

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  24  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  4

2022



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 24, № 4. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 24, NO. 4. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют группе специальностей научных работников: 1.1. Математика и механика и специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal through the online store of periodicals «Press by subscription». Subscription index of the journal is E94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R.E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

## МАТЕМАТИКА

**В. И. Заботин, П. А. Чернышевский**

Применение диагонального подхода Сергеева и Квасова к построению методов глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных 399

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

**А. Н. Быков, М. Н. Вишнякова, Ю. Н. Дерюгин, А. Б. Емельянов, А. А. Лазарев, С. Н. Полищук, К. В. Черенкова**

Численное моделирование селективного лазерного плавления методом SPH 419

**А. Ю. Круковский, М. Е. Ладонкина, Ю. А. Повещенко, И. В. Попов**

Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад» . . . . . 436

**Д. А. Шишканов, М. В. Ветчинников, Ю. Н. Дерюгин**

Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел . . . . 452

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

**М. А. Шугурова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова**

Анализ методов моделирования данных суточной термометрии человека . 469

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 485

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 489

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 493

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 499

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 503

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 504

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**V. I. Zaboltn, P. A. Chernyshevskij**

Continuous global optimization of multivariable functions based on Sergeev  
and Kvasov diagonal approach . . . . . 399

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin, A. B. Emelyanov,  
A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk, K. V. Cherenkova**

Numerical simulation of selective laser melting by the SPH method . . . . . 419

**A. Yu. Krukovsky, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, I. V. Popov**

Classification of suspensions over Cartesian products of orientation-changing  
diffeomorphisms of a circle . . . . . 436

**D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin**

Peridynamics method for problems solve of solids destruction . . . . . 452

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**M. A. Shugurova, A. V. Tsyanov, Yu. V. Tsyanova**

Analysis of methods for modeling human daily thermometry data . . . . . 469

---

The rules of article design (in Russian) . . . . . 485

The rules of article design (in English) . . . . . 489

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 493

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . . 499

---

Author Index (In Russian) . . . . . 503

Author Index (in English) . . . . . 504

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.399-418

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.853.6

## Применение диагонального подхода Сергеева и Квасова к построению методов глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных

**В. И. Заботин, П. А. Чернышевский***КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (г. Казань, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В данной работе предлагается обобщение алгоритмов Стронгина и Пиявского поиска глобального экстремума в диагональной модификации Сергеева и Квасова на случай непрерывных функций многих переменных на многомерном параллелепипеде. Алгоритм Сергеева и Квасова, эффективно переносящий идеи одномерных алгоритмов Стронгина и Пиявского на многомерный случай, применим только для липшицевых функций. Авторами предлагается модификация указанного метода на непрерывные функции с применением введенного Вандербеєм Р. Дж. (Vanderbei R. J.) свойства  $\varepsilon$ -липшицевости, являющегося обобщением классического неравенства Липшица. Вандербеєм доказал, что любая равномерно непрерывная на выпуклом множестве функция с необходимостью и достаточностью обладает указанным свойством. Поскольку многомерный брус является выпуклым компактом, то в данной статье от целевой функции требуется только лишь непрерывность на области поиска. Авторами описываются шаги алгоритмов обобщенных методов Стронгина и Пиявского в модификации Сергеева и Квасова и доказываются достаточные условия сходимости. В качестве примера работы представленных методов в конце статьи приведены результаты расчетов для различных непрерывных, но не липшицевых функций с использованием трех известных стратегий разбиения: «деление на 2», «деление на  $2N$ » и «безызбыточная». Для первых двух стратегий указаны формулы вычисления новой поисковой точки и пересчета приближенной оценки  $\varepsilon$ -постоянной, а также предложена модификация алгоритмов, позволяющая рассчитывать новую поисковую точку на любом шаге.

**Ключевые слова:** глобальная оптимизация, нелипшицевая оптимизация, невыпуклая оптимизация,  $\varepsilon$ -липшицевость, непрерывная функция, сходимость

**Для цитирования:** Заботин В. И., Чернышевский П. А. Применение диагонального подхода Сергеева и Квасова к построению методов глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 399–418. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.399-418>

*Об авторах:*

**Заботин Владислав Иванович**, профессор кафедры прикладной математики и информатики, КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (420015, Россия, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, к. 7), доктор технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0732-5380>, [v.zabotin@rambler.ru](mailto:v.zabotin@rambler.ru)

© В. И. Заботин, П. А. Чернышевский



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

**Чернышевский Павел Андреевич**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева (420015, Россия, г. Казань, ул. Большая Красная, д. 55, к. 7), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5036-6375>, [pavelcomm@mail.ru](mailto:pavelcomm@mail.ru)

*Original article*

*MSC2020 90C26, 90C56, 65K05*

## Continuous global optimization of multivariable functions based on Sergeev and Kvasov diagonal approach

V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij

*Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (Kazan, Russian Federation)*

**Abstract.** One of modern global optimization algorithms is method of Strongin and Piyavskii modified by Sergeev and Kvasov diagonal approach. In recent paper we propose an extension of this approach to continuous multivariable functions defined on the multidimensional parallelepiped. It is known that Sergeev and Kvasov method applies only to a Lipschitz continuous function though it effectively extends one-dimensional algorithm to multidimensional case. So authors modify We modify mentioned method to a continuous functions using introduced by Vanderbei  $\varepsilon$ -Lipschitz property that generalizes conventional Lipschitz inequality. Vanderbei proved that a real valued function is uniformly continuous on a convex domain if and only if it is  $\varepsilon$ -Lipschitz. Because multidimensional parallelepiped is a convex compact set, we demand objective function to be only continuous on a search domain. We describe extended Strongin's and Piyavskii's methods in the Sergeev and Kvasov modification and prove the sufficient conditions for the convergence. As an example of proposed method's application, at the end of this article we show numerical optimization results of different continuous but not Lipschitz functions using three known partition strategies: "partition on 2", "partition on  $2N$ " and "effective". For the first two of them we present formulas for computing a new iteration point and for recalculating the  $\varepsilon$ -Lipschitz constant estimate. We also show algorithm modification that allows to find a new search point on any algorithm's step.

**Keywords:** global optimization, non-Lipschitz optimization, nonconvex optimization,  $\varepsilon$ -Lipschitz function, continuous function, convergence

**For citation:** V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij. Continuous global optimization of multivariable functions based on Sergeev and Kvasov diagonal approach. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 399–418. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.399-418>

*About the authors:*

**Vladislav V. Zabotin**, Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (55 Bolshaya Krasnaya St., Kazan 420015, Russia), Doctor of Technical Science, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0732-5380>, [v.zabotin@rambler.ru](mailto:v.zabotin@rambler.ru)

**Pavel A. Chernyshevskij**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics and Informatics, Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI (55 Bolshaya Krasnaya St., Kazan 420015, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5036-6375>, [pavelcomm@mail.ru](mailto:pavelcomm@mail.ru)

## 1. Введение

Задача поиска глобального экстремума функции достаточно часто встречается как в теории, так и на практике. В случае, если о свойствах целевой функции ничего не известно, то оправдано применение современных численных методов, основанных на эвристическом подходе (генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига, методы роевого интеллекта и тому подобное). Однако подобные методы не гарантируют, что найденное решение будет с достаточной точностью глобальным.

Хорошо известно, что свойство липшицевости функции является одной из характеристик функции, позволяющей конструировать приближенные методы глобальной оптимизации и доказывать достаточные условия их сходимости. Использование неравенства Липшица для проектирования численных методов одним из первых предложил С. А. Пиявский в работах [1–2]. Построенный им алгоритм, получивший в российской литературе название «метод ломаных», позволяет, зная оценку постоянной Липшица, итерационно вычислить точку глобального минимума функции на отрезке и соответствующее значение функции. Позднее было разработано и предложено множество других подходов, опирающихся на указанное свойство, например [3–4]. Отдельно можно выделить книгу Р. Г. Стронгина [5], в которой предлагается алгоритм минимизации функции на отрезке, не требующий предварительного знания оценки константы Липшица и рассчитывающего приближение этой оценки на каждом шаге вычислений. Если говорить о современном состоянии вопроса, то интерес к оптимизации липшицевых функций сохраняется и сегодня. Так, необходимо отметить работу Я. Д. Сергеева и Д. Е. Квасова [6], где авторами предложено эффективное обобщение алгоритмов Пиявского и Стронгина на многомерный случай с помощью диагонального подхода. В библиографии этой же книги приведен исчерпывающий список трудов и исследователей по данной тематике.

Ключевым требованием всех вышеперечисленных методов является либо наличие априорного знания оценки постоянной Липшица, либо *уверенность*, что целевая функция является липшицевой на области поиска. Возникает задача построения численных методов поиска глобального минимума для функций более широкого класса – непрерывных (и, может быть, нелипшицевых). Например, поиск глобального минимума функции  $f(x) = \sqrt{|x|}$  на отрезке  $[-1; 1]$  или более нетривиальный пример – нигде не дифференцируемую на отрезке непрерывную функцию типа функции Вейерштрасса ([7, с. 52]). В последнем случае о неравенстве Липшица говорить не приходится.

Первой работой, в которой автор отказался от липшицевости функции, была работа Р. Дж. Вандербея [8]. В ней вводится понятие  $\varepsilon$ -липшицевости, обобщающее в некотором смысле классическое определение липшицевости: функция  $f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , называется  $\varepsilon$ -липшицевой, если имеет место условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L(\varepsilon) < +\infty \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq L(\varepsilon) \|x - y\| + \varepsilon. \quad (1.1)$$

Несмотря на то что в литературе встречаются и другие обобщения и расширения понятия липшицевости, такие как условие Гельдера, полулипшицевость [9],  $Q$ -липшицевость [10],  $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ -липшицевость [11],  $\delta$ -липшицевость [12] и многие другие, условие (1.1), как это выяснилось, эквивалентно определению равномерной непрерывности.

Вандербеем доказана следующая теорема.

Определенная на выпуклом множестве  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на нем тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.1).

Очевидное следствие из теоремы: если множество  $A$  дополнительно замкнуто и ограничено (что является естественным предположением), то непрерывность функции  $f(x)$  необходима и достаточна для выполнения (1.1).

Условие  $\varepsilon$ -липшицевости также позволяет строить и обосновывать численные алгоритмы минимизации. В работе [8] показано, как можно обобщить метод ломаных на случай только непрерывной на отрезке функции (формально алгоритм был обоснован позже в статье [13]). Впоследствии в работе [14] аналогичное обобщение, а также доказательство сходимости, предложены для метода равномерного перебора Евтушенко. Реализация указанных алгоритмов, однако, требует знания зависимости величины  $L(\varepsilon)$  от значения  $\varepsilon > 0$ . В явном виде для некоторых функций одной переменной такие зависимости были получены в работах [8], [14–15]. Обобщение на непрерывный случай метода Стронгина и его теоретическое обоснование предлагается в работе [16]. Последний алгоритм не требует априорного знания зависимости  $L(\varepsilon)$  от  $\varepsilon > 0$ , поскольку оценка  $L(\varepsilon)$  рассчитывается адаптивно и может применяться для любой непрерывной на отрезке функции без предварительных выкладок.

В настоящее время ведутся исследования по приложению свойства (1.1) к проектированию методов глобальной оптимизации функций многих переменных. В статье [17] предложено два алгоритма глобальной минимизации непрерывной функции на  $n$ -мерном параллелепипеде и доказано, что за конечное число шагов достигается оптимальное решение задачи с заданной точностью. Там же получены формулы зависимости величины  $L(\varepsilon)$  от  $\varepsilon > 0$  для некоторых нелипшицевых функций двух переменных и приведены результаты численных экспериментов оптимизации этих функций.

В данной статье предлагается другой подход к использованию  $\varepsilon$ -липшицевости в контексте глобальной оптимизации непрерывных функций многих переменных, основанный на диагональном подходе Сергеева и Квасова [6]. Как было сказано выше, диагональная модификация позволяет успешно применять одномерные алгоритмы Стронгина и Пиявского для поиска глобального минимума функции на  $n$ -мерном брусе.

Во второй части настоящей работы описаны аналогичные диагональные модификации для обобщенных методов Стронгина и Пиявского из работ [16] и [13]. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости модифицированных методов.

В третьей части приведены результаты расчетов для функций из работы [17], их вариаций на случай трех переменных, а также в качестве примера приближенно рассчитан глобальный минимум нелипшицевой функции десяти аргументов.

## 2. Описание алгоритмов и их обоснование

Прежде чем перейти к формулировкам алгоритмов, необходимо дать некоторые пояснения. Целевая функция  $f(x)$  предполагается непрерывной на  $n$ -мерном параллелепипеде  $D = [a; b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a^j \leq x^j \leq b^j, j = \overline{1, n}\}$ , который, как и в работе [6], будем называть гиперинтервалом. Ясно, что  $D$  – выпуклый компакт, а значит, для  $f(x)$  справедливо выполнение (1.1) при  $A = D$ . Для  $f(x)$  и  $D$  определим множество  $\{L(\varepsilon)\}$  всех констант  $L(\varepsilon)$  из (1.1) при фиксированном  $\varepsilon > 0$ . Через  $l(\varepsilon) = \inf \{L(\varepsilon)\}$  обозначим минимальную оценку  $\varepsilon$ -постоянной Липшица, которая достигается [18].

Несложно заметить, что в общем случае из условия (1.1) не следует строгая положительность  $l(\varepsilon)$ . Поэтому воспользуемся определением согласованности, введенным в работе [18]: функцию  $f(x)$  и величину  $\varepsilon > 0$  назовем согласованной на множестве  $A$ , если существуют такие  $x_0, y_0 \in A$ , что  $0 < \varepsilon < |f(x_0) - f(y_0)|$ . В той же работе доказано, что для согласованных  $f(x)$  и  $\varepsilon > 0$  оценка  $l(\varepsilon) > 0$  и, кроме того, существуют



такие точки  $x_1, y_1 \in A$ , что  $|f(x_1) - f(y_1)| = l(\varepsilon) \|x_1 - y_1\| + \varepsilon$ , т. е. оценка  $l(\varepsilon)$  достижима. Все методы будут изложены для согласованных  $f(x)$  и  $\varepsilon > 0$  на области поиска  $D$ . Поскольку величина  $\varepsilon > 0$  берется достаточно малой, то условие согласованности не является обременительным.

Теперь сформулируем алгоритмы А и Б, позволяющие приближённо найти глобальный минимум  $f(x)$  на  $D$ .

**Алгоритм А** (применение обобщенного метода Стронгина [16] в диагональной модификации Сергеева и Квасова).

**Вход:**

- 1) функция  $f(x)$ , непрерывная на гиперинтервале  $D = [a; b]$ ;
- 2) величина  $\varepsilon > 0$ , согласованная с функцией  $f(x)$  на  $D$ ;
- 3) точность  $\delta > 0$ .

**Выход:**

- 1) приближенное значение величины  $f_* = \min_{x \in D} f(x)$ ;
- 2) точка  $x_*$  области  $D$ , в которой достигается указанное приближенное значение;
- 3) приближенная снизу оценка  $l_*(\varepsilon)$  величины минимальной  $\varepsilon$ -постоянной Липшица  $l(\varepsilon)$  функции  $f$  на области  $D$ .

**Шаг 0.** Установить значение счетчика гиперинтервалов на первом шаге равным  $M = 1$  и построить разбиение начального гиперинтервала  $\{D^1\} = \{D\}$ . Задать параметр алгоритма  $\nu > 0$  и задать ограниченную последовательность  $\mu_k > 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Положить  $k = 1$  и построить множество  $X_k$ , содержащее поисковые точки  $x \in D$ , найденные во время работы алгоритма на шаге  $k$ .

**Шаг 1.** На основе построенных на текущем шаге гиперинтервалов  $D_i^k = [a_i; b_i]$  ( $1 \leq i \leq M$ ) вычислить величину  $l_k(\varepsilon)$

$$l_k(\varepsilon) = \max_{0 \leq i \leq M} \frac{|f(a_i) - f(b_i)| - \varepsilon}{\|a_i - b_i\|}. \quad (2.1)$$

Далее рассчитать оценку

$$L_k(\varepsilon) = \begin{cases} \mu_k l_k(\varepsilon), & l_k(\varepsilon) > 0; \\ \nu, & l_k(\varepsilon) \leq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Шаг 2.** Для каждого гиперинтервала  $D_i^k = [a_i; b_i]$  ( $1 \leq i \leq M$ ) вычислить характеристику, аналогичную (4.14) из [6, с. 180],

$$R_k(i, \varepsilon) = L_k(\varepsilon) \|a_i - b_i\| + \frac{(f(a_i) - f(b_i))^2}{L_k(\varepsilon) \|a_i - b_i\| + \varepsilon} - 2(f(a_i) + f(b_i)). \quad (2.3)$$

Далее определить минимальный номер  $s$ , такой что

$$R_k(s, \varepsilon) = \max_{1 \leq i \leq M} R_k(i, \varepsilon). \quad (2.4)$$

**Шаг 3.** Проверить условие останова:

$$\|a_s - b_s\| \leq \delta \|a - b\|. \quad (2.5)$$

Если оно выполнено, то среди всех точек  $x \in X_k$  найти точку  $x_* = \arg \min_{x \in X_k} f(x)$ , положить  $f_* = f(x_*)$ ,  $l_*(\varepsilon) = l_k(\varepsilon)$  и завершить алгоритм. Если условие (2.5) не выполняется, то перейти к шагу 4.

**Шаг 4.** Провести разбиение гиперинтервала  $D_s^k$  и построить новое разбиение  $\{D^{k+1}\}$  в соответствии с выбранной стратегией разбиения. Увеличить счетчик  $k = k+1$ , изменить значение  $M$ , перенумеровать гиперинтервалы, построить новое множество  $X_k$  и перейти к шагу 1. Алгоритм описан.

**З а м е ч а н и е 2.1.** Шаг 4 допускает применение стратегий, которые используются для липшицевых функций, например, в работе [6]. Необходимо при этом помнить, что простой перенос стратегий «липшицевого» случая на случай непрерывной функции не всегда возможен. Так, при реализации стратегий «деление на  $2N$ » и «деление на 2» возможна ситуация, что поисковая точка  $v_s$ , которая вычисляется на диагонали лучшего гиперинтервала  $D_s^k$ , может не принадлежать этому интервалу, что наблюдалось в ходе вычислительных экспериментов. Здесь можно воспользоваться теми же рассуждениями, что и в работах [16] и [13], где сходная проблема подробно описана для функции одной переменной. Использование же безызыбыточной стратегии из [19], для сравнения, не вызывает никаких дополнительных трудностей.

**Алгоритм Б** (применение обобщенного метода Пиявского [8; 13] в диагональной модификации Сергеева и Квасова).

**Вход:**

- 1) функция  $f(x)$ , непрерывная на гиперинтервале  $D = [a; b]$ ;
- 2) величина  $\varepsilon > 0$ , согласованная с функцией  $f(x)$  на  $D$ ;
- 3) оценка  $L(\varepsilon)$  минимальной  $\varepsilon$ -постоянной Липшица  $l(\varepsilon)$  функции  $f(x)$  на области  $D$  (может быть получена, например, в результате выполнения алгоритма, описанного в работе [18]);
- 4) точность  $\delta > 0$ .

**Выход:**

- 1) приближенное значение величины  $f_* = \min_{x \in D} f(x)$ ;
- 2) точка  $x_*$  области  $D$ , в которой достигается указанное приближенное значение.

**Шаг 0.** Установить значение счетчика гиперинтервалов на первом шаге равным  $M = 1$  и построить разбиение начального гиперинтервала  $\{D^1\} = \{D\}$ . Положить  $k = 1$ .

**Шаг 1.** Для каждого гиперинтервала  $D_i^k = [a_i; b_i]$  ( $1 \leq i \leq M$ ) вычислить характеристику

$$R_k(i, \varepsilon) = \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2} - L(\varepsilon) \frac{\|b_i - a_i\|}{2}. \quad (2.6)$$

Далее определить минимальный номер  $s$  такой, что

$$R_k(s, \varepsilon) = \min_{1 \leq i \leq M} R_k(i, \varepsilon). \quad (2.7)$$

**Шаги 2–3.** Аналогичны шагам 3 и 4 алгоритма А соответственно. Справедливо также замечание 2.1, что дано к шагу 4 алгоритма А. Алгоритм описан.

Для доказательства сходимости предложенных методов введем следующие обозначения. За  $X_*$  примем множество точек глобального минимума функции  $f(x)$  на  $D$ , а за  $f_*$  – соответствующее значение функции в этих точках, т. е.  $f_* = f(x_*)$ ,  $x_* \in X_*$ . Найденные в ходе работы алгоритмов точки из  $X$  образуют некоторую последовательность, пусть  $\{x_{m(k)}\}$ . Через  $X'$  обозначим все предельные точки  $\{x_{m(k)}\}$ . Поскольку  $D$  компактно, то  $X' \neq \emptyset$ .

Для обоснования достаточных условий сходимости алгоритма А сформулируем и докажем предложения 1 и 2, развивающие предложения 1 и 2 из работы [16, с. 1115] и обобщающие в некотором роде теоремы 5.1–5.3 из [6, с. 228] на случай непрерывной функции.

**Предложение 2.1.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $D$ , значение  $\varepsilon > 0$  и функция  $f(x)$  согласованы на  $D$ , а  $x'$  и  $x''$  – любые две предельные точки последовательности  $\{x_{m(k)}\}$ , построенной в ходе работы алгоритма А. Тогда справедливы соотношения

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(x_{m(k)}) \quad (\forall m(k)), \quad (2.8)$$

и

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** Точки последовательности  $\{x_{m(k)}\}$  являются вершинами соответствующих гиперинтервалов  $D_{i(k)}^k$ . Выделим из  $D_{i(k)}^k$  последовательность вложенных друг в друга гиперинтервалов  $D_{p(k)}^k = [a_{p(k)}; b_{p(k)}]$ , содержащих точку  $x' \in X'$ . Для этой последовательности в силу ее построения верно, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D_{p(k)}^k = \lim_k a_{p(k)} = \lim_k b_{p(k)} = x', \quad (2.10)$$

а также

$$R_k(p(k), \varepsilon) \geq R_k(i, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, M(k) \quad (2.11)$$

для любого номера  $k$ .

Рассмотрим характеристику гиперинтервала  $R_k(i, \varepsilon)$  алгоритма А (см. (2.3)) и запишем её в следующем виде:

$$R_k(i(k), \varepsilon) = (L_k(\varepsilon) \|a_{i(k)} - b_{i(k)}\| + \varepsilon) \left( 1 + \frac{f(a_{i(k)}) - f(b_{i(k)})}{L_k(\varepsilon) \|a_{i(k)} - b_{i(k)}\| + \varepsilon} \right)^2 - 4f(a_{i(k)}) - \varepsilon,$$

$$R_k(i(k), \varepsilon) = (L_k(\varepsilon) \|a_{i(k)} - b_{i(k)}\| + \varepsilon) \left( 1 - \frac{f(a_{i(k)}) - f(b_{i(k)})}{L_k(\varepsilon) \|a_{i(k)} - b_{i(k)}\| + \varepsilon} \right)^2 - 4f(b_{i(k)}) - \varepsilon.$$

Отсюда с учетом (2.1) и (2.2) получаем неравенства

$$R_k(i(k), \varepsilon) \geq -4f(a_{i(k)}) - \varepsilon$$

и

$$R_k(i(k), \varepsilon) \geq -4f(b_{i(k)}) - \varepsilon,$$

из которых выводим

$$R_k(i(m(k)), \varepsilon) \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, M(k) \quad (2.12)$$

для всех чисел  $k$ .

Используя соотношения (2.11) и (2.12) легко показать, что

$$R_k(p(k), \varepsilon) \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, M(k).$$

Переходя к пределу по  $k$  и учитывая (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), а также непрерывность  $f(x)$ , запишем неравенство

$$\lim_k R_k(p(k), \varepsilon) = -4f(x') \geq -4f(x_{m(k)}) - \varepsilon \quad (\forall m(k)),$$

откуда непосредственно следует оценка (2.8). Для получения (2.9) можно воспользоваться аналогичными рассуждениями, что и при доказательстве предложения 1 из [16].  
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

**П р е д л о ж е н и е 2.2.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $D$ , значение  $\varepsilon > 0$  и функция  $f(x)$  согласованы на  $D$ , а  $x'$  – предельная точка последовательности  $\{x_{m(k)}\}$ , построенной по алгоритму  $A$ . Если начиная с некоторой итерации  $k'$  метода выполняется условие

$$L_k(\varepsilon) \geq 2\sqrt{2}l(\varepsilon) \text{ при } k \geq k', \quad (2.13)$$

то верна оценка

$$|f(x') - f_*| \leq \varepsilon. \quad (2.14)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Как следует из замечания 2 работы [16, с. 1116], возможен такой выбор параметров  $\nu$  и  $\mu_k$  алгоритма  $A$ , при котором выполняется ограничение (2.13).

Рассмотрим последовательность гиперинтервалов  $D_{s(k)}^k = [a_{s(k)}; b_{s(k)}]$ , содержащих точку  $x_* \in X_*$ . В силу условия (1.1), положительности  $l(\varepsilon)$  и определения  $X_*$  получим:

$$f(a_{s(k)}) - f(x_*) \leq l(\varepsilon) \|a_{s(k)} - x_*\| + \varepsilon$$

и

$$f(b_{s(k)}) - f(x_*) \leq l(\varepsilon) \|b_{s(k)} - x_*\| + \varepsilon.$$

Сложим эти неравенства и воспользуемся леммой 5.1 из [6, с. 230]:

$$\begin{aligned} f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)}) &\leq l(\varepsilon) (\|a_{s(k)} - x_*\| + \|b_{s(k)} - x_*\|) + 2\varepsilon + 2f(x_*) \leq \\ &\leq (\text{лемма 5.1}) \leq \sqrt{2}l(\varepsilon) \|a_{s(k)} - b_{s(k)}\| + 2\varepsilon + 2f(x_*). \end{aligned}$$

Для характеристики  $R_k(s(k), \varepsilon)$  из (2.3) с учетом доказанного выше неравенства и условия (2.13) справедливо

$$\begin{aligned} R_k(s(k), \varepsilon) &\geq L_k(\varepsilon) \|a_{s(k)} - b_{s(k)}\| - 2(f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)})) \geq \\ &\geq (L_k(\varepsilon) - 2\sqrt{2}l(\varepsilon)) \|a_{s(k)} - b_{s(k)}\| - 4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x_*). \end{aligned}$$

Из этого, с учетом (2.11) и определения  $X_*$ , следует, что

$$R_k(p(k), \varepsilon) \geq R_k(s(k), \varepsilon) \geq -4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x')$$

для всех  $k$ . Переходя к пределу по  $k$  как и при доказательстве предложения 2.1, запишем неравенство

$$-4f(x') \geq -4\varepsilon - 4f(x_*) \geq -4\varepsilon - 4f(x'),$$

из которого несложно получить оценку (2.14).

**Доказательство завершено.**

Для алгоритма Б, в свою очередь, справедливы следующие два предложения, из которых вытекают аналогичные достаточные условия сходимости к глобальному минимуму.

**Предложение 2.3.** Пусть выполнены все условия предложения 2.1, последовательность  $\{x_{m(k)}\}$  построена в результате работы алгоритма Б, а  $x'$  и  $x''$  – любые две предельные точки этой последовательности. Тогда справедливы оценки

$$f(x') - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_{m(k)}) \quad (\forall m(k)) \quad (2.15)$$

и

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.16)$$

**Доказательство.** Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 2.1 с заменой соотношения (2.11) на аналогичное

$$R_k(p(k), \varepsilon) \leq R_k(i, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, M(k). \quad (2.17)$$

Далее для характеристики  $R_k(i, \varepsilon)$  алгоритма Б (2.6) получим в силу (1.1):

$$\begin{aligned} 2(R_k(i(k), \varepsilon) - f(a_{i(k)})) &= f(b_{i(k)}) - f(a_{i(k)}) - L(\varepsilon) \|b_{i(k)} - a_{i(k)}\| = \\ &= f(b_{i(k)}) - f(a_{i(k)}) - L(\varepsilon) \|b_{i(k)} - a_{i(k)}\| + \varepsilon - \varepsilon \leq (\varepsilon - \text{липшицевость}) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

из чего следует

$$R_k(i(k), \varepsilon) \leq f(a_{i(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для  $b_{i(k)}$ :

$$R_k(i(k), \varepsilon) \leq f(b_{i(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств и (2.17) вытекает неравенство, схожее по смыслу с (2.12),

$$R_k(i(m(k)), \varepsilon) \leq f(x_{m(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, \dots, M(k), \quad (2.18)$$

которое верно для всех чисел  $k$ .

Продолжив доказательство аналогично случаю в предложении 2.1, но заменив (2.11) на (2.17) и (2.12) на (2.18), получим оценки (2.15) и (2.16).

**Доказательство завершено.**

**Предложение 2.4.** Пусть выполнены все условия предложения 2.2, последовательность  $\{x_{m(k)}\}$  получена по алгоритму Б и  $x'$  – предельная точка этой последовательности. Кроме того, пусть величина  $L(\varepsilon)$  такова, что

$$L(\varepsilon) \geq \sqrt{2}l(\varepsilon). \quad (2.19)$$

Тогда справедлива оценка (2.14).

**Доказательство.** Очевидно, что выбор оценки  $L(\varepsilon)$ , удовлетворяющей неравенству (2.19) при фиксированном  $\varepsilon > 0$ , всегда возможен.

