) < 0$ и $S_p(q/2^n) - S_p(q/2^n + h) < 0$.

е) Докажем, что если точка $x_0 \in \mathbb{R}$ не представима в виде дроби $q/2^n$, где $q \in \mathbb{Z}$ и $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, то она не будет точкой строгого локального минимума функции S_p . Для этого достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $r_0 \in \mathbb{R}$, что $|r_0 - x_0| < \varepsilon$ и $S_p(x_0) > S_p(r_0)$. Сначала по $\varepsilon > 0$ подберём $m \in \mathbb{N}$ так, что $1/2^m < \varepsilon$. Затем найдем такое целое k , чтобы выполнялось неравенство $k/2^m < x_0 < (k+1)/2^m$. Далее положим $\alpha = 2^m x_0 - k$. Тогда $0 < \alpha < 1$, причем $x_0 = (1-\alpha) \cdot k/2^m + \alpha \cdot (k+1)/2^m$. Поскольку при любом $0 < p < 1$ функция $S_0^p(x)$ строго вогнута на отрезках длины 1 с целыми концами, то при любых $i = 0, 1, \dots, m-1$ будет выполняться неравенство $S_0^p(2^i x_0) > (1-\alpha) \cdot S_0^p(2^i k/2^m) + \alpha \cdot S_0^p(2^i(k+1)/2^m)$. Из него следует оценка

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}} > (1-\alpha) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}} + \alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}}. \quad (4.8)$$

Далее, т. к. $S_0(2^i x_0) > 0$ и $S_0(2^i k/2^m) = S_0(2^i(k+1)/2^m) = 0$ при любом значении $i = m, m+1, \dots$, то верны следующие три соотношения:

$$S_p(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}} > \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}},$$

$$S_p\left(\frac{k}{2^m}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}},$$

$$S_p\left(\frac{k+1}{2^m}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}}.$$

Эти три формулы с учетом (4.8) позволяют получить оценку

$$S_p(x_0) > (1-\alpha)S_p\left(\frac{k}{2^m}\right) + \alpha S_p\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \geq \min\left(S_p\left(\frac{k}{2^m}\right), S_p\left(\frac{k+1}{2^m}\right)\right).$$

Следовательно, можно выбрать одно из чисел $k/2^m, (k+1)/2^m$ в качестве r_0 так, чтобы выполнялось неравенство $S_p(x_0) > S_p(r_0)$. При этом будем иметь: $|r_0 - x_0| < 1/2^m < \varepsilon$. Таким образом, получен требуемый результат.

2. Доказательство пункта 2) теоремы аналогично доказательству пункта 1). Поэтому ограничимся здесь лишь кратким описанием его этапов.

а) Сначала, применяя неравенство (4.6) из теоремы 4.1, показываем, что $(S_p)'_{-}(1/3) = +\infty$ и $(S_p)'_{+}(1/3) = -\infty$.

б) Затем в силу периодичности и свойства симметрии (5) из теоремы 1 работы [3] функции S_p , получаем равенство $(S_p)'_{\pm}(q+1/3) = (S_p)'_{\pm}(q+2/3) = \mp\infty$ для всех $q \in \mathbb{Z}$.

в) С помощью функционального уравнения $S_p(x) = S_0^p(x) + S_p(2x)/2^p$ далее по индукции показываем, что $(S_p)'_{\pm}(q/(3 \cdot 2^n)) = \mp\infty$ для любого целого q , не делящегося на 3.

г) Отсюда делаем вывод, что при указанных q точки вида $q/(3 \cdot 2^n)$ являются точками строгого локального максимума функции $S_p(x)$.

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 4.2. 1. Из только что доказанной теоремы вытекает, что как множество всех точек строгого локального минимума, так и множество всех точек строгого локального максимума функции S_p является всюду плотным в \mathbb{R} .

2. В частном случае $p = 1$ Круппель нашёл множество точек локального минимума функции S_p на \mathbb{R} в [21, с. 48] и исследовал её локальные максимумы в [21, с. 50].

5. Направления дальнейших исследований

1. Было бы интересно выяснить, имеют ли функции $S_p(x)$ при $p \in (0; 1)$ другие точки локального максимума на \mathbb{R} , кроме точек вида $x = q/(3 \cdot 2^n)$, где q — целое число, не делящееся на 3, и n — целое неотрицательное (см. выше теорему 4.2).
2. В одной из следующих работ авторы планируют также исследовать множество крайних подабсцисс функций $S_p(x)$ (см. [13–14]).
3. В дальнейшем авторы предполагают, кроме того, провести исследование, аналогичное проведенному в настоящей работе, как для функций Хази–Палеса [22], задаваемых на \mathbb{R} равенством $H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^n$, так и для более широкого класса функций вида $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{nq}$, где $p > 0$ и $q > 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России, соглашение № 075-15-2022-1101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Anal. Exchange. 2011/12. Vol. 37, No. 1. pp. 1–54. DOI: <https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001>
2. Lagarias J.C. The Takagi function and its properties // RIMS Kokyuroku bessatsu B34: Functions and Number Theory and Their Probabilistic Aspects. Kyoto. 2012. Vol. 34. pp. 153–189.

3. Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А. О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 22–36. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36>
4. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975. 248 с.
5. Огороков В. А., Сандракова Е. В. Фракталы в фундаментальной физике. Фрактальные свойства множественного образования частиц и топология выборки. М.: МИФИ, 2009. 460 с.
6. Thim J. Continuous nowhere differentiable functions : Master's thesis. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, 2003. 98 p.
7. Heurteaux Y. Weierstrass functions in Zygmund's class // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 133. pp. 2711–2720.
8. Fujita Y., Hamamuki N., Siconolfi A., Yamaguchi N. A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate // Acta Mathematica Hungarica. 2020. Vol. 160. pp. 343–359. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3>
9. Posey E. E., Vaughan J. E. Extrema and nowhere differentiable functions // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1986. Vol. 16. pp. 661–668. DOI: <https://doi.org/10.1216/RMJ-1986-16-4-661>
10. Kahane J.-P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // Enseignement Math. 1959. Vol. 5. pp. 53–57. DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35474>
11. Banach S. Über die Baire'sche kategorie gewisser funktionenmengen // Studia Math. 1931. Vol. 3, No 3. Pp. 174–179. DOI: <https://doi.org/10.4064/sm-3-1-174-179>
12. Allaart P. C., Kawamura K. Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 2006. Vol. 140, No 2. pp. 269–295. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004105008984>
13. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 483–500. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190402>
14. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Деланжа, оценки цифровых сумм и вогнутые функции // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 3. С. 32–70. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9143>
15. Denjoy A., Felix L., Montel P. Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme // Enseignement Math. 1957. Vol. 3. pp. 1–18.
16. Makogin V., Mishura Yu. Fractional integrals, derivatives and integral equations with weighted Takagi–Landsberg functions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2020. Vol. 25, no. 6. pp. 1079–1106. DOI: <https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.20566>

17. Yu H. Weak tangent and level sets of Takagi functions // Monatshefte für Mathematik. 2020. Vol. 192. pp. 249–264. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-020-01377-9>
18. Han X., Schied A., Zhang Z. A limit theorem for Bernoulli convolutions and the Φ -variation of functions in the Takagi class // J. Theor. Probab. 2022. Vol. 35. pp. 2853–2878. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10959-022-01157-1>
19. Krüppel M. Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums // Rostock. Math. Kolloq. 2008. Vol. 63. pp. 37–54.
20. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the continuity of van der Waerden's function in the Hölder sense // Amer. Math. Monthly. 1986. Vol. 93, No 5. pp. 375–376.
21. Krüppel M. On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function // Rostock. Math. Kolloq. 2007. Vol. 62. pp. 41–59.
22. Házy A., Páles Zs. On approximately t -convex functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 66, No 3–4. pp. 489–501.

*Поступила 01.10.2023; доработана после рецензирования 07.11.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. P. C. Allaart, K. Kawamura, “The Takagi function: a survey”, *Real Anal. Exchange.*, **37**:1 (2011/12), 1–54. DOI: <https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001>
2. J. C. Lagarias, “The Takagi function and its properties”, *RIMS Kokyuroku bessatsu B34: Functions and number theory and their probabilistic aspects*, **34** (2012), 153–189.
3. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov, “On global extrema of power Takagi functions”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:2 (2023), 22–36 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36>
4. F. A. Medvedev, *Essays on the history of the theory of functions of a real variable*, M. Nauka, 1975 (In Russ.), 248 p.
5. V.A. Okorokov, E.V. Sandrakova, *Fractals in fundamental physics. Fractal properties of multiple particle formation and sampling topology*, M. МЭФІ, 2009 (In Russ.), 460 p.
6. J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions. Master's thesis*, Luleå, 2003, 98 p.
7. Y. Heurteaux, “Weierstrass functions in Zygmund's class”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2005), 2711–2720.
8. Y. Fujita, N. Hamamuki, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, “A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate”, *Acta Mathematica Hungarica.*, **160** (2020), 343–359. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3>

9. E. E. Posey, J. E. Vaughan, “Extrema and nowhere differentiable functions”, *Rocky Mountain Journal of mathematics.*, **16** (1986), 661–668. DOI: <https://doi.org/10.1216/RMJ-1986-16-4-661>
10. J.-P. Kahane, “Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée”, *Enseignement Math.*, **5** (1959), 53–57.
11. S. Banach, “Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen”, *Studia Math.*, **3**:3 (1931), 174–179. DOI: <https://doi.org/10.4064/sm-3-1-174-179>
12. P. C. Allaart, K. Kawamura, “Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions”, *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, **140**:2 (2006), 269–295. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004105008984>
13. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 483–500 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190402>
14. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Global extrema of the Delange function, bounds for digital sums and concave functions”, *Sbornik: Mathematics*, **211**:3 (2020), 336–372. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM9143>
15. A. Denjoy, L. Felix, P. Montel, “Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme”, *Enseignement Math.*, **3** (1957), 1–18. DOI: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001%3A1957%3A3#102>
16. V. Makogin, Yu. Mishura, “Fractional integrals, derivatives and integral equations with weighted Takagi–Landsberg functions”, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **25**:6 (2020), 1079–1106. DOI: <https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.20566>
17. H. Yu, “Weak tangent and level sets of Takagi functions”, *Monatshefte für Mathematik*, **1192**:6 (2020), 249–264. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-020-01377-9>
18. X. Han, A. Schied, Z. Zhang, “A limit theorem for Bernoulli convolutions and the Φ -variation of functions in the Takagi class”, *J. Theor. Probab.*, **35** (2022), 2853–2878. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10959-022-01157-1>
19. M. Krüppel, “Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums”, *Rostock. Math. Kolloq.*, **63** (2008), 37–54.
20. A. Shidfar, K. Sabetfakhri, “On the continuity of van der Waerden's function in the Hölder sense”, *Amer. Math. Monthly*, **93**:5 (1986), 375–376.
21. M. Krüppel, “On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function”, *Rostock. Math. Kolloq.*, **62** (2007), 41–59.
22. A. Hány, Zs. Páles, “On approximately t -convex functions”, *Publ. Math. Debrecen.*, **66**:3–4 (2005), 489–501.

Submitted 01.10.2023; Revised 07.11.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.242-254

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предлагается подход к получению оценки константы Лебега для интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышева первого рода. Двусторонняя оценка этой константы осуществлена с использованием логарифмической производной от гамма-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Выбор узлов интерполирования обусловлен тем, что в этом случае при фиксированном числе узлов Чебышева постоянная Лебега стремится к своему минимальному значению, уменьшая погрешность алгебраического интерполирования и обеспечивая меньшую чувствительность по отношению к ошибкам округления. Выражения для верхней и нижней границ этой постоянной представлены в виде конечных сумм асимптотического знакопередающегося ряда. На основе полученных выражений вычисляются значения этих границ в зависимости от числа узлов интерполяционного процесса и проводится оценка погрешности найденных значений для каждой из границ на основе первого отброшенного слагаемого в конечных суммах асимптотического ряда. Результаты выполненных расчетов представлены в таблицах, в которых приведены отклонения величины константы Лебега от нижней и верхней границ ее оценки, а также погрешности найденных значений в зависимости от числа узлов Чебышева. С использованием численных методов показано, что с увеличением числа этих узлов происходит быстрое сближение значений границ полученной двусторонней оценки для постоянной Лебега. Представленные результаты могут быть использованы в теории интерполяции для оценки нормы оператора, сопоставляющего функции ее интерполяционный полином, и оценки отклонения построенного возмущенного полинома от невозмущенного.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, узлы Чебышева, постоянная Лебега

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 242–254. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.242-254>

Об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

© О. В. Гермидер, В. Н. Попов



MSC2020 35Q20

Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. In this paper an approach to estimation of the Lebesgue constant for the Lagrange interpolation process with nodes in the zeros of Chebyshev polynomials of the first kind is done. Two-sided estimation of this constant is carried out by using the logarithmic derivative of the Euler gamma function and of the Riemann zeta function. The choice of interpolation nodes is due to the fact that with a fixed number of Chebyshev nodes, the Lebesgue constant tends to its minimum value, thus reducing the error of algebraic interpolation and providing less sensitivity to rounding errors. The expressions for the upper and the lower bounds of this constant are represented as finite sums of an asymptotic alternating series. Based on the expressions obtained, these boundaries are calculated depending on the number of nodes of the interpolation process. The error of each of the boundaries' value is estimated based on the first discarded term in the corresponding asymptotic series. The results of the calculations are presented in tables showing deviations of the Lebesgue constant from its lower and upper estimated bounds. Dependence of the values' errors on the number of Chebyshev nodes is depicted in these tables as well. It is numerically shown that with an increase in the number of these nodes, the estimation boundaries rapidly get close to each other. The presented results can be used in the theory of interpolation to estimate the norm of the operator matching a function to its interpolation polynomial and to estimate a deviation of the constructed perturbed polynomial from the unperturbed one.

Keywords: polynomial approximation, Chebyshev nodes, Lebesgue constant

For citation: O. V. Germider, V. N. Popov. Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 242–254. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.242-254>

About the authors:

Oksana Vladimirovna Germider, associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), Ph.D., ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov, Professor, Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

1. Введение

Интерполяция Лагранжа – это классический метод аппроксимации непрерывной на отрезке функции полиномом, значения которого совпадают со значениями интерполируемой функции в некоторых фиксированных точках отрезка, называемых узлами интерполяции [1].

Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f = f(x)$ задана своими значениями f_0, f_1, \dots, f_n в точках x_0, x_1, \dots, x_n . Тогда интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k l_k(x), \quad (1.1)$$

где $l_k(x)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.2)$$

В случае, когда в узлах интерполяции вычислены приближенные значения \tilde{f}_k функции f с погрешностью, не превышающей величины $\delta > 0$: $|f_k - \tilde{f}_k| < \delta$, то отклонение построенного возмущенного полинома $\tilde{p}_n(x)$ от $p_n(x)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n (f_k - \tilde{f}_k) l_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |f_k - \tilde{f}_k| |l_k(x)| \leq \delta \sum_{k=0}^n |l_k(x)| = \\ &= \delta \lambda_n(x) \leq \delta \Lambda_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\lambda_n(x)$ и Λ_n – функция и константа Лебега для заданного множества узлов интерполяции $\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|, \quad (1.4)$$

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \lambda_n(x) = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |l_k(x)|. \quad (1.5)$$

Как отмечено в [2], константа Лебега относится к основным характеристикам интерполяционного процесса. Ее значение показывает, во сколько раз возрастает погрешность вычисления интерполяционного полинома Лагранжа по сравнению с погрешностью вычисления функции. Кроме того оценка сверху для константы Лебега позволяет провести анализ скорости приближения непрерывной функции интерполяционными многочленами [1]. Следует заметить, что Λ_n существенно зависит от взаимного расположения узлов интерполяции и ее поведение с увеличением числа узлов может иметь различный характер [1]–[6].

Обозначим

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (1.6)$$

Учитывая, что $\omega'_{n,x}(x_k) = \prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)$, базис Лагранжа (1.2) для Ω_n можно представить в виде

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_{n,x}(x_k)}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (1.7)$$

соответственно, перепишем выражение для константы Лебега (1.5) как

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n \left| \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)} \right|. \quad (1.8)$$

Для того чтобы равномерная норма полинома $\omega_n(x)$ имела минимальное значение на отрезке $[-1, 1]$, в качестве узлов интерполяции выберем нули полинома Чебышева степени $n + 1$ [1]:

$$x_k = \cos \left(\frac{\pi(2k + 1)}{2(n + 1)} \right), \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.9)$$

Не нарушая общности ограничимся случаем, когда $x \in [-1, 1]$, поскольку

$$u = \frac{b - a}{2}x + \frac{a + b}{2}, \quad u \in [a, b], \quad x \in [-1, 1],$$

В силу единственности существования интерполяционного многочлена Лагранжа на множестве Ω_n и того факта, что коэффициент при x^{n+1} равен 2^n [7], получаем

$$\omega_n(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x). \quad (1.10)$$

Полагая

$$x = \cos t, \quad x_k = \cos t_k, \quad t_k = \frac{\pi(2k + 1)}{2(n + 1)}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (1.11)$$

имеем

$$T_{n+1}(x) = \cos(n + 1)t, \quad T'_{n+1,x}(x_k) = \frac{(n + 1) \sin((n + 1)t_k)}{\sqrt{1 - x_k^2}} = \frac{(-1)^k(n + 1)}{\sin t_k}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.10) с учетом (1.12) в (1.8), получаем

$$\Lambda_n = \max_{t \in [0, \pi]} \sum_{k=0}^n \left| \frac{\cos(n + 1)t \sin t_k}{(n + 1)(\cos t - \cos t_k)} \right|. \quad (1.13)$$

В [1], [8] показано, что функция Лебега

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{\cos(n + 1)t \sin t_k}{(n + 1)(\cos t - \cos t_k)} \right|, \quad (1.14)$$

на отрезке $[0, \pi]$ принимает свое наибольшее значение при $t = 0$. Тогда

$$\Lambda_n = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n \operatorname{ctg} \left(\frac{t_k}{2} \right). \quad (1.15)$$

Вычислению константы Лебега на основе (1.15) и посвящена представленная работа. Выбор нулей полинома Чебышева в качестве узлов интерполяции обусловлен сохранением устойчивости к ошибкам округления приближения интерполяционным полиномом.

2. Вычисление константы Лебега

Разложим функцию $\operatorname{ctg} t$ в ряд Маклорена на $(0, \pi/2)$ [9]

$$\operatorname{ctg} t = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i-1} t^{2i-1}, \quad (2.1)$$

где c_{2i-1} выражаются через числа Бернулли B_{2i} как

$$c_0 = 1, \quad c_{2i-1} = -\frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!}, \quad i \geq 1. \quad (2.2)$$

Для нахождения чисел Бернулли в (2.2) применяем рекуррентную формулу [10]

$$\frac{B_1}{(2i)!} + \sum_{j=0}^i \frac{B_{2j}}{(2(i-j)+1)!(2j)!} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad i \geq 1. \quad (2.3)$$

В результате

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!} t^{2i-1}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.15), получаем

$$\Lambda_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n (2k+1)^{-1} + R_{1,n}, \quad (2.5)$$

$$R_{1,n} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i-1}|B_{2i}|4^{1-i}}{(n+1)^{2i}(2i)!} \sum_{k=0}^n (2k+1)^{2i-1}. \quad (2.6)$$

Оценим первый член ряда (2.5). Обозначим

$$F_{0,n} = \sum_{k=0}^n (2k+1)^{-1}. \quad (2.7)$$

Применяя свойство функции $\Psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx}$ [11]

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \quad (2.8)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, перепишем выражение (2.7) в виде

$$2F_{0,n} = \Psi\left(n+1+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.9)$$

Воспользовавшись формулой [12], для вычисления значения $\Psi(1/2)$

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \cos\left(\frac{2\pi pk}{q}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \ln(2q) - \gamma, \quad (2.10)$$

где $[q/2]$ – целая часть $q/2$, q и p – натуральные числа и $p < q$. Находим значение $\Psi(1/2)$:

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2. \tag{2.11}$$

Учитывая выражение Бине [10]

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \exp(-tx) dt, \tag{2.12}$$

и разложение в ряд Маклорена подынтегральной функции, стоящей в скобках [10]

$$\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^\infty \frac{B_{2i} t^{2i-1}}{(2i)!}, \tag{2.13}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q B_{2i} \frac{1}{ix^{2i}} - \\ - \int_0^\infty \left(\frac{1}{\exp(t) - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{B_{2i} t^{2i-1}}{(2i)!} \right) \exp(-tx) dt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ряд $\sum_{i=1}^\infty B_{2i} x^{-2i} i^{-1}$ является знакочередующимся и асимптотическим, поэтому ограничиваем суммирование на члене ряда с индексом q , за которым последующие начинают неограниченно расти. Найдем q из неравенства

$$\frac{|B_{2(q+1)}| q x^{2q}}{|B_{2q}| (q+1) x^{2(q+1)}} \leq 1. \tag{2.15}$$

Учитывая, что числа Бернулли через дзета-функцию Римана $\zeta(x)$ выражаются как

$$|B_{2i}| = \frac{2\zeta(2i)(2i)!}{(2\pi)^{2i}}, \quad i \geq 1, \tag{2.16}$$

имеем

$$\frac{|B_{2(q+1)}| q x^{2q}}{|B_{2q}| (q+1) x^{2(q+1)}} = \frac{\zeta(2(q+1)) 2q(2q-1) x^{2q}}{(2\pi)^2 \zeta(2q) x^{2(q+1)}}. \tag{2.17}$$

Учитывая, что $\zeta(2(q+1))/\zeta(2q) \leq 1$, при $x = \frac{1}{2} + n + 1$ ($n \geq 1$) получаем

$$\frac{2q(2q-1) \left(\frac{1}{2} + n + 1\right)^{2q}}{(2\pi)^2 \left(\frac{1}{2} + n + 1\right)^{2(q+1)}} \leq 1.$$

Откуда

$$q_n = \left\lceil \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{16\pi^2 \left(\frac{1}{2} + n + 1\right)^2 + 1} \right) \right\rceil, \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует, что значение q_n увеличивается с ростом n .

Поскольку $B_{2i} = (-1)^{i+1}|B_{2i}|$ ($i \geq 1$), а при $n = 1$ значение q_n равно 8, то для любого $x = \frac{1}{2} + n + 1$ ($n \geq 1$) имеем следующую оценку

$$\Psi_{n,0} + \Psi_{n,2m_1-1} \leq \Psi \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right) \leq \Psi_{n,0} + \Psi_{n,2m_1}, \quad 2 \leq 2m_1 \leq q_n, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{n,0} &= -\ln(2) + \ln(3 + 2n) - \frac{1}{3 + 2n}, \\ \Psi_{n,l} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} + n + 1 \right)^{-2i} \frac{B_{2i}}{i}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя (2.11) и (2.19) в (2.9), имеем

$$F_{0,n}^* + \frac{1}{2} \Psi_{n,2m-1} \leq F_{0,n} \leq F_{0,n}^* + \frac{1}{2} \Psi_{n,2m}, \quad (2.21)$$

$$F_{0,n}^* = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(3 + 2n) - \frac{1}{2(3 + 2n)}. \quad (2.22)$$

Для нахождения членов с $i \geq 1$ в (2.6) введем обозначения

$$F_{2i-1,n} = \sum_{k=0}^n (2k+1)^{2i-1}, \quad (2.23)$$

$$\hat{s}_{j,n} = \sum_{k=1}^n k^j, \quad j = 2i - 1. \quad (2.24)$$

Тогда

$$F_{2i-1,n} = \hat{s}_{j,2(n+1)} - 2^j \hat{s}_{j,n+1}. \quad (2.25)$$

Применяя к (2.25) формулу [13]

$$\hat{s}_{j,n-1} = j! \sum_{k=0}^j \frac{B_k n^{j+1-k}}{k!(j+1-k)!}, \quad (2.26)$$

с учетом $B_{2k+1} = 0$ ($k \geq 1$) имеем

$$F_{2i-1,n} = \frac{(2i)! 4^{i-1}}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k} (n+1)^{2i-2k} (2^{1-2k} - 1)}{(2k)!(2i-2k)!}. \quad (2.27)$$

Подставляя (2.23) и (2.27) в (2.6), приходим к следующему выражению для $R_{1,n}$:

$$\begin{aligned} R_{1,n} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i} |B_{2i}|}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k} (2^{1-2k} - 1)}{(n+1)^{2k} (2k)!(2i-2k)!} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i} |B_{2i}|}{i(2i)!} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j} (1 - 2^{1-2j})}{(n+1)^{2j} (2j)!} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}| \pi^{2i} \prod_{q=1}^{2j-1} (2i-q)}{(2i)!}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Интегрируя (2.4) по t и подставляя значение $t = \pi/2$, получаем

$$\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i} |B_{2i}|}{i(2i)!}.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i} |B_{2i}|}{i(2i)!} = 2 \ln \left(\frac{\pi}{2} \right). \tag{2.29}$$

Последовательно дифференцируя (2.4) $2j - 1$ раз по t ($j \geq 1$), находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}| \pi^{2i} \prod_{q=1}^{2j-1} (2i - q)}{(2i)!} &= \\ &= - \left(\operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{2^{2j-1} |B_{2j}|}{j} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} - (2j - 1)!. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Для получения значений производных функции $\operatorname{ctg} t$ в точке $\pi/2$ воспользуемся ее разложением в ряд Фурье

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t - \pi i} + \frac{1}{t + \pi i} \right), \quad 0 < t < \pi. \tag{2.31}$$

Последовательно дифференцируя (2.31) по t , получаем

$$\operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{(1 - 2^{2j}) 2^{2j-1}}{j} |B_{2j}|, \quad j \geq 1. \tag{2.32}$$

Подставляя (2.29) и (2.30) в (2.28) и учитывая (2.32), имеем

$$R_{1,n} = -\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j} (1 - 2^{1-2j})}{j(n+1)^{2j}} \left(\frac{\pi^{2j} (2^{2j} - 2) |B_{2j}|}{(2j)!} - 1 \right). \tag{2.33}$$

Ряд (2.33) является знакочередующимся и асимптотическим. Используя (2.16), восстанавливаем предельное значение j

$$j_n = \left[\frac{1}{4} \left(3 + \sqrt{16\pi^2 (n+1)^2 + 1} \right) \right] - 1. \tag{2.34}$$

Из (2.34) следует, что для $n = 1$ значение j_n равно 6 и увеличивается с ростом n .

Подставляя (2.7) и (2.33) в (2.5) и учитывая (2.20)-(2.22), окончательно приходим к следующей оценке для Λ_n

$$m_n \leq \Lambda_n \leq M_n, \tag{2.35}$$

$$m_n = m_n^* - \frac{2^{4l+2} B_{4l+2}}{\pi(2l+1)(2n+3)^{4l+2}}, \tag{2.36}$$

$$M_n = m_n^* + \frac{B_{4l+2}}{(2l+1)\pi} \left(\frac{(1 - 2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}} \left(\frac{\pi^{4l+2} (2^{4l+2} - 2) |B_{4l+2}|}{(4l+2)!} - 1 \right) \right), \tag{2.37}$$

$$m_n^* = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \left(\frac{4}{\pi} \right) + \ln(3 + 2n) - \frac{1}{3 + 2n} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2l} \frac{B_{2j}}{j} \left(\frac{(1 - 2^{1-2j})}{(n+1)^{2j}} \left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j} - 2)|B_{2j}|}{(2j)!} - 1 \right) - \frac{2^{2j}}{(2n+3)^{2j}} \right), \quad 2l - 1 < j_n. \quad (2.38)$$

3. Анализ полученных результатов

Проведем сравнение двусторонней оценки (2.35) со значениями самой константы Лебега (1.15), а также с аналогичными результатами, представленными в [3], [5] и [14].

Согласно [5] константа Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева имеет следующую оценку [3], [5]:

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \left(\frac{8}{\pi} \right) + \ln(1 + n) \right) + \alpha_n, \quad (3.1)$$

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{72(n+1)^2}. \quad (3.2)$$

В [14] получено асимптотическое представление Λ_n :

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \left(\frac{8}{\pi} \right) + \ln(1 + n) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{(n+1)^{2i}}, \quad (3.3)$$

где коэффициенты A_i находятся как [3], [14]

$$A_i = \frac{4 \cdot (-1)^{i-1} (1 - 2^{1-2i}) (2i - 1)! \zeta(2i)}{\pi (2\pi)^{2i}} \left(1 + \sum_{j=1+i}^{\infty} \frac{(2j - 1)! \zeta(2j)}{(2j - 2i)! (2i - 1)! 2^{2j-1}} \right). \quad (3.4)$$

В таблице 3.1 представлены результаты вычислений отклонений величины Λ_n от нижней и верхней границ ее оценки (2.35) при различных значениях n . Расчеты выполнены на основании (2.36)-(2.38) при $l = 1$. Там же приведены соответствующие значения отклонений, восстановленные по формулам (3.1)-(3.4). При использовании (3.3) и (3.4) суммирование в (3.3) ограничено $i = 1$ для верхней границы и $i = 2$ для нижней границы, в (3.4) – значением $j = (i + 1) + 10$.

Таблица 3.1. Значения $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ в зависимости от n

Table 3.1. Values of $\Lambda_n - m_n$ and $M_n - \Lambda_n$ depending on n

n	$\Lambda_n - m_n$			$M_n - \Lambda_n$		
	(2.34)	[5]	[14]	(2.34)	[5]	[14]
1	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$
5	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$
10	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$6.0 \cdot 10^{-7}$	$6.0 \cdot 10^{-7}$
15	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
20	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$2.6 \cdot 10^{-11}$	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-8}$
30	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	$2.6 \cdot 10^{-12}$	$9.5 \cdot 10^{-9}$	$9.5 \cdot 10^{-9}$

Для оценки погрешности полученных значений границ от Λ_n обозначим через $r_{l,n}$ первое отброшенное слагаемое в сумме (2.36), и через $\mathcal{R}_{l,n}$ – в (2.37). Тогда

$$r_{l,n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{B_{4l+2}}{2l+1} \left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}} \left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!} - 1 \right) \right) - \frac{2^{4l+4}B_{4l+4}}{(2l+2)(2n+3)^{4l+4}} \right), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{R}_{l,n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{B_{4(l+1)}}{2l+2} \left(\frac{(1-2^{-3-4l})}{(n+1)^{4(l+1)}} \left(\frac{\pi^{4(l+1)}(2^{4(l+1)}-2)|B_{4(l+1)}|}{(4l+4)!} - 1 \right) \right) - \frac{2^{4l+2}B_{4l+2}}{(2l+1)(2n+3)^{4l+2}} \right). \quad (3.6)$$

Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ приведены таблице 3.2 при различных значениях n .

Таблица 3.2. Значения $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$ в зависимости от n
Table 3.2. Values of $r_{1,n}$ and $\mathcal{R}_{1,n}$ depending on n

n	$r_{1,n}$	$\mathcal{R}_{1,n}$
1	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
5	$5.2 \cdot 10^{-8}$	$-3.5 \cdot 10^{-8}$
10	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$-1.1 \cdot 10^{-9}$
15	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$-1.3 \cdot 10^{-10}$
20	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$-2.6 \cdot 10^{-11}$
30	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$-2.6 \cdot 10^{-12}$

Из таблиц 3.1 и 3.2 видно, что $\Lambda_n - m_n$ и $M_n - \Lambda_n$ не превосходят по абсолютной величине $r_{1,n}$ и $\mathcal{R}_{1,n}$, соответственно.

4. Заключение

В работе получена двусторонняя оценка константы Лебега для случая узловых точек, которые являются корнями полиномов Чебышева первого рода. Выражения для верхней и нижней границ оценки представлены в виде суммы членов усеченного асимптотического знакочередующегося ряда с использованием свойств логарифмической производной от гаммы-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Проведен анализ полученных выражений. В зависимости от числа узлов интерполяционного процесса найдены предельные значения для индекса суммирования в усеченном асимптотическом ряду. Записаны формулы оценки погрешности вычисления константы Лебега.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 "Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики"

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1990. 230 с.
2. Ким В. А. Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных L -сплайнов третьего порядка // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0026-3>
3. Ibrahimoglu B. A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016. Vol. 93. pp. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>
4. Brutman L. On the Lebesgue function for polynomial interpolation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1978. Vol. 15, Issue 4. pp. 694–704. DOI: <https://doi.org/10.1137/0715046>
5. Gunttner R. Evaluation of Lebesgue constants // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17, Issue 4. pp. 512–520. DOI: <https://doi.org/10.1137/0717043>
6. Gunttner R. Note on the lower estimate of optimal Lebesgue constants // Acta Mathematica Hungarica. 1994. Vol. 65, Issue 4. pp. 313–317. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01876033>
7. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. NY: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p.
8. Powell M. J. D. On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria // The Computer Journal. 1967. Vol. 9. pp. 404–407. DOI: <https://doi.org/10.1093/COMJNL/9.4.404>
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
11. Espinosa O., Moll V. A generalized polygamma function // Integral Transforms and Special Functions. 2004. Vol. 15, Issue 2. pp. 101–115. DOI: <https://doi.org/10.1080/10652460310001600573>
12. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
13. Sherwood H. Sums of power of integers and Bernoulli numbers // The Mathematical Gazette. 1970. Vol. 54. pp. 272–274.
14. Dzijadik V. K., Ivanov V. V. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points // Analysis Mathematica. 1983. Vol. 9, Issue 2. pp. 85–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01982005>

Поступила 03.09.2023; доработана после рецензирования 02.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Privalov, *Theory of interpolation of functions. Book 1*, Saratov University Publ., Saratov, 1990 (In Russ.), 230 p.
2. V. A. Kim, “Sharp Lebesgue constants for bounded cubic interpolation L -splines”, *Sib. Math. J.*, **51**:2 (2010), 267–276. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0026-3>
3. B. A. Ibrahimoglu, “Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation”, *Journal of Inequalities and Applications*, **93** (2016), 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>
4. L. Brutman, “On the Lebesgue function for polynomial interpolation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**:4 (1978), 694–704. DOI: <https://doi.org/10.1137/0715046>
5. R. Gunttner, “Evaluation of Lebesgue constants”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **17**:4 (1980), 512–520. DOI: <https://doi.org/10.1137/0717043>
6. R. Gunttner, “Note on the lower estimate of optimal Lebesgue constants”, *Acta Math. Hungar.*, **65**:4 (1994), 313–317. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01876033>
7. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002, 360 p.
8. M. J. D. Powell, “On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria”, *Comput. J.*, **9** (1967), 404–407. DOI: <https://doi.org/10.1093/COMJNL/9.4.404>
9. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards (NBS), Washington, 1964, 1060 p.
10. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, 342 p.
11. O. Espinosa, V. Moll, “A generalized polygamma function”, *Integral Transforms and Special Functions*, **15**:2 (2004), 101–115. DOI: <https://doi.org/10.1080/10652460310001600573>
12. Y. Luke, *Mathematical functions and their approximations*, Academic Press, Moscow, 1975, 608 p.
13. H. Sherwood, “Sums of power of integers and Bernoulli numbers”, *The Mathematical Gazette*, **54** (1970), 272–274.
14. V. K. Dzjadik, V. V. Ivanov, “On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points”, *Anal. Math.*, **9**:2 (1983), 85–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01982005>

Submitted 03.09.2023; Revised 02.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.255-272

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

Численное исследование скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности

К. А. Драгунова¹, Н. Никбахт², И. Д. Ремизов¹

¹ *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

² *Университет Окленда (г. Окленд, Новая Зеландия)*

Аннотация. Статья посвящена построению примеров, иллюстрирующих (с помощью компьютерного счёта) скорость сходимости черновских аппроксимаций к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрены две функции Чернова (первого и второго порядка касания по Чернову к оператору взятия второй производной) и несколько начальных условий различной гладкости. В качестве графической иллюстрации для начального условия, равного модулю синуса в степени пять вторых, построены график точного решения задачи Коши и графики десятых черновских аппроксимаций, даваемых двумя разными функциями Чернова. По графикам визуально определяется, что аппроксимации близки к решению. Для каждой из двух функций Чернова, для нескольких начальных условий различной гладкости и для номера аппроксимации до 11 включительно численно найдена соответствующая каждому приближению ошибка, то есть, супремум модуля разности точного решения и аппроксимирующей функции. Как оказалось, во всех исследованных случаях зависимость ошибки от номера аппроксимационного приближения имеет приблизительно степенной вид. Это следует из того, что, как мы обнаружили, зависимость логарифма ошибки от логарифма номера приближения имеет приблизительно линейный вид. Находя уравнение приближающей прямой с помощью линейной регрессии, мы находим показатель степени в степенной зависимости ошибки от номера приближения и называем его порядком сходимости. Порядки сходимости для всех изученных начальных условий собраны в таблицу. На рассмотренном семействе начальных условий найдена эмпирическая зависимость порядка сходимости от класса гладкости начального условия.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, операторные полугруппы, черновские аппроксимации, скорость сходимости, численный эксперимент

Для цитирования: Драгунова К. А., Никбахт Н., Ремизов И. Д. Численное исследование скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 255–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.255-272>

Об авторах:

Драгунова Ксения Александровна, магистр факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9318-6681>, k.dragunova13@mail.ru

© К. А. Драгунова, Н. Никбахт, И. Д. Ремизов



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Никбахт Насрин, аспирант, факультет математики, университет Окленда, (Окленд 1142, Новая Зеландия), ORCID: <https://orcid.org/0009000171526590>, nasrin.nikbakht@gmail.com

Ремизов Иван Дмитриевич, старший научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1968-0793>, ivremizov@yandex.ru

Original article

MSC2020 65M12, 47D06

Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation

K. A. Dragunova¹, N. Nikbakht², I. D. Remizov¹

¹ *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

² *University of Auckland (Auckland, New Zealand)*

Abstract. The article is devoted to construction of examples illustrating (using computer calculation) the convergence rate of Chernoff approximations to the solution of the Cauchy problem for the heat equation. Two Chernoff functions (of the first and second order of Chernoff tangency to the double differentiation operator) and several initial conditions of different smoothness are considered. As an illustration for the initial condition equal to the absolute value of the sine function to the power of five over two, a graph of the exact solution of the Cauchy problem and graphs of the tenth Chernoff approximations given by two different Chernoff functions are plotted. It is visually determined that the approximations are close to the solution. For each of the two Chernoff functions, for several initial conditions of different smoothness and for the approximation numbers up to 11, the error corresponding to each approximation is numerically found. This error is understood as the supremum of the absolute value of the difference between the exact solution and its approximating function. As it turned out, in all the cases studied, the error dependence on the approximation number nearly power-law form. This follows from the fact that the dependence of the error logarithm on the logarithm of the approximation number is close to linear. By finding the equation of the approximating line using linear regression, we find the exponent in the power dependence of the error on the approximation number and call it the order of convergence. These orders for all studied initial conditions are compiled in a table. The empirical dependence of the convergence order on the smoothness class of the initial condition is found on the considered family of initial conditions.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, operator semigroups, Chernoff approximations, rate of convergence, numerical experiment

For citation: K. A. Dragunova, N. Nikbakht, I. D. Remizov. Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 255–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.255-272>

About the authors:

Ksenia A. Dragunova, Master's of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9318-6681>, k.dragunova13@mail.ru

Nasrin Nikbakht, PhD student in Mathematics at Department of Mathematics, University of Auckland (Auckland 1142, New Zealand), nasrin.nikbakht@gmail.com.

Ivan D. Remizov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Research Fellow of International laboratory of dynamical systems and applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1968-0793>, ivremizov@yandex.ru.

1. Введение и предварительные сведения

Как известно [1–4], черновские аппроксимации зачастую являются единственным методом, позволяющим явно выразить решение дифференциального уравнения с частными производными через его переменные коэффициенты – функции, играющие роль параметров. При этом в выражающей формуле содержится предельный переход (черновские аппроксимации сходятся к решению), однако сами допредельные выражения явно выражены через коэффициенты уравнения и ясно, как вычислять предел – то есть, для его вычисления имеется алгоритм, и не требуется проводить неконструктивные процедуры (аналитическое продолжение, основанные на аксиоме выбора конструкции и прочее). Таким образом, черновские аппроксимации подходят для приближённого вычисления решения дифференциальных уравнений с частными производными на ЭВМ. Кроме того, основанные на теореме Чернова [2] конструкции находят применение в теоретических построениях: для математического обоснования интеграла по траекториям (интеграла Фейнмана, континуального интеграла) [5], для усреднения случайных неограниченных операторов [6], для получения решений уравнения Шрёдингера с любым самосопряжённым гамильтонианом из решений того уравнения, которое получается из исходного путём удаления из уравнения мнимой единицы i [7] и в других ситуациях (общим числом не менее 15), см. обзор [1]. Не менее 40 из опубликованных в 2000–2020 годах работ О.Г.Смолянова, его соавторов и учеников посвящены приложениям черновских аппроксимаций в различных разделах математической физики и бесконечномерного анализа, и число таких работ продолжает расти. По данным Google Scholar на октябрь 2023 статья Пола Чернова [2], содержащая формулировку знаменитой теоремы Чернова, была процитирована 525 раз даже при том, что не в каждой работе, где используются черновские аппроксимации, есть ссылка на оригинальную статью Чернова, так как сослаться на учебники или содержащие более современные версии теоремы иногда удобнее.

