

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  25  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  1

2023



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 25, № 1. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 25, NO. 1. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют группе специальностей научных работников: 1.1. Математика и механика и специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal through the online store of periodicals «Press by subscription». Subscription index of the journal is E94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** – профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** – профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** – профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** – профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**А. В. Багаев**

Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями . . . . . 519

**А. А. Ноздринов, А. И. Починка**

Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла . 531

**А. Э. Рассадин**

Точные решения одной нелинейной счётномерной системы интегродифференциальных уравнений . . . . . 542

**Д. В. Тарасов**

Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов . . . . . 554

**А. Н. Тында**

Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами . . . . . 565

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

ВЛАДИСЛАВА СЕРГЕЕВИЧА МЕДВЕДЕВА . . . . . 578

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 583

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 587

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 591

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 597

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 601

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 602

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

|   |     |
|---|-----|
| <b>A. V. Bagaev</b>   |     |
| On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties . . . . .                                | 519 |
| <b>A. A. Nozdrinov, A. I. Pochinka</b>  |     |
| Link as a complete invariant of Morse-Smale 3-diffeomorphisms . . . . .                                       | 531 |
| <b>A. E. Rassadin</b>   |     |
| Exact Solutions of One Nonlinear Countable-Dimensional System of Integro-<br>Differential Equations . . . . . | 542 |
| <b>D. V. Tarasov</b>  |     |
| Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method                              | 554 |
| <b>A. N. Tynda</b>  |     |
| Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay<br>arguments . . . . .           | 565 |

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

|  |     |
|--|-----|
| ON THE 80TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH<br>OF VLADISLAV SERGEEVICH MEDVEDEV . . . . . | 578 |
| The rules of article design (in Russian) . . . . .                                 | 583 |
| The rules of article design (in English) . . . . .                                 | 587 |
| The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . .            | 591 |
| The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . .            | 597 |
| Author Index (In Russian) . . . . .  | 601 |
| Author Index (in English) . . . . .  | 602 |

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

**Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями****А. В. Багаев***ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена классу самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями, центры которых находятся в вершинах правильного шестиугольника  $P$ , а коэффициенты гомотетий принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Отметим, что равенство коэффициентов гомотетий не предполагается. Самоаффинное множество на плоскости представляет собой непустое компактное подмножество, инвариантное относительно рассматриваемого семейства гомотетий. Существование и единственность самоаффинного множества обеспечивает теорема Хатчинсона. Целью данной работы является исследование влияния коэффициентов гомотетий на свойства самоаффинного множества. Для описания самоаффинного множества введены барицентрические координаты на плоскости. Найден условия, при которых самоаффинное множество является: а) шестиугольником  $P$ ; б) канторовым множеством в шестиугольнике  $P$ . Вычислены размерности Минковского и Хаусдорфа указанных самоаффинных множеств. Получены условия, при выполнении которых мера Лебега самоаффинного множества равна нулю. Приведены примеры самоаффинных множеств из рассматриваемого класса.

**Ключевые слова:** самоаффинное множество, гомотетия, канторово множество, система итерированных функций, аттрактор, мера Лебега

**Для цитирования:** Багаев А. В. Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 519–530. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.519-530>

*Об авторах:*

**Багаев Андрей Владимирович**, доцент кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, [a.v.bagaev@gmail.com](mailto:a.v.bagaev@gmail.com)



MSC2020 28A80

# On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties

A. V. Bagaev

*Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper is devoted to a class of self-affine sets on the plane determined by six homotheties. Centers of these homotheties are located at the vertices of a regular hexagon  $P$ , and the homothetic coefficients belong to the interval  $(0, 1)$ . One must note that equality of homothetic coefficients is not assumed. A self-affine set on the plane is a non-empty compact subset that is invariant with respect to the considered family of homotheties. The existence and uniqueness of such a set is provided by Hutchinson's theorem. The goal of present work is to investigate the influence of homothetic coefficients on the properties of a self-affine set. To describe the set, barycentric coordinates on the plane are introduced. The conditions are found under which the self-affine set is: a) the hexagon  $P$ ; b) a Cantor set in the hexagon  $P$ . The Minkowski and the Hausdorff dimensions of the indicated sets are calculated. The conditions providing vanishing Lebesgue measure of self-affine set are obtained. Examples of self-affine sets from the considered class are presented.

**Keywords:** self-affine set, homothety, Cantor set, iterated function system, attractor, Lebesgue measure

**For citation:** A. V. Bagaev. On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 519–530. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.519-530>

*About the authors:*

**Andrey V. Bagaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys. and Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, [a.v.bagaev@gmail.com](mailto:a.v.bagaev@gmail.com)

## 1. Введение

Рассмотрим множество  $\{f_1, \dots, f_k\}$ , состоящее из  $k$  сжимающих отображений полного метрического пространства  $X$ . Если непустое компактное множество  $\mathcal{A} \subset X$  удовлетворяет равенству

$$f_1(\mathcal{A}) \cup f_2(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \quad (1.1)$$

то оно называется самоподобным. В случае, когда  $X = \mathbb{E}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство, а отображения  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , являются аффинными, самоподобное множество  $\mathcal{A}$  называется самоаффинным.

Пусть  $\mathcal{K}(X)$  — множество всех компактных подмножеств полного метрического пространства  $X$ . Согласно теореме Хатчинсона [1] (см. также [2–3]) множество  $\mathcal{K}(X)$ , наделенное метрикой Хаусдорфа, является полным метрическим пространством, а отображение  $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ , определенное формулой

$$F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \dots \cup f_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}(X),$$

является сжимающим. Согласно теореме Банаха сжимающее отображение  $F$  имеет единственную неподвижную точку  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X)$ , т. е. для любой конечной системы сжимающих отображений  $\{f_1, \dots, f_k\}$  существует самоподобное множество  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющее равенству (1.1). При этом самоподобное множество  $\mathcal{A}$  может быть получено как предел

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K_0) \quad \forall K_0 \in \mathcal{K}(X),$$

где  $F^n = F \circ \dots \circ F$  ( $n$  раз).

Система сжимающих отображений также называется системой итерированных функций (СИФ), множество  $\mathcal{A}$  — аттрактором СИФ, а отображение  $F$  — отображением Хатчинсона.

Системы итерированных функций представляют собой важный частный случай многозначных динамических систем со сжимающими трансформациями. СИФ стали активно изучаться сравнительно недавно, начиная с 1981 г., после работ Дж. Э. Хатчинсона [1] и М. Хаты [4], монографии М. Ф. Барнсли [5], ставших классическими в области фрактальной геометрии, и запатентованных М. Ф. Барнсли и А. Слоуном алгоритмов фрактального сжатия изображений.

Аттракторы СИФ могут быть как фракталами, так и «регулярными» множествами, например, отрезком, треугольником, квадратом.

Самоаффинные множества на плоскости, заданные тремя гомотетиями  $f_1, f_2, f_3$  с аффинно независимыми центрами, исследовались в работах [6–8]. Если все три гомотетии имеют один коэффициент подобия  $\lambda = 1/2$ , то самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  является треугольником (салфеткой) Серпинского. Из работы [6] известно, что если коэффициент гомотетий  $\lambda \geq 2/3$ , то самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  представляет собой треугольник  $\Delta$  с вершинами в центрах гомотетий. Если  $\lambda < 1/2$ , то  $\mathcal{A}$  — канторово множество в треугольнике  $\Delta$ .

В работе [8] исследовалось самоаффинное множество  $\mathcal{A}$ , заданное тремя гомотетиями плоскости  $f_1, f_2, f_3$  с аффинно независимыми центрами и произвольными коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (0, 1)$ . В [9–10] изучалось влияние на самоаффинное множество коэффициентов  $(n + 1)$ -й гомотетии с аффинно независимыми центрами в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$ .

В работе [6] подчеркивается, что особый интерес представляют самоаффинные множества на плоскости, заданные гомотетиями, центры которых образуют правильный  $n$ -угольник.

Цель данной работы — исследовать самоаффинные множества на плоскости, заданные шестью гомотетиями, центры которых находятся в вершинах правильного шестиугольника. Отметим, что равенство коэффициентов гомотетий не предполагается.

## 2. Свойства самоаффинных множеств

Пусть множество  $S = \{f_1, \dots, f_6\}$  состоит из шести гомотетий плоскости с коэффициентами  $\lambda_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , и центрами  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ , являющимися вершинами правильного шестиугольника  $P$ . Обозначим самоаффинное множество, задаваемое  $S$ , через  $\mathcal{A}$ . Самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  обладает следующими свойствами.

**Т е о р е м а 2.1.** 1. Самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  совпадает с шестиугольником  $P$  тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i + \lambda_{i+1} \geq 1, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \lambda_1 + \lambda_6 \geq 1. \quad (2.1)$$

2. Если  $\lambda_i + \lambda_j \leq \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , то размерности Хаусдорфа и Минковского самоаффинного множества  $\mathcal{A}$  совпадают и равны  $d$ , где  $d$  удовлетворяет равенству

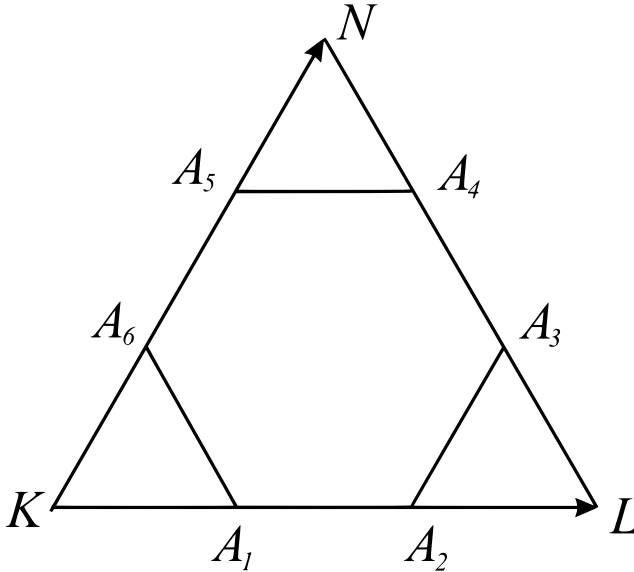
$$\lambda_1^d + \dots + \lambda_6^d = 1. \tag{2.2}$$

Более того, при  $\lambda_i + \lambda_j < \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , множество  $\mathcal{A}$  – канторово множество в шестиугольнике  $P$ .

3. Если существуют такие  $i, j \in \{1, \dots, 6\}, i \neq j$ , что  $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$ , то  $\mathcal{A}$  не является канторовым множеством.

4. Если  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_6^2 < 1$ , то мера Лебега множества  $\mathcal{A}$  равна нулю:  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Продолжив стороны  $A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6$  шестиугольника  $P$ , получим треугольник  $\triangle KLN$ . Введем на плоскости барицентрические координаты (Б-координаты), исходя из треугольника  $\triangle KLN$  (Рис. 2.1).



**Рис. 2.1.** Треугольник  $\triangle KLN$   
**Fig. 2.1.** Triangle  $\triangle KLN$

Б-координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  произвольной точки  $M$  определяются из системы

$$\begin{cases} \overrightarrow{KM} = x_2\overrightarrow{KL} + x_3\overrightarrow{KN}, \\ x_1 = 1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

Вершины треугольника  $\triangle KLN$  имеют следующие Б-координаты:  $K(1, 0, 0)$ ,  $L(0, 1, 0)$ ,  $N(0, 0, 1)$ , а вершины шестиугольника  $P$  –

$$\begin{aligned} &A_1\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right); A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right); A_3\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); \\ &A_4\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); A_5\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right); A_6\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$



Заметим, что шестиугольник  $P$  в Б-координатах может быть записан как множество

$$P = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

Нетрудно показать, что гомотетии  $f_i$  с центрами в точках  $A_i$  и коэффициентами  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , задаются формулами:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_1 \left( x_1 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}; \lambda_1 \left( x_2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}; \lambda_1 x_3 \right),$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_2 \left( x_1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}; \lambda_2 \left( x_2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}; \lambda_2 x_3 \right),$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_3 x_1; \lambda_3 \left( x_2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}; \lambda_3 \left( x_3 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \right),$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_4 x_1; \lambda_4 \left( x_2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}; \lambda_4 \left( x_3 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right),$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_5 \left( x_1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}; \lambda_5 x_2; \lambda_5 \left( x_3 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \right),$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3) = \left( \lambda_6 \left( x_1 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}; \lambda_6 x_2; \lambda_6 \left( x_3 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \right).$$

Тогда образы  $f_i(P)$  шестиугольника  $P$  определены равенствами:

$$f_1(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{2-2\lambda_1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; \frac{1-\lambda_1}{3} \leq x_2 \leq \frac{1+\lambda_1}{3}; 0 \leq x_3 \leq \frac{2\lambda_1}{3} \right\}, \quad (2.3)$$

$$f_2(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1-\lambda_2}{3} \leq x_1 \leq \frac{1+\lambda_2}{3}; \frac{2-2\lambda_2}{3} \leq x_2 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_3 \leq \frac{2\lambda_2}{3} \right\},$$

$$f_3(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{2\lambda_3}{3}; \frac{2-2\lambda_3}{3} \leq x_2 \leq \frac{2}{3}; \frac{1-\lambda_3}{3} \leq x_3 \leq \frac{1+\lambda_3}{3} \right\},$$

$$f_4(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{2\lambda_4}{3}; \frac{1-\lambda_4}{3} \leq x_2 \leq \frac{1+\lambda_4}{3}; \frac{2-2\lambda_4}{3} \leq x_3 \leq \frac{2}{3} \right\},$$

$$f_5(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1-\lambda_5}{3} \leq x_1 \leq \frac{1+\lambda_5}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{2\lambda_5}{3}; \frac{2-2\lambda_5}{3} \leq x_3 \leq \frac{2}{3} \right\},$$

$$f_6(P) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{2-2\lambda_6}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{2\lambda_6}{3}; \frac{1-\lambda_6}{3} \leq x_3 \leq \frac{1+\lambda_6}{3} \right\}. \quad (2.4)$$

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Пусть выполнены условия (2.1). Докажем, что  $\mathcal{A} = P$ . Пусть  $A_0 \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$  – центр шестиугольника  $P$ . Обозначим треугольник с вершинами в точках  $A_1, A_0, A_6$  через  $\Delta_{16}$ . Покажем, что  $\Delta_{16} \subset f_1(P) \cup f_6(P)$ . Заметим, что

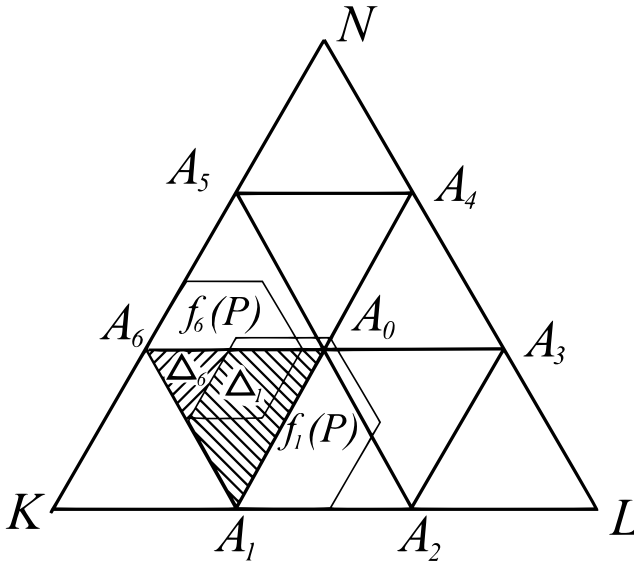
$$\Delta_{16} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}; 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

Поскольку  $\lambda_1 + \lambda_6 \geq 1$ , то хотя бы одно из значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_6$  больше или равно  $1/2$ . Пусть  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$ .

Представим  $\Delta_{16}$  в виде объединения двух областей (Рис. 2.2):

$$\Delta_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; \frac{1 - \lambda_1}{3} \leq x_2 \leq \frac{1}{3}; 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3} \right\},$$

$$\Delta_6 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1 + \lambda_1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}; 0 \leq x_2 \leq \frac{1 - \lambda_1}{3}; \frac{\lambda_1}{3} \leq x_3 \leq \frac{1}{3} \right\}.$$



**Рис. 2.2.** Область  $\Delta_{16} = \Delta_1 \cup \Delta_6$   
**Fig. 2.2.** The area  $\Delta_{16} = \Delta_1 \cup \Delta_6$

Поскольку  $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$ , то

$$\left[ \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right] \subset \left[ \frac{2 - 2\lambda_1}{3}; \frac{2}{3} \right], \quad \left[ \frac{1 - \lambda_1}{3}; \frac{1}{3} \right] \subset \left[ \frac{1 - \lambda_1}{3}; \frac{1 + \lambda_1}{3} \right], \quad \left[ 0; \frac{1}{3} \right] \subset \left[ 0; \frac{2\lambda_1}{3} \right].$$

Следовательно, принимая во внимание равенство (2.3), будем иметь включение  $\Delta_1 \subset f_1(P)$ .

Поскольку  $\lambda_1 + \lambda_6 \geq 1$ , то  $\lambda_1 + 2\lambda_6 \geq 1$ . Поэтому

$$\left[ \frac{1 + \lambda_1}{3}; \frac{2}{3} \right] \subset \left[ \frac{2 - 2\lambda_6}{3}; \frac{2}{3} \right], \quad \left[ 0; \frac{1 - \lambda_1}{3} \right] \subset \left[ 0; \frac{2\lambda_6}{3} \right], \quad \left[ \frac{\lambda_1}{3}; \frac{1}{3} \right] \subset \left[ \frac{1 - \lambda_6}{3}; \frac{1 + \lambda_6}{3} \right].$$

Отсюда в силу равенства (2.4) будем иметь включение  $\Delta_6 \subset f_6(P)$ .

Таким образом,  $\Delta_{16} = \Delta_1 \cup \Delta_6 \subset f_1(P) \cup f_6(P)$ .

Аналогично можно показать, что  $\Delta_{i,i+1} \subset f_i(P) \cup f_{i+1}(P) \forall i = 1, \dots, 5$ , где  $\Delta_{i,i+1}$  — треугольник с вершинами  $A_i, A_0, A_{i+1}$ . Отсюда

$$P = \Delta_{16} \cup \Delta_{12} \cup \Delta_{23} \cup \Delta_{34} \cup \Delta_{45} \cup \Delta_{56} \subset \bigcup_{i=1}^6 f_i(P).$$

Так как  $f_i(P) \subset P \forall i = 1, \dots, 6$ , то

$$\bigcup_{i=1}^6 f_i(P) \subset P.$$

Следовательно,  $P = \bigcup_{i=1}^6 f_i(P)$  и в силу единственности самоаффинного множества для системы  $S$  имеем  $\mathcal{A} = P$ .

Докажем обратное: пусть теперь  $\mathcal{A} = P$ . Предположим противное: пусть, например,  $\lambda_1 + \lambda_6 < 1$ . Рассмотрим точку  $M(\frac{2}{3}, \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_6}{6}, \frac{1 + \lambda_1 - \lambda_6}{6})$ . Поскольку  $0 \leq \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_6}{6} \leq \frac{2}{3}$ ,  $0 \leq \frac{1 + \lambda_1 - \lambda_6}{6} \leq \frac{2}{3}$ , то  $M \in P$ . В силу условия  $\lambda_1 + \lambda_6 < 1$  имеем  $\frac{1 - \lambda_1 + \lambda_6}{6} < \frac{1 - \lambda_1}{3}$  и  $\frac{1 + \lambda_1 - \lambda_6}{6} < \frac{1 - \lambda_6}{3}$ . Благодаря первому неравенству  $M \notin f_1(P)$ , а благодаря второму  $M \notin f_6(P)$ . Поскольку  $\lambda_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , а первая координата точки равна  $2/3$ , то  $M \notin f_i(P)$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ . Итак,  $M \notin f_i(P) \forall i = 1, \dots, 6$ , следовательно,  $P \neq \bigcup_{i=1}^6 f_i(P)$ , т. е.  $\mathcal{A} \neq P$ . Получаем противоречие, значит предположение, что  $\lambda_1 + \lambda_6 < 1$ , неверно. Итак, равенство  $\mathcal{A} = P$  влечет  $\lambda_1 + \lambda_6 \geq 1$ ,  $\lambda_i + \lambda_{i+1} \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

2. Пусть теперь  $\lambda_i + \lambda_j \leq \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ . Напомним [3], что система сжимающих отображений  $\{g_1, \dots, g_k\}$  удовлетворяет условию открытого множества (open set condition), если существует такое открытое множество  $U$ , что:

- a)  $g_i(U) \subset U \forall i = 1, \dots, k$ ;
- b)  $g_i(U) \cap g_j(U) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, k$ .

Пусть  $\lambda_i + \lambda_j \leq \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ . Обозначим через  $\dot{P}$  внутренность шестиугольника  $P$ . Проверим, что для системы  $S = \{f_1, \dots, f_6\}$  открытое множество  $U = \dot{P}$  удовлетворяет условиям а) и б) определения выше.

Очевидно, что  $f_i(\dot{P}) \subset \dot{P} \forall i = 1, \dots, 6$ . Покажем, что  $f_1(\dot{P})$  не пересекается с  $f_i(\dot{P}) \forall i = 2, \dots, 6$ .