Рассматривая далее последовательность гиперинтервалов  $D_{s(k)}^k = [a_{s(k)}; b_{s(k)}]$  из доказательства предложения 2.2, получим в силу (2.19) следующие неравенства для характеристики  $R_k(s(k), \varepsilon)$ , определяемой формулой (2.5):

$$\begin{aligned} R_k(s(k), \varepsilon) &= \frac{f(a_{s(k)}) + f(b_{s(k)})}{2} + \frac{L(\varepsilon)}{2} \|a_{s(k)} - b_{s(k)}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( (\sqrt{2}l(\varepsilon) - L(\varepsilon)) \|a_{s(k)} - b_{t(k)}\| \right) + \varepsilon + f(x_*) \leq \varepsilon + f(x_*). \end{aligned}$$

Далее идея доказательства совпадает с доказательством предложения 2.2, с заменой (2.11) на (2.17).

**Доказательство завершено.**

### 3. Численные эксперименты

В данном разделе приведем результаты численных экспериментов, проведенных предлагаемыми алгоритмами А и Б. В качестве стратегий разбиения были взяты «деление на 2», «деление на  $2N$ » и «безызыбочная», принцип работы которых подробно описан в книге [6].

В алгоритме А при реализации стратегий «деление на 2» и «деление на  $2N$ » при разбиении гиперинтервала  $D_s^k = [a_s; b_s]$  очередная поисковая точка  $v_s$  вычислялась по формуле

$$v_s = \frac{a_s + b_s}{2} - \frac{(f(b_s) - f(a_s))}{2L_k(\varepsilon) \|b_s - a_s\|} (b_s - a_s), \quad (3.1)$$

обобщающую формулу (4.15) из [6, с. 180]. Поскольку, как отмечалось выше, формула (3.1) не гарантирует принадлежность  $v_s$  интервалу  $D_s^k$ , в алгоритм А были добавлены шаги, аналогичны шагам 3 и 4 метода описанного в работе [16]. Очевидно, что при увеличении  $L_k(\varepsilon)$  в (3.1) при фиксированных вершинах гиперинтервала итерационная точка  $v_s$  будет принадлежать  $D_s^k$  после конечного числа итераций, увеличивающих  $L_k(\varepsilon)$ . Параметр  $\mu_k$  находится по формуле (4.16) из [6, с. 180]:

$$\mu_k = \left( 4 + \frac{C}{k} \right), \quad (3.2)$$

где  $C > 0$  задается вычислителем.

В алгоритме Б при реализации тех же стратегий «деление на 2» и «деление на  $2N$ » точка  $v_s$  вычислялась по формуле

$$v_s = \frac{a_s + b_s}{2} - \frac{(f(b_s) - f(a_s))}{2l(\varepsilon) \|b_s - a_s\|} (b_s - a_s), \quad (3.3)$$

аналогичной формуле 4.12 из [6, с. 178], т. к. оценка  $l(\varepsilon)$  при фиксированном  $\varepsilon > 0$  предполагается известной. Для того, чтобы точка  $v_s$  гарантированно принадлежала диагонали интервала  $D_s^k$ , алгоритм Б, как и алгоритм А, был дополнен итерационной процедурой, увеличивающей используемое для (3.3) значение оценки  $l(\varepsilon)$ .

Эффективная стратегия, предложенная в [6, с. 178] и [19], не требует вычисления поисковой точки на диагонали лучшего интервала, а потому никаких доработок алгоритмов А и Б не потребовалось.

Далее для таблиц 3.1-3.4 использованы следующие обозначения: точность  $\delta$ ; стратегии разбиения  $P$ : 2 – «деление на 2»,  $2N$  – «деление на  $2N$ »,  $E$  – «безызбыточная»;  $M$  – общее число гиперинтервалов;  $L_k(\varepsilon)$  – оценка минимальной  $\varepsilon$ -постоянной Липшица, полученная в ходе работы алгоритма А;  $C$  – параметр алгоритма А в формуле (3.2);  $l(\varepsilon)$  – оценка минимальной  $\varepsilon$ -постоянной Липшица.

Все вычисления проведены для евклидовой нормы.

**Таблица 3.1.** Результаты вычислений с помощью алгоритма А для функций

$f_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Table 3.1.** Algorithm «А» computational results for test functions

$f_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$i$	$P$	$\delta$	$\varepsilon$	$C$	$(x_*, y_*)$	$f_i(x_*, y_*)$	$M$	$L_k(\varepsilon)$
1	2	0.01	0.5	100	(0.073992; -0.055940)	-7.750060	251	7.682
		0.01	0.1	100	(-0.019504; 0.035254)	-8.474976	715	16.525
		$10^{-5}$	1.0	10	(0.073992; 0.010002)	-8.147025	380	5.620
	2N	0.08	0.5	100	(0.317807; 0.317807)	-5.690744	515	6.062
		0.08	0.1	10000	(0.020285; 0.0202854)	-8.672509	159	37.157
		0.01	0.5	100	(-0.041152; 0.074074)	-7.866062	518	18.539
	E	0.01	0.1	100	(-0.002743; -0.002743)	-9.489698	10002	133.964
		$10^{-5}$	1.0	10	(2.25E - 5; 2.25E - 5)	-9.952594	168	11.156
		0.01	0.5	100	(0.163965; -0.043142)	-9.342395	117	16.419
2	2	0.01	0.1	100	(0.163965; -0.043142)	-9.342395	1282	24.407
		$10^{-5}$	1.0	10	(-0.032203; -0.008222)	-11.363615	1499	20.070
		0.01	0.5	100	(-0.025239; -0.025239)	-11.215474	254	33.185
	2N	0.01	0.1	2000	(-0.025239; -0.025239)	-11.215474	323	154.505
		$10^{-5}$	1.5	10	(5.08E - 5; 5.08E - 5)	-12.647243	3467	33.432
		0.01	0.5	100	(-0.041152; 0.074074)	-10.401066	864	42.544
	E	$10^{-3}$	0.1	100	(-0.002743; -0.002743)	-12.207576	8112	135.933
		$10^{-5}$	1.0	10	(2.25E - 5; 2.25E - 5)	-12.670875	798	32.235
		0.06	0.5	100	(-9.175384; -9.074912)	-4.674386	1615	12.067
	2	0.07	0.1	100	(9.559754; -10.0)	-4.603072	1611	14.974
		0.01	0.5	100	(9.53125; -9.53125)	-5.3210644	4811	14.553
		0.01	0.1	100	(9.53125; -9.53125)	-5.3210644	7097	16.515
3	2N	0.01	0.5	100	(-9.506172; -9.506172)	-5.330926	934	11.092
		0.01	0.1	100	(-9.506172; -9.506172)	-5.330926	1102	13.803
		0.01	0.1	100	(-9.506172; -9.506172)	-5.330926	1102	13.803
	E	0.01	0.1	100	(-9.506172; -9.506172)	-5.330926	1102	13.803

**Таблица 3.2.** Результаты вычислений с помощью алгоритма Б для функций  $f_i(x, y), i = 1, 2, 3$   
**Table 3.2.** Algorithm «Б» computational results for test functions  $f_i(x, y), i = 1, 2, 3$

$i$	$P$	$\delta$	$\varepsilon$	$l(\varepsilon)$	$(x_*, y_*)$	$f_i(x_*, y_*)$	$M$
1	2	0.01	0.5	25	$(-0.019504; 0.035254)$	-8.474976	5372
		0.03	0.1	125	$(-0.128338; -0.055940)$	-7.381970	3522
		$10^{-5}$	1.0	12.5	$(0.004509; 0.0103147)$	-9.175077	2807
	2N	0.01	0.5	25	$(0.317807; 0.317807)$	-5.690744	1529
		0.1	0.1	125	$(0.317807; 0.317807)$	-5.690744	1571
		$10^{-5}$	2.5	5	$(5.51E - 5; 5.51E - 5)$	-9.926038	2987
	E	0.01	0.5	25	$(-0.041152; 0.074074)$	-7.866062	1748
		0.01	0.1	125	$(-0.041152; 0.074074)$	-7.866062	6942
		$10^{-5}$	2.5	5	$(2.25E - 5; 2.25E - 5)$	-9.952594	148
2	2	0.1	0.5	33.539	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	291
		0.08	0.1	133.539	$(0.163965; -0.043142)$	-9.342395	590
	2N	0.01	0.5	33.539	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	314
		0.08	0.1	133.539	$(-0.025239; -0.025239)$	-11.215474	575
	E	0.01	0.5	33.539	$(-0.041152; 0.074074)$	-10.401066	2488
		0.01	0.1	133.539	$(-0.041152; 0.074074)$	-10.401066	6702
		$10^{-5}$	1.0	21.039	$(2.25E - 5; 2.25E - 5)$	-12.670875	912
3	2	0.1	0.5	9.700	$(9.559754; -10.0)$	-4.603072	567
		0.09	0.1	25.803	$(9.559754, -10.0)$	-4.603072	715
	2N	0.01	0.5	9.700	$(-10.0, -10.0)$	-3.995422	287
		0.05	0.1	25.803	$(9.375, -9.375)$	-5.272921	1295
	E	0.01	0.5	9.700	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	1670
		0.01	0.1	25.803	$(-9.506172; -9.506172)$	-5.330926	6794

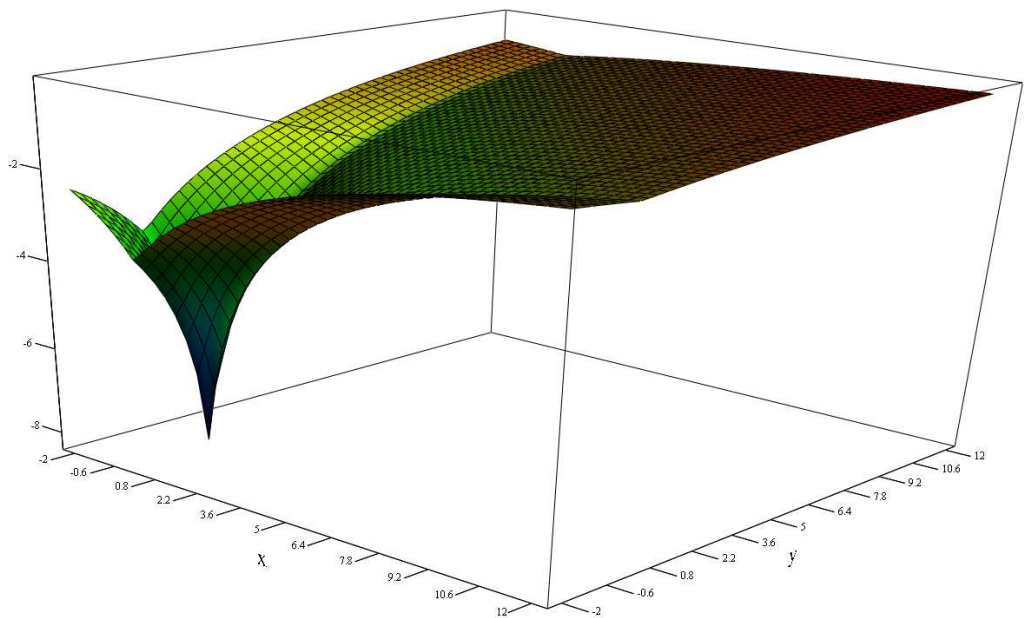
**Пример 3.1.** Найдем глобальный минимум следующих функций

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= -10e^{-\sqrt{0.5(|x|+|y|)}} \text{ на } [-2; 12]^2, \\ f_2(x, y) &= f_1(x, y) - e^{0.5(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y))} \text{ на } [-2; 12]^2, \\ f_3(x, y) &= - \left| \cos x \cos y e^{0.5 \left| 1 - \sqrt{|x|+|y|} \right|} \right| \text{ на } [-10; 10]^2. \end{aligned}$$

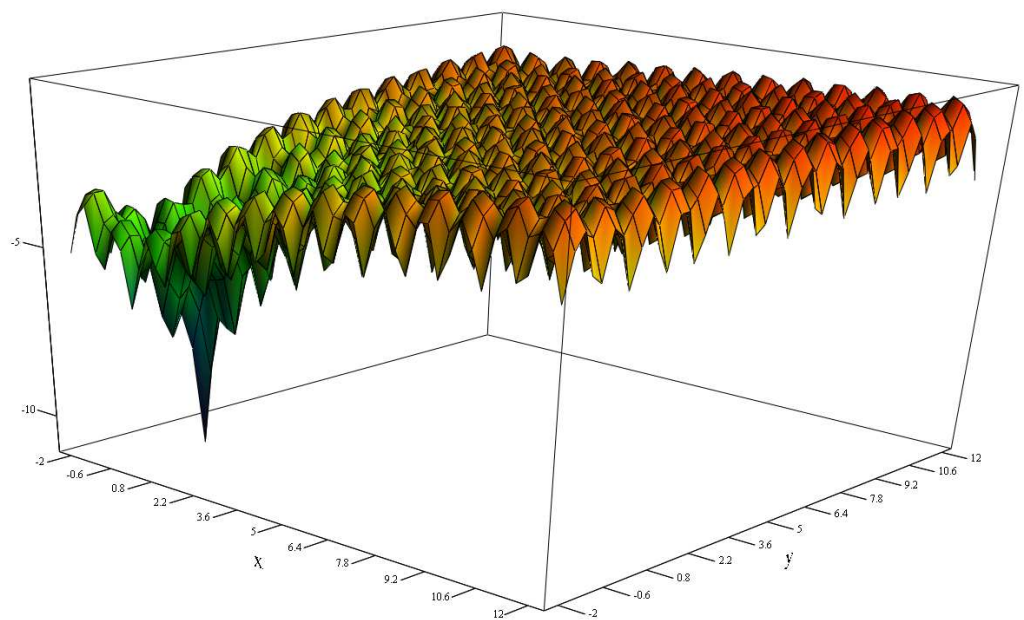
рассмотренных в работе [17]. В той же работе получены формулы для оценивания величины  $l(\varepsilon)$  при фиксированном  $\varepsilon > 0$ . Отметим, что данные функции непрерывны на области поиска, но не липшицевы. Результаты вычислений алгоритмами А и Б для трех стратегий разбиения приведены в Таблицах 3.1 и 3.2 соответственно. Для наглядности на Рис. 3.1 – 3.3 изображены графики оптимизируемых функций для указанных начальных гиперинтервалов.

Поскольку безызыбочная (эффективная) стратегия в целом показала лучший результат, то все последующие вычислительные эксперименты проводились только для данной стратегии.

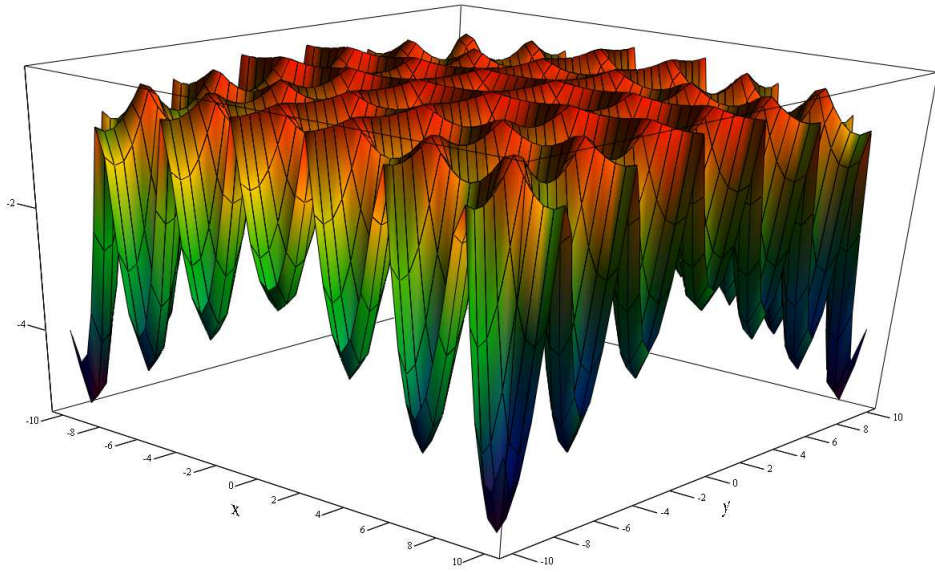




**Рис. 3.1.** График тестовой функции  $f_1(x, y)$   
**Fig 3.1.** Test function  $f_1(x, y)$  plot



**Рис. 3.2.** График тестовой функции  $f_2(x, y)$   
**Fig 3.2.** Test function  $f_2(x, y)$  plot



**Рис. 3.3.** График тестовой функции  $f_3(x, y)$   
**Fig 3.3.** Test function  $f_3(x, y)$  plot

**Пример 3.2.** Требуется найти глобальный минимум непрерывных функций:

$$f_4(x, y) = \min \left( \sqrt{|x+4| + |y+4|} - 1, \sqrt{|x+1| + |y+1|} - 1.005, \sqrt{|x-3| + |y-3|} + 0.5 \right)$$

и

$$f_5(x, y) = \sin(5y) \arcsin(x) - \sin(5x) \arcsin(y),$$

заданных на различных начальных гиперинтервалах поиска, на которых эти функции не являются липшицевыми. Функция  $f_4$  является модификацией функции одной переменной  $f_1$  из статьи [16], где она была оптимизирована обобщенным алгоритмом Стронгина. Функция  $f_5$  приведена в качестве примера в работе [17], где для неё была получена процедура получения значения  $l(\varepsilon)$  при заданном  $\varepsilon > 0$ . Оптимизация данных функций  $f_4$  и  $f_5$  проводилась алгоритмом А с помощью безызыточной стратегии. Результаты расчетов представлены в Таблице 3.3, а на Рис. 3.4-3.5 приведены графики рассмотренных целевых функций. В таблице дополнительно через  $D$  обозначены начальные области поиска.

**Пример 3.3.** Рассматриваются модификации некоторых функций из примера 3.1 на случай трех переменных:

$$f_1(x, y, z) = -10e^{-\sqrt{\frac{(|x| + |y| + |z|)}{3}}} \text{ на } [-2; 12]^3$$

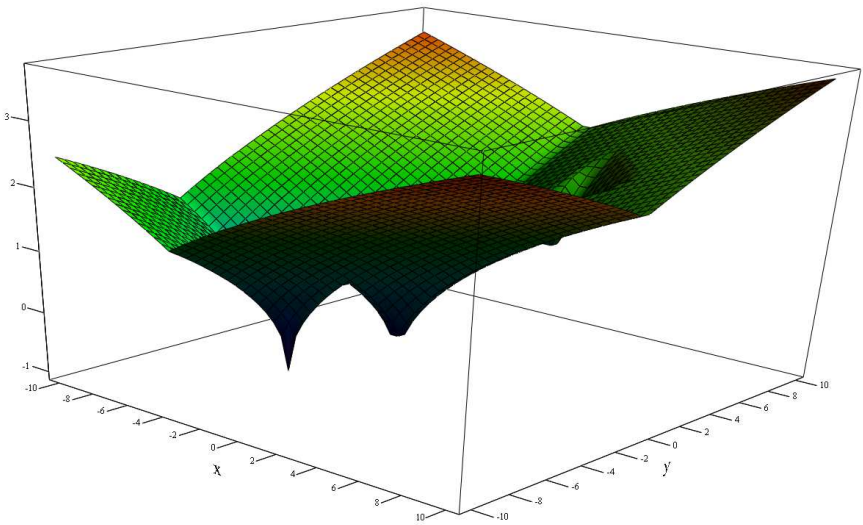
и

$$f_2(x, y, z) = f_1(x, y, z) - e^{\frac{(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) + \cos(2\pi z))}{3}} \text{ на } [-2; 12]^3.$$

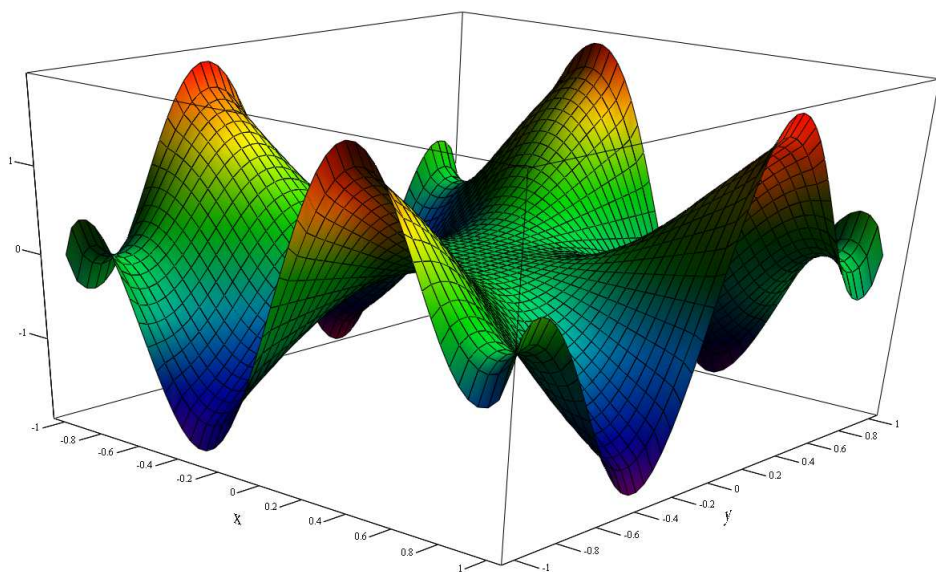
**Таблица 3.3.** Результаты вычислений с помощью алгоритма А для функций  $f_i(x, y)$ ,  $i = 4, 5$

**Table 3.3.** Algorithm «A» computational results for test functions  $f_i(x, y)$ ,  $i = 4, 5$

$i$	$D$	$\delta$	$\varepsilon$	$(x_*, y_*)$	$f_i(x_*, y_*)$	$M$	$L_k(\varepsilon)$
4	$[-5; 5]^2$	0.01	0.5	$(-1.008230; -0.925925)$	-0.718112	88	2.363
			0.1	$(-4.012345; -4.012345)$	-0.842865	486	6.671
		$10^{-3}$	0.5	$(-0.999085; -0.999085)$	-0.962233	98	2.276
			0.1	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	114	2.168
		$10^{-5}$	0.5	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	114	2.168
			0.1	$(-0.999988; -0.999988)$	-1.000248	556	6.592
	$[-10; 10]^2$	0.01	0.5	$(-4.074074; -4.074074)$	-0.615099	150	1.994
			0.1	$(-4.074074; -4.074074)$	-0.615099	408	4.067
		$10^{-3}$	0.5	$(-4.000914; -4.000914)$	-0.957233	160	1.962
			0.1	$(-1.001371; -1.001371)$	-0.952621	1854	9.279
		$10^{-5}$	0.5	$(-4.000011; -4.000011)$	-0.995248	176	1.920
			0.1	$(-1.000016; -1.000016)$	-0.999180	1870	9.277
5	$[-1; 1]^2$	0.01	0.5	$(-1.0; 0.333333)$	-1.889461	218	17.546
			0.1	$(0.341563; 1.0)$	-1.890335	488	29.563
		$10^{-3}$	0.5	$(0.341563, 1.0)$	-1.890335	390	16.102
			0.1	$(1.0, -0.340649)$	-1.890367	1204	27.929
		$10^{-5}$	0.5	$(0.341563, 1.0)$	-1.890335	408	16.021
			0.1	$(0.340344, 1.0)$	-1.890370	1226	27.909



**Рис. 3.4.** График тестовой функции  $f_4(x, y)$   
**Fig 3.4.** Test function  $f_4(x, y)$  plot

Рис. 3.5. График тестовой функции  $f_5(x, y)$ Fig 3.5. Test function  $f_5(x, y)$  plot

Также в рамках примера рассмотрена модификация функций  $f_4(x, y)$  на случай трех переменных:

$$\begin{aligned}
 f_3(x, y, z) &= \min(a, b, c), \\
 a &= a(x, y, z) = \sqrt{|x + 4| + |y + 4| + |z + 4|} - 1, \\
 b &= b(x, y, z) = \sqrt{|x + 1| + |y + 1| + |z + 1|} - 1.005, \\
 c &= c(x, y, z) = \sqrt{|x - 3| + |y - 3| + |z - 3|} + 0.5.
 \end{aligned}$$

на множестве  $[-5; 5]^3$ .

Как и в предыдущих примерах указанные целевые функции нелипшицевы на задаваемых начальных гиперинтервалах. Для данных функций с помощью алгоритма А при безызыточной стратегии был приближенно найден глобальный минимум. Результаты расчетов приведены в Таблице 3.4.

**Пример 3.4.** Пусть далее  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 10$  и на гиперинтервале  $D = [-5; 5]^{10}$  задана функция  $F(x)$  вида

$$F(x) = \min \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + 4|} - 1, \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + 1|} - 1.005, \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - 3|} + 0.5 \right).$$

**Таблица 3.4.** Результаты вычислений с помощью алгоритма А для функций

$$f_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3$$

**Table 3.4.** Algorithm «А» computational results for test functions

$$f_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3$$

$i$	$\varepsilon$	$(x_*, y_*)$	$f_i(x_*, y_*)$	$M$	$L_k(\varepsilon)$
<b>1</b>	2.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	118	3.087
	1.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	1070	8.887
	0.8	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-9.952594	1332	9.773
<b>2</b>	2.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	2456	13.373
	1.0	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	8654	19.661
	0.8	$(2.258E-5; 2.258E-5; 2.258E-5)$	-12.670875	20182	28.835
<b>3</b>	1.0	$(-3.999983; -3.999983; -3.999983)$	-0.992872	74	0.483
	0.5	$(-0.999988; -0.999988; -0.999988)$	-0.999180	102	0.829
	0.1	$(-0.999988; -0.999988; -0.999988)$	-0.999180	6956	6.473

С помощью алгоритма А при  $\delta = 10^{-5}$  был рассчитан глобальный минимум  $F(x)$  на  $D$  при параметрах алгоритма  $\varepsilon = 1.0$ ,  $C = 100$  и безызыточной стратегии. В результате вычислений получена точка

$$x_* = \begin{pmatrix} -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -0.9999887099414605; \\ -1.00010161052685; \\ -1.00010161052685 \end{pmatrix}^T$$

и соответствующее ей значение функции  $F(x_*) = -0.9878669465063515$ . Алгоритм завершился за 2 034 шага, было построено 4 070 областей поиска и была вычислена приближительная оценка величины минимальной  $\varepsilon$ -постоянной Липшица  $L_k(\varepsilon) = 0.675204$ .

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. 1967. Т. 2. С. 13–24.
2. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 4. С. 885–896. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90115-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90115-2)

3. Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функции (перебор на неравномерной сетке) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11, № 6. С. 1390–1403. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90065-6)
4. Shubert B. A sequential method seeking the global maximum of a function // SIAM J. Numer. Anal. 1972. Vol. 9, No. 3. pp. 379–388. DOI: <https://doi.org/10.1137/0709036>
5. Стронгин Р. Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978. 240 с.
6. Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. 251 с.
8. Vanderbei R. J. Extension of Piyavskii's algorithm to continuous global optimization // Journal of Global Optimization. 1999. Vol. 14. pp. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008395413111>
9. Romaguera S., Sanchis M. Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric space // J. Approx. Theory. 2000. Vol. 103, No. 2. pp. 292–301. DOI: <https://doi.org/10.1006/jath.1999.3439>
10. Jouini E. Generalized Lipschitz functions // Nonlinear Anal. 2000. Vol. 41. pp. 371–382.
11. Садыгов М. А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве // ДАН. 2013. Т. 52, № 5. С. 490–493. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565213300075>
12. Sergeyev Y. D., Candelieri A., Kvasov D. E., Perego R. Safe global optimization of expensive noisy black-box functions in the  $\delta$ -Lipschitz framework // Soft. Comput. 2020. Vol. 24, pp. 17715–17735. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05030-3>
13. Заботин В. И., Чернышевский П. А. Две модификации обобщенного метода Пиявского поиска глобального минимума непрерывной на отрезке функции и их сходимость // Вестник Тверского государственного университета. Сер. «Прикладная математика». 2021. № 3. С. 70–85. DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk624>
14. Арутюнова Н. К. Метод Евтушенко поиска глобального минимума  $\varepsilon$ -липпшицевой функции и его приложения // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2013. № 2. С. 154–157.
15. Arutyunova N. K., Dulliev A. M., Zabotin V. I. Models and methods for three external ballistics inverse problems // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2017. Т. 10, № 4. С. 78–91. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmpl70408>
16. Zabotin V. I., Chernyshevskij P. A. Extension of Strongin's global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval // Computer Research and Modeling. 2019. Vol. 11, No. 6. pp. 1111–1119. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1111-1119>

17. Arutyunova N. K., Dulliev A. M., Zabotin V. I. Global optimization of multivariable functions satisfying the Vanderbei condition // J. Appl. Math. Comput. 2022. Vol. 68, No. 3. 1135–1161. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12190-021-01563-4>
18. Заботин В. И., Чернышевский П. А. Алгоритм вычисления минимальной оценки  $\varepsilon$ -постоянной Липшица непрерывной функции // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2018. № 2. С. 127–132.
19. Sergeyev Y. D. Efficient strategy for adaptive partition of N-dimensional intervals in the framework of diagonal algorithms // Journal of Optimization Theory and Applications 2000. Vol. 107. pp. 145–168. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1004613001755>

*Поступила 19.07.2022; доработана после рецензирования 07.10.2022;  
принята к публикации 23.11.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. S. A. Piyavskii, “An algorithm for finding the absolute extremum of a function”, *Teoriya optimalnykh resheniy*, **2** (1967), 13–24 (In Russ.).
2. S. A. Piyavskii, “An algorithm for finding the absolute extremum of a function”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **12:4** (1972), 57–67885–896 (In Russ.). DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90115-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90115-2)
3. Yu. G. Evtushenko, “Numerical method for finding the global extremum of a function (iteration on an uneven grid)”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **11:6** (1971), 38–54 (In Russ.). DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90065-6) 1390–1703
4. B. Shubert, “A sequential method seeking the global maximum of a function”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **9:3** (1972), 379–388.
5. R. G. Strongin, *[Numerical methods in multiextremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 240 p.
6. Ya. D. Sergeev, D. E. Kvasov, *[Diagonal methods of global optimization]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 352 p.
7. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967, 251 p.
8. R. J. Vanderbei, “Extension of Piyavskii’s algorithm to continuous global optimization”, *Journal of Global Optimization*, **14** (1999), 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008395413111>
9. S. Romaguera, M. Sanchis, “Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric space”, *J. Approx. Theory*, **103:32** (2000), 292–301. DOI: <https://doi.org/10.1006/jath.1999.3439>

10. E. Jouini, “Generalized Lipschitz functions”, *Nonlinear Anal.*, **41** (2000), 371-382.
11. M. A. Sadygov, “[Extremum problems with constraints in metric space]”, *Doklady akademii nauk*, **52**:5 (2013), 490–493 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565213300075>
12. Y. D. Sergeyev, A. Candelieri, D. E. Kvasov, R. Perego et al., “Safe global optimization of expensive noisy black-box functions in the  $\delta$ -Lipschitz framework”, *Soft. Comput.*, **24** (2020), 17715-17735. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05030-3>
13. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “Two modifications of extension of Piyavskii’s global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval and its convergence”, *Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics*, **3** (2021), 70-85 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.26456/vtppmk624>
14. N. K. Arutyunova, “[Yevtushenko’s method of finding the global minimum of the  $\varepsilon$ -Lipschitz function and its applications]”, *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*, **2**:2 (2013), 154-157 (In Russ.).
15. N. K. Arutyunova, A. M. Dulliev, V. I. Zabotin, “Models and methods for three external ballistics inverse problems”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, **10**:4 (2017), 78-91. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp170408>
16. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “Extension of Strongin’s global optimization algorithm to a function continuous on a compact interval”, *Computer Research and Modeling*, **11**:6 (2019), 1111-1119. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1111-1119>
17. N. K. Arutyunova, A. M. Dulliev, V. I. Zabotin, “Global optimization of multivariable functions satisfying the Vanderbei condition”, *J. Appl. Math. Comput.*, **68**:3 (2022), 1135-1161. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12190-021-01563-4>
18. V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij, “[Algorithm for calculating the minimum estimate of the  $\varepsilon$ -Lipschitz constant of a continuous function]”, *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*, **2** (2018), 127-132 (In Russ.).
19. Y. D. Sergeyev, “Efficient strategy for adaptive partition of N-dimensional intervals in the framework of diagonal algorithms.”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **107** (2000), 145-168. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1004613001755>

*Submitted 19.07.2022; Revised 07.10.2022; Accepted 23.11.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.



## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.419-435

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

## Численное моделирование селективного лазерного плавления методом SPH

А. Н. Быков, М. Н. Вишнякова, Ю. Н. Дерюгин, А. Б. Емельянов,  
А. А. Лазарев, С. Н. Полищук, К. В. Черенкова

ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ» (г. Саров, Россия)

**Аннотация.** В настоящее время ведется активное развитие технологий аддитивного производства, что требует создания расчетных методик для описания протекающих при этом физических процессов. Одним из методов, используемых для производства деталей из металлического порошка, является метод селективного лазерного плавления. В данной работе представлена численная методика на основе метода SPH для моделирования процесса спекания порошка под воздействием лазерного луча. Течение жидкости, образующейся в результате плавления, описывается уравнениями Навье-Стокса, в которых учитываются силы давления, вязкие силы и поверхностные силы на границе раздела фаз. Тепловое состояние определяется из уравнения сохранения энергии, в котором учитываются тепловые процессы, объемное поглощение энергии лазерного излучения, конвективный теплообмен с внешней средой и радиационное излучение. Фазовые переходы между твердой и жидкой фазой описываются в рамках обобщенной формулировки задачи Стефана. Расчетная методика проверена на тестах, характерных для рассматриваемого класса задач. Проведено сравнение с аналитическим решением, с решениями, полученными по другим модификациям метода SPH, и с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** SLM, SPH, уравнения Навье-Стокса, теплопроводность, задача Стефана, фазовые переходы, тестовые задачи

**Для цитирования:** Быков А. Н., Вишнякова М. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов А. Б., Лазарев А. А., Полищук С. Н., Черенкова К. В. Численное моделирование селективного лазерного плавления методом SPH // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 419–435. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.419-435>

*Об авторах:*

**Быков Александр Николаевич**, начальник научно-исследовательского отдела, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9954-084>, [ban3101@mail.ru](mailto:ban3101@mail.ru)

**Вишнякова Марина Николаевна**, старший научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0488-518X>, [Marina.N.Vishnyakova@gmail.com](mailto:Marina.N.Vishnyakova@gmail.com)

**Дерюгин Юрий Николаевич**, главный научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)



**Емельянов Андрей Борисович**, старший научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3549-3891>, [abe75@yandex.ru](mailto:abe75@yandex.ru)

**Лазарев Алексей Александрович**, научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0577-5732>, [lazarev.alex94@gmail.com](mailto:lazarev.alex94@gmail.com)

**Полищук Сергей Николаевич**, начальник научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ ВНИИЭФ (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7158-7393>, [S.N.Polishchuk@yandex.ru](mailto:S.N.Polishchuk@yandex.ru)

**Черенкова Кристина Вадимовна**, младший научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ, (607188, Россия, г. Саров, пр. Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0548-8861>, [cherenkova031996@mail.ru](mailto:cherenkova031996@mail.ru)

*Original article*

MSC2020 76D05

## Numerical simulation of selective laser melting by the SPH method

A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin, A. B. Emelyanov,  
A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk, K. V. Cherenkova

*FSUE RFNC - VNIIEF (Sarov, Russia)*

**Abstract.** Currently, additive manufacturing technologies develop actively. This requires creation of computational methods to describe physical processes occurring at the time of manufacturing. One of the methods used for the production of metal powder parts is the method of selective laser melting. This paper presents an SPH-based numerical technique for modeling the process of powder sintering under the influence of a laser beam. The flow of liquid formed as a result of melting is described by the Navier-Stokes equations. Pressure forces, viscous effects and surface forces at the interface are included in the force balance. The thermal state is determined from the energy conservation law, which takes into account thermal processes, volumetric absorption of laser radiation energy, convective heat exchange with the external environment and radiation. Phase transitions between solid and liquid phases are described in the framework of the generalized formulation of the Stefan problem. The calculation method is verified on tests specific to the class of problems under consideration. A comparison is made with the analytical solution, as well as with solutions obtained by other modifications of the SPH method, and with experimental data.

**Keywords:** SLM, SPH, Navier-Stokes equations, thermal conductivity, Stefan problem, phase transitions, test problems

**For citation:** A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin, A. B. Emelyanov, A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk, K. V. Cherenkova. Numerical simulation of selective laser melting by the SPH method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 419–435. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.419-435>

*About the authors:*

**Alexander N. Bykov**, Chief researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Nizhny Novgorod region, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9954-084>, [ban3101@mail.ru](mailto:ban3101@mail.ru)

A. N. Bykov, M. N. Vishnyakova, Yu. N. Deryugin, A. B. Emelyanov, A. A. Lazarev, S. N. Polishchuk, ...

**Marina N. Vishnyakova**, Senior researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0488-518X>, Marina.N.Vishnyakova@gmail.com

**Yuriy N. Deryugin**, Chief Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

**Andrey B. Emelyanov**, Senior researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3549-3891>, abe75@yandex.ru

**Alexey A. Lazarev**, Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0577-5732>, lazarev.alex94@gmail.com

**Sergey N. Polishchuk**, CChief researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7158-7393>, S.N.Polishchuk@yandex.ru

**Christina V. Cherenkova**, Junior research, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center, (37 Mira Ave., Sarov, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0548-8861>, cherenkova031996@mail.ru

## 1. Математическая модель

Метод селективного лазерного плавления (метод SLM, англ. Selective Laser Melting) [1,2] предполагает поэтапное выпекание деталей произвольной формы посредством плавления слоя за слоем порошковой смеси (обычно сталь или титан) под действием лазерного луча. Шаг в процессе плавления начинается с ровного распределения слоя сферических порошковых частиц на подложке либо уже на проплавленном металле. На частицы воздействуют лучом лазера, который характеризуется распределением интенсивности пятна на поверхности частиц и объемным распределением поглощения и рассеивания энергии веществом частиц. В соответствии с компьютерной программой луч лазера перемещается по двумерной поверхности слоя частиц. При поглощении энергии лазерного луча происходит плавления частиц порошка. Образующаяся жидкая фаза под действием термического давления, сил поверхностного натяжения и силы тяжести осаждается на подложку либо на проплавленный металл. После остывания образуется новый слой проплавленного металла.

Нестационарное течение расплавленного вещества будем рассматривать как течение вязкой жидкости, для описания которого применяются уравнения Навье-Стокса. Уравнения неразрывности и движения в переменных Лагранжа имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \vec{u}, \\ \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p I + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} + \vec{F}, \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{u},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\vec{r} = (x, y, z)$  – вектор перемещения,  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $\vec{u}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $I$  – единичный тензор,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\vec{g}$  – вектор

ускорения свободного падения,  $\vec{F}$  – вектор массовых сил.

Давление вычисляется из уравнения состояния вида

$$p = c_z^2(\rho - \rho_0).$$

Здесь коэффициент  $c_z$  – аналог скорости звука, подбираемый в расчетах для моделирования несжимаемых сжимаемых течений,  $\tilde{\rho}_0$  – функция начальной плотности, зависящей от температуры [3]

$$\rho_0(T) = \rho_0 \left( 1 + \alpha_T \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right) \right),$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность,  $T_0$  – начальная температура,  $\alpha_T$  – коэффициент теплового расширения.

На поверхности жидкости реализуется дополнительное давление [4], которое моделируется массовой силой

$$\vec{F} = \sigma k \vec{n} + \nabla \sigma = \sigma k \vec{n} + \frac{d\sigma}{dT} \nabla T, \quad (1.2)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $k$  – кривизна поверхности,  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности,  $\nabla \sigma$  – тангенциальный поверхностный градиент,  $\frac{d\sigma}{dT}$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения.

Уравнение энергии в переменных Лагранжа, включающее обобщенную формулировку задачи Стефана [5, 6], записывается в следующем виде

$$\left( C_P + \frac{\Delta H}{\Delta T} \delta(T - T_M) \right) \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla (\chi \nabla T) + \Phi + Q, \quad (1.3)$$

где  $C_p$  – теплоемкость,  $\Delta H$  – энтальпия фазового перехода,  $\delta(T - T_M)$  – дельта функция Дирака,  $T_M$  – температура фазового перехода,  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $\Phi$  – диссипация энергии за счет работы вязких сил,  $Q$  – источники тепла.

При плавлении и затвердевании вещества на каждый момент времени определяется криволинейная подвижная поверхность, на которой происходит фазовый переход. Фазовый переход сопровождается выделением либо поглощением определенного количества тепла. Теплофизические свойства вещества в различных агрегатных состояниях можно определять ступенчатой функцией

$$C_p = \begin{cases} (C_p)_S, & T \leq T_S, \\ \frac{1}{2} ((C_p)_S + (C_p)_L) + \frac{\Delta H}{T_L - T_S}, & T_S < T < T_L, \\ (C_p)_L, & T \geq T_L, \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \chi_S, & T \leq T_S, \\ \frac{1}{2} (\chi_S + \chi_L), & T_S < T < T_L, \\ \chi_L, & T \geq T_L, \end{cases}$$

где  $T_S$  и  $T_L$  – соответственно, температура затвердевания и плавления,  $C_S$  и  $C_L$  – теплоемкости твердой и жидкой фаз,  $\chi_S$  и  $\chi_L$  – коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз.

Источники тепла, состоят из энерговыделения лазерного луча  $Q_L$ , нагревающего материал, поверхностной конвекции  $Q_C$  и радиационного излучения  $Q_R$

$$Q = Q_L - Q_C - Q_R, \quad Q_C = \alpha_C (T_s - T_\infty), \quad Q_R = \sigma \varepsilon (T_s - T_\infty)^4.$$

Здесь  $\alpha_C$  – коэффициент конвективного теплообмена,  $T_s$  – температура на поверхности материала,  $T_\infty$  – температура окружающей среды,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\varepsilon$  – степень черноты.

Лазерный источник задается посредством следующей формулы, определяющей поглощение веществом лазерного излучения по закону Ламберта

$$Q_L(\vec{r}) = (1 - K) \frac{2\alpha P_L}{\pi r_L^2} e^{\left(-4 \frac{|\vec{r}|^2}{r_L^2}\right)} e^{(-\alpha|z - z_L|)}, \quad (1.4)$$

где  $P_L$  – мощность лазера,  $r_L$  – радиус пятна лазера,  $z_L$  – высота до центра лазера,  $K$  – коэффициент отражения излучения и  $\alpha$  – коэффициент поглощения излучения.

## 2. Численный метод

Численное решение приведенных уравнений будем находить с использованием метода SPH [7, 8]. Аппроксимацию уравнений (1.1) для  $i$ -ой частицы можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i &= -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} ((\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \nabla W_{ij}), \\ \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_i &= -\sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j}\right) \nabla W_{ij} + \\ &\quad + \frac{\mu_i}{\rho_i} \sum_j 4m_j \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j}\right) \frac{(\vec{u}_i - \vec{u}_j)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 + \eta_{ij}^2} \nabla W_{ij} + \vec{g}_i + \vec{F}_i, \\ \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_i &= \vec{u}_i, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\nabla W$  – градиент функции ядра  $W$  (в данной работе используется сплайн третьей степени [9]),  $\eta = 0.1h$  ( $h$  – радиус сглаживания), суммирование ведется по частицам в области действия ядра.

Сила  $\vec{F}_i$  учитывается только на поверхности жидкой фазы, для определения ее зоны действия в методе SPH вводится функция-маркер [10]

$$C_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}, \quad \nabla C_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_{ij}.$$

Если для частицы  $C_i \leq 0.95$ , то для нее задается признак  $R_i = 1$  и проводится вычисление силы поверхностного натяжения. Если же  $C_i > 0.95$ , то признак  $R_i$  полагается равным нулю и сила не рассчитывается.

С учетом введенной функции аппроксимация формулы (1.2) запишется следующим образом

$$\vec{F}_i = \sigma_i k_i \vec{n}_i + \left( \frac{d\sigma}{dT} \right)_i (\nabla T_i - \vec{n}_i (\vec{n}_i \nabla T_i)),$$

где  $\vec{n}_i = \frac{\nabla C_i}{|\nabla C_i|}$  – нормаль к поверхности,  $\nabla T_i = \frac{1}{C_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (T_j - T_i) \nabla W_{ij}$  – градиент температуры.

Кривизна поверхности вычисляется по значению градиента нормали только для частиц с признаком  $R_i = 1$

$$k_i = -\nabla \vec{n}_i = -\frac{1}{|k_i|} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\vec{n}_j - \vec{n}_i) \nabla W_{ij},$$

где  $|k_i| = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \min(R_i, R_j) W_{ij}$ .

Аппроксимацию уравнения теплопроводности (1.3) на частицах можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \left( C_p \frac{dT}{dt} \right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4\chi_i \chi_j}{\chi_i + \chi_j} \frac{(T_i - T_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j| + \eta_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \nabla W_{ij} + \\ + \mu_i \sum_j \frac{2m_j}{\rho_i \rho_j} (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \frac{(\vec{u}_i - \vec{u}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 + \eta_{ij}^2} \nabla W_{ij} + Q_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Работа вязких сил учитывается только для расплава, а конвективный и радиационный источники, только в области, где функция-маркер удовлетворяет условию  $C_i \leq 0.95$ .

Решение уравнений (2.1), (2.2) по времени проводится последовательно по схеме расщепления. Сначала с использованием схемы «чехарда» для частиц жидкой фазы находится решение системы уравнений (2.1), затем по явной схеме для всех частиц решается уравнение теплопроводности. Переход частиц из твердой в жидкую фазу и наоборот выполняется по значению температуры.

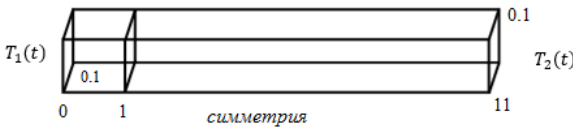
Счетный шаг по времени выбирается по следующему критерию

$$\tau = \min_i \left( 0.4 \frac{h_i}{(c_z)_i}, 0.125 \frac{\rho_i h_i^2}{\mu_i}, 0.25 \left( \frac{\rho_i h_i^3}{2\pi\sigma_i} \right)^2, 0.125 \frac{\rho_i (C_P)_i h_i^2}{\chi_i} \right).$$

### 3. Численные расчеты

#### 3.1. Задача Стефана о распространении тепла в одномерной области с учётом движения фазового фронта

Геометрия расчетной области задачи Стефана [11, 12] схематично проиллюстрирована на рисунке 3.1.



**Рис. 3.1.** Геометрия задачи Стефана  
**Fig 3.1.** Geometry of the Stefan problem

Начальная плотность обеих областей задана равной 1 кг/м<sup>3</sup>. Теплоемкость и коэффициент теплопроводности вычисляется следующим образом

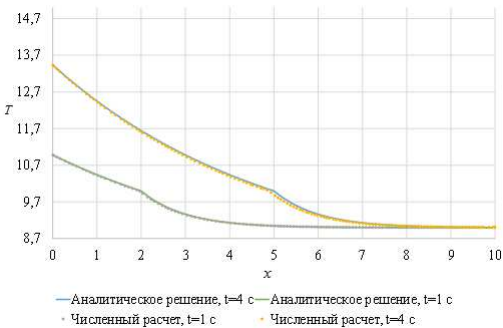
$$C_P = \begin{cases} (C_P)_1, & T < T_M - \Delta T, \\ 0.5 \cdot ((C_P)_1 + (C_P)_2) - \\ -\Delta H \cdot \frac{3}{4 \cdot \Delta T^3} \left( (T - T_M)^2 - \Delta T^2 \right), & T_M - \Delta T \leq T \leq T_M + \Delta T, \\ (C_P)_2, & T > T_M + \Delta T, \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} 1, & T < T_M, \\ 5, & T \geq T_M, \end{cases}$$

где теплоемкости областей заданы равными  $(C_P)_1 = (C_P)_2 = 1$  Дж/К, энтальпия фазового перехода  $\Delta H = 1$  Дж/кг, температура фазового перехода  $T_M = 10$  К, ширина фазового фронта  $\Delta T = 0.01$  К.

Начальное распределение температуры задается формулой  $T(x)|_{t=0} = 2e^{(1-x)/5}$ . Соответственно, на левой и правой границах  $T_1(t)|_{x=0} = 2e^{(t+1)/5} + 8$  и  $T_2(t)|_{x=10} = e^{t-9} + 9$ , на остальных границах условие симметрии.

Расчеты проводились до момента времени 4 с, шаг по времени задан равным  $10^{-5}$  с. На рисунке 3.2 показано распределение температуры в области вдоль оси  $x$  на моменты времени  $t = 1$  и 4 с в сравнении с аналитическим решением. Максимальное отличие численного решения от аналитического не превышает 0.03 %.



**Рис. 3.2.** Распределение температуры на моменты времени  $t = 1$  и  $t = 4$  с  
вдоль оси  $x$   
**Fig 3.2.** Temperature distribution at time points  $t = 1$  and  $t = 4$  s along the  $x$  axis

Частицы в областях расставлены равномерно с шагом  $d_0 = 0.01$  м, общее число частиц составило 100 000. Длина сглаживания задана постоянной  $h = 1.5d_0$ .

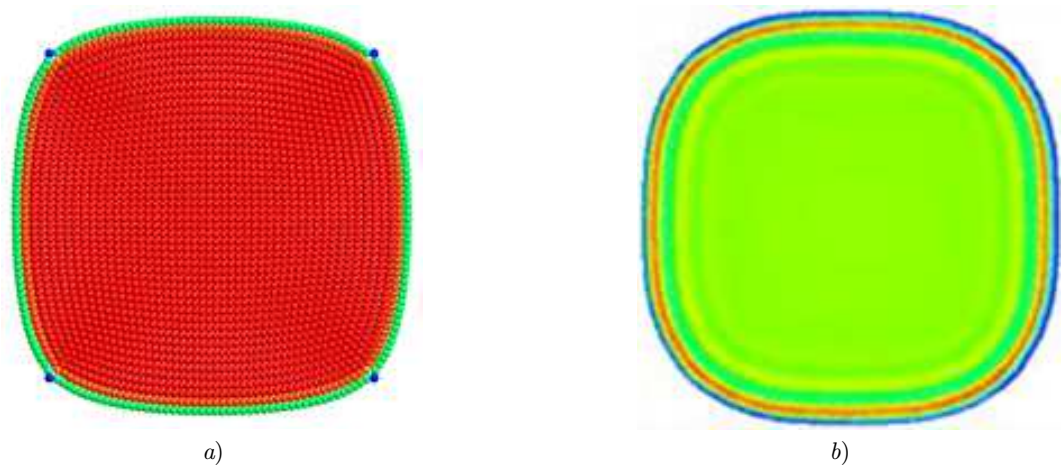
3.2. Задача о преобразовании квадратной капли

Область моделирования представляет собой квадрат со стороной  $0.2 \cdot 10^{-3}$  м, в котором находится жидкость со свойствами, приведенными в таблице 3.1. Расчеты проводились с равномерной расстановкой частиц, по каждому координатному направлению расчетная область разбита на 50 частиц.

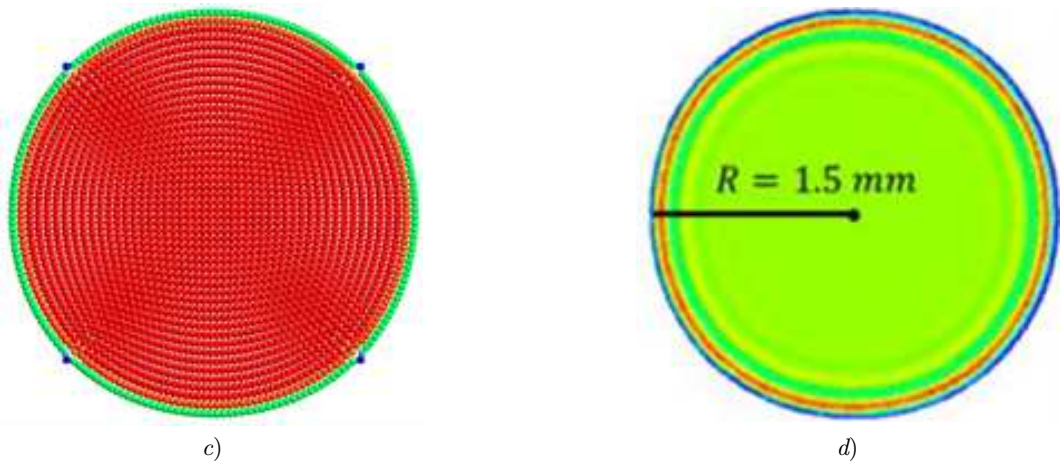
Таблица 3.1. Параметры жидкости  
Table 3.1. Liquid parameters

Параметр (Parameter)	Значение (Value)
$\rho$	1000 кг/м <sup>3</sup>
$\vec{u}$	(0, 0, 0)м/с
$T$	298 К
$c_z$	3м/с
$\sigma$	0.0028 кг/с <sup>2</sup>
$\frac{d\sigma}{dT}$	0кг/с <sup>3</sup>
$\mu$	0.185 кг/(м с)

На рисунке 3.3 приведена картина преобразования квадратной капли в круглую на два момента времени. Сравнение проводилось с результатами расчета по программе PySPH, опубликованными в работе [13]. Видно хорошее согласие.







**Рис. 3.3.** Форма капли на моменты времени  $t = 0.1 \cdot 10^{-3}$  с (a, b) и  $t = 0.4 \cdot 10^{-3}$  с (c, d), (a, c – проведенный расчет (функция маркер), b, d – данные программы PySPH (плотность))

**Fig 3.3.** The shape of a drop at two points in time  $t = 0.1 \cdot 10^{-3}$  с (a, b) and  $t = 0.4 \cdot 10^{-3}$  с (c, d), (a, c – the calculation performed (marker function), b, d – the data of the PySPH program (density))

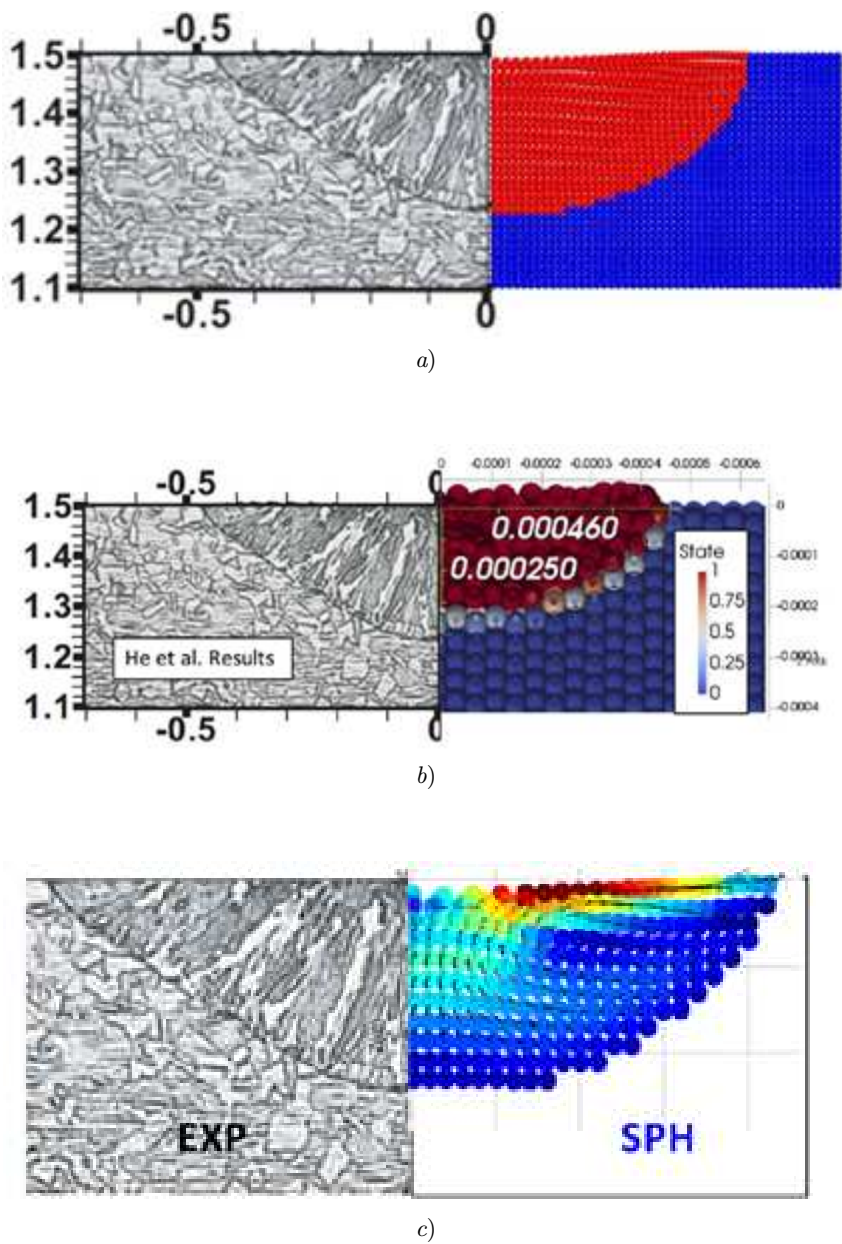
3.3. Задача о точечном плавлении

Область моделирования – прямоугольный параллелепипед, длина и ширина которого равны  $1.2 \cdot 10^{-3}$  м, высота  $0.4 \cdot 10^{-3}$  м. Материал – сталь. В начальный момент времени образец стали находится в твердом состоянии, сверху по центру на него в течении  $3 \cdot 10^{-3}$  с действует лазерный импульс с мощностью 1967 Вт. Радиус пятна лазера равен  $0.428 \cdot 10^{-3}$  м. Параметры вещества приведены в таблице 3.2 и взяты из работ [14, 15].

**Таблица 3.2.** Параметры вещества  
**Table 3.2.** Substance parameters

Параметр (Parameter)	Значение (Value)	Параметр (Parameter)	Значение (Value)
$\rho$	7200 кг/м <sup>3</sup>	$\chi_S$	19.3 Вт/(м К)
$T$	300 К	$\chi_L$	135.1 Вт/(м К)
$\alpha_T$	$1.96 \cdot 10^{-5}$	$(C_p)_S$	711.6 Дж/К
$\sigma$	1.4 Н/м	$(C_p)_L$	837.2 Дж/К
$\frac{d\sigma}{dT}$	$-4.3 \cdot 10^{-4}$ Н/(м К)	$T_S$	1679 К
$\Delta H$	5609 Дж/кг	$T_L$	1727 К

При проведении расчета использовалась равномерная расстановка частиц с шагом равным  $0.0125 \cdot 10^{-3}$  м, общее число частиц 294 912. На рисунке 3.4 и в таблице 3.3 приведено сравнение полученной расчетной зоны плавления с экспериментом [15], а также расчетные зоны плавления, полученные по другим модификациям метода SPH. Видно согласие всех полученных расчетных данных.