В связи с несомненной теоретической и возможной практической важностью метода черновских аппроксимаций актуален вопрос о скорости сходимости этих аппроксимаций. Исследования в этой области ведутся учёными по всему миру (см. [8] и ссылки там) в основном в теоретическом ключе и ещё далеки от завершения. Даже для случая очень простого одномерного уравнения теплопроводности стоят открытые вопросы и имеется очень мало данных о скорости сходимости для разных функций Чернова и разных начальных условий. Сбор этих данных – большая задача, важная не для исследования самого уравнения теплопроводности (за прошедшие с его открытия триста лет оно уже очень хорошо изучено), не для развития методов решения этого уравнения

(их известно очень много и они дают хорошие результаты), а для исследования метода черновских аппроксимаций, поскольку общие его черты проявляются во всех ситуациях, так как метод основан на одной и той же итерационной формуле из утверждающей части теоремы Чернова. Численным экспериментам по этой задаче и посвящена настоящая статья.

В статье найдены скорости сходимости для новых, ранее не рассмотренных начальных условий, а также найдена эмпирическая зависимость скорости сходимости от класса гладкости начального условия на том семействе условий, которые удалось исследовать. Эту зависимость ещё предстоит проверить на других начальных условиях другой гладкости и из других семейств функций, после чего попытаться дать её теоретическое обоснование. Несмотря на недавние продвижения [8–16] тема скорости сходимости черновских аппроксимаций к решениям уравнения теплопроводности ещё только начинает развиваться. Сперва, следуя [3] и [4], дадим необходимые определения, а потом приведём краткий обзор известных результатов по теме и изложим новые результаты.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть \mathcal{F} — банахово пространство. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{F} . Пусть дано отображение

$$V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}).$$

То есть, если $t \geq 0$ фиксировано, то $V(t)$ — это линейный ограниченный оператор, отображающий \mathcal{F} в \mathcal{F} . Отображение V называется C_0 -полугруппой, или, что то же самое, сильно непрерывной однопараметрической полугруппой линейных ограниченных операторов, если оно удовлетворяет трём условиям:

- 1) $V(0)$ это тождественный оператор I , т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F} : V(0)\varphi = \varphi$;
- 2) V сопоставляет сложению чисел в $[0, +\infty)$ композицию операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, т. е. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : V(t+s) = V(t) \circ V(s)$, где использовано обозначение $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi))$ для каждого $\varphi \in \mathcal{F}$;
- 3) V непрерывно при надделении $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией, т. е. $\forall \varphi \in \mathcal{F}$ функция $t \mapsto V(t)\varphi$ непрерывна как отображение $[0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Если $(V(t))_{t \geq 0}$ — C_0 -полугруппа в банаховом пространстве \mathcal{F} , то линейный оператор \mathcal{L} , определенный равенством

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

на линейном пространстве

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \stackrel{\text{обозн.}}{=} D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}$$

называется инфинитезимальным генератором (или, короче, генератором) C_0 -полугруппы $(V(t))_{t \geq 0}$. При этом говорят, что оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}$ порождает полугруппу, и используют обозначение $V(t) = e^{t\mathcal{L}}$.

Пусть X — бесконечное множество, и \mathcal{F} — банахово пространство (не обязательно всех) числовых функций на X , причём в \mathcal{F} действует замкнутый линейный оператор $L : D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ с плотной в \mathcal{F} областью определения $D(L) \subset \mathcal{F}$; также предполагается, что X надделено всеми необходимыми структурами для корректного задания оператора L . Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x \in X$, $f \in \mathcal{F}$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$ для всех $t \geq 0$, а L – это, например, в тривиальном случае лапласиан Δ (и тогда $u'_t = Lu$ это уравнение теплопроводности), или (в менее тривиальном случае) более сложно устроенный линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, не зависящими от t , но зависящими (как правило, нелинейно) от x .

Как известно [3], в случае существования C_0 -полугруппы $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$ решение задачи Коши (1.1) существует (в смысле равенства левой и правой частей в \mathcal{F}) и даётся равенством $u(t, x) = (e^{tL}f)(x)$ для $t \geq 0$ и $x \in X$. Если $f \in D(L)$, то $u(t, \cdot) \in D(L)$ для всех $t \geq 0$ и решение является классическим (в терминологии [3]), а для произвольного $f \in \mathcal{F}$ решение задачи Коши существует лишь как решение соответствующего интегрального уравнения $u(t, \cdot) = L \int_0^t u(s, \cdot) ds + f$. Иногда пишут $u(t, x)$, а иногда $u(t, \cdot)$, допуская, что в роли \mathcal{F} может выступать, например, пространство $L^p(\mathbb{R})$, тогда (1.1) выполняется лишь для почти всех $x \in \mathbb{R}$. И, хотя в этом случае запись $u(t, x)$ не вполне корректна из-за того, что все версии функции $x \mapsto u(t, x)$ соответствуют одному вектору $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R})$, обычно это не приводит к недоразумениям. В настоящей статье в качестве \mathcal{F} будет рассматриваться пространство $UC_b(\mathbb{R})$ всех вещественных, определённых на вещественной оси функций, которые ограничены и равномерно непрерывны. Эти функции определены всюду, поэтому упомянутый выше нюанс роли не играет.

Равенство $u(t, x) = (e^{tL}f)(x)$ показывает, что нахождение полугруппы $(e^{tL})_{t \geq 0}$ это трудная задача, так как она равносильна решению задачи Коши (1.1) для каждого $f \in \mathcal{F}$. Более того, в выражении e^{tL} показатель степени в общем случае представляет собой не ограниченный и не самосопряжённый оператор, поэтому задать экспоненту нельзя ни стандартным степенным рядом, ни интегралом с помощью спектральной теоремы. Равенство $V(t) = e^{tL}$ мы понимаем как полный синоним слов « V является C_0 -полугруппой с генератором L », а определение C_0 -полугруппы не даёт конструктивного способа нахождения этой полугруппы даже если генератор известен. Однако, если построена так называемая (см. [1],[7]) операторнозначная функция Чернова C , т.е., по определению, функция, удовлетворяющая условиям теоремы Чернова (в частности, равенству $C(t) = I + tL + o(t)$ при $t \rightarrow +0$), то полугруппа дается равенством $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C(t/n))^n$. Преимущество такого подхода состоит в том, что обычно удаётся задать C не очень длинной явной формулой, содержащей коэффициенты оператора L , и, тем самым, получить приближения к решению задачи Коши (1.1), сходящиеся к решению в \mathcal{F} при $n \rightarrow \infty$. Функции $(C(t/n))^n f$ как раз и называются черновскими аппроксимациями решения задачи Коши (1.1). Настоящее сообщение посвящено исследованию того, с какой скоростью (при фиксированном $t > 0$) в зависимости от $f \in \mathcal{F}$ убывает при $n \rightarrow \infty$ норма разности приближённого и точного решений $\|(C(t/n))^n f - e^{tL} f\|$. История этого вопроса будет обсуждаться в соответствующем разделе статьи. Итак, общий контекст уже задан выше, и можно теперь привести строгие определения и теорему Чернова в современной формулировке.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Говорят, что операторнозначная функция C называется по Чернову оператором L (подробности приведены ниже), если выполняются следующие условия (СТ0)-(СТ4):*

(СТ0). \mathcal{F} – банахово пространство, и $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{F} . Пусть C – это отображение $C: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, или, иначе говоря, семейство линейных ограниченных операторов $(C(t))_{t \geq 0}$. Замкнутый линейный оператор $L: D(L) \rightarrow \mathcal{F}$ имеет плотную в \mathcal{F} область определения $D(L) \subset \mathcal{F}$.

(СТ1). Семейство C сильно непрерывно (= непрерывно в сильной операторной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathcal{F})$), т. е. отображение $t \mapsto C(t)f \in \mathcal{F}$ непрерывно на $[0, +\infty)$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ2). $C(0) = I$, т. е. $C(0)f = f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$;

(СТ3). Существует такое плотное в \mathcal{F} линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} (C(t)f - f)/t$, значение которого обозначим символом $C'(0)f$;

(СТ4). Замыкание оператора $(C'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, D(L))$.

Плотность $D(L)$ в \mathcal{F} следует из (СТ3) и (СТ4), поэтому отдельно требовать это в (СТ0) не обязательно. Классическую теорему Чернова (Paul Robert Chernoff [2], 1968) можно сформулировать теперь следующим образом, отделяя в её условиях (E)xistence condition и (N)orm growth condition от (СТ).

Т е о р е м а 1.1. ТЕОРЕМА ЧЕРНОВА, СОВРЕМЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА.

(И.Д.Ремизов [7], 2016) Пусть \mathcal{F} — банахово пространство. Пусть дано отображение $C: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ и замкнутый линейный оператор $L: D(L) \rightarrow \mathcal{F}$, где $D(L) \subset \mathcal{F}$. Пусть выполнены следующие условия:

(E). Существует C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$;

(СТ). C касается по Чернову оператора L ;

(N). Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|C(t)\| \leq e^{\omega t}$ при всех $t \geq 0$.

Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ и $t > 0$ верно, что $(C(\frac{t}{n}))^n f \rightarrow e^{tL}f$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Равномерная сходимость по $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$ также называется локально равномерной по $t \in [0, +\infty)$ сходимостью. Иными словами, это сходимость, равномерная по t из каждого отрезка, лежащего в $[0, +\infty)$. Поэтому утверждающую часть теоремы Чернова можно прочитать так:

Для каждого $f \in \mathcal{F}$ и $T > 0$ верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(C\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n f - e^{tL}f \right\| = 0.$$

Введём теперь важное для наших целей понятие касания по Чернову порядка $k \in \mathbb{N}$ следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем говорить, что операторнозначная функция C касается по Чернову оператора L с порядком черновского касания k , если выполняются условия (СТ0)-(СТ4) и следующее условие (СТЗ- k):

(СТЗ- k). Существует такое плотное в \mathcal{F} линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ верно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \left\| C(t)f - \left(I + tLf + \frac{1}{2}t^2L^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kL^k \right) f \right\| = 0.$$

2. Скорость сходимости черновских аппроксимаций

Пусть в силу теоремы Чернова имеет место сходимость $(C(t/n))^n f \rightarrow e^{tL}f$ для каждого $f \in \mathcal{F}$. Но с какой скоростью происходит эта сходимость, как быстро убывает к нулю невязка $\left\| (C(\frac{t}{n}))^n f - e^{tL}f \right\|$ с ростом n ? Несмотря на разбор некоторых частных

случаев [16], построение этой теории не завершено, и тема привлекает внимание исследователей [8–15]. Неисчерпаемость этой темы следует из следующих двух утверждений.

Предложение 2.1. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Существуют банахово пространство \mathcal{F} , C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ в \mathcal{F} с генератором $(L, D(L))$ и функция Чернова S для оператора $(L, D(L))$, такие что $\|e^{tL}\| = \|S(t)\| = 1$ для каждого $t \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S(t/n))^n f - e^{tL} f\| = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}$, но $\|(S(t/n))^n - e^{tL}\| \geq 1$ для каждого $t > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Таким образом, черновские аппроксимации могут сходиться на каждом векторе, и при этом не сходиться по норме.

Предложение 2.2. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Для произвольно выбранной невозрастающей непрерывной функции $v: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ существуют банахово пространство \mathcal{F} , C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ в \mathcal{F} , функция Чернова S , а также вектора $f_0 \in \mathcal{F} \setminus D(L)$ и $f_1 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} D(L^j)$, такие что:*

- 1) $\|f_0\| = \|f_1\| = 1$, $\|e^{tL}\| = \|S(t)\| = 1$ для каждого $t \geq 0$;
- 2) для любого $T > 0$ при всех натуральных $n \geq n_0$ (где $n_0 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ выбирается из условия $T \cdot v(n_0/T) \leq 1/2$) верно равенство

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(S(t/n))^n f_0 - e^{tL} f_0\| = \sup_{t \in [0, T]} \|(S(t/n))^n f_1 - e^{tL} f_1\| = T v(n/T).$$

Таким образом, скорость сходимости черновских аппроксимаций на отдельно взятом ненулевом векторе может быть как сколь угодно велика (для этого функция $v(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow +\infty$ со сколь угодно большой скоростью, например, $v(x) = e^{-x}$, $v(x) = e^{-e^x}$ и так далее), так и сколь угодно низка (для этого $v(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow +\infty$ сколь угодно медленно, например, $v(x) = 1/\ln(x+e)$, $v(x) = 1/\ln(\ln(x+e^e))$ и так далее).

В связи с этим резонно ставить вопрос о том, какие условия нужно наложить на функцию Чернова, чтобы получить оценку сверху на скорость сходимости. Эти условия недавно были получены для случая степенной оценки и даются следующей теоремой.

Теорема 2.1. (О.Е.Галкин, И.Д. Ремизов [14]) *Пусть выполнены следующие три условия:*

1) *В произвольном банаховом пространстве \mathcal{F} задана C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$ с генератором $(L, D(L))$, такая что при некоторых $M_1 \geq 1$ и $w \geq 0$ для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|e^{tL}\| \leq M_1 e^{wt}$.*

2) *Задано отображение $S: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$, такое что при некотором $M_2 \geq 1$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ и всех $t > 0$ верно неравенство $\|S(t)^k\| \leq M_2 e^{kwt}$.*

3) *Для некоторых чисел $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ существует такое $(e^{tL})_{t \geq 0}$ -инвариантное подпространство $\mathcal{D} \subset D(L^{m+p}) \subset \mathcal{F}$ (то есть $(e^{tL})(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ для каждого $t \geq 0$, возможно, $\mathcal{D} = D(L^{m+p})$) и существуют такие функции $K_j: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, где $j = 0, 1, \dots, m+p$, что для всех $t > 0$ и всех $f \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство*

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^m \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{m+1} \sum_{j=0}^{m+p} K_j(t) \|L^j f\|.$$

Тогда верны следующие два утверждения:

1) Для всех $t > 0$, всех $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ и всех векторов $f \in \mathcal{D}$ верна оценка

$$\|(S(t/n))^n f - e^{tL} f\| \leq \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m} \sum_{j=0}^{m+p} C_j(t/n) \|L^j f\|,$$

где $C_{m+1}(t) = K_{m+1}(t)e^{-wt} + M_1/(m+1)!$ и $C_j(t) = K_j(t)e^{-wt}$ при $j \neq m+1$.

2) Если \mathcal{D} плотно в \mathcal{F} и для всех $j = 0, 1, \dots, m+p$ при $t \rightarrow +0$ верно соотношение $K_j(t) = o(t^{-m})$, то для всех $T > 0$ и всех $g \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|(S(t/n))^n g - e^{tL} g\| = 0.$$

Грубо говоря, приведённая выше теорема О.Е.Галкиной и И.Д.Ремизова утверждает, что если порядок черновского касания равен m , и функция Чернова не слишком сильно уклоняется от своего многочлена Тейлора порядка m , то скорость сходимости черновских аппроксимаций к полугруппе будет не сильно хуже, чем константа, умноженная на n^{-m} . Точны ли эти оценки - в октябре 2023 года не известно. Об оценках снизу на скорость сходимости также не известно ничего, хотя некоторые предположения можно извлечь из гипотез, высказанных в работе [13]. И, конечно, ничего не известно о скорости сходимости в случае, если вектор f не удовлетворяет условиям теоремы Галкиной-Ремизова, при этом сам факт сходимости гарантируется теоремой Чернова. Взяв достаточно простой пример, можно исследовать эту скорость сходимости численно, а потом попытаться интерпретировать полученные данные.

Определение 2.1. Пусть даны C_0 -полугруппа $(e^{tL})_{t \geq 0}$, функция Чернова C , вектор f , число $\tau > 0$. Тогда $d(n, \tau) = \|e^{\tau L} f - u_n(\tau, \cdot)\|$, где $u_n(\tau, x) = ((C(\tau/n))^n f)(x)$, называется невязкой (ошибкой приближения) для построенных по функции Чернова C черновских аппроксимаций $(C(\tau/n))^n f$ к полугруппе $(e^{tL})_{t \geq 0}$ на начальном условии f в момент времени $t = \tau$. Если существуют такие числа $\beta_\tau, M_\tau > 0$ что $d(n, \tau) - M_\tau n^{-\beta_\tau} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $M_\tau n^{-\beta_\tau}$ будем называть степенной частью невязки, а β_τ будем называть порядком сходимости.

Если в качестве генератора полугруппы взять оператор дифференцирования (он соответствует уравнению переноса) или оператор взятия второй производной (он соответствует уравнению теплопроводности), то управлять принадлежностью вектора f областям определения степеней генератора можно с помощью гладкости функции f . В зависимости от того, в каком пространстве функций мы рассматриваем наш оператор, требования на гладкость могут выглядеть по-разному. Поэтому важно накопить достаточный запас численно исследованных конкретных случаев, чтобы потом, анализируя их, можно было делать новые теоретические предположения.

3. Выбор модельного примера и постановка задачи

В настоящей статье мы рассматриваем оператор L , заданный равенством $Lf = f''$, и задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x) \text{ для } t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \\ u(0, x) = u_0(x), \text{ для } x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (3.1)$$

которая является хорошим модельным примером, поскольку её ограниченное решение $u(t, x)$ уже известно и задается формулой

$$(e^{tL}u_0)(x) = u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - z, t)u_0(z)dz, \text{ где } \Phi(x, t) = \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) позволяет находить решение с наперед заданной точностью - для этого требуется заменить несобственный интеграл на собственный (допуская ошибку не выше заданной), а потом вычислить интеграл по отрезку с помощью одного из сеточных методов (снова допуская ошибку не выше заданной) для любого начального условия u_0 .

В настоящей работе мы специально выбрали простой случай (3.1), когда решение (3.2) уже известно, и на этом простом примере исследуем сам метод черновских аппроксимаций, саму формулу Чернова $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C(t/n))^n$ в общем случае. То есть, для нас интерес представляет не решение уравнения теплопроводности, не черновские аппроксимации к этому решению, а только скорость сходимости аппроксимаций к решению, поскольку есть предположение, что скорость сходимости не слишком сильно зависит от уравнения. Чтобы проверить это предположение, нужно набрать запас экспериментальных данных, и мы начинаем с простого случая - с уравнения теплопроводности. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе [15], где были рассмотрены уравнение теплопроводности и уравнение переноса, и начальные условия $\sin(x)$ и $e^{-|x|}$. Мы следуем тому же пути, рассматриваем только одно уравнение (теплопроводности), но больше начальных условий: помимо $\sin(x)$ и $e^{-|x|}$, также проводим численный эксперимент для $|\sin(x)|^\alpha$ при $\alpha \in \{5/2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4\}$. В результате нам удалось обнаружить нетривиальную зависимость скорости сходимости от класса гладкости начального условия, это и есть главное содержание статьи.

Мы рассматриваем банахово пространство $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ всех ограниченных, равномерно непрерывных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, наделенное равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Рассмотрим оператор L , заданный при каждом $x \in \mathbb{R}$ равенством $(Lf)(x) = f''(x)$, справедливом для всех бесконечно гладких функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченных вместе со всеми производными ($f \in D = C_b^\infty(\mathbb{R})$). Задача Коши (3.1) является частным случаем задачи Коши с постоянными (единица, ноль, ноль) коэффициентами, рассмотренной в [17], и соответствующая функция Чернова была найдена в [17], частный случай этой функции Чернова представлен ниже:

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t}),$$

В [17] было доказано, что $G(t)$ является касательной по Чернову первого порядка к d^2/dx^2 . Позже А.В.Веденин [11] предложил другую функцию Чернова, её частный случай даётся равенством

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t}).$$

А.В.Веденин доказал, что $S(t)$ является касательной по Чернову второго порядка к d^2/dx^2 .

В настоящей статье мы исследуем, как $d(n, \tau)$ зависит от n при фиксированном $\tau = 1/2$ и $u_n(\tau, x)$, заданном в виде

$$u_n(\tau, x) = ((C(\tau/n))^n u_0)(x),$$

где $C \in \{G, S\}$, а $C(\tau/n)$ получается заменой t на τ/n в формуле, определяющей $C(t)$, а $(C(\tau/n))^n = C(\tau/n)C(\tau/n) \dots C(\tau/n)$ является композицией n копий линейного ограниченного оператора $C(\tau/n)$. Мы рассматриваем несколько начальных условий u_0 , которые являются гёльдеровыми функциями (следовательно, все принадлежат пространству $UC_b(\mathbb{R})$), и имеют различные показатели Гельдера, либо дифференцируемы и имеют гёльдеровы производные. Для двух функций Чернова G, S и нескольких начальных условий u_0 мы численно находим норму разницы между точным решением и его черновской аппроксимацией.

4. Комментарии о методах вычислений

Вычисления проводились в среде Python 3 с помощью написанной нами программы, которая доступна в Приложении к препринту [12]. Все измерения, для уменьшения вычислительной сложности, для каждого значения n (изменяющегося от 1 до 11) проводились для 1000 точек, равномерно делящих отрезок $[-\pi, \pi]$ или $[-2\pi, 2\pi]$. Начальные условия вида $u_0(x) = |\sin x|^\alpha$ для различных $\alpha \in \{5/2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4\}$, как и любое из основанных на них черновских приближений, являются периодическими функциями. Таким образом, получается, что

$$d(n, \tau) = \sup_{x \in [-2\pi, 2\pi]} |u_n(\tau, x) - u(\tau, x)|,$$

где u - точное решение (3.1), а u_n - черновское приближение. Это рассуждение применимо к каждому $\tau > 0$, в настоящей работе всюду использовалось $\tau = 1/2$.

Программный код написан с возможностью задания любого оператора и любого начального условия, т.е. без упрощения функций Чернова и использования биномиальных коэффициентов, в отличие от работы [15], опубликованной ранее. Более того, начальное условие не обязательно должно быть гладкой функцией. Количество итераций не ограничено числом 11, значение n может быть изменено, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Мы выбрали оптимальное значение n , так как программа очень времязатратна: через Jupyter Notebook 6.1.4 Anaconda 3 Python 3.8.3, установленный на персональном компьютере с Windows 10, CPU Intel Core i5-1035G1, 1.0-3.6 GHz, 8 Gb RAM на выполнение программы для всех начальных условий с построением графиков для них уходит около 20 минут.

5. Пример приближения для начального условия $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$

На рисунке 5.1 показаны два графика приближенного решения для изучаемых нами функций при $n = 10$ и точного решения при начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$. Видно, что график аппроксимаций в целом повторяет график точного решения. Так как визуально ошибку оценить сложно, мы построили график убывания ошибки в зависимости от n , в обычном и логарифмическом масштабе.

На рисунке 5.2 показаны графики убывающей ошибки черновских приближений как функции n , где $1 \leq n \leq 11$. Слева показаны графики убывающей погрешности для функций Чернова $S(t)$ (синим цветом) и $G(t)$ (зеленым цветом) в обычной шкале (по горизонтальной оси отложен номер аппроксимации n , а по вертикальной оси отложена ошибка $d(n, 1/2)$), а справа – те же графики в логарифмической шкале (по горизонтальной оси отложен $\ln(n)$, а по вертикальной оси отложен $\ln(d(n, 1/2))$). Из графиков

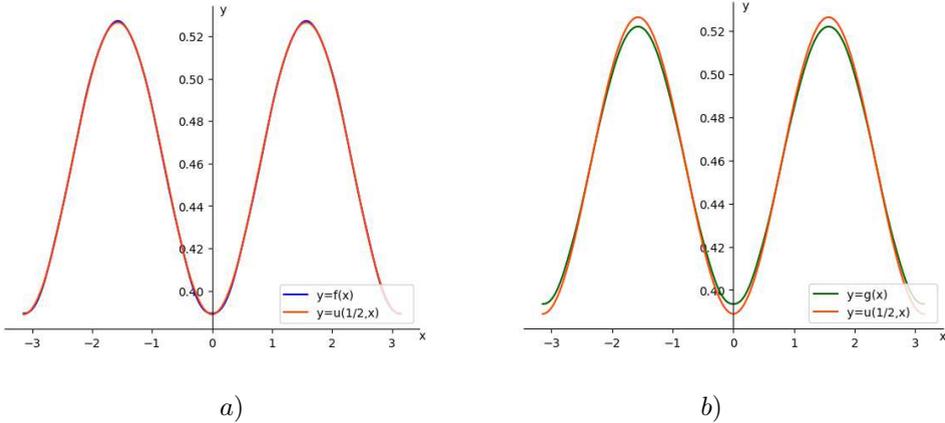


Рис. 5.1. График точного решения $u(1/2, x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} u_0(z) dz$ при начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ в момент времени $\tau = \frac{1}{2}$ и графики приближенных решений при $n = 10$: а) $f(x) = ((S(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$, б) $g(x) = ((G(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$

Fig 5.1. Graph of the exact solution $u(1/2, x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} u_0(z) dz$ for initial condition $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ at the moment of time $\tau = \frac{1}{2}$ and graphs of approximate solutions for $n = 10$: а) $f(x) = ((S(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$, б) $g(x) = ((G(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}))^{10} u_0)(x)$

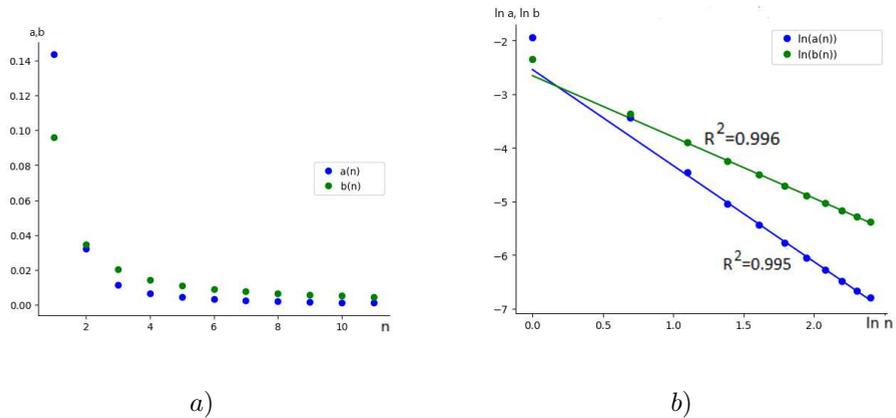


Рис. 5.2. Графики погрешности для функций Чернова $S(t)$ и $G(t)$ при $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ и $t = \frac{1}{2}$: а) $a(n) = d(n, 1/2)$ (синий цвет) для $S(t)$ и $b(n) = d(n, 1/2)$ (зеленый цвет) для $G(t)$, б) $\ln a(n) = \ln d(n, 1/2)$ (синий цвет) для $S(t)$ и $\ln b(n) = \ln d(n, 1/2)$ (зеленый цвет) для $G(t)$

Fig 5.2. Graphs of error for Chernoff functions $S(t)$ and $G(t)$, $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$, $\tau = \frac{1}{2}$: а) $a(n) = d(n, 1/2)$ (blue line) for $S(t)$ and $b(n) = d(n, 1/2)$ (green line) for $G(t)$, б) $\ln a(n) = \ln d(n, 1/2)$ (blue line) for $S(t)$ and $\ln b(n) = \ln d(n, 1/2)$ (green line) для $G(t)$

следует, что скорость сходимости для функции $S(t)$ меньше скорости сходимости для функции $G(t)$.

Визуально определяется, что если отбросить точки $n = 1, 2$, то на графике справа синие точки почти лежат на некоторой прямой, а зелёные почти лежат на некоторой другой прямой. Нас интересует асимптотическое поведение ошибки при $n \rightarrow \infty$, поэтому отбросить первые два значения $n = 1, 2$ ради больше точности уместно. Каковы уравнения этих прямых, и как выразить числом слова «почти лежат» – можно узнать с помощью метода линейной регрессии, т.е. метода наименьших квадратов (МНК) в линейном случае.

Используя реализацию линейной регрессии с помощью стандартного пакета в Excel, мы построили синюю прямую, аппроксимирующую синие точки, и зелёную прямую, аппроксимирующую зелёные точки. Также мы нашли уравнения этих прямых линий и коэффициенты детерминации. Визуально определяется, что точки на правом графике незначительно удалены от построенных по методу наименьших квадратов прямых. Как известно, $R^2 = 1$ в моделях линейной регрессии соответствует случаю, когда точки полностью лежат на прямой. На практике принято считать, что регрессия проведена удовлетворительно, если коэффициент детерминации $R^2 > 0.8$. Таким образом, хорошее визуально определяемое соответствие прямой и точек подтверждается и указанными на графиках числами – значениями коэффициента детерминации $R^2 > 0.98$, что очень близко к 1.

Близкая к линейной зависимость логарифма ошибки от логарифма n означает, что зависимость ошибки от n близка к степенной. Округляя коэффициенты, видим, что для синей линии (см. рис. 5.2) уравнение выглядит следующим образом: $\ln(y(n)) = -1.792 \ln(n) - 2.538$, т.е. $y(n) = n^{-1.792} e^{-2.538}$. Аналогично, для зелёной линии (см. рис. 5.2) уравнение $\ln(y(n)) = -1.143 \ln(n) - 2.652$, т.е. $y(n) = n^{-1.143} e^{-2.652}$. Используя введённую в Определении 2.1 терминологию, можно сказать так: мы численно продемонстрировали, что для $n \in \{3, \dots, 11\}$ на начальном условии $u_0(x) = |\sin x|^{5/2}$ при $\tau = 1/2$ степенная часть ошибки для функции Чернова S равна $n^{-1.792} e^{-2.538}$, т.е. $\beta_\tau = 1.792$. Аналогично, в той же ситуации для функции Чернова G получаем $\beta_\tau = 1.143$.

Используя тот же подход, мы исследовали поведение ошибки для других начальных условий и получили таблицу порядков скоростей сходимости.

6. Таблица порядков скоростей сходимости

В таблице 6.1 приведены экспериментально (с помощью моделирования в Python) полученные порядки убывания ошибки в зависимости от класса гладкости начального условия и функции Чернова.

Мы видим, что на начальном условии с высокой гладкостью (первая строка в таблице), первый порядок касания по Чернову соответствует убывания скорости ошибки примерно $const/n$, а второй порядок – скорости убывания примерно $const/n^2$. Это согласуется с предположением из [13] и теоремой из [14].

По мере потери гладкости (вторая строка в таблице и ниже) теория из [14] перестает работать, а экспериментальное наблюдение состоит в следующем: скорость сходимости постепенно уменьшается и преимущества функции Чернова со вторым порядком касания Чернова постепенно исчезают.

Таблица 6.1. Скорость сходимости аппроксимаций к точному решению для начальных условий различной гладкости**Table 6.1.** Speed of convergence of approximations to the exact solution for initial conditions of different smoothness

Начальное условие	Класс гладкости α начального условия u_0	Порядок сходимости $\beta_{1/2}$ для функции Чернова $G(t)$	Порядок сходимости $\beta_{1/2}$ для функции Чернова $S(t)$
$u_0(x) = \sin(x)$	C^∞ , т.е. все производные существуют и ограничены	1.042	2.092
$u_0(x) = \sin(x) ^{5/2}$	$H^{2\frac{1}{2}}$, т.е. первая и вторая производные существуют и ограничены, причём вторая гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	1.143, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$	1.792, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$
$u_0(x) = \sin(x) \sin(x)$	H^2 , т.е. первая производная существует, ограничена и гёльдерова с показателем Гёльдера 1	1.178, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$	1.996, регрессия проводилась без учета $n = 1, n = 2$
$u_0(x) = \sin(x) ^{3/2}$	$H^{1\frac{1}{2}}$, т.е. первая производная существует, ограничена и гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	0.979, регрессия проводилась без учета $n = 1$	1.511
$u_0(x) = \sin(x) $	H^1 , т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера 1	1.051	1.095
$u_0(x) = e^{- x }$	H^1 , т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера 1	0.929	1.056
$u_0(x) = \sin(x) ^{3/4}$	$H^{3/4}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $3/4$	0.815	0.926
$u_0(x) = \sin(x) ^{1/2}$	$H^{1/2}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $1/2$	0.691	0.772
$u_0(x) = \sin(x) ^{1/4}$	$H^{1/4}$, т.е. гёльдерова с показателем Гёльдера $1/4$	0.614	0.665

Представим результаты из таблицы графически (см. рис. 6.1).

Видно, что точки, соответствующие гёльдеровым начальным условиям с показате-

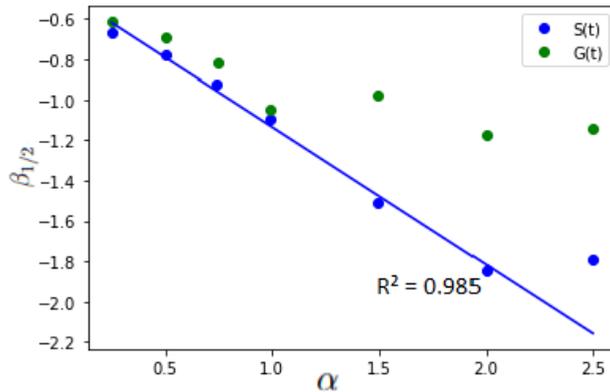


Рис. 6.1. Скорость сходимости аппроксимаций к точному решению для начальных условий различной гладкости.

Fig. 6.1. Speed of convergence of approximations to the exact solution for initial conditions of different smoothness.

лем Гёльдера не выше 1, расположены достаточно близко к некоторой прямой. Найдём уравнение этой прямой, игнорируя точки, соответствующие гладкости 1.5, 2 и 2.5. Уравнение аппроксимирующей прямой, полученное с помощью метода линейной регрессии: $y(x) = -0.684x - 0.447$. Интересно, что точки для начальных условий с гладкостью 1.5 и 2 тоже расположены недалеко от прямой. Полученное выше эмпирическое уравнение можно интерпретировать следующим образом: когда класс гладкости α начального условия u_0 не превышает порядка касания по Чернову, тогда $\beta = 0.684\alpha + 0.447$ и

$$d(n, 1/2) \approx \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{0.684\alpha + 0.447}.$$

Между тем, когда класс гладкости α начального условия u_0 больше порядка касания по Чернову соответствующей функции Чернова, то легко устанавливаемой зависимости нет, но все же функция Чернова $S(t)$ с касанием по Чернову второго порядка дает лучшее приближение, чем функция Чернова $G(t)$ с касанием по Чернову первого порядка.

7. Заключение

Результаты численного моделирования в целом согласуются с теорией, вытекающей из высказанного в 2018 году предположения в [13], а также рассмотрены случаи, не описываемые никакой известной в 2023 году теорией. В работе нам удалось обнаружить нетривиальную зависимость порядка скорости сходимости от класса гладкости начального условия. В будущем следует рассмотреть наиболее интересный случай переменных коэффициентов, понимая их как параметры аналогично u_0 , однако и для постоянных коэффициентов уже обнаружены явления, не имеющие строгого теоретического обоснования. Также встаёт вопрос: как связаны скорость сходимости черновских аппроксимаций на некотором начальном условии и принадлежность начального условия

областям определения степеней генератора? Так что исследования в этом направлении далеки от завершения.

Благодарности. Результаты разделов 2 и 3 статьи получены при участии членов научно-образовательной группы «Эволюционные полугруппы и их новые приложения» (грант научного фонда ВШЭ №23-00-031). Изложенные в разделах статьи 4, 5, 6 и 7 результаты получены при поддержке гранта РФФ № 23-71-30008 «Диссипативная динамика бесконечномерных и конечномерных систем, разработка математических моделей механических, гидродинамических процессов». Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания по рукописи, которые позволили улучшить изложение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 325. P. 19–46. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_2
2. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 238, No 2. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)
3. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. NY: Springer, 1999. 589 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97696>
4. Remizov I. D. Feynman and Quasi-Feynman formulas for evolution equations // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 96. P. 433-437. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562417050052>
5. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ. 1990. 150 с.
6. Кальметьев Р. Ш., Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж. Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 6. С. 1030–1041. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922060114>
7. Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // Journal of Functional Analysis. 2016. Vol. 270, No. 12. P. 4540–4557. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017>
8. Zagrebnov V. A. Notes on the Chernoff product formula // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, No. 7. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108696>
9. Vedenin A. V. Fast converging Chernoff approximations to solution of a parabolic differential equation on a real line // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2022. Vol. 24, No. 3. pp. 280–288. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288>
10. Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>

11. Веденин А. В., Воеводкин В. С., Галкин В. Д., Каратецкая Е. Ю., Ремизов И. Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций решений эволюционных уравнений // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 3. С. 463–468. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12704>
12. Dragunova K. A. Garashenkova, A. A. ,Nikbakht N., Remizov I. D. Numerical study of the rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the heat equation with full list of illustrations and Python source code. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05284>
13. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff 's product formula // International Conference "ShilnikovWorkshop-2018" dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011). Nizhny Novgorod: Lobachevsky State University, 2018. P. 38–41.
14. Галкин О. Е., Ремизов И. Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0 -полугрупп // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 2. С. 297–299. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13292>
15. Prudnikov P. S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation. 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615>
16. Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ. 2012. Т. 172, № 1. С. 122–137. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6936>
17. Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 328. P. 243–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.057>

*Поступила 17.08.2023; доработана после рецензирования 08.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Ya. A. Butko, “The method of Chernoff approximation”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19–46. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_2
2. P. R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups.”, *J. Functional Analysis*, **238**:2 (1968). DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)
3. K.-J. Engel, R Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, NY, 1999 DOI: <https://doi.org/10.1007/b97696>, 589 p.

4. I. D. Remizov, “Feynman and Quasi-Feynman formulas for evolution equations”, *Doklady Mathematics*, **96** (2017), 433–437. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562417050052>
5. O. G. Smolyanov, E. T. Shavgulidze, [*Continual integrals*], MSU Publ., Moscow, 1990 (In Russ.), 150 с.
6. R. Sh. Kalmeteв, Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, “Chernoff iterations as an averaging method for random affine transformations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **62:6** (2022), 996–1006. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922060114>
7. I. D. Remizov, “Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”, *Journal of Functional Analysis*, **270:12** (2016), 4540–4557. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017>
8. V.A. Zagrebnov, “Notes on the Chernoff product formula”, *Journal of Functional Analysis*, **279:7** (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108696>
9. A. V. Vedenin, “Fast converging Chernoff approximations to solution of a parabolic differential equation on a real line.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24:3** (2022), 280–288. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288>
10. O. E. Galkin, I. D. Remizov, “Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators”, 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>
11. A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, I. D. Remizov, “Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution Equation”, *Math. Notes*, **108:3** (2020), 451–456 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12704>
12. K. A. Dragunova, A. A. Garashenkova, N. Nikbakht, I. D. Remizov, “Numerical study of the rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the heat equation with full list of illustrations and Python source code”, 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05284>
13. I. D. Remizov, “On estimation of error in approximations provided by Chernoff’s product formula.”, *International Conference "Shilnikov Workshop-2018" dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011)*, 2018, 38–41.
14. O. E. Galkin, I. D. Remizov, “Rate of Convergence of Chernoff Approximations of operator C_0 -semigroups”, *Mathematical Notes*, **111:2** (2022), 305–307. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13292>
15. P. S. Prudnikov, “Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation”, 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615>

16. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **172**:1 (2012), 987–1000 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6936>
17. I. D. Remizov, “Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example)”, *Applied Mathematics and Computation*, **328** (2018), 243-246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.057>

Submitted 17.08.2023; Revised 08.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.273-283

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Надстройки над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности

С. Х. Зинина¹, А. А. Ноздринов², В. И. Шмуклер²¹ ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Одной из конструкций получения потоков на многообразии является построение надстройки над каскадом. В этом случае поток является неособым, то есть не имеет неподвижных точек. С. Смейл показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. Обратное утверждение неверно в общем случае, но, при некоторых предположениях сопряженность диффеоморфизмов равносильна эквивалентности надстроек. Так, в работе Дж. Икегами показано, что критерий работает в случае, когда диффеоморфизм задан на многообразии, чья фундаментальная группа не допускает эпиморфизм в группу \mathbb{Z} . Там же построены примеры не сопряженных диффеоморфизмов окружности, надстройки над которыми эквивалентны. В работе И. В. Голиковой и О. В. Починки рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами окружностей и доказано, что полным инвариантом эквивалентности надстроек над сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами является равенство периодов периодических точек, порождающих их диффеоморфизмов. В то же время из результата А. Г. Майера известно, что для сопряженности сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов необходимым также является совпадение чисел вращения. В тоже время, надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы окружностей. В работе С. Х. Зининой и П. И. Починки доказано, что надстройки над меняющими ориентацию декартовыми произведениями диффеоморфизмов окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов. В настоящей работе получен классификационный результат для надстроек над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружностей.