Для того, чтобы показать, что  $f_1(\dot{P}) \cap f_2(\dot{P}) = \emptyset$ , рассмотрим два случая: а)  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ; б)  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Поскольку  $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{2}{3}$ , то в случае а) будем иметь  $\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1$ . Следовательно,  $\frac{1 + \lambda_1}{3} \leq \frac{2 - 2\lambda_2}{3}$  и тогда  $f_1(\dot{P})$  и  $f_2(\dot{P})$  находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{1 - \lambda_1}{3} < x_2 < \frac{1 + \lambda_1}{3}, \quad \frac{2 - 2\lambda_2}{3} < x_2 < \frac{2}{3}.$$

Если же имеет место условие б), то  $2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ . Из этого следует, что  $\frac{1 + \lambda_2}{3} \leq \frac{2 - 2\lambda_1}{3}$  и  $f_1(\dot{P})$  и  $f_2(\dot{P})$  находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2 - 2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \quad \frac{1 - \lambda_1}{3} < x_1 < \frac{1 + \lambda_1}{3}.$$

Итак,  $f_1(\dot{P}) \cap f_2(\dot{P}) = \emptyset$ .

Аналогично, рассмотрев два случая а)  $\lambda_1 \geq \lambda_6$ , б)  $\lambda_1 < \lambda_6$ , можно показать, что в силу условия  $\lambda_1 + \lambda_6 \leq \frac{2}{3}$ , выполняется равенство  $f_1(\dot{P}) \cap f_6(\dot{P}) = \emptyset$ .

Поскольку  $\lambda_1 + \lambda_3 \leq \frac{2}{3} < 1$ , то  $\frac{2\lambda_3}{3} \leq \frac{2-2\lambda_1}{3}$  и поэтому  $f_1(\dot{P})$  и  $f_3(\dot{P})$  находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2-2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \quad 0 < x_1 < \frac{2\lambda_3}{3}.$$

Поскольку  $\lambda_1 + \lambda_4 \leq \frac{2}{3} < 1$ , то  $\frac{2\lambda_4}{3} \leq \frac{2-2\lambda_1}{3}$ . Следовательно,  $f_1(\dot{P})$  и  $f_4(\dot{P})$  находятся в непересекающихся полосах

$$\frac{2-2\lambda_1}{3} < x_1 < \frac{2}{3}, \quad 0 < x_1 < \frac{2\lambda_4}{3}.$$

В силу  $\lambda_1 + \lambda_5 \leq \frac{2}{3} < 1$ , имеем  $\frac{2\lambda_5}{3} \leq \frac{2-2\lambda_1}{3}$  и  $f_1(\dot{P})$  и  $f_5(\dot{P})$  находятся в непересекающихся полосах

$$0 < x_3 < \frac{2\lambda_1}{3}, \quad \frac{2-2\lambda_5}{3} < x_3 < \frac{2}{3}.$$

Таким образом,  $f_1(\dot{P}) \cap f_i(\dot{P}) = \emptyset \forall i = 2, \dots, 6$ .

Аналогично доказывается, что  $f_i(\dot{P}) \cap f_j(\dot{P}) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ .

Итак, для системы  $\{f_1, \dots, f_6\}$  выполнено условие открытого множества. Как известно (см., например, теорему 9.3 [3]), если для системы сжимающих отображений выполнено условие открытого множества, то размерности Минковского и Хаусдорфа самоаффинного множества  $\mathcal{A}$  совпадают и равны  $d$ , где  $d$  удовлетворяет равенству (2.2).

Пусть теперь  $\lambda_i + \lambda_j < \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ . Тогда в доказательстве выше все неравенства будут строгими. Следовательно,  $f_i(P) \cap f_j(P) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ .

Положим  $P_{i_1 \dots i_n} = f_{i_n} \circ \dots \circ f_{i_1}(P)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_s \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $s = 1, \dots, n$ . Поскольку  $\lambda_i + \lambda_j < \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , то шестиугольники  $P_{i_1 \dots i_n}$  и  $P_{j_1 \dots j_n}$  для разных наборов индексов не пересекаются. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$\Pi_n = F^n(P) = \bigsqcup_{\sigma_n} P_{i_1 \dots i_n},$$

где объединение берется по всем наборам  $\sigma_n = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, 6\}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Имеем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в  $P$ :

$$P \supset \Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \Pi_3 \supset \dots \supset \Pi_n \supset \dots$$

Согласно теореме Хатчинсона самоподобное множество

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$

Покажем, что множество  $\mathcal{A}$  является канторовым, т. е. совершенным вполне несвязным множеством.

Множество  $\mathcal{A}$  является замкнутым как компактное множество. Рассмотрим произвольную точку  $M \in \mathcal{A}$ . Тогда  $M \in \Pi_n \forall n \in \mathbb{N}$  и для каждого  $n \in \mathbb{N}$  найдется такой

шестиугольник  $P_{i_1 \dots i_n}$ , что  $M \in P_{i_1 \dots i_n}$ . Обозначим через  $M_n$  любую вершину этого шестиугольника, удовлетворяющую условию  $M_n \neq M$ . Из построения последовательности  $\{M_n\}$  следует  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M$ . Отметим, что  $M_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$ , следовательно, множество  $\mathcal{A}$  не имеет изолированных точек и является совершенным.

Напомним ([2]), что система сжимающих отображений  $T = \{g_1, \dots, g_k\}$  называется вполне несвязной, если

- a)  $g_i$  — биекция  $\forall i = 1, \dots, k$ ;
- b)  $g_i(\mathcal{A}_T) \cap g_j(\mathcal{A}_T) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, k$ ,

где  $\mathcal{A}_T$  — самоподобное множество для  $T$ .

Поскольку гомотетии являются биекциями, то условие a) для системы  $S = \{f_1, \dots, f_6\}$  выполнено. Поскольку  $\mathcal{A} \subset P$  и  $f_i(P) \cap f_j(P) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , то  $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , т. е. для системы  $S$  выполнено условие b) определения вполне несвязной системы. Итак,  $S$  является вполне несвязной. Как известно из [2], самоподобное множество  $\mathcal{A}$  для вполне несвязной системы является вполне несвязным.

Таким образом, при  $\lambda_i + \lambda_j < \frac{2}{3} \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, 6$ , самоподобное множество  $\mathcal{A}$  является канторовым.

3. Пусть найдутся такие  $i, j \in \{1, \dots, 6\}, i \neq j$ , что  $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$ . Рассмотрим отрезок  $A_i A_j$ . При гомотетиях  $f_i$  и  $f_j$  прямая  $L_{ij}$ , проходящая через точки  $A_i$  и  $A_j$ , инвариантна:  $f_i(L_{ij}) = f_j(L_{ij}) = L_{ij}$ . В силу условия  $\lambda_i + \lambda_j \geq 1$  имеем  $f_i(A_i A_j) \cup f_j(A_i A_j) = A_i A_j$ . Следовательно, имеют место включения  $A_i A_j \subset F(A_i A_j) \subset F^2(A_i A_j) \subset \dots$ , т. е.  $A_i A_j \subset F^n(A_i A_j) \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда согласно теореме Хатчинсона

$$A_i A_j \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(A_i A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(A_i A_j) = \mathcal{A}.$$

Таким образом, самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  будет содержать отрезок и, следовательно,  $\mathcal{A}$  не является канторовым множеством.

4. Поскольку  $f_i$  — аффинное преобразование плоскости с коэффициентом сжатия  $\lambda_i, i = 1, \dots, 6$ , то  $\mu(f_i(\mathcal{A})) = \lambda_i^2 \mu(\mathcal{A}), i = 1, \dots, 6$ . В силу полуаддитивности меры Лебега  $\mu$  имеем

$$\mu(\mathcal{A}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^6 f_i(\mathcal{A})\right) \leq \sum_{i=1}^6 \mu(f_i(\mathcal{A})) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^2 \mu(\mathcal{A}) = \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i^2\right) \mu(\mathcal{A}).$$

Таким образом,

$$\mu(\mathcal{A}) \leq \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i^2\right) \mu(\mathcal{A}). \tag{2.5}$$

Предположим, что  $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$ . Тогда в силу неравенства (2.5) получим  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_6^2 \geq 1$ . Однако по условию пункта 4 теоремы 2.1  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_6^2 < 1$ , поэтому предположение  $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$  неверно. Следовательно,  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ .

Доказательство завершено.

Непосредственно из теоремы 2.1 вытекает

**С л е д с т в и е 2.1.** Пусть все коэффициенты гомотетий одинаковы:  $\lambda_i = \lambda \forall i = 1, \dots, 6$ .

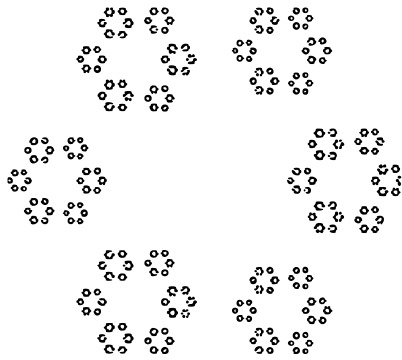
1. Самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  совпадает с шестиугольником  $P$  тогда и только тогда, когда  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ .
2. Если  $\lambda \leq \frac{1}{3}$ , то размерности Минковского и Хаусдорфа самоаффинного множества  $\mathcal{A}$  совпадают и равны  $d = -\frac{\ln 6}{\ln \lambda}$ , а при  $\lambda < \frac{1}{3}$  множество  $\mathcal{A}$  — канторово множество в шестиугольнике  $P$ .
3. Если  $\lambda < \frac{1}{\sqrt{6}}$ , то  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ .

### 3. Примеры самоаффинных множеств

**Пример 3.1.** Пусть  $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$ . Поскольку сумма любых двух коэффициентов меньше  $\frac{2}{3}$ , то согласно пункту 2 теоремы 2.1 самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  является канторовым (Рис. 3.1). Размерности Хаусдорфа и Минковского множества  $\mathcal{A}$  совпадают и равны  $d$ , где  $d$  удовлетворяет уравнению

$$3 \left( \frac{1}{4} \right)^d + 3 \left( \frac{3}{10} \right)^d = 1,$$

отсюда  $d \approx 1,3896$ .

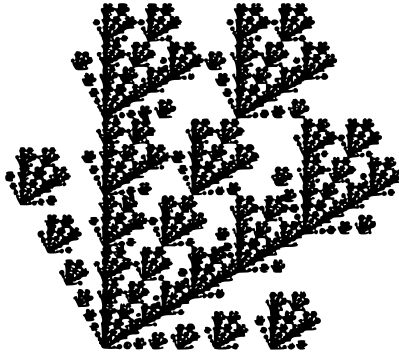


**Рис. 3.1.** Самоаффинное множество при  $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$ .

**Fig. 3.1.** A self-affine set for  $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_6 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{3}$ . Так как  $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_5 = 1$ , то согласно пункту 3 теоремы 2.1 самоаффинное множество  $\mathcal{A}$  содержит в себе три отрезка  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$ ,  $A_1A_5$  и поэтому  $\mathcal{A}$  не является канторовым множеством (см. Рис. 3.2).

Отметим, что в примерах 3.1 и 3.2 для коэффициентов гомотетий выполнено условие  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_6^2 < 1$ . Следовательно, для этих примеров согласно пункту 4 теоремы 2.1 мера Лебега самоаффинных множеств равна нулю.



**Рис. 3.2.** Самоаффинное множество при  
 $\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{3}$ .

**Fig. 3.2.** A self-affine set for  $\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \lambda_6 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{3}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. Vol. 30, no. 5. pp. 713–747.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
3. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: Wiley, 2014. 400 p.
4. Hata M. On the structure of self-similar sets // Japan J. Appl. Math. 1985. Vol. 2. pp. 381–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03167083>
5. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.
6. Broomhead D., Montaldi J., Sidorov N. Golden gaskets: variations on the Sierpinski sieve // Nonlinearity. 2004. Vol. 17, no. 4. pp. 1455–1480. DOI: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/017>
7. Jordan Th. Dimension of fat Sierpinski gaskets // Real Anal. Exchange. 2005. Vol. 31. pp. 97–110.
8. Багаев А.В., Киселева А.В. Аттракторы систем трех итерированных гомотетий евклидовой плоскости // Тезисы доклада XXIX Всерос. науч.-практ. конф. «КОГРАФ–2019» 2019. С. 136–140.
9. Багаев А.В., Киселева А.В. О многомерных аналогах треугольника Серпинского // XXVI Междунар. науч.-техн. конф. «Информационные системы и технологии–2020»: сб. мат. Н.Новгород, 2020. С. 1148–1152.
10. Багаев А.В., Киселева А.В. О мере Лебега аттракторов, заданных гомотетиями с аффинно независимыми центрами // XXVII Междунар. науч.-техн. конф. «Информационные системы и технологии–2021»: сб. мат. Н.Новгород, 2021. С. 945 – 948.

Поступила 18.11.2022; доработана после рецензирования 22.01.2023;  
принята к публикации 24.02.2023

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 713–747.
2. R. M. Crowover, *Introduction in fractals and chaos*, Jones and Bartlett Publ., Boston, 1995, 350 p.
3. K. J. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Wiley, New York, 2014, 400 p.
4. M. Hata, “On the structure of self-similar sets”, *Japan J. Appl. Math.*, **2** (1985), 381–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03167083>
5. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.
6. D. Broomhead, J. Montaldi, N. Sidorov, “Golden gaskets: variations on the Sierpinski”, *Nonlinearity*, **17**:4 (2004), 1455–1480. DOI: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/017>
7. Th. Jordan, “Dimension of fat Sierpinski gaskets”, *Real Anal. Exchange*, **31**:1 (2005), 97–110.
8. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, “Attractors of systems of three iterated homotheties of the Euclidean plane”, *XXIX Russian Scientific and Practical Conference on Graphic Information Technologies and Systems (KOGRAF-2019): Proceedings, 2019*, 136–140 (In Russ.).
9. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, “On multidimensional analogs of the Sierpinski triangle”, *XXVI International Scientific and Technical Conference “Information Systems and Technologies-2020”: Proceedings, 2020*, 1148–1152 (In Russ.).
10. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, “On the Lebesgue measure of the attractors given by homotheties with affine independent centers”, *XXVI International Scientific and Technical Conference “Information Systems and Technologies-2021”: Proceedings, 2021*, 945–948 (In Russ.).

Submitted 18.11.2022; Revised 22.01.2023; Accepted 24.02.2023

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.



DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.531-541

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла

А. А. Ноздринов, А. И. Починка

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** В настоящей работе рассматриваются градиентно-подобные диффеоморфизмы Морса-Смейла, заданные на трехмерной сфере  $S^3$ . Для таких диффеоморфизмов полный инвариант топологической сопряженности получен в работах Х. Бонатти, В. Гринеса, В. Медведева, Е. Пеку. Он представляет собой класс эквивалентности набора гомотопически нетривиально вложенных торов и бутылок Клейна, вложенных в некоторое замкнутое 3-многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм в группу  $\mathbb{Z}$ . Такой инвариант называется схемой градиентно-подобного диффеоморфизма  $f : S^3 \rightarrow S^3$ . Авторами настоящего исследования выделен класс  $G$  диффеоморфизмов, для которых полным инвариантом является более простой с топологической точки зрения объект, а именно зацепление существенных узлов в многообразии  $S^2 \times S^1$ . Рассматриваемые диффеоморфизмы определяются тем, что их неблуждающее множество содержит единственный источник, а замыкания устойчивых многообразий седловых точек ограничивают трехмерные шары с попарно не пересекающимися внутренностями. Доказано, что в дополнении к замыканию этих шаров диффеоморфизм класса  $G$  содержит в точности одну неблуждающую точку, которая является неподвижным стоком. Установлено, что полным инвариантом топологической сопряженности диффеоморфизмов класса  $G$  является пространство орбит неустойчивых седловых сепаратрис в бассейне этого стока. Показано, что пространство орбит представляет собой зацепление нестягиваемых узлов в многообразии  $S^2 \times S^1$  и эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем. Также приведена реализация диффеоморфизмов рассмотренного класса по произвольному зацеплению, состоящему из существенных узлов в многообразии  $S^2 \times S^1$ .

**Ключевые слова:** диффеоморфизм Морса-Смейла, узел, зацепление, топологическая сопряженность, инвариант

**Для цитирования:** Ноздринов А. А., Починка А. И. Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 531–541. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.531-541>

*Об авторах:*

**Ноздринов Алексей Александрович**, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, [lex87@bk.ru](mailto:lex87@bk.ru)

**Починка Арсений Ильич**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4408-8644>, [senya.pochinka@yandex.ru](mailto:senya.pochinka@yandex.ru)

© А. А. Ноздринов, А. И. Починка



MSC2020 37D15

## Link as a complete invariant of Morse-Smale 3-diffeomorphisms

A. A. Nozdrinov, A. I. Pochinka

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In this paper we consider gradient-like Morse-Smale diffeomorphisms defined on the three-dimensional sphere  $\mathbb{S}^3$ . For such diffeomorphisms, a complete invariant of topological conjugacy was obtained in the works of C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Peculiar. It is an equivalence class of a set of homotopically non-trivially embedded tori and Klein bottles embedded in some closed 3-manifold whose fundamental group admits an epimorphism to the group  $\mathbb{Z}$ . Such an invariant is called the scheme of the gradient-like diffeomorphism  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ . We single out a class  $G$  of diffeomorphisms whose complete invariant is a topologically simpler object, namely, the link of essential knots in the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . The diffeomorphisms under consideration are determined by the fact that their non-wandering set contains a unique source, and the closures of stable saddle point manifolds bound three-dimensional balls with pairwise disjoint interiors. We prove that, in addition to the closure of these balls, a diffeomorphism of the class  $G$  contains exactly one nonwandering point, which is a fixed sink. It is established that the total invariant of topological conjugacy of class  $G$  diffeomorphisms is the space of orbits of unstable saddle separatrices in the basin of this sink. It is shown that the space of orbits is a link of non-contractible knots in the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  and that the equivalence of links is tantamount to the equivalence of schemes. We also provide a realization of diffeomorphisms of the considered class along an arbitrary link consisting of essential nodes in the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

**Keywords:** Morse-Smale diffeomorphism, knot, link, topological conjugacy, invariant

**For citation:** A. A. Nozdrinov, A. I. Pochinka. Link as a complete invariant of Morse-Smale 3-diffeomorphisms. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 531–541. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.531-541>

*About the authors:*

**Alexey A. Nozdrinov**, Post-graduate student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1223-7334>, [lex87@bk.ru](mailto:lex87@bk.ru)

**Arseniy I. Pochinka**, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), [senya.pochinka@yandex.ru](mailto:senya.pochinka@yandex.ru)

### 1. Введение

Специалисты по динамике используют инварианты узлов и зацеплений для описания периодических орбит потоков, что помогает им лучше понять теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако специалисты по дискретным динамическим системам также активно используют теорию узлов и зацеплений для описания

инвариантов динамики. В частности, динамика некоторых диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на произвольном 3-многообразии, может быть полностью (с точностью до топологической сопряженности) определена поведением сепаратрис седловых точек, которое, в свою очередь, описывается узлом или зацеплением в многообразии  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Заметим, что топологическая классификация произвольных 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла была получена в [1] и использует в качестве полного инварианта класс эквивалентности пары двумерных ламинаций в некотором 3-многообразии. Поскольку классификация 3-многообразий является открытой проблемой, естественной задачей является выделение диффеоморфизмов, допускающих хорошо изученные объекты в качестве инвариантов. Например, для класса 3-диффеоморфизмов, чье неблуждающее множество состоит из четырех гиперболических неподвижных точек, полным инвариантом топологической сопряженности является класс эквивалентности узла Хопфа в  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  [2–3].