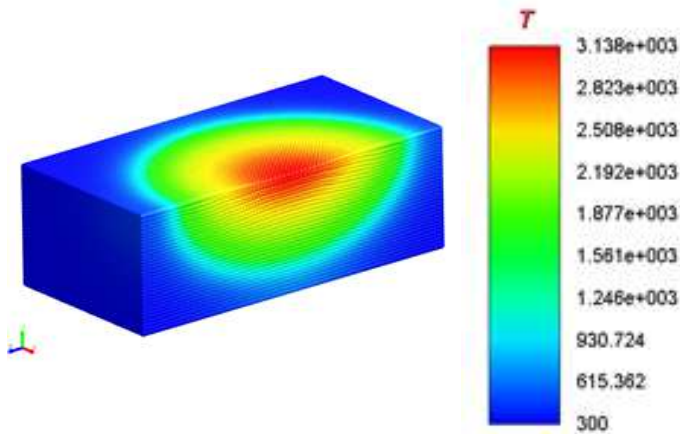
**Рис. 3.4.** Сравнение с экспериментом (He et al [15]) расчетной зоны плавления: а) текущая реализация, б) реализации из работы Russell et al [3], в) реализации из работы Dao et al [14]

**Fig 3.4.** Comparison with the experiment (He et al [15]) of the calculated melting zone: а) current implementation, б) implementation from the works of Russell et al [3], в) implementation from the works of Dao et al [14]

**Таблица 3.3.** Сравнение зоны плавления  
**Table 3.3.** Comparison of the melting zone

	Погрешность радиуса зоны, $10^{-3}$ м (Zone radius error, $10^{-3}$ m)	Погрешность глубина зоны, $10^{-3}$ м (Zone depth error, $10^{-3}$ m)
Эксперимент He et al [15] (Experiment He et al [15])	0.48	0.26
Реализация Russell et al [3] (Implementation Russell et al [3])	0.46 (-4%)	0.25 (-4%)
Реализация Afrasiabi et al [16] (Implementation Afrasiabi et al [16])	0.43 (-10%)	0.27 (+4%)
Реализация Dao et al [14] (Implementation Dao et al [14])	-	-
Текущая реализация (Current implementation)	0.44 (-8.3%)	0.27 (+4%)

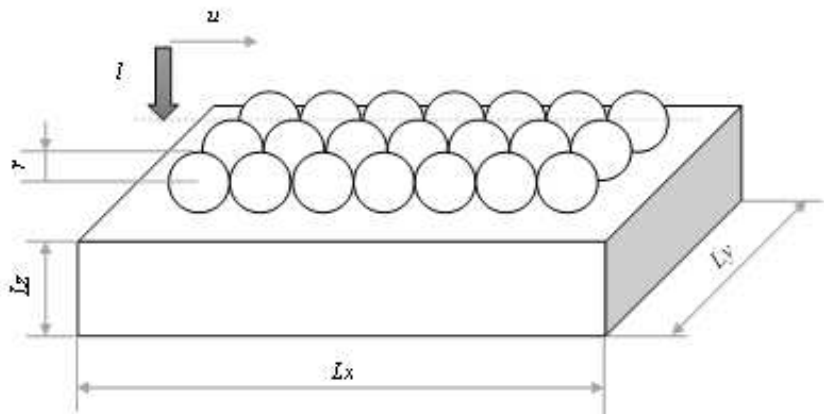
На рисунке 3.5 показано распределение поля температуры (расчетная область обреза наполовину). Значение максимальной температуры в расчете составило 3128 К, что согласуется с полученными расчетными данными по другим реализациям метода SPH, в частности, в работе [16] получено 3152 К.



**Рис. 3.5.** Распределение температуры  
**Fig 3.5.** Temperature distribution

**3.4. Плавление порошка на подложке**

Геометрия расчетной области приведена на рисунке 3.6. На подложке с размерами  $Lx = 0.5 \cdot 10^{-3}$  м,  $Ly = 0.16 \cdot 10^{-3}$  м и  $Lz = 0.04 \cdot 10^{-3}$  м насыпан слой порошка. Лазер движется по подложке со скоростью  $\vec{v} = 0.7$  м/с, радиус пятна задан равным  $r = 0.03 \cdot 10^{-3}$  м. Мощность лазера задана равной 150 Вт.



**Рис. 3.6.** Геометрия расчетной области  
**Fig 3.6.** Geometry of the computational domain

Параметры порошка приведены в таблице 3.4. Лазерный источник задается посредством формулы (1.4) при  $K = 0.73$  и  $\alpha = 1 \cdot 10^4$ . Коэффициент поверхностного натяжения вычисляется по эмпирической формуле [3, 16]

$$\sigma(T) = \sigma_0 - A(T - T_0) - RT\Gamma_S \ln \left( 1 + k_l + a_S e^{\left( \frac{-\Delta H_o}{RT} \right)} \right),$$

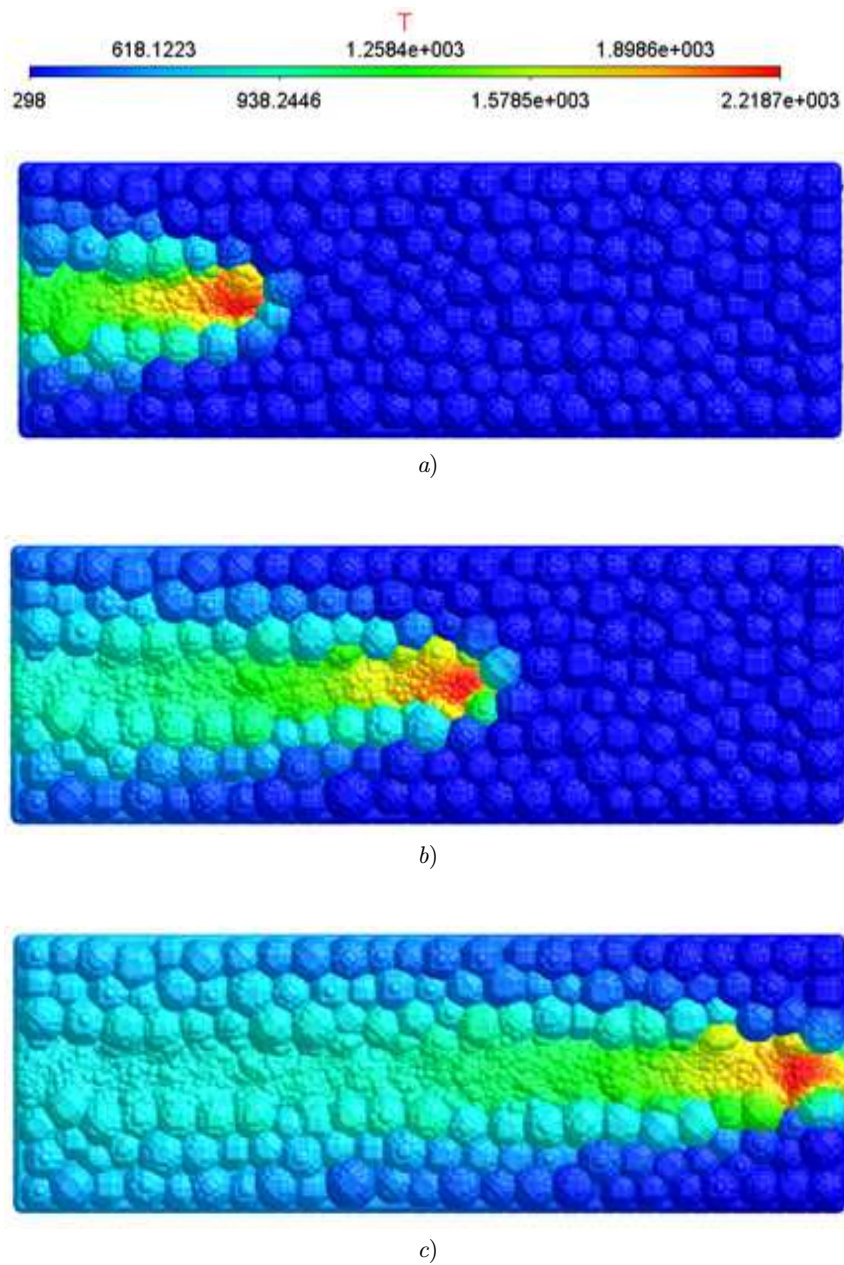
где эмпирические параметры принимают следующие значения  $\sigma_0 = 1.943$  Н/м,  $A = 0.5 \cdot 10^{-3}$  Н/(м К),  $R = 8.3145$  Дж/(моль К),  $\Gamma_S = 1.3 \cdot 10^{-8}$  кг моль/м<sup>2</sup>,  $k_l = 0.0032$ ,  $a_S = 0.0022$  и  $\Delta H_o = -166 \cdot 10^3$  Дж/ (кг моль).

**Таблица 3.4.** Параметры порошка  
**Table 3.4.** Powder Parameters

Параметр (Parameter)	Значение (Value)	Параметр (Parameter)	Значение (Value)
$\rho$	8020 кг/м <sup>3</sup>	$\chi_S$	11 Вт/(м К)
$T$	298 К	$\chi_L$	135.1 Вт/(м К)
$\mu$	0.06015 кг/(м с)	$(C_p)_S$	460 Дж/К
$T_M$	1773 К	$(C_p)_L$	895 Дж/К

Проведено два расчета. В первом размер гранул порошка задан одинаковым и составил  $0.025 \cdot 10^{-3}$  м, во втором – размер гранул варьировался в диапазоне  $[0.017 \cdot 10^{-3} \text{ м}, 0.025 \cdot 10^{-3} \text{ м}]$ . Общее число частиц SPH в численных расчетах составило  $\sim 525$  тыс.

На рисунке 3.7 приведена динамика распределения температуры во втором расчете.

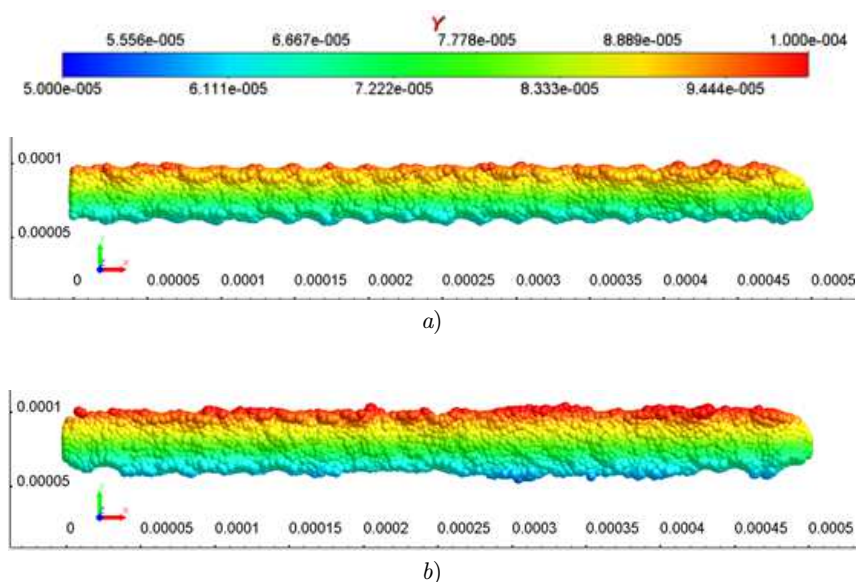


**Рис. 3.7.** Распределение температуры на моменты времени: а)  $t = 0.2 \cdot 10^{-3}$  с, б)  $t = 0.4 \cdot 10^{-3}$  с, в)  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  с

**Fig 3.7.** Temperature distribution at points in time а)  $t = 0.2 \cdot 10^{-3}$  s, б)  $t = 0.4 \cdot 10^{-3}$  s, в)  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  s

На рисунке 3.8 на момент времени  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  с приведено сравнение ширины зоны расплава в двух расчетах. Видно, что в расчете с одинаковым размером гранул

порошка ширина зона расплава меньше.



**Рис. 3.8.** Распределение ширины зоны расплава на момент времени  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  с: а) размер гранул порошка равен  $0.025 \cdot 10^{-3}$  м, б) размер гранул варьировался в диапазоне  $[0.017 \cdot 10^{-3}, 0.025 \cdot 10^{-3}]$  м

**Fig 3.8.** The distribution of the width of the melt zone at time  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  s: а) the size of the powder granules  $0.025 \cdot 10^{-3}$  m, б) the size of the granules varied in the range  $[0.017 \cdot 10^{-3}, 0.025 \cdot 10^{-3}]$  m

#### 4. Заключение

В работе представлена численная методика моделирования процесса спекания порошка под воздействием лазерного луча. Основные элементы методики проверены на тестах характерных для рассматриваемого класса задач: задача Стефана (фазовый переход), преобразование квадратной капли (сила поверхностного натяжения) и точечный источник (лазерный источник и тангенсальная составляющая силы поверхностного натяжения). Созданный инструментарий позволяет проводить различного рода качественные оценки результата спекания порошка при варьировании свойств материала, скорости движения лазера, его мощности и прочие. В частности, на модельной демонстрационной задаче плавления слоя порошка на подложке, показано влияние размера гранул порошка на ширину зоны проплава.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive manufacturing technologies. New York: Springer, 2015. 498 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2113-3>



2. Шишковский И. В. Основы аддитивных технологий высокого разрешения. СПб.: Питер, 2016. 348 с.
3. Russell M. A., Souto-Iglesias A., Zohdi T. I. Numerical simulation of Laser Fusion Additive Manufacturing processes using the SPH method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. Vol. 341. pp. 163–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.06.033>
4. Савельев И. В. Курс общей физики. М.: Наука, 1970. Т. 1. 517 с.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Либроком, 2009. 784 с.
6. Будаков Б. М., Соловьев Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
7. Gingold R. A., Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181., no. 3. pp. 375–389. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
8. Lucy L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // Astronom. J. 1977. Vol. 82. pp. 1013–1024. DOI: <https://doi.org/10.1086/112164>
9. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. Vol. 30. 1992. pp. 543–574. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
10. Ordoubadi M., Yaghoubi M., Yeganehdoust F. Surface tension simulation of free surface using smoothed particle hydrodynamics // Sci. Iranica B. 2017. Vol. 24, no. 4. pp. 2019–2033. DOI: <https://doi.org/10.24200/sci.2017.4291>
11. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 742 с.
13. Bao Y., Li L., Shen L., Lei Ch., Gan Y. A modified smoothed particle hydrodynamics approach for modelling dynamic contact angle hysteresis, 2018. arXiv: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.02770>
14. My Ha Dao, Jing Lou. Simulations of laser assisted additive manufacturing by smoothed particle hydrodynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. Vol. 373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113491>
15. He X., Fuerschbach P. W., DebRoy T. Heat transfer and fluid flow during laser spot welding of 304 stainless steel // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. Vol. 36, no. 12. pp. 1388–1398. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/36/12/306>
16. Afrasiabi M., Lüthi C., Bambach M., Wegener K. Multi-resolution SPH simulation of a laser powder bed fusion additive manufacturing process // Appl. Sci. 2021. Vol. 11, no. 7. P. 2962. DOI: <https://doi.org/10.3390/app11072962>

Поступила 09.08.2022; доработана после рецензирования 11.10.2022;  
принята к публикации 23.11.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. I. Gibson, D. Rosen, B. Stucker, *Additive Manufacturing Technologies*, Springer, New York, 2015, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2113-3>, 498 p.
2. I. V. Shishkovsky, *Osnovy additivnykh tekhnologiy vysokogo razresheniya* "[Fundamentals of high-resolution additive technologies]", Peter, St. Petersburg, 2016 (In Russ.), 348 p.
3. M. A. Russell, A. Souto-Iglesias, T. I. Zohdi, "Numerical simulation of Laser Fusion Additive Manufacturing processes using the SPH method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, no. 341, 163–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.06.033>
4. I. V. Savelyev, *Kurs obshchey fiziki* "[Course of general physics]". Vol. I., Nauka, M., 1970 (In Russ.).
5. A. A. Samarskiy, P. N. Vabishevich, *Vychislitel'naya teploperedacha* "[Computational heat transfer]", «Librocom», M., 2009 (In Russ.), 784 p.
6. B. M. Budak, E. N. Soloviev, A. B. Uspensky, "Raznostnyy metod so sglazhivaniem koeffitsientov dlya resheniya zadachi Stefana [Difference method with smoothing coefficients for solving the Stefan problem]", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **5**:5 (1965), 828–840 (In Russ.).
7. R. A. Gingold, J. J. Monaghan, "Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**:3 (1977), 375–389. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
8. L. Lucy, "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *Astronom. J.*, 1977, no. 82, 1013. DOI: <https://doi.org/10.1086/112164>
9. J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics", *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **30** (1992), 543–574. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
10. M. Ordoubadi, M. Yaghoubi, F. Yeganehdoust, "Surface tension simulation of free surface using smoothed particle hydrodynamics", *Sci. Iranica B.*, **24**:4 (2017), 2019–2033. DOI: <https://doi.org/10.24200/sci.2017.4291>
11. U. Karslou, D. Eger, *Teploprovodnost' tverdykh tel* "[Thermal conductivity of solids]", Nauka, M., 1964 (In Russ.), 488 p.
12. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiy, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* "[Equations of mathematical physics]", Nauka, M., 1977 (In Russ.), 742 p.



13. Y. Bao, L. Li, L. Shen, Ch. Lei, Y. Gan, “A Modified Smoothed Particle Hydrodynamics Approach for Modelling Dynamic Contact Angle Hysteresis”, 2018, arXiv: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.02770>.
14. My Ha Dao, Jing Lou, “Simulations of Laser Assisted Additive Manufacturing by Smoothed Particle Hydrodynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **373** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113491>
15. X. He, P. W. Fuerschbach, T. DebRoy, “Heat transfer and fluid flow during laser spot welding of 304 stainless steel”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **36**:12 (2013), 1388–1398. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/36/12/306>
16. M. Afrasiabi, C. Lüthi, M. Bambach, K. Wegener, “Multi-Resolution SPH Simulation of a Laser Powder Bed Fusion Additive Manufacturing Process”, *Appl. Sci.*, **11**:7 (2021), 2962. DOI: <https://doi.org/10.3390/app110729>

*Submitted 09.08.2022; Revised 11.10.2022; Accepted 23.11.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.436-451

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63 : 533.9.01

## Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад»

А. Ю. Круковский, М. Е. Ладонкина, Ю. А. Повещенко, И. В. Попов

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В данной работе представлена методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад» для случая цилиндрически симметричного течения. Представлена схема расчета лучистого теплообмена в среде с сильно меняющейся в пространстве и времени непрозрачностью. Предлагаемая для многопараметрических вычислительных экспериментов численная методика дает возможность получить зависимость плотности энергии излучения в виде квадратуры от коэффициента непрозрачности и излучательной способности плазмы. В двухтемпературной модели радиационной газовой динамики и магнитной гидродинамики это определяет вклад лучистого теплообмена в баланс энергии электронной компоненты плазмы. В настоящей работе рассматриваются способы повышения точности решения системы разностных уравнений путем качественного улучшения аппроксимации коэффициентов поглощения излучения. На примерах тестовых расчетов, которые моделируют пространственную неоднородность поля излучения, проводится численное сравнение предложенного метода с несколькими методами диффузионного типа. Показано, что расчеты, выполненные по рассматриваемой в настоящей работе методике, в отличие от аналогичных выполненных методом диффузионного приближения, дают качественно правильное совпадение с аналитическим решением. Существенным преимуществом приближения «вперед-назад» является то, что интегральность заложена в его структуре.

**Ключевые слова:** лучистый теплообмен, радиационная газодинамика, магнитная гидродинамика, приближение «вперед-назад», конечно-разностная схема

**Для цитирования:** Круковский А. Ю., Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Попов И. В. Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад» // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 436–451. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.436-451>

*Об авторах:*

**Круковский Александр Юрьевич**, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4188-6904>, [alexander-krukovskiy@yandex.ru](mailto:alexander-krukovskiy@yandex.ru)

**Ладонкина Марина Евгеньевна**, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, [ladonkina@imamod.ru](mailto:ladonkina@imamod.ru)

**Повещенко Юрий Андреевич**, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, [hecon@mail.ru](mailto:hecon@mail.ru)



**Попов Игорь Викторович**, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д.4), кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0002-7347-8174, piv2964@mail.ru

*Original article*

MSC2020 57N10

## Method for calculating radiative energy transfer in the “back and forth” approximation

**A. Yu. Krukovsky, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Popov**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper presents a method for calculating the radiative energy transfer in the back and forth approximation for the case of cylindrically symmetric currents. The key element of the method is the scheme for calculating radiative heat transfer in a medium with opacity that strongly varies in space and time. The paper discusses the possibility of improving accuracy of solving a difference equations' system by making the approximation of absorption coefficients more accurate. The numerical technique proposed for multi-parameter computing experiments makes it possible to obtain the radiation energy density as a quadrature of plasma opacity and emissivity. In two-temperature model of gas dynamics and magnetohydrodynamics, this determines the contribution of radiative heat transfer into the energy balance of the plasma electronic component. Numerical comparison of the proposed method with some diffusion methods was implemented via test examples simulating spatial inhomogeneity of the radiation field. It is shown that the calculations performed according to the methodology considered in this paper, give a qualitatively correct match with the analytical solution of the problem, in contrast to calculations performed by the method of diffuse approximation. The obvious advantage of the back and forth approximation is that integrality is inherent in its structure.

**Keywords:** radiative heat transfer, radiation gas dynamics, magnetohydrodynamics, “back and forth” approximation, finite-difference scheme

**For citation:** A. Yu. Krukovsky, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Popov. Method for calculating radiative energy transfer in the “back and forth” approximation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 436–451. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.436-451>

*About the authors:*

**Alexander Ju. Krukovskiy**, Senior Researcher, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), alexander-krukovskiy@yandex.ru

**Marina E. Ladonkina**, Senior Researcher, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

**Yuri A. Poveshchenko**, Leading Researcher, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

**Igor V. Popov**, Senior Researcher, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7347-8174>, e-mail: [piv2964@mail.ru](mailto:piv2964@mail.ru)

## 1. Введение

Моделирование течений излучающей плазмы в условиях осевой симметрии в одномерной постановке является одним из важнейших направлений в радиационной газовой динамике (РГД) и магнитной гидродинамике (МГД) поскольку связано с достаточно широким кругом физических задач, изучаемых в настоящее время как экспериментально, так и теоретически [1; 2].

Проведение широкомасштабного вычислительного эксперимента (ВЭ) для численного моделирования задач РГД и МГД даже в одномерной геометрии связано с существенными трудностями, которые обусловлены наличием в уравнении переноса излучения кроме пространственных еще и угловых переменных, в результате чего прямое численное интегрирование требует значительных затрат машинных ресурсов. Важное значение приобретают различные приближения, которые позволяют эффективно понизить размерность уравнения переноса излучения. В оптически плотном веществе в условиях, близких к термодинамическому равновесию, хорошей моделью служит приближение лучистой теплопроводности, а в прозрачной среде – приближение оптически тонкого слоя [3]. Если анизотропия излучения мала, то эффективны методы диффузионного приближения [4]. Наиболее важными достоинствами методов диффузионного типа являются простота реализации и достаточно высокая скорость вычислений. Это приближение обеспечивает физически корректные результаты и в плотной, и в прозрачной плазме. В областях же, где пробег фотона сравним с характерным масштабом плазмы, анизотропия излучения может быть достаточно устойчивой. Тогда диффузионное приближение формально неприемлемо и может привести к физически некорректным результатам. Часто встречаются ситуации, когда в потоке излучающей плазмы оптически прозрачные области соседствуют с областями, в которых коэффициент поглощения настолько велик, что длина пробега кванта (величина, обратно пропорциональная коэффициенту поглощения) становится существенно меньше размера ячейки разностной сетки. В данной работе представлен способ приближенного описания процессов переноса излучения в аксиально-симметричных течениях на основе приближения «вперед-назад». Для плоской геометрии такое приближение позволяет получить выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры, определяемой коэффициентом поглощения среды [3]. Для рассматриваемого в настоящей работе осесимметричного МГД-течения в двухтемпературном случае модель «вперед-назад» дает выражение для вклада процесса излучения в виде источника в уравнение энергии электронов. На тестовых расчетах была смоделирована пространственная неоднородность поля излучения. Проведено численное сравнение предложенного метода с некоторыми методами диффузионного типа. В настоящей работе изучается возможность повышения точности решения разностных уравнений путем улучшения качественного улучшения аппроксимации коэффициента поглощения излучения. Данная методика использовалась при проведении широкомасштабного вычислительного эксперимента для численного моделирования оболочечного Z-пинча под воздействием магнитного поля сильноточного генератора [5–7].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричное течение замагниченного вещества для случая, когда напряженность магнитного и электрического полей имеют две компоненты: продольную и азимутальную. При отсутствии рефракции света и в предположении квазистационарности поля излучения система уравнений радиационной МГД в переменных Лагранжа имеет вид [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{1}{4\pi} \left( r B_z \frac{\partial B_z}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (r^2 B_\varphi^2) \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u(m, t), \quad dm = \rho r dr \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = -P_e \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_e}{\partial m} + Q_{ei} + G_{joul} - \frac{\partial(rS)}{\partial m} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -P_i \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_i}{\partial m} - Q_{ei} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B_z}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial m} (r E_\varphi) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B_\phi}{\rho r} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial m} \quad (2.6)$$

$$E_\phi = -\frac{\rho r}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial m} \quad (2.7)$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (r B_\varphi) \quad (2.8)$$

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} \right) = \kappa_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) \quad (2.9)$$

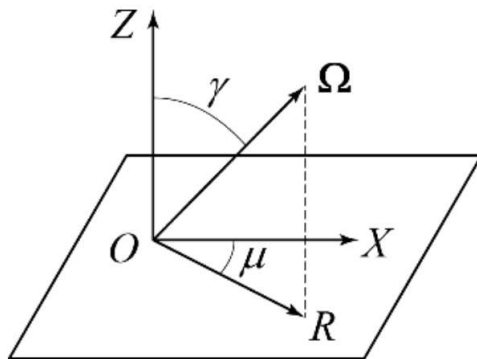
$$S = 2 \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 \frac{\mu I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu \quad (2.10)$$

$$P = P_e + P_i, \quad P_{e,i} = p(\rho, T_{e,i}), \quad \varepsilon_{e,i} = \varepsilon(\rho, T_{e,i}) \quad (2.11)$$

Здесь  $t$  – время;  $r$  – пространственная координата;  $m$  – массовая переменная;  $u$  – скорость вещества;  $p$  – газодинамическое давление;  $p_e$  и  $p_i$  – давление электронного и ионного газа соответственно;  $\varepsilon_e$  и  $\varepsilon_i$  – внутренняя энергия электронов и ионов;  $E_\varphi$ ,  $E_z$  и  $B_\varphi$ ,  $B_z$  – азимутальные и продольные компоненты электрического и магнитного полей;  $W_{e,i}$  – электронный и ионный потоки тепла;  $\sigma(T_e, \rho, \mathbf{B})$  – электропроводность;  $G_{joul}$  – мощность джоулева энерговыделения:

$$G_{joul} = \frac{1}{4\pi} \left( E_z \frac{\partial}{\partial m} (r B_\varphi) - r E_\varphi \frac{\partial B_z}{\partial m} \right),$$

$Q_{ei}$  – скорость обмена энергией между электронами и ионами;  $S$  – поток энергии излучения;  $\varkappa_\nu$  – коэффициент поглощения излучения с частотой  $\nu$ ;  $\mu$  – косинус угла между направлением полета фотонов и радиусом, проведенным в данную точку;  $\gamma$  – косинус угла между направлением полета фотонов и осью симметрии (см. Рис. 2.1);  $I_\nu$  – спектральная интенсивность излучения;  $I_{\nu p}$  – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела.



**Рис. 2.1.** Косинус угла между осью  $X$  и проекцией луча  $Q$  на площадку, пересекаемую потоком фотонов;  $\gamma$  – косинус угла между направлением полета фотонов и осью  $Z$

**Fig 2.1.** Cosine of the angle between the  $X$ -axis and the beam projection  $Q$  to the area crossed by the photon flux;  $\gamma$  – cosine of the angle between the direction of flight of photons and the  $Z$ -axis

Граничные условия для уравнений (2.9)–(2.10): на оси симметрии  $I_\nu(0, \mu, \gamma) = I_\nu(0, -\mu, \gamma)$  на внешней границе  $I_\nu(R, \mu, \gamma) = 0$ .

### 3. Некоторые приближения диффузионного типа для решения уравнения переноса излучения в задачах радиационной магнитной гидродинамики

Для решения уравнений (2.9)–(2.10) одним из наиболее привлекательных в смысле простоты и универсальности является метод диффузионного приближения, который априорно использует предположение об изотропии поля излучения. Интегрирование уравнения переноса излучения приводит к системе уравнений диффузии, поскольку между потоком  $S$  и плотностью  $U$  энергии излучения получается связь, которая аналогична связи между давлением и потоком при диффузии частиц. Проинтегрировав уравнение (2.9) сначала с весом  $1/\sqrt{1-\mu^2}$  и затем с весом  $\mu\sqrt{1-\gamma^2}/\sqrt{1-\mu^2}$  на множестве  $\mu \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \in [-1, 1]$  и предположив, что интенсивность излучения не зависит от угловых переменных  $\mu$  и  $\gamma$ , в случае одногруппового приближения имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \varkappa(U_p - U), \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \varkappa S = 0, \quad (3.2)$$

где  $U_p$  – плотность равновесного излучения.

Граничные условия для системы уравнений (3.1)–(3.2) имеют вид:

$$S|_{r=0} = 0, \quad S|_{r=R} = \frac{1}{2} U.$$

Чтобы упростить расчет лучистого теплообмена в излучающей плазме перейдем к осредненной по угловому распределению интенсивности излучения. В приближении «вперед-назад» вводятся лучистые потоки, которые вычисляются по полусферам для взаимно противоположных направлений полета фотонов (т. е. «вперед-назад» по лучу). В случае плоской симметрии интенсивность излучения моделируется кусочно-постоянной функцией от угла направления полета фотонов  $\mu$ : при  $\mu \in [0, 1]$   $I = I_1$ , а при  $\mu \in [-1, 0]$   $I = I_2$ .

Аналогичные уравнения в плоской геометрии излучающего слоя рассмотрены в [4].

В [9] рассмотрены обобщения на случай цилиндрической и сферической геометрий для расчета лучистого теплообмена между соосными цилиндрами или сферами. Приближение «вперед-назад» для случая осевой симметрии использовалось в [10]. В направлении, перпендикулярном оси симметрии, азимутальная неоднородность интенсивности рассматривалась в виде кусочно-постоянной функции, а в плоскости оси интенсивность полагалась не зависящей от угла направления полета фотонов. Тогда интегрирование уравнения (3.1) по телесному углу с учетом сделанных ограничений приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_1)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = 2 \varkappa (I_p - I_1), \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_2)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = -2 \varkappa (I_p - I_2). \quad (3.4)$$

Плотность излучения и его поток определяются следующим образом:

$$U = 2\pi(I_1 + I_2), \quad S = \pi(I_1 - I_2).$$

Суммируя и вычитая попарно уравнения (3.3) и (3.4) получаем систему уравнений, совпадающую с точностью до численного коэффициента с системой уравнений (3.1)–(3.2). Для некоторых конфигураций плазменных течений характерный размер в осевом направлении существенно превосходит размер области плазмы в перпендикулярной к оси плоскости. Соответственно, неоднородность интенсивности по полярному углу является более высокой, чем по азимутальному. Поэтому в первую очередь следует учитывать именно эту неоднородность.

#### 4. Методика расчета лучистого переноса энергии

При цилиндрической симметрии интегрирование уравнения (2.9) по угловым переменным и частоте  $\nu$  дает вклад теплопереноса излучением в уравнение энергии электронов:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \int_0^\infty \varkappa_\nu (U_{\nu p} - U_\nu) d\nu, \quad U_{\nu p} = \sigma T^4.$$

Здесь

$$U_\nu = 2 \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu -$$

спектральная плотность энергии излучения;  $U_{\nu p}$  – спектральная плотность равновесного излучения;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Диапазон частот, где происходит основной теплообмен излучением, разобьем на некоторое количество групп  $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_i \leq \nu_k$  и для каждой группы решаем уравнение (2.9), используя значения для

$$I_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} I_\nu d\nu, \quad U_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} U_\nu d\nu$$

и предполагая, что на каждом интервале коэффициент поглощения не зависит от энергии фотона

$$\varkappa_\nu(T_e, \rho, \nu) = \varkappa_i(T_e, \rho), \quad \nu_i \leq \nu \leq \nu_{i+1},$$

при этом

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \sum_{i=1}^k \varkappa_i (U_{ip} - U_i).$$

Далее опустим зависимость от частоты и будем рассматривать «одногрупповое» приближение, что не нарушает общности. При решении уравнения (2.9) используется прием [3–4]: вводится для  $I_\nu(r, \mu, \gamma)$  двухгрупповое описание по угловой переменной  $\mu$  и не делается вообще никаких предположений относительно зависимости от угловой переменной  $\gamma$ :

$$I(r, \mu, \gamma) = \begin{cases} I^-(r, \gamma) & \mu \leq 0, \\ I^+(r, \gamma) & \mu > 0. \end{cases}$$

Далее, проинтегрировав по  $\mu$  уравнение (2.9) сначала от  $-1$  до  $0$  и от  $-1$  до  $1$ , имеем:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial I^-}{\partial r} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} (I_p - I^-), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r} + \frac{\varkappa U}{\sqrt{1-\gamma^2}} = 2 I^- \left( \frac{\varkappa}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{1}{r} \right). \quad (4.2)$$

Интегрирование уравнения (2.9) проводится с учетом граничных условий:

$$I_{boundary}^-(R) = 0, \quad U_{boundary}(0) = 2I_{boundary}^-(0), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Решив уравнения (4.1)–(4.2), получим:

$$U(\gamma, r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \frac{\varkappa(r'//)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} I_p(r'//) \left( r' + \frac{\varkappa(r')}{\sqrt{1-\gamma'^2}} (r')^2 \right) \cdot \exp\left(-\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right) dr'// \, dr',$$

где

$$\varsigma(r, r', r'//) = 2 \left( \int_{r'}^{r'//} \varkappa(r'///) dr'/// + \int_{r'}^r \varkappa(r'///) dr'/// \right).$$



Проинтегрируем полученное выражение по  $\gamma$  и, сделав подстановку

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}},$$

получим искомое выражение для вклада переноса излучения в уравнение электронной энергии

$$U(r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \mathfrak{x}(r'/) I_p(r'/) \left( r'/ f(\varsigma) - \mathfrak{x}(r'/) (r'/)^2 \frac{\partial f}{\partial \varsigma} \right) dr'/ dr'. \quad (4.3)$$

Функцию

$$f(\varsigma) = 2 \int_0^\infty \frac{e^\varsigma - \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x} dx$$

выразим в терминах модифицированных функций Ганнеля, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial \varsigma} = -2 K_0(\varsigma).$$

При численном решении задач для функции  $f(\varsigma)$  используются различные аппроксимации, что объясняется экспоненциальным спаданием  $f(\varsigma)$  в области  $\varsigma > 1$ . Важными свойствами функции  $f(\varsigma)$ , определяющими асимптотическое поведение распределения энергии излучения в пределах оптически плотной ( $\mathfrak{x}R \gg 1$ ) и оптически прозрачной ( $\mathfrak{x}R \rightarrow 1$ ) среды, являются соотношения:

$$f(0) = \pi, \quad \int_0^\infty f(\varsigma) d\varsigma = 2.$$

В качестве первого приближения возьмем простейшую аппроксимацию функции

$$f(\varsigma) = \begin{cases} \pi - \frac{\pi^2}{4} \varsigma, & \varsigma < \frac{4}{\pi}, \\ 0, & \varsigma \geq \frac{4}{\pi}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Аппроксимация  $f(\varsigma)$  позволяет существенно снизить затраты машинного времени. При этом, как показали расчеты тестовых задач (см. ниже), погрешность, которая возникает при таком (достаточно грубом) приближении, вполне допустима для ряда практических задач радиационной МГД [5–7].

## 5. Построение численного алгоритма решения уравнения переноса

Область, заполненную плазмой, разобьем на  $N$  (в общем случае неравномерных) ячеек. Обозначим множество узлов разностной сетки через  $\bar{\omega}$ , а множество ячеек разностной сетки –  $\omega$ . Введем пространства сеточных функций, которые определены в узлах и ячейках разностной сетки, и обозначим их через  $H_{\bar{\omega}}$  и  $H_{\omega}$  соответственно. Для

записи сеточных функций  $f \in H_{\bar{\omega}}$  будем использовать индекс  $j : f_j \in f \in H_{\bar{\omega}}$ . Сеточные функции  $g \in H_{\omega}$  будем отмечать индексом  $l : g_l \in g \in H_{\omega} \quad l = \overline{1, N}, j = \overline{1, N+1}$ . Определим сеточную функцию  $r$  в узлах разностной сетки, а остальные сеточные функции  $\mathfrak{x}$ ,  $I$ ,  $I_p$ ,  $U$  и  $U_p$  – в ячейках разностной сетки. Для численной реализации предложенного метода аппроксимируем двойной интеграл (4.3) на разностной сетке  $\bar{\omega}_h$ . При этом учитываем, что коэффициент  $\mathfrak{x}$  постоянен в разностной ячейке  $l$ :

$$U_l = \frac{2}{r_{j+1}^2 - r_j^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} U(r) \, dr, \quad j = l.$$

Введем обозначение

$$J(\mathfrak{x}_{r'}) = f(\varsigma) - \mathfrak{x}(r') \, r' \frac{\partial f}{\partial \varsigma},$$

$$G(r) = I_p(r) \, \mathfrak{x}(r).$$

Тогда, проведя несложные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{8}{r^2} \int_0^r dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r') \, r' \, J(\mathfrak{x}_{r'}) \, dr' = \\ &= \frac{8}{r^2} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} dr' \, r' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r') \, J(\mathfrak{x}_{r'}) \, dr' + \int_{r_j}^r dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r') \, J(\mathfrak{x}_{r'}) \, dr' \right) = \\ &= \frac{8}{r^2} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \, dr' \left\{ G(r_n) \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\mathfrak{x}_n) \, dr' + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{x}_n) \, dr' \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_j}^r dr' \left\{ G(r_l) \int_{r_j}^{r_{j+1}} J(\mathfrak{x}_l) \, dr' + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{x}_l) \, dr' \right\} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $n = k$ ,  $m = i$ ,  $r_m = 0,5(r_i + r_{i+1})$ ,  $r_n = 0,5(r_k + r_{k+1})$ . Обозначим

$$U_n^{(1)}(r) = \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\mathfrak{x}_n) \, dr' \, dr',$$

$$U_{nm}^{(2)}(r) = \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{x}_n) \, dr' \, dr',$$

$$U_l^{(3)}(r) = \int_{r_j}^r r' \int_{r'}^{r_{j+1}} J(\mathfrak{x}_l) \, dr' \, dr',$$

$$U_{lm}^{(4)}(r) = \int_{r_j}^r r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{x}_l) \, dr' \, dr'.$$

Тогда вклад переноса излучения в уравнение электронной энергии имеет вид

$$U_r(r) = \frac{8}{r^2} \left[ \sum_{k=1}^{j-1} \left( G(r_n) U_n^{(1)}(r) + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) U_{nm}^{(2)}(r) \right) + \right. \\ \left. + G(r_l) U_l^{(3)}(r) + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) U_{lm}(r) \right]. \quad (5.1)$$

Для аргумента функции  $f$  имеем

$$\varsigma(r, r^/, r^{//}) = 2 \left( \int_{r^/}^r \varpi(r^{///}) dr^{///} + \int_{r^/}^{r^{//}} \varpi(r^{///}) dr^{///} \right).$$

Аналогично выпишем следующие формулы

$$\text{для } U_n^{(1)}(r): r_k \leq r^/ \leq r_{k+1}, \quad r^/ \leq r^{//} \leq r_{k+1},$$

$$\varsigma^{(1)}(r, r^/, r^{//}) = 2 \left( \sum_{k'=k+1}^{j-1} \varpi_{n^/}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \varpi_n(r_{k+1} + r^{//} - 2r^/) + \varpi_l(r - r_j) \right),$$

$$\text{для } U_{nm}^{(2)}(r): r_k \leq r^/ \leq r_{k+1}, \quad r_i \leq r^{//} \leq r_{i+1},$$

$$\varsigma^{(2)}(r, r^/, r^{//}) = 2 \left( \sum_{k'=k+1}^{j-1} \varpi_{n^/}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \sum_{k'=k+1}^{i-1} \varpi_{n^/}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \right. \\ \left. + 2\varpi_n(r_{k+1} - 2r^/) + \varpi_l(r - r_j) + \varpi_m(r^/ - r_i) \right),$$

$$\text{для } U_l^{(3)}(r): r_j \leq r^/ \leq r, \quad r^/ \leq r^{//} \leq r_{j+1},$$

$$\varsigma^{(3)}(r, r^/, r^{//}) = 2\varpi_l(r + r^{//} - 2r^/),$$

$$\text{для } U_{lm}^{(4)}(r): r_j \leq r^/ \leq r, \quad r_i \leq r^/ \leq r_{i+1},$$

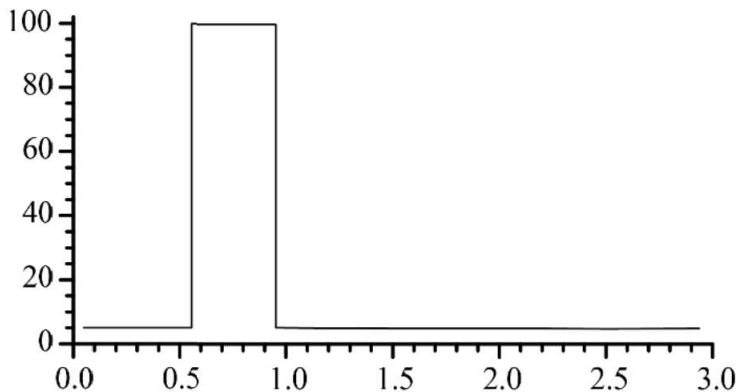
$$\varsigma^{(4)}(r, r^/, r^{//}) = 2 \left( \sum_{k'=j+1}^{i-1} \varpi_{n^/}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \varpi_l(r_{j+1} + r - 2r^/) + \varpi_m(r^{//} - r_i) \right),$$

где  $n^/ = k^/$ .

Следовательно, вклад переноса излучения записан в уравнение энергии электронов в виде конечно-разностной квадратурной формулы (5.1). При этом единственное предположение модели – это приближение «вперед-назад» в азимутальной плоскости. Из сравнительного анализа, проведенного на тестовых примерах, результаты которого приведены ниже, видно, что такой подход, несмотря на достаточную алгоритмическую сложность, связанную с аппроксимацией двойного интеграла на разностной сетке, имеет несомненные достоинства, которые обусловлены именно его интегральностью.

## 6. Результаты тестовых расчетов

Значения коэффициентов для тестовых расчетов, которые моделируют пространственную неоднородность поля излучения, задавались следующим образом (см. Рис. 6.1). Коэффициент поглощения  $\kappa_1$  полагался постоянным и равным  $\kappa_1$  в интервале  $r_1 \leq r \leq r_2$  для всех расчетов, а в остальной области  $0 \leq r \leq r_1$  и  $r_2 \leq r \leq R$  коэффициент поглощения имел вид:  $\kappa_2 = \frac{\kappa_1}{c_n}, n = 1, 2, 3$ . Предполагалось, что оптическая толщина слоя  $[r_1, r_2]$  существенно больше единицы. Плотность равновесного излучения задавалась постоянной во всей расчетной области (рис. 6.1).



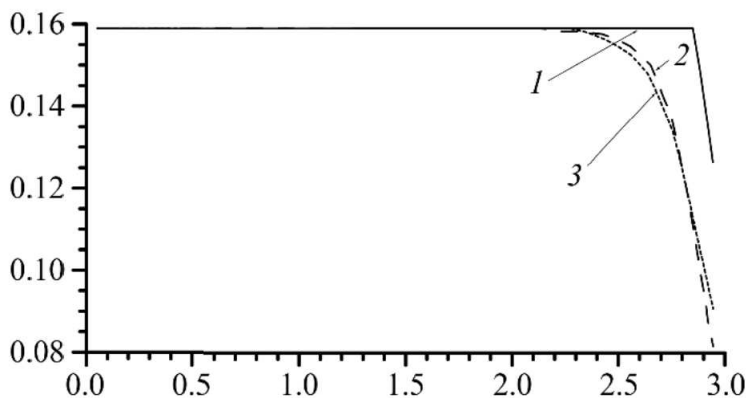
**Рис. 6.1.** График зависимости коэффициента поглощения от радиуса  
**Fig 6.1.** Dependency graph of the absorption coefficient as a function of radius

Получить аналитическое решение по распределению интенсивности  $I(r, \varphi, \gamma)$  даже в этом, относительно простом тесте, оказывается сложно. Поэтому для сравнения с численными расчетами по методике настоящей работы и некоторыми методами диффузионного типа ограничимся оценкой качественного поведения профиля  $U(r)$ .

Учитывая, что плотная оболочка оптически непрозрачна для излучения  $\kappa_1(r_2 - r_1) \gg 1$ , то внутри оболочки при  $r < r_1$  распределение плотности энергии излучения практически постоянно и соответствует значению  $U = U_p$ . Поскольку внешняя оболочка оптически прозрачна для излучения, то вблизи границы плотной оболочки на размере  $\frac{1}{\kappa_1} \ll (r_2 - r_1)$  функция  $U(r)$  резко падает до значения  $U = \frac{U_p}{2}$ , а снаружи плотной оболочки падает по закону, близкому к  $U(r) \approx \frac{1}{r}$ , потому что  $\kappa \rightarrow 0$ . Поэтому вдоль траектории полета фотонов интенсивность почти постоянна, а угол, под которым видна плотная оболочка при удалении от нее,  $\Delta\phi \approx \frac{1}{r}$ . Отсюда имеем закон спадания функции  $U(r)$ , поскольку  $U = 2\pi\Delta\phi I$ .

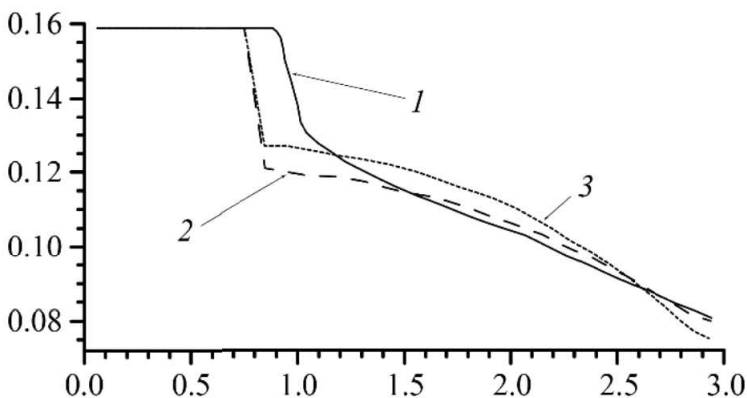
На Рис. 6.2–6.4 представлены результаты численных расчетов по методу, описанному в настоящей работе, и также некоторым методам диффузионного типа. Параметры задачи задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 100, U_p = 0.5, r_1 = 0.7, r_2 = 1, R = 3, \\ c_1 &= 200, c_2 = 2 \cdot 10^4, c_3 = 10^5. \end{aligned}$$



**Рис. 6.2.** График зависимости плотности излучения от радиуса при  $C_1 = 2 \cdot 10^2$ : 1 – методика настоящей работы; 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8]; 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

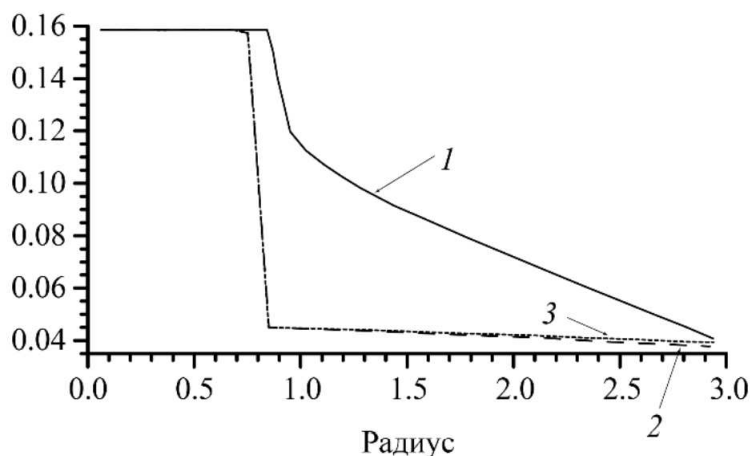
**Fig 6.2.** Graph of the dependence of the radiation density on the radius at  $C_1 = 2 \cdot 10^2$ : 1 – methodology of this study; 2 – diffusion approach with approximation [8]; 3 – front-to-back approach with approximation [10]



**Рис. 6.3.** График зависимости плотности излучения от радиуса при  $C_2 = 2 \cdot 10^4$ : 1 – методика настоящей работы; 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8]; 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

**Fig 6.3.** Graph of the dependence of the radiation density on the radius at  $C_2 = 2 \cdot 10^4$ : 1 – methodology of this study; 2 – diffusion approach with approximation [8]; 3 – front-to-back approach with approximation [10]

Результаты расчетов показали, что в случае диффузионного приближения и метода диффузионного типа, предложенного в [10], даже при разрыве в коэффициенте поглощения, не превышающего четырех порядков, плотность излучения сильно «зарезается»



**Рис. 6.4.** График зависимости плотности излучения от радиуса при  $C_3 = 10^5$ :

- 1 – методика настоящей работы;
- 2 – диффузионное приближение с аппроксимацией [8];
- 3 – приближение «вперед-назад» с аппроксимацией [10]

**Fig 6.4.** Graph of the dependence of the radiation density on the radius at

- $C_3 = 10^5$ : 1 – methodology of this study;
- 2 – diffusion approach with approximation [8];
- 3 – front-to-back approach with approximation [10]

при  $r > r_2$  по сравнению с точным решением, что в реальных МГД расчетах привело к существенному снижению потока излучения и неоправданному перегреву области  $r \leq r_2$ , где излучение «заперто». В то же время расчет, выполненный по рассматриваемой в настоящей работе методике, дает качественно правильное спадание плотности излучения в области  $r > r_2$ .

При построении разностной схемы с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (3.1)–(3.2), использовалась линейная интерполяция коэффициента поглощения  $\kappa$ . Попытка улучшить качество аппроксимации путем интегрирования уравнений (3.1)–(3.2) по разностной ячейке при постоянном  $\kappa$ , чтобы потом использовать для аппроксимации точное решение, принципиально ничего не меняет. Главным здесь является факт, что в этом случае из сходимости численного решения данной системы не следует сходимость к точному решению уравнения (2.9). Следовательно, при таких коэффициентах излучения использовать любые методы диффузионного приближения нецелесообразно.

## 7. Заключение

Таким образом, ситуация с расчетом лучистого переноса энергии имеет принципиальный характер. В РГД и МГД расчетах в первую очередь интересны интегральные величины: поток  $S = S\Omega Id\Omega$  или плотность излучения  $U = \text{div}S$ . Если при использовании одного из методов диффузионного типа для уравнения переноса, вычислить интенсивность излучения  $I$  с достаточно высокой точностью, то вычисление интегральных характеристик  $S$  или  $U$  при существенно неоднородных коэффициентах поглощения излучения (в частности, из-за ошибок округления) может (как и показали численные

расчеты) привести к качественно неверным результатам, что неприемлемо. Метод же, предложенный в данной работе, обладает очевидным преимуществом, потому что интегральность заложена в самой его структуре.

Поэтому использование данного метода даже при сильно неоднородных коэффициентах поглощения излучения гарантирует получение корректных результатов. Таким образом методика расчета лучистого теплообмена, представленная в настоящей работе, достаточно универсальна: она позволяет получить физически корректные результаты в тех областях, где приближения диффузионного типа, лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя не работают.

Расчеты практических задач [5–7] подтверждают достаточно высокую эффективность описанной в настоящей работе методики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hansen S. B., Gomez M. R., Sefkow A. B., Slutz S. A., Sinars D. B., Hahn K. D., Harding E. C., Knapp P. F., Schmit P. F., Awe T. J., McBride R. D., Jennings C. A., Geissel M., Harvey-Thompson A. J., Peterson K. J., Rovang D. C., Chandler G. A., Cooper G. W., Cuneo M. E., Herrmann M. C., Hess M. H., Johns O., Lamppa D. C., Martin M. R., Porter J. L., Robertson G. K., Rochau G. A., Ruiz C. L., Savage M. E., Smith I. C., Stygar W. A., Vesey R. A., Blue B. E., Ryutov D., Schroen D. G., Tomlinson K. Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4921217>
2. Gonsalves A. J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T. C. H., Steinke S., Bin J. H., Bulanov S. S., van Tilborg J., Geddes C. G. R., Schroeder C. B., T'Oth Cs., Esarey E., Swanson K., Fan-Chiang L., Bagdasarov G., Bobrova N., Gasilov V., Korn G., Satorov P., Leemans W. P. in a laser-heated capillary discharge waveguide // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 122, no. 8. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 653 с.
4. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 305 с.
5. Гасилов В. А., Захаров С. В. Смирнов В. П. О генерации мощных потоков излучения и получения мегабарных давлений в лайнерных системах // *Письма в ЖЭТФ*. 1991. Т. 53, № 2. С. 83–86.
6. Гасилов В. А., Захаров С. В., Круковский А. Ю., Скороваров К. В. Генерация интенсивных потоков излучения и мегабарных ударных волн сжимающимися лайнерами // *Физика плазмы*. 1995. Т. 21, № 5. С. 399–406.
7. Гасилов В. А., Круковский А. Ю. О расчете лучистого теплообмена в композитном Z-пинче // *Матем. моделирование*. 2022. Т. 34, № 9. С. 21–36. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-02>
8. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа // М.: Наука, 1985. 304 с.

9. Рекин А. Д. Уравнения переноса излучения в приближении Шустера-Шварцшильда для задач со сферической и цилиндрической симметрией // ТВТ. 1978. Т. 16, № 4. С. 811–818.
10. Романов Г. С., Сметанников А. С. Численное моделирование слойного импульсного разряда с учетом переноса энергии излучения // ЖТФ. 1982. Т. 52, № 9. С. 1756–1762.

*Поступила 22.09.2022; доработана после рецензирования 10.11.2022;  
принята к публикации 23.11.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. S. B. Hansen, M. R. Gomez, A. B. Sefkow, S. A. Slutz, D. B. Sinars, K. D. Hahn, E. C. Harding, P. F. Knapp, P. F. Schmit, T. J. Awe, R. D. McBride, C. A. Jennings, M. Geissel, A. J. Harvey-Thompson, K. J. Peterson, D. C. Rovang, G. A. Chandler, G. W. Cooper, M. E. Cuneo, M. C. Herrmann, M. H. Hess, O. Johns, D. C. Lamppa, M. R. Martin, J. L. Porter, G. K. Robertson, G. A. Rochau, C. L. Ruiz, M. E. Savage, I. C. Smith, W. A. Stygar, R. A. Vesey, B. E. Blue, D. Ryutov, D. G. Schroen, K. Tomlinson, “Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z”, *Physics of Plasmas*, **22** (2015). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4921217>
2. A. J. Gonsalves, K. Nakamura, J. Daniels, C. Benedetti, C. Pieronek, T. C. H. de Raadt, S. Steinke, J. H. Bin, S. S. Bulanov, J. van Tilborg, C. G. R. Geddes, C. B. Schroeder, Cs. TÖth, E. Esarey, K. Swanson, L. Fan-Chiang, G. Bagdasarov, N. Bobrova, V. Gasilov, G. Korn, P. Sasorov, W. P. Leemans, “Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laser-heated capillary discharge waveguide”, *Physical Review Letters*, **122**:8 (2019).
3. Ya. B. Zeldovich, Yu. P. Raiser, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 653 p.
4. M. N. Oscik, *Complex heat transfer*, Mir Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 305 p.
5. V. A. Gasilov, S. V. Zakharov, V. P. Smirnov, “Generation of intense radiation fluxes and megabar pressures in liner systems”, *Letters to the JETPh*, **53**:2 (1991), 83–86 (In Russ.).
6. V. A. Gasilov, S. V. Zakharov, A. Yu. Krukovsky, K. V. Skorovarov, “Generation of intense radiation fluxes and megabar shock waves by compressing liners”, *Plasma Physics*, **21**:5 (1995), 399–406 (In Russ.).
7. V. A. Gasilov, A. Yu. Krukovsky, “On the calculation of radiant heat transfer in a composite Z-pinch”, *Matem. modelirovaniye*, **34**:9 (2022), 21–36 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-02>
8. B. N. Chetverushkin, *Mathematical simulation of radiating gas dynamics problems*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 304 p.



9. A. D. Rekin, “Radiation transfer equations in the Schuster-Schwarzschild approximation for problems with spherical and cylindrical symmetry”, *TVT*, **16**:4 (1978), 811–818 (In Russ.).
10. G. S. Romanov, A. S. Smetannikov, “Numerical modeling of a layered pulsed discharge taking into account the transfer of radiation energy”, *JTPh*, **52**:9 (1982), 1756–1762 (In Russ.).

*Submitted 22.09.2022; Revised 10.11.2022; Accepted 23.11.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.452-468

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.64

## Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел

Д. А. Шишканов, М. В. Ветчинников, Ю. Н. Дерюгин

ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ» (г. Саров, Россия)

**Аннотация.** В статье проводится исследование метода перидинамики – альтернативного подхода к решению задач разрушения, основанного на интегральных уравнениях. Предполагается, что частицы в континууме взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Повреждение является частью теории на уровне взаимодействия двух частиц, поэтому нахождение повреждения и разрушение происходит при решении уравнения движения. В ходе проделанной работы были описаны перидинамические модели разрушения на основе связи и на основе состояний, используемые в Сандийской лаборатории, и реализованы в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS. В модели, основанной на связи, определяющим соотношением является функция жесткости связи, которая корректирует силу взаимодействия частиц и накладывает ограничение на использование коэффициента Пуассона. Модель на основе состояний обобщает подход на основе связи и применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона. Определена связь моделей, показана сходимость на примере одномерной задачи упругости и возможность применения реализованных моделей для задач разрушения. Внедрение макромасштабного метода перидинамики в комплекс программ молекулярной динамики MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования.

**Ключевые слова:** перидинамика, механика сплошных сред, молекулярная динамика, нелокальные взаимодействия, бессеточный метод, модель разрушения, функция жесткости связи

**Для цитирования:** Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>

*Об авторах:*

**Шишканов Дмитрий Алексеевич**, математик научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

**Ветчинников Максим Владимирович**, начальник научно-исследовательской лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> [vetchinnikov\\_max@mail.ru](mailto:vetchinnikov_max@mail.ru)

**Дерюгин Юрий Николаевич**, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)



MSC2020 45K05 37N15

## Peridynamics method for problems solve of solids destruction

D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin

*FSUE RFNC – VNIIEF (Sarov, Russia)*

**Abstract.** The article investigates the method of peridynamics, which is an alternative approach to solving destruction problems based on integral equations. It is assumed that particles in a continuum interact with each other at a finite distance, as in molecular dynamics. Damage is part of the theory at the level of two-particle interactions, so damage finding and destruction occurs when solving the equation of motion. During this work, bond-based and state-based peridynamics models of destruction used in the Sandia Laboratory were described and implemented within the framework of the MoDyS molecular dynamics software package. In the bond-based model, the defining relationship is the bond stiffness function, which corrects the force of particle-particle interaction and imposes a restriction on the use of the Poisson's ratio. The state-based model generalizes the bond-based approach and may be applied to materials with any Poisson's ratio. The relationship of both models is ascertained. Calculation convergence is demonstrated on the example of a one-dimensional elasticity problem. The possibility of using the implemented models for fracture problems is also shown.

**Keywords:** peridynamics, continuum mechanics, molecular dynamics, nonlocal interactions, mesh-free method, fracture model, bond stiffness function

**For citation:** D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin. Peridynamics method for problems solve of solids destruction. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>

*About the authors:*

**Dmitry A. Shishkanov**, research laboratory mathematician, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

**Maxim V. Vetchinnikov**, Head of research laboratory, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-1738> [vetchinnikov\\_max@mail.ru](mailto:vetchinnikov_max@mail.ru)

**Yuriy N. Deryugin**, Chief Researcher, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

### 1. Введение

Многие задачи в механике твердого тела приводят к формированию и развитию трещин. При численном решении подобных задач в классической теории возникает сложность, которая связана с использованием дифференциальных уравнений в частных производных. Для уравнений сплошной среды необходимы пространственные производные, которые не существуют на поверхности разрыва трещины. Поэтому любой

численный метод для решения уравнений в частных производных сталкивается с проблемами при моделировании трещин.

Метод перидинамики – альтернативный подход к решению задач разрушения, основанный на интегральных уравнениях, а не дифференциальных. Перидинамическая теория, введенная Силингом [1], является нелокальным представлением механики твердого тела, которая заключается в задании основных уравнений движения таким образом, чтобы они применялись всюду в твердом теле вне зависимости от наличия разрывов. Предполагается, что макрочастицы в континууме взаимодействуют друг с другом на конечном расстоянии, как в молекулярной динамике. Повреждение является частью теории на уровне взаимодействия двух частиц, поэтому нахождение повреждения и разрушение происходит при решении уравнения движения. На данный момент существует несколько различных моделей разрушения, которые представлены в справочниках по перидинамике [2; 3]. В данной статье рассматриваются модели на основе связи и на основе состояний.

В модели, основанной на связи, используется парное взаимодействие, поэтому она применима только для материалов с коэффициентом Пуассона  $1/4$  [4]. Задание силы межчастичного взаимодействия происходит посредством жесткости связи [5]. Для более точного определения жесткости связи необходимо учитывать длину связи, как представлено в работе [6]. Для этого вводится функция влияния. Силинг и др. [7] показали, что функция влияния должна удовлетворять определенным условиям непрерывности. В [8] рассмотрены некоторые способы задания функции жесткости связи для 1D случая.

Модель на основе состояния, которая представлена в [9], является обобщением модели на основе связи. В ней значение силы, действующей на каждую частицу в связи, зависит от положения частицы в пределах ее горизонта через относительное смещение. Такая модель применяется для материалов с любым коэффициентом Пуассона благодаря функции влияния. Эта функция используется в перидинамике для ограничения силы, действующей на частицу, и корректировки прочности связи [10]. Ее роль в перидинамической теории рассматривается в работе [11]. Селесон показал связь между моделями на основе связи и на основе состояния через сферическую функцию влияния [12].

Цель исследования, проведенного в рамках данной работы, заключается в реализации перидинамических моделей разрушения Сандийской лаборатории [13]. В силу того, что уравнения перидинамики очень похожи на уравнения молекулярной динамики (МД), реализация перидинамических моделей осуществляется в рамках комплекса программ молекулярной динамики MoDyS (Molecular Dynamic Simulation) [14]. Первые совместная реализация этих разномасштабных методов была произведена Силингом в пакете программ LAMMPS [15].

Оба метода являются нелокальным представлением сплошной среды, но в разных масштабах. Внедрение метода перидинамики в MoDyS позволит в дальнейшем осуществить идею гибридного моделирования [16], которая даст возможность понять поведение материалов на разных масштабных уровнях при разрушениях. Реализация перидинамических моделей в комплексе программ MoDyS сводится к замене процедуры, ответственной за вычисление сил. Задачами исследования являлись изучение перидинамического метода на примере PMB (Prototype Microelastic Brittle) и LPS (Linear Peridynamic Solid) моделей, реализация алгоритмов из [13] в комплексе программ MoDyS и тестирование на примере простых задач упругости и задач разрушения.

## 2. Метод перидинамики

Твердое тело в перидинамической теории представляется набором частиц. Физическое взаимодействие между частицами осуществляется посредством связи, т. е. влияние частиц друг на друга происходит на конечном расстоянии внутри замкнутого горизонта. Перидинамика основана на интегральных уравнениях, благодаря чему избегает пространственные производные, которые не существуют на поверхностях разрыва в классической механике сплошных сред.

Для дискретной модели каждая частица (с номером  $i$ ) наделена параметрами (массой —  $m_i$ , плотностью —  $\rho_i$ , начальными координатами —  $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ ) и является макрообъектом. Движение деформируемой среды характеризуется дискретным вектором смещений  $\vec{u}_i(u_i^x, u_i^y, u_i^z)$ .

Аппроксимационные свойства метода определяются заданием векторов относительного положения частиц  $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$  и относительного смещения  $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$  на дискретном множестве частиц, удовлетворяющих условию  $|\vec{\xi}_i| < \delta$ .

Уравнение движения частицы  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  задается в виде

$$\rho_i \ddot{\vec{u}}(\vec{r}_i, t) = \int_{H_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$

где  $H_{\vec{r}_i}$  — множество соседей частицы  $\vec{r}_i$ ;  $\vec{b}$  — граничные условия;  $\vec{f}_i$  — силы, определяющие взаимодействие частиц  $i$  и  $k$ .

Построение дискретной модели начинается с задания плотности энергии деформирования:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{H_{\vec{r}_i}} \vec{w}(\vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{\xi}_i}, \quad (2.2)$$

где  $\vec{w} = \vec{w}(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i)$  — энергия связи между частицами.

Сила межчастичного взаимодействия в общем виде определяется дифференцированием энергии связи:

$$\vec{f}_i(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\eta}_i}(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|} \quad \forall \vec{\eta}_i, \vec{\xi}_i. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) и уравнение движения (2.1) образуют замкнутую систему уравнений перидинамики.

## 3. РМВ модель перидинамики

Данная модель основана на связях. Такие модели определяют силу взаимодействия двух частиц, основываясь на «истории» этих частиц (например, начальное и текущее положения). Сила задается уравнением

$$\vec{f}_i(\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i) = cs\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) \frac{\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i}{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i|}, \quad (3.1)$$

где  $c$  — упругая константа, задающая жесткость связи;  $s$  — деформация связи:

$$s = \frac{|\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i| - |\vec{\xi}_i|}{|\vec{\xi}_i|}, \quad (3.2)$$

а  $\mu$  — скалярная функция положения материальной точки, которая принимает значения 1 или 0 и определяется формулой:

$$\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) = \begin{cases} 1, & s\left(t', \vec{\xi}_i\right) < s_0 \quad \forall \quad 0 \leq t' \leq t, \\ 0, & s\left(t', \vec{\xi}_i\right) \geq s_0 \quad \forall \quad 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $s_0$  — критическое удлинение разрыва связи (в настоящей работе полагается константой).

Введение разрыва на уровне связи позволяет точно выразить идею локального повреждения, которое определяется формулой:

$$\phi_i(\vec{r}_i, t) = 1 - \frac{\int_{H_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{H_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}}. \quad (3.4)$$

Повреждение принимает значения в диапазоне  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , где 0 означает, что материал целый, а 1 означает заверченный разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала.

#### 4. Жесткость связи

Сила межчастичного взаимодействия (3.1) связана со смещением через жесткость связи между частицами. Для однородных деформаций в трехмерных задачах значение жесткости связи выводится в работе [4]. Такая жесткость пропорциональна модулю объемного сжатия

$$c = \frac{18K}{\pi\delta^4}. \quad (4.1)$$

Силинг и др. [8] предполагают, что возможны и другие виды функции жесткости связи, выбор которой влияет только на деформации внутри горизонта взаимодействия частицы и не оказывает влияния на решение задач упругости при стремлении горизонта к нулю.

#### 5. Функция влияния

Жесткость связи (4.1) одинакова для всех связей внутри горизонта взаимодействия. Для более точного ее определения необходимо учитывать расстояние между частицами. В общем случае, жесткость связи — это функция, зависящая от длины связи и горизонта взаимодействия. Она должна удовлетворять определенным условиям непрерывности [7]. Чтобы учесть расстояние между частицами, функция жесткости связи записывается в виде

$$c(|\xi_i|, \delta) = c\omega(|\xi_i|, \delta), \quad (5.1)$$

где  $\omega(|\xi_i|, \delta)$  — функция влияния, корректирующая устойчивость нелокальных взаимодействий двух частиц.

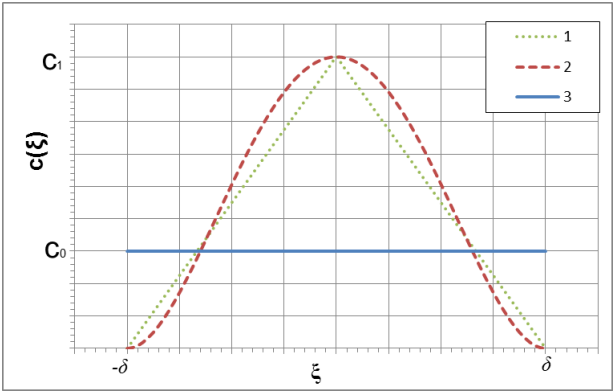
Рассмотрим примеры функций жесткости связи для одномерного случая [7]:

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_0, & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_1 \left(1 - \frac{|\xi_i|}{\delta}\right), & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$c(|\xi_i|, \delta) = \begin{cases} c_2 \left(1 - \left(\frac{|\xi_i|}{\delta}\right)^2\right)^2, & |\xi_i| \leq \delta, \\ 0, & |\xi_i| \geq \delta. \end{cases} \quad (5.4)$$

Константы  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  получаются, используя энергию связи между точками  $w$  из (2.3) и (3.1) и, сравнением плотности энергии деформации (2.2) с упругой плотностью энергии в классической теории  $W = \frac{Es^2}{2}$ , где  $E$  — модуль Юнга. Как видно на рисунке 5.1, введенная функция влияния в (5.1) позволяет уменьшать жесткость взаимодействия частиц при увеличении длины связи. Для функций типа (5.3) и (5.4)  $c(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \delta$ . Это дает более точное описание нелокального взаимодействия.



**Рис. 5.1.** Примеры функции жесткости связи  $c(\xi)$ : 1 — треугольная (5.3), 2 — квадратичная (5.4), 3 — постоянная (5.2)

**Fig 5.1.** Examples of the bond stiffness function  $c(\xi)$ : 1 — triangular (5.3), 2 — quadratic (5.4), 3 — constant (5.2)

## 6. LPS модель

Данная модель представляет собой обобщение подхода, основанного на связях [17]. Сила взаимодействия частиц является функцией полного набора частиц в нелокальных окрестностях этих частиц. Другими словами значение силы, действующей на каждую частицу в связи, зависит от положения частиц в пределах ее горизонта через относительное смещение  $\theta$ , что позволяет избавиться от ограничений, возникающих при

использовании подхода на основе связи [9]. Плотность энергии деформирования задается в виде

$$W_i = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_{H_{\vec{r}_i}} \omega \varepsilon^2 dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.1)$$

Сила, действующая на частицу  $t_i$ , определяется выражениями

$$\vec{t}_i = \frac{1}{2} \vec{f}_i, \quad (6.2)$$

$$\vec{t}_i = \frac{dK\theta}{m_i} \omega |\vec{\xi}_i| + \alpha \omega \varepsilon. \quad (6.3)$$

где  $K$  — модуль объёмного сжатия;  $\theta$  — относительное смещение;  $\varepsilon$  — девиатор тензора деформации;  $\alpha$  — константа;  $\omega$  — функция влияния;  $d$  — размерность пространства;  $m_i$  — массовый объем частицы, который определяется следующей формулой

$$m_i = \int_{H_{\vec{r}_k}} \omega |\vec{\xi}_i|^2 dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.4)$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  в (6.2) показывает, что сила в LPS модели распределяется на каждую частицу связи, в отличие от PMB, где вычисленная сила (3.1) одинаково действует на каждую частицу связи. Другими словами для PMB модели  $\vec{t}_i = \vec{f}_i$ .

Тензор деформации  $e$  представляется в виде суммы шаровой и девиаторной части:

$$e = e^i + \varepsilon, \quad e^i = \frac{\theta |\vec{\xi}_i|}{3}, \quad \theta [\vec{r}_i, t] = \frac{d}{m_i} \int_{H_{\vec{r}_k}} \omega |\vec{\xi}_i| e [\vec{r}_i, t] dV_{\vec{r}_k}. \quad (6.5)$$

Константа  $\alpha$  пропорциональна модулю сдвига  $G$ , ее значение вычисляется из сравнения энергии (6.1) с энергией классической теории [18]. Для трехмерных задач принимает значение

$$a = \frac{15G}{m}. \quad (6.6)$$

## 7. Связь LPS и PMB моделей

Для PMB модели  $\nu = \frac{1}{4}$ ,  $G = \frac{3}{5}K$ . Тогда силу межчастичного взаимодействия (6.3) запишем в виде

$$\vec{t}_i = \frac{9K}{m_i} \omega |\vec{\xi}_i| s. \quad (7.1)$$

Для связи LPS и PMB моделей используется сферическая функция влияния

$$\omega = \frac{1}{|\vec{\xi}_i|}. \quad (7.2)$$

Используя (7.2), массовый объем (6.4)  $m_i = \pi \delta^4$ . Таким образом, уравнение (7.1) запишем в следующем виде

$$\vec{t}_i = \frac{9K}{\pi \delta^4} s = \frac{1}{2} \left( \frac{18K}{\pi \delta^4} \right) s, \quad (7.3)$$



$$\vec{f}_i = \left( \frac{18K}{\pi\delta^4} \right) s = cs. \quad (7.4)$$

Значение силы (7.4) совпадает со значением силы в РМВ модели (3.1) при использовании функции жесткости связи (4.1). Таким образом, при  $\nu = \frac{1}{4}$  и выбранной сферической функции влияния (7.2) LPS модель полностью совпадает с РМВ [12].

## 8. Тестовые расчеты

Перидинамика является нелокальной теорией, содержащей масштаб длины – горизонт взаимодействия. В [19] показано, что если деформации, определяющие модель, и какие-либо неоднородности, достаточно гладкие, то тензор напряжений дискретной модели в этом предельном случае переходит в тензор Пиолы-Кирхгофа, а уравнения перидинамики превращаются в уравнения теории упругости. Соответственно, предельные численные решения этих уравнений (при измельчении сетки для механики сплошной среды и при увеличении числа частиц для дискретной модели) также будут совпадать. Однако при конечных размерах сетки и при конечном числе частиц результаты расчетов могут различаться, т. к. для уравнений механики сплошной среды и уравнений перидинамики используются разные численные методы.

Результаты расчетов также могут различаться в зависимости от способа задания жесткости связи и выбора функции влияния. В расчетах использовались функции жесткости связи (5.2) – (5.4).

Для оценки точности реализованных моделей РМВ и LPS использовались достаточно простые задачи, имеющие аналитическое решение.

## 9. Прохождение гармонических волн в тонком стержне

Рассмотрим прохождение упругих волн по цепочке частиц, которые представляют собой тонкий стержень.

Геометрия задачи:  $0 < x < 2L$ ,  $-h < y < h$ ,  $-h < z < h$ ,  $h = \frac{L}{N}$  при  $L = 1$  см,  $N = 100$ .

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = \frac{1}{4}$ , плотность  $\rho = 7.85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , модуль упругости  $K = 133.333$  ГПа,  $G = 80$  ГПа.

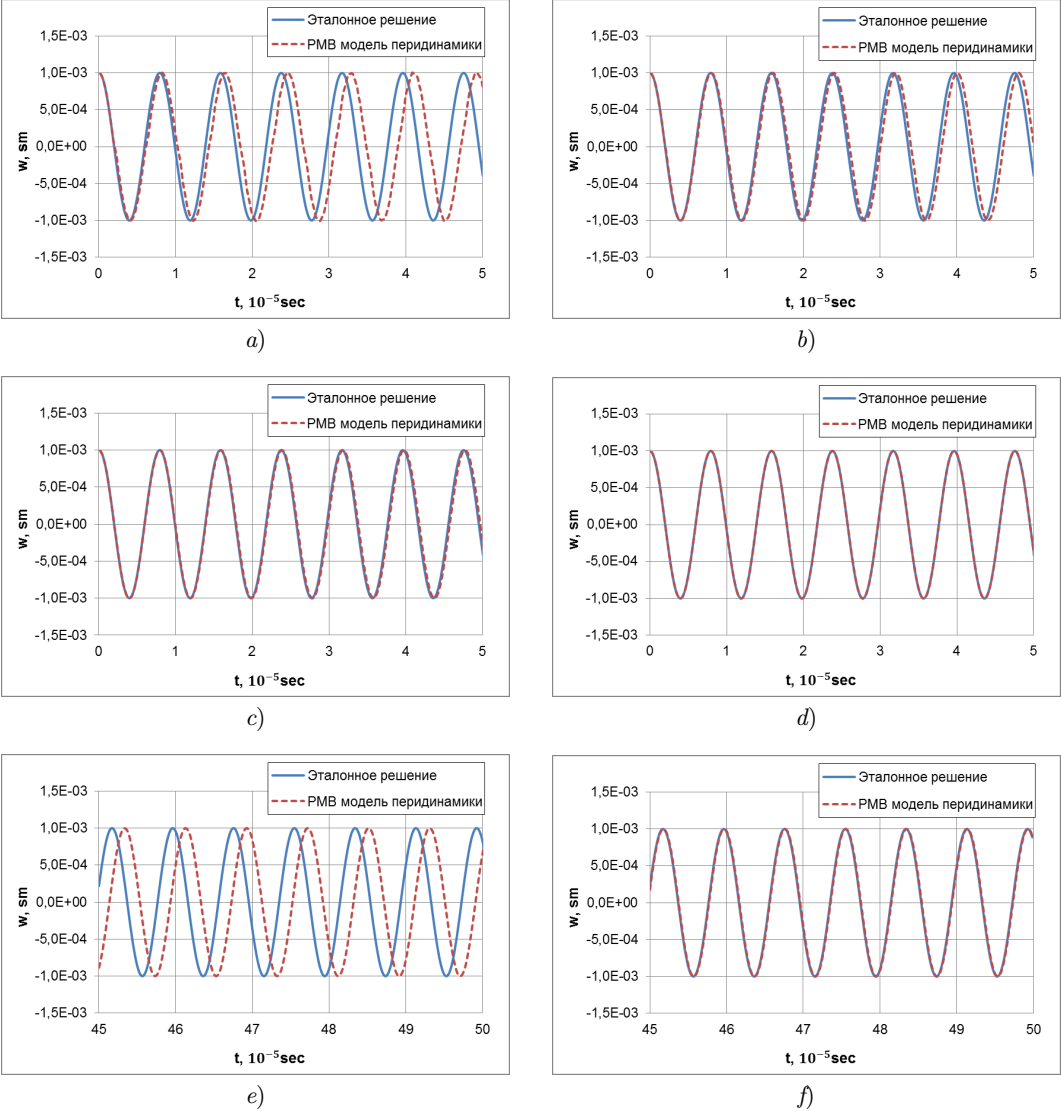
Начальные условия:  $w(x, 0) = \varepsilon L \sin \frac{\pi x}{2L}$ ,  $\sigma(x, 0) = E \frac{\varepsilon \pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2L}$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

Граничные условия:  $u(0, t) = 0$ ,  $u(2L, t) = 0$ .

В этой задаче представляет интерес исследование фазовой ошибки на достаточно большом временном интервале при использовании РМВ модели. Конец счета

$t_k = 50 \cdot 10^{-5}$  сек соответствует  $\frac{t_k}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 60$  волновым периодам.

В первой серии расчетов число частиц фиксировано  $N = 200$ . Сходимость в предельном случае  $\delta \rightarrow 0$  наблюдается при использовании постоянной функции жесткости связи (5.2) (Рис. 9.1). В расчетах с использованием треугольной (5.3) и квадратичной (5.4) функций жесткости связи накапливается фазовая ошибка.



**Рис. 9.1.** Зависимость смещения от времени в сечении  $x = L$  (PMB модель,  $N = 200$ , функция жесткости связи (5.2)) на начальном временном интервале:

a)  $\delta = 5.015 dx$ ; b)  $\delta = 3.015 dx$ ; c)  $\delta = 2.015 dx$ ; d)  $\delta = 1.015 dx$ ;

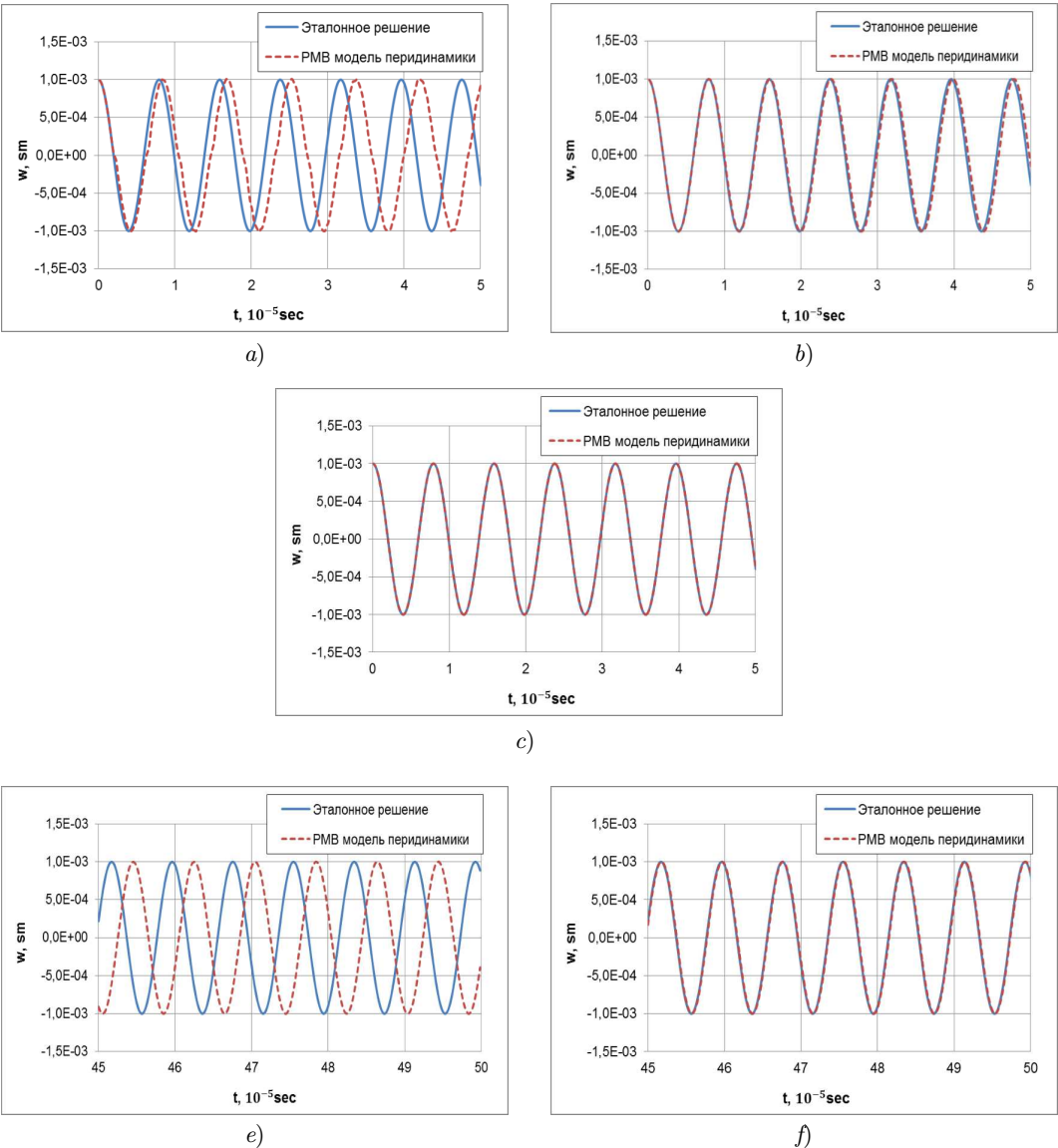
и конечном временном интервале: e)  $\delta = 2.015 dx$ ; f)  $\delta = 1.015 dx$

**Fig 9.1.** The dependence of the offset on time in the cross section  $x = L$  (PMB model,  $N = 200$ , function of the bond stiffness (5.2)) at the initial time interval: a)

$\delta = 5.015 dx$ ; b)  $\delta = 3.015 dx$ ; c)  $\delta = 2.015 dx$ ; d)  $\delta = 1.015 dx$ ;

and at a finite time interval: e)  $\delta = 2.015 dx$ ; f)  $\delta = 1.015 dx$

Во второй серии расчетов варьируется число частиц  $N = 100$ ,  $N = 1\,000$ ,  $N = 10\,000$  и фиксируется горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015$  (Рис. 9.2).



**Рис. 9.2.** Зависимость смещения от времени в сечении  $x = L$  (PMB модель,  $\delta = 3.015$  функция жесткости связи (5.2)) на начальном временном интервале: а)  $N = 100$ ; б)  $N = 1\,000$ ; в)  $N = 10\,000$ ; и на конечном временном интервале: е)  $N = 1\,000$ ; ф)  $N = 10\,000$

**Fig 9.2.** The dependence of the offset on time in the cross section  $x = L$  (PMB model,  $\delta = 3.015$  function of the bond stiffness (5.2)) at the initial time interval: а)  $N = 100$ ; б)  $N = 1\,000$ ; в)  $N = 10\,000$ ; and at a finite time interval: е)  $N = 1\,000$ ; ф)  $N = 10\,000$

Результаты, представленные на Рис. 9.2 для  $N = 10\,000$ , совпадают с аналитическим решением на всем временном интервале. Сходимость для различных горизонтов

взаимодействия достигается увеличением числа частиц. Скорость сходимости увеличивается при уменьшении горизонта взаимодействия, как было показано в первой серии расчетов. В то же время точность результатов зависит от выбора функции жесткости связи. Для данной задачи оптимально использовать постоянную функцию жесткости связи. При использовании треугольной или квадратичной функции жесткости связи в численном решении накапливается фазовая ошибка.

# 10. Соударение двух идентичных гибких стержней

Рассматривается соударение двух идентичных деформируемых стержней. Постановка задачи взята из [3].

Геометрия задачи:  $-L < x < L$ ,  $-h < y < h$ ,  $-h < z < h$ ,  $L = 5$  см,  $h = 0.5$  см.

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 75$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = \frac{1}{4}$ , плотность  $\rho = 2.7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , модули упругости:  $K = 50$  ГПа,  $G = 30$  ГПа.

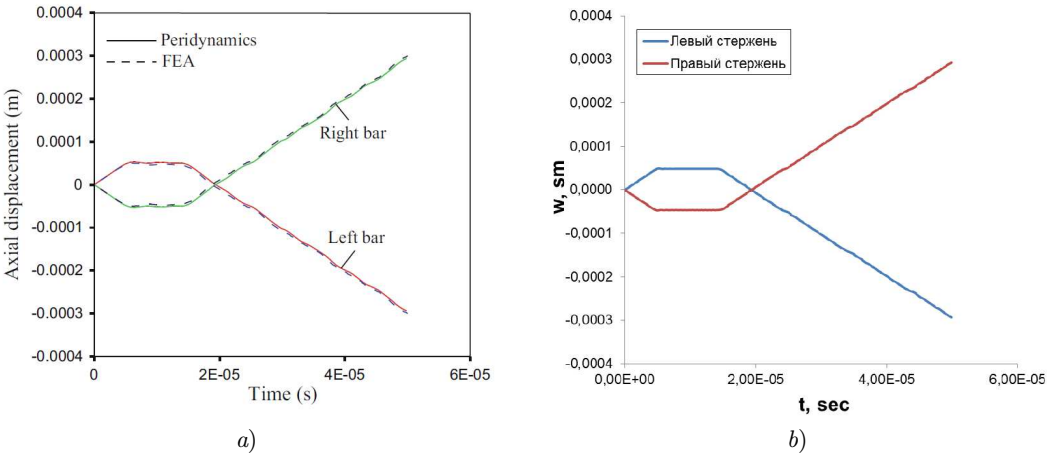
Начальные условия: скорости стержней  $u_x = \pm 10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ .

Расстояние между материальными точками  $dx = 0.001$  м, шаг интегрирования  $\Delta t = 9.3184 \cdot 10^{-8}$  сек, конец счета  $t = 4.985 \cdot 10^{-5}$  сек.

Расчеты проведены с использованием постоянной функции жесткости связи и горизонтом взаимодействия частиц  $\delta = 1.015 dx$ .

Для сравнения с результатами, полученными в [3], в процессе счета отслеживалось осевое смещение в центрах стержней  $(\pm 2.5, 0, 0)$ . Предельное значение деформации связи  $s_0$  полагалось равным 0.002.

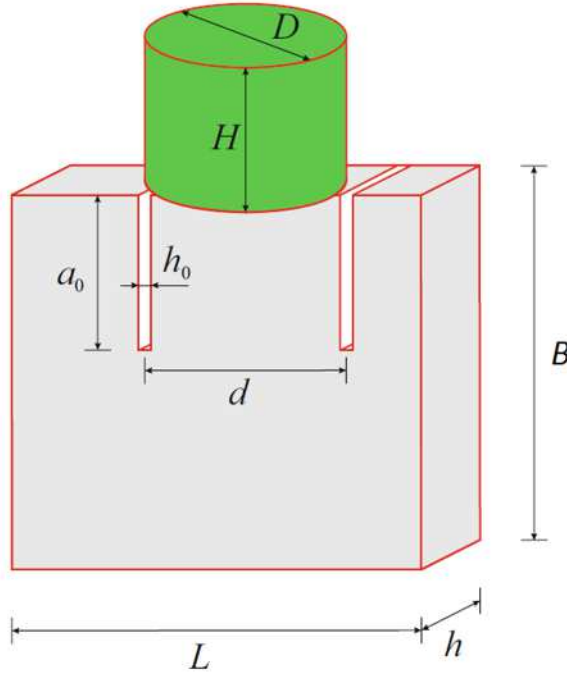
На Рис. 10.1 представлено сравнение результатов. Видно, что результаты, полученные по PMB модели перидинамики, реализованной в рамках комплекса программ MoDyS, согласуются с результатами из [3].



**Рис. 10.1.** Графики зависимости смещения частиц от времени:  
 а) [3]; б) PMB модель перидинамики  
**Fig 10.1.** Dependence graphs of particle displacement on time:  
 а) [3]; б) PMB model of peridynamics

# 11. Эксперимент Калтхофа-Винклера

Рассматривается распространение трещины в задаче о столкновении жесткого цилиндрического ударника со стальной пластиной, имеющей две насечки (эксперимент Калтхофа-Винклера [20]). Постановка задачи выполнена в соответствии с [3] (Рис. 11.1).



**Рис. 11.1.** Геометрия эксперимента Калтхофа-Винклера  
**Fig 11.1.** Geometry of the Kalthoff-Winkler experiment

Геометрия задачи:  $-l < x < l$ ,  $-b < y < b$ ,  $-h < z < h$ ,  $l = 20$  см,  $b = 10$  см,  $h = 0.9$  см.

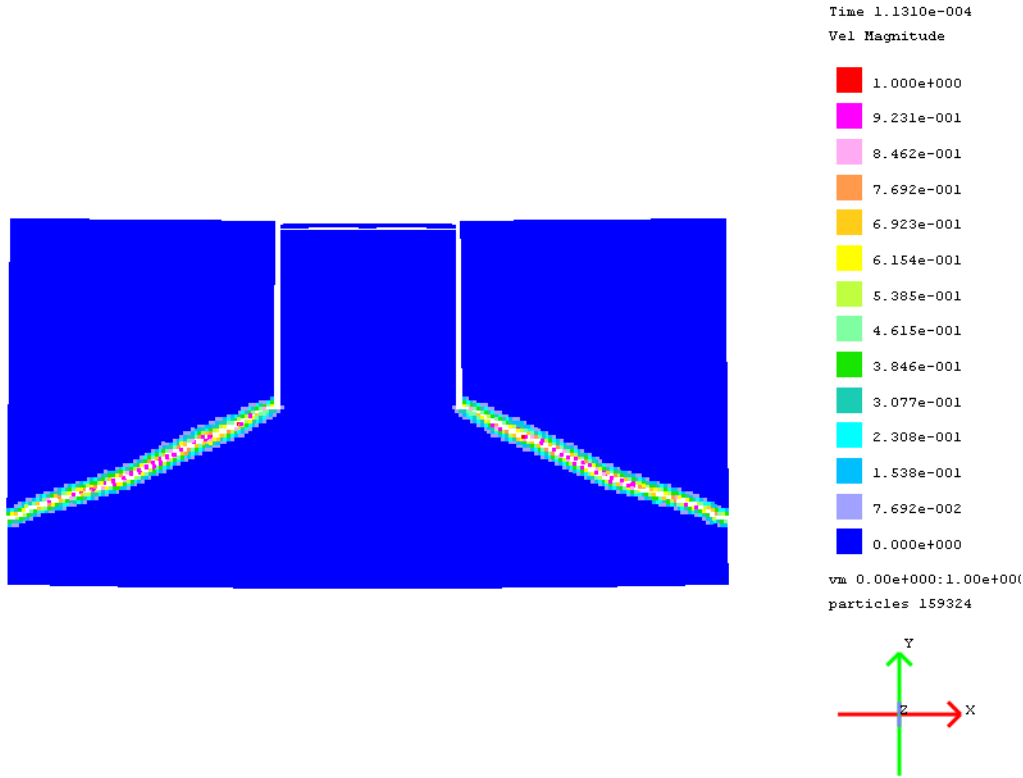
Параметры насечек: расстояние между насечками  $d = 5$  см, длина насечки  $a_0 = 5$  см, ширина насечки  $h_0 = 0.15$  см.

Свойства пластины: модуль Юнга  $E = 191$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = \frac{1}{4}$ , плотность  $\rho = 8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , модули упругости:  $K = 127.333$  ГПа,  $G = 76.4$  ГПа.

Свойства ударника: диаметр  $D = 5$  см, высота  $H = 5$  см, масса  $M = 1.57$  кг, скорость  $u_0 = 0.032 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ .

Расстояние между материальными точками  $dx = 0.001$  м, горизонт взаимодействия частиц  $\delta = 3.015 dx$ , предельное значение деформации связи  $s = 0.01$ , шаг интегрирования  $\Delta t = 8.7 \cdot 10^{-8}$  сек, конец счета  $t = 1.17 \cdot 10^{-4}$  сек.

На Рис. 11.2 представлена растровая картина численного моделирования эксперимента Калтхофа-Винклера. Угол отклонения образовавшихся трещин от вертикальной оси составляет  $67^\circ$ . Полученный результат согласуется с экспериментальными данными [20].



**Рис. 11.2.** Растровая картина повреждения в задаче Калтхофа-Винклера на конечный момент времени  
**Fig 11.2.** Raster picture of damage in the Kalthoff-Winkler problem at a finite time

## 12. Заключение

Результаты тестирования перидинамической модели разрушения РМВ показали, что для простых задач упругости и задач хрупкого разрушения оптимально использовать постоянную функцию жесткости связи. Сходимость достигается увеличением числа частиц или уменьшением горизонта взаимодействия. Необходимо провести дополнительное исследование способов задания функции влияния, т. к. она корректирует силу взаимодействия частиц при определении жесткости связи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 48, No. 1. pp. 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)

2. Silling S. A., Geubelle P. H., Foster J. T., Bobaru F. (eds.) Handbook of peridynamic modeling. New York: CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC, 2017. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
3. Madenci E., Oterkus E. Peridynamic theory and its applications. New York: Springer, 2014. 289 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
4. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // Computers and Structures. 2005. Vol. 83. pp. 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2004.11.026>
5. Huang D., Wang C., Lu G., Qiao P. An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 141. pp. 196–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.04.036>
6. Huang D., Lu G., Qiao P. An improved peridynamic approach for quasi-static elastic deformation and brittle fracture analysis // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 8. pp. 94–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.018>
7. Silling S. A., Zimmermann M., Abeyaratne R. Deformation of a peridynamic bar // Journal of Elasticity. 2003. Vol. 73. pp. 173–190. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000029931.03844.4f>
8. Bobaru F., Yabg M., Alves L. F., Silling S. A., Askari E., Xu J. Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 77. pp. 852–877. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2439>
9. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling // Journal of Elasticity. 2007. Vol. 88. pp. 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
10. Seleson P., Littlewood D. J. Convergence studies in meshfree peridynamic simulations // Computers & Mathematics with Applications. 2016. Vol. 71, No. 11. pp. 2432–2448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.021>
11. Seleson P., Parks M. On the role of the influence function in the peridynamic theory // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2011. Vol. 9, No. 6. pp. 689–706. DOI: <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2011002527>
12. Seleson P. Connecting peridynamic models and coupling local and nonlocal systems : presentation at Mini-workshop: Mathematical Analysis for Peridynamics. 2011. 79 p.
13. Parks M. L., Seleson P., Plimpton S. J., Lehoucq R. B., Silling S. A. Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta. New Mexico, 2008. 28 p.
14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614974. Комплекс программ молекулярно-динамического моделирования (MoDyS) / А. Н. Анисимов, С. А. Грушин, Б. Л. Воронин [и др.] Саров, 2010.
15. Qi T., Shaofan L., Multiscale coupling of molecular dynamics and peridynamics // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 95. pp. 169–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.05.032>

16. Parks M. L., Lehoucq R. B., Plimpton S. J., Silling S. A. Implementing peridynamics within a molecular dynamics code // *Computer Physics Communications*. 2008. Vol. 179, No. 11. pp. 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
17. John A. M., Silling S. A., Littlewood D. J. A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, No. 5. pp. 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
18. Mitchell J. A. On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’: presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure. 2012. 18 p.
19. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory // *Journal of Elasticity*. 2008. Vol. 93. pp. 13–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
20. Kalthoff J. F., Winkler S. Failure mode transition at high rates of shear loading // *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*. 1987. pp. 185–195.

*Поступила 09.08.2022; доработана после рецензирования 23.10.2022;  
принята к публикации 23.11.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **48**:1 (2000), 175–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
2. *Handbook of Peridynamic Modeling*, ed. S. A. Siling, P. H. Geubelle, J. T. Foster, F. Bobaru, CRC Press by Taylor and Francis Group, LLC, New York, 2017 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>, 586 p.
3. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, **289**, Springer, New York, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>.
4. S. A. Siling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers and Structures*, **83** (2005), 1526–1535. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2004.11.026>
5. D. Huang, C. Wang, G. Lu, P. Qiao, “An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis”, *Engineering Fracture Mechanics*, **141** (2015), 196–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.04.036>
6. D. Huang, G. Lu, P. Qiao, “An improved peridynamic approach for quasi-static elastic deformation and brittle fracture analysis”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **8** (2015), 94–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.018>



7. S. A. Silling, M. Zimmermann, R. Abeyaratne, “Deformation of a peridynamic bar”, *Journal of Elasticity*, **17** (2003), 173–190. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000029931.03844.4f>
8. F. Bobaru, M. Yabg, L. F. Alves, S. A. Siling, E. Askari, J. Xu, “Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **77** (2009), 852–877. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2439>
9. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, *Journal of Elasticity*, **88** (2007), 151–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
10. P. Seleson, D.J. Littlewood, “Convergence studies in meshfree peridynamic simulations”, *Computers & Mathematics with Applications*, **71**:11 (2016), 2432–2448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.021>
11. P. Seleson, M. Parks, “On the role of the influence function in the peridynamic theory”, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, **9**:6 (2011), 689–706. DOI: <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2011002527>
12. P. Seleson, “Connecting peridynamic models and coupling local and nonlocal systems : presentation at Mini-workshop: Mathematical Analysis for Peridynamics”, 2011, 79 p.
13. M. L. Parks, P. Seleson, S. J. Plimpton, R. B. Lehoucq, S. A. Siling, “Peridynamics with LAMMPS: A User Guide v0.2 Beta”, 2008, 28 p.
14. A. N. Anisimov, S. A. Grushin, B. L. Voronin, S. V. Kopkin, A. M. Yerofeev, D. A. Demin, M. A. Demina, M. V. Zdorova, M. V. Vetchinnikov, N. S. Elicheva, N. O. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. G. Kechin, V. A. Degtyarev, “Certificate of state registration of the computer program No. 2010614974. A complex of molecular dynamic modeling programs (MoDyS).”, 2010 (In Russ.).
15. T. Qi, L. Shaofan, “Multiscale coupling of molecular dynamics and peridynamics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **95** (2016), 169–187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.05.032>
16. M. L. Parks, R. B. Lehoucq, S. J. Plimpton, S.A. Silling, “Implementing peridynamics within a molecular dynamics code”, *Computer Physics Communications*, **179**:11 (2008), 777–783. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.06.011>
17. A. M. John, S. A. Silling, D. J. Littlewood, “A position-aware linear solid constitutive model for peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **10**:5 (2015), 539–557. DOI: <https://doi.org/10.2140/jomms.2015.10.539>
18. J.A. Mitchell, “On the ‘DSF’ and the ‘dreaded surface effect’ : presentation at Workshop on Nonlocal Damage and Failure”, 2012, 18 p.
19. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of peridynamics to classical elasticity theory”, *Journal of Elasticity*, **93** (2008), 13–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>

20. J.F. Kalthoff, S. Winkler, "Failure mode transition at high rates of shear loading", *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, 1987, 185–195.

*Submitted 09.08.2022; Revised 23.10.2022; Accepted 23.11.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202204.469-484

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-76:004.94

## Анализ методов моделирования данных суточной термометрии человека

М. А. Шугурова<sup>1</sup>, А. В. Цыганов<sup>1</sup>, Ю. В. Цыганова<sup>2</sup><sup>1</sup> Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова (г. Ульяновск, Российская Федерация)<sup>2</sup> Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация)

**Аннотация.** Математическое и компьютерное моделирование суточной термометрии позволяет глубже исследовать процессы теплового гомеостаза человека. На практике данные термометрии получают с помощью цифрового термометра, который в автономном режиме считывает температуру кожного покрова человека через определенные временные интервалы. Целью работы является анализ методов моделирования и обработки данных суточной термометрии человека. Первый метод заключается в применении линейных дискретных стохастических моделей в пространстве состояний с гауссовыми шумами и известным вектором входных воздействий, при этом оценивание вектора состояния выполняется дискретным ковариационным фильтром Калмана. Второй метод предполагает, что вектор входных воздействий неизвестен и для обработки данных суточной термометрии используется алгоритм Гиллейнса – Де-Мора. Альтернативный вариант — использовать модель с расширенным вектором состояния и алгоритм калмановской фильтрации. Третий метод учитывает наличие аномальных измерений (выбросов) в измерительных данных, для их эффективной фильтрации предлагается использовать коррентропийный фильтр. С целью сравнительного анализа качества алгоритмов дискретной фильтрации в данной работе проведены численные эксперименты по моделированию и обработке данных суточной термометрии в системе MATLAB. Моделирование данных термометрии осуществлялось при помощи трехмерной модели 3dDRCM (трехмерная дискретная каноническая модель в вещественном базисе). Полученные результаты могут быть использованы при исследовании процессов суточной термометрии человека, например, у спортсменов с целью изучения ответной реакции организма на полученную нагрузку.

**Ключевые слова:** суточная термометрия, тепловой гомеостаз, линейные дискретные стохастические системы, дискретная фильтрация, фильтр Калмана

**Для цитирования:** Шугурова М. А., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Анализ методов моделирования данных суточной термометрии человека // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 469–484. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.469-484>

Об авторах:

**Шугурова Марина Александровна**, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова» (432011, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9697-3816>, [m.a.shugurova@gmail.com](mailto:m.a.shugurova@gmail.com)

© М. А. Шугурова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Об авторах:

**Цыганов Андрей Владимирович**, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова» (432011, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, [andrew.tsyganov@gmail.com](mailto:andrew.tsyganov@gmail.com)

**Цыганова Юлия Владимировна**, профессор кафедры информационных технологий факультета математики, информационных и авиационных технологий, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, [tsyganovajv@gmail.com](mailto:tsyganovajv@gmail.com)

*Original article*

MSC2020 93A30

## Analysis of methods for modeling human daily thermometry data

M. A. Shugurova<sup>1</sup>, A. V. Tsyganov<sup>1</sup>, Yu. V. Tsyganova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov (Ulyanovsk, Russian Federation)*

<sup>2</sup> *Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** Mathematical and computer modeling of daily thermometry allows to study processes of human thermal homeostasis more deeply. In practice, thermometry data is obtained using a digital thermometer, which autonomously reads the temperature of human skin in certain time intervals. The aim of present work is to analyse the methods of modeling and processing of human daily thermometry data. The first method consists in applying linear discrete stochastic models in the state space with Gaussian noises and known vector of input actions, while the estimation of the state vector is performed by discrete covariance Kalman filter. The second method assumes that the vector of input actions is unknown, and the S. Gillijns and B. D. Moor algorithm is used to process daily thermometry data. An alternative option is to use a model with an extended state vector and a Kalman filtering algorithm. The third method takes into account the presence of anomalous measurements (outliers) in the measurement data, and correntropy filter is proposed for their effective filtering. Numerical experiments for modeling and processing of daily thermometry data in MATLAB were carried out in order to compare the quality of discrete filtering algorithms. Modeling of thermometry data was carried out using a three-dimensional model 3dDRCM (3-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model). The results obtained can be used in the study of human daily thermometry processes, for example, to study the reaction of the athlete's body to the received load.

**Keywords:** daily thermometry, thermal homeostasis, linear discrete stochastic systems, discrete filtration, Kalman filter

**For citation:** M. A. Shugurova, A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova. Analysis of methods for modeling human daily thermometry data. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:4(2022), 469–484. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.469-484>

*About the authors:*

**Marina A. Shugurova**, PhD Student, School of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, (4/5 Lenin Sq., Ulyanovsk 432011, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9697-3816>, [m.a.shugurova@gmail.com](mailto:m.a.shugurova@gmail.com)

**Andrey V. Tsyganov**, Professor, School of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov, (4/5 Lenin Sq., Ulyanovsk 432011, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, [andrew.tsyganov@gmail.com](mailto:andrew.tsyganov@gmail.com)

**Yulia V. Tsyganova**, Professor, School of Information Technology, Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technologies, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, [tsyganovajv@gmail.com](mailto:tsyganovajv@gmail.com)

## 1. Введение

Тепловой гомеостаз — это физиологическая функция, поддерживающая в организме человека постоянную температуру тела с помощью регуляции процессов теплопродукции и теплоотдачи. Одним из способов изучения процесса теплового гомеостаза является термометрия. Данные термометрии могут быть получены с помощью цифрового термометра, который в автономном режиме считывает температуру кожного покрова человека через определенные интервалы времени, например, 5 минут. Датчиков может быть несколько в разных частях тела, что позволяет одновременно получить несколько наборов измерений. Многочисленные исследования подтверждают важность мониторинга суточной термометрии, например, у спортсменов для изучения ответной реакции организма на полученную нагрузку и контроля процессов восстановления. В работе [1] проведено исследование влияния окружающей среды на температуру различных участков тела спортсменов, занимающихся триатлоном и установлено разнонаправленное изменение показателей температуры тела после интенсивных тренировок в воздушной и водной средах. В работе [2] изучались особенности температурного баланса у высококвалифицированных футболистов в возрасте 17–21 года.

В данной работе рассмотрены математические методы моделирования и обработки данных суточной термометрии человека. Проведенный учеными анализ экспериментальных данных показал [3–4], что процесс суточного изменения температуры тела человека может быть представлен как аддитивная смесь детерминистской составляющей в виде периодического колебательного процесса и стохастической составляющей, которую можно представить гауссовским марковским процессом первого порядка.

В работах [4–6] предложены математические модели теплового гомеостаза здорового человека, принадлежащие классам непрерывных и дискретных линейных стохастических систем с гауссовскими шумами, представленных стохастическими дифференциальными и разностными уравнениями в пространстве состояний.

Цель данной работы — сравнительный анализ некоторых методов моделирования и обработки данных суточной термометрии человека.

## 2. Методы и организация исследования

### 2.1. Математические модели суточной термометрии

Рассмотрим класс дискретных линейных стохастических моделей суточной термометрии, впервые предложенный в [4] и далее рассматриваемый в [5–11]:

- 1) 3dDRCM — 3-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model (трехмерная дискретная каноническая модель в вещественном базисе);
- 2) 3dDSOM — 3-dimension Discrete-time Standard Observable Model (трехмерная дискретная стандартная наблюдаемая модель);
- 3) 4dDRCM — 4-dimension Discrete-time Real-valued Canonical Model (четырёхмерная дискретная в вещественном базисе каноническая модель);
- 4) 4dDSOM — 4-dimension Discrete-time Standard Observable Model (четырёхмерная дискретная стандартная наблюдаемая модель).

В основе данного класса моделей лежит процесс изменения температуры тела человека в течение суток, который может быть представлен в виде аддитивной смеси детерминистской и стохастической составляющей. Детерминистская составляющая является периодическим, колебательным процессом, которая в первом приближении представлена моделью гармонического осциллятора с неопределенной, в общем случае, амплитудой и с 24 часовым периодом. Стохастическая составляющая в рассматриваемом классе моделей представлена гауссовским марковским процессом первого порядка.

Приведем краткое описание моделей. Примем следующие обозначения:  $\tau \triangleq \Delta t \triangleq t_{k+1} - t_k = 5$  мин — интервал поступления измерений;  $\omega_n = 2\pi/1440$  мин<sup>-1</sup> — частота колебаний;  $u_k$  — среднесуточный уровень температуры;  $u^*$  — начальное (заданное) значение среднесуточного уровня температуры; параметры моделей  $\lambda$ ,  $\sigma_w$ ,  $d \triangleq e^{-\lambda\tau}$ ,  $c \triangleq \cos \omega_n \tau$ ,  $s \triangleq \sin \omega_n \tau$ ,  $g \triangleq \sin 2\omega_n \tau$ ,  $f \triangleq \sin 3\omega_n \tau$ ;  $a \triangleq 1 - d$ ,  $b \triangleq \sigma_w \sqrt{1 - d^2}$ ,  $w_k$  — дискретный гауссовский белый шум (ДГБШ) с единичной ковариацией ( $Q = 1$ );  $v_k$  — ошибка измерения (ДГБШ с нулевым средним и ковариацией  $R > 0$ );  $z_k$  — измерительные данные;  $n$  — размер вектора состояния  $x_k$ ;  $m$  — размер вектора измерений  $z_k$ ;  $r$  — размер вектора входного воздействия  $u_k$ ;  $K$  — число измерений.

#### Модель 3dDRCM.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}}_B u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}}_G w_k, \\ z_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_H x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где  $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}_0^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}^T$  — начальное значение вектора состояния модели. В данном случае величина температуры тела человека моделируется как  $T_k = x_{1k} + x_{2k} + x_{3k}$ .

**Модель 3dDSOM.** Для удобства моделирования значений температуры тела человека выполнен переход в базис стандартной наблюдаемой модели. Таким образом, получены следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_*} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ ad \\ ad^2 \end{bmatrix}}_{B_*} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ bd \\ bd^2 \end{bmatrix}}_{G_*} w_k, \\ z_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_*} x_k^* + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

где  $-a_3 = d$ ,  $a_2 = -1 - 2dc$ ,  $-a_1 = d + 2c$ ,  $x_0^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]_0^T = [0 \ s \ g]^T$  — начальное значение вектора состояния модели. В данном случае величина температуры тела человека моделируется как  $T_k = x_{1k}^*$ .

**Модель 4dDRCM.** Если среднесуточный уровень температуры  $u_k$  неизвестен, но является постоянным, т. е.  $u_k = \text{const}$ , то первую модель можно модифицировать путем расширения вектора состояния. Таким образом, неизвестный параметр модели добавляют в вектор состояния  $x_k$ . После данного преобразования вектор состояния станет четырехмерным, а дискретная модель будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_F x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}}_G w_k, \\ z_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_H x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где  $x_0 = [1/2 \ -1/2 \ 0 \ u^*]^T$  — начальное значение вектора состояния. В данном случае величина температуры тела человека  $T_k$  моделируется как сумма всех компонент вектора состояния  $x_k$ .

**Модель 4dDSOM.** Переходя в базис стандартной наблюдаемой модели, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{F_*} x_k^* + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ bd \\ bd^2 \\ bd^3 \end{bmatrix}}_{G_*} w_k, \\ z_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_*} x_k^* + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

где  $-a_4 = -d$ ,  $-a_3 = 2cd + d + 1$ ,  $-a_2 = -(2cd + 2c + d + 1)$ ,  $-a_1 = d + 1 + 2c$ ,  $x_0^* = [u^* \ s + u^* \ g + u^* \ f + u^*]^T$  — начальное значение вектора состояния модели. В данном случае величина температуры тела человека моделируется как  $T_k = x_{1k}^*$ .

## 2.2. Дискретная фильтрация данных термометрии в случае известного среднесуточного уровня температуры

Параметры моделей могут быть идентифицированы в результате применения процедуры параметрической идентификации по методу вспомогательного функционала качества [7]. Далее матрицы-параметры моделей используются в алгоритме дискретной фильтрации Калмана (СКФ) [12] для реализации алгоритма обработки данных суточной термометрии. Условием применения алгоритма Калмана для моделей 3dDRCM и 3dDSOM является знание детерминированного вектора входных воздействий  $u_k$ , который соответствует среднесуточному уровню температуры. Метод моделирования с использованием дискретного фильтра Калмана применим и для четырехмерных моделей 4dDRCM и 4dDSOM.

### 2.3. Дискретная фильтрация данных термометрии в случае неизвестного среднесуточного уровня температуры

В более реальном случае априорной неопределенности среднесуточного уровня температуры  $u_k$  в работах [9–10] предложен метод моделирования и обработки данных суточной термометрии на основе алгоритма дискретной фильтрации Гиллейнса – Де-Мора [13]. Данный метод может применяться к широкому кругу задач оценивания и параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем (см., например, [14]). Суть метода заключается в том, что в модели 3dDSOM вектор входных воздействий  $u_k$  считаем неизвестным, и применяем указанный выше алгоритм для одновременного вычисления оценок температуры  $T_k$  и среднесуточного уровня температуры  $u_k$ .

#### Алгоритм Гиллейнса – Де-Мора (GDM).

Инициализация. Задать начальные значения  $P_0 = \Pi_0$ ,  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ .

Для  $k = 1, 2, \dots, K$  выполнять

Начало цикла

1) прогноз оценки вектора состояния

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k-1} &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}, \\ P_{k|k-1} &= F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1},\end{aligned}$$

2) оценка вектора входных воздействий

$$\begin{aligned}\tilde{R}_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k, \\ D_k &= H_k B_{k-1}, \\ M_k &= (D_k^T \tilde{R}_k^{-1} D_k)^{-1} D_k^T \tilde{R}_k^{-1}, \\ \hat{u}_{k-1} &= M_k(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}),\end{aligned}$$

3) коррекция оценки вектора состояния

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k}^* &= \hat{x}_{k|k-1} + B_{k-1}\hat{u}_{k-1}, \\ P_{k|k-1}^* &= (I_n - B_{k-1}M_k H_k)P_{k|k-1}(I_n - B_{k-1}M_k H_k)^T + B_{k-1}M_k R_k M_k^T B_{k-1}^T, \\ \tilde{R}_k^* &= (I_m - H_k B_{k-1}M_k)\tilde{R}_k(I_m - H_k B_{k-1}M_k)^T, \\ S_k^* &= -B_{k-1}M_k R_k, \\ \alpha_k &= [0 \ I_p]U_k^T \tilde{S}_k^{-1}, \\ K_k &= (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*)\alpha_k^T (\alpha_k \tilde{R}_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k, \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k}^* + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k|k}^*), \\ P_{k|k} &= P_{k|k}^* - K_k(P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*)^T.\end{aligned}$$

Конец цикла

Недостаток методов моделирования и обработки данных с помощью алгоритмов Калмана и Гиллейнса – Де-Мора заключается в том, что они не учитывают возможные появления аномальных измерений в данных суточной термометрии человека.

Аномальные измерения могут появиться в случае, когда датчик случайно отошел от кожного покрова при движении человека и измеренная температура имеет неправдоподобно низкое значение.



В данной работе мы предлагаем третий метод моделирования и обработки данных суточной термометрии, который позволяет учесть наличие аномальных измерений.

## 2.4. Дискретная фильтрация данных термометрии при наличии аномальных измерений

Во-первых, мы предлагаем во всех рассматриваемых моделях модифицировать уравнение измерений следующим образом:

$$z_k = Hx_k + v_k^*,$$

где погрешность измерений  $v_k^*$  моделируется как  $v_k^* = v_k + s_k$ . Последовательность  $v_k^*$  представляет собой сумму гауссовского шума  $v_k$  и негауссовского шума  $s_k$  ("shot noise") [15]. Таким способом может быть, например, смоделирована типичная ситуация, когда цифровой термометр отклеивается от кожного покрова человека и передает «аномальные» (в данном случае заниженные) измерения. Конкретный вид распределения  $s_k$  зависит от моделируемой ситуации.

Во-вторых, для построения алгоритмов моделирования и обработки данных суточной термометрии с учетом этой новой модификации моделей мы предлагаем применять коррентропийный фильтр [15–17], который является робастной модификацией фильтра Калмана. Коррентропия определяется как статистическая мера близости между двумя случайными величинами и позволяет учитывать моменты второго и более высокого порядка.

### Алгоритм максимальной коррентропии (МССКФ).

Инициализация. Задать начальные значения  $P_0 = P_0$ ,  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ .

Для  $k = 1, 2, \dots, K$  выполнять

Начало цикла

1) прогноз оценки вектора состояния

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= F\hat{x}_{k-1}, \\ P_{k|k-1} &= FP_{k-1|k-1}F^T + Q_k.\end{aligned}$$

2) коррекция оценки вектора состояния

$$\begin{aligned}L_k &= \frac{G_\sigma \left( \|y_k - H\hat{x}_k^- \|_{R_k^{-1}} \right)}{G_\sigma \left( \| \hat{x}_k^- - F\hat{x}_{k-1} \|_{P_{k|k-1}^{-1}} \right)}, \\ K_k &= \left( P_{k|k-1}^{-1} + L_k H^T R_k^{-1} H \right)^{-1} L_k H^T R_k^{-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-), \\ P_{k|k} &= (I - K_k H) P_{k|k-1} (I - K_k H)^T + K_k R_k K_k^T.\end{aligned}$$

Конец цикла

## 3. Описание условий проведения вычислительных экспериментов

С целью анализа применимости рассмотренных алгоритмов дискретной фильтрации проведем серию вычислительных экспериментов в программной среде MATLAB.

Приведем план вычислительного эксперимента.

1. Задать параметры моделей (2.1)–(2.4). Значения параметров приведены в Таблице 3.1.
2. Определить интервал моделирования, кратный количеству измерений за сутки.
3. Сгенерировать для каждого дискретного момента времени  $k$  гауссовы случайные величины  $w_k$  и  $v_k$  с нулевым математическим ожиданием и заданными ковариациями  $Q$  и  $R$ , соответственно, а также величины  $s_k$ .
4. Предполагая, что “истинное” значение среднесуточного уровня температуры  $u^*$  известно, смоделировать при помощи модели 3dDRCM значения вектора состояния  $x_k$  и зашумленные измерения  $z_k$ .
5. Применяя алгоритмы дискретной фильтрации, выполнить:
  - а) в алгоритме Калмана по предыдущей оценке  $\hat{x}_{k-1}$  и текущему измерению  $z_k$ , вычислить текущую оценку  $\hat{x}_k$  по уравнениям алгоритма СКФ;
  - б) в алгоритме Гиллейнса – Де-Мора по предыдущей оценке  $\hat{x}_{k-1}$  и текущему измерению  $z_k$ , вычислить оценки  $\hat{x}_k$  и  $\hat{u}_{k-1}$  по уравнениям алгоритма GDM;
  - в) в алгоритме максимальной коррентропии по предыдущей оценке  $\hat{x}_{k-1}$  и текущему измерению  $z_k$ , вычислить текущую оценку  $\hat{x}_k$  по уравнениям алгоритма МССКФ.

В Таблице 3.1 приведены значения параметров моделей и вычислительных экспериментов.

**Таблица 3.1.** Значения параметров моделей 3dDRCM, 3dDSOM, 4dDRCM и 4dDSOM  
**Table 3.1.** Parameter values of 3dDRCM, 3dDSOM, 4dDRCM and 4dDSOM models

Интервал измерений $\tau$ , мин. (Measurement interval $\tau$ , min.)	5
Количество суток $DAYS$ (Number of days $DAYS$ )	2
Число смоделированных данных $N$ (Number of simulated data $N$ )	576
Число измерений $K$ (Number of measurements $K$ )	288
Значение параметра $\sigma_w$ (Parameter value $\sigma_w$ )	0.3
Значение параметра $\lambda$ (Parameter value $\lambda$ )	1/60
Время корреляции модельного шума $T_n$ , мин. (Model noise correlation time $T_n$ , min.)	$24 \cdot 60$
Частота колебаний $\omega_n$ , мин <sup>-1</sup> (Oscillation frequency $\omega_n$ , min. <sup>-1</sup> )	$2\pi/T_n$

Среднесуточный уровень температуры $u^*$ , °C (Average daily temperature $u^*$ , °C)	36.7
Ковариация погрешности измерений $R$ (Covariance of measurement error $R$ )	$(0.1)^2$
Ковариация модельного шума $Q$ (Covariance of model noise $Q$ )	1

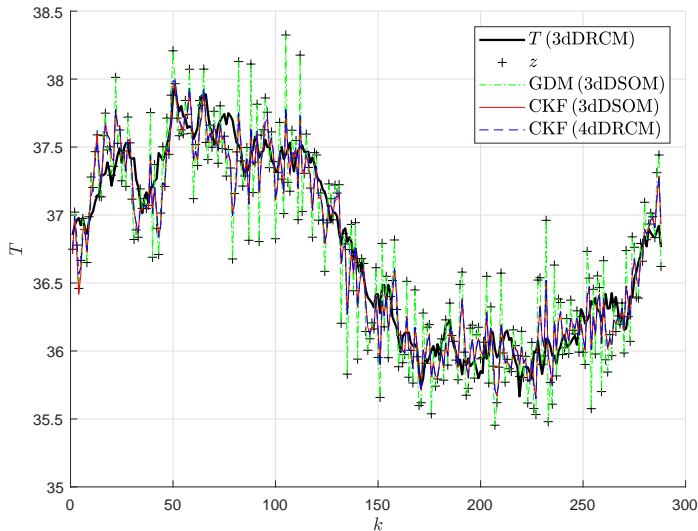
Моделирование температуры и зашумленных измерений осуществлялось с помощью трехмерной модели 3dDRCM. Период моделирования температурных данных составлял двое суток с интервалом измерений 5 мин, моделирование зашумленных измерений и оценивание значений температуры осуществлялось начиная со вторых суток. Таким образом, общее число смоделированных данных составило  $N = 576$ , а зашумленных измерений —  $K = 288$ .

Аномальные измерения моделировались с помощью негауссовского шума  $s_k$ . В результате были сгенерированы следующие значения  $z_k$ :  $z_{50} = 31.5$ ,  $z_{100} = 35$ ,  $z_{150} = 32$ ,  $z_{200} = 34$ ,  $z_{250} = 33$ .

4. Результаты и их обсуждение

Результаты численных экспериментов представлены на Рис. 4.1–4.5. На всех рисунках в скобках указаны модели, применявшиеся при моделировании и оценивании значений температуры.

На Рис. 4.1 представлены результаты оценивания температуры ковариационным

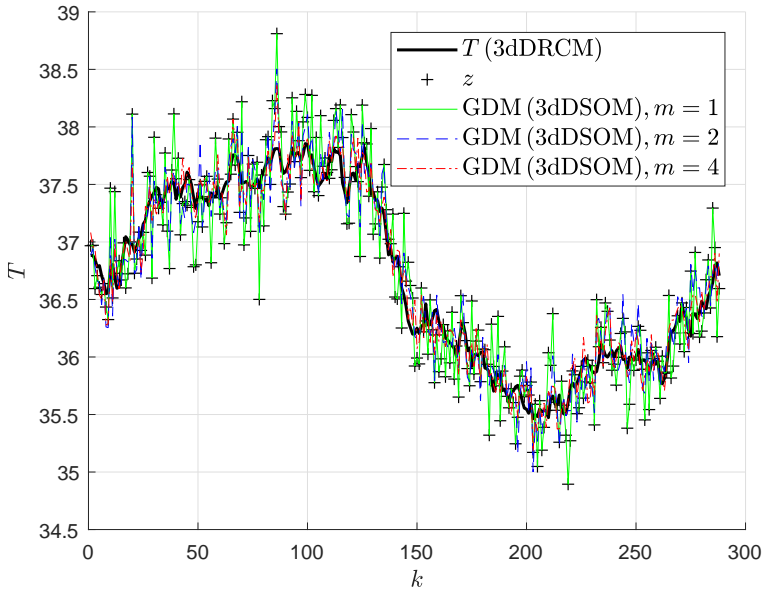


**Рис. 4.1.** Результаты оценивания температуры ковариационным фильтром Калмана (CKF) и алгоритмом Гиллейнса–Де-Мора (GDM)  
**Fig 4.1.** Results of temperature estimation by the covariance Kalman filter (CKF) and the Gillijns-De Moor algorithm (GDM)

фильтром Калмана (CKF) и алгоритмом Гиллейнса – Де-Мора (GDM) с использованием моделей 3dDSOM и 4dDRCM, причем в алгоритме GDM (3dDSOM) значение среднесуточной температуры предполагалось неизвестным.

Из Рис. 4.1 видно, что алгоритмы CKF (3dDSOM) и CKF (4dDRCM) показывают сравнимые результаты, а алгоритм GDM (3dDSOM) не фильтрует зашумленные измерения, что объясняется особенностями поведения алгоритма Гиллейнса – Де-Мора при  $m = r$ .

В случае  $m > r$  поведение алгоритма Гиллейнса – Де-Мора изменяется. На Рис. 4.2 представлены результаты оценивания температуры GDM (3dDSOM) для значений  $m = 1, 2, 4$ .



**Рис. 4.2.** Результаты оценивания температуры алгоритмом Гиллейнса – Де-Мора (GDM) для разных значений  $m$   
**Fig 4.2.** Results of temperature estimation by the Gillijns-De Moor algorithm (GDM) for different values of  $m$

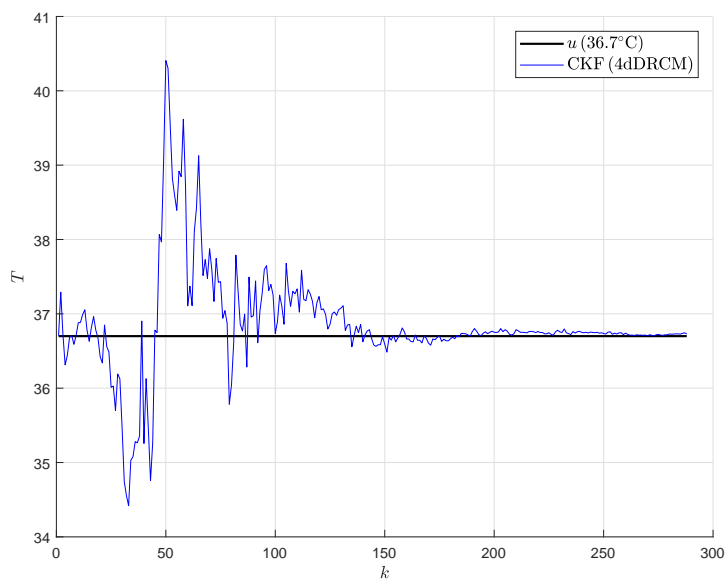
Из Рис. 4.2 видно, что с увеличением  $m$  качество оценивания возрастает.

В модели 4dDRCM среднесуточной температуре соответствует компонента  $x_4$ . На Рис. 4.3 представлены результаты оценивания среднесуточной температуры алгоритмом CKF (4dDRCM).

Из Рис. 4.3 видно, что с ростом  $k$  значение оценки стремится к истинному значению  $u = 36.7$ .

На Рис. 4.4 представлены результаты оценивания среднесуточной температуры алгоритмом GDM (3dDSOM) для значений  $m = 1, 2, 4$ .

Из Рис. 4.4 видно, что с увеличением  $m$  разброс значений оценки уменьшается.



**Рис. 4.3.** Результаты оценивания среднесуточной температуры  
ковариационным фильтром Калмана (CKF)

**Fig 4.3.** Results of estimation of the average daily temperature by the covariance  
Kalman filter (CKF)

В Таблице 4.1 приведены средние значения  $\mu$  и дисперсии  $D$  результатов оценивания  $u_k$  для различных значений  $m$ .

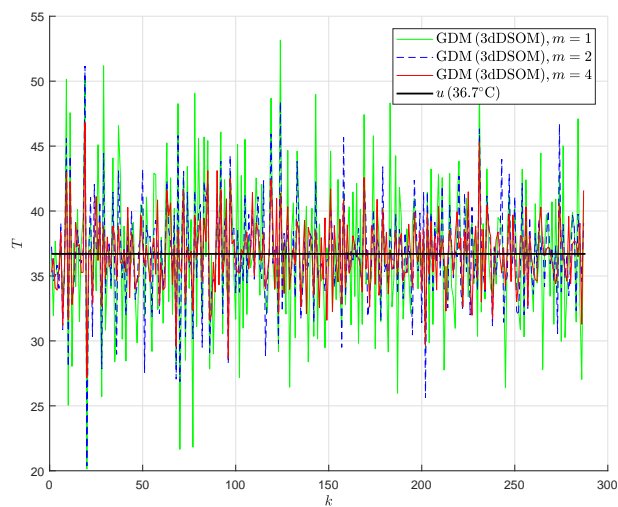
**Таблица 4.1.** Средние значения и дисперсии результатов оценивания  $u_k$   
алгоритмом GDM (3dDSOM)

**Table 4.1.** Mean values and variances of the estimation results of  $u_k$   
by the GDM algorithm (3dDSOM)

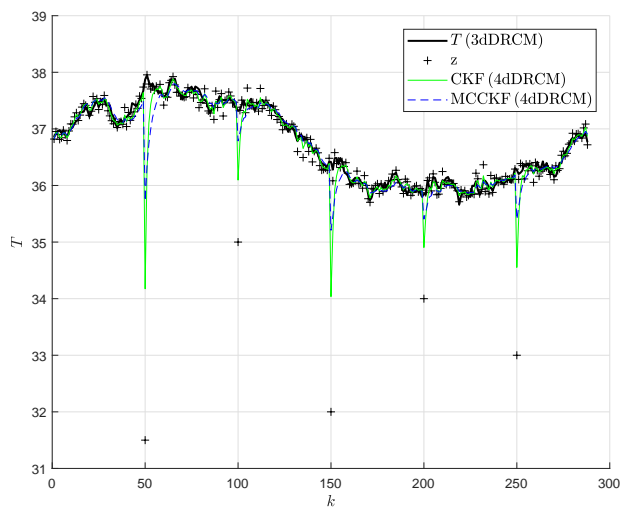
$m$	$\mu$	$D$
1	36.6812	31.4983
2	36.7092	16.5588
4	36.6945	7.9137

На Рис. 4.5 приведены результаты оценивания температуры фильтрами CKF (4dDRCM) и МССKF (4dDRCM) при наличии аномальных измерений. Из Рис. 4.5 видно, что аномальные измерения лучше обрабатываются коррентропийным фильтром.

Таким образом, в случае, когда значение среднесуточной температуры (мезора) известно, для обработки экспериментальных данных в моделях 3dDRCM, 3dDSOM, 4dDRCM, 4dDSOM рекомендуется применение первого метода, основанного на использовании дискретного ковариационного фильтра Калмана [12]. В качестве математической модели суточной термометрии, используемой в алгоритме фильтрации, предпочтительнее выбирать стандартные наблюдаемые модели 3dDSOM и 4dDSOM, поскольку в них первая компонента вектора состояния соответствует текущему значению темпе-



**Рис. 4.4.** Результаты оценивания среднесуточной температуры алгоритмом Гиллейнса–Де-Мора (GDM) для разных значений  $m$   
**Fig 4.4.** Results of estimation of the average daily temperature by the Gillijns-De Moor algorithm (GDM) for different values of  $m$



**Рис. 4.5.** Результаты оценивания температуры при наличии аномальных измерений ковариационным фильтром Калмана (CKF) и модифицированным коррентропийным фильтром (MCCKF)  
**Fig 4.5.** Results of temperature estimation in the presence of anomalous measurements by the covariance Kalman filter (CKF) and the modified correntropy filter (MCCKF)

ратуры тела  $T_k$ .

Второй метод рекомендуется применять, когда среднесуточная температура  $u_k$  не известна. В этом случае для моделей 3dDRCM и 3dDSOM алгоритм Калмана применять нельзя. Однако для них имеется алгоритм Гиллейнса – Де-Мора [13], позволяющий совместно оценивать вектор состояния и неизвестный вектор входного воздействия без увеличения размерности задачи [9–10]. Предпочтительнее использовать в алгоритме фильтрации модель 3dDSOM, поскольку в ней первая компонента вектора состояния соответствует значению температуры тела  $T_k$ .

Второй вариант решения задачи моделирования с неизвестным  $u_k$  — расширить вектор состояния путем добавления в него компоненты  $x_{4k} = u_k$  и применить калмановскую фильтрацию на основе моделей 4dDRCM и 4dDSOM. Предпочтительнее использовать в алгоритме Калмана модель 4dDSOM, поскольку в ней первая компонента вектора состояния соответствует значению температуры тела  $T_k$ .

Третий метод, который мы предлагаем в настоящей работе, предполагает новую модификацию математических моделей суточной термометрии и применение коррентропийного фильтра [15–17] для обработки данных термометрии, содержащих аномальные измерения. Применение такого фильтра способствует получению более качественных оценок значений температуры при наличии аномальных измерений, моделируемых гауссовыми шумами, содержащими выбросы. Следует отметить, что качество фильтрации также зависит от параметра коррентропийного фильтра  $\sigma$ . Исследование влияния данного параметра на качество получаемых оценок может быть предметом отдельного исследования.

## 5. Заключение

В работе проведен анализ методов моделирования и обработки данных суточной термометрии человека. В основе каждого метода лежит математическая модель процесса теплового гомеостаза человека и алгоритм обработки данных. Выбор конкретного метода зависит от наличия доступной информации о процессе измерения. Данные методы реализованы в виде программы для ЭВМ в среде MATLAB и могут быть использованы для изучения процессов суточной термометрии теплового гомеостаза человека, например, у спортсменов с целью изучения ответной реакции и процессов адаптации организма к физическим нагрузкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аикина Л. И. Особенности состояния температуры тела спортсмена, занимающегося триатлоном // Адаптивная физическая культура. 2016. Т. 68, № 4. С. 16–18.
2. Захарьева Н. Н., Алхаким А. Возрастные особенности морфофункционального статуса и температурного гомеостаза футболистов высокой квалификации // Человек. Спорт. Медицина. 2019. Т. 19, № 1. С. 135–139. DOI: <https://doi.org/10.14529/hsm190119>
3. Kelly G. Body temperature variability (Part 1): a review of the history of body temperature and its variability due to site selection, biological rhythms, fitness, and aging // Altern. Med. Rev. 2006. Vol. 11, No. 4. pp. 278–293.

4. Semushin I. V., Tsyganova J. V., Skovikov A. G. Identification of a simple homeostasis stochastic model based on active principle of adaptation // Proceedings of International Conference «Applied Stochastic Models and Data Analysis ASDMA 2013& DEMOGRAPHICS 2013». Barcelona, 2013. pp. 775–783. DOI: <https://doi.org/10.4236/ijcns.2013.612055>
5. Кроливецкая Ю. М., Петрова Е. С. Построение стохастических моделей теплового гомеостаза человека // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. Управление, вычисл. техн. информ. 2014. № 1. С. 140–152.
6. Цыганова Ю. В. Об одной модели суточной термометрии теплового гомеостаза человека // Первая Международная заочная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные исследования по приоритетным направлениям биоэкологии и биотехнологии». Ульяновск: УлГПУ им. И. Н. Ульянова, 2015. С. 167–170.
7. Semushin I. V., Tsyganova J. V., Kulikova M. V., Tsyganov A. V., Peskov A. B. Identification of human body daily temperature dynamics via minimum state prediction error method // Proceedings of European Control Conference. Aalborg, 2016. pp. 2429–2434.
8. Semushin I. V., Tsyganova Yu. V. Dynamical physically structured data modeling vs. classical time series analysis: A case study related to clinical trial data analysis // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1368, No. 5. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1368/5/052028>
9. Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Столярова И. В. Математическое и компьютерное моделирование суточной термометрии теплового гомеостаза здорового человека // Теория и практика физической культуры. 2019. № 2. С. 65–67.
10. Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Моделирование и обработка данных суточной термометрии // Поволжский педагогический поиск. 2020. Т. 31, № 1. С. 143–149. DOI: <https://doi.org/10.33065/2307-1052-2020-1-31-143-149>
11. Шугурова М. А. Анализ свойств управляемости и наблюдаемости математических моделей суточной термометрии // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2021. № 2. С. 97–104.
12. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 401 p.
13. Gillijns S., De Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough // Automatica. 2007. Vol. 43, No. 5. pp. 934–937. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.11.016>
14. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 4. С. 469–479. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479>



15. Izanloo R., Fakoorian S. A., Yazdi H. S., Simon D. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise // *Proceedings of the 2016 Annual Conference on Information Science and Systems (CISS)*. 2016. pp. 500–505. DOI: <https://doi.org/10.1109/CISS.2016.7460553>
16. Kulikova M. V. Factored-form Kalman-like implementations under maximum correntropy criterion // *Signal Processing*. 2019. Vol. 60. pp. 328–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.03.003>
17. Kulikova M. V. Chandrasekhar-based maximum correntropy Kalman filtering with the adaptive Kernel size selection // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020. Vol. 65, No. 2. pp. 741–748. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2919341>

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Поступила 20.08.2022; доработана после рецензирования 26.10.2022;  
принята к публикации 23.11.2022*

## REFERENCES

1. L. I. Aikina, “Features of the state of body temperature of an athlete involved in triathlon”, *Adaptive Physical Culture*, **68**:4 (2016), 16–18.
2. N. N. Zakharieva, A. Alkhakim, “Age features of the morphofunctional status and temperature homeostasis of highly qualified football players”, *Man. Sport. Medicine*, **19**:1 (2019), 135–139 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.14529/hsm190119>
3. G. Kelly, “Body temperature variability (Part 1): a review of the history of body temperature and its variability due to site selection, biological rhythms, fitness, and aging”, *Altern. Med. Rev.*, **11**:4 (2006), 278–293.
4. I. V. Semushin, J. V. Tsyganova, A. G. Skovikov, “Identification of a simple homeostasis stochastic model based on active principle of adaptation”, *Proceedings of International Conference “Applied Stochastic Models and Data Analysis ASMDA 2013 & DEMO-GRAPHICS 2013”* (25–28 June 2013 Mataro (Barcelona), Spain.), Barcelona, 2013, 775–783 DOI: <https://doi.org/10.4236/ijcns.2013.612055> (In Russ.).
5. Yu. M. Krolivetskaya, E. S. Petrova, “Construction of stochastic models of human thermal homeostasis”, *Vestn. Astrakhan. State Tech. University Ser. Control, Computing Tech. Inform.*, 2014, no. 1, 140–152 (In Russ.).
6. Yu. V. Tsyganova, “About one model of daily thermometry of human thermal homeostasis”, *First International Correspondence Scientific and Practical Conference «Fundamental and applied research in priority areas of bioecology and biotechnology», section “Mathematical modeling in bioecology and biotechnology”* (Ulyanovsk. February 2015), UISPU named after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk, 2015, 167–170 (In Russ.).

7. I. V. Semushin, J. V. Tsyganova, M. V. Kulikova, A. V. Tsyganov, A. B. Peskov, "Identification of human body daily temperature dynamics via minimum state prediction error method", *Proceedings of European Control Conference* (Aalborg, Denmark. June 29–July 1, 2016), 2016, 2429–2434.
8. I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova, "Dynamical physically structured data modeling vs. classical time series analysis: A case study related to clinical trial data analysis", *Journal of Physics: Conference Series*, **1368**:5 (2019). DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1368/5/052028>
9. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, I. V. Stolyarova, "Mathematical and computer modeling of daily thermometry of thermal homeostasis of a healthy person", *Theory and Practice of Physical Culture*, 2019, no. 2, 65–67 (In Russ.).
10. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, "Modeling and processing of daily temperature data", *Volga Pedagogical Search*, **31**:1 (2020), 143–149 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.33065/2307-1052-2020-1-31-143-149>
11. M. A. Shugurova, "Analysis of controllability and observability properties of mathematical models of daily thermometry", *Scientific Notes of UIGU. Ser. Mathematics and Information Technology*, 2021, no. 2, 97–104 (In Russ.).
12. M. S. Grewal, A. P. Andrews, *Kalman filtering: theory and practice using MATLAB.*, Prentice Hall, New Jersey, 2001, 401 p.
13. S. Gillijns, B. D. Moor, "Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough", *Automatica*, **43**:5 (2007), 934–937. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.11.016>
14. A. N. Kuvshinova, "Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **21**:4 (2019), 469–479 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479>
15. R. Izanloo, S. A. Fakoorian, H. S. Yazdi, D. Simon, "Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise", *Proceedings of the 2016 Annual Conference on Information Science and Systems (CISS)*, 2016, 500–505. DOI: <https://doi.org/10.1109/CISS.2016.7460553>
16. M. V. Kulikova, "Factored-form Kalman-like implementations under maximum correntropy criterion", *Signal Processing*, **60** (2019), 328–338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.03.003>
17. M. V. Kulikova, "Chandrasekhar-based maximum correntropy Kalman filtering with the adaptive Kernel size selection", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**:2 (2020), 741–748. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2919341>

*Submitted 20.08.2022; Revised 26.10.2022; Accepted 23.11.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.



**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section References.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P.A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P.A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizatsii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation\***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\\ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \\\
\hline
1 & 2 \\\
\hline
3 & 4 \\\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис\\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_фай-
ла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_под-
пись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия}
{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmbib.sty**

#### Статьи в журналах на русском языке

В разделе **thebibliography**:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\parag О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}

```

---



---

`\by В. Г. Малинов`  
`\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике`  
`\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ ФИЦ ИУ РАН`  
`\publaddr М.`

**В разделе `thebibliographyEn`:**

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`  
`\by V. G. Malinov`  
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`  
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ FRC CSC RAS Publ.`  
`\publaddr Moscow`



## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

`\begin{table}[h!]`

`\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}`

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package**

#### Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

#### Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`  
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`  
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`  
`\jour Ogarev-online`  
`\vol 20`  
`\yr 2016`  
`\lang In Russ.`  
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

**Articles in collections in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`  
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`  
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`  
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`  
`\publaddr Ulyanovsk`  
`\publ UIGTU Publ.`  
`\yr 2014`  
`\issue 10`  
`\pages 4–13`  
`\lang In Russ.`

**Books (monographs and collections) in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`  
`\by Yu. N. Bibikov`  
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`  
`\publaddr Moscow`  
`\publ Visshay shkola Publ.`  
`\yr 1991`  
`\totalpages 303`  
`\lang In Russ.`

**Conference proceedings in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`  
`\by V. G. Malinov`  
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`  
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ FRC CSC RAS Publ.`  
`\publaddr Moscow`

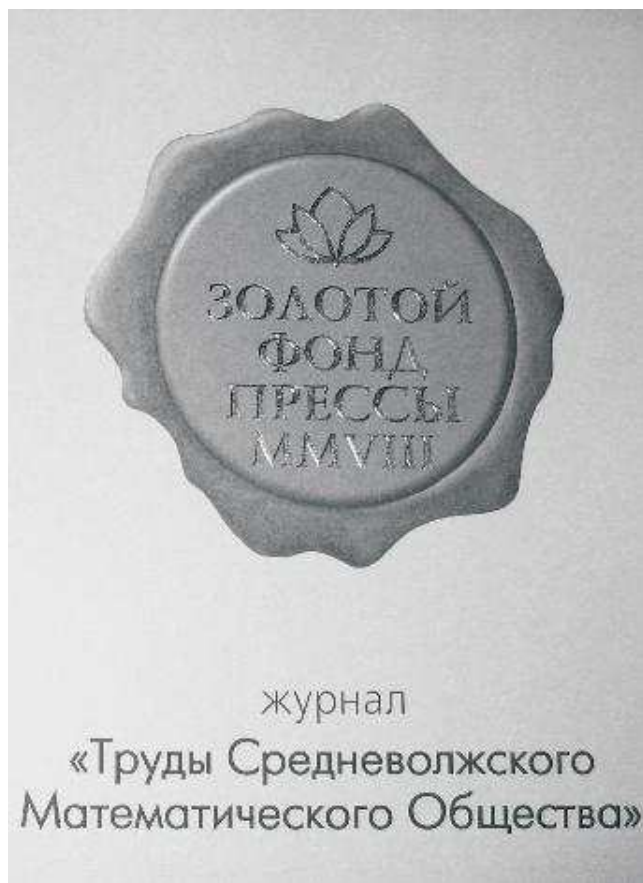
## Алфавитный указатель авторов

Быков А. Н.	419	Повещенко Ю. А.	436
Вишнякова М. Н.	419	Полицук С. Н.	419
Ветчинников М. В.	452	Попов И. В.	436
Дерюгин Ю. Н.	419, 452	Цыганов А. В.	469
Емельянов А. Б.	419	Цыганова Ю. В.	469
Заботин В. И.	399	Черенкова К. В.	419
Круковский А. Ю.	436	Чернышевский П. А.	399
Ладонкина М. Е.	436	Шишканов Д. А.	452
Лазарев А. А.	419	Шугурова М. А.	469

## Author Index

A. N. Bykov	419	Yu. A. Poveschenko	436
K. V. Cherenkova	419	I. V. Popov	436
P. A. Chernyshevskij	399	D. A. Shishkanov	452
Yu. N. Deryugin	419, 452	M. A. Shugurova	469
A. B. Emelyanov	419	A. V. Tsyganov	469
A. Yu. Krukovsky	436	Yu. V. Tsyganova	469
M. E. Ladonkina	436	M. V. Vetchinnikov	452
A. A. Lazarev	419	M. N. Vishnyakova	419
S. N. Polishchuk	419	V. I. Zabotin	399

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 12.12.2022. Дата выхода в свет 31.12.2022. Цена свободная.

Формат 70х108  $\frac{1}{16}$ . Объем 10,5 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1127.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Национальный  
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24



Editor: *S. Kh. Zinina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 12.12.2022. Date of publishing 31.12.2022. Free price.

Sheet size  $70 \times 108 \frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 10,5.

Number of copies 100. Order no. 1127.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia

**Для заметок**