Ключевые слова: многообразие, надстройка над диффеоморфизмом, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, число вращения, декартово произведение диффеоморфизмов

Для цитирования: Зинина С. Х., Ноздринов А. А., Шмуклер В. И. Надстройки над декартовыми произведениями сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 273–283. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.273-283>

Об авторах:

Зинина Светлана Халиловна, старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, zininaskh@math.mrsu.ru

© С. Х. Зинина, А. А. Ноздринов, В. И. Шмуклер



Ноздрин Алексей Александрович, аспирант, стажер-следователь лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, lex87@bk.ru

Шмуклер Валерия Ильинична, аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, shmukler9797@mail.ru

Original article

MSC2020 37D15

Superstructures over Cartesian products of orientation-preserving rough circle transformations

S. Kh. Zinina¹, A. A. Nozdrinov², V. I. Shmukler²

¹ *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

² *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. One of the constructions for obtaining flows on a manifold is building a superstructure over a cascade. In this case, the flow is non-singular, that is, it has no fixed points. C. Smale showed that superstructures over conjugate diffeomorphisms are topologically equivalent. The converse statement is not generally true, but under certain assumptions the conjugacy of diffeomorphisms is tantamount to equivalence of superstructures. Thus, J. Ikegami showed that the criterion works in the case when a diffeomorphism is given on a manifold whose fundamental group does not admit an epimorphism into the group \mathbb{Z} . He also constructed examples of non-conjugate diffeomorphisms of a circle whose superstructures are equivalent. In the work of I. V. Golikova and O. V. Pochinka superstructures over diffeomorphisms of circles are examined. It is also proven in this paper that the complete invariant of the equivalence of superstructures over orientation-preserving diffeomorphisms is the equality of periods for periodic points generating their diffeomorphisms. For the other side, it is known from the result of A.G. Mayer that the coincidence of rotation numbers is also necessary for conjugacy of orientation-preserving diffeomorphisms. At the same time, superstructures over orientation-changing diffeomorphisms of circles are equivalent if and only if the corresponding diffeomorphisms of circles are topologically conjugate. Work of S. Kh. Zinina and P. I. Pochinka proved that superstructures over orientation-changing Cartesian products of diffeomorphisms of circles are equivalent if and only if the corresponding diffeomorphisms of tori are topologically conjugate. In this paper a classification result is obtained for superstructures over Cartesian products of orientation-preserving diffeomorphisms of circles.

Keywords: manifold, superstructure over a diffeomorphism, orientation-preserving diffeomorphism of a circle, number of rotations, Cartesian product of diffeomorphisms

For citation: S. Kh. Zinina, A. A. Nozdrinov, V. I. Shmukler. Superstructures over Cartesian products of orientation-preserving rough circle transformations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 273–283. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.273-283>

About the authors:

Svetlana Kh. Zinina, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, zininaskh@math.mrsu.ru

Alexey A. Nozdrinov, Post-graduate student, Intern researcher at the Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, lex87@bk.ru

Valeria I. Shmukler, Post-graduate student, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, shmukler9797@mail.ru

1. Декартово произведение сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности

1.1. Сохраняющие ориентацию грубые преобразования окружности

А. Г. Майером в рамках исследования грубости и типичности диффеоморфизмов окружности в работе [6] было доказано, что класс грубых диффеоморфизмов совпадает с классом диффеоморфизмов имеющих конечное число периодических гиперболических точек, эти же диффеоморфизмы типичны в множестве всех диффеоморфизмов окружности. Приведем лишь классификационные результаты работы [6] для сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности.

Предложение 1.1. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности. Тогда

1. Множество $Per(f)$ состоит из $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) периодических орбит, каждая из которых имеет период k . Занумеруем периодические точки множества $Per(f) : p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$ и $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$; числа (k, l) являются взаимно простыми. Заметим, что число l не зависит от выбора точки p_0 (см. Рис. 1.1).
2. Два диффеоморфизма f и f' с параметрами n, k, l и n', k', l' , соответственно, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n'$ и $k = k'$ и либо $l = l'$ (если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию), либо $l = k' - l'$ (сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).

Обозначим через $f_{n,k,l} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с параметрами n, k, l .

1.2. Декартовы произведения сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружностей

Обозначим через G класс диффеоморфизмов вида:

$$\phi = f_1 \times f_2 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2,$$

где $f_1 = f_{n_1, k_1, l_1}, f_2 = f_{n_2, k_2, l_2} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — грубые сохраняющие ориентацию преобразования окружностей.

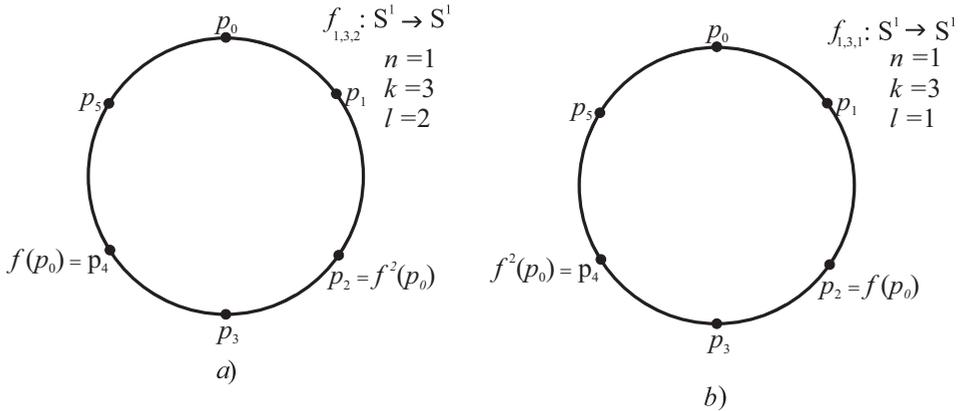


Рис. 1.1. Сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности:
 а) диффеоморфизм $f_{1, 3, 2}$; б) диффеоморфизм $f_{1, 3, 1}$

Fig 1.1. Orientation-preserving diffeomorphisms of the circle:
 а) diffeomorphism $f_{1, 3, 2}$; б) diffeomorphism $f_{1, 3, 1}$

Непосредственно из пункта 1) предложения 1 вытекают следующие свойства диффеоморфизмов данного класса.

Предложение 1.2. ([2], теорема 1.1) Пусть ϕ и ϕ' — диффеоморфизмы из класса G . Тогда

1. Для любого диффеоморфизма ϕ множество $Per(\phi)$ состоит из $4n_1n_2k_1k_2$ периодических точек, из которых $2n_1n_2k_1k_2$ седловых, $n_1n_2k_1k_2$ стокковых и $n_1n_2k_1k_2$ источниковых. Все $4n_1n_2k_1k_2$ периодических точек имеют период $НОК(k_1; k_2)$.
2. Диффеоморфизмы ϕ и ϕ' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда диффеоморфизмы f_i, f'_i топологически сопряжены (с точностью до перенумерации компонент).

2. Эквивалентность надстроек над сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \rightarrow M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных \mathbb{R} и направленных в $+\infty$ такой, что $\xi^t(x, r) = (x, r + t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, r) = (\phi(x), r - 1)$. Положим $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_\phi : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t поток на многообразии M_ϕ , заданный формулой $\phi^t(x) = p_\phi(\xi^t(p_\phi^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом ϕ* (см., например, Рис. 2.2).

Пусть $f = f_{n,k,l}, f' = f_{n',k',l'}$ и $f^t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ Настройка над f . Очевидно, что поток f^t имеет ровно n периодических орбит. В работе [1] доказано, что f эквивалентно f' тогда и только тогда, когда $n = n'$. Для доказательства этого результата использовались известные ранее классификационные результаты изложенные в работах [7] и [5]. Для

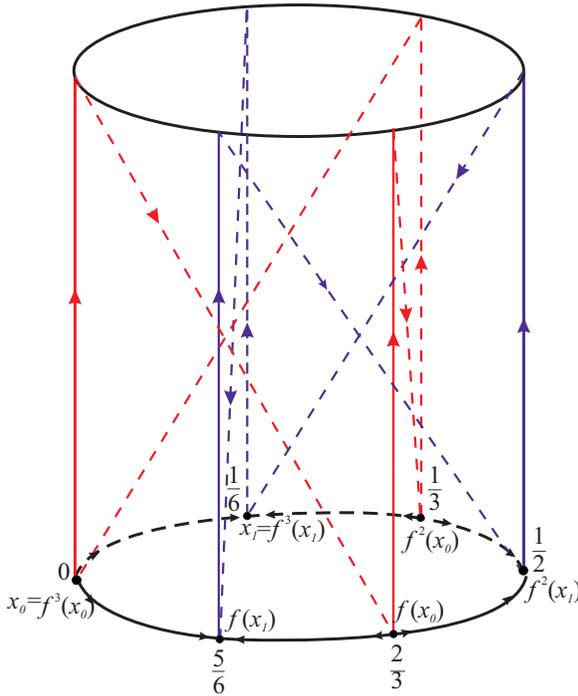


Рис. 2.2. Надстройка над диффеоморфизмом $f_{1,3,2}$

Fig 2.2. The superstructure over the diffeomorphism $f_{1,3,2}$

полноты изложения в данной работе мы приводим доказательство этого факта методом, допускающим многомерное обобщение.

Теорема 2.1. *Потоки f^t и $f^{t'}$: $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = n'$.*

Доказательство.

\Rightarrow Пусть надстройки f^t и $f^{t'}$ топологически эквивалентны. Значит существует гомеоморфизм, переводящий все орбиты потока f^t в орбиты потока $f^{t'}$, в том числе периодические в периодические. Тогда $n = n'$.

\Leftarrow Пусть $n = n'$. Построим гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков f^t и $f^{t'}$. Представим тор в виде

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] / f,$$

пологая, что $(s, 1) \sim (f(s), 0), s \in \mathbb{S}^1$. Обозначим через $p_f : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Положим $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$. Обозначим через $\pi : \Pi \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ – накрытие, определенное формулой

$$\pi(x, y) = (e^{i2\pi x}, y).$$

Положим $P_f = p_f \circ \pi : \Pi \rightarrow \mathbb{T}^2$ и $L_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{1}{k}y\}$. Выберем образующие a и b , параллель и меридиан на торе \mathbb{T}^2 следующим образом (см. Рис. 2.3):

$$a = P_f(L_f) = \{e^{i2\pi y}, y \in [0, 1)\}, b = P_f(Ox) = \{e^{i2\pi x}, x \in [0, 1)\}.$$

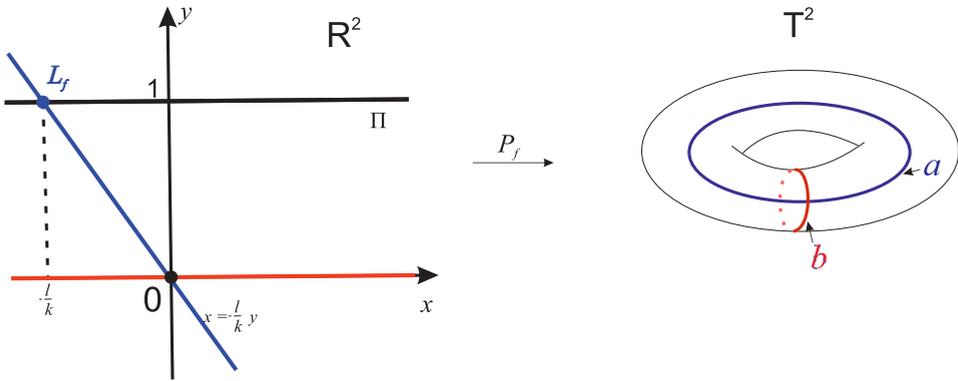


Рис. 2.3. Образующие на торе

Fig 2.3. Generators on the torus

Положим

$$z(x, y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}) \in \mathbb{T}^2.$$

Тогда каждая периодическая орбита потока f^t является узлом на торе, имеющим гомотопический тип $\langle k, l \rangle$ в выбранной системе образующих. Из определения надстройки следует, что эти узлы являются существенными. Тогда существует алгебраический автоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\varphi_*(\langle k, l \rangle) = \langle 1, 0 \rangle$ (см., например, [9]).

Рассмотрим поток $\tilde{f}^t = \varphi f^t \varphi^{-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Тогда его периодические траектории имеют гомотопический тип параллели $\langle 1, 0 \rangle$, а меридиан b является секущей к его траекториям, как и все узлы вида $b_{y_0} = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : y = y_0\}$. Тогда для каждого $y \in [0, 1)$ корректно определен диффеоморфизм $\xi_y : b \rightarrow b_y$, ставящий в соответствие точке $z = (x, 0) \in b$ первую точку пересечения $\xi_y(z)$ орбиты потока \tilde{f}^t , проходящей через точку z , с узлом b_y . Обозначим через $g_f : b \rightarrow b$ отображение Пуанкаре на меридиане (см. Рис 2.4). По построению оно является грубым преобразованием окружности с $2n$ неподвижными точками.

Аналогичные обозначения со штрихом введем для потока f^t . В силу предложения 1.1, существует гомеоморфизм $\tilde{h} : b \rightarrow b$, сопрягающий отображения g_f и $g_{f'}$. Для любой точки $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ определим гомеоморфизм $\tilde{H} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ формулой

$$\tilde{H}(x, y) = \tilde{h}\xi'_y\xi_y^{-1}.$$

Тогда искомый гомеоморфизм h , осуществляющий эквивалентность потоков f^t, f'^t определяется формулой

$$h = \varphi' \tilde{H} \varphi.$$

Доказательство завершено.

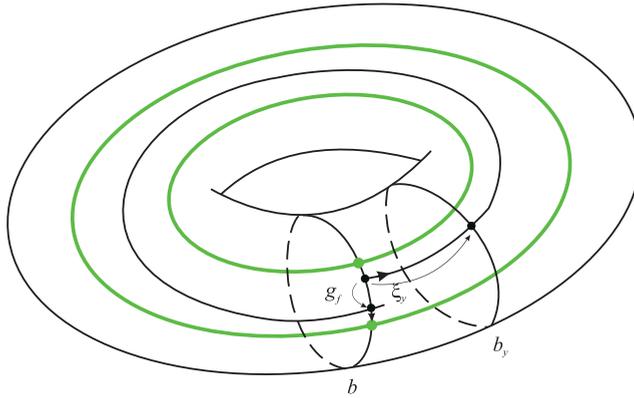


Рис. 2.4. Отображение Пуанкаре на меридиане

Fig 2.4. Poincare mapping on the meridian

3. Динамика надстроек над декартовым произведением грубых преобразований окружностей

Пусть $\phi^t : M_\phi \rightarrow M_\phi$ – надстройка над диффеоморфизмом $\phi = f_{n_1, k_1, l_1} \times f_{n_2, k_2, l_2} \in G$. Обозначим через n_{ϕ^t} число всех периодических орбит, через m_{ϕ^t} – число стоковых, через k_{ϕ^t} – источниковых, через l_{ϕ^t} – седловых орбит потока ϕ^t . Положим $N = n_1 n_2$, $K = k_1 k_2$, $\Delta = \text{НОД}(k_1, k_2)$.

Л е м м а 3.1. Для любого потока $\phi^t : M_\phi \rightarrow M_\phi$ справедливо следующее:

1. Объемлющее многообразие гомеоморфно трехмерному тору \mathbb{T}^3 .
2. Число периодических орбит определяется формулами:

$$n_{\phi^t} = 4N\Delta, l_{\phi^t} = 2N\Delta, m_{\phi^t} = N\Delta, k_{\phi^t} = N\Delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. По построению диффеоморфизм ϕ индуцирует изоморфизм фундаментальной группы, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 2.6 в [4], многообразии M_ϕ гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – тождественное отображение тора, заданное матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$. Таким образом M_ϕ гомеоморфно \mathbb{T}^3 .
2. Непосредственно следует из предложения 1.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

4. Эквивалентность надстроек над декартовым произведением окружностей

Основным результатом работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Потоки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $n_i = n'_i$, $i = 1, 2$ (с точностью до перенумерации компонент) и $\Delta = \Delta'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

\Rightarrow Пусть надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны. Тогда, в силу леммы 3.1, существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, переводящий все орбиты потока ϕ^t в орбиты потока ϕ'^t , в том числе периодические в периодические. Откуда $N\Delta = N'\Delta'$. Из свойств гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность потоков следует, что гомеоморфизм h переводит замыкания инвариантных многообразий седловых орбит потока ϕ^t в аналогичные замыкания потока ϕ'^t с сохранением устойчивости. Все такие замыкания формируют два семейства торов (попарно непересекающихся внутри одного семейства), в каждом из которых $2n_1\Delta$, $2n_2\Delta$, $2n'_1\Delta'$, $2n'_2\Delta'$ компонент связности. Тогда с точностью до перенумерации

$$\begin{cases} n_1 n_2 \Delta = n'_1 n'_2 \Delta', \\ n_1 \Delta = n'_1 \Delta', \\ n_2 \Delta = n'_2 \Delta'. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \Delta = \Delta', \\ n_1 = n'_1, \\ n_2 = n'_2. \end{cases}$$

\Leftarrow Пусть

$$\begin{cases} \Delta = \Delta', \\ n_1 = n'_1, \\ n_2 = n'_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

для потоков $\phi^t, \phi'^t : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$. Построим гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков ϕ^t и ϕ'^t . Представим тор в виде

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times [0, 1] / \phi,$$

полагая, что $(s, 1) \sim (\phi(s), 0)$, $s \in \mathbb{T}^1$. Обозначим через $p_\phi : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ естественную проекцию. Положим $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1\}$. Обозначим через $\pi : \Pi \rightarrow \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ – накрытие, определенное формулой

$$\pi(x, y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, z).$$

Положим $P_\phi = p_\phi \circ \pi : \Pi \rightarrow \mathbb{T}^3$ и $L_\phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{k_1}{l_1}x = \frac{k_2}{l_2}y = -z\}$. Выберем образующие a, b, c на торе \mathbb{T}^3 следующим образом:

$$a = P_\phi(L_\phi) = \{e^{i2\pi z}, z \in [0, 1]\},$$

$$b = P_\phi(Ox) = \{e^{i2\pi x}, x \in [0, 1]\}, c = P_\phi(Oy) = \{e^{i2\pi y}, y \in [0, 1]\}.$$

Положим

$$w(x, y, z) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}, e^{i2\pi z}) \in \mathbb{T}^3.$$

Тогда каждая периодическая орбита потока ϕ^t является узлом на торе, имеющим гомотопический тип $\langle \frac{l_1 k_2}{\Delta}, \frac{l_2 k_1}{\Delta}, \frac{k_1 k_2}{\Delta} \rangle$ в выбранной системе образующих. Из определения

надстройки следует, что эти узлы являются существенными. Тогда существует алгебраический автоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что $\varphi_* \left(\left\langle \frac{l_1 k_2}{\Delta}, \frac{l_2 k_1}{\Delta}, \frac{k_1 k_2}{\Delta} \right\rangle \right) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ (см., например, [9]).

Рассмотрим поток $\tilde{\phi}^t = \varphi \phi^t \varphi^{-1} : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$. Тогда его периодические траектории имеют гомотопический тип параллели $\langle 1, 0, 0 \rangle$, а тор $B = P_\phi(Oxy)$ является секущей к его траекториям, как и все торы вида $B_{z_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 : z = z_0\}$. Тогда для каждого $z \in [0, 1)$ корректно определен диффеоморфизм $\xi_z : B \rightarrow B_z$, ставящий в соответствие точке $w = (x, y, 0) \in B$ первую точку пересечения $\xi_z(w)$ орбиты потока $\tilde{\phi}^t$, проходящей через точку w , с тором B_z . Обозначим через $g_\phi : B \rightarrow B$ отображение Пуанкаре на торе B . По построению оно является грубым преобразованием тора с $4N\Delta$ неподвижными точками. При этом неподвижные точки лежат на $2n_2$ ($2n_1$) окружностях Σ_1 (Σ_2) следов торов, составленных из замыканий двумерных седловых многообразий параллельных осям Ox (Oy), и каждая пара окружностей из множеств Σ_1, Σ_2 пересекается в Δ точках (см. Рис. 4.5).

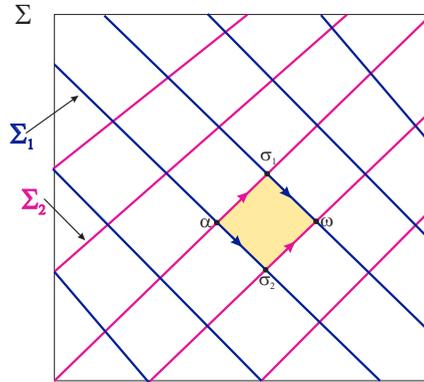


Рис. 4.5. Отображение последования на торе B

Fig 4.5. Sequence map on the torus B

Аналогичные обозначения со штрихом введем для потока ϕ'^t . Из условий 4.1 следует, что существует гомеоморфизм $\tilde{h} : B \rightarrow B$, сопрягающий отображения g_ϕ и $g_{\phi'}$. Для любой точки $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ определим гомеоморфизм $\tilde{H} : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ формулой

$$\tilde{H}(x, y) = \tilde{h} \xi'_z \xi_z^{-1}.$$

Тогда искомым гомеоморфизм h , осуществляющий эквивалентность потоков ϕ^t, ϕ'^t определяется формулой

$$h = \phi' \tilde{H} \phi.$$

Доказательство завершено.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке РФФ (грант № 23-71-30008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голикова И. В., Починка О. В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности // Огарёв-Online. 2020. № 13. URL: <https://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti> (дата обращения: 10.09.2023).
2. Гуревич Е. Я., Зинина С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1, С. 37–47.
3. Ikegami G. On classification of dynamical systems with cross-sections // Osaka Journal of Mathematics. 1969. Vol. 6, No. 2. P. 419–433.
4. Hatcher A. Notes on basic 3-manifold topology. 2007. 61 p.
5. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces // Arnold Mathematical Journal. 2018. Vol. 4, No. 3-4, P. 483–504. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40598-019-00103-0>
6. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. зап. ГГУ. 1939. № 12. С. 215–229.
7. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical systems. 1973. P. 389–419.
8. Зинина С. Х., Починка П. И. Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 54–65. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65>
9. Rolfsen. D. Knots and links. Mathematics Lecture Series 7. Providence: AMS Chelsea Publ., 1990. 450 p.
10. Smale S. Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms // Ann. Scuola Norm. Sup. 1963. Vol. 17, No. 3. P. 97–116.
11. Smale S. Differentiate dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 747–817. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8101-31>

*Поступила 05.08.2023; доработана после рецензирования 08.10.2023;
принята к публикации 09.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. I. V. Golikova, O. V. Pochinka, “Suspension over rough circle transformations”, *Ogarev-Online*, 2020, no. 13 (In Russ.).

2. E. Ya. Gurevich, S. H. Kapkaeva, “On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **17**:1 (2015), 37–47 (In Russ.).
3. G. Ikegami, “On classification of dynamical systems with cross-sections”, *Osaka Journal of Mathematics*, **6**:2 (1969), 419–433.
4. A. Hatcher, “Notes on basic 3-manifold topology”, 2007, 61 p.
5. V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, “On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces”, *Arnold Mathematical Journal*, **4**:3-4 (2018), 483–504. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40598-019-00103-0>
6. A. G. Mayer, “Rough transformation of a circle into a circle”, *Scientific notes of Gorky State University*, 1939, no. 12, 215–229 (In Russ.).
7. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389–419.
8. S. Kh. Zinina, P. I. Pochinka, “Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **24**:1 (2022), 54–65 (In Russ.). DOI: [10.15507/2079-6900.24.202201.54-65](https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65)
9. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Mathematics Lecture Series* 7, 1990.
10. S. Smale, “Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **17**:3 (1963), 97–116.
11. S. Smale, “Differentiate dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8101-31>

Submitted 05.08.2023; Revised 08.10.2023; Accepted 09.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.64

О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга

С. В. Сидоров, Г. В. Уткин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена проблеме распознавания подобия матриц над кольцом целых чисел для некоторых семейств матриц. А именно, рассматриваются нильпотентные верхние треугольные матрицы максимального ранга, у которых только первая и вторая супердиагонали ненулевые. Получено несколько необходимых условий подобия таких матриц матрицам вида $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ с одной ненулевой супердиагональю (обобщение жордановой клетки $J_n(0) = \text{superdiag}(1, 1, \dots, 1)$). Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей матричных элементов. Результат получен посредством сведения задачи распознавания подобия к задаче решения в целых числах системы линейных уравнений и применения известных необходимых условий подобия для произвольных матриц. При некоторых дополнительных условиях на элементы a_1, a_2, \dots, a_{n-1} первой супердиагонали матрицы A доказано, что A подобна матрице $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ независимо от значений элементов второй супердиагонали. Кроме того, для рассматриваемых матриц третьего и четвертого порядков получены легко проверяемые необходимые и достаточные условия подобия матрице вида $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Ключевые слова: подобие матриц, жорданова форма, нормальная диагональная форма Смита, кольцо целых чисел, нильпотентная матрица

Для цитирования: Сидоров С. В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 284–298. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.284-298>

Об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2883-6427>, sesidorov@yandex.ru

Уткин Герман Владимирович, лаборант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4794-2591>, german.utkingu@gmail.com

© С. В. Сидоров, Г. В. Уткин



MSC2020 15A04, 15A18, 15A21, 15B36

On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank

S. V. Sidorov, G. V. Utkin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to the problem of matrix similarity recognition over the ring of integers for some families of matrices. Namely, nilpotent upper triangular matrices of maximal rank are considered such that only first and second superdiagonals of these matrices are non-zero. Several necessary conditions are obtained for similarity of such matrices to matrices of the form $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ with a single non-zero superdiagonal, that is a generalization of the Jordan cell $J_n(0) = \text{superdiag}(1, 1, \dots, 1)$. These conditions are formulated in simple terms of divisibility and greatest common divisors of matrix elements. The result is obtained by reducing the problem of similarity recognition to the problem of solving in integers a system of linear equations and applying the known necessary similarity conditions for arbitrary matrices. Under some additional conditions on the elements a_1, a_2, \dots, a_{n-1} of the first superdiagonal of matrix A , it is proven that the matrix A is similar to matrix $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ regardless of the values of the elements of the second superdiagonal. Moreover, for the considered matrices of the third and the fourth orders, easily verifiable necessary and sufficient similarity conditions are obtained describing their similarity to a matrix of the form $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Keywords: similarity of matrices, Jordan form, Smith normal diagonal form, ring of integers, nilpotent matrix

For citation: S. V. Sidorov, G. V. Utkin. On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 284–298. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.284-298>

About the authors:

Sergey V. Sidorov, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2883-6427>, sesidorov@yandex.ru

German V. Utkin, Laboratory Assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Bachelor of Applied Computer Science, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4794-2591>, german.utkingu@gmail.com

1. Введение

Задача подобия матриц над кольцом целых чисел \mathbb{Z} является естественным обобщением классической задачи о подобии матриц над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Матрица $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ над полем \mathbb{Q} , если $B = X^{-1}AX$ для некоторой матрицы $X \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, $\det X \neq 0$.

Напомним, что через $GL(n, \mathbb{Z})$ обозначается множество целочисленных матриц, имеющих определитель 1 или -1 . Матрицу $X \in GL(n, \mathbb{Z})$ будем называть унимодулярной.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , если существует такая матрица $X \in GL(n, \mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрица X называется трансформирующей матрицей.

Если матрица A подобна над \mathbb{Z} матрице B , то будем обозначать это $A \sim B$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Классом подобия $K_{\mathbb{Z}}(A)$ матрицы $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ над \mathbb{Z} называется множество всех целочисленных матриц, которым матрица A подобна над \mathbb{Z} , т. е.

$$K_{\mathbb{Z}}(A) = \{B \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid A \sim B\}.$$

Впервые алгоритмическая разрешимость задачи распознавания подобия матриц над \mathbb{Z} была доказана независимо в [1–2]. В [3] получен новый алгоритм распознавания подобия в $GL(n, \mathbb{Z})$, основанный на идеях из [2]. В [4] решена проблема целочисленного подобия для нильпотентных и полупростых матриц; в [5] — для матриц с характеристическим многочленом, свободным от квадратов; в [6] разработан алгоритм для матриц конечного порядка в $GL(n, \mathbb{Z})$; в [7] описано множество классов подобия в $SL(n, \mathbb{Z})$.

Зачастую задача распознавания подобия над \mathbb{Z} упрощается, если все собственные значения матриц лежат в \mathbb{Z} . Например, в [8] получен квазиполиномиальный алгоритм распознавания подобия над \mathbb{Z} для матриц, имеющих целочисленный спектр и жорданова форма которых не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа. Также в [8] получена верхняя оценка числа классов подобия, если алгебраическая кратность всех собственных чисел равна 1. Кроме того, помимо разработки алгоритмов распознавания подобия интересны и другие аспекты рассматриваемой задачи — нахождение критериев подобия для каких-то специальных классов матриц и исследование структуры классов подобия (в частности, нахождение канонических матриц). Например, в работах [9–12] исследованы классы подобия над \mathbb{Z} матриц 2-го и 3-го порядков. Отметим, что классификация матриц относительно подобия над \mathbb{Z} возникает в топологии (см., например, [13, 14]).

Поскольку отношение подобия матриц над \mathbb{Z} есть отношение эквивалентности, то вместо фразы «матрица A подобна над \mathbb{Z} матрице B » можно говорить просто «матрицы A и B подобны над \mathbb{Z} ». Очевидно, что если $A \sim B$, то A подобна B над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Обратное неверно. Таким образом, подобие матриц над \mathbb{Q} — необходимое (но не достаточное!) условие для подобия над \mathbb{Z} . Простейшие контрпримеры можно посмотреть, например, в [12; 15; 16]. Переход от поля \mathbb{Q} к кольцу \mathbb{Z} сильно усложняет задачу распознавания подобия и нахождения трансформирующей матрицы. Класс подобия матрицы A над \mathbb{Q} , не совпадает с $K_{\mathbb{Z}}(A)$, а является объединением некоторого семейства классов подобия над \mathbb{Z} . Это семейство может быть как конечным, так и счётным (см. [12]).

Существует много других необходимых условий подобия над \mathbb{Z} ([12]). Рассмотрим некоторые из этих условий, требуемых для исследования. Напомним, что квадратные матрицы A и B называются эквивалентными над \mathbb{Z} , если существуют такие $P, Q \in GL(n, \mathbb{Z})$, что $PAQ = B$ (аналогично для неквадратных матриц). Очевидно, что если $A \sim B$, то A и B эквивалентны над \mathbb{Z} . Обозначим через $\Delta_k(A)$ наибольший общий делитель (НОД) всех миноров k -го порядка матрицы A . Известно, что критерием эквивалентности матриц A и B над \mathbb{Z} является равенство НОД миноров соответствующих

порядков (см. [17, 18]). Таким образом, если $A \sim B$, то $\Delta_k(A) = \Delta_k(B)$ для любого $k = 1, \dots, n$.

Из работ Г. Фробениуса известно, что если все собственные числа матрицы A лежат в \mathbb{Z} , то A подобна над \mathbb{Q} жордановой форме. Как показывают примеры в [12, 15], принадлежность всех собственных значений кольцу \mathbb{Z} не достаточна для подобия жордановой форме (даже для (2×2) -матриц). В работе [15] получены необходимые и достаточные условия подобия над \mathbb{Z} жордановой клетке $J_n(\alpha)$. Если характеристический многочлен матрицы A имеет вид $\det(A - \lambda E) = (\alpha - \lambda)^n$, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 0$ (т.е. матрица A нильпотентна), поскольку $A \sim B \iff (A - \alpha E) \sim (B - \alpha E)$. Поэтому естественным является вопрос, при каких условиях нильпотентная матрица подобна некоторому обобщению жордановой клетки, а именно, матрице $\text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, в которой отличны от 0 только элементы первой супердиагонали (очевидно, что $J_n(0) = \text{superdiag}(1, 1, \dots, 1)$). В статье мы частично отвечаем на этот вопрос. Далее ограничимся рассмотрением верхних треугольных нильпотентных матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, имеющих максимальный ранг (а именно, $\text{rank}(A) = n - 1$). Треугольный вид нильпотентной матрицы не ограничивает общность, поскольку любая нильпотентная матрица подобна над \mathbb{Z} некоторой верхней треугольной матрице (см. [16]). Все такие матрицы подобны над \mathbb{Q} жордановой клетке, для них характеристический многочлен λ^n совпадает с минимальным многочленом. Другая характеристика матриц такого вида — все элементы $a_{i,i+1}$ первой наддиагонали (супердиагонали) отличны от нуля. Как будет показано далее, это свойство элементов супердиагонали накладывает дополнительные ограничения (помимо принадлежности $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$) на вид трансформирующих матриц.

2. Верхние треугольные нильпотентные матрицы

Для *некоторых* классов исходных матриц A и B *любая* трансформирующая матрица $X = (x_{ij})$ имеет верхний треугольный вид, т.е. $x_{ij} = 0$ при $i > j$. Кроме того, в силу унимодулярности матрицы X её диагональные элементы x_{ii} будут при этом удовлетворять условию $x_{ii} \in \{-1, 1\}$. Таким образом, в этом случае задача распознавания подобия матриц упрощается, поскольку условия $AX = XB$, $X \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ будут равносильны разрешимости в целых числах хотя бы одной из 2^n систем уравнений

$$\sum_{k=1}^j a_{ik}x_{kj} = \sum_{k=i}^n x_{ik}b_{kj}, \quad x_{ii} \in \{-1, 1\}, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

(для каждого набора диагональных элементов $x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn} \in \{-1, 1\}$). Нахождение целочисленных решений систем линейных уравнений — классическая задача. Самый известный алгоритм её решения — приведение матрицы системы к нормальной диагональной форме Смита ([18]).

Одним из таких классов матриц являются верхние треугольные нильпотентные матрицы, в которых все элементы первой супердиагонали отличны от 0.

Л е м м а 2.1. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — целочисленные нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n максимального ранга $n - 1$, т.е. при любых $1 \leq j \leq i \leq n$ имеем $a_{ij} = b_{ij} = 0$, причём $a_{i,i+1} \neq 0$, $b_{i,i+1} \neq 0$ для любого $1 \leq i \leq n - 1$. Тогда если $A \sim B$, то

1. $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$;

2. Любая трансформирующая матрица $X = (x_{ii})$ является верхней треугольной, причём $x_{ii} = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $AX = XB$ и $X = (x_{ij}) \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ — трансформирующая матрица. Тогда X — верхняя треугольная матрица ([4], с. 117, Утверждение 4.22). Поскольку $\det(X) \in \{-1, 1\}$, то $x_{ii} \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда из условия $AX = XB$ следует, что

$$a_{i,i+1}x_{i+1,i+1} = x_{ii}b_{i,i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

стало быть, $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доказательство завершено.

Доказанная Лемма позволяет свести задачу распознавания подобия для нильпотентных матриц максимального ранга к решению в целых числах системы линейных уравнений.

Лемма 2.2. Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная нильпотентная верхняя треугольная матрица порядка n максимального ранга $n-1$ т. е. при любых $1 \leq j \leq i \leq n$ имеем $a_{ij} = 0$, причём $a_{i,i+1} \neq 0$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. Тогда существует такая нильпотентная верхняя треугольная матрица $C = (c_{ij})$, что $A \sim C$

$$c_{i,i+1} = \begin{cases} a_{i,i+1}, & \text{если } a_{i,i+1} > 0, \\ -a_{i,i+1}, & \text{если } a_{i,i+1} < 0 \end{cases}$$

для любого $1 \leq i \leq n-1$.

Доказательство. Будем искать диагональную матрицу Y , такую что $AY = YC$. Тогда $a_{i,i+1}y_{i+1,i+1} = y_{i,i}c_{i,i+1} = y_{i,i}\varepsilon_i a_{i,i+1}$, где ε_i — знак элемента $a_{i,i+1}$, т. е.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & \text{если } a_{i,i+1} > 0, \\ -1, & \text{если } a_{i,i+1} < 0. \end{cases}$$

Поскольку $a_{i,i+1} \neq 0$, то равенство $AY = YC$ для диагональной матрицы Y равносильно условиям $y_{i+1,i+1} = \varepsilon_i y_{i,i}$. Положив $y_{1,1} = 1$, получим $y_{i+1,i+1} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Таким образом, $C = Y^{-1}AY$, где $Y = \text{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1})$.

Доказательство завершено.

Эта Лемма показывает, что без ограничения общности можно рассматривать верхние треугольные нильпотентные матрицы максимального ранга, в которых все элементы первой наддиагонали положительны.

3. Матрицы специального вида: с одной и двумя ненулевыми супердиагоналями

В работе будем исследовать, при каких условиях подобны над \mathbb{Z} нильпотентные матрицы A и B вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_i \neq 0, c_i \neq 0 (i = 1, \dots, n - 1)$.

Последнюю матрицу будем обозначать $B = \text{superdiag}(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$.

Л е м м а 3.1. Пусть A и B – матрицы вида (3.1). Тогда

$$A \sim B \implies A \sim \text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $A \sim B$, то по Лемме 2.1 имеем $c_i = \pm a_i, (i = 1, \dots, n - 1)$. Если обозначить через ε_i знак элемента a_i , то $c_i = \varepsilon_i a_i$ и $B = \text{superdiag}(\varepsilon_1 a_1, \varepsilon_2 a_2, \dots, \varepsilon_n a_{n-1})$. Но $B \sim C = \text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Действительно, $BY = YC$ для $Y = \text{diag}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1})$. В силу транзитивности отношения подобия имеем $A \sim \text{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Таким образом, далее мы будем рассматривать нильпотентные матрицы A и B следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2, \dots, a_{n-1} — ненулевые целые числа. Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях эти матрицы подобны над кольцом целых чисел \mathbb{Z} . Отметим, что матрица A

вида (3.2) подобна над полем рациональных чисел \mathbb{Q} жордановой клетке, т.е. матрице $\text{superdiag}(1, 1, \dots, 1)$.

Необходимое условие подобия $\Delta_1(A) = \Delta_1(B)$ для матриц вида (3.2) равносильно тому, что $\text{НОД}(b_1, b_2, \dots, b_{n-2})$ делится на $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Без ограничения общности можно считать, что $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = 1$.

По Лемме 2.1 любая трансформирующая матрица X будет верхней треугольной с 1 и -1 по диагонали. Кроме того, поскольку $a_{i,i+1}x_{i+1,i+1} = x_{ii}a_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$), то $x_{ii} = x_{i+1,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Следовательно, $x_{i,i} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$ или $x_{i,i} = -1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Не умаляя общности, можно считать, что $x_{i,i} = 1$, поскольку если $AX = XB$, то и $A \cdot (-X) = (-X) \cdot B$. Таким образом, если $A \sim B$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица вида:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n-2)} & x_1^{(n-1)} \\ 0 & 1 & x_2^{(1)} & \ddots & x_2^{(n-3)} & x_2^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & x_3^{(n-4)} & x_3^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(здесь $x_i^{(j)}$ — i -й элемент j -й наддиагонали, т.е. в стандартных обозначениях $x_i^{(j)} = x_{i,i+j}$).

При конкретных значениях элементов матриц A и B вида (3.2) распознавание их подобия с алгоритмической точки зрения не представляет трудностей, поскольку сводится к решению системы линейных диофантовых уравнений. Как упоминалось выше, для решения таких систем можно использовать, например, метод приведения матрицы системы к нормальной диагональной форме Смита. Однако поставлена задача получить критерий подобия матриц вида (3.2) в терминах свойств элементов самих матриц.

Рассмотрим подробнее, как выглядит система уравнений $AX = XB$ для рассматриваемых матриц.

$$\begin{aligned} a_i x_{i+1}^{(1)} + b_i &= x_i^{(1)} a_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n-2), \\ a_i x_{i+1}^{(2)} + b_i x_{i+2}^{(1)} &= x_i^{(2)} a_{i+2}, \quad (i = 1, \dots, n-3), \\ a_i x_{i+1}^{(3)} + b_i x_{i+2}^{(2)} &= x_i^{(3)} a_{i+3}, \quad (i = 1, \dots, n-4), \\ &\dots \\ a_i x_{i+1}^{(n-3)} + b_i x_{i+2}^{(n-4)} &= x_i^{(n-3)} a_{i+n-3}, \quad (i = 1, 2), \\ a_1 x_2^{(n-2)} + b_1 x_3^{(n-3)} &= x_1^{(n-2)} a_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В этой системе $(n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ уравнений и $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ неизвестных ($x_1^{(n-1)}$ явно не входит). Видим, что система состоит из $(n-2)$ подсистем, причём k -я подсистема содержит $(n-k-1)$ уравнений. Кроме того, первая подсистема — неоднородная, остальные — однородные.

В качестве примера запишем систему (3.3) при $n = 6$:

$$\begin{aligned} a_i x_{i+1}^{(1)} + b_i &= x_i^{(1)} a_{i+1}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ a_i x_{i+1}^{(2)} + b_i x_{i+2}^{(1)} &= x_i^{(2)} a_{i+2}, \quad (i = 1, 2, 3), \\ a_i x_{i+1}^{(3)} + b_i x_{i+2}^{(2)} &= x_i^{(3)} a_{i+3}, \quad (i = 1, 2), \\ a_1 x_2^{(4)} + b_1 x_3^{(3)} &= x_1^{(4)} a_5, \end{aligned}$$

и соответствующую расширенную матрицу

$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_3^{(1)}$	$x_4^{(1)}$	$x_5^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_3^{(2)}$	$x_4^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_3^{(3)}$	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$	
a_2	$-a_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b_1
0	a_3	$-a_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b_2
0	0	a_4	$-a_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b_3
0	0	0	a_5	$-a_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b_4
0	0	$-b_1$	0	0	a_3	$-a_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-b_2$	0	0	a_4	$-a_2$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-b_3$	0	0	a_5	$-a_3$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$-b_1$	0	a_4	$-a_1$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-b_2$	0	a_5	$-a_2$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-b_1$	a_5	$-a_1$	0

Теорема 3.1. (критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений, см. [18, с. 51]) Пусть $P \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ – матрица ранга t и $b \in \mathbb{Z}^m$. Тогда система $Px = b$ имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда каждый минор порядка t расширенной матрицы (P, b) делится на $\Delta_t(P)$.