В настоящей работе мы выделяем класс 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла, для которых полным инвариантом топологической сопряженности является класс эквивалентности существенного зацепления в  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Пусть  $f: M^3 \rightarrow M^3$  – диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии. Пусть  $\Omega_q, q \in \{0, 1, 2, 3\}$  – множество всех его периодических точек  $p$  с  $\dim W_p^u = q$ . Через  $|\Omega_q|$  обозначим число точек в множестве  $\Omega_q$ . Заметим, что  $|\Omega_0| \geq 1, |\Omega_3| \geq 1$  (см., например, [4]). При этом если  $|\Omega_0| = 1$  или  $|\Omega_3| = 1$ , то  $M^3 \cong \mathbb{S}^3$  [5]. Везде далее мы предполагаем, что множество  $\Omega_3$  состоит из единственного источника  $\alpha$ . В этом случае множество  $\Omega_2$  пусто [6]. Если  $\Omega_1 = \emptyset$ , то  $f$  – диффеоморфизм «источник-сток» и все такие диффеоморфизмы попарно топологически сопряжены [7]. Если  $|\Omega_1| = 1$ , то  $f$  – диффеоморфизм Пикстона и топологическая классификация таких диффеоморфизмов полностью определяется классом эквивалентности узла Хопфа [2]. Везде далее мы полагаем, что  $|\Omega_1| > 1$ . Перенумеруем седловые орбиты множества  $\Omega_1$ :

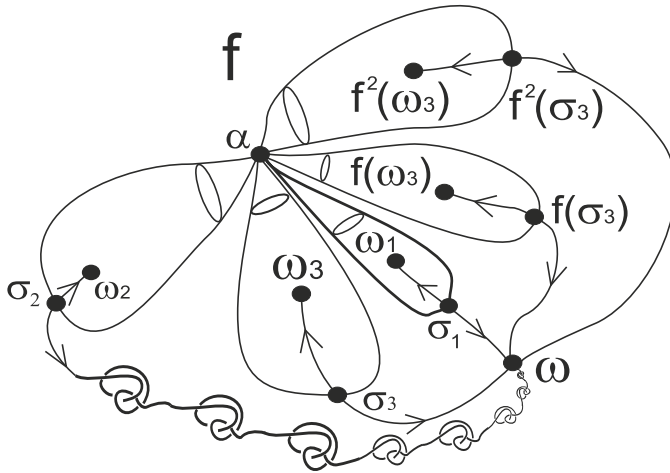
$$\mathcal{O}_{\sigma_1}, \dots, \mathcal{O}_{\sigma_k}$$

и обозначим через  $m_i$  период седла  $\sigma_i$ . Тогда для  $i \in \{1, \dots, k\}$  множество  $S_i = W_{\sigma_i}^s \cup \alpha$  гомеоморфно 2-сфере, топологически вложенной в  $\mathbb{S}^3$  [7]. Обозначим через  $G$  множество диффеоморфизмов Морса-Смейла  $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ , таких что 2-сферы  $S_1, \dots, S_k$  ограничивают 3-шары  $B_1, \dots, B_k$  с попарно не пересекающимися внутренностями в  $\mathbb{S}^3$ . Для  $f \in G$  положим  $B = \bigcup_{i=1}^k \left( \bigcup_{j=0}^{m_i-1} f^j(B_i) \right)$ . Тогда множество  $\mathbb{S}^3 \setminus B$  содержит в точности одну периодическую точку диффеоморфизма  $f$ , которая является неподвижным стоком, обозначим его  $\omega$  [5] (см. Рис. 1.1).

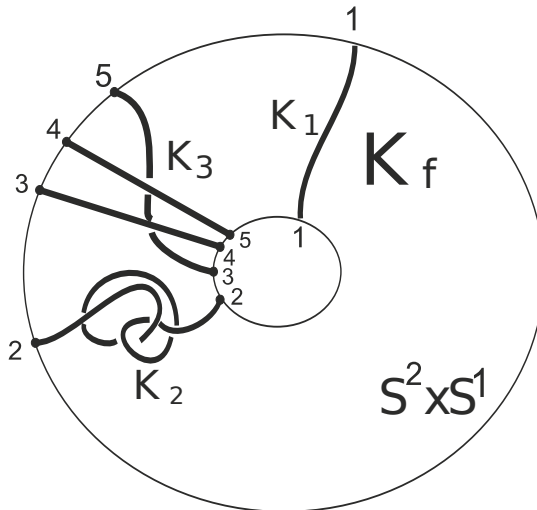
Пусть  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  и  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – диффеоморфизм, заданный формулой  $h(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2}$ . Определим отображение  $p: \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left( \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2(\|\mathbf{x}\|) \pmod{1} \right).$$

Пусть  $V_\omega = W_\omega^s \setminus \omega$ . В силу гиперболичности стока  $\omega$  существует диффеоморфизм  $\psi_\omega: V_\omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$ , который сопрягает диффеоморфизмы  $f$  и  $h$ . Пусть  $p_\omega = p\psi_f: V_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  и  $\mathcal{K}_f = p_\omega(W_{\Omega_1}^u \cap V_\omega)$ . Согласно [7] множество  $\mathcal{K}_f$  является гладким зацеплением в  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  (см. Рис. 1.2).



**Рис. 1.1.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $f \in G$   
**Fig. 1.1.** Phase portrait of a diffeomorphism  $f \in G$



**Рис. 1.2.** Зацепление  $K_f$  диффеоморфизма  $f \in G$ , изображенного на Рис. 1.1  
**Fig. 1.2.** The link  $K_f$  of the diffeomorphism  $f \in G$  shown in the Fig. 1.1

Два зацепления  $K_f, K_{f'}$  назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $\varphi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , такой что  $\varphi(K_f) = K_{f'}$ .

**Т е о р е м а 1.1.** Два диффеоморфизма  $f, f' \in G$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их зацепления  $K_f, K_{f'}$  эквивалентны.

**Т е о р е м а 1.2.** Для любого зацепления  $K \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , состоящего из существенных узлов, существует диффеоморфизм  $f \in G$  такой, что зацепления  $K$  и  $K_f$  эквивалентны.

## 2. Необходимые сведения из теории динамических систем

Развернутое изложение приведенных в данном разделе фактов можно найти в [4–5], [7].

Пусть диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  задан на гладком замкнутом (компактном без края)  $n$ -многообразии ( $n \geq 1$ )  $M^n$  с метрикой  $d$ .

Два диффеоморфизма  $f, f' : M^n \rightarrow M^n$  называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм  $h : M^n \rightarrow M^n$ , такой что  $fh = hf'$ .

Точка  $x \in M^n$  называется *блуждающей* для  $f$ , если существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$ , такая что  $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В противном случае точка  $x$  называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма  $f$  называется *неблуждающим множеством* и обозначается  $\Omega_f$ .

Например, неблуждающими являются все периодические точки диффеоморфизма. Если множество  $\Omega_f$  конечно, то каждая точка  $p \in \Omega_f$  является периодической, обозначим через  $m_p \in \mathbb{N}$  период периодической точки  $p$ . С любой периодической точкой  $p$  связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.

Периодическая точка  $p \in \Omega_f$  называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби  $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$  по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то  $p$  называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки  $p$  следует, что ее устойчивое  $W_p^s$  и неустойчивое  $W_p^u$  многообразия являются образами относительно инъективных иммерсий пространств  $\mathbb{R}^{q_p}$  и  $\mathbb{R}^{n-q_p}$ , где  $q_p$  – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Компонента линейной связности множества  $W_p^u \setminus p$  ( $W_p^s \setminus p$ ) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой* точки  $p$ .

Замкнутое  $f$ -инвариантное множество  $A \subset M^n$  называется *аттрактором* дискретной динамической системы  $f$ , если оно имеет компактную окрестность  $U_A$ , такую что  $f(U_A) \subset \text{int } U_A$  и  $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$ . Окрестность  $U_A$  при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для  $f^{-1}$ .

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если:

- 1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия  $W_p^s, W_r^u$  пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек  $p, r$ .

## 3. Схема диффеоморфизма $f \in G$

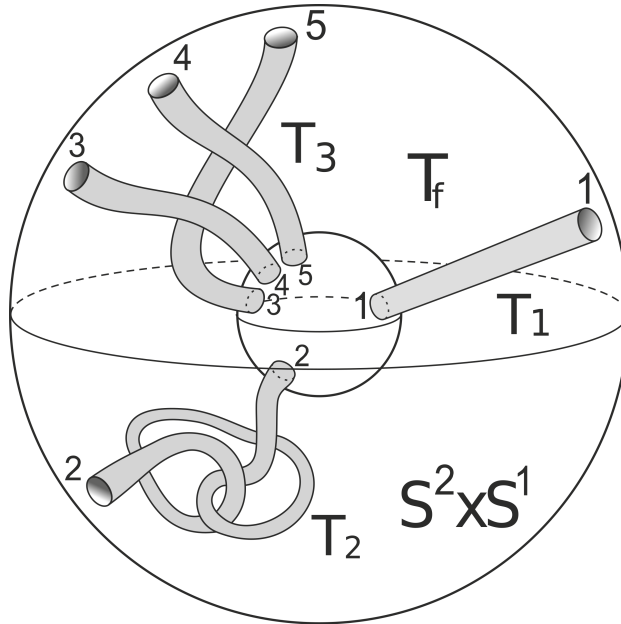
В этом разделе введем понятие схемы диффеоморфизма  $f \in G$ , класс эквивалентности которой есть полный инвариант топологической сопряженности диффеоморфизма

[1].

Пусть  $V_\alpha = W_\alpha^u \setminus \alpha$ . В силу гиперболичности источника  $\alpha$  существует диффеоморфизм  $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$ , который сопрягает диффеоморфизмы  $f$  и  $h^{-1}$ . Пусть  $p_\alpha = p\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  и  $\mathcal{T}_f = p_\alpha(W_{\Omega_1}^s \cap V_\alpha)$ . Пара

$$S_f = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_f)$$

называется *схемой* диффеоморфизма  $f \in G$ . Согласно [7] множество  $\mathcal{T}_f$  состоит из гомотопически нетривиальных гладко вложенных в  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  двумерных торов (см. Рис. 3.1).



**Рис. 3.1.** Схема  $S_f$  диффеоморфизма  $f \in G$ , фазовый портрет которого изображен на Рис. 1.1

**Fig. 3.1.** Scheme  $S_f$  of the diffeomorphism  $f \in G$  whose phase portrait is shown in the Fig. 1.1

Две схемы  $S_f, S_{f'}$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\psi: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  такой, что  $\psi(\mathcal{T}_f) = \mathcal{T}_{f'}$ .

**Предложение 3.1** ([1], Theorem 1). *Диффеоморфизмы  $f, f' \in G$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы  $S_f, S_{f'}$  эквивалентны.*

Таким образом, для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что для диффеоморфизмов множества  $G$ , эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем.

#### 4. Эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем

В этом разделе докажем результат (лемма 4.1), из которого будет непосредственно следовать теорема 1.1.

**Л е м м а 4.1.** *Зацепления  $\mathcal{K}_f, \mathcal{K}_{f'}$  диффеоморфизмов  $f, f' \in G$  эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их схемы  $S_f, S_{f'}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для  $i \in \{1, \dots, k\}$  положим  $K_i = p(W_{\sigma_i}^u \setminus \sigma_i), T_i = p_{\alpha}(W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i)$ . Тогда

$$\mathcal{K}_f = \bigsqcup_{i=1}^k K_i, \mathcal{T}_f = \bigsqcup_{i=1}^k T_i.$$

Обозначим через  $U(K_i)$  трубчатую окрестность узла  $K_i$ , гомеоморфную заполненному тору. Тогда  $U(T_i) = q_f(p_f^{-1}(U(K_i))) \cup T_i$  – односторонняя трубчатая окрестность тора  $T_i$ . Положим

$$U(\mathcal{K}_f) = \bigsqcup_{i=1}^k U(K_i), U(\mathcal{T}_f) = \bigsqcup_{i=1}^k U(T_i),$$

$$V = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } U(\mathcal{K}_f), W = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } U(\mathcal{T}_f).$$

По построению отображение  $\xi = p_{\alpha} p_{\omega}^{-1}|_V : V \rightarrow W$  является гомеоморфизмом. Покажем, что гомеоморфизм  $\xi$  продолжается до гомеоморфизма  $\xi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Для любой замкнутой кривой  $c \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  будем обозначать через  $\langle c \rangle$  число оборотов петли  $c$  вокруг образующей фундаментальной группы  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Тогда тор  $\partial V_i = \partial V \cap U(K_i)$  имеет образующие  $\lambda_i, \mu_i$ , такие что

$$\langle \lambda_i \rangle = m_i, \langle \mu_i \rangle = 0.$$

Из построения гомеоморфизма  $\xi$  следует, что  $\xi(\lambda_i), \xi(\mu_i)$  – образующие тора  $\partial W_i = \partial W \cap U(T_i)$ , при этом

$$\langle \xi(\lambda_i) \rangle = m_i, \langle \xi(\mu_i) \rangle = 0.$$

Из условий, наложенных на класс  $G$ , следует, что каждый тор  $\partial W_i$  ограничивает заполненный тор  $W_i$  в  $W$ . Тогда  $\xi(\mu_i)$  – меридиан заполненного тора  $W_i$ , а гомеоморфизм  $\xi|_{\partial V_i} : \partial V_i \rightarrow \partial W_i$  переводит меридиан заполненного тора  $U(K_i)$  в меридиан заполненного тора  $W_i$ , в силу чего он продолжается на заполненные торы [8].

Таким образом, существует гомеоморфизм  $\xi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  такой, что  $\xi(U(K_i)) = W_i, i \in \{1, \dots, k\}$ .

Аналогичные обозначения со штрихом введем для диффеоморфизма  $f' \in G$ . Не уменьшая общности будем считать, что  $U(\mathcal{K}_{f'}) = \varphi(U(\mathcal{K}_f))$ . Положим  $\psi = \xi' \varphi \xi^{-1} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Тогда  $\psi(W_i) = W'_i$  и, не уменьшая общности, можно считать, что  $\psi(T_i) = T'_i$ .

### 5. Реализация диффеоморфизма по зацеплению

В настоящем разделе докажем теорему 1.2, а именно реализуем любое зацепление  $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , состоящее из существенных узлов

$$\mathcal{K} = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_k$$

диффеоморфизмом  $f \in G$ .

Пусть  $\langle K_i \rangle = m_i$ . Тогда множество  $\bar{K}_i = p^{-1}(K_i)$  состоит из  $h$ -инвариантного объединения дуг

$$\bar{K}_i = \bar{K}_i^0 \sqcup \dots \sqcup h^{m_i-1}(\bar{K}_i^0).$$

Пусть  $U(K_i) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  – трубчатая окрестность узла  $K_i$ . Тогда  $U(\bar{K}_i) = p^{-1}(U(K_i))$  –  $h$ -инвариантная окрестность дуг  $\bar{K}_i$ , состоящая из  $m_i$  компонент связности  $U(\bar{K}_i^0) \sqcup \dots \sqcup h^{m_i-1}(U(\bar{K}_i^0))$ , каждая из которых диффеоморфна  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$ .

Пусть  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$  и пусть поток  $g^t : C \rightarrow C$  определен как

$$g^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм  $\zeta_i : U(\bar{K}_i^0) \rightarrow C$ , который сопрягает диффеоморфизмы  $h^{m_i}|_{U(\bar{K}_i^0)}$  и  $g = g^1|_C$ . Определим поток  $\phi^t$  на  $C$  следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)^2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ 1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{x_2}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)) - 1), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ -x_2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} \frac{x_3}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)) - 1), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \\ -x_3, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4. \end{cases} \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм  $\phi = \phi^1$  имеет две неподвижные точки: седло  $P(1, 0, 0)$  и сток  $Q(-1, 0, 0)$  (Рис. 5.2) – обе гиперболические. Одна неустойчивая сепаратриса седла  $P$  совпадает с открытым интервалом  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < 1, x_2 = x_3 = 0\}$ , принадлежащим бассейну стока  $Q$ , а другая – лучом  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 1, x_2 = x_3 = 0\}$ . Заметим, что  $\phi$  совпадает с диффеоморфизмом  $g = g^1$  вне шара  $\{(x_1, x_2, x_3) \in C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$ .

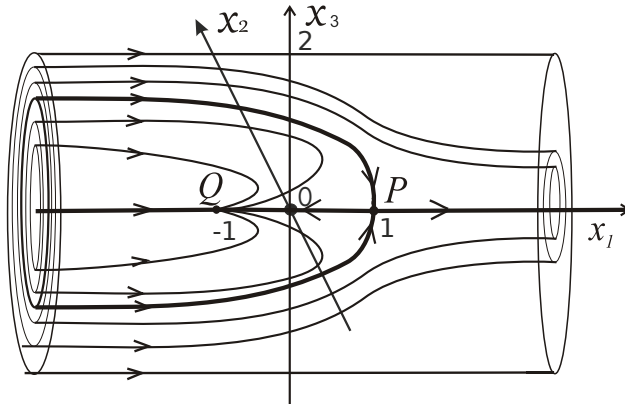


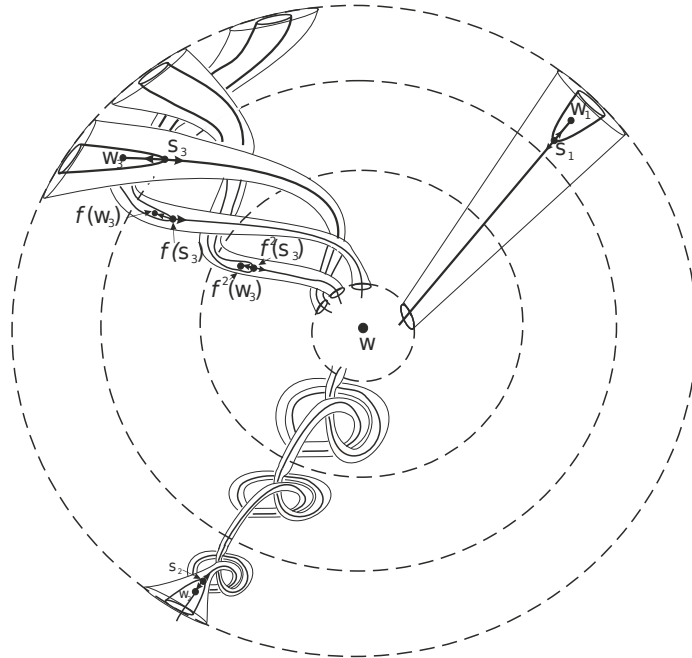
Рис. 5.2. Траектории потока  $\phi^t$   
 Fig. 5.2. Flow trajectories  $\phi^t$

Определим диффеоморфизм  $\bar{f}_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  таким образом, что  $\bar{f}_K$  совпадает с  $h$  вне  $U(\bar{K}_1) \cup \dots \cup U(\bar{K}_k)$  и совпадает с диффеоморфизмом  $h_i : U(\bar{K}_i) \rightarrow U(\bar{K}_i)$ , заданным формулой

$$h_i(h^j(x)) = \begin{cases} h(h^j(x)), & j \in \{0, \dots, m_i - 2\}, x \in U(\bar{K}_i^0); \\ \zeta_i^{-1}(\phi(\zeta_i(x))), & j = m_i - 1, x \in U(\bar{K}_i^0). \end{cases}$$



Тогда  $\bar{f}_K$  имеет в  $U(\bar{K}_i)$  две периодические орбиты периода  $m_i$ : стока  $\omega_i = \zeta_i^{-1}(Q)$  и седла  $\sigma_i = \zeta_i^{-1}(P)$  – обе гиперболические (Рис. 5.3).



**Рис. 5.3.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $\bar{f}_K$   
**Fig. 5.3.** Phase portrait of the diffeomorphism  $\bar{f}_K$

Далее спроецируем динамику на 3-сферу. Обозначим через  $N(0,0,0,1)$  северный полюс сферы  $S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : \|x\| = 1\}$ . Для каждой точки  $x \in (S^3 \setminus \{N\})$  существует единственная прямая, проходящая через  $N$  и  $x$  в  $\mathbb{R}^4$ , и эта прямая пересекает  $\mathbb{R}^3$  в единственной точке  $\vartheta_+(x)$ . Стереографическая проекция точки  $x$  и есть точка  $\vartheta_+(x)$ . Несложно проверить, что

$$\vartheta_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right).$$

Таким образом, стереографическая проекция  $\vartheta_+ : S^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  – диффеоморфизм. По построению диффеоморфизм  $\bar{f}_K$  совпадает с  $h$  в некоторой окрестности точки  $O$  и бесконечной точки, следовательно, он индуцирует на  $S^3$  диффеоморфизм Морса-Смейла

$$f_K(x) = \begin{cases} \vartheta_+^{-1}(\bar{f}_K(\vartheta_+(x))), & x \neq N; \\ N, & x = N. \end{cases}$$

Непосредственно из построения следует, что диффеоморфизм  $f_K$  принадлежит множеству  $G$ , назовем такие диффеоморфизмы *модельными* и из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

**С л е д с т в и е 5.1.**

- Любой диффеоморфизм  $f \in G$  топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму  $f_{\mathcal{K}}$ .
- Модельные диффеоморфизмы  $f_{\mathcal{K}}, f_{\mathcal{K}'}$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда зацепления  $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$  эквивалентны.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 21-11-00010), кроме построения квази-энергетической функции, которое поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ (договор 075-15-2022-1101).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Duke Mathematical Journal. 2019. Vol. 168, no. 13. pp. 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
2. Bonatti C., Grines V. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$  // Journal of Dynamical and Control Systems. 2000. Vol. 6, no. 4. pp. 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. Pochinka O., Talanova E., Shubin D. Knot as a complete invariant of a Morse-Smale 3-diffeomorphism with four fixed points : arXiv preprint. 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.04815>
4. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no 6. pp. 747–817.
5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Починка О. В. Классификация систем Морса-Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1. С. 41–116. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9855>
6. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., Pochinka O. V. Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2010. Vol. 271, no 1. pp. 103–124. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543810040097>
7. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Switzerland: Springer, 2016. 295 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>
8. Rolfsen D. Knots and links. Vancouver: AMS Chelsea Pub., 2003. 439 p.

*Поступила 05.12.2022; доработана после рецензирования 10.01.2023;  
принята к публикации 15.02.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, **168**:13 (2019), 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
2. C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ ”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. O. Pochinka, E. Talanova, D. Shubin, “Knot as a complete invariant of a Morse-Smale 3-diffeomorphism with four fixed points : arXiv preprint”, 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.04815>
4. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
5. V. Grines, E. Gurevich, E. Zhuzhoma, O. Pochinka, “Classification of Morse-Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Mathematical Surveys*, **74**:1 (2019), 37–110. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM9855>
6. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **271**:1 (2010), 103–124. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543810040097>
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3>, 295 p.
8. D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Pub., Vancouver, 2003, 439 p.

