ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga Mathematical Society Journal

Том / Vol. 24 № / No. 3

2022

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Том 24, № 3. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны
Журнал публикует статьи на русском и английском языках.
Периодичность издания: 1 раз в квартал.

Middle Volga Mathematical Society

National Research Mordovia State University

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Vol. 24, no. 3. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

– «Математика»,

– «Прикладная математика и механика»,

– «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — E94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.
Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscript to the journal through the online store of periodicals «Press by subscription». Subscription index of the journal is E94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.
PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.
EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.
Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Редакционная коллегия

Editorial Board

Содержание

Математика

Прикладная математика и механика

Математическая жизнь

Contents

Математика

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.267-279 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 531.36:62-50

ПИД-регуляторы с запаздыванием в задаче о стабилизации программных движений роботов-манипуляторов

А. С. Андреев, Л. В. Колегова

Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)

Аннотация. Широкое применение в решении задач об управлении техническими системами, в т. ч. механическими, имеют пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД) регуляторы. При этом большинство работ ограничивается исследованием задачи о стабилизации установившихся движений и состояний на основе анализа модельных уравнений в линейном приближении. Одной из актуальных задач механики управляемого движения продолжает оставаться задача использования ПИД-регуляторов в отслеживании траекторий многозвенных роботов-манипуляторов в нелинейной постановке с достижением полуглобальной и глобальной стабилизации. Практически малоисследованной является задача обоснования применимости таких регуляторов с учетом возможного запаздывания в структуре обратной связи. Настоящая работа посвящена исследованию такой задачи. В качестве решения прикладной задачи найдено управление движением шестизвенного робота-манипулятора.

Ключевые слова: робот-манипулятор, управление, ПИД-регулятор, запаздывание, функционал Ляпунова

Для цитирования: Андреев А. С., Колегова Л. В. ПИД-регуляторы с запаздыванием в задаче о стабилизации программных движений роботов-манипуляторов // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 267–279. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.267-279

Об авторах:

Андреев Александр Сергеевич, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

Колегова Любовь Владимировна, ассистент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3160-0602, lyubov_fedorova_1994@mail.ru

Original article

MSC2020 39A30

PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions

A. S. Andreev, L. V. Kolegova

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Abstract. Proportional-integro-differentiating (PID) controllers are widely used in solving control problems of technical systems, including mechanical ones. For this case, most of works are limited to the study of stabilization problem for steady motions and states; such studies are based on the analysis of model equations in a linear approximation. On the other hand, one of the urgent problems of controlled-motion mechanics is the problem of using PID controllers in tracking the trajectories of multi-link robotic manipulators with semi-global or global stabilization in a non-linear formulation. Practically little studied is the problem of justifying the applicability of such controllers taking into account possible delay in the feedback structure. This paper deals with such a problem. As an application of the theory developed in this paper, the control for a motion of a six-link manipulator is obtained.

Keywords: robotic arm, control, PID controller, delay, Lyapunov functional

For citation: *A. S. Andreev, L. V. Kolegova.* PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 267–279. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.267-279

About the authors:

Aleksandr S. Andreev, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 L. Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

Lubov V. Kolegova, Assistant Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 L. Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), https://orcid.org/0000-0002-3160-0602, lyubov_fedorova_1994@mail.ru

1. Введение

Математические модели современных механических систем описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений высокой размерности. Это обуславливает достаточные сложности в обосновании методов конструирования структуры управления такими системами.

Широкое распространение в управлении техническими, в т. ч. механическими системами, имеют пропорционально-интегро-дифференцирующие (ПИД) регуляторы. Такие регуляторы используются во многих контурах управления, их структура компактна и проста, они позволяют достичь цели для большинства манипуляционных роботов. Разработка и использование ПИД-регуляторов в управлении роботами-манипуляторами является предметом многочисленных исследований уже на протяжении 40 лет. Эти исследования посвящены повышению эффективности ПИД-управления путем различной реализации дифференцирующей части регулятора, модификацией интегральной составляющей. Основные результаты по применению различных типов ПИД-регуляторов достигнуты в решении задач в нелинейной постановке о полуглобальной и глобальной стабилизации программного положения манипулятора. Менее исследованными являются задачи об отслеживании траектории или стабилизации программного движения. Анализ известных работ в этом направлении можно найти в статьях [1–3]. Сравнительно мало работ посвящено исследованию задач по методам управления механическими системами с учетом запаздывания в управлении. Это объясняется тем, что эти задачи основываются на моделировании посредством функционально-дифференциальных уравнений, качественная теория которых значительно сложнее, чем для обыкновенных уравнений.

В данной работе решаются задачи об отслеживании траекторий многозвенных роботов-манипуляторов при помощи ПИД-регуляторов с учетом запаздывания в структуре обратной связи.

2. Математическая модель манипулятора и управление

Широкое применение в управлении различными системами и процессами получили пропорционально-интегро-дифференциальные (ПИД) регуляторы. В частности, множество работ посвящено задаче о стабилизации движений роботов-манипуляторов с таким управлением. Определенный анализ таких работ приведен в публикациях [1–3]. В настоящей работе эта задача исследуется с учетом запаздывания в структуре обратной связи.

Рассматривается модель многозвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическими шарнирами, движение которого описывается уравнениями Лагранжа

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} = u, \tag{2.1}$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных угловых координат и линейных перемещений шарниров; $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица инерции; $C(q,\dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ – вектор кориолисовых и центробежных сил инерции, обусловленных выбором координат q; $g(q) \in \mathbb{R}^n$ – вектор гравитационных сил; $D\dot{q}$ – вектор сил вязкого трения, действующих в шарнирах, $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ $(d_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n)$; $u \in \mathbb{R}^n$ – управление.

Пусть $q = q^{(0)}(t)$ $(|q^{(0)}(t)| \le q_{10},\ |\dot{q}^{(0)}(t)| \le q_{20},\ |q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2)$ – некоторое программное движение манипулятора, осуществляемое под действием программного управления

$$u^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))\ddot{q}^{(0)}(t) + C(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)) + D\dot{q}^{(0)}(t). \tag{2.2}$$

Пусть $x = q - q^{(0)}(t)$, $\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)$ – составляющие возмущенного движения.

Соответствующие уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} + R(t,x) + D\dot{x} = u^{(1)}, \tag{2.3}$$

где $A^{(1)}(t,x) = A(q^{(0)}(t) + x)$, $C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(q^{(0)}(t) + x, \dot{x})$, $R(t,x) = (A(q^{(0)}(t) + x) - A(q^{(0)}(t)))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t,x,\dot{q}^{(0)}(t)) - C^{(1)}(t,0,\dot{q}^{(0)}(t)))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)+x) - g(q^{(0)}(t))$; $u^{(1)} = u - u^{(0)}(t)$ – управляющее воздействие, задачей которого согласно классической постановке является обеспечение стабилизации заданного программного движения $q^{(0)}(t)$ или асимптотической устойчивости нулевого решения $\dot{x} = x = 0$ системы (2.3).

Обобщенные координаты, соответствующие цилиндрическим шарнирам, являются угловыми. Соответственно, массо-инерционные параметры системы, центробежные, кориолисовы и гравитационные силы определяются функциями, периодическими по этим координатам, и движение системы (2.3) можно рассматривать в соответствующем цилиндрическом пространстве [4], например, без ограничения общности, с периодом 2π.

Составляющая $R(t,x)$ системы (2.3) может быть разложена в виде зависимости

$$R(t,x) = F(t,x)p(x), \tag{2.4}$$

где $p(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n))'$; функции $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_m(x_m)$ $(m \le n)$ являются линейными относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, отвечающих призматическим шарнирам, $p_i = p_i^0 x_i$ $(p_i^0 = const > 0,\ i = 1, 2, \dots, m)$; функции $p_{m+1}(x_{m+1}), p_{m+2}(x_{m+2}), \dots, p_n(x_n)$ являются периодическими относительно переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, отвечающих цилиндрическим шарнирам, при этом функции $p_i = p_i(x_i)$ $(i = m+1, m+2, \dots, n)$ имеют следующие свойства [4]:

а) $|p_j(x_j)|$ является периодической функцией с периодом 2π $\forall x_j \in \mathbb{R}$; $p_j(2\pi l) = 0$, $|p_j(x_j)| > 0$ $\forall x_j \ne 2\pi l$ $(j = m+1, m+2, \dots, n)$ $\forall l \in \mathbb{Z}$;

б) функция $r(x) = (r_1(x_1), r_2(x_2), \dots r_n(x_n))'$, определяемая по формуле

$$r_j(x_j) = \int\limits_0^{x_j} p_j(x_j)dx_j \quad \forall x_j \in \mathbb{R},\ j = m+1, m+2, \dots, n, \tag{2.5}$$

является ограниченной и непрерывно дифференцируемой, такой, что $r_j(x_j)$ – периодическая функция с периодом 4π $\forall x_j \in \mathbb{R}$; $r_j(4\pi l) = 0$, $r_j(x_j) > 0$ $\forall x_j \ne 4\pi l$ $\forall l \in \mathbb{Z}$, $j = m+1, m+2, \dots, n$.

В дальнейшем для удобства разделим вектор $x \in \mathbb{R}^n$ на $x^{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $x^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$ с нормой $|x^{(1)}|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$ и вектор $x^{(2)} \in T^{(n-m)} = \{-\pi \le x_s \le \pi,\ s = m+1, m+2, \dots, n\}$. Здесь и далее $(\cdot)'$ – операция транспонирования.

Пусть $M_1(H_0) \subset \mathbb{R}^n$ есть область $M_1 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) :\ |x^{(1)}|_m \le H_0,\ x^{(2)} \in T^{n-m}\}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ есть соответствующая область, такая, что $M_2 = \{p \in \mathbb{R}^n :\ |p(x)| \le p_0\ \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in M_1\}$.

Исследуется задача о стабилизации программного движения манипулятора посредством управляющего воздействия типа ПИД-регулятора с учетом запаздывания в структуре обратной связи

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t-h_1(t))) - B_2 \dot{x}(t-h_2(t)) - \int\limits_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t)\dot{x}(\tau)d\tau - \int\limits_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau-t)p(x(\tau))d\tau, \tag{2.6}$$

где $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (B_1 и B_2 – постоянные матрицы), $B_3, B_4 \in C([-h_0, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n})$ – матрицы усиления; h_k – запаздывания, определяемые структурой обратной связи, $h_i \in C^1(R^+ \to [0, h_0])$, $i = 1, 2, 3$, h_0, h_4 – положительные постоянные.

3. Отслеживание траектории манипулятора в случае достаточных сил вязкого трения

Вначале рассмотрим случай достаточных сил вязкого трения, или когда отсутствует запаздывание в измерениях по скоростям. Соответственно, будем полагать, что управляющее воздействие имеет следующий вид:

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t-h_1(t))) - B_2\dot{x}(t) - \int\limits_{t-h_0}^{t-h_2} B_4(\tau - t)p(x(\tau))d\tau, \tag{3.1}$$

где $B_1 = diag(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$, $b_{1i} = const > 0$, $B_2 = diag(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$, $b_{2i} = const \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $B_4(s) = diag(b_{41}(s), b_{42}(s), \ldots, b_{4n}(s))$, $b_{4i} \in C([-h_0, 0] \to \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Преобразуем выражение (3.1) для $u^{(1)}$ следующим образом

$$\begin{gathered} u^{(1)} = -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2\dot{x}(t) + B_1 \int\limits_{t-h_1(t)}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t-h_0}^{t-h_2} B_{42}(\tau - t)\frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + B_{41} \int\limits_{t-h_2}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$B_{41} = \int\limits_{-h_0}^{-h_2} B_4(s)ds, \;\; B_{42}(\tau - t) = \int\limits_{-h_0}^{\tau - t} B_4(s)ds.$$

Подставив выражение (3.2) для $u^{(1)}$ в уравнение (2.3), получим

$$\begin{gathered} A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = -C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x})\dot{x} - (B_1 + B_{41} + F(t,x))p(x) - \\ -(D + B_2)\dot{x} + B_1 \int\limits_{t-h_1(t)}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t-h_0}^{t-h_2} B_{42}(\tau - t)\frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + B_{41} \int\limits_{t-h_2}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для решения задачи воспользуемся методами работ [4–5]. Для этого отметим, что предельные к (3.3) уравнения имеют аналогичную структуру. Поэтому для применения теорем из [4–5] достаточно провести качественный анализ системы на основе уравнений (3.3).

Введем функционал Ляпунова

$$\begin{gathered} V_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}(t) + Sp(x(t)))' A^{(1)}(t, x(t))(\dot{x}(t) + Sp(x(t))) + \sum_{i=1}^{n}(b_{1i} + s_i(b_{2i} + d_i)) \int\limits_{0}^{x_i} p_i(x_i)dx_i + \\ + \frac{\lambda_1}{2} \int\limits_{-h_0}^{0} \left(\int\limits_{\tau}^{0} \dot{x}^2(\tau + s)ds \right) d\tau + \frac{\lambda_2}{2} \int\limits_{-h_0}^{-h_2} \left(\int\limits_{\tau}^{0} \dot{x}^2(\tau + s)ds \right) d\tau + \frac{\lambda_3}{2} \int\limits_{-h_2}^{0} \left(\int\limits_{\tau}^{0} \dot{x}^2(\tau + s)ds \right) d\tau, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$\lambda_1 = |B_1| \left(max \left| \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right| \right) + \varepsilon_0, \;\; \lambda_2 = \lambda_3 = max \left(|B_4(s)|, max \left| \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right| \right) + \varepsilon_0, \;\; \varepsilon_0 > 0.$$

Для функционала (3.4) находим оценки

$$a_0(|\dot{x}(t)|^2 + |p(x(t))|^2) \leq V_1 \leq a_1(sup(|\dot{x}(t+s)|^2, -h_0 \leq s \leq 0) + |p(x(t)|^2) \;\; a_0, a_1 = const > 0. \tag{3.5}$$

Функционал V_1 обращается в нуль на множестве

$$E_1 = \{V_1 = 0\} = \{\dot{x} = 0,\ x^{(1)} = 0,\ x^{(2)} = 4\pi k,\ k = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-m})',\\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \ldots, (n-m)\}.$$

Для производной функционала (3.4) в силу системы (3.3) найдем оценку

$$\begin{gathered}\dot{V}_1(t) \le (\dot{x}(t))' L_1(t, x(t))\dot{x}(t) + (p(x(t)))' L_2(t, x(t))\dot{x}(t) + (p(x(t)))' L_3(t, x(t))p(x(t)),\\ L_1(t,x) = C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) - (D + B_2) + A^{(1)}(t,x)S\frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\lambda_0 h_0 E,\\ L_2(t,x) = S(C^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t))' + A^{(1)}(t,x)S\frac{\partial p(x)}{\partial x} - F'(t,x),\\ L_3(t,x) = SC^{(1)}(t, x, Sp(x) - \dot{q}^{(0)}(t)) - F'(t,x)S - B_1 S,\ \lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\end{gathered} \tag{3.6}$$

где E – единичная матрица.

Выберем матрицы B_1 и B_2 управляющего воздействия (3.1) с величиной запаздывания $h_0 > 0$ из условия отрицательной определенности квадратичной по $(\dot{x}, p)$ формы

$$W_1(t, x, \dot{x}, p) = \dot{x}' L_1(t,x) + \dot{x} L_2(t,x)p + p' L(t,x)p \le -W_0(\dot{x}, p) = -\alpha_1|\dot{x}|^2 - \alpha_2|p|^2,\\ \alpha_1, \alpha_2 = const > 0,$$

при значениях $(t, x, \dot{x}, p) \in \mathbb{R}^+ \times M_1 \times \mathbb{R}^n \times M_2$.

Тогда для $\dot{V}_1(t)$ будем иметь оценку

$$\dot{V}_1(t) \le -W_0(\dot{x}, p(x)) = -\alpha_1|\dot{x}|^2 - \alpha_2|p(x)|^2 \le 0.$$

Множество $\{W_0 = 0\}$ содержит лишь положения равновесия системы (3.3) вида $E_2 = \{\dot{x} = 0,\ x^{(1)} = 0,\ x^{(2)} = 2\pi k,\ k = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-m})',\ k_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n-m\}$.

Согласно [4–5], под действием управляющего воздействия (3.1) каждое из положений равновесия $x = x^{(0)} \in E_1$ будет равномерно асимптотически устойчиво. При этом каждое ограниченное решение (3.3) по $x^{(1)}$ областью $\{x^{(1)} \in \mathbb{R}^m : |x^{(1)}| \le H_0\}$ будет притягиваться к одному из положений равновесия $x = x^{(0)} \in E_2$. Эти положения равновесия отвечают заданному программному движению $q = q^{(0)}(t)$ (с точностью до кратных 2π поворотов манипулятора вокруг цилиндрических шарниров). Таким образом достигается полуглобальная стабилизация $q = q^{(1)}(t)$ управлением

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(1)}(t, \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t), q - q^{(0)}(t)).$$

4. Отслеживание траектории манипулятора управлением с запаздыванием по фазовым переменным

Рассмотрим решение задачи о стабилизации положения $\dot{x} = x = 0$ системы (2.3) управляющим воздействием вида

$$u^{(1)} = -B_1 p(x(t - h_1(t))) - B_2\dot{x}(t - h_2(t)) - \int\limits_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t)\dot{x}(\tau)d\tau - \int\limits_{t-h_0}^{t-h_4} B_4(\tau - t)p(x(\tau))d\tau, \tag{4.1}$$

где $B_1 = diag(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$, $B_2 = diag(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$; b_{1j}, b_{2j} – положительные постоянные $j = 1, 2, \ldots, n$; $B_3 \in C([-h_0, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n})$, $B_4(s) = diag(b_{41}(s), b_{42}(s), \ldots, b_{4n})$.

Преобразуем выражение (4.1) с учетом (3.2) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
u^{(1)} = -(B_1 + B_{41})p(x(t)) - B_2\dot{x}(t) + B_1 \int\limits_{t-h_1(t)}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + \\
+ \int\limits_{t-h_0}^{t-h_2(t)} B_{42}(\tau - t)\frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau + B_{41} \int\limits_{t-h_2(t)}^{t} \frac{\partial p(x(\tau))}{\partial x}\dot{x}(\tau)d\tau - \\
- \int\limits_{t-h_0}^{t-h_3(t)} B_3(\tau - t)\dot{x}(\tau)d\tau - B_2 \int\limits_{t-h_0}^{t} (A^{(1)}(\tau, x(\tau)))^{-1}(C^{(1)}(\tau, x(\tau), 2\dot{q}^{(0)}(\tau) + \dot{x}(\tau))\dot{x}(\tau) + \\
+F(\tau, x(\tau))p(x(\tau)) + D\dot{x}(\tau) + B_2\dot{x}(\tau - h_2(\tau)) + B_1 p(x(\tau - h_1(\tau)) + \\
+ \int\limits_{\tau-h_0}^{\tau-h_3(\tau)} B_3(s - t)\dot{x}(s)ds + \int\limits_{t-h_0}^{\tau-h_4} B_4(s - t)p(x(s))ds)d\tau.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Вновь применяя методику решения поставленной задачи об управлении, построим функционал Ляпунова

$$
\begin{gathered}
V_2 = V_1 + \lambda_4 \int\limits_{-2h_0}^{0} \left(\int\limits_{\tau}^{0} \dot{x}^2(t+s)ds \right) d\tau + \\
+\lambda_4 \int\limits_{-2h_0}^{0} \left(\int\limits_{\tau}^{0} p^2(x(t+s))ds \right) d\tau \quad (\lambda_4, \lambda_5 = const > 0).
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Находим, что поставленная задача сводится к нахождению параметров управляющего воздействия (4.1) из условия определенной отрицательности квадратичной формы

$$W_2(t, x, \dot{x}, p) = W_1(t, x, \dot{x}, p) + 4\lambda_4 h_0 |\dot{x}|^2 + 2\lambda_5 h_0 |p|^2$$

при значениях $(t, x, \dot{x}, p) \in R^+ \times M_1 \times \mathbb{R}^n \times M_2$.

Соответственно, находим управляющее воздействие (4.1), решающее задачу о равномерной асимптотической устойчивости каждого положения равновесия $x = x^{(0)} \in E_1$ системы (2.3), и управление

$$u = u^{(0)}(t) + u^{(2)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)),$$

решающее задачу о полуглобальной стабилизации программного движения $(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$ манипулятора.

5. Отслеживание траектории шестизвенного робота-манипулятора

В качестве прикладной рассмотрена задача об управлении робототехнической системой, целью которой является проведение разного рода работ в горячей камере. Горячая камера представляет собой герметичную камеру, изготовленную с применением экранирующих материалов. В камере находится ведомый манипулятор, имеющий шесть степеней свободы (см. Рис. 5.1) и управляемый на основе ведущего манипулятора [6]. Ведущий манипулятор представляет собой уменьшенную версию ведомого манипулятора. Он имеет приводы во всех шарнирах с датчиками, измеряющих значения их фазовых координат. Манипуляторы соединены между собой сквозной трубой. Труба содержит набор параллельных валов для передачи движения от ведущего манипулятора к ведомому. Сквозные валы имеют на концах муфты с прорезями для зацепления их с валами ведомого манипулятора.