В следующей теореме приведены некоторые достаточные условия подобия над \mathbb{Z} матриц вида (3.2).

Теорема 3.2. Если $a_2, \dots, a_{n-2} \in \{-1, 1\}$, $a_1, a_{n-1} \neq 0$, $\text{НОД}(a_1, a_{n-1}) = 1$, то для любых $b_1, b_2, \dots, b_{n-2} \in \mathbb{Z}$ матрицы A и B вида (3.2) подобны над \mathbb{Z} .

Доказательство. Если записать матрицу системы $AX - XB = 0$, то в её основной матрице найдутся два ранговых минора, равных по модулю $a_2 \cdot a_3^2 \cdot \dots \cdot a_{n-2}^{n-3} \cdot a_{n-1}^{n-2}$ и $a_1^{n-2} \cdot a_2^{n-3} \cdot \dots \cdot a_{n-2}$. В условиях теоремы они будут равны a_{n-1}^{n-2} и a_1^{n-2} , поэтому $\text{НОД}(a_{n-1}^{n-2}, a_1^{n-2}) = \text{НОД}(a_1, a_{n-1}) = 1$. Следовательно, НОД всех ранговых миноров будет равен 1, поэтому при любых $b_1, b_2, \dots, b_{n-2} \in \mathbb{Z}$ система $AX - XB = 0$ будет совместна в целых числах по Теореме 3.1.

Доказательство завершено.

Теорема 3.3. (необходимые условия подобия) Если матрицы A и B вида (3.2) подобны над \mathbb{Z} , то выполняются следующие условия:

1. b_i делится на $\text{НОД}(a_i, a_{i+1})$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n - 2$.
2. $a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2}$ делится на $a_{i+1} \cdot \text{НОД}(a_i, a_{i+2})$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n - 3$.

Доказательство. Поскольку A и B подобны, то существует унитарная матрица X , такая что $AX = XB$. Разобьём матрицы A, B, X на блоки следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_i & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & X_i & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & B_i & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & b_i \\ 0 & 0 & a_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ 0 & 1 & x_{i+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AX = XB$, то $A_i X_i = X_i B_i$, $X_i \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$. Таким образом, A_i и B_i тоже подобны над \mathbb{Z} . Следовательно, $\Delta_1(A_i) = \Delta_1(B_i)$. Имеем $\Delta_1(B_i) = \text{НОД}(a_i, a_{i+1})$, $\Delta_1(A_i) = \text{НОД}(a_i, a_{i+1}, b_i) = \text{НОД}(\Delta_1(B_i), b_i)$, поэтому равенство $\Delta_1(A_i) = \Delta_1(B_i)$

равносильно тому, что b_i делится на $\Delta_1(B_i)$, т. е. $b_i : \text{НОД}(a_i, a_{i+1})$.

Теперь пусть

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & b_i & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(1)} & x_i^{(2)} & x_i^{(3)} \\ 0 & 1 & x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & x_{i+2}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разбивая аналогичным образом матрицы A, B, X на блоки, получаем, что $A_i \sim B_i$. Однако тогда квадраты этих матриц A_i^2, B_i^2 тоже подобны над \mathbb{Z} . Поскольку

$$A_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_i a_{i+1} & a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1} a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_i a_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1} a_{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $A_i^2 \sim B_i^2$, то $\Delta_1(A_i^2) = \Delta_1(B_i^2)$. Имеем

$$\Delta_1(B_i^2) = \text{НОД}(a_i a_{i+1}, a_{i+1} a_{i+2}) = a_{i+1} \cdot \text{НОД}(a_i, a_{i+2}),$$

$$\Delta_1(A_i^2) = \text{НОД}(a_i a_{i+1}, a_{i+1} a_{i+2}, a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2}) = \text{НОД}(\Delta_1(B_i^2), a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2}),$$

поэтому равенство $\Delta_1(A_i^2) = \Delta_1(B_i^2)$ равносильно тому, что $a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2}$ делится на $\Delta_1(B_i^2)$, т. е. $(a_i b_{i+1} + b_i a_{i+2})$ делится на $a_{i+1} \cdot \text{НОД}(a_i, a_{i+2})$.

Доказательство завершено.

Утверждение 3.1. Пусть $\text{НОД}(a_k, a_{k+2}) = 1$ и $(a_k b_{k+1} + b_k a_{k+2}) : a_{k+1}$. Тогда

1. b_k делится на $\text{НОД}(a_k, a_{k+1})$;
2. b_{k+1} делится на $\text{НОД}(a_{k+1}, a_{k+2})$.

Доказательство. Имеем $(a_k b_{k+1} + b_k a_{k+2}) : a_{k+1}$, т. е. $a_k b_{k+1} + b_k a_{k+2} = a_{k+1} x$ для некоторого $x \in \mathbb{Z}$, поэтому $b_k a_{k+2} : \text{НОД}(a_k, a_{k+1})$ и $a_k b_{k+1} : \text{НОД}(a_{k+1}, a_{k+2})$.

Условие $\text{НОД}(a_k, a_{k+2}) = 1$ влечёт $\text{НОД}(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = 1$, поэтому $b_k \dot{:} \text{НОД}(a_k, a_{k+1})$ и $b_{k+1} \dot{:} \text{НОД}(a_{k+1}, a_{k+2})$.

Доказательство завершено.

Таким образом, если $\text{НОД}(a_i, a_{i+2}) = 1$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n-3$, то из второго необходимого условия Теоремы 3.3 вытекает первое.

4. Критерии подобия для матриц малых порядков

4.1. Матрицы порядка 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенство $AX = XB$ равносильно в этом случае уравнению $b_1 + a_1 y_2 = a_2 y_1$, которое имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда b_1 делится на $\text{НОД}(a_1, a_2)$. Заметим, что для матриц третьего порядка из условий Теоремы 3.3 остаётся только первое условие (а именно, b_1 делится на $\text{НОД}(a_1, a_2)$), которое является критерием подобия в этом случае.

Т е о р е м а 4.1. Пусть $n = 3$ и $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. Тогда матрицы A и B вида (3.2) подобны над \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда b_1 делится на $\text{НОД}(a_1, a_2)$.

4.2. Матрицы порядка 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Для (4×4) -матриц условия Теоремы 3.3 следующие:

1. $b_1 \dot{:} \text{НОД}(a_1, a_2)$, $b_2 \dot{:} \text{НОД}(a_2, a_3)$.
2. $a_1 b_2 + b_1 a_3$ делится на $a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)$.

Эти условия не являются достаточными для подобия над \mathbb{Z} , что показывает следующий пример.

П р и м е р 4.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & r & 0 \\ 0 & 0 & r & r \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где p, r — различные простые числа. Для этих матриц условия Теоремы 3.3 выполняются, но A и B не подобны. Действительно, $\Delta_2(A) \neq \Delta_2(B)$, поскольку $\Delta_2(A) = \text{НОД}(pr, p^2, r^2) = 1$, а $\Delta_2(B) = \text{НОД}(pr, p^2) = p$.

Заметим, что если $\text{НОД}(a_1, a_3) = 1$ (отсюда, в частности, следует, что $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$), то необходимые условия Теоремы 3.3 становятся достаточными. Кроме того, первое условие вытекает из второго по Утверждению 3.1.

Т е о р е м а 4.2. *Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$, $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Тогда*

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} 1) (a_1 b_2 + b_1 a_3) \dot{=} a_2; \\ 2) b_1 b_2 \dot{=} \text{НОД}(a_1, a_3). \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $AX = XB$ для X вида (4.1) равносильно системе

$$\begin{cases} a_2 y_1 - a_1 y_2 = b_1, \\ a_3 y_2 - a_2 y_3 = b_2, \\ a_3 z_1 - a_1 z_2 = b_1 y_3, \end{cases}$$

которую можно записать в матричном виде $Px = b$, где

$$P = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & a_3 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a_i \neq 0$, ($i = 1, 2, 3$), то ранг матрицы P равен 3. Таким образом, по теореме 3.1 система $Px = b$ совместна над \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда все миноры порядка 3 матрицы (P, b) делятся на НОД миноров порядка 3 матрицы P , т. е. на $\Delta_3(P)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_3(P) &= \text{НОД}(a_2 a_3 b_1, a_2 a_3^2, a_1 a_2 a_3, a_2^2 a_3, a_1 a_2^2, a_1^2 a_2) = \\ &= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3 b_1, a_3^2, a_1 a_3, a_2 a_3, a_1 a_2, a_1^2) = \\ &= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3 \cdot \text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3), a_1 a_2, a_1^2) = \\ &= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3) \end{aligned}$$

(последнее равенство справедливо, поскольку a_3 и $\text{НОД}(a_1, a_2)$ взаимно простые).

Итак,

$$\Delta_3(P) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3).$$

Перечислим все миноры порядка 3 для расширенной матрицы (P, b) , отличные от миноров матрицы P :

$$a_2 b_1 b_2, \quad a_2 a_3 b_2, \quad a_1 a_2 b_1, \quad b_1(a_1 b_2 + b_1 a_3), \quad a_3(a_1 b_2 + b_1 a_3), \quad a_1(a_1 b_2 + b_1 a_3).$$

Заметим, что величины $a_2 a_3 b_2, a_1 a_2 b_1$ заведомо делятся на $\Delta_3(P)$.

Число $a_2 b_1 b_2$ делится на $\Delta_3(P)$ тогда и только тогда, когда $b_1 b_2 \dot{=} \text{НОД}(a_1, a_3)$.

Остальные три минора делятся на $\Delta_3(P)$ тогда и только тогда, когда $(a_1 b_2 + b_1 a_3) \cdot \text{НОД}(b_1, a_1, a_3)$ делится на $a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)$. Однако это равносильно тому, что $a_1 b_2 + b_1 a_3$ делится на $a_2 \cdot \frac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$. В свою очередь, в силу взаимной простоты сомножителей

a_2 и $\frac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$ это равносильно тому, что $a_1 b_2 + b_1 a_3$ делится на a_2 (поскольку $a_1 b_2 + b_1 a_3$ заведомо делится на $\frac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(b_1, a_1, a_3)}$).
Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 4.1. (критерий подобия при $n = 4$) Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} & 1) b_1 \dot{:} d, b_2 \dot{:} d; \\ A \sim B & \iff 2) b_1 b_2 \dot{:} (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)); \\ & 3) (a_1 b_2 + b_1 a_3) \dot{:} d a_2. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Условие $A \sim B$ равносильно тому, что $b_i \dot{:} d$, $i = 1, 2$ и $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$. Поскольку матрицы $\frac{1}{d}A$ и $\frac{1}{d}B$ удовлетворяют условиям Теоремы 4.2, то $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{a_1 b_2}{d} + \frac{b_1 a_3}{d} \right) \dot{:} \frac{a_2}{d}, \quad \frac{b_1 b_2}{d} \dot{:} \text{НОД} \left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_3}{d} \right).$$

Это равносильно тому, что $(a_1 b_2 + b_1 a_3) \dot{:} d a_2$, $b_1 b_2 \dot{:} (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3))$. С учётом условия $b_i \dot{:} d$, $i = 1, 2$ получаем требуемое.
Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 4.2. Рассмотрим матрицы вида (3.2) при $n = 4$. Пусть $\text{НОД}(a_1, a_3) = 1$, $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Тогда

$$A \sim B \iff (a_1 b_2 + b_1 a_3) \dot{:} a_2.$$

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00194).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sarkisjan R. A. Conjugacy problem for sets of integral matrices // Math. Notes. 1979. Vol. 25, no. 6. pp. 419–426. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01230982>
2. Grunewald F. J. Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups // Word Problems II. 1980. Vol. 95. pp. 101–139. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(08\)71335-1](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71335-1)
3. Eick B., Hofmann T., O'Brien E. A. The conjugacy problem in $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ // J. Lond. Math. Soc. 2019. Vol. 100, no. 3. pp. 731–756. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.12246>

4. Husert D. Similarity of integer matrices : PhD Thesis. Paderborn, 2017. 147 p.
5. Marseglia S. Computing the ideal class monoid of an order // J. Lond. Math. Soc. 2019. Vol. 101, no. 3. pp. 984–1007. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.12294>
6. Opgenorth J., Plesken W., Schulz T. Crystallographic algorithms and tables // Acta Cryst. 1998. Vol. 54, no. 5. pp. 517–531. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876739701547X>
7. Karpenkov O. Multidimensional Gauss reduction theory for conjugacy classes of $SL(n, \mathbb{Z})$ // J. Theor. Nombres Bordeaux. 2013. Vol. 25, no. 1. pp. 99–109.
8. Сидоров С. В. О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 86–94.
9. Appelgate H., Onishi H. The similarity problem 3×3 integer matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 42, no. 2. pp. 159–174. DOI: <https://doi.org/10.2307/2043695>
10. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 119–127.
11. Сидоров С. В. Выделение эффективно разрешимых классов в задаче подобия матриц над кольцом целых чисел : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2015. 121 с.
12. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. Т. 50, № 4. С. 56–63.
13. Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневожского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079.6900.23.202103.295-307>
14. Gorbatsevich V. V. Compact solvmanifolds of dimension at most 4 // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, no. 2. pp. 239–252.
15. Сидоров С. В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 763–770. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11859>
16. Newman M. Integral matrices. NY-London: Academic Press, 1972. 223 p.
17. Lazebnik F. On systems of linear Diophantine equations // Mathematics Magazine. 1996. Vol. 69. pp. 261–266. DOI: <https://doi.org/10.2307/2690528>
18. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. Wiley, 1998. 464 p.

*Поступила 04.08.2023; доработана после рецензирования 05.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. R. A. Sarkisjan, “Conjugacy problem for sets of integral matrices”, *Math. Notes*, **25**:6 (1979), 419–426. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01230982>
2. F. J. Grunewald, *Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups*, Word Problems II, **95**, 1980, 101–139 DOI: [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(08\)71335-1](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71335-1).
3. B. Eick, T. Hofmann, E. A. O’Brien, “The conjugacy problem in $GL(n, \mathbb{Z})$ ”, *J. Lond. Math. Soc.*, **100**:3 (2019), 731–756. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.12246>
4. D. Husert, *Similarity of integer matrices*, PhD Thesis, University of Paderborn, 2017, 147 p.
5. S. Marseglia, “Computing the ideal class monoid of an order”, *J. Lond. Math. Soc.*, **101**:3 (2019), 984–1007. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.12294>
6. J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schulz, “Crystallographic algorithms and tables”, *Acta Cryst. Sect.*, **54**:5 (1998), 517–531. DOI: <https://doi.org/10.1107/S010876739701547X>
7. O. Karpenkov, “Multidimensional Gauss reduction theory for conjugacy classes of $SL(n, \mathbb{Z})$ ”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **25**:1 (2013), 99–109.
8. S. V. Sidorov, “Similarity of matrices with integer spectra over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55**:3 (2011), 77–84 (In Russ.).
9. H. Appelgate, H. Onishi, “The similarity problem 3×3 integer matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **42**:2 (1982), 159–174. DOI: <https://doi.org/10.2307/2043695>
10. S. V. Sidorov, “On similarity of matrices of third order over the ring of integers with reducible characteristic polynomial”, *Vestnik Nizhegorodsk. Univ.*, 2009, no. 1, 119–127 (In Russ.).
11. S. V. Sidorov, *Selection of effectively solvable classes in the problem of similarity of matrices over the ring of integers*, PhD Dissertation, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.).
12. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, “On the similarity of second-order matrices over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50**:4 (2006), 56–63 (In Russ.).
13. S. V. Sidorov, E. E. Chilina, “On non-hyperbolic algebraic automorphisms of the torus”, *Zhurnal SVMO*, **23**:3 (2021), 295–307 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079.6900.23.202103.295-307>
14. V. V. Gorbatsevich, “Compact solvmanifolds of dimension at most ≤ 4 ”, *Sib. Math. J.*, **50**:2 (2009), 239–252.
15. S. V. Sidorov, “On the similarity of certain integer matrices with single eigenvalue over the ring of integers”, *Math Notes*, **105** (2019), 756–762 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434619050122>
16. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.

17. F. Lazebnik, “On systems of linear Diophantine equations”, *Mathematics Magazine*, **69** (1996), 261–266. DOI: <https://doi.org/10.2307/2690528>
18. A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1998, 464 p.

Submitted 04.08.2023; Revised 05.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.299-312
Original article

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 34D20

On the stability of a nonlinear nonautonomous scalar equation with variable delay

J. Kh. Khusanov¹, A. E. Kaxxorov²

¹ *Sambhram University (Jizzakh, Uzbekistan)*

² *Academic lyceum of Tashkent State Technical University named after I. Karimov (Tashkent, Uzbekistan)*

Abstract. The stability problem of a scalar functional differential equation is a classical one. It has been most fully studied for linear equations. Modern research on modeling biological, infectious and other processes leads to the need to determine the qualitative properties of the solutions for more general equations. In this paper we study the stability and the global limit behavior of solutions to a nonlinear one-dimensional (scalar) equation with variable delay with unbounded and bounded right-hand sides. In particular, our research is reduced to a problem on the stability of a non-stationary solution of a nonlinear scalar Lotka-Volterra-type equation, on the stabilization and control of a non-stationary process described by such an equation. The problem posed is considered depending on the delay behavior: is it a bounded differentiable function or a continuous and bounded one. The study is based on the application of the Lyapunov-Krasovskiy functionals method as well as the corresponding theorems on the stability of non-autonomous functional differential equations of retarded type with finite delay. Sufficient conditions are derived for uniform asymptotic stability of the zero solution, including global stability, for every continuous initial function. Using the theorem proven by one of the co-authors on the limiting behavior of solutions to a non-autonomous functional differential equation based on the Lyapunov functional with a semidefinite derivative, the properties of the solutions' attraction to the set of equilibrium states of the equation under study are obtained. In addition, illustrative examples are provided.

Keywords: nonlinear scalar differential equation, variable delay, stability, attraction of solutions, Lyapunov functional

About the authors:

Jumanazar Kh. Khusanov, Professor, Sambhram University (3, H. Nosirov Street, Jizzakh 130100, Uzbekistan), Dr. Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

Azizbeck E. Kaxxorov, Graduate Student, Academic lyceum of Tashkent State Technical University named after I.Karimov (2, University street, Tashkent 100095, Uzbekistan), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5723-8640>, azizqahhorov@gmail.com

© J. Kh. Khusanov, A. E. Kaxxorov



УДК 517.929.4

Об устойчивости нелинейного неавтономного скалярного уравнения с переменным запаздыванием

Д. Х. Хусанов¹, А. Э. Каххаров²¹ Университет Sambgram (г. Джизак, Узбекистан)² Академический лицей ТашГТУ имени И. Каримова (г. Ташкент, Узбекистан)

Аннотация. Задача устойчивости скалярного функционально-дифференциального уравнения имеет классический характер. Наиболее полно она изучена для уравнений линейного типа. Современные исследования по моделированию биологических, инфекционных и других процессов приводят к необходимости определения качественных свойств решений более общих уравнений. В данной работе изучается задача об устойчивости и глобальном предельном поведении решений нелинейного одномерного (скалярного) уравнения с переменным запаздыванием, с неограниченной и ограниченной правой частью. К такой задаче, в частности, сводятся исследования: об устойчивости нестационарного решения нелинейного скалярного уравнения типа Лотки-Вольтерра, о стабилизации и управлении нестационарным процессом, описываемым таким уравнением. Поставленная задача рассмотрена в зависимости от случаев: запаздывание является ограниченной дифференцируемой функцией или непрерывным и ограниченным. Исследование основано на применении метода функционалов Ляпунова-Красовского и соответствующих теорем об устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с конечным запаздыванием. Выведены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения, в том числе, глобальной при любых начальных непрерывных функциях. По теореме одного из соавторов об исследовании предельного поведения решений неавтономного функционально-дифференциального уравнения на основе функционала Ляпунова со знакомостоянной производной выводятся свойства притяжения решений к множеству состояний равновесия исследуемого уравнения. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: нелинейное скалярное дифференциальное уравнение, переменное запаздывание, устойчивость, притяжение решений, функционал Ляпунова

Для цитирования: Хусанов Д.Х., Каххаров А.Э. Об устойчивости нелинейного неавтономного скалярного уравнения с переменным запаздыванием // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 299-312. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.299-312>

Об авторах:

Хусанов Джуманазар Хусанович, профессор Университета Sambgram (130100, Узбекистан, Джизак, ул. Х. Носирова, 3), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

Каххаров Азизбек Эсанович, аспирант Академического лицея Ташкентского государственного технического университета имени И. Каримова (100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 2), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5723-8640>, azizqahhorov@gmail.com

1. Introduction

The needs of science and technology in the middle of the last century stimulated the intensive development of the stability theory for functional differential equations [1–4].

In the monograph [1], fundamental results on the study of scalar linear equations were obtained. The stability problem of such an equation has been the subject of active study to this day [5–10]. Equations with distributed and several discrete delays including those with unbounded one are considered. Research in [5–8], [10] was carried out by direct analyzing of the solutions including their comparison and construction of successive approximations. The same approach was used in the works [10], [11] and others to obtain the stability conditions for the zero solution of a scalar nonlinear equation. It was assumed that the right-hand side of the equation is estimated modulo by a linear function with a time-independent proportionality coefficient. In [12–14] these results are generalized in the direction of sufficient conditions for uniform asymptotic stability with a coefficient unbounded in time. For this purpose, these works developed the method of Lyapunov-Krasovskiy functionals in studying the stability of non-autonomous functional differential equations with an unbounded right-hand side in time.

Modern modeling in biology and epidemiology, in the neoclassical theory of population, living systems and other systems and processes leads to the need to study the qualitative properties of solutions to nonlinear nonautonomous differential equations that have two or more stationary states, periodic or chaotic changes in variables. The application of the obtained results to such problems is indicated in the works [8], [10], [15–18]. In the works [8], [10] the stability of models of population dynamics described by the Hutchinson and Mackey-Glass equations was studied. The work [15] considers the model of a living system based on an integral equation that reduces to a non-autonomous non-linear scalar equation with a finite or distributed delay. Stationary solutions are found and the asymptotic behavior of the perturbed solutions is studied.

The presented analysis shows that the problem of nonlocal limit properties of an essentially nonlinear nonautonomous equation with delay, which has a non-unique stationary solution, remains insufficiently studied.

In this paper, we study the stability problem and the global limit behavior for the solutions of a nonlinear equation with variable delay, with unbounded and bounded right-hand sides. Sufficient conditions for uniform asymptotic stability are derived, including global, zero solution, and attraction of solutions to a set of equilibrium states. In addition, we provide illustrative examples.

2. Formulation of the stability problem

Let \mathbb{R} be the real axis, and let $h_0 > 0$ be a given number. Denote by \mathbb{C} the Banach space of the continuous functions $\varphi : [-h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ with the norm $\|\varphi\| = \max_{-h_0 \leq s \leq 0} (|\varphi(s)|)$. For a continuous function $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ define the function $x_t \in \mathbb{C}$ by the equality $x_t(s) = x(t + s)$ ($s \in [-h_0, 0]$). Denote by $\dot{x}(t)$ the right-hand derivative of the function $x = x(t)$.

Consider the functional-differential equation

$$\dot{x}(t) = a(t, x_t)g(x(t)) + b(t, x_t)q(t, x(t - h(t))), \quad (2.1)$$

where $t \in \mathbb{R}^+$; $a, b \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R})$; $h \in C(\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, h_0])$; the functions $g \in C(\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R})$

and $q \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ are such that

$$g(0) = 0, \quad q(t, 0) \equiv 0.$$

Without loss of generality, assume that for each initial point $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ there exists a unique solution of equation (2.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ that satisfies the initial condition $x_\alpha = x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$ and is defined at $t \in [\alpha - h_0, \beta)$ ($\beta > \alpha$). Equation (2.1) has a zero solution $x(t, \alpha, 0) \equiv 0$ ($\forall t \geq \alpha - h_0$).

Consider the stability problem of the zero solution $x \equiv 0$ of equation (2.1) and the limit behavior of its bounded solutions $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H = \text{const}$ ($t \geq \alpha - h_0$).

For convenience sake, let us introduce the class \mathcal{K} of Hahn-type functions [4] which are continuous and strictly monotonically increasing functions $d_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $d_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots$

3. On the solution to the stability problem without the boundedness assumption of the right-hand side of equation (2.1)

Let us study the above formulated stability problem under the following assumptions about the functions $g = g(x)$ and $h = h(t)$

$$|q(t, x)| \leq \mu(t, H_1)|g(x)|, \quad |g(x)| \leq L(H_1)|x| \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \{|x| \leq H_1 = \text{const} > 0\}, \quad (3.1)$$

$$h \in C^1(\mathbb{R}^+ \rightarrow [0, h_0]), \quad \dot{h}(t) = \frac{dh(t)}{dt} \leq 1 - h_1, \quad h_1 = \text{const} > 0. \quad (3.2)$$

Theorem 3.1. *Assume that the following conditions hold:*

- 1) $g(x)x > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x| \leq H_0 < H_1\}$;
- 2) $|b(t, \varphi)|\mu(t, H_1) \leq a_0 l(\varphi)(1 - \dot{h}(t))^{1/2}$, $l(\varphi) \geq 0$, $A(t, \varphi) = 2a(t, \varphi) + a_0 l^2(\varphi) \leq -a_0 - \varepsilon_0$ ($a_0 > 0, \varepsilon_0 > 0$) $\forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \{\varphi \in \mathbb{C} : \|\varphi\| \leq H_1\}$.

Then the solution $x = 0$ of equation (2.1) is uniformly asymptotically stable.

Proof. Let us introduce the following function and functional

$$G(x) = \int_0^x g(\tau) d\tau, \quad V(t, \varphi) = G(\varphi(0)) + \frac{1}{2} a_0 \int_{-h(t)}^0 g^2(\varphi(\tau)) d\tau. \quad (3.3)$$

It follows from condition 1 of the theorem that there exists a function $d_1 \in \mathcal{K}$ such that

$$V(t, \varphi) \geq d_1(|\varphi(0)|).$$

Using inequalities from (3.1) we find the estimate

$$\begin{aligned} V(t, \varphi) &\leq G(\varphi(0)) + \frac{1}{2} a_0 \int_{-h(t)}^0 g^2(\varphi(\tau)) d\tau \leq \frac{1}{2} L(H_1) |\varphi(0)|^2 + \frac{1}{2} a_0 L^2(H_1) \int_{-h_0}^0 \varphi^2(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} [L(H_1) |\varphi(0)|^2 + a_0 L^2(H_1) \|\varphi\|^2], \end{aligned} \quad (3.4)$$

where the norm

$$\|\varphi\| = \left(\int_{-h_0}^0 \varphi^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}$$

is introduced in accordance with the theorem from [12].

According to inequalities (3.1), (3.2), and using the second inequality from condition 2 of the theorem, one can obtain the following estimation for the time derivative of the functional V due to the equation (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varphi) &= (a(t, \varphi) + \frac{1}{2}a_0)g^2(\varphi(0)) + b(t, \varphi)g(\varphi(0))q(t, \varphi(-h(t))) - \frac{1}{2}a_0(1 - \dot{h}(t))g^2(\varphi(-h(t))) \leq \\ &\leq (a(t, \varphi) + \frac{1}{2}a_0)g^2(\varphi(0)) + |b(t, \varphi)||g(\varphi(0))||q(t, \varphi(-h(t)))| - \frac{a_0}{2}(1 - \dot{h}(t))g^2(\varphi(-h(t))) \leq \\ &\leq (a(t, \varphi) + \frac{1}{2}a_0)g^2(\varphi(0)) + a_0l(\varphi)(1 - \dot{h}(t))^{1/2}|g(\varphi(0))|g(\varphi(-h(t))) - \\ &- \frac{a_0}{2}(1 - \dot{h}(t))g^2(\varphi(-h(t))) \leq \frac{1}{2}(A(t, \varphi) + a_0)g^2(\varphi(0)) \leq -\frac{1}{2}\varepsilon_0g^2(\varphi(0)). \end{aligned}$$

Thus, all the assumptions of the corresponding theorem from [12] hold. Hence, the theorem is proved.

The following result holds.

Theorem 3.2. *Assume that the following conditions are satisfied:*

- 1) $g(x)x < 0, \quad \forall x \in D = \{x \in \mathbb{R} : -H_1 \leq -H_0 \leq x < 0\}$;
- 2) *condition 2 of Theorem 3.1 holds.*

Then the solution $x = 0$ of equation (2.1) is unstable.

Proof. For definiteness, let us assume that condition 1 of the theorem holds for all $x \in D$. From this, using inequalities (3.1) one can find the functions $d_1, d_2 \in \mathcal{K}$ such as

$$d_1(|x|) \leq g(x) \leq L(H_1)|x|; \quad -G(x) \leq d_2(|x|) \quad \forall x \in D. \tag{3.5}$$

Consider the functional

$$V = V(t, \varphi) = -G(\varphi(0)) - \frac{1}{2}a_0 \int_{-h(t)}^0 g^2(\varphi(\tau)) d\tau. \tag{3.6}$$

By virtue of inequalities (3.5), there exists an open set \mathbb{C}_0 with boundary $\{x = 0\} \in \partial\mathbb{C}_0$ defined by the equality $\mathbb{C}_0 = \{\varphi \in \mathbb{C} : \varphi(s) < 0, \|\varphi\| \leq H_0, V(t, \varphi) > 0\}$.

Moreover, by the definition (3.6) of $V(t, \varphi)$, we have

$$V = V(t, \varphi) \leq d_2(|\varphi(0)|) \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}_0. \tag{3.7}$$

For the derivative of the functional $V = V(t, \varphi)$ by virtue of condition 2, in the domain $\mathbb{R}^+ \times \{\varphi \in \mathbb{C} : \varphi(s) \leq 0, \|\varphi\| < H_1\}$, we have the estimates

$$\dot{V}(t, \varphi) = -a(t, \varphi)g^2(\varphi(0)) - b(t, \varphi)g(\varphi(0))q(t, \varphi(-h(t))) - \frac{1}{2}a_0g^2(\varphi(0)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}a_0g^2(\varphi(-h(t)))(1 - \dot{h}(t)) \geq -(a(t, \varphi) + \frac{1}{2}a_0)g^2(\varphi(0)) - \\
 & \quad - a_0l(\varphi)(1 - \dot{h}(t))^{1/2}g(\varphi(0))g(\varphi(-h(t))) + \\
 & + \frac{1}{2}a_0g^2(\varphi(-h(t)))(1 - \dot{h}(t)) \geq -\frac{1}{2}(A(t, \varphi) + a_0)g^2(\varphi(0)) \geq \\
 & \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0g^2(\varphi(0)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0d_1^2(|\varphi(0)|). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

From inequalities (3.7) and (3.8) along the solution $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_0$ of equation (2.1), we obtain the relation

$$\dot{V}(t, x_t(\alpha, \varphi)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0d_1^2(d_2^{-1}(V(t, x_t(\alpha, \varphi))))).$$

Hence, it follows that $x_t(\alpha, \varphi) \in \mathbb{C}_0 \forall t \in [\alpha, \beta)$, and the equality $x(t, \alpha, \varphi) = -H_0$ holds for $t = \beta$. This proves the theorem.

Let us study the uniform attraction problem of the zero solution of equation (2.1). For this, note that T. A. Burton’s theorem from [12] can be developed for such a problem as well. On this basis, similarly to Theorem 3.1, the following theorem can be proved.

Theorem 3.3. *Assume that inequality (3.1) and the conditions of Theorem 3.1 are satisfied for all $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ and all $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$, and also the following holds*

3) *there exist sequences $x_k \rightarrow \infty$ and $x_l \rightarrow -\infty$ such that $G(x_k) \rightarrow \infty$ and $G(x_l) \rightarrow \infty$ as $k, l \rightarrow \infty$.*

Then the solutions of equation (2.1) are uniformly bounded and the zero solution $x = 0$ of equation (2.1) is globally uniformly asymptotically stable.

Example 3.1. Consider the equation

$$\dot{x}(t) = a(t) \sin x(t) + b(t) \sin(\mu(t)x(t - h(t))), \tag{3.9}$$

in which the delay $h(t)$ satisfies the inequalities (3.2), and the coefficients $a(t)$ and $b(t)$ are such that the following inequalities are satisfied

$$a(t) \leq -a_0 - \varepsilon \quad (a_0 > 0, \varepsilon > 0), \quad |b(t)\mu(t)| \leq a_0(1 - \dot{h}(t))^{1/2}.$$

Based on Theorem 3.1, one can find that the solution $x = 0$ of the equation (3.9) is uniformly asymptotically stable. Moreover, $x = 0$ is the point of attraction for all solutions $x = x(t, \alpha, \varphi)$ bounded at $t \geq \alpha$ by the region $\{|x| \leq \frac{\pi}{2}\}$. It is easy to find an estimate of the area of attraction based on the functional

$$V(t, \varphi) = 1 - \cos(\varphi(0)) + \frac{1}{2} \int_{-h(t)}^0 \sin^2(\varphi(\tau))d\tau.$$

When the condition regarding the coefficient $a(t)$ changes to the condition $a(t) \geq a_0 + \varepsilon$ ($a_0 > 0, \varepsilon > 0$), the solution $x = 0$ to the equation (3.9) is unstable according to Theorem 3.2.

4. On the solution to the stability problem when the right-hand side of equation (2.1) is bounded

Let us consider the stability problem posed under the conditions of boundedness of the functions $a(t, \varphi)$ and $b(t, \varphi)$

$$|a(t, \varphi)| \leq a_0 = \text{const}, \quad |b(t, \varphi)| \leq b_0 = \text{const}$$

$$\forall(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \{\varphi \in \mathbb{C} : \|\varphi\| \leq H_1 = \text{const} > 0\}. \tag{4.1}$$

Consider the equation

$$\dot{y}(t) = a_1(t, y_t)g(y(t)) + b_1(t, y_t)q_1(t, y(t)) - b_1(t, y_t) \int_{t-h_1(t)}^t a_1(\tau, y_\tau) \frac{\partial q_1(\tau, y(\tau))}{\partial y} g(y(\tau)) d\tau -$$

$$- b_1(t, y_t) \int_{t-h_1(t)}^t b_1(\tau, y_\tau) \frac{\partial q_1(\tau, y(\tau))}{\partial y} q_1(\tau, y(\tau - h_1(\tau))) d\tau, \tag{4.2}$$

$$a_1(t, \psi) = a(h_0 + t, \psi), \quad b_1(t, \psi) = b(h_0 + t, \psi)$$

$$q_1(t, y) = q(h_0 + t, y), \quad h_1(t) = h(h_0 + t)$$

with domain $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_\psi$, where \mathbb{C}_ψ is the Banach space of continuous functions $\psi : [-2h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}$.

Each solution $x = x(t, \alpha, \varphi)$ ($\alpha, \varphi \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ of equation (2.1) coincides at $t \geq \alpha + h_0$ with the solution $y = y(t, \alpha, \psi)$ of equation (4.2) with the initial function $\psi : [-2h_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ defined by the equality

$$\psi(s) = \varphi(h_0 + s), \quad -2h_0 \leq s \leq -h_0;$$

$$\psi(s) = x(\alpha + s + h_0, \alpha, \varphi), \quad -h_0 \leq s \leq 0.$$

Therefore, from the solutions limiting properties of equation (4.2), similar solutions limiting properties of equation (2.1) hold. In addition to conditions (4.1), we also assume that there exist the function $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and the positive reals μ_2 and M such as

$$b(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \{\|\varphi\| \leq H_1\},$$

$$0 \leq \mu_1(t) \leq q(t, x)/g(x) \leq \mu_2, \quad \left| \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \right| \leq M \quad \forall(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_1\}. \tag{4.3}$$

Theorem 4.1. Assume that the conditions are fulfilled:

- 1) $g(x)x > 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| \leq H_0 < H_1\};$
- 2) $B(t, \varphi) = a(t, \varphi) + \mu_1(t)b(t, \varphi) + Mb_0h_0(a_0 + \mu_2b_0) \leq -\varepsilon_0 < 0 \quad \forall(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \{\varphi \in \mathbb{C} : \|\varphi\| \leq H_1\}.$

Then the solution $x = 0$ of equation (2.1) is uniformly asymptotically stable.

P r o o f. As noted above, the solution to the stability problem for the zero solution $x = 0$ of equation (2.1) is reduced to the solution of the stability problem for the solution $y = 0$ of equation (4.2).

To solve the stability problem, we choose the Lyapunov functional candidate as follows

$$V_1(\psi) = G(\psi(0)) + \nu_1 \int_{-h_0}^0 \left(\int_{\tau}^0 g^2(\psi(s)) ds \right) d\tau + \nu_2 \int_{-2h_0}^{-h_0} \left(\int_{\tau}^0 g^2(\psi(s)) ds \right) d\tau, \quad (4.4)$$

where $\nu_1 = \frac{1}{2}Ma_0b_0$ and $\nu_2 = \frac{1}{2}Mb_0^2$.

The derivative of the functional $V_1(\psi)$ by virtue of equation (4.2) has the following expression

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, \psi) &= a_1(t, \psi)g^2(\psi(0)) + b_1(t, \psi)q_1(t, \psi(0))g(\psi(0)) - \\ &- b_1(t, \psi) \left(\int_{-h_1(t)}^0 a_1(t + \tau, \psi_\tau) \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=\psi(\tau)} g(\psi(0))g(\psi(\tau)) d\tau - \right. \\ &- \left. \int_{-h_1(t)}^0 b_1(t + \tau) \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=\psi(\tau)} g(\psi(0))q_1(\tau, \psi(\tau - h_1(\tau))) d\tau \right) + \\ &+ \nu_1 \int_{-h_0}^0 (g^2(\psi(0)) - g^2(\psi(\tau))) d\tau + \nu_2 \int_{-2h_0}^{-h_0} (g^2(\psi(0)) - g^2(\psi(\tau))) d\tau. \end{aligned} \quad (4.5)$$

By virtue of conditions (4.3), the derivative (4.5) has the estimates

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, \psi) &\leq (a_1(t, \psi) + \mu_1(t)b_1(t, \psi) + (\nu_1 + \nu_2)h_0)g^2(\psi(0)) + \\ &+ M|b_1(t, \psi)| \int_{-h_0}^0 |a_1(t + \tau, \psi)| |g(\psi(0))| |g(\psi(\tau))| d\tau + \\ &+ M\mu_2|b_1(t, \psi)| \int_{-2h_0}^{-h_0} |b_1(t + \tau, \psi)| |g(\psi(0))| |g(\psi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq (a_1(t, \psi) + \mu_1(t)b_1(t, \psi) + Mb_0h_0(a_0 + \mu_2b_0))g^2(\psi(0)) = B_1(t, \psi)g^2(\psi(0)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Thus, using (4.6) we find that

$$\dot{V}(t, \psi) \leq -\varepsilon_0 g^2(\psi(0))$$

by virtue of condition 2 of the theorem.

According to the theorems from the monographs [3], [4], we obtain the proof of the theorem.

Assume that the function $g(x)$ satisfies the condition

$$|g(x)| \leq L(H_1)|x| \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_1 > 0\}.$$

Theorem 4.2. Assume that condition 1) of Theorem 3.2 is satisfied as well as the following condition

2) $A(t, \varphi) = a(t, \varphi) + b(t, \varphi) + Mb_0h_0(a_0 + b_0) \leq -\varepsilon_0 < 0$ holds.

Then the solution $x = 0$ of equation (2.1) is unstable.

P r o o f. To obtain the proof, as in Theorem 3.2, note that the relationship (3.5) holds. Consider the functional $V_2(\psi) = -V_1(\psi)$ in accordance with formula (4.4).

As in Theorem 3.2, we find the set $\mathbb{C}_0(V_2)$ as follows

$$\mathbb{C}_0(V_2) = \{\psi \in \mathbb{C}_\psi : \psi(s) < 0, \|\psi\| \leq H_0, V_2(\psi) > 0\}.$$

We have an inequality of type (3.7)

$$V_2(\psi) \leq d_2(|\psi(0)|) \quad \forall \psi \in \mathbb{C}_0(V_2).$$

For the derivative of the functional $V_2 = V_2(\psi)$ by virtue of condition 2 of the theorem, in the domain $\mathbb{R}^+ \times \{\psi \in \mathbb{C}_\psi : \psi(s) \leq 0, \|\psi\| \leq H_1\}$, in accordance with calculations (4.5) and (4.6), we find

$$\dot{V}_2(t, \psi) \geq \varepsilon_0 d_1^2(d_2^{-1}(V_2(\psi))).$$

From here, as in Theorem 3.2, we get the instability property of the solution $y = 0$ of equation (4.2) and, accordingly, the solution $x = 0$ of equation (2.1) is unstable. This completes the proof.

E x a m p l e 4.1. Consider the equation

$$\dot{x}(t) = a(t)x^3(t) + b(t) \sin^3(x(t - h(t))), \tag{4.7}$$

for which the following inequalities are satisfied

$$|a(t)| \leq a_0, \quad -b_0 \leq b(t) \leq 0, \quad 0 \leq h(t) \leq h_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.8}$$

Based on Theorem 4.1, one can find that if the following condition holds

$$a(t) + \frac{1}{8}b(t) + 3b_0h_0(a_0 + b_0) \leq -\varepsilon_0 < 0,$$

then the solution $x = 0$ of equation (4.7) is uniformly asymptotically stable with the attraction of all solutions $x = x(t, \alpha, \varphi)$ bounded at $t \geq \alpha$ by the region $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \pi/2\}$.