*Submitted 05.12.2022; Revised 10.01.2023; Accepted 15.02.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.542-553  
*Original article*

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 45K05

## Exact Solutions of One Nonlinear Countable-Dimensional System of Integro-Differential Equations

A. E. Rassadin

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In the present paper, a nonlinear countable-dimensional system of integro-differential equations is investigated, whose vector of unknowns is a countable set of functions of two variables. These variables are interpreted as spatial coordinate and time. The nonlinearity of this system is constructed from two simultaneous convolutions: first convolution is in the sense of functional analysis and the second one is in the sense of linear space of double-sided sequences. The initial condition for this system is a double-sided sequence of functions of one variable defined on the entire real axis. The system itself can be written as a single abstract equation in the linear space of double-sided sequences. As the system may be resolved with respect to the time derivative, it may be presented as a dynamical system. The solution of this abstract equation can be interpreted as an approximation of the solution of a nonlinear integro-differential equation, whose unknown function depends not only on time, but also on two spatial variables. General representation for exact solution of system under study is obtained in the paper. Also two kinds of particular examples of exact solutions are presented. The first demonstrates oscillatory spatio-temporal behavior, and the second one shows monotone in time behavior. In the paper typical graphs of the first components of these solutions are plotted. Moreover, it is demonstrated that using some procedure one can generate countable set of new exact system's solutions from previously found solutions. From radio engineering point of view this procedure just coincides with procedure of upsampling in digital signal processing.

**Keywords:** Cauchy problem, generating function, Laurent expansion, Fourier transform, Bessel functions of the first kind, modified Bessel functions

**For citation:** A. E. Rassadin. Exact Solutions of One Nonlinear Countable-Dimensional System of Integro-Differential Equations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 542–553. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.542-553>

*About the author:*

**Alexander E. Rassadin**, Post-graduate student, National Research University — Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)

© A. E. Rassadin



УДК 517.968.74

## Точные решения одной нелинейной счётномерной системы интегро-дифференциальных уравнений

А. Э. Рассадин

*Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В представленной статье исследуется нелинейная счётномерная система интегро-дифференциальных уравнений, вектором неизвестных у которой является счётное множество функций двух переменных. Эти переменные интерпретируются как пространственная координата и время. Нелинейность рассматриваемой системы сконструирована из двух одновременных свёрток, а именно, из свёртки в смысле функционального анализа и из свёртки в смысле линейного пространства двусторонних последовательностей. Начальное условие для этой системы является двусторонней последовательностью функций одного переменного, определённых на всей действительной оси. Сама система может быть записана в виде одного абстрактного уравнения в линейном пространстве двусторонних последовательностей, разрешённого относительно производной по времени, то есть как динамическая система. Решение этого абстрактного уравнения можно трактовать как аппроксимацию решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения, неизвестная функция которого зависит не только от времени, но и от двух пространственных переменных. В работе найдено общее представление точного решения исследуемой системы. Также даны два типа конкретных примеров точных решений этой системы. Первый из них демонстрирует пространственно-временное поведение колебательного характера, а второй тип решений ведёт себя во времени монотонно. В статье приведены типичные графики первых компонент этих решений. Более того, показано, что из этих точных решений в рамках некоторой процедуры можно сгенерировать счётное множество новых точных решений рассматриваемой системы. С точки зрения радиотехники эта процедура совпадает с процедурой повышения частоты дискретизации в цифровой обработке сигналов.

**Ключевые слова:** задача Коши, производящая функция, ряд Лорана, преобразование Фурье, функции Бесселя первого рода, модифицированные функции Бесселя

**Для цитирования:** Рассадин А. Э. Точные решения одной нелинейной счётномерной системы интегро-дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 542-553. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.542-553>

*Об авторе:*

**Рассадин Александр Эдуардович**, аспирант, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)

### 1. Introduction

Integro-differential equations is known often to arise in physical kinetics [1], hydrodynamics [2], viscoelasticity [3], biology [4] etc. Currently, the theory of solving both

nonlinear integro-differential equations and their systems is quite developed (see [5] and references therein). However, in all examples of such systems in this book, the number of unknown functions is a finite one, because of theory of systems of nonlinear integro-differential equations with denumerable set of unknown functions deals only with some quite abstract theorems [6], [7]. On the other hand it is obvious that presentation of a number of exact solutions of some nonlinear countable-dimensional systems of integro-differential equations stimulates the development of the theory of these systems.

In this article the following nonlinear countable-dimensional system of integro-differential equations is under consideration:

$$\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x - \xi, t) u_{n-k}(\xi, t) d\xi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

where  $\{u_n(x, t)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  is denumerable set of unknown functions.

System (1.1) is provided by the next denumerable set of initial conditions:

$$u_n(x, 0) = u_n^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

In this work countable set of exact solutions  $\{u_n(x, t)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) has been constructed by means of technique of generating functions.

The rest of the article is organized as follows: in section 2 the procedure of construction of general representation of exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) has been described. Section 3 deals with concrete examples of exact solutions of input nonlinear countable-dimensional system of integro-differential equations. Final section contains discussion of obtained results and of perspectives of further investigations.

## 2. General solution of the system

For the Cauchy problem (1.1) – (1.2) the following statement is valid.

**Theorem 2.1.** *General representation of exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) is equal to:*

$$u_n(x, t) = \oint_{C_\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}^0(z; k)}{1 + t \tilde{U}^0(z; k)} \frac{\exp(i k x)}{z^{n+1}} \frac{dk}{2\pi} \frac{dz}{2\pi i} \tag{2.1}$$

where

$$\tilde{U}^0(z; k) = \int_{-\infty}^{+\infty} U^0(z; x) \exp(-i k x) dx \tag{2.2}$$

is the Fourier transform from the generating function of its initial condition:

$$U^0(z; x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^0(x) z^n, \tag{2.3}$$

integration along the circle  $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$  being counter clockwise.

First of all let us introduce for solution  $\{u_n(x, t)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  of system (1.1) the generating function:

$$U(z; x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x, t) z^n. \tag{2.4}$$

Using definition (2.4) it is easy to find that this Cauchy problem can be rewritten as follows:

$$\frac{\partial U(z; x, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} U(z; x - \xi, t) U(z; \xi, t) d\xi = 0, \quad U(z; x, 0) = U^0(z; x). \tag{2.5}$$

To solve the Cauchy problem (2.5) let one consider the Fourier transform of the generating function (2.4):

$$\tilde{U}(z; k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(z; x, t) \exp(-i k x) dx. \tag{2.6}$$

Further it is obvious that for the new unknown function (2.6) the Cauchy problem (2.5) is reduced to the next one:

$$\frac{\partial \tilde{U}(z; k, t)}{\partial t} + \tilde{U}^2(z; k, t) = 0, \quad \tilde{U}(z; k, 0) = \tilde{U}^0(z; k). \tag{2.7}$$

Exact solution of the Cauchy problem (2.7) is equal to:

$$\tilde{U}(z; k, t) = \frac{\tilde{U}^0(z; k)}{1 + t \tilde{U}^0(z; k)}, \tag{2.8}$$

hence one can determine spatiotemporal evolution of the generating function (2.4) from formula (2.8) by means of the inverse Fourier transform:

$$U(z; x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}^0(z; k)}{1 + t \tilde{U}^0(z; k)} \exp(i k x) \frac{dk}{2\pi}. \tag{2.9}$$

At last calculating coefficients of the Laurent series from expression (2.9) one can establish the statement of the theorem.

### 3. Examples of exact solutions of the system

In practice instead of application of formula (2.1) it is more suitable to derive the Laurent expansion (2.4) and to extract exact solution  $\{u_n(x, t)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  of the input Cauchy problem (1.1) – (1.2) from formula (2.9) straightforwardly. Two examples of such tricks are presented below.

#### 3.1. Exact solution with oscillatory behavior

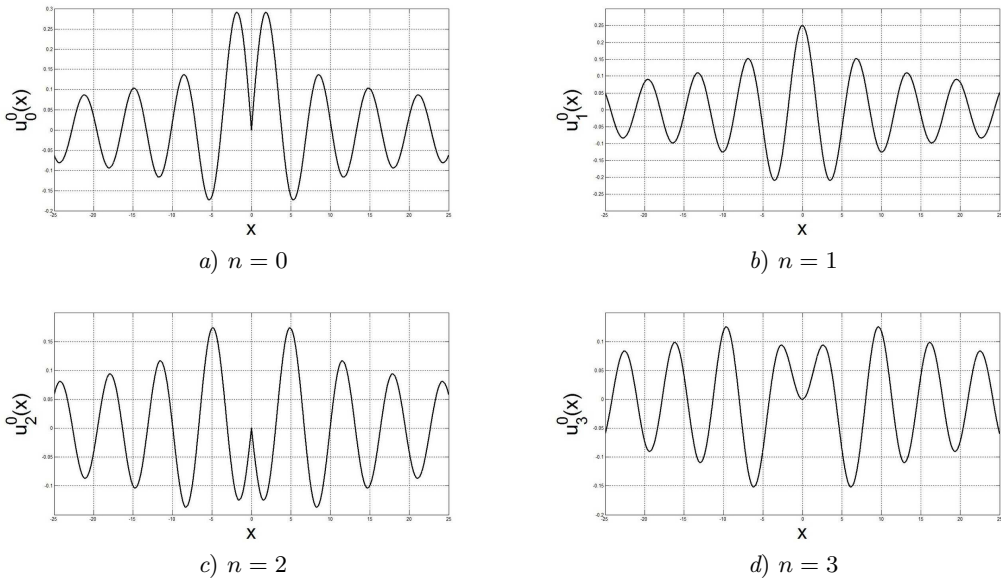
Let one consider the following vector  $\{u_n^0(x)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  of initial conditions:

$$u_n^0(x) = (-1)^n \frac{A_0}{4 a_0} \left[ J_{n+1} \left( \frac{|x|}{a_0} \right) - J_{n-1} \left( \frac{|x|}{a_0} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$u_0^0(x) = \frac{A_0}{2 a_0} J_1 \left( \frac{|x|}{a_0} \right), \quad u_{-n}^0(x) = (-1)^n u_n^0(x), \tag{3.1}$$

where  $J_n(\zeta)$  are Bessel functions of the first kind and  $A_0, a_0 > 0$ .

Typical graphs of the first functions (3.1) are presented on Fig. 3.1.



**Рис. 3.1.** Графики первых функций  $u_n^0(x)$  при  $A_0 = 1$  и  $a_0 = 1$  (колебательный режим): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; д)  $n = 3$   
**Fig. 3.1.** Graphs of the first functions  $u_n^0(x)$  under  $A_0 = 1$  and  $a_0 = 1$  (oscillatory behavior): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; д)  $n = 3$

The next theorem proves to be true.

**Theorem 3.1.** *Exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) with initial conditions (3.1) is equal to ( $n \in \mathbb{N}$ ):*

$$u_n(x, t) = \frac{(-1)^n A_0}{4 a_0 \sqrt{1 + A_0 t}} \left[ J_{n+1} \left( \frac{\sqrt{1 + A_0 t} |x|}{a_0} \right) - J_{n-1} \left( \frac{\sqrt{1 + A_0 t} |x|}{a_0} \right) \right],$$

$$u_0(x, t) = \frac{A_0}{2 a_0 \sqrt{1 + A_0 t}} J_1 \left( \frac{\sqrt{1 + A_0 t} |x|}{a_0} \right), \quad u_{-n}(x, t) = (-1)^n u_n(x, t). \quad (3.2)$$

Substituting expressions (3.1) into the definition (2.3) of the generating function of initial condition for the Cauchy problem (1.1) – (1.2) and using the well-known Laurent series for a generating function of Bessel functions with integer order [8]:

$$\exp \left[ \frac{\zeta}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\zeta) z^n, \quad (3.3)$$

one can find that:

$$U^0(z; x) = \frac{A_0}{4 a_0} \left( z - \frac{1}{z} \right) \exp \left[ -\frac{|x|}{2 a_0} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right]. \quad (3.4)$$

In accordance with formula (2.2) the Fourier transform of function (3.4) is equal to:

$$\tilde{U}^0(z; k) = A_0 \left[ 1 + k^2 \left( \frac{2 a_0 z}{z^2 - 1} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.5)$$



Inserting expression (3.5) into formula (2.8) it is easy to calculate that temporal evolution of the Fourier image of the generating function (2.4) is described as follows:

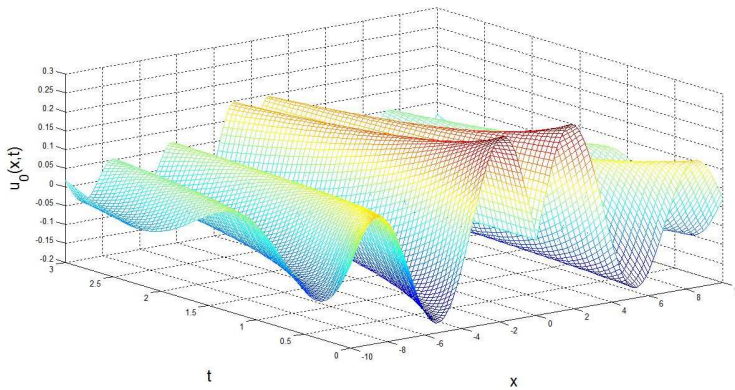
$$\tilde{U}(z; k, t) = A_0 \left[ 1 + A_0 t + k^2 \left( \frac{2 a_0 z}{z^2 - 1} \right)^2 \right]^{-1}. \tag{3.6}$$

Further the inverse Fourier transform of function (3.6) represents temporal evolution of the generating function (2.4) itself:

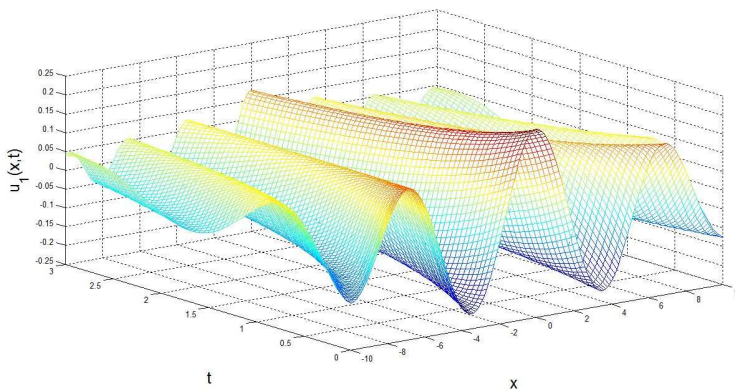
$$U(z; x, t) = \frac{A_0}{4 a_0 \sqrt{1 + A_0 t}} \left( z - \frac{1}{z} \right) \exp \left[ -\frac{\sqrt{1 + A_0 t} |x|}{2 a_0} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \tag{3.7}$$

At last applying the Laurent expansion (3.3) to expression (3.7) one can obtain the statement of the theorem.

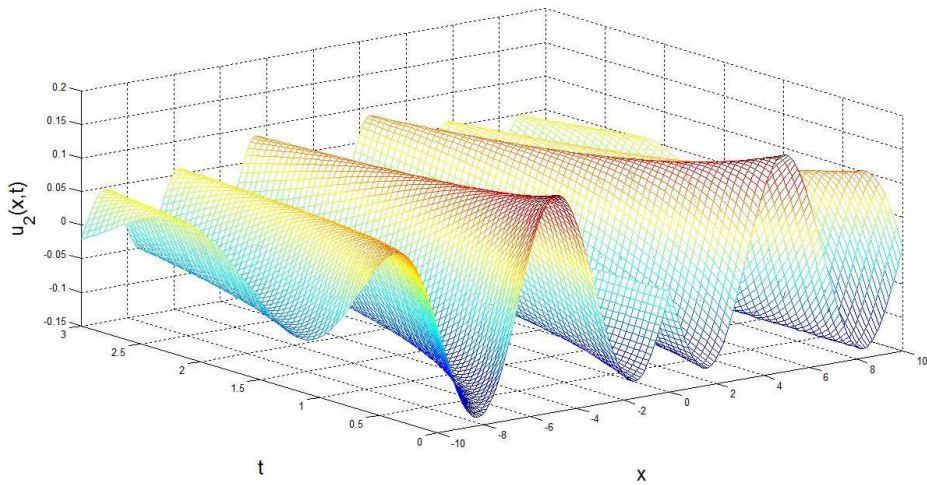
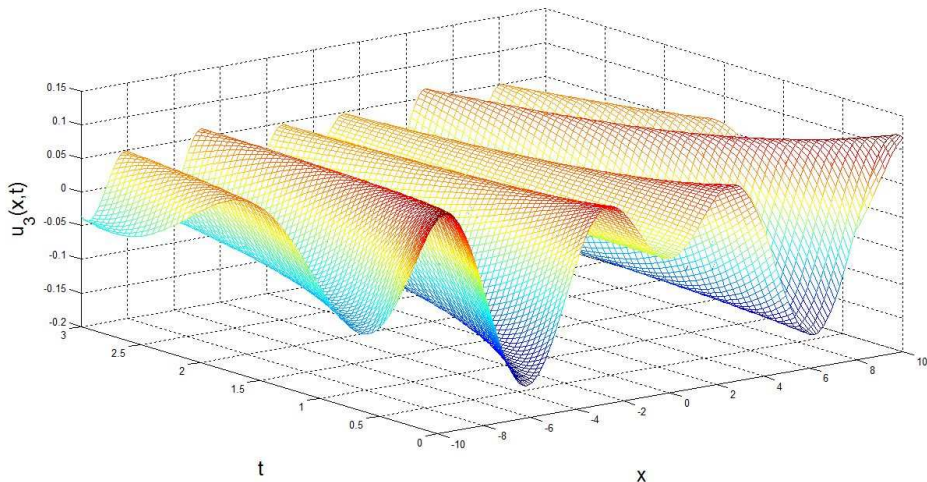
Typical graphs of the first functions (3.2) are shown on Fig. 3.2.



a)  $n = 0$



b)  $n = 1$

c)  $n = 2$ d)  $n = 3$ 

**Рис. 3.2.** Пространственно-временная эволюция первых функций  $u_n(x, t)$  при  $A_0 = 1$  и  $a_0 = 1$  (колебательный режим): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; г)  $n = 3$

**Fig 3.2.** Spatiotemporal evolution of the first functions  $u_n(x, t)$  under  $A_0 = 1$  and  $a_0 = 1$  (oscillatory behavior): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; г)  $n = 3$

### 3.2. Exact solution with monotone behavior

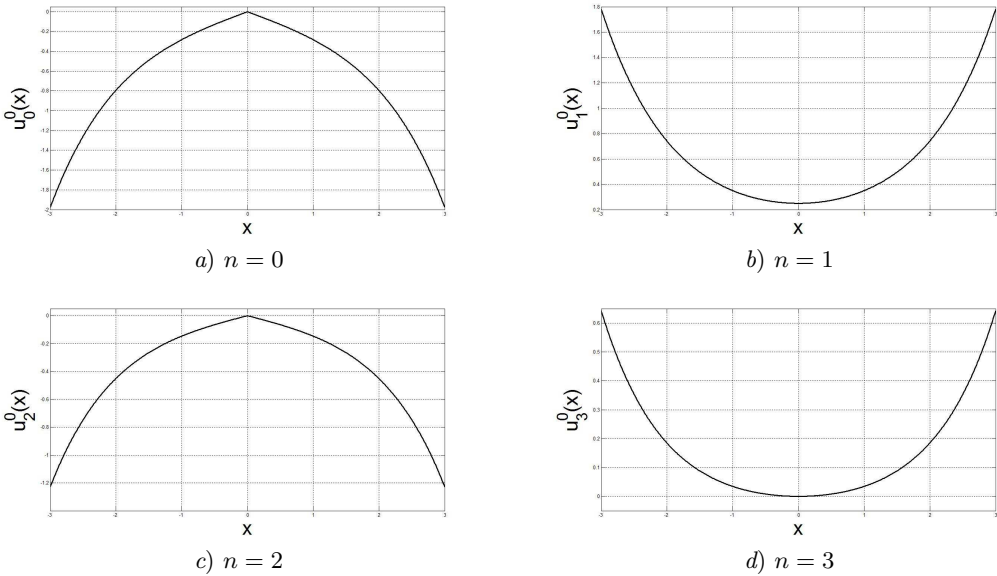
Let us consider the following vector  $\{u_n^0(x)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  of initial conditions:

$$u_n^0(x) = (-1)^{n+1} \frac{A_0}{4a_0} \left[ I_{n+1} \left( \frac{|x|}{a_0} \right) + I_{n-1} \left( \frac{|x|}{a_0} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$u_0^0(x) = -\frac{A_0}{2a_0} I_1\left(\frac{|x|}{a_0}\right), \quad u_{-n}^0(x) = u_n^0(x), \quad (3.8)$$

where  $I_n(\zeta)$  are modified Bessel functions and  $A_0, a_0 > 0$ .

Typical graphs of the first functions (3.8) are presented on Fig. 3.3.



**Рис. 3.3.** Графики первых функций  $u_n^0(x)$  при  $A_0 = 1$  и  $a_0 = 1$  (монотонный режим): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; д)  $n = 3$   
**Fig 3.3.** Graphs of the first functions  $u_n^0(x)$  under  $A_0 = 1$  and  $a_0 = 1$  (monotone behavior): а)  $n = 0$ ; б)  $n = 1$ ; в)  $n = 2$ ; д)  $n = 3$

The following statement is valid.

**Theorem 3.2.** *Exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) with initial conditions (3.8) is equal to ( $n \in \mathbb{N}$ ):*

$$u_n(x, t) = \frac{(-1)^{n+1}A_0}{4a_0\sqrt{1+A_0t}} \left[ I_{n+1}\left(\frac{\sqrt{1+A_0t}|x|}{a_0}\right) + I_{n-1}\left(\frac{\sqrt{1+A_0t}|x|}{a_0}\right) \right],$$

$$u_0(x, t) = -\frac{A_0}{2a_0\sqrt{1+A_0t}} I_1\left(\frac{\sqrt{1+A_0t}|x|}{a_0}\right), \quad u_{-n}(x, t) = u_n(x, t). \quad (3.9)$$

Completely analogous to the proof of the previous theorem substitution of expressions (3.9) into the definition (2.3) of the generating function of initial condition for the input Cauchy problem and usage of the well-known Laurent series for a generating function of modified Bessel functions with integer order [8]:

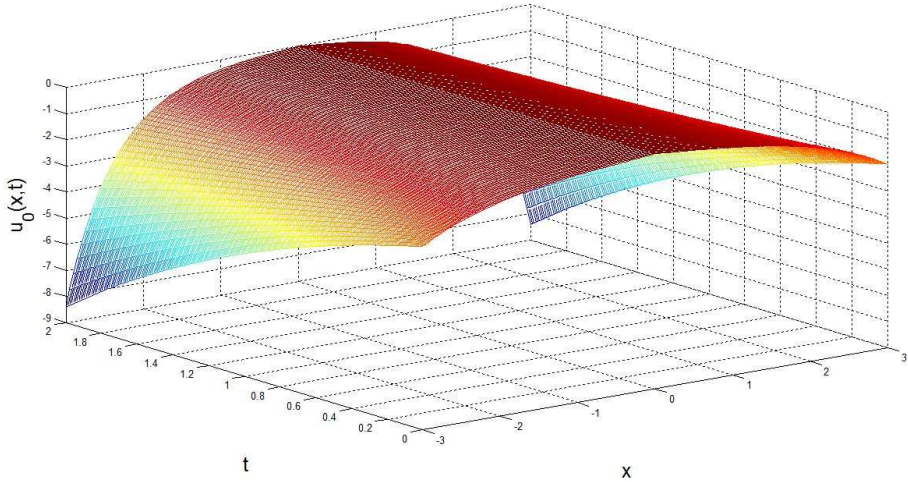
$$\exp\left[\frac{\zeta}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\zeta) z^n \quad (3.10)$$

brings us to the next formula for the generating function (2.4):

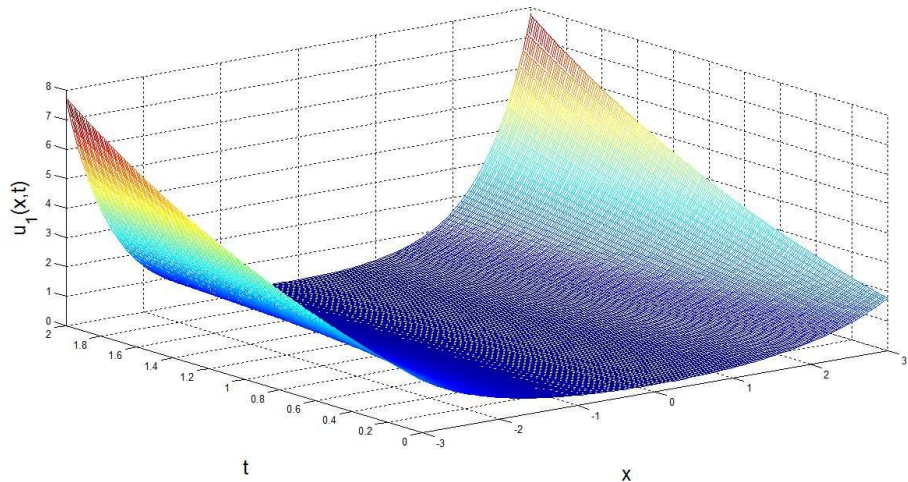
$$U(z; x, t) = \frac{A_0}{4 a_0 \sqrt{1 + A_0 t}} \left( z + \frac{1}{z} \right) \exp \left[ -\frac{\sqrt{1 + A_0 t} |x|}{2 a_0} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right] \quad (3.11)$$

At last application of the Laurent expansion (3.10) to the expression (3.11) gives one the statement of the theorem.

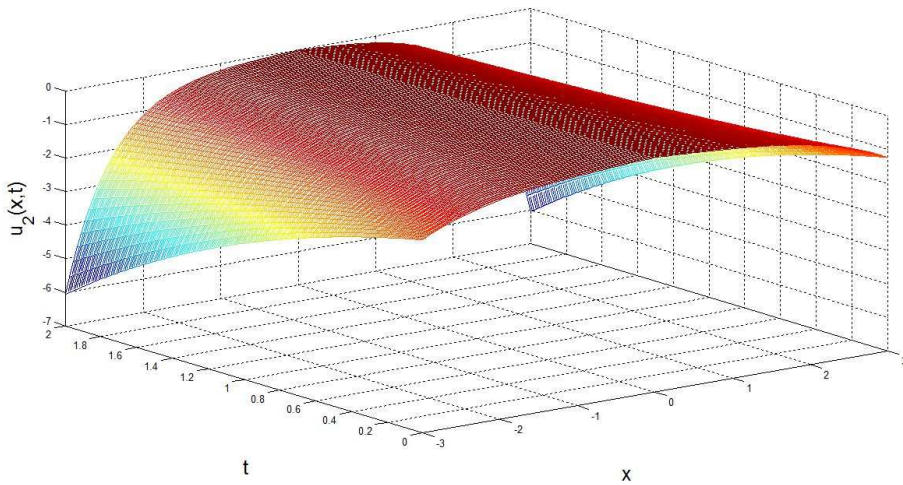
Typical graphs of the first functions (3.9) are shown on Fig. 3.4.



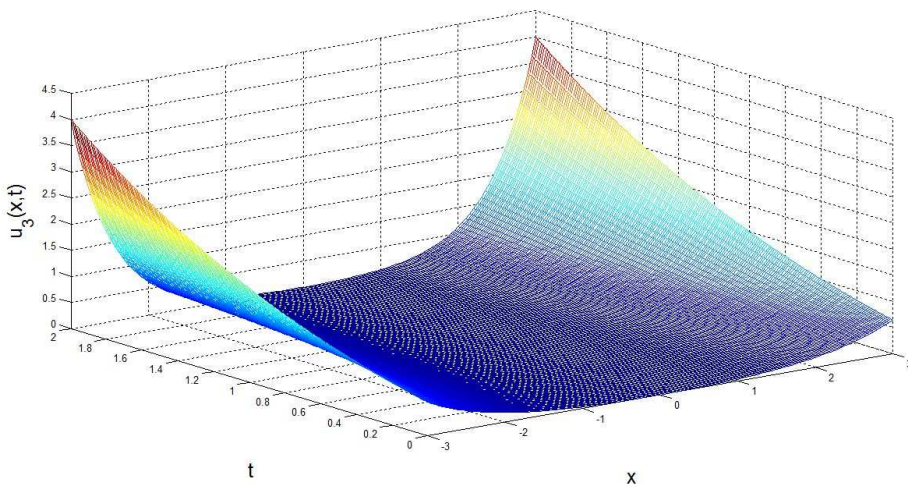
a)  $n = 0$



b)  $n = 1$



c)  $n = 2$



d)  $n = 3$

**Рис. 3.4.** Пространственно-временная эволюция первых функций  $u_n(x, t)$  при  $A_0 = 1$  и  $a_0 = 1$  (монотонный режим): a)  $n = 0$ ; b)  $n = 1$ ; c)  $n = 2$ ; d)  $n = 3$

**Fig 3.4.** Spatiotemporal evolution of the first functions  $u_n(x, t)$  under  $A_0 = 1$  and  $a_0 = 1$  (monotone behavior): a)  $n = 0$ ; b)  $n = 1$ ; c)  $n = 2$ ; d)  $n = 3$

#### 4. Conclusion

In this article general form of exact solution of nonlinear countable-dimensional system of integro-differential equations (1.1) has been obtained. This result has been supplemented by construction of exact solutions of this system with both oscillatory behavior (formulas (3.2)) and monotone behavior (formulas (3.9)) corresponding to special choices of initial

conditions (1.2).

Further, one can do the following nontrivial observation, namely, in the Cauchy problem (2.5) variable  $z$  is a free parameter. It means that if generating function  $U(z; x, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) with initial condition representing by generating function  $U^0(z; x)$  then for any  $p = 2, 3, 4, \dots$  generating function  $U(z^p; x, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) with initial condition representing by generating function  $U^0(z^p; x)$ .

In other words the Laurent expansion for transformed generating function  $U(z^p; x, t)$  gives one exact solution  $\{\hat{u}_m(x, t)\}_{m=-\infty}^{m=+\infty}$  of the Cauchy problem (1.1) – (1.2) too as follows:

$$\hat{u}_{np}(x, t) = u_n(x, t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

where  $u_n(x, t)$  are functions (3.2) or (3.9), and place between components of double-sided vector  $\{\hat{u}_m(x, t)\}_{m=-\infty}^{m=+\infty}$  with numbers  $np$  and  $np+p$  are filled by zeros. The initial condition  $\{\hat{u}_m^0(x)\}_{m=-\infty}^{m=+\infty}$  in this case has the same structure as the formulas (4.1).

Thus, in fact exact solutions (3.2) and (3.9) generates countable set of exact solutions of input nonlinear countable-dimensional system of integro-differential equations (1.1).

At last let us consider the following nonlinear integro-differential equation:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - \xi, y - \eta, t) u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0, \quad (4.2)$$

provided by initial condition:

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.3)$$

It is easy to see that the Cauchy problem (1.1) – (1.2) arises from the Cauchy problem (4.2) – (4.3). Indeed, quantization of plain  $\mathbb{R}^2$  in  $y$ -direction with step  $\delta$  generates from function  $u(x, y, t)$  countable set of functions  $u_n(x, t) = u(x, n\delta, t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . And after that change of integral in equation (4.2) by corresponding to it integral sum and further scaling  $\delta u_n \rightarrow u_n$  ought to give rise to the input system (1.1) exactly. Hence, results of this article may be applied to the investigation of approximation of solutions of equation (4.2).

## REFERENCES

1. C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications. Applied Mathematical Sciences. Volume 67*, Springer-Verlag, New York, 1988, xii+455 p.
2. D. Benney J., “Some properties of long nonlinear waves”, *Studies in applied mathematics*, **52**:1 (1973), 45–50.
3. N. Rautian A., “Correct solvability and exponential stability for solutions of Volterra integro-differential equations”, *Doklady mathematics*, **104**:2 (2021), 273–276.
4. S. Yüzbaşı, M. Sezer, “An exponential approach for the system of nonlinear delay integro-differential equations describing biological species living together”, *Neural computing and applications*, **27** (2016), 769–779.
5. V. Lakshmikantham, M. Rama Mohana Rao, *Theory of integro-differential equations*, CRC Press, USA, 1995, 384 p.

6. K. Balachandran, J. Dauer P., “Controllability of Sobolev-type semilinear integrodifferential systems in Banach spaces”, *Journal of mathematical analysis and applications*, **217**:2 (1998), 335–348.
7. K. Balachandran, D. Park G., Y. Kwun C., “Nonlinear integrodifferential equation of Sobolev type with nonlocal conditions in Banach spaces”, *Communications of the Korean Mathematical Society*, **14**:1 (1999), 223–231.
8. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher transcendental functions. Volume 2*, Mc Graw-Hill Book Company, USA, 1953, 414 p.

*Submitted 10.11.2022; Revised 19.12.2022; Accepted 25.02.2023*

*The author has read and approved the final manuscript.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир. 1978. 496 с.
2. Benney D.J. Some properties of long nonlinear waves // *Studies in applied mathematics*. 1973. Vol. 52, issue 1. pp. 45–50.
3. Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и экспоненциальная устойчивость решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. С. 62–66.
4. Yüzbasi, S., Sezer M. An exponential approach for the system of nonlinear delay integro-differential equations describing biological species living together // *Neural computing and applications*. 2016. Vol. 27. pp. 769–779.
5. Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M. *Theory of integro-differential equations*. CRC Press, USA. 1995. 384 p.
6. Balachandran, K., Dauer J.P. Controllability of Sobolev-type semilinear integrodifferential systems in Banach spaces // *Journal of mathematical analysis and applications*. 1998. Vol. 217, issue 2. pp. 335–348.
7. Balachandran, K., Park D.G., Kwun Y.C. Nonlinear integrodifferential equation of Sobolev type with nonlocal conditions in Banach spaces // *Communications of the Korean Mathematical Society*. 1999. Vol. 14, issue 1. pp. 223–231.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. 1974. 296 с.

*Поступила 10.11.2022; доработана после рецензирования 19.12.2022; принята к публикации 25.02.2023*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.554-564

*Оригинальная статья*

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

## Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов

**Д. В. Тарасов***ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Целью работы является построение вычислительной схемы метода конечных элементов применительно к интегральным уравнениям, описывающим распределения токов в тонких проволочных антеннах. В частности, для линейных антенн малой толщины задача может быть сведена к интегральному уравнению Галлена. В качестве метода исследования предпочтение отдано методу конечных элементов, т. к. он обладает достаточно большой гибкостью в плане выбора базисных функций и подборе сетки узлов. Кроме того, данный метод является мощным и эффективным средством решения задач математической физики, который позволяет достаточно точно описать сложные криволинейные границы области определения решения и краевые условия. В работе строится численный метод решения интегрального уравнения Галлена с использованием метода конечных элементов. Согласно предложенной вычислительной схеме, была выстроена программная реализация и проведен сравнительный анализ результатов. Данный подход в целом показал невысокую точность, что, возможно, обусловлено и принадлежностью данной задачи к классу некорректных и в целом вопросом определения границ применимости уравнения Галлена.

**Ключевые слова:** уравнение Галлена, интегральное уравнение, базисная функция, метод Галеркина, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

*Об авторах:*

**Тарасов Дмитрий Викторович**, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9217-9228>, [tarasovdv@mail.ru](mailto:tarasovdv@mail.ru)

© Д. В. Тарасов





MSC2020 65R20

# Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method

D. V. Tarasov

*Penza State University (Penza, Russian Federation)*

**Abstract.** The aim of the work is to construct a computational scheme of the finite element method in relation to integral equations describing current distributions in thin wire antennas. In particular, for linear antennas of small thickness, the problem can be reduced to the integral Gallen equation. As a research method, preference is given to the finite element method, since it has quite a lot of flexibility in terms of choosing basis functions and selecting a grid of nodes. In addition, this method is a powerful and effective means of solving mathematical physics' problems, which makes it possible to accurately describe complex curved boundaries of the solution domain and boundary conditions. The paper builds a numerical method for solving the integral Gallen equation using the finite element approach. According to the proposed computational scheme, a software implementation was built and a comparative analysis of the results was carried out. This approach as a whole showed low accuracy, which is probably due to the fact that this problem belongs to the class of incorrect ones and, in general, is due to the issue of determining the limits of applicability of the Gallen equation.

**Keywords:** Gallen equation, integral equation, basis function, Galerkin method, finite element method

**For citation:** D. V. Tarasov. Solution of integral equations of linear antenna theory by finite element method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>

*About the authors:*

**Dmitriy V. Tarasov**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Cand.Sci. (Technical Science), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9217-9228>, [tarasovdv@mail.ru](mailto:tarasovdv@mail.ru)

## 1. Введение

Для оценки качества антенн и сравнения их между собой используют характеристики (определяющие функциональную зависимость) и параметры (числовые величины). Поскольку антенны обладают способностью преобразовывать энергию направляемых электромагнитных волн в энергию радиоволн (или наоборот), то существует ряд показателей, которые по своей сути для них являются энергетическими параметрами [1].

В теории линейных антенн для расчета основных характеристик излучения (диаграммы направленности, коэффициента направленного действия и прочих) зачастую требуется решить краевую задачу для проволочных антенн. Подобные задачи нередко описываются интегральными уравнениями, и их строгое аналитическое решение или невозможно, или вызывает значительные трудности. Инженеры-радиотехники в подобных ситуациях, как правило, ограничиваются решением в первом приближении или пользуются «упрощенными» решениями [2].

В настоящее время для подобных задач исследователями активно применяются численные методы решения интегральных уравнений [3–6], аппарат сингулярных [7–8] и гиперсингулярных интегральных уравнений [9]. В данной работе будет рассматриваться подход к численному решению интегральных уравнений Галлена и Поклингтона, описывающих распределения токов в тонких проволочных антеннах, основанный на применении метода конечных элементов. Таким образом, вопросы, касающиеся построения вычислительных методов решения внутренней задачи, носят актуальный характер.

## 2. Интегральные уравнения Поклингтона и Галлена

Приемная антенна является металлической конструкцией и, прежде всего, необходимо рассмотреть электрические процессы в проводнике, находящемся в переменном электромагнитном поле.

Рассмотрим цилиндрический проводник длины  $2l$ , питаемый в точках разрыва (его середине) генератором высокой частоты. Будем предполагать, что радиус  $a$  проводника мал по сравнению с его длиной и длиной  $\lambda$  электромагнитной волны в свободном пространстве (Рис. 2.1).

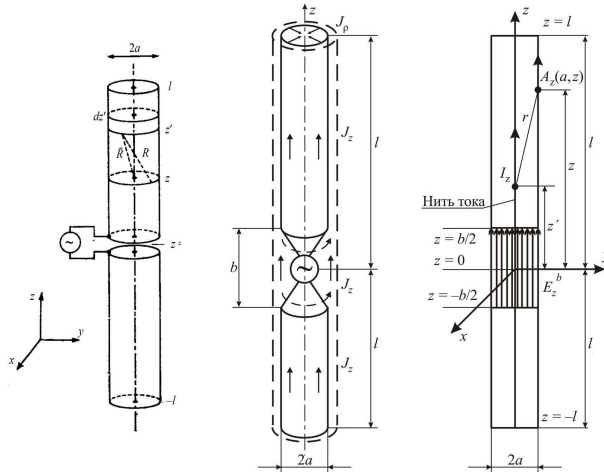


Рис. 2.1. Геометрия проволочной антенны

Fig. 2.1. Geometry of the wire antenna

Вследствие осевой симметрии возбуждения линейной антенны будем считать, что электрический ток на боковой поверхности проводника имеет только продольную составляющую  $\vec{J}_z$ , а в торцевых поверхностях — радиальные составляющие  $\vec{J}_\rho$ . Таким образом, поле излучения не зависит от  $\varphi$  (в цилиндрической системе координат  $(z, \rho, \varphi)$ ) и определяется составляющими  $\vec{E}_z, \vec{E}_\rho, \vec{H}_\varphi$ . Кроме того, краевыми эффектами можно пренебречь и, предполагая проводимость идеальной, считать, что все токи протекают по цилиндрической поверхности. Векторный потенциал  $\vec{A}$ , обусловленный током, протекающим вдоль образующей цилиндра, направлен вдоль оси  $z$  [9].

Используя решение уравнений Максвелла в виде запаздывающих потенциалов, по-

лучим хорошее приближение для  $A_z$ :

$$A_z(z) = \mu_0 \int_{-l}^l \frac{I(z')e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}} dz'$$

где  $k = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$  — волновое число;  $\bar{R} = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ .

Сформулированные предположения математической модели тонкого электрического вибратора приводят к уравнению Поклингтона, связывающему векторный потенциал  $A_z$  распределения токов  $I(z)$  и касательную составляющую вектора напряженности электрического поля  $E_z(z)$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = \begin{cases} 0, & \text{при } |z| > b/2, \\ i\omega\varepsilon E_z(z), & \text{при } |z| \leq b/2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $I(z) = 2\pi a J_z(z)$ ;  $b$  — величина зазора на боковой поверхности вибратора, на котором определена возбуждающая функция, представленная касательной составляющей вектора напряженности электрического поля;  $G(z - z') = \frac{e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}}$  [6].

В простейшем случае для линейных антенн малой толщины задача (1) может быть сведена к интегральному уравнению Галлена [9]:

$$\int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = A \cos kz + B \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|. \quad (2.2)$$

Константы  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора;  $W = \frac{k}{\omega\varepsilon}$  — волновое сопротивление;  $V = -E_z b$ .

Строгое аналитическое решение уравнения Галлена не известно, и, как мы уже упоминали во введении, на практике для инженерных целей чаще всего используют упрощенное решение:

$$I(z) = \frac{i2\pi V}{2W \ln \frac{2l}{a}} \cdot \frac{\sin(l - |z|)}{\cos kl}, \quad (2.3)$$

### 3. Применение метода конечных элементов для решения уравнения Галлена

Для численного решения интегральных уравнений в радиотехнике, как правило, используется семейство методов, объединенных под общим названием «проеекционные методы». В частности, в работе [2] отдается предпочтение методу моментов, в котором важную роль имеет выбор собственных, или базисных, функций. Согласно работе П. Сильвестера и Р. Феррари, можно использовать и метод конечных элементов [10]. Например, численный алгоритм для решения уравнения Галлена методом конечных элементов может быть выстроен по представленной нами ниже схеме.