Let us study the problem of the global behavior of solutions, when equation (2.1) has an infinite number of equilibrium positions, of course on a finite interval. The boundedness of the right-hand side of equation (2.1) by virtue of conditions (4.1) and (4.3) on bounded solutions ensures their uniform continuity as $t \in [\alpha + h, \infty)$. This allows us to apply the theorem on the solutions limiting behavior of functional-differential equations from [19], [20].

Let us consider the problem of the solutions attraction under the assumption

$$|q(t, x)| \leq \mu_0|g(x)| \quad (\mu_0 > 0) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Denote $N_0 = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$. Assume that for each $H_1 > 0$ the set $N_0 \cap \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_1 < \infty\}$ consists of a finite number of points.

T h e o r e m 4.3. Assume that:

1) dependencies $a(t, \varphi)$ and $b(t, \varphi)$ satisfy the inequality

$$B(t, \varphi) = a(t, \varphi) + \mu_0|b(t, \varphi)| + Mb_0h_0(a_0 + b_0\mu_0) \leq -\varepsilon_0 < 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C};$$

2) there exist sequences $x_k \rightarrow \infty$ and $x_l \rightarrow \infty$ such that $G(x_k) \rightarrow \infty$ and $G(x_l) \rightarrow \infty$ as $k, l \rightarrow \infty$.

Then each solution of equation (2.1) converges asymptotically to one of the equilibrium positions as $t \rightarrow \infty$, i. e. there exists the point $x^* \in N_0$ such as $x(t, \alpha, \varphi) \rightarrow x^*$ as $t \rightarrow \infty$.

P r o o f. As shown, the problem of the limiting behavior of solutions to equation (2.1) reduces to the same problem for equation (4.2).

Let $H_0 > 0$ be an arbitrary positive real, $\mathbb{C}_{0\psi} = \{\psi \in \mathbb{C}_\psi : \|\psi\| \leq H_0\}$. For the functional (4.4), we have the estimate

$$V_1(\psi) \leq G(\psi(0)) + \nu_1 \int_{-h_0}^0 \int_{\tau}^0 g^2(\psi(s)) ds d\tau + \nu_2 \int_{-2h_0}^{-h_0} \int_{\tau}^0 g^2(\psi(s)) ds d\tau \leq V_0,$$

$$V_0 = \sup_{|x| \leq H_0} (|g(x)|(H_0 + (\nu_1 + \nu_2)h_0^2|g(x)|/2)).$$

According to condition 2 of the theorem, there is a value $H_1 > H_0$ such that $G(H_1) > V_0$. By virtue of condition 1 of the theorem, the derivative $\dot{V}_1(t, \psi)$ of the functional $V_1(\psi)$ satisfies the inequality

$$\dot{V}_1(t, \psi) \leq (a(t, \varphi) + \mu_0|b(t, \varphi)| + Mb_0h_0(a_0 + b_0\mu_0))g^2(\psi(0)) \leq -\varepsilon_0g^2(\psi(0)) \leq 0.$$

For any solution $y = y(t, \alpha, \psi)$, $(\alpha, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_{0\psi}$ of equation (4.2), the inequality $V_1(y(t, \alpha, \psi)) \leq V_0 < G(H_1)$ holds, and hence, $|y(t, \alpha, \psi)| \leq H_1 \quad \forall t \geq \alpha$.

According to the theorem from [19], [20], it also follows that each solution of (4.2) is such that $y(t, \alpha, \psi) \rightarrow N_0$ as $t \rightarrow \infty$. But since the set $N_1 = N_0 \cap \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_1\}$ consists of a finite number of points, it follows that there exists $x_0^* \in N_1$ such that $y(t, \alpha, \psi) \rightarrow x_0^*$ as $t \rightarrow \infty$ [19], [20].

The following corollary directly follows from Theorem 4.3.

C o n s e q u e n c e 4.1. *Assume that under the conditions of Theorem 4.3, also the inequality $g(x)x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ holds. Then the solution $x = 0$ of equation (2.1) is globally uniformly asymptotically stable.*

E x a m p l e 4.2. Consider the equation

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \sin^2(x(t)) + b(t) \sin^3(x(t - h(t))), \tag{4.9}$$

in which the coefficients $a(t)$ and $b(t)$, and the delay function $h(t)$ satisfy the inequalities

$$a(t) \geq -a_0 \quad (a_0 > 0), \quad |b(t)| \leq b_0, \quad a(t) + |b(t)| + 3b_0h_0(a_0 + b_0) \leq -\varepsilon_0 < 0.$$

In accordance with Theorem 4.3, one can find that the solution $x = 0$ of equation (4.9) is uniformly asymptotically stable. In addition, for each solution $x(t, \alpha, \varphi)$ of equation (4.9), the following holds $x(t, \alpha, \varphi) \rightarrow x_0^* \in N_1 = \{x \in \mathbb{R} : x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Conclusion

For a sufficiently wide class of non-linear non-autonomous scalar functional-differential equations, sufficient conditions for the limit behavior of their solutions are derived: stability, including robust and global uniform asymptotic stability of the zero solution; attraction of solutions to the equilibrium position. This class includes linear equations with variable delay and variable coefficients of a general form. The obtained results can be used to study stability based on the expansion of the right-hand side of various equations of this type, stability in the presence of perturbations.

REFERENCES

1. A. D. Myshkis, *Linear differential equations with delayed argument*, GITTL Publ., Moscow, Leningrad, 1951 (In Russ.), 254 p.
2. R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963, 478 p.
3. N. N. Krasovsky, *Stability of motion*, Stanford University Press, Stanford, 1963, 194 p.
4. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer, New York, 1971 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>, 366 p.
5. T. Amemiya, “On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1st order”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **142**:1 (1989), 13–25. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90159-5](https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90159-5)
6. T. Krisztin, “On stability properties for one-dimensional functional-differential equations”, *Funkcial. Ekvac.*, **34**:2 (1991), 241–256.
7. V. V. Malygina, K. M. Chudinov, “Stability of solutions to differential equations with several variable delays. III”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **57**:8 (2013), 37–48. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13080057>
8. L. Berezhansky, E. Braverman, “Stability conditions for scalar delay differential equations with a non-delay term”, *Applied Mathematics and Computation*, **250**:5 (2015), 157–164. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.088>
9. A. Egorov, “On the stability analysis of equations with bounded time-varying delay”, *J. IFAC-Papers on Line*, **52**:18 (2019), 85–90. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.12.211>
10. L. Berezhansky, E. Braverman, “On exponential stability of linear delay equations with oscillatory coefficients and kernels”, *Differential and Integral Equations*, **35**:9-10 (2022), 559–580. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.09018>
11. T. Yoneyama, “Uniform stability for one dimensional delay-differential equations with dominant delayed term”, *Tohoku Math J.*, **41**:2 (1989), 217–236.
12. T. A. Burton, “Uniform asymptotic stability in functional differential equations”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **68**:2 (1978), 195–199. DOI: <https://doi.org/10.2307/2041771>
13. T. Burton, L. Hatvani, “Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals”, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, **41**:1 (1989), 65–104. DOI: <https://doi.org/10.2748/tmj/1178227868>
14. L. Hatvani, “On the asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations by Lyapunov functionals”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **354**:9 (2002), 3555–3571.
15. N. V. Pertsev, B. Yu. Pichugin, A. N. Pichugina, “Investigation of solutions to one family of mathematical models of living systems”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **61**:9 (2017), 54–68.

16. N. V. Pertsev, “Application of differential equations with variable delay in the compartmental models of living systems”, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **24**:3 (2021), 55–73. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.305>
17. J. K. Khusanov, A. E. Kaxxorov, “On the stability of Lotka-Volterra model with a delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24**:2 (2022), 175–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184>
18. A. V. Ekimov, A. P. Zhabko, P. V. Yakovlev, “The stability of differential-difference systems with linearly increasing delay. II. Systems with additive right side”, *Bulletin of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes*, **19**:1 (2023), 4–9. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbul0.2023.101>
19. A. S. Andreev, D. Kh. Khusanov, “On the method of Lyapunov functionals in the problem of asymptotic stability and instability”, *Differential Equations*, **34**:7 (1998), 876–885.
20. D. Kh. Khusanov, *On the constructive and qualitative theory of functional differential equations*, Tashkent: FAN. AN RUz, 2002 (In Russ.), 256 p.

Submitted 08.09.2023; Revised 04.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мышкин А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 254 с.
2. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations*. NY: Academic Press, 1963. 478 p.
3. Krasovsky N. N. *Stability of motion*. Stanford: Stanford University Press, 1963. 194 p.
4. Hale J. K. *Theory of functional differential equations*. NY: Springer, 1971. 366 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>
5. Amemiya T. On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1st order // *J. Math. Anal. and Appl.* 1989. Vol. 142, No 1. pp. 13–25. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90159-5](https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90159-5)
6. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // *Funkcial. Ekvac.* 1991. Vol. 34, No 2. pp. 241–256.
7. Малыгина В. В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2013. Вып. 8. С. 44–56. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13080057>

8. Berezansky L., Braverman E. Stability conditions for scalar delay differential equations with a non-delay term // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 250, No 5. pp. 157–164. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.088>
9. Egorov A. On the stability analysis of equations with bounded time-varying delay // J. IFAC-Papers on Line. 2019. Vol. 52, No 18. pp. 85–90. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.12.211>
10. Berezansky L., Braverman E. On exponential stability of linear delay equations with oscillatory coefficients and kernels // Differential and Integral Equations. 2022. Vol. 35, No 9-10. pp. 559–580. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.09018>
11. Yoneyama T. Uniform stability for one dimensional delay-differential equations with dominant delayed term // Tohoku Math J. 1989. Vol. 41, No 2. pp. 217–236.
12. Burton T. A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society. 1978. Vol. 68, No 2. pp. 195–199. DOI: <https://doi.org/10.2307/2041771>
13. Burton T., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. 1989. Vol. 41, No 1. pp. 65–104. DOI: <https://doi.org/10.2748/tmj/1178227868>
14. Hatvani L. On the asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations by Lyapunov functionals // Transactions of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 354, No 9. pp. 3555–3571.
15. Pertsev N. V., Pichugin B. Yu., Pichugina A. N. Investigation of solutions to one family of mathematical models of living systems // Russian Math. (Iz. VUZ). 2017. Vol. 61, No 9. pp. 54–68.
16. Pertsev N. V. Application of differential equations with variable delay in the compartmental models of living systems // Sib. Zh. Ind. Mat. 2021. Vol. 24, No 3. pp. 55–73. DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.305>
17. Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием // Журнал СВМО. 2022. Т. 24, № 2. С. 175–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184>
18. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 1. С. 4–9. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbul0.2023.101>
19. Андреев А. С., Хусанов Д. Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференц. уравн. 1998. Т. 34, № 7. С. 876–885.
20. Хусанов Д. Х. О конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Ташкент: Изд-во ФАН АН РУз, 2002. 256 с.

*Поступила 08.09.2023; доработана после рецензирования 04.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.313-325

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9, 539.3

Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах**П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова***ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

Аннотация. Датчик является первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды. Он предоставляет данные о давлении рабочей среды, определяющем надлежащее функционирование машин, механизмов, систем. Математическое моделирование функционирования систем измерения давления играет важную роль на этапе их проектирования. В данной статье исследуется нелинейная одномерная модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для измерения и контроля давления рабочей газожидкостной среды в камерах сгорания двигателей. В такой системе для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик соединен с двигателем с помощью трубопровода и располагается на некотором расстоянии от него. Целью работы является разработка математической модели системы «трубопровод – датчик давления» и исследование динамики и устойчивости совместных колебаний чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе при заданном законе изменения давления в камере сгорания, в предположении, что рабочая среда идеальная и сжимаемая. Для описания движения рабочей среды (газа или жидкости) используется нелинейная модель механики жидкости и газа. Для начально-краевой задачи, постановка которой содержит нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными, предложен численно-аналитический метод решения на основе метода Галеркина, позволяющий свести исследование задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен численный эксперимент и представлены примеры расчета динамики чувствительного элемента датчика. Предложенная математическая модель позволяет определять закон изменения отклонения чувствительного элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в камере сгорания.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина

Для цитирования: Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>

Об авторах:

Вельмисов Петр Александрович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

© П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова



Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, ФГ-БОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovaua@mail.ru

Original article

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. The primary element of the instrumentation for measuring the pressure of a gas-liquid medium is a sensor that supplies data on the pressure of the working medium. It determines the proper functioning of machines, mechanisms, and systems. Increasing the service life, reducing development time, and reducing the cost of sensors is one of the important tasks. Mathematical modeling of pressure measurement systems' functioning plays an important role at the design stage of such systems. This article examines a nonlinear one-dimensional model of a mechanical system "pipeline – pressure sensor" designed to measure and control the pressure of the working gas-liquid medium in the combustion chambers of engines. In such a system, the sensor is connected to the engine via a pipeline and is located at some distance from it to reduce the impact of vibration accelerations and high temperatures. The purpose of the work is to study the dynamics and stability of joint oscillations of the elastic sensitive element in the pressure sensor and of the working medium in the pipeline for a given law of pressure change in the combustion chamber. The study is provided under the assumption that the working medium is ideal and compressible. To describe the movement of the working medium (gas or liquid), a nonlinear model of fluid and gas mechanics is used. Mathematical description of the process of interest includes an initial boundary value problem, whose formulation contains a nonlinear partial differential equation. To solve it, numerical-analytical method of solution based on the Galerkin method is proposed, which makes it possible to reduce the study of the problem to solving a system of ordinary differential equations. A numerical experiment is carried out and examples of calculating the dynamics of the sensor's sensitive element are presented. The proposed mathematical model makes it possible to determine the law of change in the deviation of the sensor's sensitive element depending on the law of change in pressure in the combustion chamber. The research results are intended for use at the design stage of pressure measurement systems.

Keywords: pressure sensor, pipeline, dynamics, differential equations, Galerkin method

For citation: *P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova. Nonlinear mathematical model of pressure measurement systems in gas-liquid media. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 25:4(2023), 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>*

About the authors:

Petr A. Velmisov, Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

1. Введение

Во многих отраслях науки и техники важное место занимает проблема повышения надежности и долговечности конструкций, взаимодействующих с потоком жидкости или газа. Такая проблема, в частности, возникает при проектировании датчиков давления газожидкостных сред. В связи с этим возникает задача исследования динамики и устойчивости колебаний элементов конструкций, так как воздействие потока может приводить к значениям амплитуды, скорости, ускорений колебаний, не позволяющим осуществлять их надежную эксплуатацию и обеспечивать необходимую функциональную точность. Развитие ракетно-космической, авиационной и другой техники требует как разработки новых типов первичных преобразователей, так и постоянного совершенствования существующих. Во многих работах представлено описание датчиков измерительных систем, принципы их работы, технические характеристики, например [1–6].

Каждый датчик давления в той или иной степени критичен к воздействию температур и виброускорений. При размещении датчиков давления непосредственно на двигателе на них воздействуют широкие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению чувствительного элемента датчика. В работе [7] рассмотрены вопросы, связанные с построением и оптимизированным исследованием математических моделей датчиков давления, работающих в нестационарных неоднородных полях измеряемой и окружающей сред. Работа [8] посвящена вопросам повышения вибростойкости тонкопленочных нано- и микросистем и датчиков давления на их основе. Совокупность некоторых моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» представлена в [9–10]. В случае несжимаемости рабочей среды математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в работах [11–13]. В работах [14–16] исследуется взаимодействие упругих тел с вязкой несжимаемой жидкостью. Для сжимаемой рабочей среды исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» в линейной модели проводились, например, в работах [17–18].

В данной статье на основе нелинейной одномерной модели, представляющей собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Движение рабочей среды описывается нелинейной моделью механики жидкости и газа. Для описания динамики чувствительного элемента датчика используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одномассовой системы. С помощью метода Галеркина [19] исследование начально-краевой задачи сведено к решению систем дифференциальных уравнений. Разработана программа в системе Mathematica 12.0, позволяющая при различном задании закона

изменения давления рабочей среды получать графики деформации чувствительного элемента датчика.

2. Постановка задачи

На рисунке 2.1 в начальном сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$, где P_0 - давление в состоянии покоя, $P_*(t)$ - избыточное давление. Состоянию покоя соответствует положение $x = l$ поршня, являющегося составной частью датчика давления и закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов. Отклонение поршня от положения равновесия обозначим $w(t)$. Поставим своей целью получение уравнения, связывающего закон изменения давления в двигателе $P_*(t)$ с величиной перемещения поршня $w(t)$ в любой момент времени t .

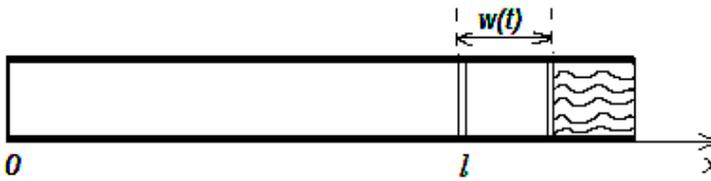


Рис. 2.1. Схема механической системы "трубопровод - датчик давления"

Fig. 2.1. Scheme of the mechanical system "pipeline-pressure sensor"

Математическая модель рассматриваемой механической системы может быть представлена в виде

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (2.1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2.2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (2.3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t). \quad (2.4)$$

В (2.1)-(2.4) $\Phi(x, t)$ - потенциал скорости; $P(x, t)$ - давление в рабочей среде (в жидкости или газе); a_0 - скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды; χ - коэффициент Пуассона; m - масса чувствительного элемента; α , γ - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи; индексы x , t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху - производную по t .

Уравнения (2.1), (2.4) следует дополнить начальными условиями. Эти условия будут записаны при решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой будет сведено решение задачи (2.1)-(2.4).

Уравнение (2.1) для потенциала скорости $\Phi(x, t)$ описывает движение сжимаемой рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе, условие (2.2) задает закон изменения давления $P_*(t)$ рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод $x = 0$), условие (2.3) - условие непротекания на поверхности поршня, (2.4)

– уравнение, описывающее движение поршня. При этом давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (2.5)$$

Условие (2.2) с учетом (2.5) можно записать в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) = \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi - 1}{\chi}} \right] \quad (2.6)$$

3. Построение решения задачи

Введем функции $u = \Phi_x$, $v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$. Тогда уравнения (2.1)-(2.5), представляющие математическую модель, будут иметь вид

$$v_t + uv_x - [a_0^2 - (\chi - 1)v] u_x = 0, \quad (3.1)$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0, \quad (3.2)$$

$$v(0, t) = \psi(t), \quad (3.3)$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), \quad (3.4)$$

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (3.5)$$

В (3.4)-(3.5) $l_* = l + w(t)$. Исходя из граничных условий (3.3), (3.4), будем искать функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ в виде отрезков степенных рядов

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n, \quad (3.6)$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t)x^k, \quad (3.7)$$

выбрав тем самым в качестве пробных функций $\{(l_* - x)^n\}$, $n = 1 \div \infty$ и $\{x^k\}$, $k = 1 \div \infty$. Подставляя (3.6), (3.7) в (3.1), (3.2), записывая условия ортогональности полученных невязок к функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующих на $[0, l_*]$ полную систему, получим $2N$ уравнений для $(2N + 1)$ функции $w(t)$, $u_1(t), \dots, u_N(t)$, $v_1(t), \dots, v_N(t)$. К этим уравнениям следует добавить уравнение (3.5). Ввиду граничных условий (3.3), (3.4) в качестве поперечных функций [19] $\theta_n(x)$ можно выбрать, например,

$$\theta_n(x) = x(l_* - x)^n, \quad \theta_n(x) = x^n(l_* - x), \quad \theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right), \quad n = 1 \div \infty. \quad (3.8)$$

Рассмотрим в качестве примера $N = 1$, тогда

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x), \quad v(x, t) = \psi(t) + v_1(t)x. \quad (3.9)$$

Подставим (3.9) в (3.1), (3.2):

$$\begin{aligned} v_1(t) - \ddot{w}(t) - \dot{u}_1(t)(l_* - x) - u_1(t)\dot{w}(t) + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)] u_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}(t) + \dot{v}_1(t)x + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)] v_1(t) + [a_0^2 - (\chi - 1)(\psi(t) + v_1(t)x)] u_1(t) &= 0. \end{aligned}$$

Умножим полученные невязки на $x(l_* - x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l_*

$$2(v_1 - \ddot{w}) - l_*(\dot{u}_1 - u_1^2) = 0, \quad (3.10)$$

$$2 \left[\dot{\psi} + \dot{w}v_1 + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi)u_1 \right] + [\dot{v}_1 - (\chi - 1)v_1u_1 + u_1v_1] l_* = 0. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.5) принимает вид

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_*) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}}. \quad (3.12)$$

Отметим, что к исследованию точно такой же системы дифференциальных уравнений (3.10)-(3.12) приводит использование в качестве поверочных функций $\theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right)$ (в первом приближении $\theta_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_*}\right)$).

Система трех нелинейных уравнений (3.10)-(3.12) служит для определения трех функций $u_1(t)$, $v_1(t)$, $w(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в пакете Mathematica 12.0 система уравнений (3.10)-(3.12) приведена к нормальной форме и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} - \frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{\gamma}{m} y_1, \\ \dot{y}_3 = y_3^2 + \frac{2}{l + y_1} \left(y_4 - \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} + \frac{\alpha}{m} y_2 + \frac{\gamma}{m} y_1 \right), \\ \dot{y}_4 = (\chi - 2)y_3y_4 - \frac{2}{l + y_1} (\dot{\psi} + y_2y_4 + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi)y_3), \end{cases} \quad (3.13)$$

где $y_1(t) = w(t)$, $y_2(t) = \dot{w}(t)$, $y_3(t) = u_1(t)$, $y_4(t) = v_1(t)$.

4. Тепловая задача

Математическая постановка тепловой задачи для механической системы «трубопровод-датчик давления» с учетом движения рабочей среды в случае, когда стенки трубопровода и чувствительный элемент датчика теплоизолированы, имеет вид

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

$$T(0, t) = T_*(t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(l_*, t) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $T(x, t)$ - закон изменения температуры рабочей среды; $T_*(t)$ - закон изменения температуры на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания); k - коэффициент теплопроводности среды; ρ - плотность среды; c - коэффициент теплоемкости среды.

Учитывая граничные условия (4.2), (4.3), функцию $T(x, t)$ будем искать в виде

$$T(x, t) = T_*(t) + \sum_{n=2}^{N+1} T_{n-1}(t)(x^n - nl_*^{n-1}x). \quad (4.4)$$

При $N = 1$ имеем

$$T(x, t) = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5), (3.9) в (4.1), получим

$$\dot{T}_*(t) + \dot{T}_1(t)(x^2 - 2l_*x) - 2\dot{T}_1(t)x\dot{w}(t) + 2T_1(t)(x - l_*)(\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)) = \frac{2k}{\rho c}T_1(t). \quad (4.6)$$

Умножая полученную невязку на $x(l_* - x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l_* , получим уравнение

$$10(\dot{T}_*(t) - 2T_1(t)\dot{w}(t)l_* - \frac{2k}{\rho c}T_1(t)) - l_*^2(7\dot{T}_1(t) + 6T_2(t)u_1(t)) = 0, \quad (4.7)$$

которое в нормальной форме имеет вид (учитывая введенные функции в (3.13))

$$\dot{T}_1(t) = \frac{1}{7(l + y_1(t))} \left[-6T_1(t)y_3(t) + 10(\dot{T}_* - 2T_1(t)y_2(t)(l + y_1(t)) - \frac{2k}{\rho c}T_1(t)) \right]. \quad (4.8)$$

Таким образом, система пяти уравнений (3.13), (4.8) служит для определения пяти функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$, $T_1(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в системе Mathematica 12.0 начальные условия заданы в виде: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$, $y_4(0) = 0$, $T_1(0) = 0$.

5. Численный эксперимент

Пусть рабочая среда - воздух ($\rho = 1.225$). Параметры механической системы: $P_0 = 101325$, $c = 1.005$, $k = 0.022$, $a_0 = 332$, $\chi = 1.5$, $l = 3$, $m = 0.01$, $\alpha = 10^8$, $\gamma = 10^9$ (все значения приведены в системе СИ). На рисунках 5.1-5.4 представлены примеры численных расчетов при задании различных законов изменения давления $P_*(t)$ и $T_*(t)$.

Графики рисунка 5.1 соответствуют случаю, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложено периодическое возмущение. Случай, когда рабочее давление в двигателе постоянно, представлен на рисунке 5.2. Графики рисунков 5.3, 5.4 соответствуют случаям, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложены экспоненциально убывающее (рис. 5.3) и возрастающее (рис. 5.4) возмущения.

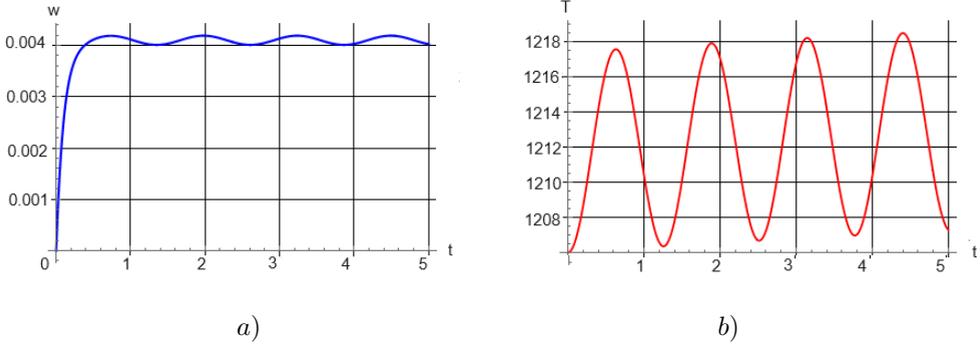


Рис. 5.1. Результаты численного эксперимента при $P_* = 4 * 10^6 + 10^5 \text{Cos}(5t)$, $T_* = 1226 - 20\text{Cos}(5t)$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C°

Fig 5.1. Results of a numerical experiment with $P_* = 4 * 10^6 + 10^5 \text{Cos}(5t)$, $T_* = 1226 - 20\text{Cos}(5t)$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C°

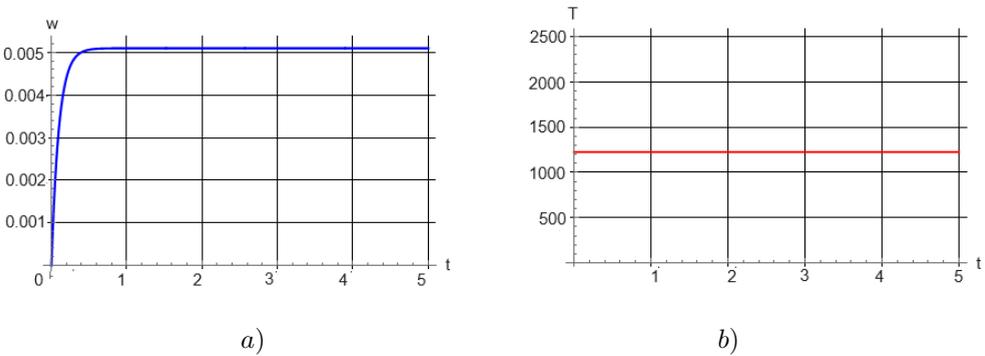


Рис. 5.2. Результаты численного эксперимента при $P_* = 5 * 10^6$, $T_* = 1226$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C°

Fig 5.2. Results of a numerical experiment with $P_* = 5 * 10^6$, $T_* = 1226$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C°

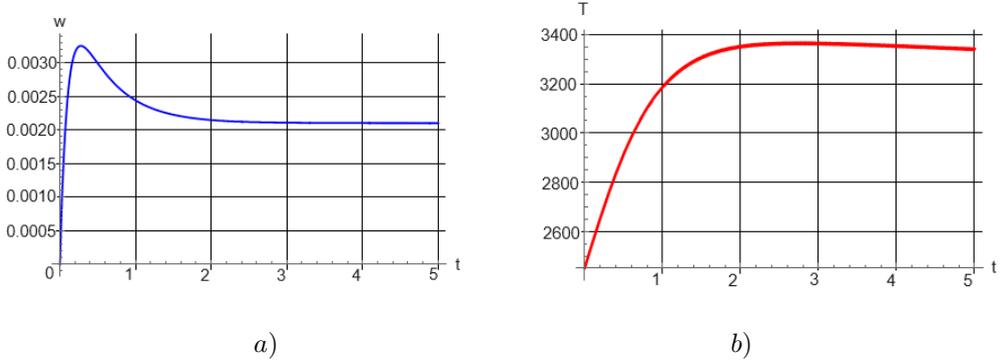


Рис. 5.3. Результаты численного эксперимента при $P_* = 2 * 10^6 * (e^{-2t} + 1)$, $T_* = 1226(e^{-2t} + 1)$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C^o

Fig 5.3. Results of a numerical experiment with $P_* = 2 * 10^6 * (e^{-2t} + 1)$, $T_* = 1226(e^{-2t} + 1)$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C^o

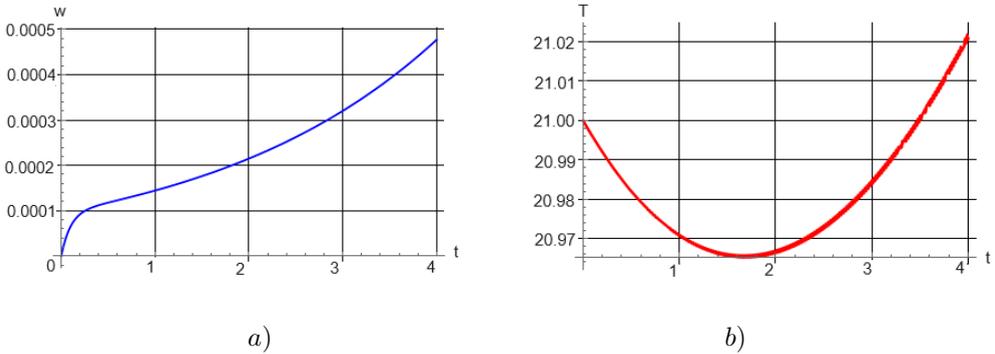


Рис. 5.4. Результаты численного эксперимента при $P_* = 10^5 * (e^{0.4t} - 1)$, $T_* = 20 + e^{0.1t}$: a) отклонение поршня от положения равновесия $w(t)$, м; b) температура рабочей среды $T(x, t)$ в точке $x = l_*$, C^o

Fig 5.4. Results of a numerical experiment with $P_* = 10^5 * (e^{0.4t} - 1)$, $T_* = 20 + e^{0.1t}$: a) deviation of the piston from the equilibrium position $w(t)$, m; b) temperature of the working medium $T(x, t)$ at a point $x = l_*$, C^o

Предложенная математическая модель механической системы «трубопровод-датчик давления» позволяет определять закон изменения отклонения чувствительного элемента датчика в зависимости от закона изменения давления рабочей среды в камере сгорания. С помощью метода Галеркина построены решения соответствующей начально-краевой задачи и приведены примеры численных расчетов.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 407 с.
2. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. № 3. С. 26–30.
3. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.]; пер. с франц. М.: Мир, 1992.
4. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
5. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
6. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. – 2-е изд. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
7. Математические модели функционирования датчика давления для космических летательных аппаратов при нестационарной температуре измеряемой и окружающей сред / В. М. Панкратов [и др.] // Микросистемная техника. 2003. № 6. С. 20–29.
8. Белозубов Е. М., Белозубова Н. Е. Повышение стойкости тонкопленочных нано-микросистем и датчиков давления на их основе к воздействию повышенных виброускорений // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». 2011. Т. 2. С. 426–429.
9. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» / А. В. Анкилов [и др.]. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2018. 152 с.
11. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод – датчик давления» // Журнал Средневожского математического общества. 2010. Т. 12, № 4. С.85–93.
12. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. pp.1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>

13. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
14. Математическая модель для исследования нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой / А. И. Землянухин [и др.] // Прикладная математика и механика. 2014. № 10. С. 80–83.
15. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окруженных упругой средой / Ю. А. Блинков [и др.] // Вестник РУДН. Серия МИФ. 2018. Т. 26, № 3. С. 203–215. DOI: <https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215>
16. Математическое моделирование волн деформации в двух соосных, кубически нелинейных оболочках, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью / Л. Могилевич [и др.] // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. № 4. DOI: <https://doi.org/10.24411/2541-9269-2020-00003>
17. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>
18. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред / Ю. А. Тамарова [и др.] // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.
19. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 353 с.

*Поступила 30.08.2023; доработана после рецензирования 01.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. L. G. Etkin, *[Vibration sensors. Theory and practice]*, MGTU im. N. E. Baumana Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 407 p.
2. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, “[Universal pressure sensor]”, *Izmeritel'naya tekhnika*, **3** (2008), 26–30 (In Russ.).
3. J. Ash, et al., *[Sensors of measuring systems: in 2 books.]*, Mir Publ., M., 1992 (In Russ.).
4. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, *[Sensors of control and regulation]*, N. Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1965 (In Russ.), 928 p.
5. V. P. Korsunov, *[Elastic sensitive elements]*, Saratov State Univ. Publ., Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.

6. *[Sensors. Converters. Systems: Catalog.]*, FGUP NII fizicheskikh izmereniy Publ., Penza, 2012 (In Russ.).
7. V. M. Pankratov, V. E. Dzhashitov, V. I. Ulybin, E. A. Mokrov, V. A. Semenov, D. V. Tihomirov, “[Mathematical models of the functioning of a pressure sensor for spacecraft at non-stationary temperatures of the measured and environmental media]”, *Microsistemnaya tekhnika*, 2003, no. 6, 20–29 (In Russ.).
8. E. M. Belozubov, N. E. Belozubova, “[Increasing the resistance of thin-film nano- and microsystems and pressure sensors based on them to the effects of increased vibration accelerations]”, *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma "Nadezhnost' i kachestvo"*, 2011, no. 2, 426–429 (In Russ.).
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. V. Pokladova, *[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
10. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, *[Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
11. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline – pressure sensor”]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **12**:4 (2010), 85–93 (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
13. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
14. A. I. Zemlyanukhin, S. V. Ivanov, L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. YU. Blinkov, “[Mathematical model for studying nonlinear waves in an elastic cylindrical shell surrounded by an elastic medium]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2014, no. 10, 80–83 (In Russ.).
15. Yu. A. Blinkov, E. V. Yevdokimova, L. I. Mogilevich, A. Yu. Rebrina, “[Modeling of wave processes in two coaxial shells filled with a viscous liquid and surrounded by an elastic medium]”, *Vestnik RUDN. Seriya MIF*, **26**:3 (2018), 203–215 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215>
16. L. I. Mogilevich, D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, S. V. Ivanov, “[Mathematical modeling of deformation waves in two coaxial, cubically nonlinear shells interacting with the environment and filled with liquid]”, *Matematicheskoye modelirovaniye, komp'yuternyy i naturnyy eksperiment v yestestvennykh naukakh*, **4** (2020) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.24411/2541-9269-2020-00003>
17. P. A. Velmisov, YU. A. Tamarova, “[Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:3 (2020), 352–367 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

18. YU. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin, “[Study of dynamic processes in systems for measuring pressure of gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **23**:4 (2021), 461—471 (In Russ.).
19. K. Fletcher, [*Numerical methods based on the Galerkin method*], Mir Publ., 1988, 353 p.

Submitted 30.08.2023; Revised 01.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.326-341

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51.72+531.37

Неголономные механические системы на плоскости с переменным углом наклона

Е. А. Микишанина^{1,2}

¹ ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (г. Москва, Российская Федерация) ² ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова» (г. Чебоксары, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются такие неголономные механические системы, как конек Чаплыгина, неоднородные сани Чаплыгина и шар Чаплыгина, движущиеся в поле силы тяжести по колеблющейся плоскости с углом наклона, меняющимся по периодическому закону. Явным интегрированием уравнений движения конька Чаплыгина и неоднородных саней Чаплыгина получены аналитические выражения скоростей и траекторий точки контакта. Найдены числовые параметры периодического закона, по которому должен изменяться угол наклона, чтобы скорость конька Чаплыгина была неограничена, то есть имело место ускорение. В случае неоднородных саней, наоборот, найдены числовые параметры периодического закона, при которых скорость ограничена и отсутствует дрейф саней, в то время как при равных прочих параметрах и начальных условиях при движении по горизонтальной или наклонной с постоянным углом наклона плоскости скорость и траектория точки контакта неограничены, то есть имеет место дрейф саней. Аналогичная задача решается для шара Чаплыгина, траектории строятся на основе численного интегрирования. Результаты проиллюстрированы графически. Для обсуждения предлагается управление углом наклона плоскости, зависящее от момента импульса шара. Такое управление независимо от начальных условий почти всегда может предотвратить дрейф шара в одном из направлений.

Ключевые слова: неголономная система, сани Чаплыгина, шар Чаплыгина, переменный угол наклона, динамика, ускорение, дрейф

Для цитирования: Микишанина Е. А. Неголономные механические системы на плоскости с переменным углом наклона // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 326–341. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.326-341>

Об авторах:

Микишанина Евгения Арифжановна научный сотрудник отдела механики, ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8), доцент кафедры актуарной и финансовой математики, ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова» (428015, Россия, г. Чебоксары, Московский пр., д. 15), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, evaeva_84@mail.ru

© Е. А. Микишанина



MSC2020 70E15, 70Q05

Nonholonomic mechanical systems on a plane with a variable slope

E.A. Mikishanina^{1, 2}¹ *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*² *Chuvash State University (Cheboksary, Russian Federation)*

Abstract. This paper considers such nonholonomic mechanical systems as Chaplygin skate, inhomogeneous Chaplygin sleigh and Chaplygin sphere moving in the gravity field along an oscillating plane with a slope varying with the periodic law. By explicit integration of the equations of motion, analytical expressions for the velocities and trajectories of the contact point for Chaplygin skate and Chaplygin sleigh are obtained. Numerical parameters of the periodic law for the inclination angle change are found, such that the velocity of Chaplygin skate will be unbounded, that is, an acceleration will take place. In the case of inhomogeneous Chaplygin sleigh, on the contrary, numerical parameters of the periodic law of the inclination angle change are found, for which the sleigh velocity is bounded and there is no drift of the sleigh. For similar numerical parameters and initial conditions, when the sleigh moves along a horizontal or inclined plane with the constant slope, the velocity and trajectory of the contact point are unbounded, that is, there is a drift of the sleigh. A similar problem is solved for the Chaplygin sphere; its trajectories are constructed on the basis of numerical integration. The results are illustrated graphically. The control of the slope of the plane, depending on the angular momentum of the sphere, is proposed for discussion. Regardless of the initial conditions, such control can almost always prevent the drift of the sphere in one of the directions.

Keywords: nonholonomic system, Chaplygin sleigh, Chaplygin sphere, variable slope, dynamics, acceleration, drift

For citation: E. A. Mikishanina. Nonholonomic mechanical systems on a plane with a variable slope. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 326–341. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.326-341>

About the authors:

Evgeniya A. Mikishanina Researcher, Department of Mechanics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (8 Gubkina st., Moscow 119991, Russia), associate professor, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University (15 Moskovskii av., Cheboksary 428015, Russia), Ph.D.(Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, evaeva_84@mail.ru

1. Введение

Вопросам динамики неголономных систем на горизонтальной плоскости и их управлению посвящено достаточное количество работ. Самыми известными и хорошо изученными системами являются сани Чаплыгина [1], [2], [3], шар Чаплыгина [4], [5], [6], [7], волчок Чаплыгина [8], [9]. Здесь указаны только некоторые работы, хотя на самом деле, этот список может быть гораздо шире.

В научной литературе можно встретить исследования динамики этих систем на наклонной плоскости. В работах [10], [11] исследовано поведение шара Чаплыгина, который катится без проскальзывания по наклонной плоскости в поле силы тяжести. В этих работах уравнения движения шара на наклонной плоскости сводятся к уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости с использованием соответствующей замены координат и времени, но разными способами. Движение саней Чаплыгина по наклонной плоскости исследовано в [1], указаны асимптотики для прямолинейных скольжений саней вдоль линии наибольшего ската.

В данной работе на примере конька Чаплыгина, уравновешенных неоднородных саней Чаплыгина и шара Чаплыгина, движущихся по плоскости в поле силы тяжести, мы продемонстрируем, как изменяя угол наклона опорной плоскости, можно влиять на их динамику. Мы явно покажем, что при скольжении уравновешенных саней Чаплыгина или конька Чаплыгина [12] (уравнения движения эквивалентны) по плоскости, угол наклона которой меняется по периодическому закону, можно подобрать числовые параметры, при которых линейная скорость конька будет неограничена. В таком случае будем говорить, что имеет место ускорение. Для сравнения, при отличной от нуля угловой скорости движение конька как по горизонтальной, так и по наклонной плоскости происходит с ограниченной скоростью. Также для всех рассмотренных систем мы проанализируем характер траекторий точки контакта. Если обе координаты точки контакта механической системы являются ограниченными функциями, то будем говорить, что траектория ограничена. Если хотя бы одна из координат является неограниченной функцией, то будем говорить, что траектория неограничена и имеет место дрейф конька (саней, шара).