Рассмотрим интегральное уравнение (2.2), но пока в более общем виде:

$$\int_{-l}^l I(z')G(z - z') dz' = f(z), \quad -l \leq z \leq l, \quad (3.1)$$

где  $I(z')$  – искомая функция;  $G(z - z')$  – ядро интегрального уравнения;  $f(x)$  – известная функция.

Отрезок интегрирования длиной  $2l$  разобьем на конечные элементы узлами  $z_1, z_2, \dots, z_M$ . Для простоты вычислений ограничимся линейным порядком аппроксимации и определим одномерные симплекс-элементы. В каждом внутреннем узле  $z_s, s = 2, 3, \dots, M - 1$ , данной сетки определим соответствующую функцию формы (базисную функцию):

$$N_s(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{s-1}}{z_s - z_{s-1}}, & z_{s-1} \leq z \leq z_s, \\ \frac{z_{s+1} - z}{z_{s+1} - z_s}, & z_s \leq z \leq z_{s+1}, \\ 0, & z \notin [z_{s-1}, z_s]. \end{cases}$$

Для узлов с номерами 1 и  $M$  функции формы определим следующим образом

$$N_1(z) = \begin{cases} \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 0, & z \notin [z_1, z_2]. \end{cases} \quad N_M(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{M-1}}{z_M - z_{M-1}}, & z_{M-1} \leq z \leq z_M, \\ 0, & z \notin [z_{M-1}, z_M]. \end{cases}$$

Согласно методу конечных элементов [10] будем считать, что функция  $I(z')$  в пределах каждого конечного элемента  $\Delta_s = [z_s, z_{s+1}] s = 1, 2, \dots, M - 1$  представлена некоторым значением  $I_1(z'), \dots, I_{M-1}(z')$ , а вне своей подобласти каждая такая функция  $I_s(z')$  обращается в ноль. Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$\sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_s} I_s(z') G(z - z') dz' = f(z). \tag{3.2}$$

Теперь, чтобы ошибка приближения равнялась нулю в среднем, необходимо обеспечить равенство нулю интегралов, взятых от невязки с весовыми функциями  $N_\beta$ , где  $\beta$  принимает все возможные значения индексов для функций форм элементов  $\Delta_s$ . С учетом разбиения отрезка  $[-l, l]$  на конечные элементы получим

$$\sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} I_s(z') G(z - z') dz' \right) N_\beta(z) dz = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} f(z) N_\beta(z) dz. \tag{3.3}$$

Каждую функцию  $I_s(z')$  внутри своей подобласти  $\Delta_s$  представим в виде одномерного симплекс-элемента ([11, с. 31]):

$$I_s(z') = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \tag{3.4}$$

где  $[N] = [N_i N_j]$  – вектор-строка;  $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$  – вектор-строка.

Тогда, принимая во внимание соотношение (3.4) и что индекс функции  $N_\beta$  примет только пару значений для области  $\Delta_r$  (в общем виде запишем их как  $N_m$  и  $N_p$ ), соотношение (3.3) запишется в матричной форме следующий образом:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} \cdot [N_i(z') \quad N_j(z')] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} G(z - z') dz' \right) dz = \\ = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} f(z) dz. \end{aligned}$$

После выполнения действий, связанных с матричными преобразованиями, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\Phi_s (s = 1, 2, \dots, M)$ :

$$\sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left( \int_{\Delta_s} \begin{bmatrix} N_m(z)N_i(z') & N_m(z)N_j(z') \\ N_p(z)N_i(z') & N_p(z)N_j(z') \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} G(z - z')dz' \right) dz = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} y(z)dz. \tag{3.5}$$

При программной реализации численных алгоритмов, для вычисления двойных интегралов в представленной формуле (3.5), нужно учесть, что на элементе  $\Delta_s$  отличны от нуля только функции формы  $N_s$  и  $N_{s+1}$ .

Рассмотрим подробно данную ситуацию, например, для числа узлов  $M = 4$ . Полученные в этом случае значения произведений

$$\begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} \cdot [N_i(z') \quad N_j(z')] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix},$$

стоящих под знаком двойного интеграла  $\int_{\Delta_r} \int_{\Delta_s}$ , представлены в таблице 3.1.

**Таблица 3.1.** Пример для  $M = 4$

**Table 3.1.** Example for  $M = 4$

|                           | $s = 1$<br>$i = 1, j = 2$                                      | $s = 2$<br>$i = 2, j = 3$                                      | $s = 3$<br>$i = 3, j = 4$                                      |
|---------------------------|--|--|--|
| $r = 1, m = 1$<br>$p = 2$ | $N_1N_1\Phi_1 + N_1N_2\Phi_2$<br>$N_2N_1\Phi_1 + N_2N_2\Phi_2$ | $N_1N_2\Phi_2 + N_1N_3\Phi_3$<br>$N_2N_2\Phi_2 + N_2N_3\Phi_3$ | $N_1N_3\Phi_3 + N_1N_4\Phi_4$<br>$N_2N_3\Phi_3 + N_2N_4\Phi_4$ |
| $r = 2, m = 2$<br>$p = 3$ | $N_2N_1\Phi_1 + N_2N_2\Phi_2$<br>$N_3N_1\Phi_1 + N_3N_2\Phi_2$ | $N_2N_2\Phi_2 + N_2N_3\Phi_3$<br>$N_3N_2\Phi_2 + N_3N_3\Phi_3$ | $N_2N_3\Phi_3 + N_2N_4\Phi_4$<br>$N_3N_3\Phi_3 + N_3N_4\Phi_4$ |
| $r = 3, m = 3$<br>$p = 4$ | $N_3N_1\Phi_1 + N_3N_2\Phi_2$<br>$N_4N_1\Phi_1 + N_4N_2\Phi_2$ | $N_3N_2\Phi_2 + N_3N_3\Phi_3$<br>$N_4N_2\Phi_2 + N_4N_3\Phi_3$ | $N_3N_3\Phi_3 + N_3N_4\Phi_4$<br>$N_4N_3\Phi_3 + N_4N_4\Phi_4$ |

Следовательно, основная матрица аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений примет вид:

$$\begin{pmatrix} \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_1} N_1N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_{1,2}} N_1N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_{2,3}} N_1N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_3} N_1N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_1} N_2N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_{1,2}} N_2N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_{2,3}} N_2N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_{1,2}} \int_{\Delta_3} N_2N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_1} N_3N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_{1,2}} N_3N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_{2,3}} N_3N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_{2,3}} \int_{\Delta_3} N_3N_4Gdz'dz \\ \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_1} N_4N_1Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_{1,2}} N_4N_2Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_{2,3}} N_4N_3Gdz'dz & \int_{\Delta_3} \int_{\Delta_3} N_4N_4Gdz'dz \end{pmatrix}$$

Здесь для краткости записи в подынтегральном выражении каждое соотношение  $N_iN_jGdz'dz$  следует читать как  $N_i(z)N_j(z')G(z - z')dz'dz$ , где  $\Delta_{i,j} = \Delta_i \cup \Delta_j$ .

При численном вычислении интегралов, стоящих в правой части формулы (3.5), нужно действовать аналогичным образом.

### 4. Результаты численного решения

Непосредственное применение описанной вычислительной схемы (3.1)–(3.5) требует, прежде всего подробного, внимания к правой части интегрального уравнения Галлена:

$$f(z) = A \cos kz + B \sin kz - \frac{i2\pi V}{W} \sin k|z|, \text{ где } W = \frac{k}{\omega \epsilon}, V = -E_z b.$$

Здесь константы  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора и предположения о его достаточно малом радиусе  $a$  [9]. Это позволяет представить  $f(x)$  в таком виде  $f(z) = \frac{i2\pi V \sin k(l-|z|)}{W \cos kl}$ . Кроме того, в ядре  $G(z - z') = \frac{e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}}$  (где  $\bar{R} = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$ ) и решении  $I(z')$  уравнения (2.2) выделим действительную и мнимую составляющие:

$$G(z - z') = G_{Re}(z - z') + iG_{Im}(z - z') = \frac{\cos k\bar{R}}{4\pi\bar{R}} - i \frac{\sin k\bar{R}}{4\pi\bar{R}},$$

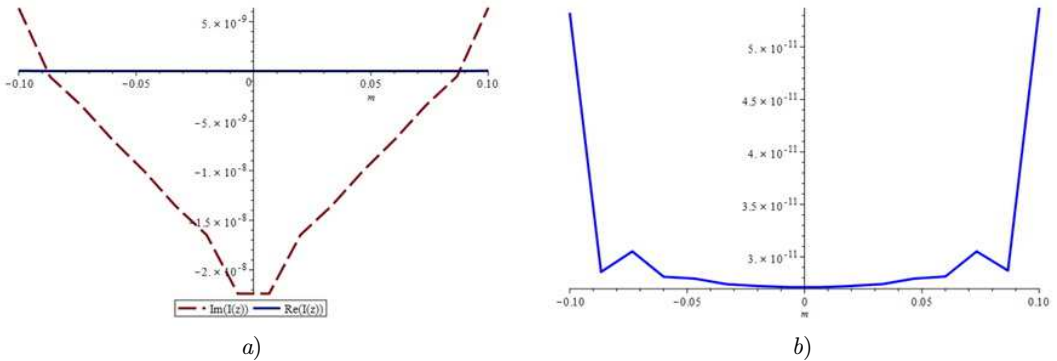
$$I_s(z') = I_{sRe}(z') + iI_{sIm}(z'),$$

получим

$$\begin{cases} \int_{-l}^l I_{Re}(z')G_{Re}(z - z')dz' - \int_{-l}^l I_{Im}(z')G_{Im}(z - z')dz' = 0, \\ \int_{-l}^l I_{Re}(z')G_{Im}(z - z')dz' + \int_{-l}^l I_{Im}(z')G_{Re}(z - z')dz' = f_{Im}(z), \end{cases} \tag{4.1}$$

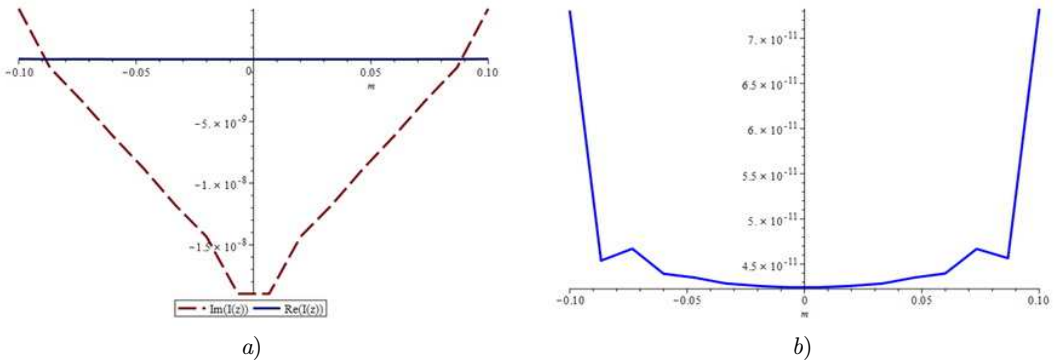
(где  $f_{Re}(z) \equiv 0$ ).

Представленная вычислительная схема (3.1)–(3.5) была применена к каждому интегралу системы (4.1) и реализована в среде разработки Visual Studio на языке программирования C/C++. Результаты моделирования представлены на рисунках 4.1 и 4.2.



**Рис. 4.1.** Поверхностная плотность тока для уравнения (2.2) при нормировке  $b/l = 1/100, a/\lambda = 1/400, l/\lambda = 1/4$ : а) действительная  $Re(I(z))$  и мнимая  $Im(I(z))$  части, б) действительная часть  $Re(I(z))$  в увеличенном масштабе

**Fig. 4.1.** The surface current density for equation (2.2) under normalization  $b/l = 1/100, a/\lambda = 1/400, l/\lambda = 1/4$ : а) the real  $Re(I(z))$  and imaginary  $Im(I(z))$  parts, б) the real part  $Re(I(z))$  on an enlarged scale



**Рис. 4.2.** Поверхностная плотность тока для уравнения (2.2) при нормировке  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/2$ : *a*) действительная  $Re(I(z))$  и мнимая  $Im(I(z))$  части, *b*) действительная часть  $Re(I(z))$  в увеличенном масштабе

**Fig. 4.2.** The surface current density for equation (2.2) under normalization  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/400$ ,  $l/\lambda = 1/2$ : *a*) the real  $Re(I(z))$  and imaginary  $Im(I(z))$  parts of the surface current density *b*) the real part  $Re(I(z))$  on an enlarged scale

Заметим, что основная матрица аппроксимирующей СЛАУ системы (4.1) имеет достаточно большое число обусловленности и нахождение обратной для нее матрицы лучше проводить с высокой точностью, поэтому решалась она с использованием математического пакета Maple.

## 5. Обсуждение и анализ полученных результатов

Даже визуальный анализ численных результатов для уравнения Галлена показывает, что на концах симметричного вибратора ток не обращается в ноль. Прежде всего, это может быть вызвано не столько аналитически неточным нахождением констант  $A$  и  $B$  в уравнении [9], а тем, что уравнение Галлена относится к классу некорректных задач. И здесь следует предельно внимательно относиться к полученным решениям и их регуляризации, а также к вопросам исследования границ применимости уравнения Галлена [9].

Представленная вычислительная схема была программно реализована для уравнения Галлена при следующих параметрах  $b/l = 1/100$ ,  $a/\lambda = 1/4$ ,  $l/\lambda = 1/4$  и  $l/\lambda = 1/2$ . Численные расчеты проводились при условии постоянства  $E_z(z)$  в зазоре  $b$  и нормировке  $f(z) = i\gamma\varepsilon E_z(z) = ia/\lambda$ . Из сравнения результатов моделирования с решением в первом приближении, а также с результатами работы [6], в которой выполнялось двухэтапное применение метода конечных элементов к интегро-дифференциальному уравнению Поклингтона (сначала решалось дифференциальное, а затем и интегральное уравнение), можно сделать вывод, что распределения действительных частей  $ReI(z)$  имеют схожую геометрию, а в случае сравнения мнимых частей  $ImI(z)$  существенная разница в характере распределения наблюдается при использовании разных сеток метода конечных элементов.

## 6. Заключение

Решение задачи синтеза в антенной технике, задающее распределение тока по симметричному вибратору, является важным объектом изучения и позволяет найти основные характеристики и параметры антенны.

В результате проделанной работы была построена и исследована вычислительная схема метода конечных элементов применительно к интегральным уравнениям. Кроме того, предложено применение данной вычислительной схемы к численному решению интегрального уравнения Галлена, моделирующего поведение элементов линейных антенн. Заметим, что применение подобной схемы к численному решению интегрального уравнения Галлена показало невысокую эффективность, что обусловлено и принадлежностью данной задачи к классу некорректных и в целом вопросом определения границ применимости уравнения Галлена.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зырянов Ю. Т., Федюнин П. А., Белоусов О. А. [и др.] Антенны : учеб. пособие / Ю. Т. Зырянов [и др.]. Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. 128 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 487 с.
3. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. М. : Факториал Пресс, 2000. 384 с.
4. Бойков И. В., Айкашев П. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проводочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. Т. 55, № 3. С. 127–146. DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-10>.
5. Рогова, Н. В. Методы вейвлет-анализа численного решения одномерных задач электродинамики: автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2008. 16 с.
6. Тарасов Д. В., Коннов Г. А. Применение метода конечных элементов для решения интегральных уравнений теории линейных антенн // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : мат. XV Междунар. науч.-техн. конф. / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. С. 66–74.
7. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. 316 с.
8. Неганов В. А., Матвеев И. В., Медведев С. В. Метод сведения уравнения поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 26, № 12. С. 86–94.
9. Бойков И. В., Тарасов Д. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2008, № 4. С. 94–106.



10. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: пер.с англ. М.: Мир, 1986. 229 с.
11. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. М. : Мир, 1979. 392 с.

*Поступила 01.12.2022; доработана после рецензирования 10.02.2023;  
принята к публикации 24.02.2023*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. Yu. T. Zyryanov, P. A. Fedyunin, O. A. Belousov [et al.], *Antenny: ucheb. posobie [Antennas: study. manual]*, FGBOU VPO «TGTU», Tambov, 2014 (In Russ.), 128 p.
2. R. Mitra, [*Computational methods in electrodynamics*], Mir., Moscow, 1977 (In Russ.), 487 p.
3. A. V. Manzhairov, A. D. Polyanin, [*Handbook of Integral Equations: Solution methods*], Izd-vo «Faktorial Press», Moscow, 2000 (In Russ.), 384 p.
4. I. V. Boykov, P. V. Aykashev, “[Application of the continuous operator method to the solution of the Pocklington and Gallen equations for thin wire antennas]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki*, **55**:3 (2020), 127–146 (In Russ.).
5. N. V. Rogova, [*Methods of wavelet analysis of numerical solution of one-dimensional problems of electro-dynamics / abstract. diss. ... candidate of physical and mathematical sciences.*], Voronezh, 2008 (In Russ.), 16 p.
6. D. V. Tarasov, G. A. Konnov, “Application of the finite element method for solving integral equations of the theory of linear antennas”, *Analytical and numerical methods of modeling natural-scientific and social problems : materials of the XV International Scientific-Technical. conf. / ed by I. V. Boykov.*, Izd-vo PGU, Penza, 2020, 66–74 (In Russ.).
7. I. V. Boykov, *Priblizhennyye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy [Approximate methods for solving singular integral equations]*, Izd-vo Penz. gos. un-ta, Penza, 2004. (In Russ.), 316 p.
8. V. A. Neganov, I. V. Matveev, S. V. Medvedev, “[Method of reducing the Pocklington equation for an electric vibrator to a singular integral equation]”, *Pis'ma v ZhETF*, **26**:12 (2000), 86–94. (In Russ.).
9. I. V. Boykov, D. V. Tarasov, “[Application of hypersingular integral equations to numerical modeling of an electric vibrator]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki*, **4** (2008), 94–106 (In Russ.).
10. P. Sil'vester, R. Ferrari, [*Finite element method for radio engineers and electrical engineers : trans. from English*], Mir, Moscow, 1986 (In Russ.), 229 p.

11. L. Segerlind, *Primenenie metoda konechnykh elementov: per. s angl. [Application of the finite element method: trans. from English]*, Mir, Moscow, 1979 (In Russ.), 392 p.

*Submitted 01.12.2022; Revised 10.02.2023; Accepted 24.02.2023*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

## Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами

А. Н. Тында

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (г. Пенза, Российская Федерация)

**Аннотация.** Работа посвящена построению прямых и итерационных численных методов решения функциональных уравнений с наследственными компонентами. Такие уравнения являются удобным аппаратом моделирования динамических систем. В частности, они используются в моделях популяций, структурированных по возрасту с конечной продолжительностью жизни. В работе используются модели на основе интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с различного рода запаздывающими аргументами. Для нелинейных уравнений проводится линейризация операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Для дискретизации линейных уравнений применяются методы квадратур и простой итерации. Построены итерационный метод решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения на полуоси  $(-\infty, 0]$ , прямой метод решения задачи восстановления сигнала, итерационные методы решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра с константной задержкой. Для аппроксимации несобственных интегралов на полуоси применены специальные квадратурные формулы, построенные на основе ортогональных многочленов Лаггера. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие сходимость предложенных методов.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра, запаздывающие аргументы, метод Ньютона-Канторовича, линейризация, дискретизация

**Для цитирования:** Тында А.Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.565-577>

Об авторе:

**Тында Александр Николаевич**, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)

© А. Н. Тында



MSC2020 65R20

# Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments

A. N. Tynda

*Penza State University (Penza, Russian Federation)*

**Abstract.** The aim of this work is to construct direct and iterative numerical methods for solving functional equations with hereditary components. Such equations are a convenient tool for modeling dynamical systems. In particular, they are used in population models structured by age with a finite life span. Models based on integro-differential and integral equations with various kinds of delay arguments are considered. For nonlinear equations, the operators are linearized according to the modified Newton-Kantorovich scheme. Direct quadrature and simple iteration methods are used to discretize linear equations. These methods are constructed in the paper: an iterative method for solving a nonlinear integro-differential equation on the semiaxis  $(-\infty, 0]$ , a direct method for solving the signal recovery problem, and iterative methods for solving a nonlinear Volterra integral equation with a constant delay. Special quadrature formulas based on orthogonal Laguerre polynomials are used to approximate improper integrals on the semiaxis. The results of numerical experiments confirm the convergence of suggested methods. The proposed approaches can also be applied to other classes of nonlinear equations with delays.

**Keywords:** integro-differential equations, nonlinear Volterra integral equations, delay arguments, the Newton-Kantorovich method, linearization, direct discretization

**For citation:** A. N. Tynda. Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:1(2023), 565–577. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.565-577>

*About the author:*

**Aleksandr N. Tynda**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)

## 1. Введение

В настоящее время существенный интерес вызывают динамические системы, при описании которых используются функциональные уравнения с наследственными компонентами (запаздывающими, отклоняющимися аргументами). В этом случае состояние динамической системы в данный момент времени зависит от всей ее предыдущей эволюции или некоторого интервала предыстории. Хорошо известна универсальность таких уравнений при моделировании процессов в различных приложениях — в физике, технике, биоматематике, экономике, медицине и др. (см., например [1–4]). Они обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания.

В подавляющем большинстве практически важных случаев задачи с наследственной или запаздывающей обратной связью не имеют аналитического решения, а получение

численного решения затруднено требованием данных о состоянии системы в пределах всего временного диапазона эволюции (или запаздывания). При этом на практике точные аналитические решения задач с отклоняющимся аргументом могут быть найдены лишь в исключительных случаях. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных численных методов их анализа.

Цель данной работы заключается в численном анализе ряда динамических систем с запаздывающими аргументами различного типа.

## 2. Интегро-дифференциальные уравнения с запаздыванием

Рассмотрим сначала интегро-дифференциальное уравнение, используемое при описании моделей популяционной динамики [5]:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)X(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X(t + \tau)d\tau \right], \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

где  $\tau$  — непрерывная задержка.

Для построения численного решения уравнения (2.1) введем нелинейный интегральный оператор

$$FX(t) \equiv \frac{dx}{dt} - g(t)X(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X(t + \tau)d\tau \right]. \quad (2.2)$$

Обозначив через  $X_0(t)$  начальное приближение, найдем производную по Фреше оператора  $FX(t)$  в точке  $X_0(t)$

$$\begin{aligned} F'(X_0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + \delta X) - F(X_0)}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[ \frac{d(X_0(t) + \delta X)}{dt} - g(t)(X_0 + \delta X) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X_0(t + \tau) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta X(t + \tau)d\tau \right] - \frac{dX_0}{dt} + g(t)X_0(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X_0(t + \tau)d\tau \right] \right] = \frac{dX}{dt} - \\ &- X(t)g(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X_0(t + \tau)d\tau \right] + g(t)X(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X(t + \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введя обозначение  $\Phi(t) = g(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X_0(t + \tau)d\tau \right]$ , получим

$$F'(X_0)(X) = \frac{dx}{dt} - X(t)\Phi(t) + g(t)X_0 \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau)X(t + \tau)d\tau \right]. \quad (2.4)$$

Далее используем модифицированный метод Ньютона-Канторовича. Применительно к уравнению  $F X(t) = 0$  метод имеет следующий вид:

$$X_{m+1} = X_m - [F'(X_0)]^{-1} F(X_m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Для итерации  $m + 1$  процесс (2.5) можно переписать следующим образом:

$$F'(X_0) \Delta X_{m+1} = -F(X_m), \quad \Delta X_{m+1} = X_{m+1} - X_m. \quad (2.6)$$

Таким образом, в развернутом виде имеем последовательность приближенных решений, определяемых из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta X_{m+1}(t)}{dt} - \Delta X_{m+1}(t)\Phi(t) + g(t)X_0(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) \Delta X_{m+1}(t + \tau) d\tau = \\ = -\frac{dX_m(t)}{dt} + g(t)X_m(t) \left[ 1 - \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) X_{m+1}(t + \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Расписав уравнение (2.7), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{m+1}(t)}{dt} - X_{m+1}(t)\Phi(t) + g(t)X_0(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) X_{m+1}(t + \tau) d\tau = \\ = X_m(t)\Phi(t) + g(t)X_m(t) + [X_0(t) - X_m(t)]g(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) X_m(t + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Обозначив правую часть уравнения (2.8) как  $\Psi_m(t)$ , запишем:

$$\frac{dX_{m+1}(t)}{dt} - X_{m+1}(t)\Phi(t) + g(t)X_0(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) X_{m+1}(t + \tau) d\tau = \Psi_m(t). \quad (2.9)$$

Исходя из общих теорем о сходимости метода Ньютона-Канторовича [6] сформулируем теорему сходимости этого итерационного процесса в банаховом пространстве  $C[0, T]$  с нормой  $\|X(t)\|_{C[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |X(t)|$ .

**Теорема 2.1.** Пусть оператор  $F$  имеет непрерывную вторую производную в шаре  $\Omega_0(\|X - X_0\|_{C[0, T]} \leq p)$ , а также выполнены условия:

- 1) При  $m = 0$  уравнение (2.9) имеет единственное решение на  $[0, T]$ , т. е. существует  $\Gamma_0 = [F'(X_0)]^{-1}$ ;
- 2)  $\|\Delta X_1\|_{C[0, T]} \leq \eta$ ;
- 3)  $\|\Gamma_0 F''(X)\|_{C[0, T]} \leq S, X \in \Omega_0$ .

Если также  $h = S_\eta < \frac{1}{2} u \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq p \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$ , то уравнение (2.1) имеет единственное решение  $X^*$  в  $\Omega_0$ . Итерационный процесс (2.9) сходится к  $X^*$ , а скорость сходимости можно оценить неравенством:

$$\|X_m - X^*\|_{C[0, T]} \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Для построения решения линейного интегро-дифференциального уравнения на каждой итерации метода Ньютона-Канторовича (2.9) неизвестную функцию будем аппроксимировать интерполяционным сплайном порядка  $s$ , построенным по сетке узлов  $t_l^j$ ,  $l = 0, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, s$ , распределенных по отрезку  $[0, T]$ :

$$X_{m+1}^k(t) = \sum_{i=0}^s X_{m+1}(t_l^i) \prod_{j=0, j \neq i}^s \frac{t - t_l^j}{t_l^i - t_l^j}, \quad t \in [t_{l-1}, t_l].$$

Значения сплайна в точках сетки определяются двумя методами: сплайн-коллокационным и с помощью следующего итерационного процесса:

$$X_{m+1}^{k+1}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left[ \frac{dX_{m+1}^k(t)}{dt} - \Psi_m(t) + g(t)X_0(t) \int_{-\infty}^0 H(t, \tau) X_{m+1}^k(t + \tau) d\tau \right]. \quad (2.10)$$

Вычисление значений функций  $\Phi(t)$  и  $\Psi_m(t)$  в (2.10) в произвольной точке производится с помощью специальных квадратур, построенных на основе ортогональных многочленов Лаггера. Производные  $\frac{dX_{m+1}^k(t)}{dt}$  в каждой точке аппроксимируются вычисленными аналитически производными сплайна.

### 3. Интегральные уравнения с запаздыванием

#### 3.1. Задача восстановления сигнала

Рассмотрим задачу численного восстановления сигнала, подаваемого на вход линейной динамической системы с конечной памятью. Такая система описывается следующим интегральным уравнением I рода типа Вольтерра:

$$\int_{t-T}^t H(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.1)$$

в котором величина  $T$  называется временем последствия или памятью динамической системы. В теории автоматического управления и радиотехнике ядро  $H(t, s)$  интегрального уравнения (3.1) называется импульсной переходной функцией. В данном случае ядро  $H(t, s)$  не является разностным, что соответствует нестационарной динамической системе [7]. Такого рода модели также применяются также при описании возрастной структуры экологических популяций [8].

Уравнение (3.1) можно также рассматривать как уравнение с константной задержкой. В настоящее время имеется лишь ряд численных методов для уравнений с константными задержками в пределах интегрирования (см., например, работы [3–4]). Однако в них рассматриваются уравнения II рода, а значит, не встает вопрос о корректности задачи. Подробный обзор вопроса корректности в различных функциональных пространствах для классических уравнений Вольтерра I рода можно найти в [7].

Ниже предлагается устойчивый квадратурный метод первого порядка точности, основанный на применении формулы средних прямоугольников и обладающий стабилизирующими свойствами.

Прежде всего определим для уравнения (3.1) пространства функций. Пусть  $H(t, s) \in C^1[a, b] \times [a - T, b]$ ,  $f(t) \in C^1[a, b]$ . В этом случае при точно заданных функциях  $H$

и  $f$  уравнение (3.1) имеет единственное непрерывное решение  $x(t)$ . Пусть также при  $t \in [a - T, a]$   $x(t) \equiv \varphi(t)$ , т. е.  $\varphi(t)$  — заданная предыстория динамической системы.

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $N$  частей точками  $t_k = kh$ ,  $k = 0, \dots, N$ ,  $h = \frac{T}{N}$ . Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = x\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения:

$$x_N(t_k) = x_k, \quad f(t_k) = f_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Потребуем, чтобы функция (3.2) удовлетворяла уравнению (3.1) в точках сетки  $t_k$ :

$$\int_{t_k - T}^{t_k} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Разобьем интеграл в (3.3) на части с длиной отрезка интегрирования, не превосходящей шага сетки  $h$ . В зависимости от величины  $t_k - T$  возможны два случая:

Пусть сначала  $t_k - T \leq t_0$ . Тогда уравнения (3.3) могут быть представлены в виде

$$\int_{t_k - T}^{t_0} H(t_k, s) \varphi(s) ds + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k.$$

Выбор квадратурной формулы для вычисления первого интеграла в левой части последнего равенства зависит от гладкости предыстории  $\varphi$  и ядра  $H$  по переменной  $s$ . В случае достаточной гладкости применяется формула Гаусса. К остальным интегралам применяется формула средних прямоугольников. Таким образом, значения приближенного решения на сетке могут быть последовательно определены по формулам

$$x_k = \frac{f_k - I_k(T) - h \sum_{i=1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2}) x_i}{hH(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})}, \quad I_k(T) = \int_{t_k - T}^{t_0} H(t_k, s) \varphi(s) ds, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.4)$$

Пусть теперь  $t_k - T > t_0$ . В этом случае равенства (3.3) в результате применения составной формулы средних прямоугольников примут вид

$$x_k = \frac{f_k - (t_{v_k} - t_k + T)H(t_k, \frac{t_k - T + t_{v_k}}{2})x_{v_k} - h \sum_{i=v_k+1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2})x_i}{hH(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (3.5)$$

где через  $v_k$  обозначен номер отрезка сетки, на который попадает значение  $t_k - T$ .

Таким образом, значения неизвестной функции на рассматриваемой сетке (а значит, и приближенное решение  $x_N(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ) могут быть последовательно найдены по формулам (3.4)–(3.5). Скорость сходимости предложенного метода оценивается следующим неравенством

$$\|x(t) - x_N(t)\|_{C[a,b]} \leq \frac{A}{N}, \quad (3.6)$$

где  $A$  — положительная константа, независимая от  $N$ .



### 3.2. Задержки константного типа

Данный параграф посвящен численному решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, рассмотренного в [2] и имеющего следующий вид:

$$x(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t, s, x(s))ds + f(t), \quad (3.7)$$

где  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$  — постоянная задержка;  $t \in [0, T]$ ,  $x(t) = \varphi(t)$ , при  $t \in [-\tau, 0)$  — заданная предыстория.

В работе [2] предложен прямой коллокационный метод решения (3.7), линейные уравнения с задержками изучаются также авторами трудов [3–4]. Хорошо известно, что для интегральных уравнений с переменными пределами интегрирования весьма эффективными являются итерационные методы (см., например, [7]).

Построим два итерационных численных метода решения уравнения (3.7).

**Метод последовательных приближений.** Для решения уравнения (3.7) сначала адаптируем метод простой итерации.

Пусть функции  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $k(t, s)$  и  $h(t, s, x(s))$  являются непрерывными функциями своих аргументов и, кроме того, для любой пары величин  $x_1$  и  $x_2$  справедливо неравенство.

$$|h(t, s, x_1) - h(t, s, x_2)| \leq g(t, s)|x_1 - x_2|,$$

где  $g(t, s)$  — непрерывная функция своих аргументов.

В качестве начального приближения итерационного метода выберем функцию

$$x^0(t) = f(t) - \int_{t-\tau}^0 h(t, s, \varphi(s))ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

Последовательные приближения  $x^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , определяются затем из соотношений

$$x^m(t) = \int_0^t k(t, s)x^{m-1}(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t, s, x^{m-1}(s))ds + f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.7) определяем как предел последовательных приближений  $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x^m(t)$ . При этом для каждого номера  $m$  при  $t \in [-\tau, 0)$  полагаем  $x^m(t) = \varphi(t)$ .

Для дискретизации соотношений (3.8)–(3.9) на отрезке  $[0, T]$  введем сетку узлов (необязательно равномерную)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \quad h_{max} = \max_{i=1, N} (t_i - t_{i-1}) = \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (3.10)$$

Последовательные приближения решения уравнения (3.7) на каждом шаге итерационного процесса (3.9) будем искать в виде кусочно-постоянных функций

$$x_N^m(t) = \sum_{i=1}^N x_i^m \delta_i(t), \quad t \in (0, T], \quad \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i]; \\ 0, & t \notin \Delta_i \end{cases} \quad (3.11)$$

с неопределенными пока коэффициентами  $x_i^m$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения

$$x_N^m(t_i) = x_i^m, f(t_i) = f_i, \\ k\left(t_i, \frac{t_{j-1} + t_j}{2}\right) = k_{ij}, h\left(t_i, \frac{t_{j-1} + t_j}{2}, x_l^m\right) = h_{ijl}^m.$$

Обозначим через  $v_i, i = \overline{0, N}$ , номер отрезка разбиения (3.10), на который попадает значение  $t_i - \tau$ , а точнее

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{при } t_i - \tau \in [-\tau, 0); \\ j, & \text{при } t_{j-1} \leq t_i - \tau < t_j. \end{cases}$$

При  $t_i - \tau < 0$  имеем

$$x_i^m = \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(t_i, s)x_N^{m-1}(s)ds - \int_{t_i-\tau}^0 h(t_i, s, \varphi(s))ds + f_i, i = \overline{0, N}. \tag{3.12}$$

При  $t_i - \tau \geq 0$  имеем

$$x_i^m = \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(t_i, s)x_N^{m-1}(s)ds + \sum_{j=1}^{v_i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} h(t_i, s, x_N^{m-1}(s))ds + \\ + \int_{t_{v_i-1}}^{t_i-\tau} h(t_i, s, x_N^{m-1}(s))ds + f_i, i = \overline{0, N}. \tag{3.13}$$

Аппроксимируя в соотношениях (3.12) и (3.13) интегралы по формуле средних прямоугольников, получим окончательные выражения для определения приближений  $x_i^m, i = \overline{0, N}, m = 1, 2, \dots$ :

$$x_i^m = \sum_{j=1}^i (t_j - t_{j-1})k_{ij}x_j^{m-1} - \int_{t_i-\tau}^0 h(t_i, s, \varphi(s))ds + f_i, \text{ при } t_i - \tau < 0; \tag{3.14}$$

$$x_i^m = \sum_{j=1}^i (t_j - t_{j-1})k_{ij}x_j^{m-1} + \sum_{j=1}^{v_i-1} (t_j - t_{j-1})h_{ijj}^{m-1} + \\ + (t_i - \tau - t_{v_i-1})h\left(t_i, \frac{t_i - \tau + t_{v_i-1}}{2}, x_{v_i}^{m-1}\right) + f_i, \text{ при } t_i - \tau \geq 0. \tag{3.15}$$

(Для вычисления полученного интеграла по предыстории в (3.14) также применяется квадратурная формула средних прямоугольников по вспомогательной сетке узлов с шагом, зависящим от величины  $\tau - t_i$  и не превосходящим  $h_{max}$ .)

**Метод Ньютона-Канторовича.** В численных методах для решения нелинейного интегрального уравнения с константной задержкой значимая роль принадлежит методу Ньютона-Канторовича. Проведем линеаризацию уравнения (3.7) по схеме Ньютона-Канторовича. Для этого введем нелинейный интегральный оператор

$$Fx(t) \equiv x(t) - \int_0^t k(t, s)x(s)ds - \int_0^{t-\tau} h(t, s, x(s))ds - f(t). \tag{3.16}$$

Найдем производную (по Фреше) нелинейного оператора  $Fx$  в точке  $x_0(t)$ , где  $x_0(t)$  – начальное приближение,

$$\begin{aligned} F'[x_0](x(t)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F(x_0(t) + \omega x(t)) - F(x_0(t))}{\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left( x_0(t) + \omega x(t) - \int_0^t k(t, s)(x_0(s) + \omega x(s))ds - \int_0^{t-\tau} h(t, s, x_0(s) + \omega x(s))ds - f(t) - x_0(t) + \int_0^t k(t, s)x_0(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t, s, x_0(s))ds + f(t) \right) = \\ &= x(t) - \int_0^t k(t, s)x(s)ds - \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_0^{t-\tau} \frac{h(t, s, x_0(s) + \omega x(s)) - h(t, s, x_0(s))}{\omega} ds = \\ &= x(t) - \int_0^t k(t, s)x(s)ds - \int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t, s, x_0(s))}{\partial x} x(s)ds. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$F'[x_0](x(t)) = x(t) - \int_0^t k(t, s)x(s)ds - \int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t, s, x_0(s))}{\partial x} x(s)ds. \tag{3.17}$$

Уравнение (3.7) в операторной форме имеет вид  $Fx = 0$ , применим к нему метод Ньютона-Канторовича:

$$F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -F(x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{3.18}$$

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} \cdot F(x_{n-1}), \tag{3.19}$$

где  $[F'(x_{n-1})]^{-1}$  – обратный оператор для линейного оператора  $F'[x_{n-1}](x(t))$ , вычисленного в точке  $x_{n-1}$ .

Таким образом, в развернутом виде имеем последовательность приближенных решений  $x_n$ , определяемых из уравнений:

$$\begin{aligned} &(x_n(t) - x_{n-1}(t)) - \int_0^t k(t, s)(x_n(s) - x_{n-1}(s))ds - \\ &- \int_0^{t-\tau} \frac{\partial h(t, s, x_{n-1}(s))}{\partial x} (x_n(s) - x_{n-1}(s))ds = -x_{n-1}(t) + \\ &+ \int_0^t k(t, s)x_{n-1}(s)ds + \int_0^{t-\tau} h(t, s, x_{n-1}(s))ds + f(t). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Обозначим для краткости  $H_x(t, s, x) = \frac{\partial h(t, s, x)}{\partial x}$ .

Тогда уравнения (3.20) можно преобразовать к виду, удобному для нахождения очередного приближения в итерационном процессе:

$$\begin{aligned} &x_n(t) - \int_0^t k(t, s)x_n(s)ds - \int_0^{t-\tau} H_x(t, s, x_{n-1}(s))x_n(s)ds = \\ &= f(t) + \int_0^{t-\tau} [h(t, s, x_{n-1}(s)) - H_x(t, s, x_{n-1}(s))x_{n-1}(s)] ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Обозначив через  $\Psi_n(t)$  правую часть уравнения (3.21)

$$\Psi_n(t) = f(t) + \int_0^{t-\tau} [h(t, s, x_{n-1}(s)) - H_x(t, s, x_{n-1}(s))x_{n-1}(s)] ds, \quad (3.22)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} x_n(t) - \int_0^t k(t, s)x_n(s)ds - \\ - \int_0^{t-\tau} H_x(t, s, x_{n-1}(s))x_n(s)ds = \Psi_n(t), n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для решения уравнений вида (3.23) применим метод последовательных приближений в следующей форме:

$$\begin{aligned} x_n^m(t) = \Psi_n(t) + \int_0^t k(t, s)x_n^{m-1}(s)ds + \\ + \int_0^{t-\tau} H_x(t, s, x_{n-1}(s))x_n^{m-1}(s)ds, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $x_n^0(t) = \Psi_n(t)$  — начальное приближение для метода последовательных приближений, а  $x_{n-1}(t)$  — приближенное решение, полученное на  $(n - 1)$  итерации Ньютона-Канторовича.

При дискретизации (3.24) используется адаптивная сетка, построенная для каждого фиксированного числа разбиений отрезка  $[0, T]$  в зависимости от величины задержки  $\tau$ .

## 4. Численные результаты

### 4.1. Модель 1

Проиллюстрируем работу метода последовательных приближений на примере следующего модельного уравнения

$$x(t) = \int_0^t (t - \sqrt{s})^3 x(s) ds + \int_0^{t-0.2} \sin(t + 2s) e^{x^3(s)} ds + f(t), t \in [0, 1], \quad (4.1)$$

где свободный член  $f(t)$  подобран таким образом, чтобы точным решением была функция  $x^*(t) = t(1 - t)$ ,  $\varphi(t) = t$ .

Результаты решения модельной задачи (4.1) приведены в таблице 4.1, в которой приняты следующие обозначения:  $m$  — число итераций,  $N$  — число отрезков разбиения, норма погрешности

$$\varepsilon = \|x_N^m(t) - x^*(t)\|_{C[0,1]}.$$

**Таблица 4.1.** Зависимость погрешности  $\varepsilon$  вычислений от  $m$  и  $N$

**Table 4.1.** The dependence of the computation error  $\varepsilon$  on the parameters  $m$  and  $N$

|               |       |        |         |         |         |        |        |        |
|---------------|-------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| $m$           | 0     | 1      | 2       | 3       | 3       | 5      | 5      | 5      |
| $N$           | 100   | 100    | 100     | 200     | 200     | 800    | 1600   | 6400   |
| $\varepsilon$ | 0,138 | 0,0029 | 0,00044 | 0,00027 | 0,00019 | 4,9e-5 | 2,4e-5 | 5,3e-6 |

### 4.2. Модель 2

Проиллюстрируем работу метода Ньютона-Канторовича на примере следующего модельного уравнения

$$\begin{aligned}
 x(t) - \int_0^t x(s)ds - \int_0^{t-\tau} x^3(s)ds = t(1-t) + \frac{t^3}{3} - \\
 - \frac{t^2}{2} + \frac{(t-\tau)^7}{7} - \frac{(t-\tau)^6}{2} + \frac{3(t-\tau)^5}{5} - \frac{(t-\tau)^4}{4}, \quad t \in [0, 1],
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

точным решением которого является функция  $x^*(t) = t(1-t)$ , предыстория  $\varphi(t) = t$ , задержка  $\tau = 0.5$ .