Непосредственным обобщением саней Чаплыгина являются неоднородные сани Чаплыгина, в которых конек или острое колесико может быть заменено на пневматическое колесико [13]. Если для конька Чаплыгина (саней Чаплыгина) неголономное ограничение имеет вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0,$$

где \mathbf{v} – вектор скорости, \mathbf{n} – нормаль к плоскости (конька) колесика, то для неоднородных саней неголономное ограничение принимает вид

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \text{const}$$

и интерпретируется как увод колеса [14]. В [13] выполнено явное интегрирование уравнений движения неоднородных саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости и проведено достаточно полное исследование динамики. В данной работе мы выполним явное интегрирование уравнений движения уравновешенных неоднородных саней Чаплыгина на плоскости с постоянным и периодическим углом наклона и покажем, что, подобрав соответствующим образом параметры управления углом наклона, можно добиться движения саней с ограниченной скоростью по ограниченной траектории, в то время как при аналогичных начальных условиях движение саней по горизонтальной или наклонной плоскости происходит с неограниченной скоростью и имеет место дрейф саней.

Аналогичная задача решается и для шара Чаплыгина. С помощью численных расчетов мы строим траектории точки контакта для иллюстрации сделанных выводов и подтверждения гипотез.

В качестве обсуждения рассматривается управление углом наклона опорной плоскости, зависящее от кинетического момента шара. В этом случае всегда можно подобрать

параметры управления таким образом, что уравнения движения при достаточно больших временах будут эквивалентны уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости и фазовые кривые управляемой системы будут лежать в сколь угодно малой окрестности инвариантных торов системы, соответствующей свободному движению шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости.

2. Конек Чаплыгина

Рассмотрим конек Чаплыгина (уравновешенные сани Чаплыгина – эквивалентная система) на плоскости. Выберем на опорной плоскости некоторую точку O и введем систему координат Oxy . Исследуем динамику конька на горизонтальной плоскости; на плоскости, находящейся под постоянным вдоль оси Ox углом к горизонту; на колеблющейся плоскости, с периодически меняющимся вдоль оси Ox углом наклона.

В случае движения по плоскости, находящейся под постоянным углом χ вдоль оси Ox к горизонту, динамика конька описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\mu \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mu = g \sin \chi$, v – линейная скорость центра масс конька, ω – угловая скорость конька, φ – угол между осью конька и положительным направлением оси Ox , x, y – координаты точки контакта конька на опорной плоскости.

Динамика на горизонтальной плоскости конька Чаплыгина довольно тривиальна. Он демонстрирует равномерное движение по прямой или равномерное движение по окружности.

Пусть $\chi \neq 0$. В случае $\omega_0 = 0$ система (2.1) имеет решение

$$\begin{aligned} v &= -\mu \cos \varphi_0 \cdot t + v_0, & \omega &= 0, & \varphi &= \varphi_0, \\ x &= x_0 + v_0 \cos \varphi_0 \cdot t - \frac{\mu}{4} t^2 - \frac{\mu \cos 2\varphi_0}{4} t^2, & y &= y_0 + v_0 \sin \varphi_0 \cdot t - \frac{\mu \sin 2\varphi_0}{4} t^2, \end{aligned}$$

то есть конек в зависимости от начальных условий скользит по прямой равномерно или равноускоренно.

Замечание. Здесь и далее нижним индексом «0» будем обозначать начальное значение функции в момент времени $t = 0$.

В случае $\omega_0 \neq 0$ решения системы (2.1) задаются аналитическими выражениями

$$\begin{aligned} v &= c - \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi, & \omega &= \omega_0, & \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0, & c &= v_0 + \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi_0, \\ x &= x_0 + \frac{c}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \frac{\mu}{2\omega_0} \cdot t - \frac{c}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Система демонстрирует хорошо известный эффект – дрейф конька с периодической скоростью вдоль оси Oy , несмотря на то, что плоскость имеет наклон по оси Ox .

Уравнения движения, описывающие динамику конька Чаплыгина на плоскости с периодическим углом наклона

$$\chi(t) = \arcsin(\delta \sin \Omega t) \in [-\arcsin \delta, \arcsin \delta] \subset [-\pi/2, \pi/2], \quad \Omega \neq 0, \quad (2.2)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\sigma \sin \Omega t \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\sigma = g\delta$. Считаем, что δ достаточно мало и отрыва тела от опорной плоскости не происходит. Динамика такой системы более разнообразна. Классифицируем ее по двум признакам: ограниченность-неограниченность линейной скорости v и ограниченность-неограниченность траекторий (наличие-отсутствие дрейфа).

1. $\omega = \omega_0 = 0$.

Тогда линейная скорость ограничена

$$v = \frac{\sigma}{2\Omega} (\cos(\Omega t + \varphi_0) + \cos(\Omega t - \varphi_0)) + d, \quad d = v_0 - \frac{\sigma}{\Omega} \cos \varphi_0.$$

Траектория определяется следующими образом:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\sigma \cos \varphi_0}{2\Omega^2} (\sin(\Omega t + \varphi_0) + \sin(\Omega t - \varphi_0)) + d \cos \varphi_0 \cdot t, \\ y &= y_0 + \frac{\sigma \sin \varphi_0}{2\Omega^2} (\sin(\Omega t + \varphi_0) + \sin(\Omega t - \varphi_0)) + d \sin \varphi_0 \cdot t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $d = 0$ траектория, как и скорость, ограничена и носит периодический характер, при $d \neq 0$ имеет место дрейф конька.

2. $\omega = \omega_0 \neq 0$

- В случае $\Omega = \pm\omega_0$ имеем

$$\begin{aligned} v &= v_0 \pm et \mp \frac{\sigma}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \varphi, & \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0, \\ x &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \pm \left(\frac{e}{\omega_0} t \sin \varphi + \frac{e}{\omega_0^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right) \pm \\ &\quad \pm \frac{\sigma}{24\omega_0^2} (-3 \sin(2\varphi - \omega_0 t) + \sin(2\varphi + \omega_0 t) + 2 \sin 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \frac{v_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \pm \left(-\frac{e}{\omega_0} t \cos \varphi + \frac{e}{\omega_0^2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right) \pm \\ &\quad \pm \frac{\sigma}{24\omega_0^2} (3 \cos(2\varphi - \omega_0 t) - \cos(2\varphi + \omega_0 t) - 2 \cos 2\varphi_0) \pm \frac{\sigma}{4\omega_0^2} (\cos \omega_0 t - 1). \end{aligned}$$

где $e = \frac{\sigma}{2} \sin \varphi_0$. Очевидно, что при $e \neq 0$ имеет место неограниченное возрастание абсолютной скорости и неограниченность траектории. Иначе скорость v и координаты x, y снова являются ограниченными и периодическими.

- В случае $\Omega \neq \pm\omega_0$ скорость ограничена и задается формулой

$$v = h + \frac{\sigma}{2(\omega_0 + \Omega)} \cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0) - \frac{\sigma}{2(\omega_0 - \Omega)} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0),$$

где $h = v_0 + \frac{\sigma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \varphi_0$. Далее возможны следующие случаи.

– $\Omega \neq \pm 2\omega_0$. Траектории периодические, в силу их громоздкости не будем приводить здесь явных формул.

– $\Omega = \pm 2\omega_0$ Траектории неограниченные. Имеет место дрейф конька.

На Рис. 2.1 приведены траектории и график линейной скорости конька при движении по колеблющейся плоскости для различных значений механических параметров.

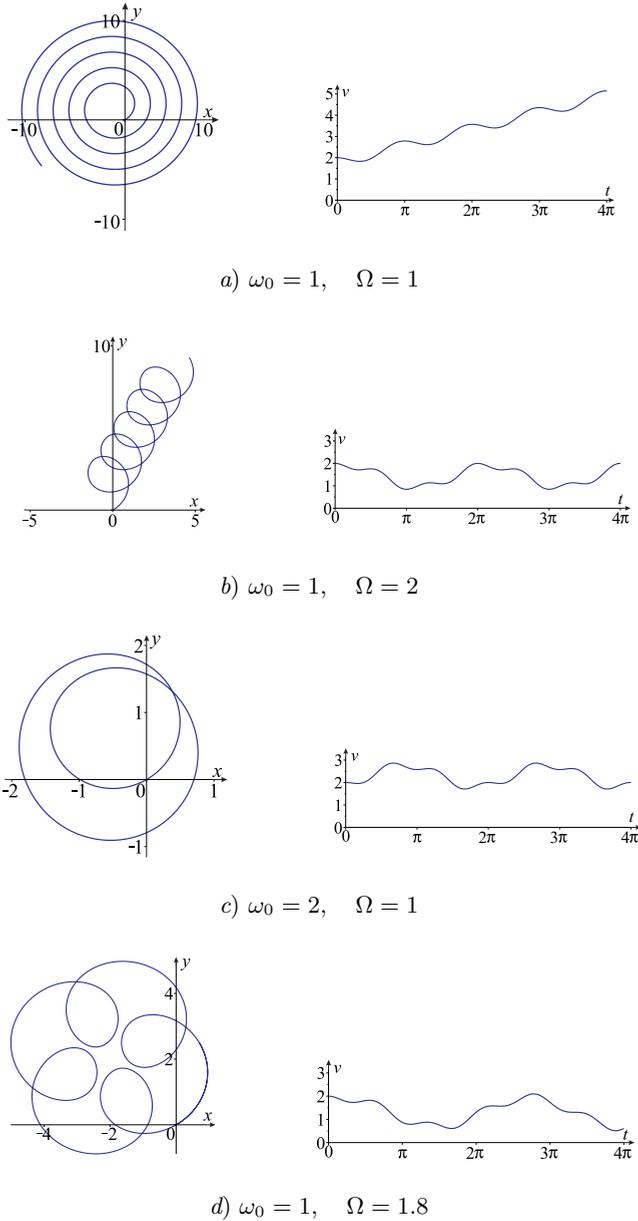


Рис. 2.1. Траектория и график линейной скорости конька Чаплыгина при $\sigma = 1$, начальных условиях $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega = \omega_0$ и различных значениях параметра Ω

Fig 2.1. Trajectory and graph of a linear velocity of the Chaplygin skate with $\sigma = 1$, the initial conditions $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega = \omega_0$ and different value of the Ω

Таким образом, при $\omega_0 \neq 0$ конек движется по наклонной (с постоянным углом наклона) или горизонтальной плоскости с ограниченной скоростью. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Сколь угодно малыми колебаниями плоскости $|\delta| > 0$, в результате которых ее угол наклона меняется по периодическому закону $\chi = \pm \arcsin(\delta \sin \omega_0 t)$, где $\omega_0 \neq 0$ – угловая скорость конька, и при начальном условии $\varphi_0 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ можно разогнать конек Чаплыгина, в результате чего будет иметь место неограниченное возрастание абсолютного значения линейной скорости.*

Это утверждение проиллюстрировано на Рис. 2.1 (а).

3. Неоднородные сани Чаплыгина

Рассмотрим уравновешенные неоднородные сани Чаплыгина, которые отличаются от классических саней Чаплыгина (конька Чаплыгина) тем, что вместо конька (острого колесика) установлено пневматическое колесо, способное скользить в перпендикулярном своей плоскости направлении [13].

Введем еще одну систему координат $O_1x_1y_1$, связанную с центром колесика, и осями O_1x_1 , направленной вдоль оси саней, и O_1y_1 , перпендикулярной плоскости колесика. Пусть $\mathbf{v} = (v, u)$ – вектор скорости центра масс колесика или конька в подвижной системе координат $O_1x_1y_1$. В отличие от конька Чаплыгина, на которое накладывается неголономное ограничение

$$u = 0,$$

неголономное ограничение в случае неоднородных саней Чаплыгина имеет вид

$$u = u_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

Уравнения движения уравновешенных (центр масс саней совпадает с центром пневматического колесика) неоднородных саней на плоскости, находящейся под углом χ вдоль оси Ox к горизонту, принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u_0\omega - \mu \cos \varphi, & \dot{\omega} &= 0, & \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos \varphi - u_0 \sin \varphi, & \dot{y} &= v \sin \varphi + u_0 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mu = g \sin \chi$. Считаем, что $u_0 \neq 0$. Справедливы следующие очевидные утверждения.

Предложение 3.1. *При $\omega = \omega_0 = 0$ проекция скорости на ось O_1x_1 и координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина связаны равенствами*

$$\begin{aligned} v_{\text{неод}} &= v_{\kappa}, \\ x_{\text{неод}} &= x_{\kappa} - u_0 \sin \varphi_0 \cdot t, \\ y_{\text{неод}} &= y_{\kappa} + u_0 \cos \varphi_0 \cdot t, \end{aligned}$$

где $v_{\text{неод}}, v_{\kappa}$ – проекции вектора скорости на ось O_1x_1 неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина, $(x_{\text{неод}}, y_{\text{неод}})$ – координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина, (x_{κ}, y_{κ}) – координаты точки контакта конька Чаплыгина, найденные при прочих равных параметрах и начальных условиях.

Предложение 3.2. При $\omega = \omega_0 \neq 0$ проекция скорости на ось O_1x_1 и координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина связаны равенствами

$$\begin{aligned} v_{неод} &= v_{\kappa} + u_0\omega_0 t, \\ x_{неод} &= x_{\kappa} + u_0 \sin \varphi \cdot t + \frac{2u_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ y_{неод} &= y_{\kappa} - u_0 \cos \varphi \cdot t + \frac{2u_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

где $v_{неод}, v_{\kappa}$ – проекции вектора скорости на ось O_1x_1 неоднородных саней Чаплыгина и конька Чаплыгина, $(x_{неод}, y_{неод})$ – координаты точки контакта неоднородных саней Чаплыгина, (x_{κ}, y_{κ}) – координаты точки контакта конька Чаплыгина, найденные при прочих равных параметрах и начальных условиях.

Рассмотрим далее задачу о возможности подбора режима колебаний опорной плоскости с периодически меняющимся углом наклона (2.2), позволяющим ограничить скорость и предотвратить дрейф неоднородных саней, который имеет место при движении саней по горизонтальной или наклонной плоскости.

Пусть $\omega = \omega_0 \neq 0$. Явные выражения для скорости v и траектории саней на плоскости с постоянным углом наклона χ , согласно Предложению (3.2), имеют вид:

$$\begin{aligned} v &= c + u_0\omega_0 t - \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi, \quad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \quad c = v_0 + \frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi_0 \\ x &= x_0 + u_0 \sin \varphi \cdot t + \frac{c}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \\ &+ \frac{2u_0}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0), \\ y &= y_0 - \left(u_0 \cos \varphi + \frac{\mu}{2\omega_0} \right) t - \frac{c}{\omega_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + \\ &+ \frac{2u_0}{\omega_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{\mu}{4\omega_0^2} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Видим, что скорость v и траектория точки контакта всегда неограничены.

Теперь будем изменять угол наклона плоскости по закону (2.2), где $\Omega = \omega_0$. Уравнения движения саней имеют вид (3.2), где $\mu = \sigma \sin \Omega t$, $\sigma = g\delta$. Тогда функции v , x , y , согласно Предложению (3.2), запишутся в виде

$$\begin{aligned} v &= (u_0\omega_0 + e)t + f_v(t), \\ x &= \frac{e + u_0\omega_0}{\omega_0} t \sin \varphi + f_x(t), \\ y &= -\frac{e + u_0\omega_0}{\omega_0} t \cos \varphi + f_y(t). \end{aligned}$$

где $e = \frac{\sigma}{2} \sin \varphi_0$, $f_v(t)$, $f_x(t)$, $f_y(t)$ – периодические функции времени. Тогда, если выполнены условия

$$\Omega = \omega_0, \quad e + u_0\Omega = 0, \tag{3.3}$$

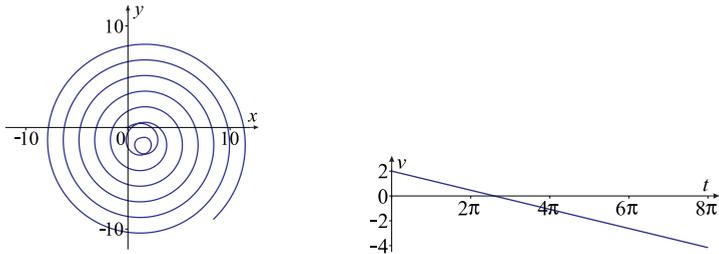
то скорость v и траектория точки контакта ограничены, в то время как при движении по горизонтальной или наклонной плоскости, но при прочих одинаковых параметрах и начальных условиях, скорость v и траектория точки контакта будут неограничены.

Аналогичные рассуждения будут иметь место в случае $\Omega = -\omega_0$. Если выполнены условия

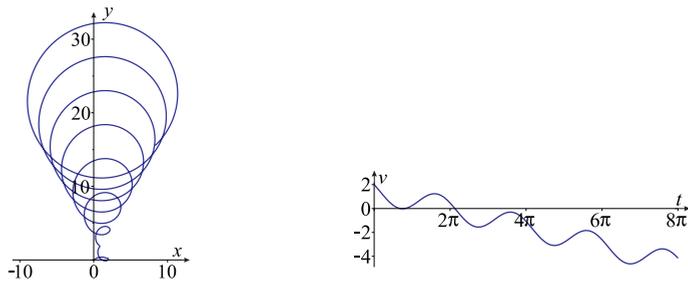
$$\Omega = -\omega_0, \quad e + u_0\Omega = 0, \quad (3.4)$$

то скорость v и траектория точки контакта также будут ограничены.

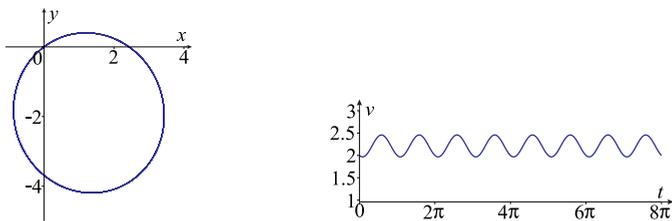
Иллюстрация приведенных выше результатов дана на Рис. 3.1 при заданных параметрах $u_0 = 0.245$, $g = 9.8$ и начальных условиях $v_0 = 2$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\omega_0 = \Omega$. Траектория, изображенная на Рис. 3.1(с) соответствует условию (3.3). Как видим, скорость и траектория являются ограниченными.



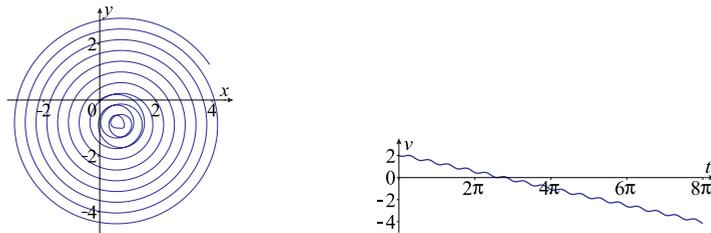
a) $\Omega = -1, \quad \chi = 0$



b) $\Omega = -1, \quad \chi = \arcsin 0.1$



c) $\Omega = -1, \quad \chi = \arcsin(0.1 \sin \Omega t)$



d) $\Omega = -2, \quad \chi = \arcsin(0.1 \sin \Omega t)$

Рис. 3.1. Траектории неоднородных саней Чаплыгина и графики скоростей v при числовых параметрах $u_0 = 0.2, g = 9.8$ и начальных условиях $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega_0 = \Omega$

Fig 3.1. Trajectories of the inhomogeneous Chaplygin sleigh and graphs of velocities with the numerical parameters $u_0 = 0.2, g = 9.8$ and the initial conditions $v_0 = 2, \varphi_0 = \pi/6, \omega_0 = \Omega$

4. Шар Чаплыгина

Уравновешенный шар Чаплыгина массой m и радиусом R катится без проскальзывания в поле силы тяжести по плоскости, которая находится под углом χ вдоль оси Ox к горизонту. Ось Oz перпендикулярна опорной плоскости, ось Oy параллельна линии горизонта. Введем еще одну систему координат $O_1x_1y_1z_1$, связанную с геометрическим центром O_1 шара, оси которой совпадают с главными осями инерции шара.

Пусть угол наклона χ опорной плоскости меняется по закону (2.2). Не ограничивая общности, будем считать, что $\Omega > 0$.

Проекции координатных векторов α, β, γ осей Ox, Oy, Oz на оси системы координат $O_1x_1y_1z_1$ образуют ортогональную матрицу перехода от системы координат $Oxyz$ к системе координат $O_1x_1y_1z_1$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Полная система уравнений движения, определяющая ориентацию шара, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega - q \sin \Omega t \cdot \beta, \\ \omega &= \mathbf{A}M + \mathbf{A}\gamma Z, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}M, \gamma)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)}, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $q = mgR\delta, d = mR^2, mg$ – вес шара, $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{I}$ – центральный тензор инерции шара, ω – вектор угловой скорости шара, заданный в системе координат $O_1x_1y_1z_1$. Координаты точки контакта шара (x, y) на плоскости Oxy определяются из уравнений

$$\dot{x} = R(\omega, \beta), \quad \dot{y} = -R(\omega, \alpha). \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) обладают шестью геометрическими интегралами

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha) &= 1, & (\beta, \beta) &= 1, & (\gamma, \gamma) &= 1, \\ (\alpha, \beta) &= 0, & (\beta, \gamma) &= 0, & (\gamma, \alpha) &= 0,\end{aligned}$$

и тремя линейными по ω интегралами

$$(M, \alpha) = c_\alpha, \quad (M, \beta) - \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t = c_\beta, \quad (M, \gamma) = c_\gamma,$$

где $c_\beta = (M_0, \beta_0) - \frac{q}{\Omega}$, $c_\alpha = (M_0, \alpha_0)$, $c_\gamma = (M_0, \gamma_0)$. Тогда момент M можно разложить по базису системы координат $Oxyz$:

$$M = c_\alpha \alpha + \mu \beta + c_\gamma \gamma,$$

где $\mu = \mu(t) = \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t + c_\beta$, откуда следует $(M, M) = c_\alpha^2 + \mu^2 + c_\gamma^2$.

Выражая угловую скорость

$$\omega = \mu \mathbf{A} \left(\beta + \frac{\gamma(\mathbf{A}\beta, \gamma)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)} \right) + c_\alpha \mathbf{A} \left(\alpha + \frac{\gamma(\mathbf{A}\alpha, \gamma)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)} \right) + c_\gamma \mathbf{A}\gamma \frac{d^{-1}}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)},$$

перепишем уравнения (4.2) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\mu\Phi_1 + Rc_\alpha\Phi_2 + Rc_\gamma\Phi_3, \\ \dot{y} &= -R\mu\Phi_2 - Rc_\alpha\Phi_4 - Rc_\gamma\Phi_5, \\ \Phi_1 &= (\mathbf{A}\beta, \beta) + \frac{(\mathbf{A}\beta, \gamma)^2}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)} > 0, \\ \Phi_2 &= (\mathbf{A}\alpha, \beta) + \frac{(\mathbf{A}\gamma, \beta)(\mathbf{A}\alpha, \gamma)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)}, \\ \Phi_3 &= \frac{d^{-1}(\mathbf{A}\gamma, \beta)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)}, \\ \Phi_4 &= (\mathbf{A}\alpha, \alpha) + \frac{(\mathbf{A}\alpha, \gamma)^2}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)} > 0, \\ \Phi_5 &= \frac{d^{-1}(\mathbf{A}\gamma, \alpha)}{d^{-1} - (\mathbf{A}\gamma, \gamma)}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Для динамически симметричного шара ($a_1 = a_2 = a_3 = a$), уравнения (4.3) принимают простую форму

$$\dot{x} = R\mu, \quad \dot{y} = -Rc_\alpha.\tag{4.4}$$

Как известно, почти все траектории точки контакта динамически несимметричного шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости являются неограниченными [4]. Фазовое пространство системы (4.1) расщивается на трехмерные торы. В работе [15] были сформулированы и доказаны теоремы о среднем по траектории при движении по тору. С учетом этих теорем и формул (4.3), сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза. При движении динамически несимметричного шара Чаплыгина по плоскости, угол наклона которой меняется по закону (2.2) с параметрами δ, Ω такими, что $c_\beta = 0$, почти всегда отсутствует дрейф шара вдоль оси Ox . При движении на нулевом уровне интеграла c_α почти всегда отсутствует дрейф шара вдоль оси Oy . При движении на нулевых уровнях интегралов $c_\alpha = c_\beta = 0$ почти все траектории точки контакта ограничены.

Очевидно, что при движении динамически симметричного шара Чаплыгина траектория находится аналитически и на нулевом уровне интеграла $c_\beta = 0$, *всегда* отсутствует дрейф шара вдоль оси Ox .

На Рис. 4.1-4.2 проиллюстрированы траектории динамически несимметричного шара Чаплыгина для различных значений параметров на колеблющейся плоскости.

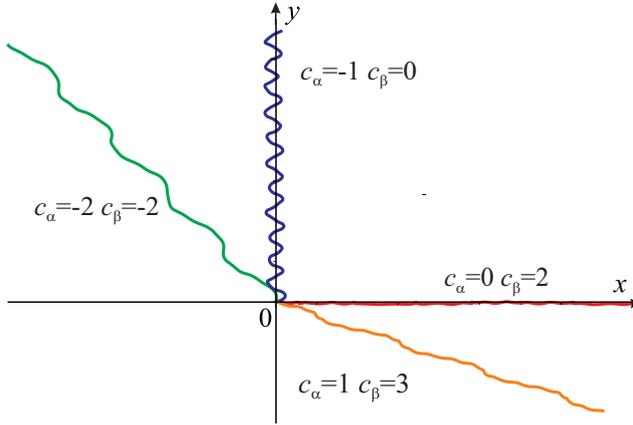
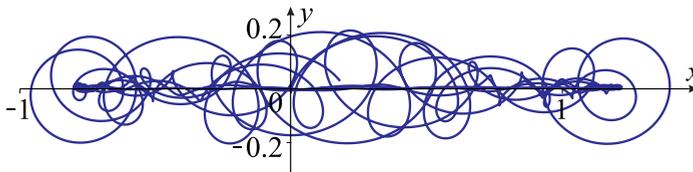
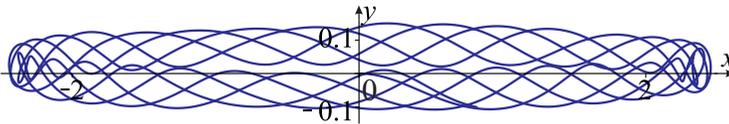


Рис. 4.1. Типовые траектории шара Чаплыгина для различных значений c_α и c_β

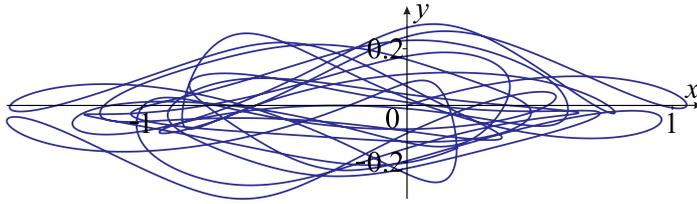
Fig 4.1. Typical trajectories of the Chaplygin sphere with different values of c_α and c_β



a) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 6$



b) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 4$



c) $c_\alpha = 0, c_\beta = 0, c_\gamma = 2$

Рис. 4.2. Примеры типовых траекторий шара Чаплыгина для заданных $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ и $\Omega = 1, R = 1, q = 2, \mathbf{A} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.6)$

Fig 4.2. Examples of typical trajectories of the Chaplygin sphere with the given $c_\alpha, c_\beta, c_\gamma$ and $\Omega = 1, R = 1, q = 2, \mathbf{A} = \text{diag}(0.4, 0.5, 0.6)$

5. Обсуждение

Для обсуждения, рассмотрим интересное управление углом наклона плоскости, по которой катится без проскальзывания шар Чаплыгина:

$$\chi = \arcsin \left(\frac{\delta(\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}} \right), \delta \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \tag{5.1}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{q\boldsymbol{\beta}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}}, \quad q = mgR\delta, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}Z, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{d^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Считаем, что δ достаточно мало и отрыва шара от опорной плоскости не происходит.

Функция $\mu = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta})$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\mu} = - \frac{q\mu}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 1}}, \tag{5.3}$$

где $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mu^2 + c_\alpha^2 + c_\gamma^2$, которое может быть проинтегрировано как численно, так и аналитически. При начальном условии $\mu_0 = 0$ имеем классическую задачу о шаре Чаплыгина на горизонтальной плоскости. Пусть $\mu_0 \neq 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$

- μ неограничена, если $q < 0$;
- μ демонстрирует асимптотическое поведение $\mu \rightarrow 0$, если $q > 0$.

Если $\mu^2 + c_\alpha^2 = 0$, то $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ и уравнения движения системы (5.2) эквивалентны соответствующим уравнениям движения шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{5.4}$$

Если $\mu_0^2 + c_\alpha^2 \neq 0$, то $M \nparallel \gamma$. Разложим векторы α, β по неортогональному базису $(\gamma, M, M \times \gamma)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= sc_\gamma \gamma - sM + rM \times \gamma, \\ \beta &= p\gamma + rM + sM \times \gamma, \\ p &= -\frac{\mu c_\gamma}{\mu^2 + c_\alpha^2}, \quad r = \frac{\mu}{\mu^2 + c_\alpha^2}, \quad s = -\frac{c_\alpha}{\mu^2 + c_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда уравнения (5.2) сводятся к уравнениям в переменных M, γ :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega - \frac{q\mu^2 (M - c_\gamma \gamma)}{\Delta} + \frac{qc_\alpha \mu (M \times \gamma)}{\Delta}, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\Delta = \Delta(\mu, c_\alpha, c_\gamma) = (\mu^2 + c_\alpha^2) \sqrt{\mu^2 + c_\alpha^2 + c_\gamma^2 + 1}$ и функция μ является решением уравнения (5.3).

Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Если $q > 0$, то для произвольных $c_\alpha, c_\gamma, \mu_0 \neq 0$, начиная с некоторого момента времени \hat{t} , фазовая траектория системы (5.6) остается в сколь угодно малой окрестности инвариантного тора системы (5.4).*

Имеет место следующая гипотеза.

Гипотеза. *При движении динамически несимметричного шара Чаплыгина по плоскости с меняющимся по закону (5.1) с числовым параметром $q > 0$ углом наклона почти всегда отсутствует дрейф вдоль оси Ox . Если $c_\alpha = 0$, то почти всегда траектория точки контакта ограничена.*

Очевидно, что при движении динамически симметричного шара Чаплыгина по плоскости с меняющимся по закону (5.1) с числовым параметром $q > 0$ углом наклона всегда отсутствует дрейф вдоль оси Ox . Если $c_\alpha = 0$, то при $t \rightarrow +\infty$

$$x \rightarrow x_0 = const, \quad y = y_0.$$

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда в рамках проекта № 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/19-71-30012/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 219–225.
2. Бизяев И. А. Сани Чаплыгина с движущейся точечной массой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 4. С. 583–589. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170408>
3. Карапетян А. В., Шамин А. Ю. О движении саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости с сухим трением // ПММ. 2019. Т. 83, № 2. С. 228–233. DOI: 10.1134/S0032823519020097
4. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб. 1903. Т. 24, № 1. С. 139–168.

5. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn. 2001. Vol. 6, No. 3. pp. 291–306. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
6. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. Vol. 117. 106920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
7. Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Математические заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 793–795. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm791>
8. Борисов А. В., Казаков А. О., Сатаев И. Р. Регулярные и хаотические аттракторы в неголономной модели волчка Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 3. С. 361–380.
9. Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top // Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21, No. 7-8. pp. 939–954. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354716070157>
10. Borisov A. V., Mamaev I. S. Motion of Chaplygin ball on an inclined plane // Doklady Physics. 2006. Vol. 51, No. 2. pp. 73–76. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>
11. Харламова Е. И. Качение шара по наклонной плоскости // ПММ. 1958. Т. 22, № 4. С. 504–509.
12. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. On the Hadamard–Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles // Regul. Chaotic Dyn. 2015. Vol. 20, No. 6. pp. 752–766. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
13. Борисов А. В., Мамаев И. С. Неоднородные сани Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 625–639. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd1704014>
14. Rocard Y. L'instabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus. Paris: Masson, 1954.
15. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 721–754 DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868>

*Поступила 09.09.2023; доработана после рецензирования 5.11.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “The dynamics of a Chaplygin sleigh”, *J. Appl. Math. Mech.*, **73:2** (2009), 156–161. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.04.005>

2. I. A. Bizyaev, “A Chaplygin sleigh with a moving point mass”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **27**:4 (2017), 583–589 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170408>
3. A. V. Karapetyan, A. Y. Shamin, “On motion of Chaplygin sleigh on a horizontal plane with dry friction”, *Mechanics of Solids*, **54**:5 (2019), 632–637. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190205>
4. S. A. Chaplygin, “On a ball’s rolling on a horizontal plane”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **7**:2 (2002), 131–148. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
5. A. A. Kilin, “The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **6**:3 (2001), 291–306. DOI: <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
6. E. A. Mikishanina, “Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **117** (2023), 106920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
7. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Chaplygin’s Ball Rolling Problem Is Hamiltonian”, *Math. Notes*, **70**:5 (2001), 720–723. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012995330780>
8. A.V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Regular and chaotic attractors in nonholonomic Chaplygin top model”, *Nelin. dinam.*, **10**:3 (2014), 361–380 (In Russ.), <https://www.mathnet.ru/eng/nd450>.
9. A.V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral Chaos in the Nonholonomic Model of a Chaplygin Top”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **21**:7–8 (2016), 939–954. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354716070157>
10. A.V. Borisov, I. S. Mamaev, “Motion of Chaplygin ball on an inclined plane”, *Doklady Physics*, **51**:2 (2006), 73–76. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>
11. E. I. Kharlamova, “Rolling of the ball on an inclined plane.”, *Prikl. Mat. Mekh.*, **22**:4 (1958), 504–509 (In Russ.).
12. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “On the Hadamard–Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:6 (2015), 752–766. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
13. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “An inhomogeneous Chaplygin sleigh”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **22**:4 (2017), 435–447. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354717040062>
14. Y. Rocard, *Línstabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus*, Masson, Paris, 1954.
15. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **18**:6 (2013), 832–859. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>

Submitted 09.09.2023; Revised 5.11.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.342-360

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.64:539.3

Исследование различных функций влияния в перидинамике**Ю. Н. Дерюгин^{1,2}, М. В. Ветчинников¹, Д. А. Шишканов^{1,2}**¹ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» (г. Саров, Российская Федерация)² ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Перидинамика – нелокальный численный метод для решения задач разрушения, основанный на интегральных уравнениях. Предполагается, что частицы в континууме, наделенные объемом, взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Функция влияния в перидинамических моделях используется для ограничения силы, действующей на частицу, и корректировки прочности связи в зависимости от расстояния между частицами. Она удовлетворяет определенным условиям непрерывности и описывает поведение нелокального взаимодействия. В статье проводится исследование различных типов функции влияния в перидинамических моделях на примере трехмерных задач упругости и разрушения. В ходе проделанной работы были описаны модели разрушения на основе связи и на основе состояния, используемые в Сандийской лаборатории, представлены 6 типов функции влияния для модели на основе связи и 2 типа функции для модели на основе состояния, получены соответствующие формулы вычисления жесткости связи. Для тестирования использовались задача о распространении сферически-симметричной упругой волны, имеющая аналитическое решение, и качественная задача разрушения хрупкого диска под действием сферического ударника. Приведены графики радиального смещения, показаны растровые изображения результатов моделирования.

Ключевые слова: перидинамика, молекулярная динамика, функция влияния, функция жесткости связи, нелокальное взаимодействие, горизонт взаимодействия, связь

Для цитирования: Дерюгин Ю. Н., Ветчинников М. В., Шишканов Д. А. Исследование различных функций влияния в перидинамике // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

Об авторах:

Дерюгин Юрий Николаевич, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Ветчинников Максим Владимирович, начальник научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738>, vetchinnikov_max@mail.ru

© Ю. Н. Дерюгин, М. В. Ветчинников, Д. А. Шишканов



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Шишканов Дмитрий Алексеевич, математик научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, dima.shishkanov.96@mail.ru

Original article

MSC2020 74B05, 74R10

Investigation of different influence functions in peridynamics

Yu. N. Deryugin^{1,2}, M. V. Vetchinnikov¹, D. A. Shishkanov^{1,2}

¹ FSUE RFNC – VNIIEF (Sarov, Russian Federation)

² National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Peridynamics is a non-local numerical method for solving fracture problems based on integral equations. It is assumed that particles in a continuum are endowed with volume and interact with each other at a finite distance, as in molecular dynamics. The influence function in peridynamic models is used to limit the force acting on a particle and to adjust the bond strength depending on the distance between the particles. It satisfies certain continuity conditions and describes the behavior of non-local interaction. The article investigates various types of influence function in peridynamic models on the example of three-dimensional problems of elasticity and fracture. In the course of the work done, the bond-based and state-based fracture models used in the Sandia Laboratory are described, 6 types of influence functions for the bond-based model and 2 types of functions for the state-based model are presented, and the corresponding formulas for calculating the stiffness of the bond are obtained. For testing, we used the problem of propagation of a spherically symmetric elastic wave, which has an analytical solution, and a qualitative problem of destruction of a brittle disk under the action of a spherical impactor. Graphs of radial displacement are given, raster images of simulation results are shown.

Keywords: peridynamics, molecular dynamics, influence function, bond stiffness function, nonlocal interactions, interaction horizon, bond

For citation: Yu. N. Deryugin, M. V. Vetchinnikov, D. A. Shishkanov. Investigation of different influence functions in peridynamics. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>

About the authors:

Yuriy N. Deryugin, Chief Researcher, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Maxim V. Vetchinnikov, Head of research laboratory, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> vetchinnikov_max@mail.ru

Dmitry A. Shishkanov, research laboratory mathematician, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), postgraduate, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, dima.shishkanov.96@mail.ru

1. Введение

Перидинамика – нелокальная теория твердого тела, в которой используются интегральные уравнения движения [1],[2]. Предполагается, что частицы в континууме, наделенные объемом, взаимодействуют друг с другом в пределах замкнутого горизонта, подобно молекулярной динамике.

Статья является продолжением исследования, проведенного в [3], где тестирование перидинамических моделей разрушения на основе связи и на основе состояния проводилось на примере одномерных задач упругости и задач разрушения. Результаты в [3] показали, что необходимо дополнительное исследование способов задания функции влияния.

Цель исследования, проведенного в рамках данной работы, заключалась в тестировании реализованных ранее [3] моделей перидинамики, используя новые типы функции влияния. Задачами исследования являлись изучение перидинамических моделей разрушения на основе связи - PMB (Prototype Microelastic Brittle), и на основе состояния – LPS (Linear Peridynamic Solid), вывод формул для задания функций жесткости связи PMB модели, тестирование метода на примере трехмерных задач упругости [4] и разрушения.

Реализация [3] моделей Сандийской лаборатории [5] проводилась в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS (Molecular Dynamic Simulation) [6]. Внедрение метода перидинамики в MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования [7], которая даст возможность более точно описать возникновение и эволюцию разрушений.

2. Метод перидинамики

Перидинамическая теория, введена Силингом [8] для решения задач механики твердого тела. Твердое тело представляется набором дискретных частиц с номером i , каждая из которых обладает массой – m_i , плотностью – ρ_i , начальными координатами – $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$. Дискретный вектор смещений $\vec{u}_i(u_i^x, u_i^y, u_i^z)$ описывает движение деформируемой среды. Взаимодействие между частицами происходит внутри замкнутого горизонта – δ и задается на конечном расстоянии в виде связи (рис. 2.1).

В перидинамике используются интегральные уравнения, которые позволяют избежать пространственных производных, не существующих на поверхностях разрыва в задачах разрушения.

Основные аппроксимационные соотношения метода задаются векторами относительного положения частиц $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$ и относительного смещения $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$, удовлетворяющих условию $|\vec{\xi}_i| < \delta$.

Уравнение движения задается в виде:

$$\rho_i \ddot{\vec{u}}(\vec{r}_i, t) = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$

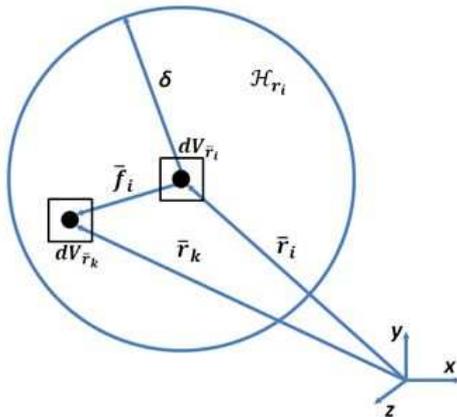


Рис. 2.1. Взаимодействие частиц в пределах замкнутого горизонта: δ — горизонт взаимодействия; $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ — координаты частиц i и k ; \mathcal{H}_{r_i} — множество соседей частицы i ; dV_{r_i} , dV_{r_k} — объемы частиц i и k ; \vec{f}_i — сила, определяющая взаимодействие частиц i и k .

Fig 2.1. Particles interaction within closed horizon: δ — interaction horizon; $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$ — coordinate of particles i and k ; \mathcal{H}_{r_i} — neighbors ensemble of particle i ; dV_{r_i} , dV_{r_k} — volumes of particles i and k ; \vec{f}_i — interaction force of particles i and k .

где \vec{b} — граничные условия.

Плотность энергии деформирования:

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}_{r_i}} \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) dV_{r_k}, \tag{2.2}$$

где $\vec{w} = \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i)$ — энергия связи между частицами.

Дифференцирование энергии связи в общем виде определяет силу межчастичного взаимодействия:

$$\vec{f}_i(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\eta}_i}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|} \quad \forall \vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i. \tag{2.3}$$

Формула 2.3 и уравнение движения 2.1 образуют замкнутую систему уравнений перидинамики. Подробнее теория перидинамики описана в [1], [2], [9].

3. РМВ модель

Сила задается в следующем виде:

$$\vec{f}_i(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) = c^{mod} s \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad s < s_0, \tag{3.1}$$

где c^{mod} — жесткость связи, s_0 — критерий разрыва связи, s — деформация связи:

$$s = \frac{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - |\vec{\xi}_i|}{|\vec{\xi}_i|}, \tag{3.2}$$

и μ – скалярная функция, которая принимает значения 1 или 0, определяется формулой

$$\mu \left(r_i, t, \vec{\xi}_i \right) = \begin{cases} 1, & s \left(t', \vec{\xi}_i \right) < s_0, \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \\ 0, & s \left(t', \vec{\xi}_i \right) \geq s_0, \quad \forall 0 \leq t' \leq t. \end{cases} \tag{3.3}$$

Для данной модели характерной особенностью является использование коэффициента Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$. Упругая константа c^{mod} задает жесткость связи [9].

4. Жесткость связи и функция влияния

В общем случае, жесткость связи – это функция, зависящая от длины связи и горизонта взаимодействия, удовлетворяющая условиям непрерывности [10]

$$c^{mod} \left(\vec{\xi}_i, \delta \right) = c\omega \left(\vec{\xi}_i, \delta \right), \tag{4.1}$$

где $\omega \left(\vec{\xi}_i, \delta \right)$ – функция влияния, задающая взаимодействие частиц в связи, c – постоянное значение функции.

В [3] рассматривались наиболее часто встречающиеся типы функций жесткости связи для одномерного случая. Рассмотрим теперь различные типы функции влияния из [11] (см. таблицу 4.1) и получим для них функции жесткости связи, характерные трехмерной постановке задач.

Таблица 4.1. Типы функции влияния $\omega \left(\left| \vec{\xi}_i \right| \right)$ из [11]

Тип функции	$\omega \left(\left \vec{\xi}_i \right \right)$
Постоянная	1
Треугольная	$1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}$
Квадратичная	$\left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta} \right)^2 \right)^2$
Полуэллиптическая	$1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta} \right)^2$
Экспоненциальная	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}$
Гауссова	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}$

Для однородных деформаций в трехмерных задачах значение жесткости связи выводится в [9]. Полагая, что $s = \frac{|\vec{\eta}_i|}{|\vec{\xi}_i|} = \frac{\eta}{\xi}$ и используя 3.1 и 2.3, получаем $w = \frac{c^{mod}\eta^2}{2\xi} = \frac{c^{mod}s^2\xi}{2}$. Тогда, учитывая определение 4.1, плотность энергии деформации 2.2 переписывается в виде

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{c\omega s^2 \xi}{2} \right) 4\pi \xi^2 d\xi. \tag{4.2}$$

Запишем общий вид плотности энергии деформации в классической теории:

$$W_i^{CCM} = \frac{1}{2} \{ \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + 2G (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \}, \quad (4.3)$$

где λ — первый коэффициент Ламе, G — модуль сдвига.

Для изотропного упругого случая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = s$, тогда 4.3 переписывается в виде

$$W_i^{CCM} = \frac{1}{2} \{ \lambda (3s)^2 + 2G (3s^2) \} = \frac{3}{2} (3\lambda + 2G) s^2. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ и $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, получаем

$$W_i^{CCM} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2. \quad (4.5)$$

Константа функции жесткости связи c для функций влияния из таблицы 4.1 получается из сравнения $W_i^{CCM} = W_i^{PD}$ следующим образом:

1) если ω — постоянная, то

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{cs^2\xi}{2} \right) 4\pi\xi^2 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{4}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{4} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.7)$$

2) если ω — треугольная, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{\xi}{\delta} \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{20}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{20} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.9)$$

3) если ω — квадратичная, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left(1 - 2 \left(\frac{\xi}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{\delta} \right)^4 \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{24}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{24} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.11)$$

4) если ω — полуэллиптическая, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{\xi}{\delta} \right)^2 \right) \xi^3 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{12}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\pi cs^2\delta^4}{12} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}, \quad (4.13)$$

5) если ω — экспоненциальная, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta e^{-\frac{\xi}{\delta}} \xi^3 d\xi = 2\pi cs^2 \delta^4 \left(3 - \frac{8}{e}\right), \quad (4.14)$$

$$2\pi cs^2 \delta^4 \left(3 - \frac{8}{e}\right) = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8}, \quad (4.15)$$

6) если ω — гауссова, то

$$W_i^{PD} = \pi cs^2 \int_0^\delta e^{-\frac{\xi^2}{\delta^2}} \xi^3 d\xi = \pi cs^2 \delta^4 \frac{e-2}{2e}, \quad (4.16)$$

$$\pi cs^2 \delta^4 \frac{e-2}{2e} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} s^2 \Rightarrow c = \frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2}. \quad (4.17)$$

Тогда функции жесткости связи с учетом вычисленных констант с 4.6 – 4.17 получаются в соответствии с 4.1 (см. таблицу 4.2).

Таблица 4.2. Типы функции жесткости связи для трехмерного случая

Тип функции	$\omega\left(\left \vec{\xi}_i\right \right)$	c	$c^{mod}\left(\left \vec{\xi}_i\right , \delta\right)$
Постоянная	1	$\frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{6E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$
Треугольная	$1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}$	$\frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{30E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)$
Квадратичная	$\left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)^2$	$\frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{36E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)^2$
Полуэллиптическая	$1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2$	$\frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4}$	$\frac{18E}{(1-2\nu)\pi\delta^4} \left(1 - \left(\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}\right)^2\right)$
Экспоненциальная	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}$	$\frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8}$	$\frac{3eE}{4(1-2\nu)\pi\delta^4 3e-8} \left(e^{-\frac{ \vec{\xi}_i }{\delta}}\right)$
Гауссова	$e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}$	$\frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2}$	$\frac{3eE}{(1-2\nu)\pi\delta^4 e-2} \left(e^{-\frac{ \vec{\xi}_i ^2}{\delta^2}}\right)$

На рисунке 4.1 видно, что функция влияния в 4.1 уменьшает жесткость взаимодействия частиц при увеличении длины связи. Все типы функции жесткости связи, кроме постоянной, уменьшаются при $|\vec{\xi}_i| \rightarrow \delta$.

5. LPS модель

Данная модель является обобщением РМВ модели [13] и применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона [12].

Сила межчастичного взаимодействия \vec{f}_i определяется следующими образом:

$$\vec{f}_i = \frac{2dK\theta}{m_i} \omega|\vec{\xi}_i| + 2\alpha\omega\varepsilon, \quad s < s_0, \quad (5.1)$$

где K — модуль объёмного сжатия, θ — относительное смещение, ε — девиатор тензора деформации, α — константа, ω — функция влияния, d — размерность пространства,

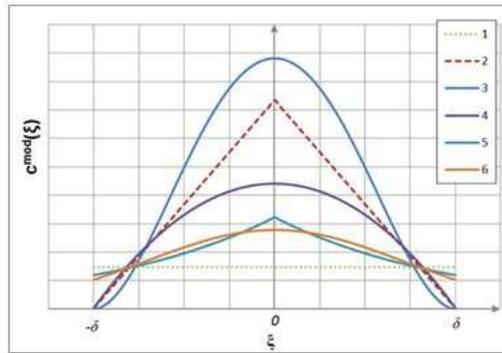


Рис. 4.1. Типы функции влияния из таблицы 4.1: 1 — постоянная; 2 — треугольная; 3 — квадратичная; 4 — полуэллиптическая; 5 — гауссова; 6 — экспоненциальная.

Fig 4.1. Influence function types in the table 4.1: 1 — constant; 2 — triangle; 3 — quadratic; 4 — semi-elliptical; 5 — Gaussian; 6 — exponential.

s — деформация связи 3.2, m_i — массовый объем частицы, который определяется следующей формулой:

$$m_i = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega |\vec{\xi}_i|^2 dV_{\vec{r}_k}. \tag{5.2}$$

Растяжение связи e представляется в виде суммы шаровой и девиаторной части:

$$e = e^i + \varepsilon, e^i = \frac{\theta |\vec{\xi}_i|}{3}, \tag{5.3}$$

$$\theta [\vec{r}_i, t] = \frac{d}{m_i} \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega |\vec{\xi}_i| e [\vec{r}_i, t] dV_{\vec{r}_k}. \tag{5.4}$$

Константа α для трехмерных задач 5.6 получается из сравнения плотности энергии перидинамики 5.5 с энергией классической теории [14].

$$W_i^{PD} = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega \varepsilon^2 dV_{\vec{r}_k}, \tag{5.5}$$

$$\alpha = \frac{15G}{m}. \tag{5.6}$$

В [3] было показано, что при использовании сферической функции влияния $\omega = \frac{1}{|\xi_i|}$ и коэффициента Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$ LPS модель полностью совпадает с РМВ.

6. Силы межчастичного взаимодействия с малым радиусом действия

При построении дискретной модели интегральные уравнения перидинамики 2.1 записываются в виде конечных сумм

$$\rho_i \ddot{u}_i^n = \sum_{k \in H_i} \vec{f}_i \left(\vec{u}_k^n - \vec{u}_i^n, \vec{r}_k^0 - \vec{r}_i^0 \right) \Delta V_k + \vec{b}_i^n. \quad (6.1)$$

В рассмотренных выше моделях частицы перестают взаимодействовать после разрыва связи. Чтобы избежать перекрытия частиц после потери связи [5], [7], вводится отталкивающая сила межчастичного взаимодействия:

$$\vec{f}_s \left(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i \right) = \min \left\{ 0, \frac{c_s}{\delta} \left(|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - d_{ki} \right) \right\} \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad (6.2)$$

где d_{ki} — расстояние между частицами k и i после разрыва связи, c_s — константа в виде

$$c_s = 15c^{mod}. \quad (6.3)$$

В случае, когда частицы подвергаются внешнему давлению, расстояние между ними после разрыва связи можно определить в виде

$$d_{ki} = \min \{ 0.9|\vec{\xi}_i|, 1.35\Delta x \}. \quad (6.4)$$

Тогда, сила межчастичного взаимодействия в 6.1 будет выглядеть как

$$\vec{f}_i = \begin{cases} \vec{T}_i, & s \left(t', \vec{\xi}_i \right) < s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \\ \vec{f}_s, & s \left(t', \vec{\xi}_i \right) \geq s_0 \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (6.5)$$

где \vec{T}_i — сила взаимодействия частиц до разрыва.

7. Корректировка объемов частиц в дискретной области

Пусть $\delta = 3\Delta x$, тогда в дискретном уравнении движения частицы \vec{r}_i^t 6.1 суммирование идет по частицам, представленным на рисунке 7.1 а). Учитывая, что в классической теории область интегрирования сплошная (см. рисунок 7.1 б)), то объемы частиц на границе области $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ в перидинамике будут влиять на точность результатов численного интегрирования.

В литературе по перидинамике [2], [9] представлен способ улучшения аппроксимации, который основан на корректировке объемов частиц, расположенных на границе области соседей $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$. Для этого вводится линейная масштабирующая функция объема частицы:

$$\Delta V_k = k(\vec{\xi}_i) \Delta x^3, \quad (7.1)$$

где $k(\vec{\xi}_i)$ — масштабирующая функция:

$$k(\vec{\xi}_i) = \begin{cases} \frac{\delta + \frac{\Delta x}{2} - |\vec{\xi}_i|}{\Delta x}, & \delta - \frac{\Delta x}{2} \leq |\vec{\xi}_i| \leq \delta, \\ 1, & |\vec{\xi}_i| \leq \delta - \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & |\vec{\xi}_i| > \delta. \end{cases} \quad (7.2)$$

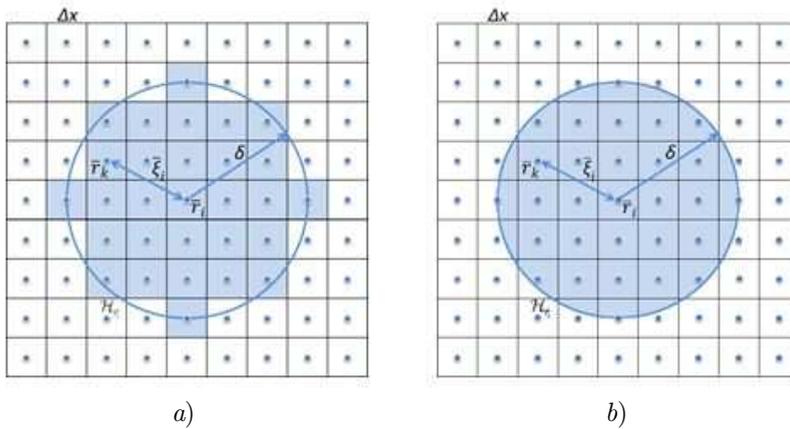


Рис. 7.1. Объемы частиц в пределах области интегрирования частицы i : а) — в перидинамике, б) — в классической теории.

Fig 7.1. Particles volumes within the integration domain of particle i : а) — in peridynamics, б) — in classical theory.

8. Тестовые расчеты

В [3] показана сходимость метода перидинамики на примере одномерной задачи упругости при уменьшении δ . Однако, для задач механики сплошной среды можно выбрать любое достаточно малое значение δ , так как с помощью жесткости связи корректируется поведение нелокального взаимодействия частиц и результаты моделирования можно согласовывать с экспериментальными данными для любого значения δ [8]. Таким образом, результаты расчетов также будут зависеть от способа задания жесткости связи и выбора функции влияния.

В расчетах мы ограничились использованием функций влияния из таблицы 4.1 и, соответственно, заданием функций жесткости связи из таблицы 4.2. Значение для δ выбрано с учетом [9].

Для тестирования нелокального метода использовались упругая задача, имеющая аналитическое решение и качественная задача на разрушение хрупкого материала.

9. Сферически-симметричная расходящаяся упругая волна

Рассматривается распространение расходящейся упругой волны. Постановка задачи и точное решение взяты из [4].

Геометрия задачи: $r_0 \leq |x| \leq r_1$, $r_0 \leq |y| \leq r_1$, $r_0 \leq |z| \leq r_1$, $r_0 = 1$ см, $r_1 = 40$ см.

Граничные условия ставятся на гранях внутреннего куба ($|x| = r_0$, $|y| = r_0$, $|z| = r_0$): $w_x(x, y, z, t) = \frac{x}{r} w_r(r, t)$, $w_y(x, y, z, t) = \frac{y}{r} w_r(r, t)$, $w_z(x, y, z, t) = \frac{z}{r} w_r(r, t)$

Параметры источника: период колебаний $T = 10^{-5}$ с, амплитуда колебаний $w_0 = 0.01$ см.

Свойства материала для расчета по РМВ модели: коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, плотность $\rho_0 = 7.85$ г/см³, модуль Юнга $E = 200$ ГПа.

Свойства материала для расчета по LPS модели: коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$, плотность $\rho_0 = 7.85 \text{ г/см}^3$, модуль Юнга $E = 200 \text{ ГПа}$.

Конец счета при $t = 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

Расчеты проведены в декартовой системе координат, поэтому рассчитанные параметры для сравнения с аналитикой были переведены в сферическую систему координат. Радиальные компоненты скорости и смещения вычислены по формулам:

$$u_r(r, t) = \frac{u_x(x, y, z, t)x + u_y(x, y, z, t)y + u_z(x, y, z, t)z}{r}, \tag{9.1}$$

$$w_r(r, t) = \frac{w_x(x, y, z, t)x + w_y(x, y, z, t)y + w_z(x, y, z, t)z}{r}. \tag{9.2}$$

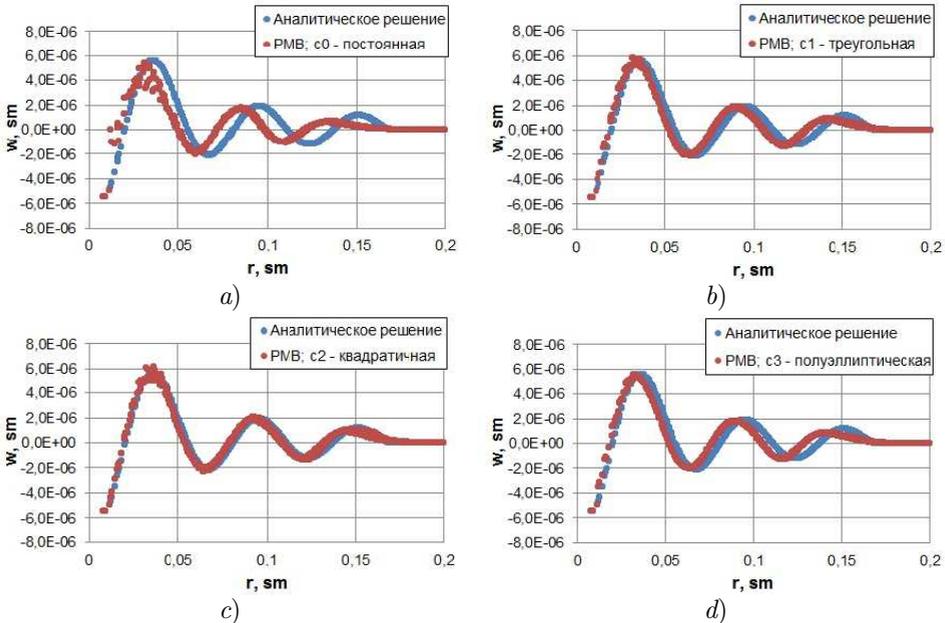
Использовались число частиц $N = 531414$ и горизонт взаимодействия $\delta = 3.015\Delta x$.

Растровые картины в нелинейной шкале (шпирен-визуализация) изображены на рисунках 9.3, 9.5. Оттенки цветов в шпирен-визуализации соответствуют величине:

$$S = 0.8|\vec{u}|e\left(-5\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|_{max}}\right), \tag{9.3}$$

где \vec{u} – вектор скорости.

Первая серия расчетов проведена с использованием bond-based метода перидинамики. Результаты представлены на рисунках 9.1 – 9.2. Наилучшая сходимость к аналитике наблюдается при использовании квадратичной функции жесткости связи. Погрешность вычислений представлена на рисунке 9.2. По растровым картинам модуля скорости в шпирен-визуализации (см. рисунок 9.3) видно, что сохраняется сферическая симметрия на протяжении всей задачи.



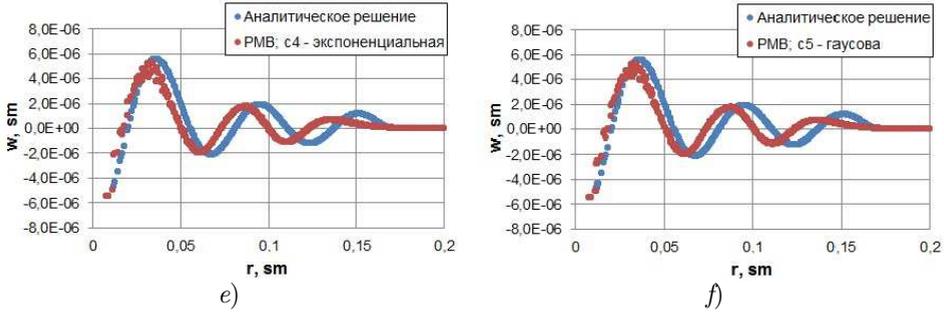


Рис. 9.1. Профили смещения в сечении Oxy на момент времени $t = 3 \cdot 10^{-5}$ для различных типов функции жесткости связи.
Fig 9.1. The profile of displacement in cutset Oxy at time $t = 3 \cdot 10^{-5}$ for different bond stiffness function types.

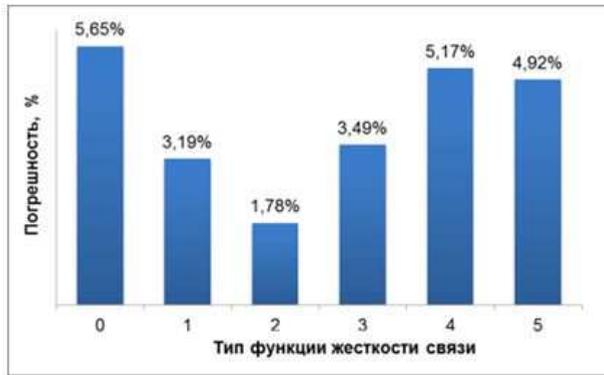


Рис. 9.2. Относительная погрешность вычислений на момент времени $t = 3 \cdot 10^{-5}$ для функций жесткости связи: 0 — постоянная; 1 — треугольная; 2 — квадратичная; 3 — полуэллиптическая; 4 — экспоненциальная; 5 — гауссова.
Fig 9.2. The relative error of calculations at time $t = 3 \cdot 10^{-5}$ for bond stiffness functions: 0 — constant; 1 — triangle; 2 — quadratic; 3 — semi-elliptical; 4 — exponential; 5 — Gaussian.

Вторая серия расчетов проведена state-based методом перидинамики. Результаты, представленные на рисунке 9.4, показывают наилучшую сходимость при использовании сферической функции влияния. Относительная погрешность вычислений на момент времени $t = 3 \cdot 10^{-5}$ при использовании сферической функции влияния $\omega = \frac{1}{|\xi_i|}$ равна 3.36%, а при использовании постоянной функции влияния 4.05%. Сферическая симметрия сохраняется (см. рисунок 9.5).

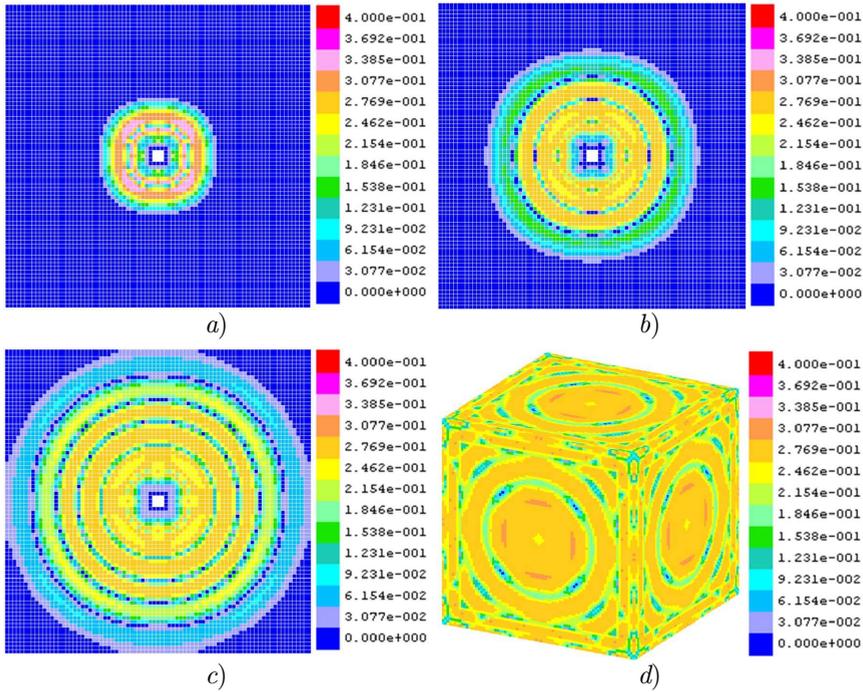


Рис. 9.3. Растровые картины модуля скорости в шпирен-визуализации на времена: а) $t = 1 \cdot 10^{-5}$, б) $t = 2 \cdot 10^{-5}$, в) $t = 3 \cdot 10^{-5}$, д) $t = 7 \cdot 10^{-5}$. Расчет проводился РМВ моделью перидинамики с использованием квадратичной функции жесткости связи

Fig 9.3. Raster pictures of velocity module in the schlieren-visualization at times: а) $t = 1 \cdot 10^{-5}$, б) $t = 2 \cdot 10^{-5}$, в) $t = 3 \cdot 10^{-5}$, д) $t = 7 \cdot 10^{-5}$. The computation was performed by the PMB model of peridynamics using the quadratic bond stiffness function

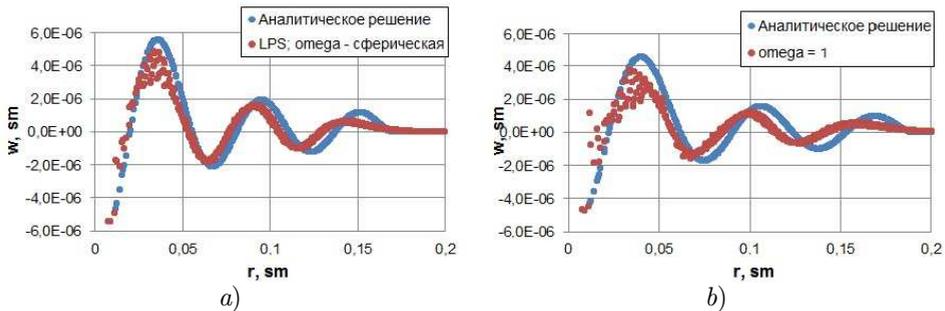


Рис. 9.4. Профили смещения в сечении Oxy на момент времени $t = 3 \cdot 10^{-5}$ для двух типов функции влияния

Fig 9.4. The profile of displacement in cutset Oxy at time $t = 3 \cdot 10^{-5}$ for two influence function types

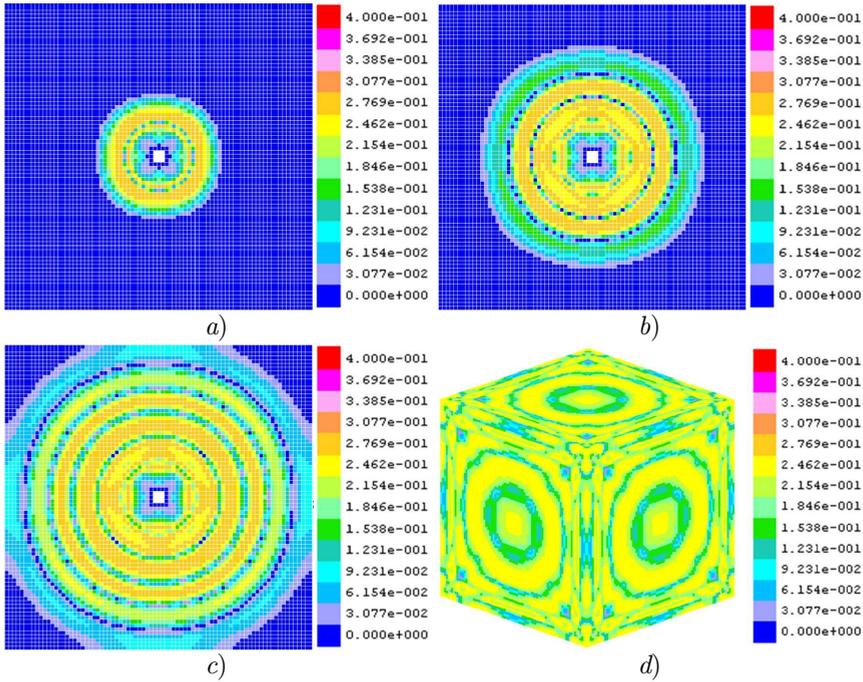


Рис. 9.5. Растровые картины модуля скорости в шпирен-визуализации на времена: *a)* $t = 1 \cdot 10^{-5}$, *b)* $t = 2 \cdot 10^{-5}$, *c)* $t = 3 \cdot 10^{-5}$, *d)* $t = 7 \cdot 10^{-5}$. Расчет проводился LPS моделью перидинамики со сферической функцией влияния
Fig 9.5. Raster pictures of velocity module in the schlieren-visualization at times: *a)* $t = 1 \cdot 10^{-5}$, *b)* $t = 2 \cdot 10^{-5}$, *c)* $t = 3 \cdot 10^{-5}$, *d)* $t = 7 \cdot 10^{-5}$. The computation was performed by the LPS model of peridynamics using the spherical influence function

10. Разрушение хрупкого диска под действием сферического ударника

Рассматривается поведение хрупкого материала при ударной нагрузке. Постановка задачи взята из [7].

Параметры ударника: диаметр $d = 0.01$ м, скорость $v = 100$ м/с.

Параметры материала: диаметр $D = 0.074$ м, толщина $H = 0.0025$ м, плотность $\rho_0 = 2.2$ г/см³, модуль объемного сжатия $K = 14.9$ ГПа, модуль сдвига $G = 78.07692$ ГПа.

Внешняя сила, действующая на частицы со стороны ударника:

$$f_{out} = \begin{cases} -k_s(r - R)^2, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (10.1)$$

где r — расстояние от частицы до центра ударника, R — радиус ударника, $k_s = 10^{17}$ — константа силы.

Расчеты проводились bond-based методом перидинамики с числом частиц $N = 85925$ и горизонтом взаимодействия $\delta = 3.015\Delta x$. Конец счета при $t = 3 \cdot 10^{-5}$ с. Предельное значение деформации связи $s_0 = 0.0005$.

Локальное повреждение ϕ_i определяется формулой

$$\phi_i(\vec{r}_i, t) = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}} \quad (10.2)$$

и принимает значения в диапазоне $0 \leq \phi_i \leq 1$, где 0 означает, что материал целый, а 1 означает завершённый разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала.

На рисунке 10.1 приведено облако обломков при высокоскоростном ударе по тонкой мишени.

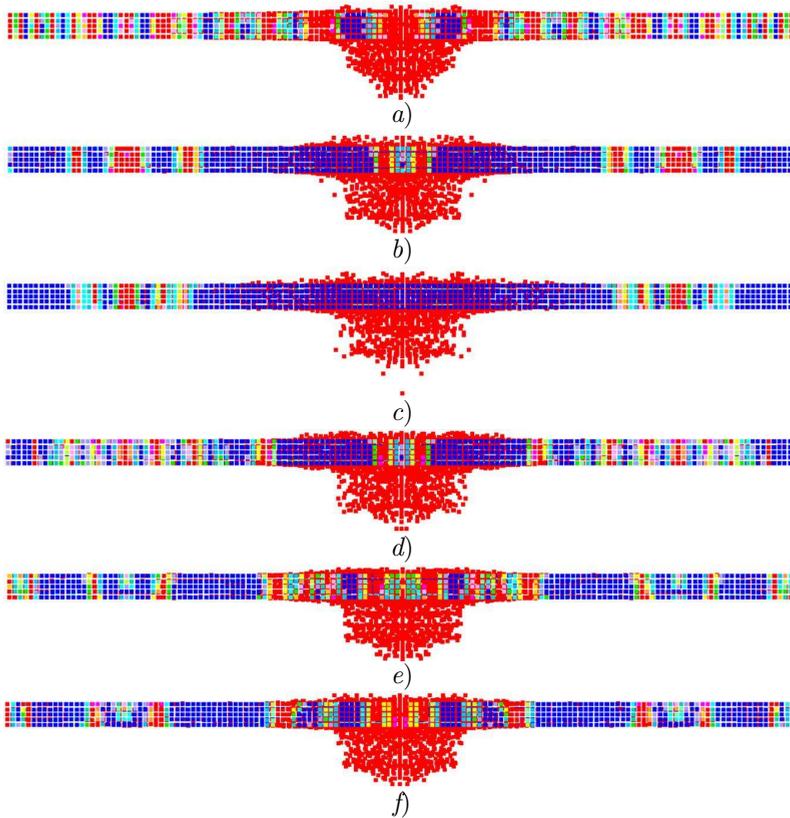


Рис. 10.1. Растровые картины облака обломков в задаче разрушения на конечный момент времени для различных типов функции жесткости связи: *a)* постоянная, *b)* треугольная, *c)* квадратичная, *d)* полуэллиптическая, *e)* экспоненциальная, *f)* гауссова

Fig 10.1. Raster pictures of fragments cloud in the damage problem at a finite time for the different types of bond stiffness function: *a)* constant; *b)* triangle; *c)* quadratic; *d)* semi-elliptical; *e)* exponential; *f)* Gaussian

На рисунке 10.2 представлена картина разрушения всей цели.

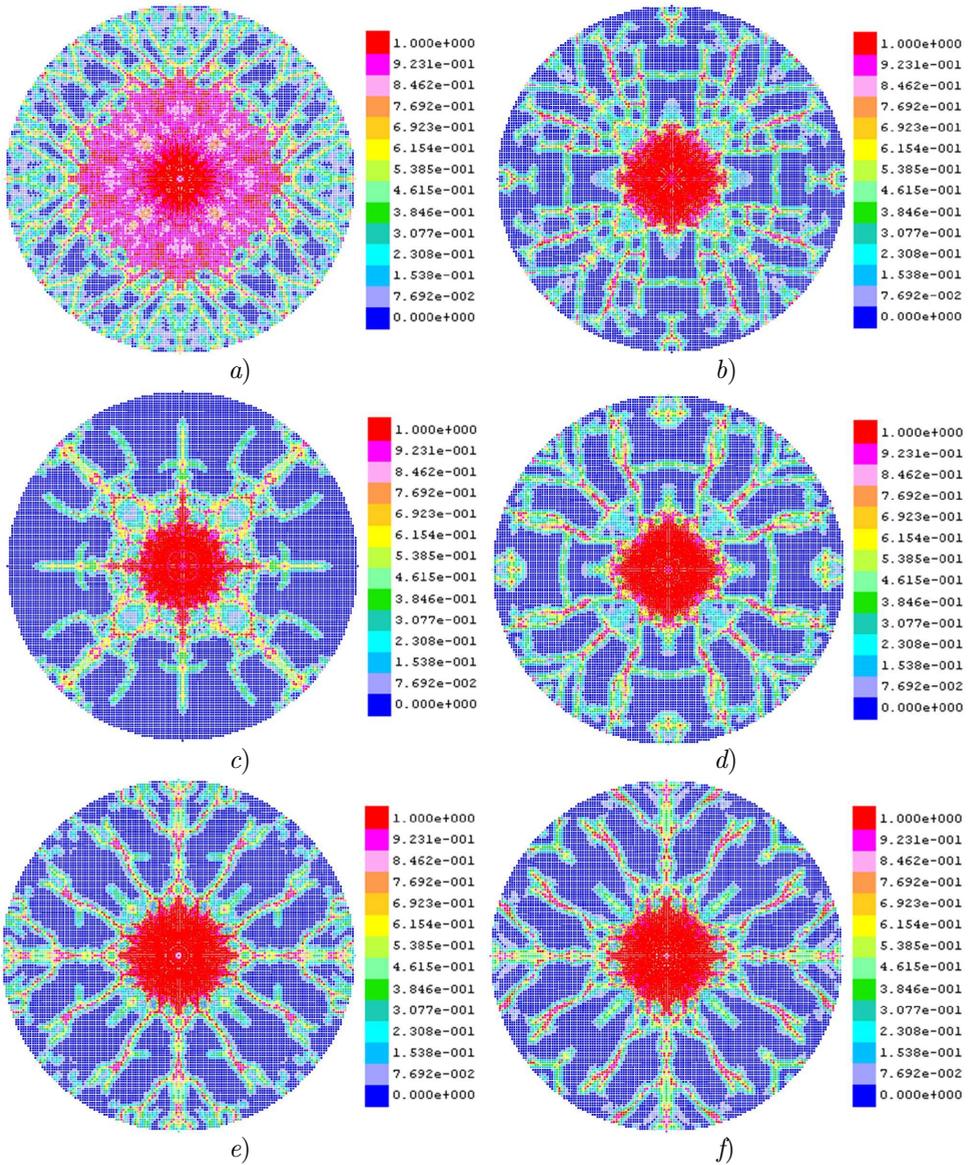


Рис. 10.2. Растровые картины верхнего слоя в задаче разрушения на конечный момент времени для различных типов функции жесткости связи: a) постоянная, b) треугольная, c) квадратичная, d) полуэллиптическая, e) экспоненциальная, f) гауссова

Fig 10.2. Raster pictures of upper layer in the damage problem at a finite time for the different types of bond stiffness function: a) constant; b) triangle; c) quadratic; d) semi-elliptical; e) exponential; f) Gaussian

Тип функции жесткости связи оказывает заметное влияние на поведение трещин. В данной задаче не рассматривается количественное сравнение с экспериментом, а демонстрируется способность метода моделировать сложные закономерности роста трещин и их взаимодействия.

11. Заключение

В данной работе проведено исследование различных типов функции влияния, которая используется в перидинамических моделях для корректировки поведения нелокального взаимодействия частиц. Было исследовано восемь функций влияния для моделей на основе связи и на основе состояния на примере трехмерных задач. В расчетах задачи упругости наблюдается качественное совпадение результатов моделирования с аналитическим решением для реализованных моделей на всем временном интервале, при этом наилучшее приближение к аналитическому решению происходит при счете моделью на основе связи с использованием квадратичной функции жесткости связи. В задаче хрупкого разрушения картина повреждений сильно зависит от выбора типа функции влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bobaru F., Geubelle P. H., Foster J. T., Silling S. A. Handbook of peridynamic modeling. NY: Taylor & Francis, 2016. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
2. Madenci E., Oterkus E. Peridynamic theory and its applications. NY: Springer, 2014. 297 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
3. Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
4. Софронов В. Н., Ветчинников М. В., Дёмина М. А. Использование методов гамильтоновой динамики в численных расчетах задач механики сплошной среды // Журнал ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2020. № 4. 17 с.
5. Parks M. L., Seleson P., Plimpton S. J., Lehoucq R. B., Silling S. A. Peridynamics with LAMMPS: A user guide v0.2 Beta. New Mexico, 2008. 28 p.
6. Анисимов А. Н., Грушин С. А., Воронин Б. Л., Копкин С. В., Ерофеев А. М., Демин Д. А., Демина М. А., Здорова М. В., Ветчинников М. В., Еричева Н. С., Коваленко Н. О., Крючков И. А., Кечин А. Г., Дегтярев В. А., Урм В. Я. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614974. Комплекс программ молекулярно-динамического моделирования (MoDyS). 2010.
7. Parks M. L., Lehoucq R. B., Plimpton S. J., Silling S. A. Implementing peridynamics within a molecular dynamics code // Computer Physics Communications. 2008. Vol. 179. P. 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>

8. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 2000. Vol. 48, No 1. P. 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
9. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // *Computers and Structures*. 2005. Vol. 83, No. 17. P. 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
10. Silling S. A., Zimmermann M., Abeyaratne R. Deformation of a peridynamic bar // *Journal of Elasticity*. 2003. Vol. 73. P.173–190.
11. Chen Z., Ju J. W., Su G., Huang X., Li S., Zhai L. Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 216. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106498>
12. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling // *Journal of Elasticity*. 2007. Vol. 88. P. 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
13. Mitchell J. A., Silling S. A., Littlewood D. J. A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, no. 5. P. 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
14. Mitchell J. A. On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’, studies of presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure // Sandia National Laboratories. 2013.
15. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory // *Journal of Elasticity*. 2008. Vol. 93. P. 13–37.

*Поступила 29.08.2023; доработана после рецензирования 02.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. F. Bobaru, P.H. Geubelle, J.T. Foster, S. A. Silling, *Handbook of peridynamic modeling*, Taylor & Francis, NY, 2016 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>, 586 p.
2. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, New York: Springer, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>, 297 p.
3. D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin, “Peridynamics method for problems solve of solids destruction.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24:4** (2022), 452–468 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
4. V. N. Sofronov, M. V. Vetchinnikov, M. A. Dyemina, “Use of Hamiltonian dynamics methods in computational continuum mechanics”, *Zhurnal VANT*, 2020, no. 4 (In Russ.), 17 p.

5. M.L. Parks, P. Seleson, S. J. Plimpton, R.B. Lehoucq, S.A. Silling, “Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta”, 2008, 28 p.
6. A. N. Anisimov, S. A. Grushin, B. L. Voronin, S. V. Kopkin, A. M. Yerofeev, D. A. Demin, M. A. Demina, M. V. Zdorova, M. V. Vetchinnikov, N. S. Elicheva, N. O. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. G. Kechin, V. A. Degtyarev, *Certificate of state registration of the computer program No. 2010614974. A complex of molecular dynamic modeling programs (MoDyS)*, 2010 (In Russ.).
7. M. L. Parks, Lehoucq, R. B., S. J. Plimpton, S. A. Silling, “Implementing peridynamics within a molecular dynamics code”, *Computer Physics Communications*, **179** (2008), 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
8. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **48**:1 (2000), 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
9. S. A. Silling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers & Structures*, **93**:17 (2005), 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
10. S. A. Silling, M. Zimmermann, R. Abeyaratne, “Deformation of a peridynamic bar”, *Journal of Elasticity*, **73** (2003), 173–190.
11. Z. Chen, J. W. Ju, G. Su, X. Huang, S. Li., L. Zhai, “Influence of micro-modulus functions on peridynamics simulation of crack propagation and branching in brittle materials”, *Engineering Fracture Mechanics*, **216** (2019). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106498>
12. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, *Journal of Elasticity*, **88** (2007), 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
13. A. J. Mitchell, S. A. Silling, D. J. Littlewood, “A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **20**:5 (2015), 539–557. DOI: <https://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
14. J. A. Mitchell, “On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’, studies of presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure”, *Sandia National Laboratories*, 2013.
15. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory”, *Journal of Elasticity*, **93** (2008), 13–37.

Submitted 29.08.2023; Revised 02.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.361-374

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.688

Численная модель формирования паро-воздушно-углеводородных смесей

А. Р. Яппарова, Т. В. Маркелова, П. В. Снытников

Институт катализа СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация)

Аннотация. Использование энергоустановок на основе топливных элементов является перспективным направлением в получении электроэнергии. Однако на пути их широкого внедрения стоит проблема высокой стоимости и доступности используемого топлива. Для решения этой проблемы разрабатываются эффективные системы, работающие на дизельном топливе. Основная задача заключается в создании устройства — топливного процессора, которое бы конвертировало дизельное топливо в водородосодержащий газ. Устройство состоит из нескольких блоков: форсунка для впрыска жидкого топлива в перегретый пар в виде капель, зона смешения и испарения дизельного топлива, область подачи воздуха, реакционная зона, включающая катализатор. Подбор температуры для протекания процесса испарения должен быть произведен таким образом, чтобы, с одной стороны, жидкие капли не попадали на поверхность катализатора, а, с другой стороны, не запускались газофазные реакции в зоне смешения. Для разработки такого устройства требуется не только проведение лабораторных экспериментов и исследование катализатора процесса, но и оптимизация основных физических характеристик устройства, таких как его линейные размеры, рабочая температура, расходы реагентов и многих других. Проведение такого исследования невозможно без использования методов математического моделирования. Это существенно сокращает сроки и стоимость работ. В данной работе представлена цифровая модель устройства для формирования паро-воздушно-углеводородной смеси в осесимметричной постановке. Изучена динамика дозвукового многофазного течения водяного пара, несущего капли жидкого дизельного топлива, процесс испарения и смешивания дизельного топлива с водяным паром и воздухом. Математическая модель была реализована в пакете ANSYS Fluent (академическая лицензия ССКЦ СО РАН).

Ключевые слова: дизельное топливо, многофазное течение, испарение топлива, формирование воздушно - углеводородных смесей, ANSYS Fluent

Для цитирования: Яппарова А.Р., Маркелова Т.В., Снытников П.В. Численная модель формирования паро-воздушно-углеводородных смесей // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 361–374. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.361-374>

Об авторах:

Яппарова Айгуль Раухатовна, инженер, Институт катализа СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8424-8104>, a.yapparova@g.nsu.ru

Маркелова Тамара Валерьевна, ведущий инженер, Институт катализа СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9920-0923>, matamara@gmail.com

© А. Р. Яппарова, Т. В. Маркелова, П. В. Снытников



Снытников Павел Валерьевич, заведующий Отделом гетерогенного катализа, руководитель Центра НТИ "Водород как основа низкоуглеродной экономики", Институт катализа СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), доктор химических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5057-3187>, pvsnyt@catalysis.ru

Original article

MSC2020 76-10

Numerical model of vapor-air-diesel autothermal reformer

A. R. Yapparova, T. V. Markelova, P. V. Snytnikov

Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

Abstract. The use of fuel cell power plants is a promising area in the generation of electricity. The path to their widespread use is hindered by their high cost and the availability of the fuel used. To solve this problem, effective energy conversion systems operating on diesel fuel are being developed. The main goal is to create a device (a fuel processor), which would convert diesel fuel into a hydrogen-containing gas. The device consists of several components: a nozzle for injecting liquid fuel having the form of drops into superheated steam, a mixing and vaporization zone for diesel fuel, an air supply area, and a reaction zone including a catalyst. The selection of temperature for the vaporization process should be made in such a way that, on the one hand, liquid droplets do not come into contact with the catalyst surface, and, on the other hand, gas-phase reactions are not initiated in the mixing zone. Developing such a device requires not only conducting laboratory experiments and studying the process catalyst, but also optimizing the basic physical parameters of the device. These parameters are its linear dimensions, operational temperature, reactant flow rates, and many others. Carrying out such a study is impossible without using methods of mathematical modeling. This significantly reduces the time and cost of work. This paper presents a digital model of an air-hydrocarbon mixture generator in an axisymmetric formulation. The dynamics of subsonic multiphase flow of water vapor carrying drops of liquid diesel fuel, the process of diesel fuel evaporation and mixing with water vapor and air are studied. The mathematical model is implemented in the ANSYS Fluent package (academic license of SSCC SBRAS). A series of calculations for various mixture feed temperatures are performed to optimize the main parameters. For the established optimal temperature, modeling of the mixture mixing process with air is carried out.

Keywords: diesel fuel, multiphase flow, fuel vaporization, formation of air-hydrocarbon mixtures, ANSYS Fluent

For citation: A. R. Yapparova, T. V. Markelova, P. V. Snytnikov. Numerical model of vapor-air-diesel autothermal reformer. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:4(2023), 361–374. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.361-374>

About the authors:

Aigul R. Yapparova, Engineer, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Av., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8424-8104>, a.yapparova@g.nsu.ru

Tamara V. Markelova, Leading Engineer, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Av., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9920-0923>, matamara@gmail.com

Pavel V. Snytnikov, Head of Department Heterogeneous catalysis, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Av., Novosibirsk 630090, Russia), Dr.Sci. (Chemical), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5057-3187>, pvsnyt@catalysis.ru

1. Введение

Повышение сырьевой и экологической эффективности переработки ископаемых ресурсов связано с применением топливных элементов, а также технологий для производства и хранения водорода, и признано текущей основой мирового производства энергии.

Внедрение новых технологий всегда требует параллельного развития соответствующей инфраструктуры, что обычно является сдерживающим фактором, поэтому одним из решений является применение гибридных систем, которые сочетают в себе устоявшиеся технологии и устройства с дополнительными системами на основе топливных элементов [1].

В последнее время в мире создается много разработок концепций реакторов и катализаторов автотермического риформинга. Автотермический риформинг дизельного топлива - это каталитический процесс, протекающий при температуре 970–1170 К, в котором молекулы углеводородов смешиваются с водяным паром и воздухом, образуя газообразную реакционную смесь, которая попадает на катализатор для дальнейших преобразований.

Для разработки реактора переработки дизельного топлива в синтез газ с каталитическим модулем, описание которого можно найти в работах [1; 2; 3], требуется смоделировать часть реактора, где происходит испарение топлива и смешение пародизельной смеси с воздухом. Также необходимо изучить влияние температуры стенок и начальной температуры подаваемого водяного пара на эффективность протекания упомянутых процессов, чтобы найти оптимальный диапазон.

В литературе встречаются описания аналогичных устройств. Например в работах [4, 5] описывается разработка концепции реактора и катализатора для автотермического риформинга жидких углеводородных топлив. В [6] представлены результаты работы по оптимизации смесеобразования дизельного топлива, описываются эксперименты по визуализации потока. Это говорит об актуальности создания доступной цифровой модели для такого типа процессов и проведения численных экспериментов. Для реализации математической модели процессов был выбран пакет ANSYS Fluent, так как в нём уже реализованы подходящие модели для данной задачи. Кроме того, применяемый в ANSYS Fluent метод конечных объёмов позволяет находить не только оптимальные физические параметры, но и изучать влияние формы и размеров устройства на его эффективность, что необходимо при проектировании.

Целью работы является разработка методики математического моделирования двухфазного течения (газ-капли жидкости) с учетом процессов смешения, испарения, массо- и тепло-переноса. В результате проведенных расчетов для упрощенной постановки задачи была найдена оптимальная начальная температура пара, изучен процесс теплопереноса при испарении. Полученные данные были использованы в модели для более сложной геометрии и с учетом подачи воздуха в устройство, изучен процесс смешения.

2. Математическая модель

Расчетная область симметрична относительно одной центральной оси, поэтому моделирование проводилось в двумерной постановке. Общий вид в поперечном сечении изображён на Рис. 2.1.

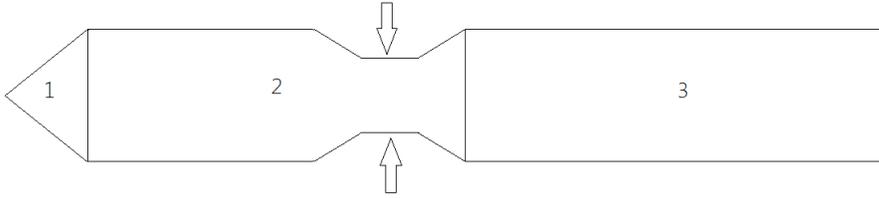


Рис. 2.1. Общий вид реактора

Fig. 2.1. General view of the reactor

Весь реактор можно условно разделить на три части. В области "1" происходит распыление водяного пара и жидкого топлива форсункой. Затем эта смесь, уже равномерно смешанная, входит в область "2", где жидкое топливо испаряется в газообразное, а также смешивается с водяным паром и воздухом, который входит по периметру, куда показывают стрелки. Далее эта смесь попадает в реакционную зону, обозначенную на рисунке цифрой "3". Далее в работе мы представляем математическую модель и результаты численного моделирования для области "2".

Различают два подхода к математическому моделированию многофазных потоков: подход Эйлера-Лагранжа и подход Эйлера-Эйлера [7]. В первом несущая фаза рассматривается как непрерывная, для нее записывают уравнения Навье-Стокса, а дисперсная фаза моделируется путем отслеживания траекторий частиц, пузырьков или капель через поле потока. Дисперсная фаза может обмениваться импульсом, массой и энергией с непрерывной фазой. Для каждого отдельного объекта записываются уравнения переноса. Во втором подходе каждая фаза моделируется как сплошная среда. Мы используем первый подход, так как доля капель мала по сравнению с объемом несущего газа, а также для более корректного моделирования процесса испарения капель жидкости.

2.1. Модель сплошной среды

Уравнения Навье-Стокса и уравнение энергии для идеального сжимаемого газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = S_m,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla \cdot p + \nabla \cdot \tau,$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho E + p)) = \nabla \cdot \left(\sum_j h_j \vec{J}_j + \tau \cdot \vec{v} \right),$$

где ρ – плотность газа, \vec{v} – скорость газа, S_m – источник массы, добавляемой в непрерывную фазу из дисперсной второй фазы за счет испарения капель жидкости, p – давление,

ρE – полная энергия, τ – тензор вязкой диссипации, $\tau = \mu((\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T) - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}I)$, μ – динамическая вязкость, I – единичная матрица, $h_j = \int_{T_{ref}}^T c_{p,j}dT$, $T_{ref} = 298.15K$, $c_{p,j}$ – удельная теплоёмкость j -го вещества, \vec{J}_j – диффузный поток j -го вещества.

Диффузный поток j -го вещества \vec{J}_j вычисляется как

$$\vec{J}_j = -\rho D_{j,m}\nabla Y_j - D_{T,j}\frac{\nabla T}{T},$$

где Y_j – массовая доля j -го вещества, $D_{j,m}$ – коэффициент массовой диффузии j -го вещества в смеси, $D_{T,j}$ – коэффициент термической диффузии.

$$D_{j,m} = \frac{1 - X_j}{\sum_{i,i\neq j}(X_i/D_{ji})}$$

$$D_{T,j} = -2.59 \cdot 10^{-7} T^{0.659} \left[\frac{M_{w,j}^{0.511} X_j}{\sum_{i=1}^N M_{w,i}^{0.511} X_i} - Y_j \right] \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^N M_{w,i}^{0.511} X_i}{\sum_{i=1}^N M_{w,i}^{0.489} X_i} \right],$$

$$D_{ij} = 0.00188 \frac{\left[T^3 \left(\frac{1}{M_{w,i}} + \frac{1}{M_{w,j}} \right) \right]^{1/2}}{p_{abs} \sigma_{ij}^2 \Omega_D},$$

где $\Omega_D = \Omega_D(T_D^*)$ – интеграл диффузионных столкновений, являющийся мерой взаимодействия молекул в системе,

$$T_D^* = \frac{T}{(\epsilon/k_B)_{ij}}, \quad (\epsilon/k_B)_{ij} = \sqrt{(\epsilon/k_B)_i(\epsilon/k_B)_j}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j)$$

k_B – постоянная Больцмана, p_{abs} – абсолютное давление, коэффициенты потенциала Леннарда-Джонса i -го вещества σ_i – минимум потенциальной кривой и $(\epsilon/k_B)_i$ – глубина потенциальной ямы.

2.2. Модель дискретной фазы

Вычисляем траектории частицы дискретной фазы путем интегрирования баланса сил на частице, который записан в лагранжевой системе отсчета. Приравниваем инерцию частицы к силам, действующим на частицу, запишем это следующим образом:

$$\frac{du_p}{dt} = F_D(\vec{v} - \vec{u}_p) \tag{2.1}$$

где $F_D(\vec{v} - \vec{u}_p)$ – сила сопротивления на единицу массы частицы, $F_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{C_D Re}{24}$, \vec{v} – скорость непрерывной фазы, \vec{u}_p – скорость частицы, μ – вязкость непрерывной фазы, ρ – плотность непрерывной фазы, ρ_p – плотность частиц, d_p – диаметр частиц, $Re = \frac{\rho d_p |\vec{u}_p - \vec{v}|}{\mu}$ – число Рейнольдса для частиц.

Интегрирование по времени уравнения (2.1) дает скорость частицы в каждой точке траектории, а сама траектория прогнозируется следующим выражением:

$$\frac{dx}{dt} = u_p. \tag{2.2}$$

Заметим, что уравнения (2.1) и (2.2) - обыкновенные дифференциальные уравнения, и их можно объединить и переписать как

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{1}{\tau_p}(u - u_p).$$

В нашей модели частицы это капли жидкого топлива, состоящие из нескольких веществ. Масса частицы m_p представляет собой сумму масс компонентов:

$$m_p = \sum_i m_i$$

Плотность частицы ρ_p усреднена по объёму:

$$\rho_p = \left(\sum_i \frac{m_i}{m \rho_i} \right)^{-1}$$

Скорость испарения многокомпонентных капель рассчитывается как сумма скоростей испарения отдельных компонентов. Для модели испарения, контролируемой диффузией, скорость испарения компонента определяется следующим выражением:

$$\frac{dm_i}{dt} = A_p M_{w,i} k_{c,i} (C_{i,c} - C_{i,\infty})$$

где m_i - масса i -го компонента капли, $k_{c,i}$ - коэффициент массопередачи компонента, A_p - площадь поверхности частицы, $M_{w,i}$ - молярная масса i -го компонента, $C_{i,c}$ и $C_{i,\infty}$ - концентрация i -го вещества на поверхности и в объеме капли соответственно.

Когда общее давление пара на поверхности капли превышает давление в ячейке, многокомпонентная капля находится в режиме кипения, и применяется уравнение для скорости кипения:

$$\frac{dm_i}{dt} = x_i \frac{\pi d_p k_\infty}{c_{p\infty}} (2 + 0.6 Re_d^{1/2} Pr^{1/3}) \ln(1 + B_{T,i})$$

где x_i - объёмная доля i -го компонента, d_p - диаметр капли, k_∞ - теплопроводность непрерывной фазы, $c_{p\infty}$ - удельная теплоемкость непрерывной фазы, $B_{T,i} = \frac{c_{p\infty}(T_\infty - T_p)}{h_{vap,i}}$ - коэффициент теплопередачи Сполдинга для i -го компонента, $h_{vap,i}$ - тепло испарения i -го компонента, задаётся константой.

Уравнение энергии для многокомпонентной частицы записывается следующим образом:

$$m_p c_p \frac{dT}{dt} = h A_p (T_\infty - T_p) + \sum_i \frac{dm_i}{dt} h_{vap,i}$$

где h - коэффициент теплопередачи, c_p - теплоемкость капли, $\sigma = 5,67 * 10^{-8}$ Вт/м² К⁴ - постоянная Стефана-Больцмана.

3. Результаты численного моделирования

Математическая модель реализована с помощью пакета для компьютерного моделирования гидродинамики ANSYS Fluent, для решения системы уравнений в частных производных использовалась неявная схема расщепления.

3.1. Тестовые расчеты для течения в круглой трубе

Для тестирования реализации модели были проведены расчеты в осесимметричной постановке для круглой трубы с радиусом 21 мм и длиной 100 мм. Вид расчётной области представлена на рисунке 3.1. В ANSYS Meshing была построена прямоугольная



Рис. 3.1. Расчетная область

Fig. 3.1. Computational domain

сетка, с размером ячейки 1 мм.

В расчётную область входит смесь топлива в виде капель и водяного перегретого пара. Топливо состоит из трёх веществ: гексадекана ($C_{16}H_{34}$), ортоксилола (C_8H_{10}), 1-метилнафталина ($C_{11}H_{10}$). Температура входящих капель составляет 350 К. Используемые в модели физические величины для веществ, представленные в таблицах 3.1 и 3.3, были взяты из баз данных ANSYS Fluent и NIST, в таблице 3.2 из [8, 9]. В расчётной области не происходят химические реакции. Течение ламинарное.

Таблица 3.1. Данные веществ в жидком агрегатном состоянии

Table 3.1. Data of substances in liquid aggregate state

Вещество Species	Температура испарения, К Evaporation temperature, K	Молярная масса, кг/моль Molar mass, kg/mol	Теплоемкость, кДж/кг·К Heat capacity, kJ/kg·K	Тепло испарения, кДж/кг Latent heat of vaporization, kJ/kg
$C_{16}H_{34}$	554	226.448	2215	232.307
C_8H_{10}	409.3	106.165	1710.55	277.000
$C_{11}H_{10}$	515	142.1971	1578.02	326.529

Граничные условия:

- на входе заданы массовые расходы веществ. Расход гексадекана составляет 105 г/ч, ортоксилола – 28 г/ч, 1-метилнафталина – 7 г/ч, водяного пара – 350 г/ч;
- температура смеси варьировалась в диапазоне 660 – 770 К;

Таблица 3.2. Коэффициенты потенциала Леннарда-Джонса
Table 3.2. Lennard-Jones parametrs

Вещество Species	Минимум потенциальной кривой, А L-J Characteristic length, A	Глубина потенциальной ямы, К L-J Energy parametr, K
$C_{16}H_{34}$	7.77	810.8
C_8H_{10}	5.97	556.18
$C_{11}H_{10}$	6.20	612.0
H_2O	2.605	572.4
<i>air</i>	3.711	78.6

Таблица 3.3. Данные веществ в газообразном агрегатном состоянии
Table 3.3. Data of substances in a gaseous state of aggregation

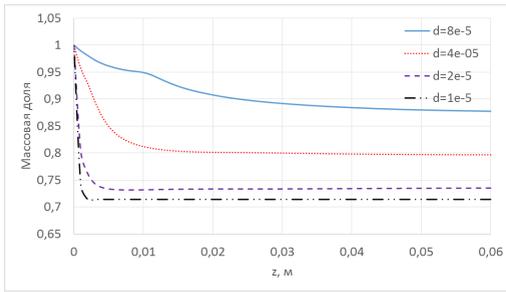
Вещество Species	Теплоемкость, кДж/кг·К Heat capacity, kJ/kg·K	Энтальпия, кДж/моль Enthalpy, kJ/mol
$C_{16}H_{34}$	2263	-374.9
C_8H_{10}	214.02	-49.66
$C_{11}H_{10}$	2206.29	108

- на стенке задано условие непротекания и нулевой тепловой поток;
- для дисперсной фазы диаметр капель варьировался от 10^{-5} м до $8 \cdot 10^{-5}$ м;
- на выходе задано условие свободного вытекания при давлении 1 атм.

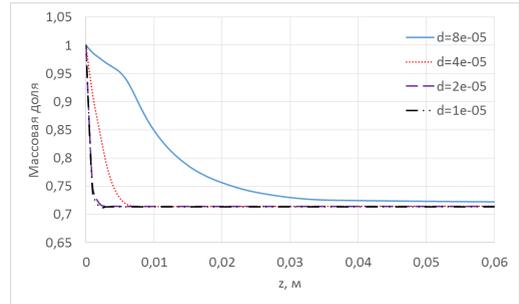
Начальные условия:

- постоянное распределение плотности водяного пара во всей расчетной области;
- постоянная температура 350 К во всей расчетной области;
- давление восстанавливается из давления, заданного на выходе.

На Рис. 3.2 представлены результаты численных экспериментов с варьированием диаметра капли от 10^{-5} до $8 \cdot 10^{-5}$ мм для двух температур водяного пара 660 К и 723 К на входе. Из графиков распределения массовой доли водяного пара видно, что при температуре 660 К входящего пара, диаметр капель оказывает существенное влияние, крупные капели не испаряются полностью, что крайне нежелательно. Из Рис. 3.3 видно, что для крупных капель температура на оси трубы падает сильнее, что приводит к прекращению испарительного процесса. Для случая с начальной температурой пара 723 К, для большинства рассчитанных диаметров капель жидкость испаряется полностью на расстоянии менее 0.01 м от входа.



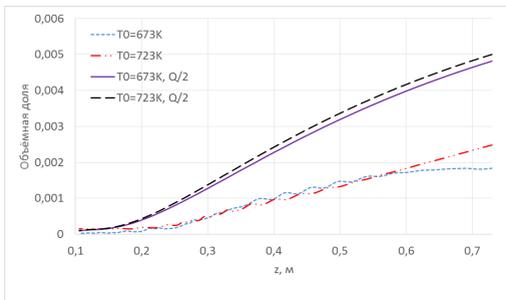
Температура на входе 660 К
Inlet temperature 660 K



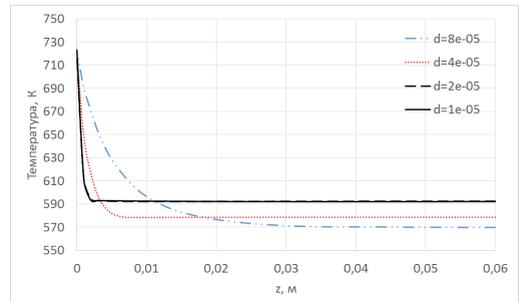
Температура на входе 723 К
Inlet temperature 723 K

Рис. 3.2. Зависимость массовой доли водяного пара в смеси вдоль оси для различных диаметров капель

Fig. 3.2. Dependence of the mass fraction of water vapor in the mixture along the axis for different droplet diameters



Температура на входе 660 К
Inlet temperature 660 K



Температура на входе 723 К
Inlet temperature 723 K

Рис. 3.3. Температура смеси вдоль оси для различных диаметров капель

Fig. 3.3. Temperature of the mixture along the axis for different droplet diameters

3.2. Математическое моделирование формирователя паро-воздушно-углеводородных смесей

Для моделирования процесса смешения пара и углеводородов с воздухом был выбран вид конструкции, описанный в литературе [4]. На Рис. 3.4 схематично изображено устройство для испарения топлива и смешения его с воздухом, которое также имеет осевую симметрию. Общая его длина составляет 730 мм.

Сетка была построена в ANSYS Meshing, характерный размер ячеек — 1 мм.

Начальные и граничные условия аналогичны указанным в предыдущем разделе. Расход воздуха составляет 1008 г/ч, температура воздуха 350 К.

Была проведена серия расчётов для температур входящего водяного пара $T_0 = 673\text{K}$ и $T_0 = 723\text{K}$ с разными расходами подаваемых газов, представлены сравнительные расчеты для расходов, уменьшенных в два раза для каждого из веществ. На Рис. 3.5 слева приведены линии тока скорости для указанных расходов, $T_0 = 673\text{K}$. Скорости и температура двух сталкивающихся потоков отличаются почти в два раза, что затрудняет их проникновение друг в друга.

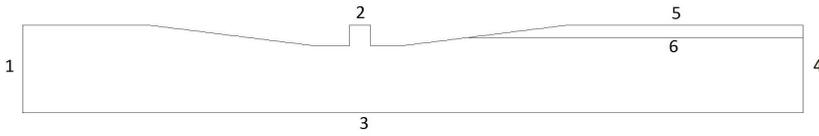
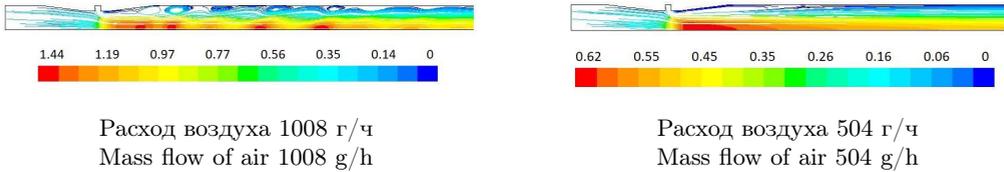


Рис. 3.4. Расчётная область: 1 - вход водяного пара и топлива, 2 - вход воздуха, 3 - ось симметрии, 4 - выход, 5 - стенка

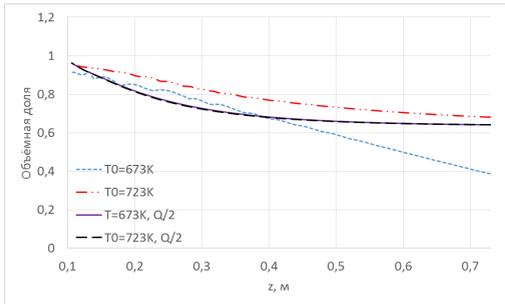
Fig. 3.4. Computational domain: 1 - inlet for water vapor and fuel, 2 - inlet for air, 3 - axis, 4 - outlet, 5 - wall



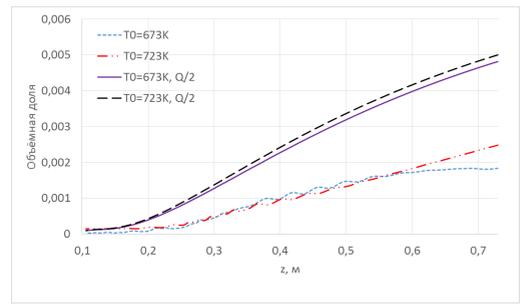
Расход воздуха 1008 г/ч
Mass flow of air 1008 g/h

Расход воздуха 504 г/ч
Mass flow of air 504 g/h

Рис. 3.5. Линии тока скорости м/с
Fig. 3.5. Pathlines of velocity m/s



Объемная доля воздуха
Volume fraction of air



Объемная доля $C_{16}H_{34}$
Volume fraction of $C_{16}H_{34}$

Рис. 3.6. Объемная доля вещества вдоль линии "6" Рис. 3.4
Fig. 3.6. Volume fraction of a substance along the line "6" Fig. 3.4

Из Рис. 3.6 видно, что при высоких скоростях потоков температура влияет на процесс смешения, причем уменьшение разницы температур позволяет получить на выходе более однородную смесь. Уменьшение расходов в два раза позволит сократить в устройстве зону смешения в два раза. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего проектирования устройства.

3.3. Оптимизация математической модели формирователя паро-воздушно-углеводородных смесей

Для оптимизации процесса смешения воздуха с паро-углеводородной смесью варьировалась ширина входного отверстия, отмеченного на Рис. 3.4 цифрой "2", а также

угол наклона относительно оси симметрии. В предыдущих случаях ширина входа "2" воздуха составлял 5 мм, в данном разделе приведены расчёты для случаев, когда ширина равняется 2 мм и 1 мм, а угол наклона 60° . Расход воздуха составляет 1008 г/ч, температура входящего водяного пара $T_0 = 673\text{K}$.

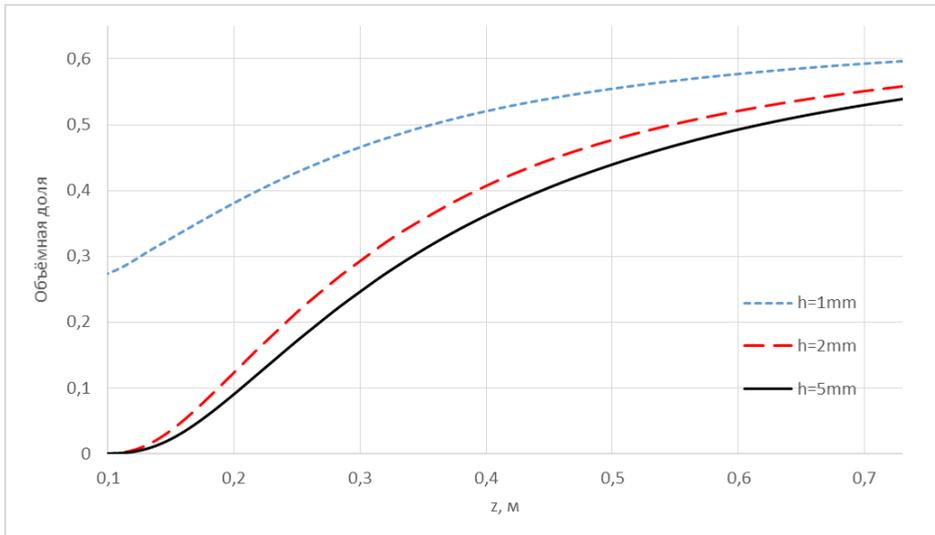


Рис. 3.7. Объёмная доля воздуха вдоль оси симметрии

Fig. 3.7. Volume fraction of air along the axis of symmetry

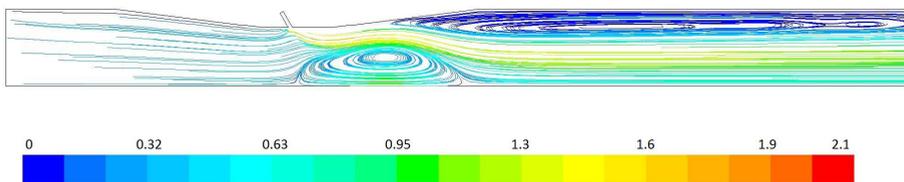


Рис. 3.8. Линии тока скорости м/с

Fig. 3.8. Pathlines of velocity m/s

Из Рис. 3.7 и 3.8 видно, что сужением входа "2" до 1 мм можно добиться такого распределения поля скорости, что смешивание будет проходить гораздо ближе к месту ввода воздуха.

4. Выводы

Создана математическая модель двухфазного течения газа и капель дизельного топлива с учетом их испарения. Траектории движения капель и их испарение в потоке водяного пара моделируются в рамках лагранжева подхода. Численная модель реализована в пакете Ansys Fluent (лицензия ССКЦ СОРАН).

В результате численных экспериментов были определены оптимальные расходы для реагентов. Также было изучено влияние диаметра капель и температуры подаваемого пара на эффективность процесса испарения и дальнейшего смешения с воздухом. Показано что уменьшение диаметра капель позволяет существенно снизить температуру пара, что важно для предотвращения химических реакций в зоне смешения. Также установлены расстояние от входа, на котором процесс испарения гарантированно завершен, и длина зоны смешения, которые можно использовать для дальнейшего проектирования устройства.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант № 19-19-00257-П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zazhigalov S.V., Rogozhnikov V.N., Snytnikov P.V., Potemkin D.I., Simonov P.A., Shilov V.A., Ruban N.V., Kulikov A.V., Zagoruiko A.N., Sobyenin V.A. Simulation of diesel autothermal reforming over $Rh/Ce_{0.75}Zr_{0.25}O_{2-\delta} - \eta - Al_2O_3/FeCrAl$ wire mesh honeycomb catalytic module // Chem. Eng. Process. Process Intensif. 2020. Vol. 150. 107876. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cep.2020.107876>
2. Zazhigalov S.V., Shilov V.A., Rogozhnikov V.N., Potemkin D.I., Sobyenin V.A., Zagoruiko A.N., Snytnikov P.V. Modeling of hydrogen production by diesel reforming over $Rh/Ce_{0.75}Zr_{0.25}O_{2-\delta} - \eta - Al_2O_3/FeCrAl$ wire mesh honeycomb catalytic module // Catalysis Today. 2021. Vol. 378. pp. 240–248. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cep.2020.107876>
3. Ruban N.V., Rogozhnikov V.N., Stonkus O.A., Emelyanov V.A., Pakharukova V.P., Svintitskiy D.A., Zazhigalov S.V., Zagoruiko A.N., Snytnikov P.V., Sobyenin V.A., Potemkin D.I. A comparative investigation of equimolar $Ni-$, $Ru-$, $Rh-$ and $Pt-$ based composite structured catalysts for energy-efficient methane reforming // Fuel. 2023. Vol. 352. 128973. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.128973>
4. Pasel J., Samsun R.C., Tschauder A., Peters R., Stolten D. Advances in autothermal reformer design // International Journal of Hydrogen Energy. 2017. Vol. 198. pp. 88–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.04.055>
5. Pasel J., Remzi C.S., Meissner J., Tschauder A., Peters R. Recent advances in diesel autothermal reformer design // International Journal of Hydrogen Energy. 2020. Vol. 45, No. 3. pp. 2279–2288. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2019.11.137>
6. Por Z., Pasel J., Tschauder A., Dahl R., Peters R., Stolten D. Optimised mixture formation for diesel fuel processing // Fuel Cells. 2008. Vol. 8. Pp. 129–137 DOI: <https://doi.org/10.1002/face.200700062>
7. Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (Обзор) // ТВТ. 2013. Т. 51, вып. 3. С. 421–455
8. Tahery R., Modarress H. Lennard-Jones energy parameter for pure fluids from scaled particle theory // Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering. 2007. Vol. 26, No. 2. Pp. 1–8 DOI: <https://doi.org/10.30492/ijcce.2007.7647>

9. Huber M. Preliminary Models for Viscosity, Thermal Conductivity, and Surface Tension of Pure Fluid Constituents of Selected Diesel Surrogate Fuels. Gaithersburg, MD: Technical Note National Institute of Standards and Technology, 2017. 62 p. DOI: <https://doi.org/10.6028/NIST.TN.1949>

Поступила 22.08.2023; доработана после рецензирования 04.10.2023;
принята к публикации 24.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S.V. Zazhigalov, V.N. Rogozhnikov, P.V. Snytnikov, D.I. Potemkin, P.A. Simonov, V.A. Shilov, N.V. Ruban, A.V. Kulikov, A.N. Zagoruiko, V.A. Sobyenin, "Simulation of diesel autothermal reforming over $Rh/Ce_{0.75}Zr_{0.25}O_{2-\delta} - \eta - Al_2O_3/FeCrAl$ wire mesh honeycomb catalytic module", *Chem. Eng. Process. Process Intensif.*, **150** (2020), 107876. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cep.2020.107876>
2. S.V. Zazhigalov, V.A. Shilov, V.N. Rogozhnikov, D.I. Potemkin, V.A. Sobyenin, A.N. Zagoruiko, P.V. Snytnikov, "Modeling of hydrogen production by diesel reforming over $Rh/Ce_{0.75}Zr_{0.25}O_{2-\delta} - \eta - Al_2O_3/FeCrAl$ wire mesh honeycomb catalytic module", *Catalysis Today*, **378** (2021), 240–248. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cattod.2020.11.015>
3. N.V. Ruban, V.N. Rogozhnikov, O.A. Stonkus, V.A. Emelyanov, V.P. Pakharukova, D.A. Svintsitskiy, S.V. Zazhigalov, A.N. Zagoruiko, P.V. Snytnikov, V.A. Sobyenin, D.I. Potemkin, "A comparative investigation of equimolar $Ni-$, $Ru-$, $Rh-$ and $Pt-$ based composite structured catalysts for energy-efficient methane reforming", *Fuel*, **352** (2023). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.128973>
4. J. Pasel, R.C. Samsun, A. Tschauder, R. Peters, D. Stolten, "Advances in autothermal reformer design", *Applied Energy*, **198** (2017), 88–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.04.055>
5. J. Pasel, C.S. Remzi, J. Meissner, A. Tschauder, R. Peters, "Recent advances in diesel autothermal reformer design", *International Journal of Hydrogen Energy*, **45:3** (2020), 2279–2288. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2019.11.137>
6. Z. Por?, J. Pasel, A. Tschauder, R. Dahl, R. Peters, D. Stolten, "Optimised mixture formation for diesel fuel processing", *Fuel Cells*, **8** (2008), 129–137. DOI: <https://doi.org/10.1002/face.200700062>
7. A.Y. Varaksin, "Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: Problems and achievements", *High Temp.*, **51** (2013), 377–407. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X13030073>
8. R. Tahery, H. Modarress, "Lennard-Jones Energy Parameter for Pure Fluids from Scaled Particle Theory", *Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering*, **26:2** (2007), 1–8. DOI: <https://doi.org/10.30492/ijcce.2007.7647>

9. M. Huber, *Preliminary Models for Viscosity, Thermal Conductivity, and Surface Tension of Pure Fluid Constituents of Selected Diesel Surrogate Fuels*, Technical Note National Institute of Standards and Technology Publ., Gaithersburg, MD, 2017 DOI: <https://doi.org/10.6028/NIST.TN.1949>, 62 p.

Submitted 22.08.2023; Revised 04.10.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\page О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}

```

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oligier
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`
`\jour Ogarev-online`
`\vol 20`
`\yr 2016`
`\lang In Russ.`
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

Articles in collections in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`
`\publaddr Ulyanovsk`
`\publ UIGTU Publ.`
`\yr 2014`
`\issue 10`
`\pages 4–13`
`\lang In Russ.`

Books (monographs and collections) in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`
`\by Yu. N. Bibikov`
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`
`\publaddr Moscow`
`\publ Visshay shkola Publ.`
`\yr 1991`
`\totalpages 303`
`\lang In Russ.`

Conference proceedings in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`
`\by V. G. Malinov`
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`
`\bookvol II`
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`
`\yr 2016`
`\pages 48–50`
`\publ FRC CSC RAS Publ.`
`\publaddr Moscow`

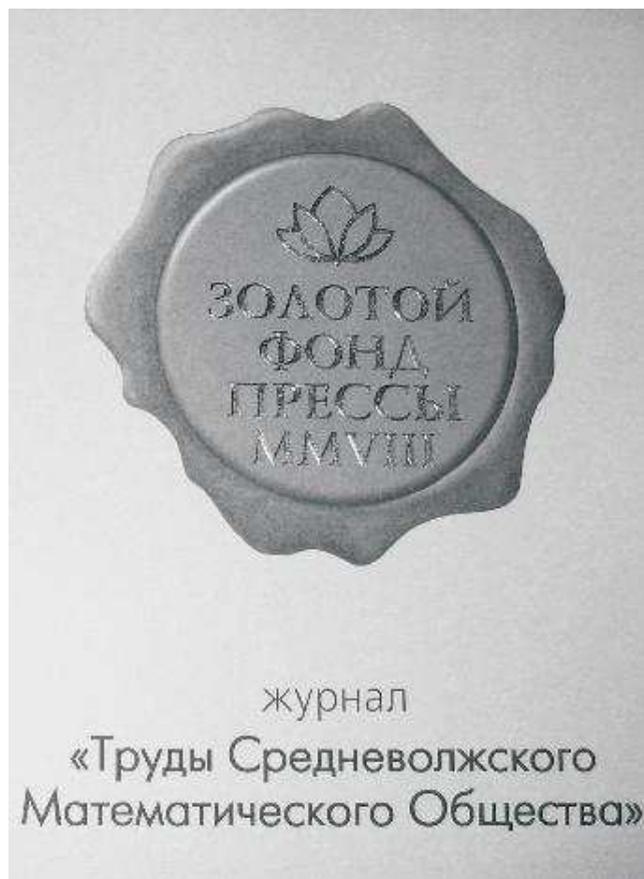
Алфавитный указатель авторов

Вельмисов П. А.	313	Никбахт Н.	255
Ветчинников М. В.	342	Ноздринов А. А.	273
Галкин О. Е.	223	Попов В. Н.	242
Галкина С. Ю.	223	Ремизов И. Д.	255
Гермидер О. В.	242	Сидоров С. В.	284
Дерюгин Ю. Н.	342	Снытников П. В.	361
Драгунова К. А.	255	Тамарова Ю. А.	313
Зинина С. Х.	273	Уткин Г. В.	284
Каххаров А. А.	299	Хусанов Д. Х.	299
Маркелова Т. В.	361	Шишканов Д. А.	342
Микишанина Е. А.	326	Шмуклер В. И.	273
Муляр О. А.	223	Яппарова А. Р.	361

Author Index

P. A. Velmisov	313	O. A. Mulyar	223
M. V. Vetchinnikov	342	N. Nikbakht	255
Yu. N. Deryugin	342	A. A. Nozdrinov	273
K. A. Dragunova	255	V. N. Popov	242
O. E. Galkin	223	I. D. Remizov	255
S. Yu. Galkina	223	S. V. Sidorov	284
O. V. Germider	242	P. V. Snytnikov	361
S. Kh. Zinina	273	D. A. Shishkanov	342
A. E. Kakhxorov	299	V. I. Shmukler	273
J. Kh. Khusanov	299	Yu. A. Tamarova	313
T. V. Markelova	361	G. V. Utkin	284
E. A. Mikishanina	326	A. R. Yapparova	361

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 18.12.2023. Дата выхода в свет 30.12.2023. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 16,45 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 832.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 18.09.2023. Date of publishing 30.12.2023. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 16,45.

Number of copies 100. Order no. 832.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