Результаты решения модельной задачи (4.2) приведены в Таблице 4.2, в которой приняты следующие обозначения:  $n$  – число итераций Ньютона-Канторовича,  $m$  – число внутренних итераций метода последовательных приближений,  $N$  – число узлов сетки,  $\varepsilon = \|x_N^m(t) - x^*(t)\|_{C[0,1]}$  – норма погрешности.

**Таблица 4.2.** Зависимость погрешности  $\varepsilon$  вычислений от  $n$ ,  $m$  и  $N$

**Table 4.2.** The dependence of the error  $\varepsilon$  on the parameters  $n$ ,  $m$  and  $N$

|               |        |        |        |         |         |         |        |        |
|---------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|
| $n$           | 1      | 1      | 2      | 3       | 3       | 2       | 2      | 2      |
| $m$           | 5      | 5      | 5      | 5       | 10      | 15      | 5      | 5      |
| $N$           | 10     | 50     | 200    | 500     | 1000    | 2000    | 4000   | 8000   |
| $\varepsilon$ | 0,0236 | 0,0055 | 0,0013 | 0,00051 | 0,00019 | 0,00013 | 8,9e-5 | 4,7e-5 |

## 5. Заключение

Результаты проведенного численного анализа позволяют судить об устойчивой сходимости предложенных методов. При этом основным регулятором сходимости в каждом случае является число  $N$  при достаточно небольшом количестве последовательных приближений и итераций процесса Ньютона-Канторовича. Это обусловлено тем, что от  $N$  зависит как аппроксимация самой неизвестной функции, так и интегралов с первым и вторым порядком точности, соответственно. В то время как используемые итерационные процессы имеют сходимость, не хуже экспоненциальной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 612 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234>
2. Calìo F., Marchetti E., Pavani R. About the deficient spline collocation method for particular differential and integral equations with delay // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*. 2003. Vol. 61. pp. 287–300.
3. Cardone A., Prete I. D., Nitsch C. Gaussian direct quadrature methods for double delay Volterra integral equations // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2009. Vol. 35. pp. 201–216.
4. Messina E., Russo E., Vecchio A. A convolution test equation for double delay integral equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 228, no. 2. pp. 589–599.
5. Gushing J. M. Volterra integrodifferential equations in population dynamics. In: *Mathematics of Biology* / ed. by M. Iannelli. Berlin: Springer, 2010. Vol 80. pp. 81–148.
6. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional Analysis*. – 2nd ed. Pergamon, 1982. 589 p.
7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы // Киев : Наукова Думка, 1986. 544 с.
8. Popović Z. Basic mathematical models in economic-ecological control // *Facta Universitatis. Economics and Organization*. — 2008. Vol. 5, no. 3. pp. 251–262.

*Поступила 01.12.2022; доработана после рецензирования 10.02.2023;  
принята к публикации 24.02.2023*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. H. Brunner, *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 612 p.
2. F. Calìo, E. Marchetti, R. Pavani, “About the deficient spline collocation method for particular differential and integral equations with delay”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, **61** (2003), 287–300.
3. A. Cardone, I. D. Prete, C. Nitsch, “Gaussian direct quadrature methods for double delay Volterra integral equations”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis.*, **35** (2009), 201–216.
4. E. Messina, E. Russo, A. Vecchio, “A convolution test equation for double delay integral equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**:2 (2009), 589–599.

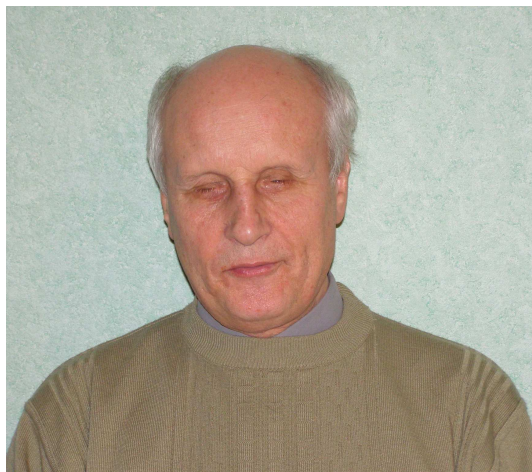
5. J. M. Gushing, *Volterra Integrodifferential Equations in Population Dynamics. In: Mathematics of Biology.*, **80**, Berlin: Springer, 2010.
6. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 589 p.
7. A. F. Verlan, V. S. Sizikov, *Integral equations: methods, algorithms, programs*, Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986 (in Russ).
8. Z. Popović, “Basic mathematical models in economic-ecological control”, *Facta Universitatis. Economics and Organization*, **5:3** (2008), 251–262.

*Submitted 01.12.2022; Revised 10.02.2023; Accepted 24.02.2023*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ  
ВЛАДИСЛАВА СЕРГЕЕВИЧА МЕДВЕДЕВА

1 сентября 2022 года исполнилось 80 лет замечательному математику, специалисту в области топологии и теории динамических систем Владиславу Сергеевичу Медведеву.

По документам Владислав Сергеевич родился в г. Дзержинске Горьковской (сейчас – Нижегородской) области, но местом рождения, видимо, надо считать небольшой город Володарск, расположенный недалеко от Дзержинска. В этом городе жила и работала в госпитале медсестрой Ольга Георгиевна Медведева, мама Владислава Сергеевича. На момент рождения сына Ольге Георгиевне было 22 года (умерла она в 2001 году). В конце 1941 – начале 1942 года в Володарске стояла летная часть, готовившаяся к переброске на фронт, в которой служил Сергей Гаврилович Каленов 1915 г. р. Молодые люди не успели оформить свои отношения, в результате которых появился на свет маленький Владик, поскольку Сергей Гаврилович был срочно отправлен на фронт, где погиб в 1945 году в звании капитана. После войны Ольга Георгиевна вышла замуж и переехала в г. Горький. К тому времени маленький Владик жил у своей бабушки в деревне Ильина Гора недалеко от Володарска. Дело в том, что в полтора года от недоедания у него развился сильнейший рахит, и Ольга Георгиевна зимой 1944 года отвезла сына в деревню к своей матери. Та жила с четырьмя детьми без мужа, так как ее муж (т. е. дед Владислава Сергеевича) был репрессирован в 1937 году (реабилитирован посмертно в 1956).

Деревенская жизнь и забота бабушки пошли на пользу и помогли выжить в тяжелое военное и послевоенное время. Владислав любил гулять до реки Клязьма (примерно 3 километра от деревни Ильина Гора) и ходить с более старшими ребятами в лес за грибами. Гуляя босиком в день своего рождения первого сентября 1949 года, Владик увидел бегущую по улице ватагу ребят и решил пробежаться с ними за компанию.



Так он оказался во дворе школы, где учителя спрашивали возраст и формировали классы. Интересно, что родителей не было, все работали. Сформированные группы тут же отправлялись в соответствующие классы, причем большинство учеников шлепало босиком и без учебных принадлежностей. В одну из групп и был зачислен Владик.

Школа была четырехлетняя и состояла из двух классных комнат, которых не всегда хватало. Во втором классе Владиду пришлось обучаться в одной классной комнате с первым классом. Оба класса одновременно вела первая учительница Владислава – Александра Ивановна Малышева.

Весной 1951 года (в конце обучения во втором классе) Владик наблюдал, как тринадцатилетний мальчик колот дрова. В один момент мальчик, выдергивая длинную жердь, попал ею в глаз стоявшего рядом Владика. В больнице г. Горького в течение двух недель Владиду восстановили 50 процентов зрения и отправили домой. Однако закончить второй класс ему не удалось, так как глаз покраснел, и Владика снова отправили в г. Горький. Там был диагностирован воспалительный процесс, который пытались лечить каплями. Увы, воспалительный процесс остановить не удалось (надо было пойти на удаление одного глаза, чтобы спасти второй), и Владислав Сергеевич ослеп на оба глаза.

В 3-й класс Владик пошел учиться в школу-интернат для слепых. Это было деревянное здание с печным отоплением недалеко от парка им. Кулибина в г. Горьком. После одной из перемен он по ошибке зашел во 2-й класс. Учительнице понравился новый мальчик, и она уговорила его остаться в своем классе («Тебе тут нравится? Ну тогда оставайся»). Так Владик проучился еще раз во втором классе, поэтому восьмилетнюю школу-интернат он окончил в 1959 году в 16 лет. Во время обучения в школе самостоятельно научился так хорошо играть в шахматы, что летом 1959 года в сопровождении учителя физкультуры ездил на шахматный турнир для слепых в г. Кисловодск. Сыграл вничью с победителем, но отстав от последнего на два очка, выполнил норму 3-го разряда.

С осени 1959 года в течение трех лет Владислав Сергеевич учился в вечерней школе и параллельно работал в Автозаводском районе г. Горького на предприятии для слепых (на специальных швейных машинках шил картонные коробки для деталей). В 1962 году девятнадцатилетний Владислав окончил с серебряной медалью 10-й класс вечерней школы и решил связать свою жизнь с математикой. К этому его подтолкнули два обстоятельства. Во-первых, школьный учитель математики был так впечатлен математическими способностями Владислава, что называл его «медвежищем» и советовал в дальнейшем заниматься математикой. Во-вторых, Владислав слышал о знаменитом слепом математике Понтрягине и понимал, что творческая научная карьера может быть успешной (шить коробки всю жизнь не хотелось, особенно после того, как однажды он едва не лишился пальца, попавшего между жесткой нитью и коробкой).

Самостоятельно подготовившись, летом 1962 года Владислав подал документы на механико-математический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Сдал вступительный устный экзамен по математике на 5, а остальные (письменный по математике, устный по физике и сочинение) на 4. Так 1 сентября 1962 года, в день своего двадцатилетия, Владислав стал студентом мехмата и получил место в университетском общежитии номер один (на проспекте Гагарина). В то время на первый курс мехмата набиралось 9 групп: 4 группы так называемых «вычислителей», 4 группы математиков и одна группа механиков. Владислав был зачислен в группу «вычислителей» (желания студентов не учитывались, распределяли, видимо, по экзаменационным оценкам). В общежитии он оказался в комнате 135 вместе с

Валентином Васяевым (тоже слепым, с которым подружились раньше за шахматной доской), Николаем Роциным и Петей Прохоровичем.

Специфика обучения в одном потоке с обычными студентами состояла в том, что лекции (кроме политико-философских) были почти бесполезными, так как часто неизвестно было, что преподаватель писал на доске. К счастью, всегда находились студенты, которые потом доносили материал в более доступной форме. Зато не вызывали к доске на практических занятиях (опять-таки, кроме политико-философских занятий, где заставляли зачитывать рефераты). К экзаменам готовился с кем-то из друзей. Понятно было, что преподаватели благосклонно относились к Владиславу, и за все время обучения он получил только одну двойку: по философии на 2-м курсе. Попросил преподавателя принять экзамен досрочно и на вопрос о причине наивно ответил: «Чтобы поскорей отделаться». Поэтому досрочный экзамен завалил и пересдал по графику, с группой.

С деньгами у Владислава проблем не было. Во-первых, в СССР инвалидам после нескольких лет работы полагалась пенсия около 50 рублей. Во-вторых, ему как инвалиду платили полторы стипендии (33 рубля на 1-м курсе и 52,5 рубля – начиная со 2-го курса; современникам эти цифры ничего не говорят, поэтому отметим, что средняя зарплата по стране была около 140 рублей, железнодорожный билет Горький-Москва стоил около 6 рублей, проезд в трамвае – 3 копейки, в автобусе – 6 копеек).

Стипендию на втором курсе Владислав уже получал на недавно образованном факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК), куда были переведены группы «вычислителей» мехмата.

Начиная с 3-го курса студенты выбирали курсовые работы и, соответственно, научных руководителей. Владислав вместе с Николаем Роциным взяли примерно одинаковые темы у профессора Е. А. Леонтович-Андроновой. В курсовой надо было исследовать существование предельных циклов у конкретной системы трех дифференциальных уравнений, связанной с фотосинтезом. С этого времени начались посещения отдела дифференциальных уравнений в научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК) при университете им. Н. И. Лобачевского. Вопросы о взаимном расположении замкнутых кривых в пространстве индуцировали необходимость учить топологию.

Учась на 4-м курсе, Владислав получил из Всероссийского общества слепых письмо с предложением познакомиться с девушкой Лидой, у которой была сильная близорукость. Молодые люди понравились друг другу. Лида работала медсестрой по лечебной физкультуре. Владислав через год должен был начать трудовую деятельность, и это побудило искать отдельное жилье. В канун Нового 1968 года Владислав Сергеевич получил квартиру в Ленинском районе г. Горького, и 14 февраля 1968 года, став мужем и женой, Владислав и Лида начали совместную жизнь. В конце 1968 года у них родился сын Тимур.

До этих счастливых событий летом 1967 года происходило распределение студентов по трудовым объектам необъятного Советского Союза. Владислав защитил диплом на отлично, но Е.А. Леонтович-Андропова не хотела брать Владислава в свой отдел. Однако ректор и декан выбили для него место, и с августа 1967 года Владислав Сергеевич начал работать в секторе отдела дифференциальных уравнений НИИ ПМК под руководством Самуила Хаймовича Арансона. Столы Владислава и Семы Арансона были рядом, и они стали разбираться в проблемах и задачах, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений. Наступило счастливое время, когда, как иногда тогда говорили, можно было за зарплату удовлетворять свое любопытство. Начальство

выдало Владиславу Сергеевичу пропуск со свободным посещением, и поэтому можно было выспаться и спокойно добраться до места работы (был один день в неделю, когда требовали обязательного присутствия). В отделе царил удивительно творческая атмосфера. Поразмыслив над интересной задачей, хотелось приехать в отдел и обсудить ее с коллегами и друзьями.

Уже в начале 1968 года Владислав и Сема написали работу о достаточных условиях отсутствия  $k$ -мерных интегральных циклов у автономных динамических систем в  $n$ -мерном,  $n \geq 4$ , евклидовом пространстве (многомерный аналог критерия Бендиксона). Однако Самуил Хаймович убрал свою фамилию из списка авторов, обеспечивая своему ученику наличие самостоятельных работ (это было важно и нужно при защите диссертации). Статья была послана в журнал «Дифференциальные уравнения» и вышла в 1970 году. То же самое произошло с продолжением этой работы, посланной в конце 1968 года в тот же журнал и напечатанной в том же году. После этого Владислав и Сема стали изучать регулярные компоненты гомеоморфизмов многомерной сферы, параллельно читая работы Дж. Биркгофа, Дж. Смита и монографию Людмилы Всеволодовны Келдыш. В начале 1970 года статья «Регулярные компоненты гомеоморфизмов  $n$ -мерной сферы» (Сема уже не стал убирать свою фамилию) была послана в «Математический сборник» и была опубликована в 1971 году. Обобщением этих результатов на произвольные многообразия Владислав Сергеевич занимался уже с Яном Лазаревичем Уманским, который пришел в отдел в 1971 году. Статья, которая в середине 1973 года была ими послана в журнал «Известия АН СССР (серия математическая)», вышла в 1974 году.

В 1971 году Владислав Сергеевич съездил на свою первую Всесоюзную конференцию в г. Тбилиси, а в 1974 году подготовил диссертацию, которую успешно защитил в 1975 году. Передовым предприятием был МГУ имени М. В. Ломоносова (отзыв писал Анатолий Михайлович Степин), а оппонентами были Я. Г. Синай и Е. А. Сидоров. В 1980 году в «Математическом сборнике» Владислав Сергеевич опубликовал работу о так называемой катастрофе голубого неба (для динамической системы на бутылке Клейна). Основные результаты этой работы, которую высоко оценили Д. В. Аносов и Л. П. Шильников, были перенесены на произвольные двумерные многообразия в 1992 году (опубликовано в «Математических заметках»).

Будучи еще студентом, Владислав заинтересовался проблемой Гильберта о числе предельных циклов полиномиальных систем на плоскости. Работая в НИИ ПМК, Владислав Сергеевич рассмотрел аналог этой проблемы для трехмерного пространства. В результате была построена двухпараметрическая полиномиальная (18-й степени) динамическая система, которая для счетного множества параметров была грубой системой с предельными циклами, представлявшими собой всевозможные торические узлы.

В дальнейшем Владислав Сергеевич плодотворно сотрудничал с Е. Л. Федоровым, В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, О. В. Починкой, Е. В. Жужомой и др. Среди иностранных соавторов были Карлос Гутиерриз, Самуил Лойд, Бенито Пирес, Христиан Бонатти и Элизабет Пеку. Приведем только некоторые из полученных им результатов. В 1994 году Владислав Сергеевич (совместно с Е. Л. Федоровым) получил достаточное и хорошо проверяемое условие рождения грубого предельного цикла из петли сепаратрисы для гамильтоновой системы на плоскости. Этот результат обобщал результат Л. С. Понтрягина (1934 года) о рождении грубого предельного цикла из периодической траектории.

Совместно с Е. В. Жужомой Владислав Сергеевич доказал, что на трехмерных замкнутых многообразиях не существует структурно устойчивых диффеоморфизмов с

двумерными аттракторами Плыкина. Когда об этом результате узнал Роман Васильевич Плыкин, то он признался, что много лет пытался построить трехмерный аналог своего знаменитого примера на двумерной сфере.

Совместно с В. З. Гринесом и Е. Я. Гуревич была получена классификация многомерных диффеоморфизмов Морса-Смейла при условии отсутствия гетероклинических пересечений. Было показано (совместно с В. З. Гринесом, Е. В. Жужомой и О. В. Починкой), что динамика произвольных систем Морса-Смейла может быть представлена как динамика с одним глобальным репеллером и одним глобальным аттрактором.

Владислав Сергеевич (совместно с Е. В. Жужомой) доказал, что если замкнутое многообразие допускает диффеоморфизм Морса-Смейла с неблуждающим множеством, состоящим из трех точек, то размерность этого многообразия может быть только 2, 4, 8 и 16. Для потоков Морса-Смейла с аналогичным неблуждающим множеством им была получена полная классификация.

Одним из последних результатов (полученных совместно с В. З. Гринесом и Е. В. Жужомой) является топологическое описание несущих многообразий для  $A$ -систем, динамика которых в некотором смысле представляет собой сочетание динамики систем Морса-Смейла и систем с базисными множествами коразмерности один.

После реорганизации в 2015 году НИИ ПМК Владислав Сергеевич продолжает свою научную деятельность в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики», (Нижний Новгород).

Свой юбилей Владислав Сергеевич встречает в полном расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, счастья и благополучия.

*Д. В. Баландин, М. К. Барина, В. Н. Белых, О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина,  
С. В. Гонченко, В. З. Гринес, Е. В. Губина, Е. Я. Гуревич, Л. С. Ефремова,  
Е. В. Жужома, Н. И. Жукова, С. Х. Зинина, А. О. Казаков, В. Е. Круглов,  
Е. В. Круглов, Л. М. Лерман, М. И. Малкин, Д. С. Малышев, В. К. Мамаев,  
Т. В. Медведев, Д. И. Минц, Т. М. Митрякова, А. Д. Морозов, А. И. Морозов,  
Е. В. Ноздринова, Е. Н. Пелиновский, Г. М. Полотовский, О. В. Починка,  
И. Д. Ремизов, А. В. Слюняев, Е. А. Таланова, Д. В. Тураев, Н. Г. Чебочко,  
Е. Е. Чилина, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «на-пример», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично выте-кать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным ста-тьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочета-ния в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не из-вестно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответ-ствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публи-ковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный ма-териал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математиче-ские выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018)*, 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.



## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society (American Mathematical Society)* and *European Mathematical Society (European Mathematical Society)*. To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе $\text{LaTeX}$

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета  $\text{MiKTeX}$ , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: `{УДК}` {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: `{MSC 2020}` {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

*Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

- а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

- г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`**

## Статьи в журналах на русском языке

### В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paref О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```



**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Выш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}
```

---

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package**

**Journal articles in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

**Journal articles in English:**

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oligier
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

```
\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Articles in collections in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

**Books (monographs and collections) in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

**Conference proceedings in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

---

---

## Алфавитный указатель авторов

|                 |     |
|-----------------|-----|
| Багаев А. В.    | 519 |
| Ноздринов А. А. | 531 |
| Починка А. И.   | 531 |
| Рассадин А. Э.  | 542 |
| Тарасов Д. В.   | 554 |
| Тында А. Н.     | 565 |

## Author Index

|                 |     |
|-----------------|-----|
| A. V. Bagaev    | 519 |
| A. A. Nozdrinov | 531 |
| A. I. Pochinka  | 531 |
| A. E. Rassadin  | 542 |
| D. V. Tarasov   | 554 |
| A. N. Tynda     | 565 |



В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 13.03.2023. Дата выхода в свет 31.03.2023. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 8,75 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 231.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

---

Editor: *S. Kh. Zinina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 13.03.2023. Date of publishing 31.03.2023. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 8,75.

Number of copies 100. Order no. 231.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia