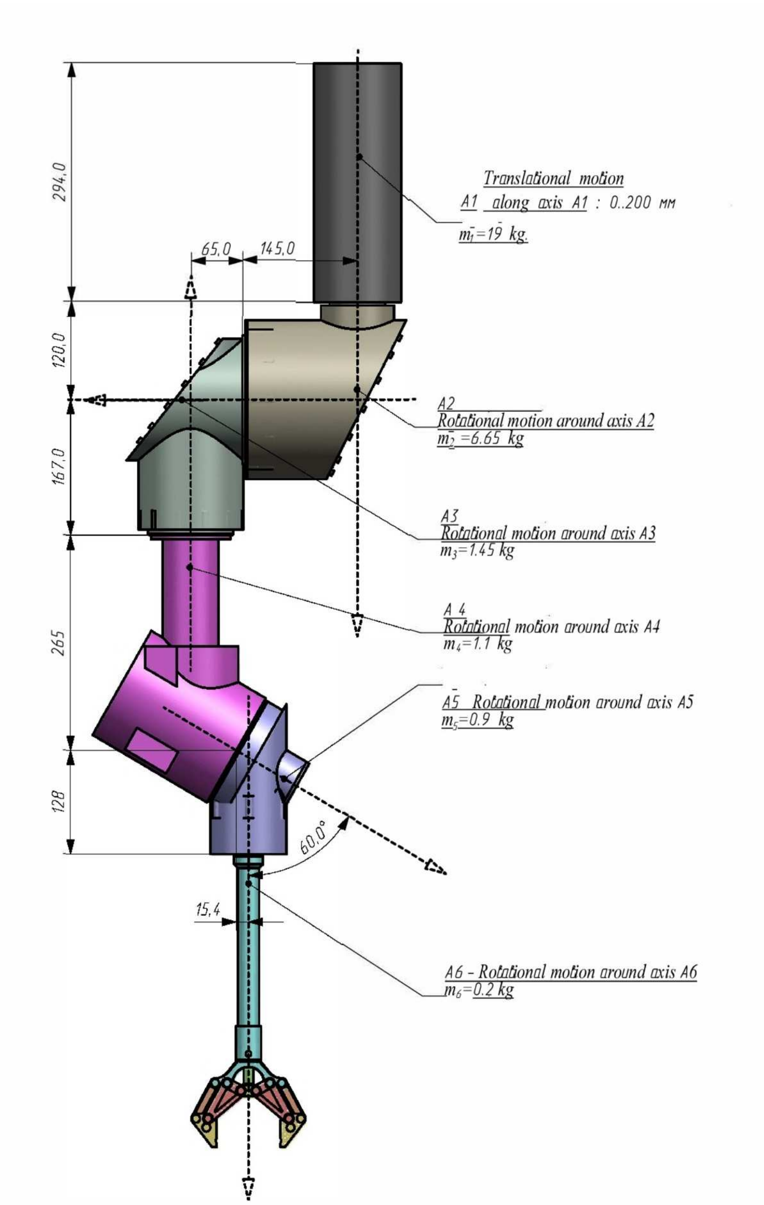

Рис. 5.1. Модель шестизвенного робота-манипулятора
Fig 5.1. Model of a six-link robotic arm

Пусть обобщенные координаты $q_1 = z_1$, $q_i = \varphi_i$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$ представляют собой поступательные и угловые перемещения призматического и вращательных шарниров O_1, O_2 , ..., O_6 соответственно. Обозначим через l_i длину i-го звена, символом m_i – массу i-го звена, l_{i2} – длина отрезка O_iC_i, где C_i – центр масс i-го звена. Обозначим через I_{ix}, I_{iy} и I_{iz} моменты инерции i-го относительно соответствующих осей x, y и z $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Динамика многозвенного робота-манипулятора с шестью вращательными и призматическими шарнирами определяется уравнениями (2.1). Элементы a_{ij} матрицы $A(q)$ имеют следующий вид:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{6} m_j,\ a_{12} = a_{16} = a_{21} = a_{61} = 0,$$
$$a_{22} = I_{2z} + I_{3y}\sin^2 q_3 + \cos^2 q_3 \sum_{j=3}^{6} I_{jz} + \sin^2 q_3 \sum_{j=3}^{6} I_{jy} +$$
$$+\frac{1}{4}(I_{5x} - I_{5z})\cos^2 q_3 + m_2 l_{22}^2 + m_3(l_{22}^2 + l_3^2\sin^2 q_3) +$$
$$+m_4((l_{32} + l_4)^2\sin^2 q_3 + l_{22}^2) + m_5((l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_{62})^2\sin^2 q_3 + (l_{22} - \tfrac{1}{2}l_{52})^2),$$

$$a_{33} = I_{3x} + I_{4x} + \frac{3}{4}(I_{5x} + I_{5z}) + I_{6x} + m_3 l_3^2 + m_4(l_{32} + l_4)^2 +$$
$$+m_5(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_5)^2 + m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_6)^2,$$
$$a_{44} = I_{4z} + \frac{3}{4}(I_{5x} + I_{5z}) + I_{6z} + \frac{1}{2}m_5 l_5^2 + \frac{1}{2}m_6 l_{52}^2,$$
$$a_{55} = I_{5z} + \frac{1}{2}(I_{6x} + I_{6z}) + \frac{1}{2}m_6 l_6^2,\ a_{66} = I_{6z},$$

$$a_{13} = a_{31} = m_3 l_3 \sin q_3 + m_4(l_{32} + l_4)\sin q_3 + m_5(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52})\sin q_3$$
$$+m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_{61})\sin q_3,$$
$$a_{14} = a_{41} = -\frac{1}{2}m_5 l_5 \sin q_3 - \frac{1}{2}m_6 l_{52}\sin q_3,\ a_{15} = a_{51} = \frac{\sqrt{3}}{2}m_6 l_6 \sin q_3,$$

$$a_{23} = a_{32} = m_4(l_{32} + l_{41})l_{22}\cos q_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}I_{5x}\cos q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}I_{5z}\cos q_3$$
$$+m_5(l_{22} - \frac{1}{2}l_5)(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_5)\cos q_3$$
$$+m_6(l_{22} - \frac{1}{2}l_5)(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_6)\cos q_3,$$

$$a_{24} = a_{42} = (I_{4z} + I_{5x} + I_{5z} + I_{6z} - m_5(l_{22} - \tfrac{1}{2}l_5)\frac{\sqrt{3}}{2}l_5$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}m_6(l_{22} - \frac{1}{2}l_{52})l_{52})\cos q_3,$$
$$a_{25} = a_{52} = (\frac{3}{4}(I_{5z} + I_{6z}) + (l_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52}))\cos q_3,$$
$$a_{26} = a_{62} = I_{6z}\cos q_3,$$

$$a_{34} = a_{43} = -\tfrac{3}{4}I_{5x} + \tfrac{3}{4}I_{5z} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_{61})l_{52},$$
$$a_{35} = a_{53} = \frac{1}{4}(I_{5z} + I_{6x}) + \frac{1}{2}m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{\sqrt{3}}{2}l_{52} + l_6)l_6,$$
$$a_{45} = a_{54} = \frac{\sqrt{3}}{2}(I_{5z} + I_{6z}) - \frac{m_6}{2}l_5 l_6,$$
$$a_{46} = a_{64} = I_{6z},\ a_{56} = a_{65} = \frac{1}{2}I_{6z}.$$

Элементы c_{ij} матрицы $C(q, \dot{q})$ вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j})\dot{q}_k.$$

Компоненты g_i вектора $g(q)$ имеют следующий вид:

$$g_1 = -g\sum_{i=1}^{6} m_i,\ g_2 = 0,$$
$$g_3 = -g(m_3 l_3 + m_4(l_{32} + l_4) + m_5(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_5)+$$
$$+m_6(l_{32} + l_{42} + \frac{1}{2}l_{52} + l_6))\sin q_3,$$
$$g_4 = 0,\ g_5 = -gm_6\frac{\sqrt{3}}{2}l_6 \sin q_5,\ g_6 = 0.$$

Численные значения параметров робота выбраны следующими

$$m_1 = 18 \text{ кг},\quad m_2 = 6.5 \text{ кг},\quad m_3 = 1.5 \text{ кг},\quad m_4 = 1.2 \text{ кг},$$
$$m_5 = 0.8 \text{ кг},\quad m_6 = 0.3 \text{ кг},$$
$$l_1 = 0.294 \text{ м},\quad l_2 = 0.12 \text{ м},\quad l_3 = 0.167 \text{ м},$$
$$l_4 = 0.265 \text{ м},\quad l_5 = 0.128 \text{ м},\quad l_6 = 0.45 \text{ м}.$$

Желаемая траектория робота задается следующим образом

$$\begin{gathered} q_1^{(0)}(t) = 0.1 + 0.1\cos(t)\,\text{м},\quad q_2^{(0)}(t) = \cos(2t)\,\text{рад}, \\ q_3^{(0)}(t) = \sin(3t)\,\text{рад},\quad q_4^{(0)}(t) = 2\cos(2t)\,\text{рад}, \\ q_5^{(0)}(t) = \sin(2t)\,\text{рад},\quad q_6^{(0)}(t) = 2\sin(3t)\,\text{рад}. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Закон управления определяется формулой (2.6), где

$$p(x) = (x_1, \sin(x_2/2), \sin(x_3/2), \sin(x_4/2), \sin(x_5/2), \sin(x_6/2))'. \tag{5.2}$$

Параметры усиления управления выбираются следующими:

$$b_1 = 20,\ b_2 = 10,\ b_3 = 1,\ b_4 = 1,\ h_1 = h_2 = 0.1 \text{ с},\ h_3 = h_4 = 0.5 \text{ с}. \tag{5.3}$$

Начальные положения и скорости звеньев робота-манипулятора выбраны следующими

$$\begin{gathered} q_1(0) = 0.1\,\text{м},\ q_2(0) = -2.1\,\text{рад},\ \ q_3(0) = 2.2\,\text{рад}, \\ q_4(0) = 3.0\,\text{рад}\ ,q_5(0) = 2.9\,\text{рад},\ q_6(0) = 2.8\,\text{рад}, \\ \dot{q}_1(0) = -11\,\text{м/с},\ \dot{q}_2(0) = -16\,\text{рад/с},\ \dot{q}_3(0) = 15\,\text{рад/с}, \\ \dot{q}_4(0) = 16\,\text{рад/с},\ \dot{q}_5(0) = 18\,\text{рад/с},\ \dot{q}_6(0) = 19\,\text{рад/с}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

На Рис. 5.2 *a*)-*f*) показаны графики желаемого и реального движений для каждого звена робота (2.1). Из этих рисунков видно, что закон управления (2.6) обеспечивает асимптотическую сходимость реальной траектории робота к желаемой.

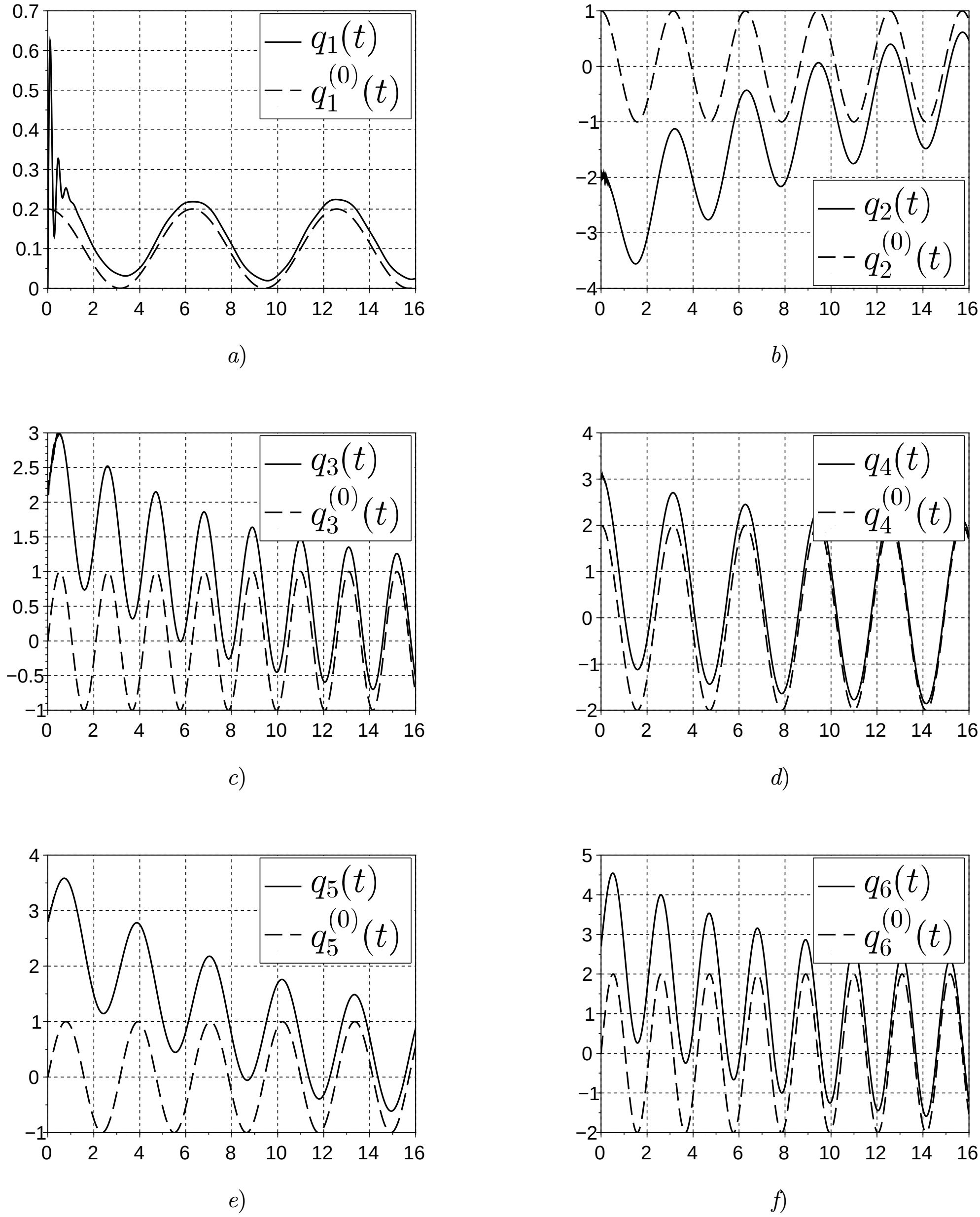

Рис. 5.2. Графики зависимости от времени желаемого и реального движений *a*) первого звена, *b*) второго звена, *c*) третьего звена, *d*) четвертого звена, *e*) пятого звена, *f*) шестого звена

Fig 5.2. Graphs of the desired and actual movements depending on the time *a*) of the first link, *b*) of the second link, *c*) of the third link, *d*) of the fourth link, *e*) of the fifth link, *f*) of the sixth link

Полученные результаты являются развитием и дополнением работ [4–5].

6. Заключение

В работе обоснован метод построения нелинейного ПИД-регулятора в задаче об управлении с запаздывающей обратной связью многозвенным роботом-манипулятором с цилиндрическими и призматическими шарнирами. Отдельно рассмотрены задачи об отслеживании траектории при достаточных силах вязкого трения и дополнения структуры регулятора пропорциональными составляющими по скоростям с учетом запаздывания. В качестве прикладной решена задача о применении ПИД-регулятора для шестизвенного манипулятора, функционирование которого в горячей камере в достаточной степени зависит от запаздывания, вызванной принятым способом управления.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90120.

Список литературы

1. Orrante J., Santibanez V., Campa R. On saturated PID controllers for industrial robots: the PA10 robot arm as case of study. In: Advanced Strategies for Robot Manipulators / ed.by S. Ehsan Shafiei. 2010. DOI: https://doi.org/10.5772/10196
2. Santibanez V., Camarillo K., Moreno-Valenzuela J., Campa R. A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. 2010. Vol. 8, No. 3. pp. 544–555. DOI: https://doi.org/10.1007/s12555-010-0307-4
3. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, вып. 2. С. 156–186.
4. Andreev A. S., Peregudova O. A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93. pp. 3003–3015. DOI: https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1575526
5. Andreev A., Peregudova O. On global trajectory tracking control of robot manipulators with a delayed feedback // Cybernetics and Physics. 2021. Vol. 10, No 4. pp. 231–239. DOI: https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-4-231-239
6. Prikhodko V. V., Sobolev A. A., Zhukov A. V., Chavkin E. M., Fomin A. N., Levshchanov V. V., Pavlov S. V., Svetukhin V. V. Radiation-resistant robotic manipulator controlled by 6-DoF haptic control device to perform technological tasks in hot cells // Journal of Physics: Conference Series. 2019. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012045

Поступила 07.06.2022; доработана после рецензирования 09.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

A. S. Andreev, L. V. Kolegova. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic . . .

References

1. J. Orrante, V. Santibanez, R. Campa, *Advanced Strategies for Robot Manipulators*, eds. S. Ehsan Shafiei, 2010 DOI: https://doi.org/10.5772/10196.

2. V. Santibanez, K. Camarillo, J. Moreno-Valenzuela, R. Campa, "A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators", *International Journal of Control, Automation and Systems*, **8**:3 (2010), 544–555. DOI: https://doi.org/10.1007/s12555-010-0307-4

3. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, "Nonlinear regulators in position stabilization problem of holonomic mechanical system", *Mechanics of Solids*, **53**:3 (2018), S22–S38.

4. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, "On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space", *International Journal of Control*, **93** (2020), 3003–3015. DOI: https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1575526

5. A. Andreev, O.Peregudova, "On global trajectory tracking control of robot manipulators with a delayed feedback", *Cybernetics and Physics*, **10**:4 (2021), 231–239. DOI: https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-4-231-239

6. V. V. Prikhodko, A. A. Sobolev, A. V. Zhukov, E. M. Chavkin, A. N. Fomin, V. V. Levshchanov, S. V. Pavlov, V. V. Svetukhin, "Radiation-resistant robotic manipulator controlled by 6-DOF haptic control device to perform technological tasks in hot cells", *Journal of Physics: Conference Series*, 2019. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012045

Submitted 07.06.2022; Revised 09.08.2022; Accepted 24.08.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.280-288 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

А. В. Веденин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Настоящая работа посвящена новому методу построения аппроксимаций к решению параболического дифференциального уравнения в частных производных. Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой с переменным коэффициентом теплопроводности. Построена последовательность функций, которая сходится к решению этой задачи равномерно по пространственной переменной и локально равномерно по времени. Составляющие последовательность функции явно выражены через начальное условие и коэффициент теплопроводности, т.е. через функции, играющие роль параметров. При построении последовательности используются идеи и методы функционального анализа, а именно, теорема Чернова об аппроксимации операторных полугрупп, в силу чего построенные функции называются черновскими аппроксимациями. В большинстве ранее опубликованных работ норма разности между точным решением и черновской аппроксимацией с номером n не превышает $const/n$. Аппроксимации, построенные в работе, являются быстро сходящимися, т. е. для них ошибка убывает быстрее $const/n$. Это следует из теоремы Галкина-Ремизова. Приведены ключевые формулы, явный вид построенных аппроксимаций и схемы доказательств. Полученные в настоящей статье результаты указывают путь к построению быстро сходящихся черновских аппроксимаций для более широкого класса уравнений.

Ключевые слова: задача Коши для уравнения теплопроводности, переменный коэффициент теплопроводности, аппроксимация решения, скорость сходимости к решению, однопараметрические полугруппы операторов, формула Чернова

Для цитирования: Веденин А. В. Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288

Об авторе:

Веденин Александр Владимирович, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4035-7579, lcsndr@mail.ru

Original article

MSC2020 65M12, 47D06

Fast converging Chernoff approximations to the solution of heat equation with variable coefficient of thermal conductivity

A. V. Vedenin

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to a new method for constructing approximations to the solution of a parabolic partial differential equation. The Cauchy problem for the heat equation on a straight line with a variable heat conduction coefficient is considered. In this paper, a sequence of functions is constructed that converges to the solution of the Cauchy problem uniformly in the spatial variable and locally uniformly in time. The functions that make up the sequence are explicitly expressed in terms of the initial condition and the thermal conductivity coefficient, i.e. through functions that play the role of parameters. When constructing functions that converge to the solution, ideas and methods of functional analysis are used, namely, Chernoff's theorem on approximation of operator semigroups, which is why the constructed functions are called Chernoff approximations. In most previously published papers, the error (i. e., the norm of the difference between the exact solution and the Chernoff approximation with number n) does not exceed $const/n$. Therefore, approximations, when using which the error decreases to zero faster than $const/n$, we call fast convergent. This is exactly what the approximations constructed in this work are, as follows from the recently proved Galkin-Remizov theorem. Key formulas, explicit forms of constructed approximations, and proof schemes are given in the paper. The results obtained in this paper point the way to the construction of fast converging Chernoff approximations for a wider class of equations.

Keywords: Cauchy problem for heat equation with variable coefficient of thermal conductivity, approximation of solution, rate of convergence to the solution, one-parameter semigroup of operators, Chernoff product formula

For citation: *A. V. Vedenin.* Fast converging Chernoff approximations to the solution of heat equation with variable coefficient of thermal conductivity. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 280–288. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.280-288

About the author:
Aleksandr V. Vedenin, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4035-7579, lcsndr@mail.ru

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкое применение в физике, химии, биологии или, например, в инженерии, конструировании материалов. Такие уравнения позволяют воспроизвести математическую модель той или иной системы, естественным образом возникающей в других науках. Таким образом, работы, посвященные решению дифференциальных уравнений в частных производных, становятся все более актуальными. Далеко не все уравнения можно решить аналитически. Подобная задача может быть поставлена таким образом, что становится необходимо применять численные методы. Конечно, многие такие инструменты для применения к дифференциальным уравнениям известны: на основе сетки, метода Галеркина, метода Монте-Карло, на основе итераций (см. [1–3]). Однако, наш метод принципиально новый. Он опирается на такие достижения функционального анализа, как теория C_0-полугрупп [4] и теорема Чернова [5]. Развитие методов, построенных на теореме Чернова, позволяет применять инструменты функционального анализа к приближенному решению дифференциальных уравнений (см., например, работы [6–9]).

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем задачу Коши для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. С одной стороны, этот пример уже достаточно сложный, чтобы он представлял интерес для численных методов. С другой стороны, относительная простота примера позволяет наглядно и эффективно продемонстрировать наши инструменты для построения решения. Для численных методов важен не только сам факт наличия аппроксимаций к решению и их явное выражение, но и скорость сходимости таких приближений. Мы строим решение в виде так называемых черновских аппроксимаций. Изучение скорости сходимости приближений, основанных на теореме Чернова, начато в работах [10–12]. Мы опираемся на серию работ, возникших изначально из гипотезы, предложенной И. Д. Ремизовым [13]. В работе [15] была сформулирована и доказана теорема Галкина-Ремизова. Именно её вместо оригинальной теоремы Чернова мы используем в нашей работе для того, чтобы найти оценку на скорость сходимости построенных нами черновских аппроксимаций к решению задачи Коши. Сначала введём несколько обозначений, позволяющих записать формулировки теорем более кратко.

Определение 2.1. *Обозначим символом $UC_b(\mathbb{R})$ линейное пространство всех ограниченных и равномерно непрерывных вещественнозначных функций на вещественной прямой. Символом $UC_b^k(\mathbb{R})$ обозначим его подможество, состоящее из всех k раз дифференцируемых функций, все производные которых до порядка k включительно ограничены и равномерно непрерывны. Символ $C_b^\infty(\mathbb{R})$ будем использовать для его подмножества, состоящего из всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых ограничены. Пространство $UC_b(\mathbb{R})$ рассматривается с его естественной нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Если $a \in UC_b(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, то для каждого $x \in \mathbb{R}$ зададим функцию $L\varphi$ равенством*

$$(L\varphi)(x) = a(x)\varphi''(x). \tag{2.1}$$

3. Быстро сходящиеся черновские аппроксимации

Первый результат настоящей статьи представлен в следующей теореме

Теорема 3.1. *Используем обозначения из определения 2.1 и предположим, что $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in UC_b(\mathbb{R})$, положим

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6a(x)t}\right) + \\ + a(x)a'(x)t\Big(3f\left(x + \sqrt[3]{t}\right) - 3f\left(x + 2\sqrt[3]{t}\right) + f\left(x + 3\sqrt[3]{t}\right)\Big) + \\ + \frac{1}{2}a(x)a''(x)t\Big(f\left(x + \sqrt{t}\right) + f\left(x - \sqrt{t}\right)\Big) - \Big(a'(x) + a''(x)\Big)a(x)tf(x), \quad (3.1)$$

тогда:

1) замыкание оператора L из равенства (2.1), заданного на области определения $D(L) = C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, существует и является генератором C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$;

2) для задачи Коши

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = a(x)u_{xx}''(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

существует решение $u(t,x)$, единственное в классе тех ограниченных функций, которые при каждом $t \geq 0$ равномерно непрерывны по $x \in \mathbb{R}$. Это решение даётся равенством $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$;

3. функция $u(t,x)$ представляется в виде предела сходящихся черновских аппроксимаций:

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \lim_{n\to\infty}\left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x),$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ получается из (3.1) заменой t на t/n, а $S\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{S\left(\frac{t}{n}\right)\dots S\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ это композиция n копий линейного ограниченного оператора $S\left(\frac{t}{n}\right)$. Черновскими аппроксимациями решения $u(t,x)$ являются функции $u_n(t,x) = \left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x)$;

4) для каждых $u_0 \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ существуют такие константы $K_{S1}, K_{S2}, \dots, K_{S6} > 0, w_S > 0$, что при каждом $t_S > 0$ скорость сходимости оценивается следующим образом:

$$\sup_{t\in[0,t_S]}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(t,x) - u(t,x)| \leq e^{w_S t_S}\frac{t_S^{7/3}}{n^{4/3}}\sum_{i=0}^{6}K_{Si}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_0^{(i)}(x)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем схему доказательства. Первый пункт теоремы 3.1 следует из общей теории параболических дифференциальных уравнений и того, что ограниченная функция a удовлетворяет условию $\inf_{x\in\mathbb{R}} a(x) > 0$. Второй пункт теоремы 3.1 следует из первого в силу представления решения дифференциального уравнения с помощью полугруппы (см.[4]).

Третий и четвёртый (а также первый) пункты теоремы 3.1 непосредственно следуют из утверждающей части теоремы 4.2 в [15], которая, в свою очередь, является следствием теоремы Галкина-Ремизова (т. е. теоремы 3.1 в [15], см. также [14]). Приведём ниже предполагающую часть теоремы теоремы 4.2 в [15], т. е. условия, которые надо проверить для оператрно-значной функции S, заданной формулой 3.1.

A1. $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

A2. Для каждых $T_S > 0, f \in UC_b(\mathbb{R})$, $t \in [0, T_S)$ верно, что $\|S(t)\| \leq e^{w_S t}$.

A3. Для каждых $f \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ существуют вещественные константы $w_S > 0, B_{S1}, B_{S2}, \ldots, B_{S6} > 0$, что выполняется следующее неравенство:

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{7/3} \sum_{j=0}^{6} B_{Sj} \|f^{(j)}\|.$$

Проверим выполнение условий A1, A2, A3. В самом деле, A1 непосредственно следует из условий теоремы 3.1.

A2 доказываем следующим образом. Имея в виду, что $\|S(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(S(t)f)(x)|$, и используя свойства супремума, приходим к оценке $\|S(t)f\| \leq (1 + w_S t)\|f\|$, где w_S – вещественная константа, которая зависит от $\|a\|, \|a'\|, \|a''\|$, но не зависит от t и f. В силу сказанного, с учётом определения нормы линейного оператора, приходим к оценке $\|S(t)\| \leq 1 + w_S t \leq e^{w_S t}$. Это завершает проверку условия A2.

Теперь докажем, что A3 тоже верно. Для этого при фиксированном $x \in \mathbb{R}$ разложим $(S(t)f)(x)$ по формуле Тейлора при $t \to 0$, используя разложения для каждого слагаемого в правой части равенства 3.1. Сперва разложим по формуле Тейлора функцию $\tau \mapsto f(x + \tau)$ при $\tau \to 0$ по степеням τ до τ^5 включительно, а остаточный член после пятой производной представим в форме Лагранжа. Это возможно, т. к. $f \in UC_b^6(\mathbb{R})$, следовательно, $f^{(6)} \in UC_b(\mathbb{R})$ согласно 2.1. Полагая теперь $\tau = \sqrt{6a(x)t}$ в первом слагаемом получаем разложение функции $t \mapsto f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right)$ по степеням t при фиксированном x. Поступая аналогично со всеми слагаемыми в правой части равенства 3.1, приводим подобные слагаемые, берём супремум по $x \in \mathbb{R}$ и приходим к оценке $\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^{7/3} \sum_{j=0}^{6} B_{Sj} \|f^{(j)}\|$. Проверка условия A3 завершена.

Доказательство завершено.

Как правило, скорость сходимости черновских аппроксимаций не превышает C/n, где C – вещественная константа, n – номер члена последовательности, что приближает решение. Однако некоторые специальные конструкции, благодаря которым построена формула в теореме 3.1, позволяют преодолеть это ограничение.

Также стоит отметить, что наша формула использует только оператор сдвига. Сам по себе такой прием в этой статье не является новым, однако он обладает рядом преимуществ. В частности, благодаря оператору сдвига мы можем строить модификацию нашего основного результата, что дополнительно улучшает скорость сходимости. Второй результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема 3.2. *Используем обозначения из определения 2.1 и предположим, что $a, a', a'' \in UC_b(\mathbb{R})$ и существует такое число $a_0 > 0$, что $a(x) > a_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Для каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $f \in UC_b(\mathbb{R})$, положим*

$$\begin{aligned}(G(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right) + \frac{1}{6}f\left(x - \sqrt{6a(x)t}\right) - \\ -a(x)a'(x)t\Big(\frac{7}{2}f\left(x + \sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - \sqrt[3]{t}\right) - \frac{7}{4}f\left(x + 2\sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2\sqrt[3]{t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x + 3\sqrt[3]{t}\right)\Big) + \\ + \frac{1}{2}a(x)a''(x)t\Big(f\left(x + \sqrt{t}\right) + f\left(x - \sqrt{t}\right)\Big) + \Big(\frac{5}{2}a'(x) - a''(x)\Big)a(x)tf(x). \quad (3.2)\end{aligned}$$

Тогда:

1. Замыкание оператора L из равенства (2.1), заданного на области определения $D(L) = C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset UC_b(\mathbb{R})$, существует и является генератором C_0-полугруппы $(e^{tL})_{t\geq 0}$ в $UC_b(\mathbb{R})$.

2. Для задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

существует решение $u(t,x)$, единственное в классе тех ограниченных функций, которые при каждом $t \geq 0$ равномерно непрерывны по $x \in \mathbb{R}$. Это решение даётся равенством $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$.

3. Функция $u(t,x)$ представляется в виде предела сходящихся черновских аппроксимаций:

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0 \right)(x),$$

где $G\left(\frac{t}{n}\right)$ получается из (3.2) заменой t на t/n, а $G\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{G\left(\frac{t}{n}\right)\ldots G\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ – композиция n копий линейного ограниченного оператора $G\left(\frac{t}{n}\right)$. Черновскими аппроксимациями решения $u(t,x)$ являются функции $u_n(t,x) = \left(G\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0 \right)(x)$.

4. Для каждых $u_0 \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $a \in UC_b^4(\mathbb{R})$ существуют такие константы $K_{G1}, K_{G2}, \ldots, K_{G6} > 0, w_G > 0$, что при каждом $t_G > 0$ скорость сходимости оценивается следующим образом:

$$\sup_{t\in[0,t_G]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(t,x) - u(t,x)| \leq e^{w_G t_G} \frac{t_G^3}{n^2} \sum_{i=0}^{6} K_{Gi} \|f^{(i)}\|.$$

Доказательство. Схема доказательства теоремы 3.2 повторяет схему доказательства теоремы 3.1 с той лишь разницей, что неравенство в условии A3 следующее: $\left\| G(t)f - \sum_{k=0}^2 \frac{t^k L^k f}{k!} \right\| \leq t^3 \sum_{j=0}^6 B_{Gj} \|f^{(j)}\|$. Проверяется оно аналогично.
Доказательство завершено.

4. Заключение

Итак, мы построили быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Более того, мы показали пример модификации основного результата, благодаря которой мы его улучшили. Таким образом, потенциально мы можем развивать наши методы для повышения скорости сходимости черновских аппроксимаций к решению более сложных и обобщенных уравнений.

Направление систематического изучения скорости сходимости черновских аппроксимаций является молодым. Мы надеемся, что развитие этой области может быть полезно для численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящий момент мы можем привести пример подобной работы, которая использует наши инструменты [16]. Несмотря на простоту задач, приводимых в качестве примера, наши методы активно развиваются и дают потенциальную возможность решать намного более сложные уравнения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101. Автор благодарит И. Д. Ремизова за постановку задачи и внимание к работе, а также О. Е. Галкина за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Evans G., Blackledge J., Yardley P. Numerical methods for partial differential equations. London: Springer, 2000. 304 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0377-6
2. Ruas. V. Numerical methods for partial differential equations: an introduction. Wiley, 2016. 376 p.
3. Numerical methods for PDEs: state of the art techniques / ed. by D. A. Di Pietro, A. Ern, L. Formaggia. Cham, Switzerland: Springer, 2018. 330 p.
4. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer, 2000. 589 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b97696
5. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 2, Issue 2. pp. 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7
6. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Cham: Springer, 2020. Vol. 325. pp. 19–46. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07309
7. Remizov I. D. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 60, Issue 7. DOI: https://doi.org/10.1063/1.5038102
8. Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation // J. Funct. Anal. 2016. Vol. 270, No. 12. pp. 4540–4557. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017
9. Gomilko A., Kosowicz S., Tomilov Yu. A general approach to approximation theory of operator semigroups // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2019. Vol. 127. pp. 216–267. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.08.008
10. Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh., Smolyanov O. G. Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian // Theoretical and Mathematical Physics 2012. Vol. 172. pp.987–1000. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-012-0090-x
11. Gomilko A., Tomilov Yu. On convergence rates in approximation theory for operator semigroups // Journal of Functional Analysis 2014. Vol. 266, No. 5. pp. 3040-3082. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.012

12. Remizov I. D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff's product formula // International Conference 'ShilnikovWorkshop-2018' dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934–2011), book of abstracts. 2018. pp. 38–41.

13. Vedenin A. V., Voevodkin V. S., Galkin V. D., Karatetskaya E. Yu., Remizov I. D. Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations // Mathematical Notes. 2020. Vol. 108, No. 3. pp. 451–456. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434620090151

14. Galkin O. E., Remizov I. D. Rate of convergence of Chernoff approximations to C_0-semigroups of operators // Mathematical Notes. 2022. Vol. 111, No. 2. pp. 305–307. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622010345

15. Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators. 2022. 33 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249

16. Prudnikov P. S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation. 2012. 27 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615

Поступила 10.06.2022; доработана после рецензирования 11.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. *Numerical methods for partial differential equations*, ed. . by G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley, Springer, 2000 DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0377-6, 304 p.

2. V. Ruas., *Numerical methods for partial differential equations: an introduction*, Wiley, 2016., 376 p.

3. *Numerical methods for PDEs: state of the art techniques*, ed. by D. A. Di Pietro, A. Ern, L. Formaggia, Springer, Cham, Switzerland, 2018, 330 p.

4. K.-J. Engel, R. Nagel., *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, New York, 2000 DOI: https://doi.org/10.1007/b97696, 589 p.

5. P. R. Chernoff, "Note on product formulas for operator semigroups", *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

6. Ya. A. Butko, "The method of Chernoff approximation", *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19-46. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07309

7. I. D. Remizov, "Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients", *Journal of Mathematical Physics*, **60**:7 (2019). DOI: https://doi.org/10.1063/1.5038102

8. I. D. Remizov, “Quasi-Feynman formulas a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”, *J. Funct. Anal*, **270**:12 (2016), 4540-4557. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017

9. A.Gomilko, S.Kosowicz, Yu.Tomilov, “A general approach to approximation theory of operator semigroups”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **127** (2019), 216–267. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.08.008

10. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **172** (2012), 987–1000. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-012-0090-x

11. A. Gomilko, Yu. Tomilov, “On convergence rates in approximation theory for operator semigroups”, *Journal of Functional Analysis*, **266**:5 (2014), 3040–3082. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.012

12. I. D. Remizov, “On estimation of error in approximations provided by chernoff’s product formula”, *International Conference ’ShilnikovWorkshop-2018’ dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011), book of abstracts*, 2018, 38–41.

13. A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, I. D. Remizov, “Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations”, *Mathematical Notes*, **108**:3 (2020), 451–456. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434620090151

14. O. E. Galkin, I. D. Remizov., “Rate of convergence of Chernoff approximations to C_0-semigroups of operators”, *Mathematical Notes*, **111**:2 (2022), 305–307. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434622010345

15. O. E. Galkin, I. D. Remizov., “Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators”, 2022, 33 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249

16. P. S. Prudnikov, “Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation”, 2012, 27 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.09615

Submitted 10.06.2022; Revised 11.08.2022; Accepted 24.08.2022

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.289-296
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.926

Резонанс в ограниченных нелинейных системах маятникового типа

Е. Н. Пелиновский[1,2], И. Е. Мельников[1,2]

[1]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*
[2] *Институт прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Решение нелинейных дифференциальных уравнений с внешними силами имеет важное значение для понимания резонансных явлений в физике колебаний. В статье эта проблема анализируется на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка маятникового типа, когда нелинейность описывается синусоидальным слагаемым. Построена фазовая плоскость такого осциллятора и изучены ее периодические траектории. Показано, что ограниченная нелинейность играет роль только на промежуточных амплитудах. Возбуждение нелинейного осциллятора осуществляется с помощью ограниченной двухкомпонентной силы; одна из ее компонент соответствует колебанию на резонансной частоте линейного осциллятора, а вторая представляет собой ограниченную функцию с переменной частотой. Показывается, что при соответствующем выборе внешней силы можно получить неограниченное усиление колебаний в осцилляторе маятникового типа с амплитудой, линейно пропорциональной времени. Спектральный состав внешней силы исследуется с помощью оконного преобразования Фурье. Демонстрируется, что для поддержания резонансного режима частота внешней силы должна непрерывно расти. Выполнены энергетические оценки внешней силы и колебаний осциллятора в зависимости от времени. Рассмотренный пример важен для понимания резонансных условий в нелинейных задачах.

Ключевые слова: нелинейный резонанс, осциллятор, оконное преобразование Фурье, математический маятник, спектрограмма

Для цитирования: Пелиновский Е. Н., Мельников И. Е. Резонанс в ограниченных нелинейных системах маятникова типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 289–296. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.289-296

Об авторах:

Пелиновский Ефим Наумович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), главный научный сотрудник, ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН» (603950, Россия, Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5092-0302, pelinovsky@appl.sci-nnov.ru

Мельников Иоанн Евгеньевич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4560-9648, melnicovioann@gmail.com

Original article

MSC2020 34A34

Resonance in bounded nonlinear pendulum-type systems

E. N. Pelinovsky[1,2], I. E. Melnikov[1,2]

[1]*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*
[2]*Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. Solving nonlinear differential equations with external forces is important for understanding resonant phenomena in the physics of oscillations. The article analyzes this problem basing on example of an ordinary second-order differential equation of the pendulum type, where the nonlinearity is described by a sinusoidal term. The phase plane of such an oscillator is constructed and its periodic trajectories are studied. It is illustrated that bounded nonlinearity matters only at intermediate amplitudes. The excitation of a nonlinear oscillator is carried out using a limited two–component force; the first its component corresponds to an oscillation at the resonant frequency of a linear oscillator, and the second is a limited function with a variable frequency. It is shown that with the appropriate choice of an external force, it is possible to obtain unlimited amplification of oscillations in a pendulum-type oscillator with amplitude linearly proportional to time. Spectral composition of the external force is investigated using short-time Fourier transform. It is demonstrated that in order to maintain the resonant mode, the frequency of the external force must continuously increase. Energy estimates of the external force and oscillator fluctuations depending on time are performed. The considered example is important for understanding resonant conditions in nonlinear problems.

Keywords: Nonlinear resonance, oscillator, short-time Fourier transform, mathematical pendulum, spectrogram

For citation: *E. N. Pelinovsky, I. E. Melnikov.* Resonance in bounded nonlinear pendulum-type systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 289–296. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.289-296

About the authors:
Efim N. Pelinovsky, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Chief Researcher, Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (46 Ulyanova St., Nizhny Novgorod 603950), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5092-0302 , pelinovsky@appl.sci-nnov.ru
Ioann E. Melnikov, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0003-4560-9648, melnicovioann@gmail.com

1. Введение

Резонанс в линейном осцилляторе является хорошо изученным явлением. Так, например, чтобы возбудить линейный математический маятник необходимо воздействовать на него гармонической внешней силой той же частоты, что и его собственная частота колебаний [1]. Однако в случае нелинейных систем такой способ уже не работает.

С проблемой нелинейного резонанса столкнулись в середине прошлого века при попытке разгона заряженых частиц в циклотроне. Линейная математическая модель, которая описывает движение частиц в циклотроне [2], не учитывает, что при достаточно больших скоростях из-за релятивистских эффектов происходит изменение их периода обращения, и гармоническое изменение напряжения на дуантах, которое генерирует электрическое поле (благодаря чему возникает резонанс), уже не приносит должного эффекта.

Нелинейные резонансы также возникают во многих других физических системах [3–5]. Эта проблема встречается для всех нелинейных систем, частота собственных колебаний которых зависит от амплитуды колебаний. Данную проблему можно решить, непрерывно изменяя частоту внешней силы и делая ее все время резонансной [6]. Такой подход помог справиться с получением нелинейного резонанса в циклотроне [7]. Один из таких примеров рассмотрен в работе [8] на примере вынужденных колебаний математического маятника

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \sin u = \varepsilon \cos\varphi(t).$$

Важно подчеркнуть, что, меняя частоту внешней силы по линейному закону, как это предложено в работе [8], невозможно достичь значительного усиления, потому что частота нелинейного осциллятора сложным образом зависит от амплитуды, и колебания становятся несинусоидальными. Целью данной работы является исследование резонанса в нелинейных системах маятникового типа, когда ограниченной несинусоидальной силой можно возбудить синусоидальное колебание с растущей амплитудой.

2. Нелинейный осциллятор маятникового типа

Резонанс в линейной колебательной системе математического маятника без затухания [9] описывается уравнением (2.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = P\cos(\omega_0 t), \tag{2.1}$$

где ω_0 – частота его колебаний. В уравнении (2.1) удобно перейти к безразмерным величинам, а именно положить $u = \dfrac{x}{P}$ и $\tau = \omega_0 t$, тогда уравнение (2.1) запишем в виде:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + u = \cos\tau.$$

Рассмотрим здесь осциллятор с ограниченной нелинейностью маятникового типа, движения которого описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + Q\sin^2 Du = 0, \tag{2.2}$$

где $Q \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Для простоты Q и D будем считать положительными. Нелинейность $F(u) = Q\sin^2 Du$, которая отличает уравнение (2.2) от уравнения математического маятника, является ограниченной и малой в малой окрестности колебаний, т. е. $F(0) = 0$ и $F(u) \to \mu u^2$ при $u \to 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (параметры Q, D и μ

связаны соотношением $\mu = QD^2$). Данные условия позволяют при малых амплитудах колебаний, воздействуя на систему косинусоидальной внешней силой на единичной частоте, получить линейный резонанс, поскольку при этом нелинейный член будет $o(u)$.

Исследуем собственную динамику данной системы. Состояния равновесия находятся из уравнения

$$u + Q\sin^2 Du = 0. \tag{2.3}$$

Один из корней этого уравнения легко находится: $u = 0$, и он соответствует центру. Остальные состояния равновесия определяются из трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{QD} = \frac{-sin^2 v}{v},$$

где $v = Du$. Отсюда видно, что все остальные корни отрицательны, и они существуют только при $QD > 1,379$. В области $1,379 < QD < 4,651$ появляются два корня (больший по модулю – центр, а меньший – седло). При еще больших значениях параметра QD происходит рождение еще двух корней и т. д. Эти бифуркации видны на серии фазовых портретов, представленных на Рис. 2.1.

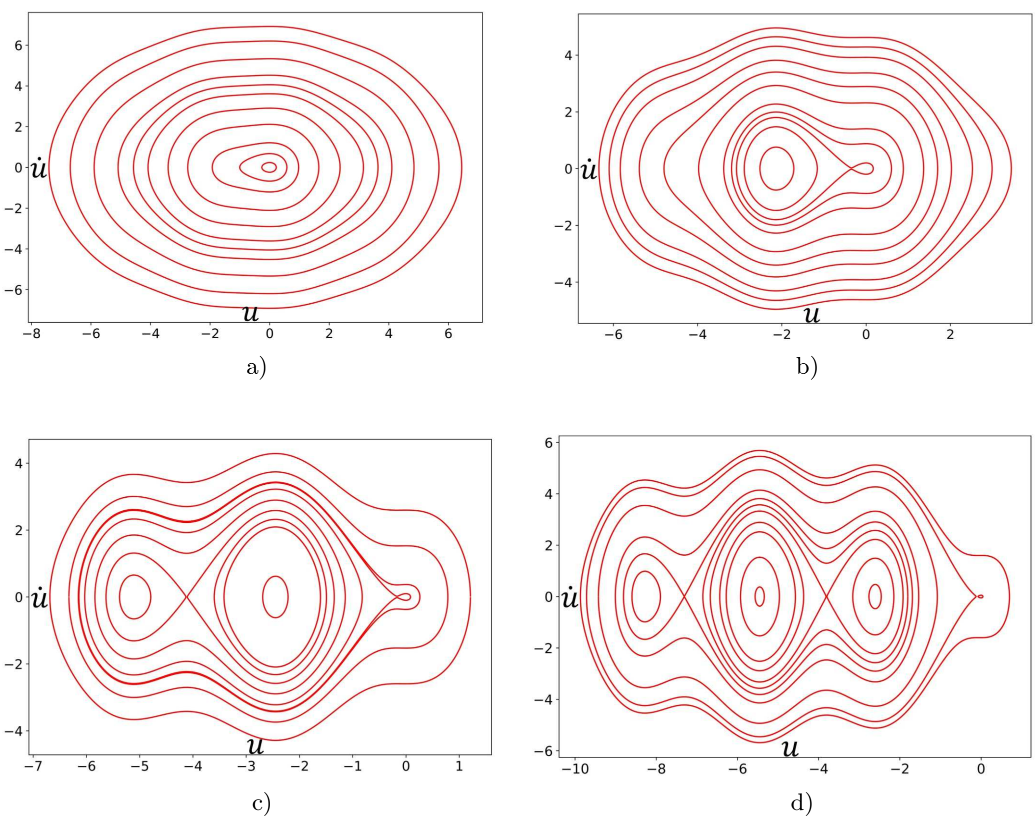

Рис. 2.1. Фазовая плоскость уравнения (2.2) со следующими параметрами: a) $Q = 1$, $D = 1$; b) $Q = 3$, $D = 1$; c) $Q = 6$, $D = 1$; d) $Q = 10$, $D = 1$

Fig 2.1. Phase plane of equation (2.2) with the following parameters: a) $Q = 1$, $D = 1$; b) $Q = 3$, $D = 1$; c) $Q = 6$, $D = 1$; d) $Q = 10$, $D = 1$

Ограниченная нелинейность играет роль только на промежуточных амплитудах, поскольку при больших амплитудах мы видим искривленные эллипсы со смещенным центром. Следует отметить, что периодическое движение возможно в сущности при любой амплитуде, хотя при небольших амплитудах возможно движение и по сепаратрисе.

3. Резонанс в нелинейном осцилляторе маятникового типа

Предположим, что в системе, описываемой уравнение (2.2), возможно получение резонанса как и в линейном случае, то есть получение решения

$$u(t) = t \sin t \tag{3.1}$$

благодаря воздействию некоторой внешней силы $2cost + f(t)$. Для того чтобы найти внешнюю силу, которая возбуждает резонанс, подставим (3.1) в следующее уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + Q\sin^2 Du = 2\cos t + f(t). \tag{3.2}$$

Получим выражение для $f(t)$:

$$f(t) = Q\sin^2(Dt\sin t). \tag{3.3}$$

Исследуем, как будет изменяться спектр внешней силы $f(t)$ вида (3.3) с течением времени для этого воспользуемся оконным преобразование Фурье [10]

$$x(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

где $w(t-\tau)$ – некоторая оконная функция; τ – период времени.

При дальнейшем анализе будем использовать оконную функцию Ханна [11]

$$w(n) = 0.5\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right), \tag{3.4}$$

где $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$; N – ширина окна.

Для построения спектрограмм использовался пакет MatLab. Частота дискретизации бралась равным 100 отсчётом за одну безразмерную секунду, а ширина окна – 32 отсчетам, т. е. 0.32 безразмерные секунды, области перекрывания 30 отсчётов. Соответственно, в процессе вычисления оконного преобразования Фурье на каждом шаге окно будет сдвигаться на 2 отсчёта. Полученные спектрограммы приведены на рис. 3.1 *a–b*.

Поскольку преобразование Фурье является линейным, то параметр Q определяет только амплитуду спектра, так что без ограничения общности его можно положить равным единице. Как видно из Рис. 3.1 *a–b*, более важным оказывается параметр D, определяющий ширину спектра сигнала.

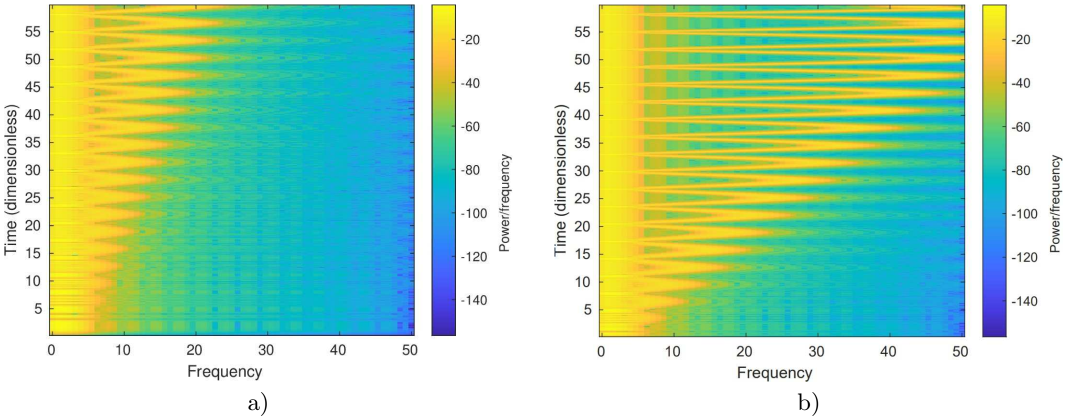

Рис. 3.1. Спектрограмма функции $f(t)$: a) $Q = D = 1$; b) $Q = 1$, $D = 3$
Fig 3.1. Spectrogram of the function $f(t)$: a) $Q = D = 1$; b) $Q = 1$, $D = 3$

Проанализировав спектрограммы, мы можем сделать вывод, что для того, чтобы нелинейная система находилась в состоянии резонанса, внешняя сила должна становиться все более и более высокочастотной.

Определим, какое количество энергии сообщает системе (3.2) сила $f(t)$ за время T. Энергию, добавляемую осциллятору силой $f(t)$, будем вычислять по формуле

$$E(T) = \int_0^T f^2(t)dt = \int_0^T Q^2 \sin^4(Dt \sin t)dt.$$

График энергии $E(T)$ приведен на Рис. 3.2.

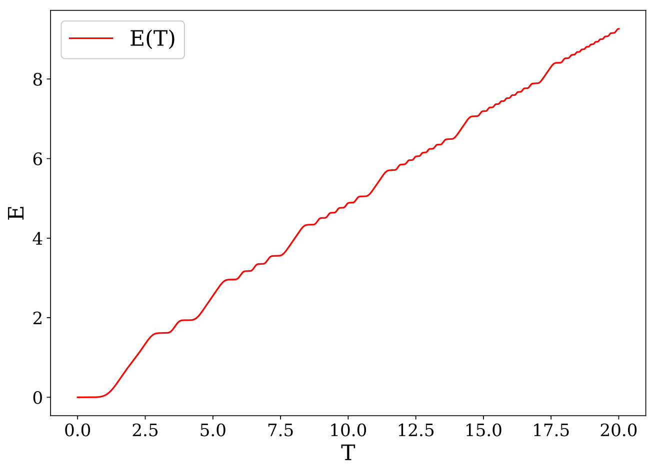

Рис. 3.2. График энергии $E(T)$, получаемая осциллятором с учетом силы $f(t)$, при значении параметров: $Q = D = 1$
Fig 3.2. The graph of the energy $E(T)$ obtained by the oscillator taking into account the force $f(t)$, with the value of the parameters: $Q = D = 1$

Из графика, изображенного на Рис. 3.2, видно, что количество энергии, которую необходимо сообщить системе, будет приблизительно прямо пропорционально времени нахождения системы в резонансе.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101 (разд. 2) и гранта РНФ 19-12-00253 (разд. 3).

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие. — В 10 т. Т. I. Механика. — 4-е изд., испр. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 216 с.
2. Ратнер Б. С. Ускорители заряженных частиц. М.: Физматгиз, 1960. 115 с.
3. Kartashova E. Nonlinear resonances of water waves : arXiv preprint. 2009. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.0050
4. Kovriguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave nonlinear couplings in elastic structures // Mathematical Problems in Engineering. 2006. DOI: https://doi.org/10.1155/MPE/2006/76041
5. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // American Journal of Physics. 2001. Vol. 69, No. 10. C. 1096–1102. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1389278
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981. 918 с.
7. Векслер В. И. Новый метод ускорения релятивистских частиц // Успехи физических наук. 1967. № 11. С. 521–523.
8. Friedland L. Autoresonance in nonlinear systems // Scholarpedia. 2009. DOI: https://doi.org/10.4249/scholarpedia.5473
9. Трубецков Д. И., Рожнев Д. И. Линейные колебания и волны : учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
10. Юдин М. Н., Фарков Ю. А., Филатов Д. М. Введение в вейвлет-анализ. М.: Изд-во Мос. геологоразвед. академии, 2001. 72 с.
11. Heinzel G., Rüdiger A., Schilling R. Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows. 2002.

Поступила 20.07.2022; доработана после рецензирования 15.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics, Third Edition: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*, Butterworth-Heinemann, 1976, 200 p.
2. B. S. Ratner, *[Charged particle accelerators]*, Fizmatgiz Publ., Moscow, 1960 (In Russ.), 115 p.
3. E. Kartashova, "Nonlinear resonances of water waves", 2009. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0905.0050
4. D. A. Kovriguine, G. A. Maugin, A. I. Potapov, "Multiwave nonlinear couplings in elastic structures", *Mathematical Problems in Engineering*, 2006. DOI: https://doi.org/10.1155/MPE/2006/76041
5. J. Fajans, L. Friedland, "Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators", *American Journal of Physics*, **69**:10 (2001), 1096–1102. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1389278
6. A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Khaykin, *Theory of Oscillators*, Cambridge University Press, 1966, 815 p.
7. V. I. Wexler, "[A new method for accelerating]", *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **93**:11 (1967), 521–523 (In Russ.).
8. L. Friedland, "Autoresonance in nonlinear systems", 2009. DOI: https://doi.org/10.4249/scholarpedia.5473
9. D. I. Trubetskov, D. I. Rozhnev, *[Linear oscillations and waves]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 416 p.
10. M. N. Yudin, Yu. A. Farkov, D. M. Filatov, *[Introduction to wavelet analysis]*, Moscow Geological Exploration Academy Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 72 p.
11. Heinzel G., Rüdiger A., Schilling R., "Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows", 2002.

Submitted 20.07.2022; Revised 15.08.2022; Accepted 24.08.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.297-303 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

L_p-аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений на многообразиях

А. С. Смирнова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Приводится формула, выражающая сколь угодно точные (в L_p-норме) аппроксимации к решению задачи Коши через параметры – коэффициенты уравнения и начальное условие. При этом многообразие не предполагается компактным, что создаёт значительные технические трудности. Например, интегралы по многообразию становятся несобственными в случае, когда многообразие имеет бесконечный объём. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

Ключевые слова: параболическое уравнение на многообразии, задача Коши, представление решений, аппроксимация решений, многообразие ограниченной геометрии, полугруппа операторов

Для цитирования: Смирнова А. С. L_p-аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений на многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 297–303. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.297-303

Об авторе:

Смирнова Анна Сергеевна, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4172-2811, smirnovaas@hse.ru

Original article

MSC2020 58J35, 47D06, 65M12, 35K15, 35C20, 58D25

L_p-approximations for solutions of parabolic differential equations on manifolds

A. S. Smirnova

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The paper considers the Cauchy problem for a parabolic partial differential equation in a Riemannian manifold of bounded geometry. A formula is given that expresses arbitrarily accurate (in the L_p-norm) approximations to the solution of the Cauchy problem in terms of parameters - the coefficients of the equation and the initial condition. The manifold is not assumed to be compact, which creates significant technical difficulties – for example, integrals over the manifold become improper in the case when the manifold has an infinite volume. The presented approximation method is based on Chernoff theorem on approximation of operator semigroups.

Keywords: parabolic equation on manifold, Cauchy problem, representation of solutions, approximation of solutions, manifold of bounded geometry, semigroup of operators

For citation: *A. S. Smirnova.* L_p-approximations for solutions of parabolic differential equations on manifolds. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 297–303. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.297-303

About the author:
Anna S. Smirnova, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4172-2811, smirnovaas@hse.ru

1. Введение

Дифференциальные уравнения на многообразиях находят все больше приложений в современной науке и технике, как в прикладных аспектах, так и в теоретических. Например, в термодинамике (жидкие кристаллы [1]) и механике (гранулярный поток [2]), биофизике (биомембраны [3]) и компьютерной графике (визуализация мозга [4], восстановление поврежденных структур [5]) и других прикладных науках требуется найти решение уравнения в частных производных на многообразии или на поверхности. Уравнения на многообразиях естественным образом возникают в современной математической физике, см., например, [6] и ссылки в данной работе. Именно поэтому теоретические работы, посвященные численному и аналитическому решению уравнений в частных производных на многообразиях, привлекают все больше внимания [7–8].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения (типа диффузии) второго порядка в римановом многообразии M ограниченной геометрии, допуская в т. ч. и то, что многообразие может не быть компактным. Условие ограниченной геометрии многообразия необходимо для того, чтобы гарантировать полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. Это свойство важно для техники сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля, которую мы используем: векторные поля являются коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $[0, +\infty)$ — вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t, x)$, которые сходятся к решению $u(t, x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Этот результат можно рассматривать как следующий логический шаг после статьи [9], где такого рода формулы были опубликованы впервые, но в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. В настоящей работе область применимости формул расширяется на пространство L_p: решения принадлежат $L_p(M)$, а аппроксимации сходятся в $L_p(M)$. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова [10–11].

Определение 1.1. *Символом $\gamma_{x,A_j}\colon [0, +\infty) \to M$ обозначим интегральную кривую векторного поля A_j, берущую начало при времени 0 в точке $x \in M$ и являющуюся решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)), \\ \gamma_{x,A_j}(0) = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Постановка задачи

Пусть (M, g) — риманово многообразие ограниченной геометрии размерности d. Предположим, что дано число $r = 1, 2, 3, \ldots$ и заданы $r+1$ гладких и C^2-ограниченных векторных полей A_j на M, где $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Также задано ограниченное измеримое скалярное поле $c\colon M \to \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу Коши для эволюционного уравнения относительно неизвестной функции $u\colon [0, +\infty) \times M \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

где L — дифференциальный оператор второго порядка, значение Lf которого на каждой гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ задаётся следующим образом:

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(A_jA_jf)(x) + A_0f(x) + c(x)f(x), \quad x \in M. \tag{2.2}$$

Приведем формулу, выражающую решение задачи (2.1) через параметры A_0, $A_1, \ldots, A_r$, c, u_0, причём в эту формулу будут входить интегральные кривые векторных полей A_j. Поэтому разумно предположить, что эти интегральные кривые также известны, в противном случае нам нужно найти их, решив задачу (1.1) каким-либо способом.

3. Построение аппроксимаций к решению параболического уравнения на многообразии

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Пусть функция* $c\colon M \to \mathbb{R}$ *измерима и ограничена. Пусть даны числа* $p \in [1, +\infty)$ *и* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *Пусть также заданы* $r + 1$ *гладких и* C^2*-ограниченных векторных полей* A_j *на* M, $j = 0, 1, \ldots, r$, *и для всех* j *выполняется* $divA_j(\alpha_s^*(x)) = 0$. *По определению для всех* $f \in L_p(M)$, $x \in M$ *и* $t \geq 0$ *положим*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}f(\gamma_{x,A_0}(2t)) + tc(x)f(x), \quad (3.1)$$

где $\gamma_{x,A_j}\colon [0, +\infty) \to M$ *это интегральная кривая (определенная в (1.1)) векторного поля* A_j, *берущая начало при времени, равном* 0 *в точке* $x \in M$. *Также предполагаем, что оператор* L *является генератором* C_0*-полугруппы* $(e^{tL})_{t\geq 0}$ *в пространстве* $L_p(M)$ *с его естественной нормой* $\|f\| = \left(\int\limits_M |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Тогда:

1) решение задачи Коши (2.1) с оператором L, *заданным в (2.2), существует и даётся равенством* $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$;

2) решение при всех $t \geq 0$ *и почти всех* $x \in M$ *представимо в виде*

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x),$$

где предел существует в $L_p(M)$, *а* $u_n(t,x)$ – *черновские аппроксимации, задаваемые следующим образом:*

$$u_n(t,x) = \left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x),$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ *получается из (3.1) заменой* t *на* t/n, *а* $S\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{S\left(\frac{t}{n}\right)\ldots S\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ – *композиция* n *копий линейного ограниченного оператора* $S\left(\frac{t}{n}\right)$.

3. Сходимость в $L_p(M)$ *локально равномерная по* t, *т.е. для каждого* $T > 0$ *верно, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int_M |u_n(t,x) - u(t,x)|^p dx = 0.$$

Схема доказательства. Пункт 1 теоремы и равенство $u(t,x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x)$ следуют из общей теории линейных эволюционных уравнений и сделанного предположения о том, что оператор L является генератором полугруппы.

Чтобы доказать пункт 2, для всех $x \in M$, $t \geq 0$, $f \in L_p(M)$ обозначим

$$\begin{aligned}
(P_j(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right), \\
(Q_j(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right), \\
(W(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,A_0}(2t)\right), \\
(R(t)f)(x) &= tc(x)f(x).
\end{aligned}$$

Тогда мы можем переписать $S(t)$ следующим образом:

$$S(t) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}(P_j(t) + Q_j(t)) + \frac{1}{2}W(t) + R(t). \tag{3.2}$$

Оценивая по отдельности нормы операторов $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$, с учётом (3.2) получаем, что $\|S(t)\| \le 1 + t\sup_{x\in M}|c(x)|$ при всех $t \ge 0$. Непрерывность операторов $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$ по t в сильной операторной топологии проверяется с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, что в силу (3.2) даёт непрерывность $S(t)$ в том же смысле. Раскладывая $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$ по формуле Тейлора при $t \to 0$, с учётом (3.2) получаем, что $S(t) = I + tL + o(t)$ на плотном в $L_p(M)$ подпространстве бесконечногладких функций с компактным носителем. Следовательно, все условия теоремы Чернова об аппроксимации операторных полугрупп выполнены, в силу чего $e^{tL} = \lim_{n\to\infty} S(t/n)^n$ в сильной операторной топологии. Следовательно, $u(t,x) = (\lim_{n\to\infty} S(t/n)^n u_0)(x)$.

Пункт 3 также напрямую следует из теоремы Чернова. Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, используя средства дифференциальной геометрии и теории C_0-полугрупп (в т. ч. теорему Чернова), мы нашли решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка на многообразии, не предполагая, что многообразие компактно, но при условии, что оно имеет ограниченную геометрию. Использовалась функция Чернова, предложенная в [9], поэтому найденные аппроксимации Чернова совпадают с приведенными в [9]. Однако решения, их приближения и сходимость в [9] рассматривались в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности (с равномерной нормой). Между тем выше мы доказали, что такая же ситуация имеет место, если решения, их приближения и сходимость рассматриваются в L_p. Это позволяет рассматривать решения в более широком смысле (например, начальное условие и решение могут быть разрывными). Также мы разработали несколько лемм, которые могут быть полезны при изучении подобных уравнений в пространстве $L_p(M)$ на некомпактных многообразиях M. Эти леммы будут опубликованы в более подробной работе позже.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101. Автор благодарит И. Д. Ремизова за постановку задачи и внимание к работе, и Е. И. Яковлева за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Virga E. G. Variational theories for liquid crystals. CRC Press. 2018.
2. Rauter M., Tuković Ž. A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces // Computers and Fluids. 2018. Vol. 166. pp. 184–199. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05229

3. Elliott C. M., Stinner B. Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements // Journal of Computational Physics. 2010. Vol. 229, No. 18. pp. 6585–6612. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.014

4. Mémoli F., Sapiro G., Thompson P. Implicit brain imaging // NeuroImage. 2004. Vol. 23. pp. S179–S188. DOI: https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.07.072

5. Macdonald C. B., Ruuth S. J. The implicit closest point method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM Journal on Scientific Computing. 2010. Vol. 31, No. 6.pp. 4330–4350. DOI: https://doi.org/10.1137/080740003

6. Volkov B. O. Levy Laplacians and instantons on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2020. Vol. 23, No. 2. 17 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.11215

7. Zhang QI. S. Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds // Duke Mathematical Journal. 1999. Vol. 97, No. 3. pp. 515–539. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09719-3

8. Yan Q., Jiang S. W., Harlim J. Kernel-based methods for solving time-dependent advection-diffusion equations on manifolds. 2021. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.13835

9. Mazzucchi S., Moretti V., Remizov I., Smolyanov O. Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds. 2020. 36 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.06606

10. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 2, No. 2. pp. 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

11. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 325. pp. 19–46.

Поступила 01.07.2022; доработана после рецензирования 10.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. E. G. Virga, *Variational theories for liquid crystals*, CRC Press, 2018.

2. M. Rauter, Ž. Tuković, “A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces”, *Computers and Fluids*, **166** (2018), 184–199. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05229

3. C. M. Elliott, B. Stinner, “Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements”, *Journal of Computational Physics*, **229**:18 (2010), 6585–6612. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.014

4. F. Mémoli, G. Sapiro, P. Thompson, “Implicit brain imaging”, *NeuroImage*, **23** (2004), S179–S188. DOI: https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.07.072

5. C. B. Macdonald, S. J. Ruuth, “The implicit closest point method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**:6 (2010), 4330–4350. DOI: https://doi.org/10.1137/080740003

6. B. O. Volkov, “Levy Laplacians and instantons on manifolds”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **23:**:2 (2020), 17 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.11215

7. QI S. Zhang, “Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, **97**:3 (1999), 515–539. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09719-3

8. Q. Yan, S. W. Jiang, J. Harlim, “Kernel-based methods for solving time-dependent advection-diffusion equations on manifolds”, 2021. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.13835

9. S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov, “Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds”, 2020, 36 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.06606

10. P. R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups”, *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

11. Ya. A. Butko, “The method of Chernoff approximation”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19–46.

Submitted 01.07.2022; Revised 10.08.2022; Accepted 24.08.2022

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declares no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.304-316 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.62

Численное решение сингулярно возмущенной краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу

Е. Д. Цапко

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. При решении задач аэродинамики исследователи часто сталкиваются с необходимостью численного интегрирования краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения. В некоторых случаях задачу удается свести к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Тогда можно применить различные численные методы, такие как метод сеток, ряд проекционных методов, которые, в свою очередь, могут формировать основу метода конечных элементов, а также метод стрельбы. При использовании метода сеток необходимо решать систему алгебраических уравнений, зачастую, нелинейную, что приводит к возрастанию времени счета задачи, а также к сложностям сходимости приближенного решения. При решении жестких задач Коши, как правило, применяют неявные схемы, однако в этом случае возникают те же самые сложности, что и для метода сеток. Преобразование рассматриваемой задачи к наилучшему аргументу λ, отсчитываемому по касательной вдоль интегральной кривой, позволяет повысить эффективность явных численных методов. Однако в случаях, когда скорость роста интегральных кривых близка к экспоненциальной, перехода к наилучшему аргументу оказывается недостаточно. Тогда наилучший аргумент модифицируется таким образом, чтобы сгладить данный недостаток. В данной работе исследуется применение модифицированного наилучшего аргумента к решению краевой задачи о движении аэродинамического потока при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью в канал переменного сечения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, метод продолжения решения, наилучший аргумент, модифицированный наилучший аргумент, сверхзвуковое течение

Для цитирования: Цапко Е. Д. Численное решение краевой задачи сверхзвукового течения, преобразованной к модифицированному наилучшему аргументу // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 304–316. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.304-316

Об авторе:

Цапко Екатерина Дмитриевна, аспирант кафедры № 802 «Мехатроника и теоретическая механика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4215-3510, zapkokaty@gmail.com

Original article

MSC2020 65L11

Numerical solution of a singularly perturbed boundary value problem of supersonic flow transformed to the modified best argument

E. D. Tsapko

Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russian Federation)

Abstract. When solving problems of aerodynamics, researchers often need to numerically solve singularly perturbed boundary value problems. In some cases, the problem can be reduced to solving a boundary value problem for an ordinary differential equation. Then it is possible to apply various numerical methods such as the grid method, the shooting method, as well as a number of projection methods, which, in turn, can form the basis of the finite element method. The grid method requires solving a system of algebraic equations, that are often nonlinear, which leads to an increase in the calculation time and to the difficulties in convergence of the approximate solution. According to the shooting method, the solution of boundary value problem is reduced to solving a certain set of Cauchy problems. When solving stiff Cauchy problems, implicit schemes are used as a rule, but in this case the same difficulties arise as for the grid method. The transformation of the problem to the best argument λ, calculated tangentially along the integral curve, makes it possible to increase the efficiency of explicit numerical methods. However, in cases where the growth rate of integral curves is close to exponential, the transformation to the best argument is not efficient enough. Then the best argument is modified in such a way as to smooth out this flaw. This paper investigates the application of modified best argument to the solution of the boundary value problem of an aerodynamic flow movement in case when the gas is injected at supersonic speed into a channel of variable cross-section.

Keywords: singularly perturbed problem, ordinary differential equation, boundary value problem, method of solution continuation, best argument, modified best argument, supersonic flow

For citation: *E. D. Tsapko.* Numerical solution of a singularly perturbed boundary value problem of supersonic flow transformed to the modified best argument. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 304–316. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.304-316

About the author:

Ekaterina D. Tsapko, Postgraduate Student, Department of Mechatronics and Theoretical mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe Av., Moscow 125993, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4215-3510, zapkokaty@gmail.com

1. Введение

В теории жестких уравнений отдельно выделяют класс уравнений с малым параметром при старшей производной. Впервые они были рассмотрены в работах А. Н. Тихонова [1–3] и получили название сингулярно возмущенных уравнений. В работах Тихонова было дано определение области влияния решения вырожденного уравнения и вырожденной системы, а также доказаны первые общие утверждения о близости решения вырожденного уравнения или системы уравнений к решению исходной задачи. Полученные Тихоновым результаты были развиты в работах его ученицы А. Б. Васильевой. Совместно с В. Ф. Бутузовым и другими ее учениками и коллегами [4–7] были получены фундаментальные результаты по представлению решений сингулярно возмущенных задач асимптотическими рядами специальных видов. В конце 80-х – начале 90-х гг. XX в., помимо задач с пограничными слоями, в работах А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова рассмотрены задачи с контрастными структурами (внутренними слоями) [8–9]. Стоит также отметить вклад в теорию сингулярных возмущений С. А. Ломова и И. С. Ломова, в монографии которых дана математическая теория пограничного слоя для линейных дифференциальных уравнений в одномерном и многомерном случаях для операторов с различными свойствами [10]. В монографии С. А. Ломова [11] также рассмотрены некоторые классы нелинейных уравнений.

В зависимости от задачи определяющие уравнения могут быть нелинейными или квазилинейными, поэтому получить точное аналитическое решение затруднительно. К численным методам краевых задач относят конечно-разностные методы (методы сеток), метод конечных элементов и его модификации, проекционные методы, метод стрельбы и многие другие. Преимуществом метода сеток и метода конечных разностей является их универсальность: во многие программные среды уже включены готовые библиотеки, реализующие данные методы. Однако при решении жестких задач применение этих подходов требует огромных вычислительных мощностей. Метод стрельбы, в свою очередь, сводит решение краевой задачи к решению ряда начальных задач, что влечет за собой трудности численного решения жестких задач Коши, а именно для решения жестких начальных задач зачастую используют неявные методы. Это связано с тем, что, в отличие от явных, они позволяют получить более точное решение в участках быстрого изменения интегральной кривой. Явным методам для этого требуется сильное уменьшение шага интегрирования, что негативно сказывается на времени счета. При этом применение неявных методов затруднено необходимостью искать решение системы нелинейных алгебраических уравнений и анализировать сходимость полученного решения этой системы из выбранного начального приближения. Существуют методы, позволяющие преодолеть эти затруднения. Одним из них является метод наилучшей параметризации, или метод продолжения решения по наилучшему аргументу.

Метод продолжения решения по наилучшему аргументу был разработан в трудах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [12]. Ранее в работах [13–14] было показано, что он позволяет повысить эффективность явных численных методов для сингулярно возмущенных задач. Этот метод заключается в том, что аргумент системы уравнений заменяется на новый, отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой исходной задачи. Размерность новой задачи повышается на единицу, однако она является наилучшим образом обусловленной, что имеет ряд вычислительных преимуществ. Однако в случае, когда интегральные кривые исходной задачи имеют экспоненциальную скорость роста, такой переход не позволяет существенно понизить жесткость преобразованной задачи. На базе метода продолжения решения был разработан новый подход. Модифицированный наилучший аргумент способен понизить показатель жесткости решаемой задачи. В работе [15] новый подход был апробирован на примере тестовой начальной задачи с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых.

В данной статье предлагается рассмотреть задачу возникновения сверхзвукового потока газа в канале с переменным сечением $A(x)$. Эта задача моделируется системой Навье-Стокса, и в книге Чанга К. и Хауэса Ф. [16] сводится к краевой задаче для сингулярно-возмущенного уравнения. В простейшем случае $A(x) = 1$, рассмотренном в статье [17], в данной задаче образуется пограничный слой при устремлении к нулю малого параметра, стоящего при старшей производной. Преобразование задачи к модифицированному наилучшему аргументу позволило получить численное решение явным методом Эйлера тогда, когда это не удалось ни исходной задаче, ни задаче, преобразованной к наилучшему аргументу. Целью текущей работы является рассмотрение случая переменного сечения вида $A(x) = 1 + x^2$ и анализ эффективности применения метода продолжения решения по наилучшему аргументу и его экспоненциальной модификации.

2. Методика исследования

Рассмотрим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad a < x < b, \tag{2.1}$$

с краевыми условиями первого рода

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) в общем случае является нелинейным, поэтому найти точное аналитическое решение зачастую невозможно. В этом случае для решения задачи (2.1)–(2.2) можно применить различные численные методы, одним из которых является метод стрельбы.

2.1. Метод стрельбы

Согласно методу стрельбы, вместо краевой задачи (2.1)–(2.2) решается следующая задача Коши [18]:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad a < x < b, \\ y(a) = y_a, \quad y'(a) = \tan\beta, \quad \beta : y(b, \beta) = y_b. \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь интегральная кривая $y(x, \beta)$ зависит также от параметра β, называемого углом пристрелки. Он выбирается из условия

$$|y(b, \beta) - y_b| \leq \varepsilon, \tag{2.4}$$

где ε — заданная точность.

Начальным углом пристрелки можно, например, выбрать следующий:

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{y_b - y_a}{b - a}.$$

Одним из подходов подбора угла пристрелки является метод дихотомии [18], или метод половинного деления [19].

1. Решается задача Коши (2.3) со значением угла пристрелки β_0. Если выполняется условие (2.4), то полученное решение будет решением краевой задачи (2.1)–(2.2) с точностью ε.

2. Если $y(b, \beta_0) > y_b$, то угол пристрелки уменьшается и решается задача Коши (2.3) с β_1 до тех пор, пока не выполнится условие $y(b, \beta_1) < y_b$.

   Если $y(b, \beta_0) < y_b$, то угол пристрелки увеличивается и решается задача Коши (2.3) с β_1 до тех пор, пока не выполнится условие $y(b, \beta_1) > y_b$.

3. В результате будет получен интервал (β_0, β_1), внутри которого лежит истинное значение угла пристрелки β^*. Для его определения интервал последовательно делится пополам по формуле

$$\beta_{k+1} = \frac{\beta_{k-1} + \beta_k}{2}$$

   до тех пор, пока не будет выполнено условие $|y(b, \beta_{k+1}) - y_b| \leq \varepsilon$. В этом случае найден истинный угол пристрелки β^* и $y(x, \beta^*)$ — истинная интегральная кривая.

Однако метод половинного деления очень медленно сходится и требует решения большого числа задач Коши для различных значений углов пристрелки. При решении жестких задач, которые и без того, как правило, требуют значительно более длительного времени счета, это особенно критический недостаток. Итерационная процедура Ньютона позволяет ускорить скорость сходимости итерационного процесса [18].

Согласно ей, угол пристрелки β_1 имеет вид

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{y_b - y(b, \beta_0)}{y(b, \beta_0 + \delta) - y(b, \beta_0)}\delta,$$

где δ — малое приращение. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия (2.4), при этом на каждой итерации угол пристрелки определяется по формуле

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{y_b - y(b, \beta_k)}{y(b, \beta_k) - y(b, \beta_{k-1})} \left(\beta_k - \beta_{k-1}\right).$$

Данная процедура сходится быстро вблизи корня, а сходимость вдали от корня зависит от подбора начального значения β_0 [19].

2.2. Наилучшая параметризация

В работе В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [12] показано применение метода продолжения решения по наилучшему аргументу к решению задачи Коши. Метод состоит в замене исходного аргумента задачи на новый, отсчитываемый по касательной вдоль интегральной кривой. Он получил название наилучшего аргумента, т. к. преобразованная к нему линейная система дифференциальных уравнений является наилучшим образом обусловленной. Для задачи Коши (2.3) дифференциал наилучшего аргумента имеет вид:

$$d\lambda^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dx^2,$$

где y_1, y_2 — искомые функции системы (2.3), приведенной к нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, & y_1(a) = y_a, \quad a < x < b, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2), & y_2(a) = \tan\beta, \quad \beta : y_1(b, \beta) = y_b. \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда преобразование к наилучшему аргументу λ задачи (2.5) приводит к системе вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\lambda} = \dfrac{y_2}{\sqrt{Q(x,y_1,y_2)}}, & y_1(0) = y_a, \\ \dfrac{dy_2}{d\lambda} = \dfrac{f(x,y_1,y_2)}{\sqrt{Q(x,y_1,y_2)}}, & y_2(0) = \tan\beta, \quad \beta : y_1(\lambda^*,\beta) = y_b, \\ \dfrac{dx}{d\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{Q(x,y_1,y_2)}}, & x(0) = a, \quad \lambda \in [0,\lambda^*], \quad \lambda^* : x(\lambda^*) = b, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $Q(x,y_1,y_2) = 1 + y_2^2 + f^2(x,y_1,y_2)$. В работе [12] показано, что задача (2.6) обладает рядом важных свойств:

1. Квадратичная норма правой части системы (2.6) равна единице, т. е. устраняются вычислительные трудности, связанные с неограниченным возрастанием правых частей системы (2.5).

2. Система (2.6) является наилучшим образом обусловленной.

3. Показатель жесткости системы (2.6) меньше, чем у системы (2.5).

2.3. Модификация наилучшего аргумента

Отмеченные свойства позволяют повысить эффективность явных численных методов. Это было показано на примере тестовой начальной задачи с контрастными структурами в работе [13]. Наилучшая параметризация позволила значительно сократить время счета и повысить точность численного решения. Однако для некоторого класса задач этот подход оказывается малоэффективен. В работе [15] рассматривается тестовая задача, получившая в работе А. А. Белова и Н. Н. Калиткина [20] название экспоненциального теста, так как скорость изменения интегральных кривых является экспоненциальной. Было показано, что в этом случае наилучший аргумент малоэффективен. Был разработан новый подход, чему и была посвящена работа [15]. Было предложено модифицировать наилучший аргумент, добавив в него экспоненциальную составляющую:

$$d\kappa^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \exp(-2\alpha t)dx^2,$$

где α — настраиваемый параметр. Тогда, преобразование к модифицированному наилучшему аргументу κ задачи (2.5) приводит к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\kappa} = \dfrac{y_2 \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x,y_1,y_2)}}, & y_1(0) = y_a, \\ \dfrac{dy_2}{d\kappa} = \dfrac{f(x,y_1,y_2) \cdot \exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x,y_1,y_2)}}, & y_2(0) = \tan\beta, \quad \beta : y_1(\kappa^*,\beta) = y_b, \\ \dfrac{dx}{d\kappa} = \dfrac{\exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x,y_1,y_2)}}, & x(0) = a, \quad \kappa \in [0,\kappa^*], \quad \kappa^* : x(\kappa^*) = b, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $Q'(x,y_1,y_2) = 1 + y_2^2 \cdot \exp(2\alpha x) + f^2(x,y_1,y_2) \cdot \exp(2\alpha x)$.

Как было показано в работах [15; 17], при варьировании параметра α можно повысить эффективность численных методов при решении жестких задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых по сравнению с наилучшим аргументом λ.

3. Результаты исследования

В работе Чанга К. и Хауэса Ф. [16] рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} \varepsilon A(x) y \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[\dfrac{\gamma+1}{2} y - y^{-1}\right] \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d}{dx}\left[\ln A(x)\left(1 - \dfrac{\gamma-1}{2} y^2\right)\right], \quad 0 < x < 1 \\ y(0,\varepsilon) = y_-, \quad y(1,\varepsilon) = y_+, \end{cases} \tag{3.1}$$

моделирующая поток, возникающий в канале с площадью поперечного сечения $A(x)$ при вдувании газа со сверхзвуковой скоростью. Здесь $y_- > y_+ > 0$, $\varepsilon = \mu\gamma\left(\rho_0 c_0\right)^{-1}$ — малый параметр, μ — коэффициент вязкости, γ — показатель адиабаты со значением между 1 и 5/3, ρ_0 — плотность, c_0 — скорость звука на входе в канал.

В одном из разделов статьи [17] был рассмотрен более простой случай постоянного сечения $A(x) = 1$ для задачи (3.1). В этом случае в задаче (3.1) при уменьшении ε образуется пограничный слой. В этой статье рассматривается случай переменного сечения $A(x) = 1 + x^2$. Приводя уравнение задачи (3.1) к системе в нормальной форме, получим задачу вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1, \qquad\qquad y_1(0) = y_-, \quad y_2(1) = y_+, \quad 0 < x < 1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{1}{\varepsilon\left(1+x^2\right)^2 y_1^2}\left(\left[\dfrac{\gamma+1}{2} y_1^2 - 1 + \ln(1+x^2)\,(\gamma-1)\, y_1^2\right] \times \right. \\ \left. \times \left(1+x^2\right) y_2 - 2xy_1\left(1 - \dfrac{\gamma-1}{2} y_1^2\right)\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

В задаче (3.2) при устремлении ε к нулю в решении образуется внутренний слой, как это показано на Рис. 3.1.

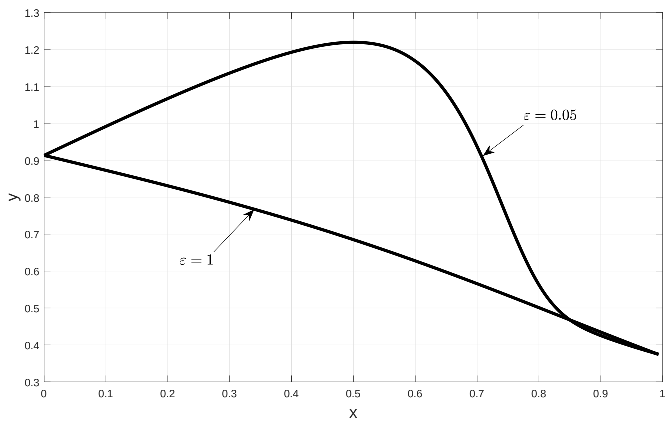

Рис. 3.1. Численное решение задачи (3.2) для $\varepsilon = 0.05$ явным методом Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$

Fig 3.1. The numerical solution of the problem (3.2) at $\varepsilon = 0.05$ using explicit Euler's method with variable integration step chosen according to the Runge's rule with tolerance $\theta = 10^{-3}$ and initial integration step $h_0 = 10^{-4}$

3.1. Преобразование к наилучшему аргументу

Используя результаты раздела 2.2, преобразуем задачу (3.2) к наилучшему аргументу λ:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\lambda} = \dfrac{2\varepsilon\left(1+x^2\right)^2 y_1^2 y_2}{\sqrt{Q(y_1, y_2, x, \varepsilon}}, & y_1(0) = y_-, \\ \dfrac{dy_2}{d\lambda} = \dfrac{P(x, y_1, y_2)}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \dfrac{dx}{d\lambda} = \dfrac{2\varepsilon\left(1+x^2\right)^2 y_1^2}{\sqrt{Q(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & x(0) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$Q(x, y_1, y_2, \varepsilon) = 4\varepsilon^2\left(1+x^2\right)^4 y_1^4\left(1+y_2^2\right) + P^2(y_1, y_2, x)$$

и

$$P(x, y_1, y_2) = \left((\gamma+1)\, y_1^2 - 2 + 2\ln(1+x^2)\,(\gamma-1)\, y_1^2\right) y_2\left(1+x^2\right) - 2xy_1\left(2-(\gamma-1)\, y_1^2\right).$$

3.2. Преобразование к модифицированному наилучшему аргументу

Согласно (2.7) имеем задачу вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\kappa} = \dfrac{2\varepsilon\left(1+x^2\right)^2 y_1^2 y_2\cdot\exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon}}, & y_1(0) = y_-, \\ \dfrac{dy_2}{d\kappa} = \dfrac{P'(x, y_1, y_2)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & y_2(1) = y_+, \\ \dfrac{dx}{d\kappa} = \dfrac{2\varepsilon\left(1+x^2\right)^2 y_1^2\cdot\exp(\alpha x)}{\sqrt{Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon)}}, & x(0) = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

где

$$Q'(x, y_1, y_2, \varepsilon) = 4\varepsilon^2\left(1+x^2\right)^4 y_1^4\left(1+y_2^2\cdot\exp(2\alpha x)\right) + P'^2(y_1, y_2, x)$$

и

$$\begin{aligned} P'(x, y_1, y_2) = \Big[&\left((\gamma+1)\, y_1^2 - 2 + 2\ln(1+x^2)\,(\gamma-1)\, y_1^2\right) y_2\left(1+x^2\right) - \\ &-2xy_1\left(2-(\gamma-1)\, y_1^2\right)\Big]\cdot\exp(\alpha x). \end{aligned}$$

3.3. Численные результаты

В табл. 3.1 приведено время численного решения задач (3.2), (3.3) и (3.4). Для расчета были выбраны те же значения, что и в книге [16]: $y_- = 0.9129$, $y_+ = 0.375$ и $\gamma = 7/5$. Задачи были решены методом стрельбы с применением процедуры Ньютона с малым приращением $\delta = 10^{-3}$. Начальные задачи были решены явным методом Эйлера с переменным шагом, выбранным согласно правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$. За начальный шаг было взято значение $h_0 = 10^{-4}$.

Таблица 3.1. Время счета t_c задач (3.2), (3.3) и (3.4) методом стрельбы с малым приращением угла пристрелки $\delta = 10^{-3}$ с применением явного метода Эйлера с переменным шагом, отсчитываемым по правилу Рунге с точностью $\theta = 10^{-3}$, с начальным шагом $h_0 = 10^{-4}$

Table 3.1. The calculation time t_c of the problems (3.2), (3.3) and (3.4) by the shooting method with a small increment of the shooting angle $\delta = 10^{-3}$ using explicit Euler's method with variable integration step calculated according to the Runge's rule with the tolerance $\theta = 10^{-3}$ and initial integration step $h_0 = 10^{-4}$

ε	Исходная задача / Original problem	Наилучший аргумент / The best argument	Экспоненциальный наилучший аргумент / The modified best argument	
	t_c, c	t_c, c	t_c, c	α
1.00	0.04	0.08	0.06	10^{-3}
0.50	0.05	0.09	0.07	10^{-3}
0.20	0.08	0.36	0.18	10^{-3}
0.15	0.11	0.42	0.20	10^{-3}
0.11	0.43	0.54	0.30	10^{-3}
0.10	2.65	0.59	0.26	10^{-3}
0.09	336.36	9.20	0.70	10^{-4}
0.08	119.45	9.18	1.79	10^{-4}
0.07	–	22.18	5.41	10^{-3}
0.06	–	–	9.95	10^{-5}
0.05	–	–	81.75	$0.5 \cdot 10^{-6}$

4. Обсуждение и анализ полученных результатов

В статье рассмотрено применение метода наилучшей параметризации и, в частности, экспоненциального наилучшего аргумента к решению сингулярно возмущенной задачи. Получены численные решения задач (3.2), (3.3) и (3.4) методом стрельбы с применением явного метода Эйлера с переменным шагом. Анализируя результаты из табл. 3.1, отметим следующее:

1. При $\varepsilon > 0.1$ задачи (3.2), (3.3) и (3.4) можно считать нежесткими. В этом случае применение метода наилучшей параметризации неэффективно, поскольку он увеличивает размерность задачи и приводит правую часть системы к более сложному виду, что сказывается на времени счета.

2. Задачи (3.2), (3.3) и (3.4) со значениями $\varepsilon \leq 0.1$ в табл. 3.1 можно считать жесткими. Так, решение исходной задачи (3.2) занимает значительно большее время, а начиная со значения $\varepsilon = 0.07$ получить решение не удается.

3. При этом стоит отметить преимущества модифицированной наилучшей параметризации: преобразование к экспоненциальному наилучшему аргументу позволило сократить время счета и получить численное решение для большего числа значений малого параметра ε.

5. Заключение

В работе рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, моделирующая возникновение одномерного сверхзвукового потока газа в канале с сечением $A(x) = 1 + x^2$. Для решения краевой задачи использовался метод стрельбы, сводящий алгоритм к решению задач Коши до тех пор, пока не будет удовлетворено правое краевое условие. Таким образом, проблема была сведена к решению жестких начальных задач. Метод продолжения по наилучшему аргументу λ давно зарекомендовал себя в качестве подхода, позволяющего снизить жесткость решаемой задачи Коши. Однако результаты данной работы показывают, что при чрезвычайно быстром росте интегральных кривых перехода к наилучшему аргументу λ недостаточно. При этом недавно разработанная экспоненциальная модификация наилучшего аргумента κ оказывается более эффективной. Стоит отметить, что выбор параметра α подбирался эмпирически. Вероятно, возможно подобрать такой параметр α, который позволит еще значительнее сократить время счета, а также получить численные решения данной задачи для меньших значений ε. Критерий и алгоритм выбора оптимального параметра α для решения жестких задач с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых является направлением дальнейших исследований.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90054.

Список литературы

1. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64), № 2. С. 193–204. URL: http://mi.mathnet.ru/msb6075 (дата обращения: 01.09.2022).

2. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Математический сборник. 1950. Т. 27 (69), № 1. С. 147–156. URL: http://mi.mathnet.ru/msb5907 (дата обращения: 01.09.2022).

3. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31 (73), № 3. С. 575–583. URL: http://mi.mathnet.ru/msb5548 (дата обращения: 01.09.2022).

4. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2014. 140 с.

5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

6. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

7. Васильева А. Б., Плотников А. А. Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. М.: Физический факультет МГУ, 2008. 398 с.

8. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.

9. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32.

10. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Москов. ун-та, 2011. 456 с.

11. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.

12. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

13. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., Цапко Е. Д. Параметризация задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с контрастными структурами // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28. № 4. С. 486–510. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510

14. Численные методы решения задач с контрастными структурами / Е. Б. Кузнецов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14, № 3. С. 539–547. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.542-551

15. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927, No. 1. pp. 012032. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012032

16. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. М.: Мир, 1988. 247 с.

17. Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Tsapko E. D. Applying the Best Parameterization Method and Its Modifications for Numerical Solving of Some Classes of Singularly Perturbed Problems // Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore. 2022. Vol. 274, No. 1. pp. 311–330.

18. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

19. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

20. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 97–109. URL: http://mi.mathnet.ru/mm3780 (дата обращения: 01.09.2022).

Поступила 03.07.2022; доработана после рецензирования 12.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. N. Tikhonov, "[On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]", *Mat. Sb.*, **22**:2 (1948), 193–204 (In Russ.), http://mi.mathnet.ru/msb6075.

2. A. N. Tikhonov, "[On systems of differential equations containing parameters]", *Mat. Sb.*, **27**:1 (1950), 147–156 (In Russ.), http://mi.mathnet.ru/msb5907.

3. A. N. Tikhonov, "[Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives]", *Mat. Sb.*, **31**:3 (1952), 575–583 (In Russ.), http://mi.mathnet.ru/msb5548.

4. V. F. Butuzov, *[Asymptotic methods in singularly perturbed problems]*, YarGU, Yaroslavl, 2014 (In Russ.), 140 p.

5. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *[Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 272 p.

6. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *[Asymptotic methods in the theory of singular perturbations]*, Visshay shkola Publ., Moscow, 1990 (In Russ.), 208 p.

7. A. B. Vasil'eva, A. A. Pochinka, *[Asymptotic theory of singularly perturbed problems]*, MSU Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 398 p.

8. A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, "Contrast structures in singularly perturbed problems", *Fundam. Prikl. Mat.*, **4**:3 (1998), 799–851 (In Russ), http://mi.mathnet.ru/eng/fpm/v4/i3/p799.

9. V. F. Butuzov, A. B. Vasil'eva, N. N. Nefedov, "Asymptotic Theory of Contrasting Structures. A Survey", *Autom. Remote Control*, **58**:7 (1997), 1068–1091 (In Russ).

10. S. A. Lomov, I. S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of a boundary layer*, Moscow University Press, Moscow, 2011 (In Russ), 456 p.

11. S. A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1992 (In Russ), 375 p.

12. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, *Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Boston, London, 2003, 236 p.

13. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, "The parametrization of the cauchy problem for nonlinear differential equations with contrast structures", *Mordovia University Bulletin*, **28**:4 (2018), 486–510. DOI: https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.486-510

14. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, D. A. Tarkhov, E. D. Tsapko, A. A. Babintseva, "Arc length and multilayer methods for solving initial value problems for differential equations with contrast structures", *Modern Information Technology and IT Education. 13th International Conference, SITITO 2018*. Vol. 1201 (Moscow, Russia, November 29 – December 2, 2018), Springer, Cham, Switzerland, 2020, 335–351 (In Russ).

15. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, "A new numerical approach for solving initial value problems with exponential growth integral curves", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **927**:1 (2020), 012032. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012032

16. K. W. Chang, F. A. Howes, *Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and application*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 181 p.

17. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, E. D. Tsapko, "Applying the best parameterization method and its modifications for numerical solving of some classes of singularly perturbed problems", *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics.* Vol. 274, Springer, Singapore, 2022, 311–330.

18. V. F. Formalyov, D. L. Reviznikov, *[Numerical methods]*, Physmatlit Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 400 p.

19. N. N. Kalitkin, *[Numerical methods]*, BHV-Petersburg Publ., Saint Petersburg, 2011 (In Russ.), 592 p.

20. A. A. Belov, N. N. Kalitkin, "Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **9**:3 (2017), 281–291 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048217030048

Submitted 03.07.2022; Revised 12.08.2022; Accepted 24.08.2022

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.317-330 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

М. Е. Ладонкина[1, 2], Ю. А. Повещенко[1, 2], О. Р. Рагимли[2], Х. Чжан[2]

[1] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Долгопрудный, Российская Федерация)*

Аннотация. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных исследуется семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС) с профилированными по пространству временными весами. Разработаны узловые схемы и класс дивергентных адаптивных вязкостей для ПКРС с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, сохраняющих свойства полностью консервативных разностных схем данного класса, анализу их устойчивости и возможности их использования на неравномерных сетках. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном классе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих “вычислительную” энтропию (в том числе на сингулярных особенностях решения). Разработанные схемы могут быть использованы для расчета высокотемпературных течений в неравновесных по температуре средах, например, при необходимости учета электрон-ионной релаксации температуры в короткоживущей плазме в условиях интенсивного энерговклада.

Ключевые слова: газовая динамика, метод опорных операторов, семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем, устойчивость схемы

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330

Об авторах:
Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7596-1672, e-mail: ladonkina@imamod.ru
Повещенко Юрий Андреевич, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9211-9057, hecon@mail.ru
Рагимли Орхан Рагимович, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7257-1660, orxan@reximli.info
Чжан Хаочэнь, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1378-1777, chzhan.h@phystech.edu

Original article

MSC2020 65M22

Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables

M. E. Ladonkina[1, 2], Yu. A. Paveschenko[1, 2], O. R. Ragimli[2], H. Zhang[2]

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow, Russian Federation)*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation)*

Abstract. For the equations of gas dynamics in Eulerian variables, a family of two-layer time-fully conservative difference schemes (FCDS) with space-profiled time weights is investigated. Nodal schemes and a class of divergent adaptive viscosities for FCDS with space-time profiled weights connected with variable masses of moving nodal particles of the medium are developed. Considerable attention is paid to the methods of constructing regularized flows of mass, momentum and internal energy that preserve the properties of fully conservative difference schemes of this class, to the analysis of their stability and to the possibility of their use on uneven grids. The effective preservation of the internal energy balance in this class of divergent difference schemes is ensured by the absence of constantly operating sources of difference origin that produce "computational" entropy (including entropy production on the singular features of the solution). Developed schemes may be used in modelling of high-temperature flows in temperature-disequilibrium media, for example, if it is necessary to take into account the electron-ion relaxation of temperature in a short-living plasma under conditions of intense energy input.

Keywords: gas dynamics, support operator method, fully conservative difference schemes, stability of the scheme

For citation: *M. E. Ladonkina, Yu. A. Paveschenko, O. R. Ragimli, H. Zhang.* Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 317–330. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330

About the authors:
Ladonkina Marina Eugenievna, Senior Researcher , Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences(4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: 0000-0001-7596-1672, e-mail: ladonkina@imamod.ru
Yuri A. Poveshenko, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9211-9057, hecon@mail.ru
Orkhan R. Ragimli, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy Pereulok St., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7257-1660, orxan@reximli.info
Haochen Zhang, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy Pereulok St., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1378-1777, chzhan.h@phystech.edu

1. Введение

Как показано практикой, принцип полной консервативности [1] представляет собой один из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема создания двухслойных по времени разностных схем, обладающих свойством полной консервативности, была разработана в [2] для случая Лагранжевого описания движения сплошной среды. Далее конкретные сложности встретились при попытке построения таких схем для уравнений газовой динамики в Эйлеровых переменных. В [3] было исследовано широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативных. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. В случае пространственных течений среды полностью консервативная схема была построена так же в работе [5].

Настоящая статья представляет собой естественное продолжение [6–8; 13] с использованием операторного подхода [9–11] и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии сохраняющих свойства полной консервативности системы. В ней работа сил термодинамического сжатия вещества использует технику профилирования временных весов по пространству.

Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в т. ч. на сингулярных особенностях решения, например, на расходящихся центрированных волнах разрежения. Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом массоперетоков в движущейся среде. Наконец, она является простой в реализации и имеет второй порядок аппроксимации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы сохраняющая свойства полной консервативности разностных схем (ПКРС) данного класса. Исследованы осцилляции этих потоков на явном и неявном слоях по времени, а также изучены допустимость и условие их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости может производиться следуя, например, [12], но не для схемы Лакса-Вендрофа, а для данного класса двухслойных по времени полностью консервативных разхностных схем.

2. Постановка задачи газовой динамики в Эйлеровых переменных

Рассматривается течение сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат. Пусть $\vec{u}$ – скорость течения; ρ – плотность среды. Плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$. Тогда система уравнений Эйлера для течения среды имеет следующий вид:

$$\frac{D}{Dt}(dM) \ = \ -dVdiv\vec{\mu}, \tag{2.1}$$

$$\frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) \ = \ -dVgradP - dVdiv(\vec{\mu}\vec{v}) + d\vec{f}, \tag{2.2}$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) \ = \ -PdVdiv\vec{u} - dVdiv(\vec{\mu}\varepsilon) + dQ, \tag{2.3}$$

$$\frac{D}{Dt}(\frac{\vec{u}^2}{2}dM) \ = \ -\vec{u}dVgradP - dVdiv(\vec{\mu}\frac{\vec{u}^2}{2}) + \vec{u}d\vec{f}, \tag{2.4}$$

$$\frac{D}{Dt}((\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2})dM) \ = \ -dVdiv(P\vec{u}) - dVdiv(\vec{\mu}(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2})) + \vec{u}d\vec{f} + dQ. \tag{2.5}$$

Мы воспользовались очевидным тождеством [8]:

$$\vec{u}\frac{D}{Dt}(\vec{u}dM) \ = \ \frac{D}{Dt}(\frac{\vec{u}^2}{2}dM) + \frac{\vec{u}^2}{2}\frac{D}{Dt}dM. \tag{2.6}$$

Здесь в системе уравнений газодинамики используются термодинамические переменные: ρ – плотность; P – давление; ε – удельная внутренняя энергия. Считается, что масса dM заключена в объём dV, через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu}E$.

В связи с тем, что в работе мы исследуем пространственно-одномерный случай уравнения газодинамики, то перепишем систему (2.1)–(2.5) для плоского случая:

$$\frac{D}{Dt}(dM) \ = \ -dV\frac{\partial \mu}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$\frac{D}{Dt}(udM) \ = \ -dV\frac{\partial P}{\partial x} - dV\frac{\partial}{\partial x}(\mu u) + df, \tag{2.8}$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) \ = \ -PdV\frac{\partial u}{\partial x} - dV\frac{\partial}{\partial x}(\mu\varepsilon) + dQ. \tag{2.9}$$

3. Полностью консервативная дифференциально разностная схема

Теперь опуская исходную систему Эйлеровых уравнений для течения среды [2; 13–14], для системы уравнений (2.7)–(2.9) выпишем двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера. На Рис. 3.1 представлена соответственная разностная сетка. Здесь ω – узлы разностной сетки; Ω – ячейки. Термодинамические величины ρ, ε, P и также внутренняя энергия $E = \rho\varepsilon$ относятся к узлам ω. Будем также относить скорость $\vec{u}$, объём v и приузловую массу $m = \rho v$ к узлам ω, а объём V – к ячейкам.

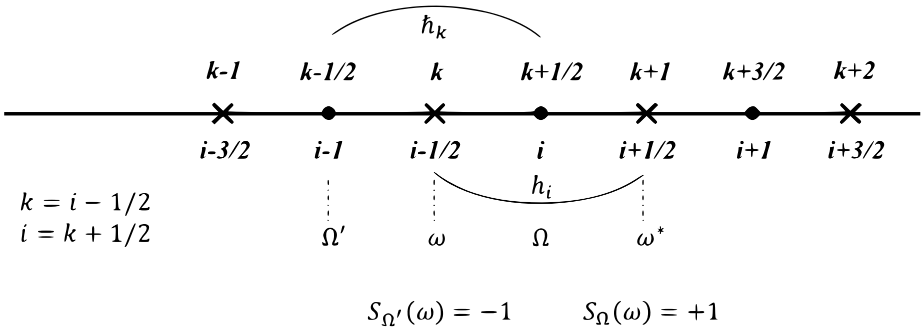

Рис. 3.1. Разностная сетка. Схема узлов (ω) и ячеек (Ω) сетки по пространству
Fig 3.1. Difference grid. Scheme of grid's nodes(ω) and grid's cells (Ω) in space

Очевидно:

$$v_\omega = \hbar_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_\Omega = h_i, \quad \rho_\omega = \frac{m_\omega}{v_\omega} = \rho_k.$$

Пусть $\mu_D^{\sim}$ – введенный ячеечный поток массы. Под отнесенным к узлу импульсом будем понимать величину $I_\omega = \rho_\omega u_\omega$, а под отнесенной к узлу энергией – $E_\omega = \rho_\omega \varepsilon_\omega$.

Выпишем полностью консервативную [2] разностную схему в переменных Эйлера

$$m_t = -\nu DIN_D \vec{\mu}_D^{\sim}, \tag{3.1}$$

$$(mu)_t = -\nu GRAD_\sigma \pi^{\sim} - \nu DIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}), \tag{3.2}$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2}\sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} VDIV_\sigma \vec{u}^{\sim})_\Omega - \nu DIN_D(\vec{\mu}_{ED}^{\sim} + \vec{\chi}_D^{\sim}), \tag{3.3}$$

$$(m\frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^{\sim}, GRAD_\sigma \pi^{\sim}) - \nu DIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^{2\sim}}{2}). \tag{3.4}$$

Здесь все величины обозначим следующим образом

$$\vec{\mu} = \rho\vec{u},\ \vec{\mu}_E = \varepsilon\vec{\mu} = E\vec{u},\ E = \rho\varepsilon,\ \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_\rho)},\ \psi_\rho = const;$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)} (\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)},\ \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim};$$

$$\pi_\Omega^{\sim} = P_\Omega^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_\sigma(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}),\ P_\Omega = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)} P_\omega,\ \psi_u = const;$$

$$\vec{\chi}_D^{\sim} = \{\vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} | \vec{\chi}_{ED}^{\sim}\},\ \vec{\chi}_{\varepsilon D}^{\sim} = -k_\varepsilon GRAN_D \hat{\varepsilon},\ \vec{\chi}_{ED}^{\sim} = -k_E GRAN_D \hat{E};$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)} (E_\omega u_\omega)^{(0.5)},\ \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}),\ \psi_\varepsilon = const.$$

Под $M_D^{\sim} = \dfrac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}(\rho_\omega u_\omega)^{(0.5)}$ и $M_{ED}^{\sim} = \dfrac{1}{2}\sum_{\omega(\Omega)}(E_\omega u_\omega)^{(0.5)}$ понимаем некоторые аппроксимации потока массы и потока внутренней энергии в ячейке Ω соответственно. Потоковый член $\vec{\chi}_D^{\sim}$ характеризует теплопроводность в газе и пропорционален коэффициенту теплопроводности k. Также в ячейке, образованной узлами ω и ω', введены величины:

$$\vec{u}_D^{\sim} = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)} + \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}), \quad \vec{u}_D^{2\sim} = (\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)},\ \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}).$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = \dfrac{\hat{a} + a}{\tau}$, $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1-\delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω, например, по закону: $\delta = \sqrt{\hat{m}}/(\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$; ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Таким образом, отметим, что под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и $\hat{a}$ между слоями t и $\hat{t}$ будем понимать некоторые интерполяционные величины $a^{\sim}$, например, для скорости полагаем $u^{\sim} = u^{(\delta)}$.

Дальше для континуальных операций векторного анализа – $div\vec{u}$, $gradP$, $div(\vec{\mu}\cdot\vec{u})$ – введем их разностные аналоги.

$$DIN_D\vec{\mu}_D = \frac{1}{v}\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega)\mu_D(\Omega), \qquad DIN_D : (\Omega) \to (\omega) \tag{3.5}$$

$$DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v}\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega)\mu_D(\Omega)\vec{u}_D(\Omega), \qquad DIT_D : (\Omega) \to (\omega) \tag{3.6}$$

$$GRAN_D\ P = \frac{1}{v}\Delta_\Omega P, \qquad GRAN_D : (\omega) \to (\Omega) \tag{3.7}$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v}\Delta_\sigma \pi, \qquad GRAD_\sigma : (\Omega) \to (\omega) \tag{3.8}$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V}\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega)u_\omega, \qquad DIV_\sigma : (\omega) \to (\Omega) \tag{3.9}$$

где $\Delta_\Omega P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega)P_\omega = P_{\omega^*} - P_\omega$, $\Delta_\sigma \pi = +\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega)\pi_\Omega + S_{\partial\omega}\pi_{\partial\omega}$; $S_\Omega(\omega)$ – знаковая функция, отвечающая нормали к границе приузлового домена узла ω, равна $+1$, если соответствующая граничная нормаль направлена из домена, и равна -1 в противном случае (см. Рис. 3.1).

В выражении для $\Delta_\sigma\pi$, в граничном узле $\omega = \partial\omega$, добавлено слагаемое с величиной $\pi_{\partial\omega}$ на границе с знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, которая зависима от направления граничной нормали.

Далее полагаем $\nu_u^{\sim} = \nu^{\sim}$. Тогда из уравнений (3.1)–(3.2) следует вязко-скоростное уравнение, определяющее эволюцию скорости в узлах ω:

$$\begin{aligned} &\rho^{(1-\psi_u)}u_t + (\rho u \nabla u)_\Delta^{\sim} + GRAD_\sigma P_\Omega^{(0.5)} - GRAD_\sigma\left[\rho_\pm^{\sim}(\nu^{\sim} DIV_\sigma u^{(\psi_u)})\right] - \\ &- DIT_D\left[(\nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim}) \cdot u_D^{\sim}\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$(\rho u \nabla u)_\Delta^{\sim} = DIT_D(M_D^{\sim} \cdot u_D^{\sim}) - u^{(\psi_u)} DIN_D M_D^{\sim}.$$

Также полагаем $\nu^{\sim}_{E} = \nu^{\sim}$. Тогда из уравнений (3.1) и (3.3) следует вязко-температурное уравнение, определяющее в узлах ω внутреннюю энергетическую эволюцию

$$\rho^{(1-\psi_\varepsilon)}\varepsilon_t + (\rho u\nabla\varepsilon)^{\sim}_{\Delta} + (\pi divu)^{\sim}_{\Delta} - DIN_D(\rho^{\sim}_{\pm}\nu^{\sim}GRAN_D\varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}) + DIN_D\chi^{\sim}_{D} = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{cases}(\rho u\nabla\varepsilon)^{\sim}_{\Delta} = DIN_D\vec{M}^{\sim}_{ED} - \varepsilon^{(\psi_\varepsilon)}DIN_D\vec{M}^{\sim}_{D},\\ (\pi divu)^{\sim}_{\Delta} = \dfrac{1}{2v}\sum_{\Omega(\omega)}(\pi^{\sim}vDIV_\sigma u^{\sim})_\Omega.\end{cases}$$

индексами $\pm$ у плотности обозначаются соседние пространственные узлы сетки по отношению к центральному ω, в котором записаны уравнения (3.10)–(3.11).

Сравнивая уравнения (3.2) и (3.10), отметим, что коэффициент вязкости $\nu^{\sim}$ в них одновременно определяет диссипацию как импульса в (3.2), так и скорости в (3.10), представленных нестационарными членами. Аналогично из уравнений (3.3) и (3.11) следует, что тот же коэффициент вязкости $\nu^{\sim}$ в них тоже одновременно определяет диссипации как объёмной внутренней энергии $E = \rho\varepsilon$, связанной с давлением газа, так и энергии единицы массы ε, связанной с его температурой. Эти диссипируемые вязкостью функции также стоят под производными по времени в соответствующих уравнениях (3.3) и (3.11).

4. Устойчивость вязко-балансовых уравнений

4.1. Устойчивость вязкого-массового уравнения

Фиксируя распределение скорости потока массы, исследуем уравнение (3.1). Перепишем уравнение (3.1) в узле в виде

$$v(\hat\rho - \rho) - \tau vDIN_D(\nu^{\sim}GRAN_D\rho^{\sim}) + \tau vDIN_DM^{\sim}_{D} = 0 \tag{4.1}$$

и преобразуем полученное уравнение к форме:

$$\hat{C}^{\sim}_{\rho k}\hat\rho_k = \hat{A}^{\sim}_{\rho k}\hat\rho_{k-1} + \hat{B}^{\sim}_{\rho k}\hat\rho_{k+1} + C^{\sim}_{\rho k}\rho_k + A^{\sim}_{\rho k}\rho_{k-1} + B^{\sim}_{\rho k}\rho_{k+1}, \tag{4.2}$$

где

$$\hat{A}^{\sim}_{\rho k} = \tau(\psi_\rho\overline{\nu}^{\sim}_{k-1/2} + \frac{\hat{u}_{k-1}}{4}), \qquad A^{\sim}_{\rho k} = \tau(\overline{\psi}_\rho\overline{\nu}^{\sim}_{k-1/2} + \frac{u_{k-1}}{4}),$$
$$\hat{B}^{\sim}_{\rho k} = \tau(\psi_\rho\overline{\nu}^{\sim}_{k+1/2} - \frac{\hat{u}_{k+1}}{4}), \qquad B^{\sim}_{\rho k} = \tau(\overline{\psi}_\rho\overline{\nu}^{\sim}_{k+1/2} - \frac{u_{k+1}}{4}),$$
$$\hat{C}^{\sim}_{\rho k} = \hbar_k + \tau\psi_\rho(\overline{\nu}^{\sim}_{k-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{k+1/2}), \qquad C^{\sim}_{\rho k} = \hbar_k - \tau\overline{\psi}_\rho(\overline{\nu}^{\sim}_{k-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{k+1/2}),$$

Здесь $\overline{\nu}^{\sim} = \dfrac{\nu^{\sim}}{h}$, $h = V$ – объём ячейки Ω. Под $\overline{\nu}^{\sim}_{k\pm 1/2}$ понимается соответствующий коэффициент вязкости в ячейке $\Omega_{k\pm1/2}$, $\overline{\psi}_\rho = 1 - \psi_\rho$. Индекс $k \pm 1/2$ будем также обозначать как $\pm 1/2$, опуская текущий индекс k. Положим $\psi_\rho = \overline{\psi_\rho} = \dfrac{1}{2}$, тогда коэффициенты $\hat{A}^{\sim}_{\rho k}, A^{\sim}_{\rho k}, \hat{B}^{\sim}_{\rho k}, B^{\sim}_{\rho k}$ будут положительно при выполнении условии:

$$\overline{\nu}^{\sim}_{\Omega} > \frac{1}{2}\max_{\omega(\Omega)}\{|\hat{u}_\omega|, |u_\omega|\}.$$

Введём число Куранта в ячейке Ω:

$$kr_{\Omega}^{\sim} = \frac{\tau}{h_{\Omega}} \left[\frac{1}{2} \max_{\omega(\Omega)} \{ |\hat{u}_{\omega}|, |u_{\omega}| \} + \varepsilon \right] \tag{4.3}$$

и перепишем последнее неравенство в виде

$$\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau}, \tag{4.4}$$

$\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Далее из условия $C_{\rho k}^{\sim} > 0$ следует $\frac{1}{2}(\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \overline{\nu}_{1/2}^{\sim}) < \frac{\hbar_k}{\tau}$. Это неравенство выполнено, если потребовать

$$\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau}. \tag{4.5}$$

Объединяя условия (4.4)–(4.5), получим:

$$kr_{\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} < \overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} < 1 \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} \tag{4.6}$$

или

$$kr_{\Omega}^{\sim} < \beta_{\Omega}^{\sim} < 1$$

в представлении коэффициента вязкости $\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim}$ через вязкое наполнение $\beta_{\Omega}^{\sim}$, как $\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} = \beta_{\Omega}^{\sim} \frac{h_{\Omega}}{\tau}$.

Неравенство $\hat{C}_{\rho k}^{\sim} > 0$ очевидно, диагональное преобладание, требуемое для обеспечения устойчивости по плотности уравнения (3.1), выполняется лишь на постоянном скоростном фоне ($u = const, D_{\rho k}^{\sim} = 0$) и имеет акустический смысл, т. к. имеет место равенство:

$$D_{\rho k}^{\sim} = \hat{C}_{\rho k}^{\sim} - (\hat{A}_{\rho k}^{\sim} + \hat{B}_{\rho k}^{\sim} + A_{\rho k}^{\sim} + B_{\rho k}^{\sim} + C_{\rho k}^{\sim}) = \frac{\tau}{4} \left[\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_{k-1} + u_{k+1} - u_{k-1} \right].$$

Таким образом требуемым условием на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по плотности в уравнении (3.1) является неравенство (4.6).

4.2. Устойчивость вязко-скоростного уравнения

Теперь рассмотрим аппроксимацию по скорости на фоне заданных термодинамических параметров вещества.

Перепишем уравнение (3.2) в узле в виде:

$$\begin{gathered} \hat{\rho}\hat{u} - \rho u - \frac{\tau}{\hbar_k} \left[\overline{\nu}_{u,1/2}^{\sim} (\rho_+^{(\psi_\rho)} u_+^{(\psi_u)} - \rho^{(\psi_\rho)} u^{(\psi_u)}) - \overline{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} (\rho^{(\psi_\rho)} u^{(\psi_u)} - \rho_-^{(\psi_\rho)} u_-^{(\psi_u)}) \right] + \\ + \frac{\tau}{2\hbar_k} \left[\mu_{D,1/2}^{\sim} (\delta\hat{u} + \overline{\delta} u + \delta_+ \hat{u}_+ + \overline{\delta}_+ u_+) - \mu_{D,-1/2}^{\sim} (\delta\hat{u} + \overline{\delta} u + \delta_- \hat{u}_- + \overline{\delta}_- u_-) \right] = \\ = -\tau GRAD_{\sigma} P_{\Omega}^{(0.5)} \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь $\overline{\nu}_u^{\sim} = \frac{\nu_u^{\sim}}{h}$; $h = V$ – объём ячейки Ω; $\overline{\delta} = 1 - \delta$. Преобразуем полученное уравнение (4.7) в форме:

$$\hat{C}_{uk}^{\sim} \hat{u}_k = \hat{A}_{uk}^{\sim} \hat{u}_{k-1} + \hat{B}^{\sim} \hat{u}_{k+1} + C_{uk}^{\sim} u_k + A_{uk}^{\sim} u_{k-1} + B_{uk}^{\sim} u_{k+1} - \tau GRAD_{\sigma} P_{\Omega}^{(0.5)} \tag{4.8}$$

где

$$\hat{A}_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{\hbar_k}(\psi_u \rho_-^{(\psi_\rho)} \overline{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \mu_{D,-1/2}^{\sim} \frac{\delta_-}{2}),$$
$$\hat{B}_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{\hbar_k}(\psi_u \rho_+^{(\psi_\rho)} \overline{\nu}_{u,1/2}^{\sim} - \mu_{D,1/2}^{\sim} \frac{\delta_+}{2}),$$
$$\hat{C}_{uk}^{\sim} = \hat{\rho} + \frac{\tau}{\hbar_k}\psi_u \rho^{(\psi_\rho)}(\overline{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \overline{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) + \frac{\tau}{2\hbar_k}(\mu_{D,1/2}^{\sim} - \mu_{D,-1/2}^{\sim})\delta,$$
$$A_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{\hbar_k}(\overline{\psi}_u \rho_-^{(\psi_\rho)} \overline{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \mu_{D,-1/2}^{\sim} \frac{\overline{\delta}_-}{2}),$$
$$B_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{\hbar_k}(\overline{\psi}_u \rho_+^{(\psi_\rho)} \overline{\nu}_{u,1/2}^{\sim} - \mu_{D,1/2}^{\sim} \frac{\overline{\delta}_+}{2}),$$
$$C_{uk}^{\sim} = \rho - \frac{\tau}{\hbar_k}\overline{\psi_u} \rho^{(\psi_\rho)}(\overline{\nu}_{u,-1/2}^{\sim} + \overline{\nu}_{u,1/2}^{\sim}) - \frac{\tau}{2\hbar_k}(\mu_{D,1/2}^{\sim} - \mu_{D,-1/2}^{\sim})\overline{\delta}.$$

Здесь $\overline{\psi_u} = 1-\psi_u$. Положим $\psi_\rho = \psi_u = \dfrac{1}{2}$ и $\nu_u^{\sim} = \nu^{\sim}, \overline{\nu}^{\sim} = \dfrac{\nu^{\sim}}{h}$, получаем коэффициенты в виде:

$$\hat{A}_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim}(\rho_-^{(0.5)} - \delta_- \Delta_{D,-1/2}\rho^{(0.5)}) + \delta_- M_{D,-1/2}^{\sim}\right],$$
$$A_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim}(\rho_-^{(0.5)} - \overline{\delta}_- \Delta_{D,-1/2}\rho^{(0.5)}) + \overline{\delta}_- M_{D,-1/2}^{\sim}\right],$$
$$\hat{B}_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\overline{\nu}_{1/2}^{\sim}(\rho_+^{(0.5)} + \delta_+ \Delta_{D,1/2}\rho^{(0.5)}) - \delta_+ M_{D,1/2}^{\sim}\right],$$
$$B_{uk}^{\sim} = \frac{\tau}{2\hbar_k}\left[\overline{\nu}_{1/2}^{\sim}(\rho_+^{(0.5)} + \overline{\delta}_+ \Delta_{D,1/2}\rho^{(0.5)}) - \overline{\delta}_+ M_{D,1/2}^{\sim}\right],$$

Здесь $\Delta_{D,\pm 1/2}\rho$ – приращение плотности в узлах ячейки, аналогичное введенному ранее $\Delta_D P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega$.

Для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (3.2) потребуем выполнение при достаточно малых шагах по времени ($\tau \to 0$) условия:

$$R_\Omega^{\sim} = min_\Omega^{\sim}\{\frac{\rho_\pm^{(0.5)}}{2} \pm \delta_\pm^{\sim}\Delta_{D,\pm 1/2}\rho^{(0.5)}\} \geq 0. \tag{4.9}$$

Введём также удельный объём единицы массы ячейки Ω как $\eta_\Omega^{\sim} = max_\Omega^{\sim}\{\dfrac{2\delta_\pm^{\sim}}{\rho_\pm^{(0.5)}}\}$. Минимумы и максимумы в ячейке Ω вычисляются с помощью значений плотности в узлах $\omega(\Omega)$ её образующих:

$$\{min_\Omega | max_\Omega^{\sim}\}(\omega(\Omega) = \pm\omega,\ \delta^{\sim} = \{\delta, \overline{\delta}\}).$$

При выполнении условий для коэффициента вязкости в ячейке Ω

$$\overline{\nu}_\Omega^{\sim} > \eta_\Omega^{\sim} \cdot |M_D^{\sim}| + \varepsilon = kr_{u\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_\Omega}{\tau} \tag{4.10}$$

коэффициенты $\hat{A}_{uk}^{\sim}, A_{uk}^{\sim}, \hat{B}_{uk}^{\sim}, B_{uk}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится скоростное число куранта $kr_{u\Omega}^{\sim}, \varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее коэффициент $C_{uk}^{\sim}$ с учётом уравнения неразрывности $m_t = -\nu DIN_D\mu_D^{\sim} = -(\mu^{\sim}_{D,1/2} - \mu^{\sim}_{D,-1/2})$ может быть представлен как

$$C^{\sim}_{uk} = \rho^{(\overline{\delta}/2)}\{1 - \frac{\tau}{\hbar_k}\left[2\overline{\psi}_u\rho^{(\psi_\rho)}/\rho^{(\overline{\delta}/2)}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(\overline{\nu}^{\sim}_{u,-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{u,1/2})\right]\}.$$

Потребуем для некоторого $1 > \beta^{\sim}_{\Omega} > kr^{\sim}_{u\Omega}$ в ячейках Ω выполнение условий

$$\overline{\nu}^{\sim}_{\Omega} < \frac{\beta^{\sim}_a h_\Omega}{\tau},\ \beta^{\sim}_a < 1. \tag{4.11}$$

Тогда будем иметь $\frac{1}{2}(\overline{\nu}^{\sim}_{u,-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{u,1/2}) < \frac{\beta^{\sim}_a h_\Omega}{\tau}$ и при $\psi_\rho = \psi_u = \frac{1}{2}$ получим:

$$\frac{\tau}{\hbar_k}\left[2\overline{\psi}_u\frac{\rho^{(\psi_\rho)}}{\rho^{(\overline{\delta}/2)}}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(\overline{\nu}^{\sim}_{u,-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{u,1/2})\right] < \frac{\beta^{\sim}_a\rho^{(0.5)}}{\rho^{(\overline{\delta}/2)}}. \tag{4.12}$$

Отсюда отметим $C^{\sim}_{uk} > 0$ при

$$\beta^{\sim}_a\rho^{(0.5)}\rho^{\overline{\delta}/2} < 1, \tag{4.13}$$

а последнее выполнено для достаточно малых $\tau \to 0$ и $\beta^{\sim}_a < 1$.

Выполнив аналогичные преобразования, получим положительность коэффициента:

$$\hat{C}^{\sim}_{uk} = \rho^{(1-\delta/2)} + \frac{\tau}{\hbar_k}\psi_u\rho^{(\psi_\rho)}(\overline{\nu}^{\sim}_{u,-1/2} + \overline{\nu}^{\sim}_{u,1/2}) > 0.$$

Однако диагональное преобразование, нужное для обеспечения устойчивости по скорости уравнения (3.2), выполняется лишь на постоянном плотностном фоне ($\rho = const, D^{\sim}_{uk} = 0$) и понимается в акустическом смысле, поскольку имеет место равенство:

$$\begin{aligned} D^{\sim}_{uk} &= \hat{C}^{\sim}_{uk} - (\hat{A}^{\sim}_{uk} + \hat{B}^{\sim}_{uk} + A^{\sim}_{uk} + B^{\sim}_{uk} + C^{\sim}_{uk}) = \\ &= \frac{\tau}{\hbar_k}\left[\overline{\nu}^{\sim}_{u,-1/2}(\rho^{(\psi_\rho)} - \rho^{(\psi_\rho)}_-) + \overline{\nu}^{\sim}_{u,1/2}(\rho^{(\psi_\rho)} - \rho^{(\psi_\rho)}_+)\right]. \end{aligned}$$

Отметим, что для приращения плотности $\Delta_{D,\pm1/2}\rho^{(0.5)}$ в ячейке Ω в выражении (4.9) для достаточно малых $\tau \to 0$ и $\beta^{\sim} \to 1-0$ выполнено $|\Delta_D\hat{\rho}| \le |\Delta_D\rho|$ для любых сеток в представлении коэффициента вязкости как $\overline{\nu}^{\sim} < \beta^{\sim}\frac{h}{\tau}$. Сетки, для которых при этом в процессе расчета шагов по времени еще $\Delta_D\hat{\rho} \to 0$, будем называть вязкорегулярными. Таковыми являются пространственно невырожденные сетки в частности равномерная, геометрическая прогрессия и т.п.

Итак, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости по скорости в уравнении (3.2) являются неравенства (4.10)–(4.11) при выполнении ограничений в плотностных распределениях (4.9) и (4.13).

4.3. Устойчивость вязко-температурного уравнения

Исследуем устойчивость относительно функции ε вязко-температурного уравнения (3.11) при фиксированных остальных параметрах вещества. Полагая $\psi_\rho = \psi_u = \psi_\varepsilon =$

$= \dfrac{1}{2}$, $\overline{\psi} = 1 - \psi$, $\nu_E^{\sim} = \nu_u^{\sim} = \nu^{\sim}$, $\overline{\nu}^{\sim} = \dfrac{\nu^{\sim}}{h}$, перепишем это уравнение в узле в виде:

$$\left[v\rho^{(0.5)}(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)\right]_{\omega} - \tau v DIN_D(\rho_{\pm}^{(0.5)}\nu^{\sim} GRAN_D \varepsilon^{(0.5)}) + \\ + \tau v \left[DIN_D M_{ED}^{\sim} - \varepsilon^{(0.5)} DIN_D M_D^{\sim}\right] = -\tau v \left[(\pi divu)_{\Delta}^{\sim} + DIN_D \chi_D^{\sim}\right]. \quad (4.14)$$

Далее представим уравнение (4.14) в виде разложения по ε_k в узлах ω_k:

$$\hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim}\hat{\varepsilon}_k = \hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim}\hat{\varepsilon}_{k-1} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim}\hat{\varepsilon}_{k+1} + C_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_k + A_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_{k-1} + B_{\varepsilon k}^{\sim}\varepsilon_{k+1} - \tau v \left[(\pi divu)_{\Delta}^{\sim} + DIN_D \chi_D^{\sim}\right] \quad (4.15)$$

Здесь

$$\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} = \frac{1}{2}\tau(\rho_{-}^{(0.5)}\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \frac{1}{2}\hat{\rho}_{-}\hat{u}_{-}), \quad A_{\varepsilon k}^{\sim} = \frac{1}{2}\tau(\rho_{-}^{(0.5)}\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \frac{1}{2}\rho_{-}u_{-}),$$
$$\hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} = \frac{1}{2}\tau(\rho_{+}^{(0.5)}\overline{\nu}_{+1/2}^{\sim} - \frac{1}{2}\hat{\rho}_{+}\hat{u}_{+}), \quad B_{\varepsilon k}^{\sim} = \frac{1}{2}\tau(\rho_{+}^{(0.5)}\overline{\nu}_{+1/2}^{\sim} - \frac{1}{2}\rho_{+}u_{+}),$$
$$\hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} = \hbar_k\rho^{(0.5)} + \frac{1}{2}\tau\left[(\rho_{-}^{(0.5)}\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\overline{\nu}_{+1/2}^{\sim}) - \hbar_k DIN_D M_D^{\sim}\right],$$
$$C_{\varepsilon k}^{\sim} = \hbar_k\rho^{(0.5)} - \frac{1}{2}\tau\left[(\rho_{-}^{(0.5)}\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\overline{\nu}_{+1/2}^{\sim}) - \hbar_k DIN_D M_D^{\sim}\right].$$

При выполнении условия для коэффициента вязкости в ячейке Ω:

$$\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} > kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim} \cdot \frac{h_{\Omega}}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\max_{\omega(\Omega)}(\frac{1}{\rho_{\omega}^{(0.5)}} \cdot \max\{\hat{\rho}|\hat{u}|, \rho|u|\}_{\omega}) + \varepsilon\right] \quad (4.16)$$

коэффициенты $\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim}, A_{\varepsilon k}^{\sim}, \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim}, B_{\varepsilon k}^{\sim}$ будут положительными. Здесь также вводится температурное число Куранта $kr_{\varepsilon\Omega}^{\sim}, \varepsilon > 0$ – малый параметр. Далее из условия $C_{\varepsilon k}^{\sim} > 0$ следует неравенство:

$$\frac{1}{2}(\rho_{-}^{(0.5)}\overline{\nu}_{-1/2}^{\sim} + \rho_{+}^{(0.5)}\overline{\nu}_{+1/2}^{\sim}) < \frac{\hbar_k}{\tau}(\rho^{(0.5)} + \tau DIN_D M_D^{\sim}).$$

Это неравенство выполняется при условии:

$$\overline{\beta}^{\sim} < \frac{\hbar}{\hbar_{\rho}}\left[1 + \frac{\tau}{\rho^{(0.5)}} DIN_D M_D^{\sim}\right]. \quad (4.17)$$

Здесь введено вязкое наполнение в узлах $\overline{\beta}_{\omega}^{\sim} = \max_{\Omega(\omega)}\beta_{\Omega}$ для $\overline{\nu}_{\Omega}^{\sim} = \dfrac{\beta_{\Omega}^{\sim}h_{\Omega}}{\tau}$. Очевидно, что при $\beta_{\Omega}^{\sim} = \beta_a$ также будет выполнено $\overline{\beta}_{\omega}^{\sim} = \beta_a$. Определён плотностный размер узлового домена как

$$\hbar_{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_{-}^{(0.5)}h_{-1/2} + \rho_{+}^{(0.5)}h_{1/2})/\rho^{(0.5)}. \quad (4.18)$$

Диагональное преобладание имеет место в виде:

$$D_{\varepsilon k}^{\sim} = \hat{C}_{\varepsilon k}^{\sim} - (\hat{A}_{\varepsilon k}^{\sim} + \hat{B}_{\varepsilon k}^{\sim} + C_{\varepsilon k}^{\sim} + A_{\varepsilon k}^{\sim} + B_{\varepsilon k}^{\sim}) = \\ = \frac{1}{4}\tau\left[(\hat{\rho}_{+}\hat{u}_{+} - \hat{\rho}_{-}\hat{u}_{-}) + (\rho_{+}u_{+} - \rho_{-}u_{-})\right] - \tau\hbar DIN_D M_D^{\sim} = 0 \quad (4.19)$$

Таким образом, требуемыми условиями на выбор вязкости для обеспечения устойчивости вязко-температурного уравнения (3.11) являются неравенства (4.16)–(4.17).

5. Заключение

В данной работе для построенной полностью консервативной разностной схемы второго порядка аппроксимации с регуляризирующими добавками в виде адаптивной искусственной вязкости для системы одномерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, теоретически получены условия устойчивости разностного решения определяющие выбор коэффициентов искусственной вязкости Для построенных разностных схем разработан и реализован итерационный алгоритм [15] и осуществлены тестовые расчеты ударных волн и задачи Эйнфельда.

Список литературы

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953–958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123–132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера. // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171–181.
5. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями / В. М. Головизнин [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1983. № 105.
6. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779–784.
7. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы / А. В. Колдоба [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1985. № 57.
8. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 1982. № 160.
9. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский [и др.]. Минск: ЗАО «Критерий», 1996. 275 с.
10. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости / А. В. Колдоба [и др.] // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86–96.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 160.

12. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 288 с.

13. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией / Ю. А. Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 2019. № 14. 23 с.

14. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution // Lecture Notesin Computer Science. 2020. Vol. 11958 LNCS. pp. 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71

15. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью / М. Е. Ладонкина [и др.] // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412–423

Поступила 08.07.2022; доработана после рецензирования 12.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. A. Samarsky, Yu. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 352 p.

2. Yu. P. Popov, A. A. Samarsky, “Completely conservative difference schemes”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**:4 (1969), 953–958 (In Russ.).

3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, “About one construction algorithm in full of conservative difference schemes”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics.*, **22**:1 (1982), 123–132 (In Russ.).

4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, G. V. Meladze, “On one completely conservative difference scheme for the equation of gas dynamics in Euler variables”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 171–181 (In Russ.).

5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarsky, “Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with spaced velocities”, *Preprints of the KIAM*, **105** (1983) (In Russ.).

6. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, Yu. P. Popov, “Fully double layered conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**:5 (1987), 779–784 (In Russ.).

7. A. V. Koldoba, O. A. Kuznetsov, Yu. A. Poveshchenko, Yu. P. Popov, “On one approach to the calculation of problems of gas dynamics with a variable mass of a quasiparticle”, *Preprints of the KIAM*, **57** (1985) (In Russ.).

8. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, “Completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in the presence of mass sources”, *Preprints of the KIAM*, **160** (1982) (In Russ.).

9. A. A. Samarskii, A. V. Koldobav, Yu. A. Poveshchenko, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii, *Difference schemes on irregular grids*, Criteria Publ., Minsk, 1996 (In Russ.), 275 p.

10. A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, I. V. Gasilova, E. Yu. Dorofeeva, “Difference schemes of the method of support operators for equations of theories of elasticity”, *Math. Modeling*, **24**:12 (2012), 86–96 (In Russ.).

11. Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, Yu. S. Sharova, “Integrally consistent methods for calculating self-gravitating and magnetohydrodynamic phenomena”, *Preprints of the KIAM*, **160** (2018) (In Russ.).

12. Yu. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Adaptive artificial viscosity method numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 288 p.

13. Yu. A. Poveshchenko, M. E. Ladonkina, V. O. Podryga, O. R. Rahimly, Yu. S. Sharova, “On a two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Keldysh Institute Preprints*, **14** (2019) (In Russ.), 23 p.

14. O. Rahimly, V. Podryga, Y. Poveshchenko, P. Rahimly, Y. Sharova, “Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Lecture Notes in Computer Science*, **11958 LNCS** (2020), 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71

15. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical analysis of fully conservative difference schemes with adaptive viscosity”, *Zhurnal SVMO*, **23**:4 (2021), 412–423 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423

Submitted 08.07.2022; Revised 12.08.2022; Accepted 24.08.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Математическая жизнь

К 70-ЛЕТИЮ ШАВКАТА АБДУЛЛАЕВИЧА АЮПОВА

Доктор физико-математических наук, профессор,
научный деятель Республики Узбекистан,
академик, Герой Узбекистана
ШАВКАТ АБДУЛЛАЕВИЧ АЮПОВ

Шавкат Абдуллаевич Аюпов – видный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, академик, заслуженный деятель науки Республики Узбекистан.

Ш. А. Аюпов возглавляет признанную во всём мире современную научную школу по теории операторных алгебр и квантовой теории вероятностей, вносящую большой вклад в развитие науки и высшего образования в Узбекистане.

Среди математической общественности в нашей стране и за рубежом Ш. А. Аюпов широко известен как автор значимых исследований по теории операторных алгебр, некоммутативному интегрированию и их приложениям в квантовой теории вероятностей. Он является одним из основоположников нового научного направления в теории неассоциативных алгебр – структурной теории алгебр Лейбница. Продолжая традиции ташкентской школы функционального анализа, основанной его учителем – академиком Т. А. Сарымсаковым, Ш. А. Аюпов внес значительный вклад в повышение уровня исследований по самым актуальным проблемам современной математики, воспитал много талантливых учеников, и в целом оказывает благотворное влияние на качество подготовки молодых математиков, преподавателей и учителей в стране.

Ш. А. Аюпов родился 14 сентября 1952 г. в Ташкенте. Еще со школьной скамьи он проявлял математические способности, был победителем городских и республиканских школьных олимпиад по математике, был приглашен в Летнюю физико-математическую школу в Новосибирске (1968 г.). Окончив школу с золотой медалью, в 1969 г. Ш. А. Аюпов поступил на механико-математический факультет Ташкентского государственного университета (ныне Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека), который окончил с отличием в 1974 году по специальности «Функциональный анализ». В том же году он поступил в аспирантуру и занимался под руководством академика Т. А. Сарымсакова и доцента Дж. Х. Хаджиева (ныне академик). В 1977 г. Ш. А. Аюпов успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Его первые научные работы были посвящены теории топологических векторных пространств над неархимедово нормированными полями, гомоморфизмам специальных колец и теории двойственности для топологических модулей. За цикл работ в этом направлении в 1977 г. Ш. А. Аюпов был удостоен премии Академии наук Узбекистана для молодых ученых.

В те же годы по инициативе академика Т. А. Сарымсакова в Ташкенте начались исследования по некоммутативной (квантовой) теории вероятностей, и ряд молодых математиков подключились к разработке алгебраического аппарата этой теории, основанного на упорядоченных алгебраических структурах. Это дало толчок активным исследованиям по теории операторных алгебр (алгебр фон Неймана, C^*-алгебр, йордановых операторных алгебр и др.). В те годы Ш. А. Аюпов приступил к реализации программы построения теории упорядоченных йордановых алгебр, неассоциативного интегрирования и их приложениям в квантовой теории вероятностей. Результаты этих исследований вошли в монографию «Упорядоченные алгебры» (Ташкент, «Фан», 1983, совместно с Т. А. Сарымсаковым, Дж. Х. Хаджиевым и В. И. Чилиным).

Исследования в этом направлении заметно активизировались с переходом Ш. А. Аюпова во вновь образованный отдел функционального анализа Института математики им. В. И. Романовского в 1979 г. Была построена классификация йордановых операторных алгебр (JW-алгебр), установлена связь с типами их обёртывающих алгебр фон Неймана и доказан аналог теоремы Гельфанда-Неймарка для упорядоченных йордановых алгебр. В теории неассоциативного интегрирования по следу были изучены пространства интегрируемых элементов и различные виды сходимости в алгебрах измеримых операторов; в квантовой теории вероятностей – условные ожидания и мартингалы, доказаны статистические и индивидуальные эргодические теоремы, теоремы о сходимости мартингалов, усиленный закон больших чисел в йордановых алгебрах. Результаты исследований легли в основу докторской диссертации «Классификация, представления и вероятностные аспекты упорядоченных йордановых алгебр», успешно защищенной Ш. А. Аюповым в 1983 г. по специальностям «Математический анализ» и «Теория вероятностей и математическая статистика». Эти результаты составили также содержание монографии исследователя «Классификация и представления, упорядоченных йордановых алгебр» (Ташкент, «Фан», 1986)

Дальнейшие исследования Ш. А. Аюпова и его учеников были связаны с теорией вещественных алгебр фон Неймана, лиевой структурой и дифференцированиями этих алгебр, а также некоммутативной спектральной теорией. За цикл исследований по теории операторных алгебр и некоммутативному интегрированию Ш. А. Аюпов со своими учениками Р. З. Абдуллаевым, М. А. Бердикуловым, Ш. М. Усмановым, а также с коллегами из Казанского государственного университета Н В. Труновым и О. Е. Тихоновым в 1986 г. были удостоены Всесюзной премии для молодых ученых. Результаты этих исследований вошли в монографию «Jordan, Real and Lie structures in Operator Algebras», написанную совместно с его учениками А. А. Рахимовым и Ш. М. Усмановым и опубликованную в Голландии издательством Kluwer Academic Publishers в 1997 г.

Более поздние результаты, относящиеся к теории индексов вещественных факторов, вошли в монографию Ш. А. Аюпова и А. А. Рахимова «Real AW^*-algebras, Actions of groups and index theory for real factors», вышедшую в Германии в издательстве VDM Publishers в 2010 г.

В 1994 г. Ш. А. Аюпов по приглашению директора Института высших математических исследований (IRMA) профессора Ж.-Л. Лоде проводил исследования в университете Страсбурга (Франция). Приблизительно в тот же период Ж.-Л. Лоде исходя из потребностей теории гомологий ввёл удачное обобщение алгебр Ли – понятие алгебры Лейбница, которое находит применение во многих разделах математики и физики. После возвращения из Франции Ш.А. Аюпов с учениками приступили к развитию структурной теории конечномерных алгебр Лейбница. Позже к исследованиям в этой области подключились ряд талантливых молодых математиков нашей страны, а также специалисты из Испании, Франции, Малайзии и др. Первые научные результаты в этом направлении вошли в коллективную монографию «Algebra and Operator theory» (Kluwer Academic Publishers, 1998) под редакцией Ш. А. Аюпова, Ю. Хакимжанова и М. Гозе.

В дальнейшем в работах алгебраической школы под руководством Ш. А. Аюпова многие классические и важнейшие результаты из теории алгебр Ли были обобщены на случай алгебр Лейбница. Кроме того, были получены результаты, характерные для не лиевых алгебр Лейбница. Например, было доказано, что метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и их специальных типов дифференцирований продолжается на и случай алгебр Лейбница. На основе методов, усовершенствованных в ходе исследования разрешимых алгебр Лейбница, получено описание структуры максимальных разрешимых расширений нильпотентных алгебр Лейбница. В частности, была скорректирована и доказана известная гипотеза Снобля об описании структуры таких разрешимых алгебр Ли. Таким образом, получена полная информация о строении достаточно большого класса разрешимых алгебр Лейбница, обладающего рядом характерных свойств (таких, как тривиальность центра, тривиальность групп когомологий малых порядков и т. д.).

Следует отметить, что в 2000 г. Ш. А. Аюповым и его учениками было впервые введено понятие супералгебры Лейбница и инициированы исследования данного объекта. Одним из фундаментальных результатов в этом направлении является обобщение аналогичного результата для супералгебр Ли – классификация супералгебр максимального индекса нильпотентности. При исследовании структуры алгебр Лейбница Ш. А. Аюповым были изучены методы и идеи теории неассоцитативных алгебр, гомологической алгебры, которые также были использованы в исследованиях супералгебр Ли и Лейбница, n-Лиевых алгебр и n-алгебр Лейбница.

К настоящему времени под руководством Ш. А. Аюпова сформировалась сильная научная школа по структурной теории алгебр Лейбница и других неассоциативных алгебр. По результатам этих исследований по данной тематике была издана единственная до настоящего времени монография «Leibniz Algebras, Structure and Classification» (CRC Press, Taylor&Francis Group, 2019, 324 p.) авторов Ш. А. Аюпова, Б. А. Омирова, И. С. Рахимова. Следует отметить, что Узбекистан в настоящее время считается ведущим научным центром в данном направлении. Одним из основных показателей признания мировой общественностью вклада российских ученых в эту область алгебры является тот факт, что в основной массе публикаций по алгебрам Лейбница авторства зарубежных ученых содержатся ссылки на результаты Ш. А. Аюпова и его учеников.

Во многом благодаря этим работам в классификаторе Американского математического общества (2010 Mathematics Subject Classification) появился раздел 17А32 – «Алгебры Лейбница».

Еще одно из научных направлений, инициированных Ш. А. Аюповым, — исследование дифференцирований на различных классах алгебр измеримых операторов. В 2000 г. исследователем была предложена программа исследования дифференцирований на алгебрах неограниченных операторов, имеющих важные приложения в квантовой динамике. К 2015 г. эта программа была полностью реализована для случая алгебр измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I, типа III а также к собственно-бесконечным алгебрам фон Неймана, в работах Ш. А. Аюпова, его коллег и учеников, а также в работах других ученых из Австралии, Германии, Голландии, ЮАР, России, США и др. Случай конечных алгебр фон Неймана типа II оказался наиболее сложным и оставался открытой проблемой, привлекающей внимание многих специалистов. В докладе известного американского специалиста по операторным алгебрам Ричарда Кедисона и его соавтора Лиу в 2014 г. (R. Kadison and Z. Liu, A Note on Derivations of Murray-von Neumann Algebras, PNAS, 2014, 111:6, 2087-2093) этот случай также был сформулирован как открытая проблема. И только в 2019 г., т. е. почти через 20 лет, проблема Аюпова была окончательно решена в работе А. Ф. Бера, К. К. Кудайбергенова и Ф. А. Сукочева «Derivations of Murray-von Neumann Algebras», опубликованной в престижном журнале «Journal fur die reine und angewandte Mathematik» (Германия).

Начиная с 2011 г. Ш. А. Аюпов инициировал исследования по локальным и 2-локальным дифференцированиям на операторных алгебрах. Позже, после Первой Конференции математиков США и Узбекистана в Калифорнийском университете (Фуллертон, США) в 2014 г., эти проблемы по предложению известного алгебраиста – лауреата Филдсовской медали профессора Е. И. Зельманова (Калифорнийский университет, Сан-Диего) были рассмотрены для алгебр Ли и других неассоциативных алгебр.

В последние годы в работах Ш. А. Аюпова и его учеников была развита также теория слабо-аддитивных функционалов, топологические и категорные свойства пространств таких функционалов.

По результатам научных исследований Ш. А. Аюповым опубликованы 8 монографий и более 300 научных статей, большинство из которых – в престижных зарубежных и международных журналах. Ученый также является автором 8 учебников и учебных пособий для студентов математических специальностей вузов.

Признанием научных заслуг Ш. А. Аюпова является его избрание членом-корреспондентом АН РУз (1989 г.), академиком АН РУз (1995 г.), действительным членом Академии наук Развивающегося Мира TWAS (2003 г.), ассоциированным членом Международного центра теоретической физики (ICTP) им. Абдуса Салама (2008 г.), членом Академии наук Монголии (2008 г.) и др. По представлению Ш. А. Аюпова молодые доктора наук У. А. Розиков, Б. А. Омиров и К. К. Кудайбергенов, А. Х. Худойбердиев, Э.Т. Каримов, М. М. Рахматуллаев были избраны в состав молодёжной секции Международной академии TWAS. В последние годы У. А. Розиков, Б. А. Омиров, Ф. М. Мухамедов были избраны действительныыми членами TWAS.

В 2017 г. за цикл фундаментальных исследований на тему «Развитие теории неассоциативных алгебр, дифференцирований и нелинейных динамических систем» Ш. А. Аюпов вместе с учениками Б. А. Омировым, К. К. Кудайбергеновым и У. А. Розиковым был удостоен Государственной премии Узбекистана Первой степени в области науки и техники.

TO THE 70TH ANNIVERSARY OF SHAVKAT ABDULLAEVICH AYUPOV

Ш. А. Аюпов проявил себя и как талантливый организатор науки. В 1992-1997 гг. и с 2004 г. он является директором Института математики. В эти годы в институте была создана подлинно творческая атмосфера, существенно расширились международные связи, заметно активизировалась подготовка кадров, особенно молодых докторов наук. Так, например, в течение 2002–2011 гг. под руководством Ш. А. Аюпова выполнялись совместные проекты по линии Германского фонда DFG с Институтом прикладной математики Университета Бонна. В рамках этого проекта более десяти учеников Ш. А. Аюпова проводили научные исследования в Бонне, большинство из которых в дальнейшем стали докторами наук. В последние годы вышли два постановления Президента Республики Узбекистан, посвящённые развитию математической науки и математического образования, в подготовке которых Ш. А. Аюпов принял самое активное участие. Это Постановления Президента от 09.07.2019 № ПП-4387 «О государственной поддержке дальнейшего развития науки и образования в области математики, а также меры по коренному совершенствованию деятельности Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и Постановление Президента ПП-4703 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики». В соответствие с этими постановлениями для Института построено современное новое здание в Студенческом городке, усовершенствована структура Института, образованы его отделения в Нукусе, Ургенче, Бухаре, Самарканде и Намангане. При Институте создан Фонд поддержки молодых математиков.

Ш. А. Аюпов сделал и делает много для международного признания, повышения престижа современной узбекской математической науки. Следует особо отметить его интенсивные творческие контакты с зарубежными коллегами. Он и его ученики регулярно приглашаются для проведения совместных исследований в ведущие научные институты и университеты Австралии, Англии, Германии, Италии, Испании, Малайзии, Франции, Китае, Южной Корее и других стран. По инициативе Ш. А. Аюпова проведены ряд международных конференций в Ташкенте. Ученый также был приглашенным докладчиком и членом оргкомитета на многих международных конференциях. В последние годы наиболее тесное сотрудничество школы Ш. А. Аюпова установлено с коллегами из Сычуанского университета (Ченгду) и Международным математическим центром Южного университета науки и технологий (SUST), Шеньчжень.

Будучи председателем специализированного совета по защите докторских диссертаций, затем членом Президиума Высшей аттестационной комиссии, главным редактором «Узбекского математического журнала», научно-методического журнала «Физика, математика ва информатика», Ш. А. Аюпов прилагает много усилий для повышения уровня математического образования и науки Узбекистана, поиска и привлечения в науку талантливой молодёжи.

Ш. А. Аюпов успешно сочетает плодотворную научную и научно-организационную работу с педагогической и общественной деятельностью. Более 40 лет ученый ведет педагогическую работу в Национальном университете Узбекистана в качестве профессора кафедры функционального анализа и алгебры, заведующего кафедрой функционального анализа, затем – объединенной кафедрой алгебры и функционального анализа. Он подготовил 14 докторов и более 40 кандидатов наук (и PhD), многие из которых ведут успешную научную работу в университетах Узбекистана и за рубежом.

Работая в качестве члена Президиума Академии наук (1994–2000 гг.) в должностях заведующего отделом науки и образования Кабинета Министров Республики Узбекистан (1994–1996 гг.), главного консультанта Аппарата Президента Республики Узбекистан (1996–1997 гг.), Председателя Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан (1997–2003 гг.), заместителя Министра высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан (2003–2004 гг.), Ш. А. Аюпов внёс значительный вклад в развитие высшей школы, укрепление её кадрового потенциала, повышение уровня подготовки кадров высшей квалификации для нашей страны. В декабре 2019 г. он был избран депутатом Ташкентского Городского совета народных депутатов, а в январе 2020 г. Указом Президента Республики Узбекистан назначен членом Сената Олий Мажлиса Республики Узбекистан.

Следуя примеру своего учителя – академика Т. А. Сарымсакова, всегда и на любом посту он остаётся активно работающим учёным-математиком, регулярно ведёт научно-исследовательские семинары, читает лекции, плодотворно работает с учениками.

По человеческим качествам Ш. А. Аюпов является интеллигентом в лучшем смысле этого слова, отличается порядочностью, высокой культурой и твёрдыми нравственными принципами.

За большие заслуги в развитии науки, плодотворную педагогическую деятельность и подготовку научных кадров Ш. А. Аюпов в 1996 г. награждён медалью «Шухрат», в 2003 г. – орденом «Мехнат шухрати», в 2011 г. ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Узбекистан».

24 августа 2021 г. Указом Президента Республики Узбекистан Ш. А. Аюпову присвоено звание «Ўзбекистон Кахрамони» (Герой Узбекистана) с вручением высшего знака – медали «Олтин Юлдуз» (Золотая Звезда).

Свой юбилей Шавкат Абдуллаевич встречает в расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, ярких учеников, счастья и успехов!

Друзья и коллеги Юбиляра

ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА Ш.А. АЮПОВА

14.09.1952 г.	–	Аюпов Шавкат Абдуллаевич родился в городе Ташкенте
1959–1966 гг.	–	учился в средней школе № 40 г. Ташкента
1966–1969 гг.	–	окончил с золотой медалью среднюю школу № 192 г. Ташкента
1969–1974 гг.	–	студент механико-математического факультета Ташкентского государственного университета (ныне Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека)
1974–1977 гг.	–	аспирант кафедры функционального анализа ТашГУ
1977 г.	–	защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
1977 г.	–	лауреат Премии Академии наук Узбекистана для молодых ученых
1977 г.	–	командир международного студенческого отряда ТашГУ в Германской Демократической Республике
1977–1979 гг.	–	ассистент, старший преподаватель кафедры функционального анализа ТашГУ

1979–1985 гг.	–	старший научный сотрудник Института математики имени В. И. Романовского АНРУз
С 1980 г.	–	член Американского математического общества
1983 г.	–	защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
1983 г.	–	лауреат Премии союза молодежи Узбекистана в области науки
1983–1996 гг.	–	профессор, заведующий кафедрой функционального анализа ТашГУ
1984–1987 гг.	–	председатель Совета молодых ученых Узбекистана
1985 г.	–	делегат от Узбекистана на XII Всемирном фестивале молодежи и студентов
1986–1992 гг.	–	заместитель директора Института математики имени В. И. Романовского АНРУз
1986 г.	–	лауреат Премии для молодёжи в области науки и техники
1987 г.	–	присвоено ученое звание профессора
1987–2007 гг.	–	заведующий отделом алгебры и анализа Института математики имени В. И. Романовского АНРУз
1989 г.	–	избран **членом-корреспондентом Академии наук** Республики Узбекистан
1992–1997 гг.	–	директор Института математики имени В. И. Романовского АНРУз.
1992–1994 гг.	–	председатель экспертного совета по математике Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан.
1994–2000 гг.	–	член Президиума Академии наук Республики Узбекистан
1994–1996 гг.	–	заведующий отделом науки и образования Кабинета Министров Республики Узбекистан
1995 г.	–	избран действительным **членом (академиком) Академии наук** Республики Узбекистан
1996–1997 гг.	–	главный консультант Аппарата Президента Республики Узбекистан
1996 г.	–	награжден **медалью «Шухрат»**
1997–2003 гг.	–	Председатель Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан
2000–2010 гг.	–	заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека
2001–2015 гг.	–	главный редактор журнала «Физика, Математика и информатика»
2003–2004 гг.	–	заместитель министра высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан
2003 г.	–	награжден орденом «**Мехнат шухрати**»
2003 г.	–	избран действительным членом Академии наук для Развивающего Мира TWAS
2004–2007 гг.	–	директор Института математики имени В. И. Романовского АНРУз
С 2004 г.	–	главный редактор «Узбекского математического журнала»

2005–2015 гг.	–	председатель специализированного совета по защите диссертаций на соискание учёной степени доктора физико-математических наук
2007–2012 гг.	–	директор Института математики и информационных технологий (образованного на базе Института математики и Института информатики АН РУз)
2008 г.	–	избран членом Монгольской Академии наук
2008 г.	–	член Международного научного совета журнала “TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics»
2008 - 2013 гг.	–	ассоциированный член Международного центра теоретической физики (ICTP) имени Абдуса Салама (Триест, Италия)
С 2010 г.	–	заместитель главного редактора журнала «International Journal of Management Science and Engineering Management» (World Academic Press, UK)
2011 г.	–	избран членом Правления Научного фонда математического общества тюркоязычного мира
2011 г.	–	присвоено почетное звание «**Заслуженный деятель науки Республики Узбекистан**»
С 2011 г.	–	профессор кафедры алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека
2012–2017 гг.	–	директор Института математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека (образованного на базе математического блока Института математики и информационных технологий АН Руз)
С 2017 г.	–	директор Института математики им. В И. Романовского АН РУз (создан на базе Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека)
2017 г.	–	в соответствии с Указом Президента Республики Узбекистан от 23 августа 2017 г. удостоен **Государственной премии первой степени** в области науки и техники (вместе с учениками К. К. Кудайбергеновым, Б. А. Омировым и У. А. Розиковым)
2018 г.	–	организатор международной школы-семинара молодых ученых «Неассоциативные алгебры и их приложения» под эгидой Европейского фонда CIMPA
С 2018 г.	–	член редколлегии научного рецензируемого журнала «Журнал Средневолжского математического общества»
2019 г.	–	избран депутатом Ташкентского городского Совета народных депутатов
2020 г.	–	Указом Президента Республики Узбекистан назначен **членом Сената Олий Мажлиса** Республики Узбекистан
2021 г.	–	Указом Президента Республики Узбекистан Ш. А. Аюпову присвоено звание «**Ўзбекистон Кахрамони**» (Герой Узбекистана) с вручением высшего знака – медали «**Олтин Юлдуз**» (Золотая Звезда)

С 2022 г. – член редколлегии международного научного журнала «Advances in Operator Theory» (Springer)

ПРИГЛАШЕНИЯ ДЛЯ НАУЧНОЙ РАБОТЫ И В КАЧЕСТВЕ ДОКЛАДЧИКА НА МЕЖДУНАРОДНЫХ КОНФЕРЕНЦИЯХ И СЕМИНАРАХ

1979 г. – Международная топологическая конференция (Москва)

1980 г. – Международная конференция «Топология и мера» (Грейфсвальд, Германия)

1981 г. – Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва)

1982 г. – Международная конференция по теории вероятностей (Брашов, Румыния)

1983 г. – поездка во Францию в составе делегации города Ташкента

1985 г. – Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва)

1986 г. – научная работа в Оксфордском, Эдинбургском и Редингском университетах (Великобритания)

1986 г. – член оргкомитета и пленарный доклад на I Всемирном конгрессе общества Бернулли (Ташкент)

1987 г. – научная работа в II Римском университете Tor Vergata (Рим, Италия)

1988 г. – семинар «Йордановы алгебры» (Обервольфах, Германия)

1989 г. – Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва)

1990 г.

– XXI Международный конгресс математиков (Киото, Япония)

– Председатель оргкомитета II Международной конференции «Неассоциативная алгебра и её приложения» (Ташкент)

1991 г. – Международная конференция по алгебре (Барнаул, Россия)

1992 г. – семинар «Йордановы алгебры» (Обервольфах, Германия)

1993 г. – III Международная конференция «Неассоциативная алгебра и её приложения» (Овьедо, Испания)

1994 г. – научная работа в университете Луи Пастера (Страсбург, Франция)

– XXII Международный Конгресс математиков (Цюрих, Швейцария).

1998 г. – XXIII Международный Конгресс математиков (Берлин, Германия)

2000 г. – Международная конференция по функциональному анализу (Валенсия, Испания)

2001 г. – научная работа в университете Верхнего Эльзаса (Мюлуз, Франция)

2002 г.

– XXIV Международный Конгресс математиков (Пекин, Китай)

– научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2003 г.

– научная работа в университете Флиндерс (Аделаида, Австралия)

– семинар Института математики INSPEM университета Путра (Малайзия)

2004 г.

– конференция «Приоритеты развития и роль высшего образования» (Лондон, Великобритания)

– научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

– общее собрание Академии TWAS (Триест, Италия)

– семинар «Квантовая вероятность» II Римского университета Tor Vergata (Рим, Италия)

2005 г.

– посещение университета St. John's University (Нью-Йорк, США)

– председатель оргкомитета международной конференции «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент)

– научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2006 г.

– Международный форум ЮНЕСКО «Научно-техническая политика и устойчивое развитие» (Тегеран, Иран)

– научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2007 г.

– Международная конференция ICREM-3 (Куала-Лумпур, Малайзия)

– научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2008 г.

– общее собрание академии TWAS (Мехико, Мексика)

– Научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2009 г.

– научная работа в ICTP (Триест, Италия)

– Научная работа в Институте прикладной математики Боннского университета (Германия)

2010 г.

– Международная конференция «Спектральная теория и её приложения» (Баку, Азербайджан)

– общее собрание Академии TWAS (Хайдарабад, Индия)

2011 г.

– научная работа в Институте прикладной математики в Боннском университета (Германия)

– научная работа в ICTP (Триест, Италия)

2012 г.

– семинар «Дни алгебры» в университете Путра Малайзия и семинар Международного Исламского университета (Малайзия)

– Международная конференция «Операторные алгебры и смежные проблемы» (Ташкент)

2013 г.

– пленарный доклад на конференции «Problems of Modern Topology and Applications» (Ташкент)

– научная работа в ICTP (Триест, Италия)

2014 г.

– конференция математиков США – Узбекистан (Фуллертон, США)

– XXVII Международный Конгресс математиков (Сеул, Корея)

– общее собрание академии TWAS (Маскат, Оман)

2015 г.

– пленарный доклад на конференции «Actual Problems of Mathematics and Mathematical Modelling» (Алматы, Казахстан)

– пленарный доклад на конференции «International Conference for Energy, Environment and Commercial Civilization» (Чэнду, Китай)

– общее собрание академии TWAS (Вена, Австрия)

2016 г.

– пленарный доклад на Международной конференции «Mathematical Sciences and statistics ICMSS-2016» (Куала-Лумпур, Малайзия)

– Международный коллоквиум в California State University Fullerton (Фуллертон, США)

2017 г.

– научная работа в Korean Institute for Advanced Study (Сеул, Корея)

– организатор летного семестра «USA-Uzbekistan Collaborative Research in Leibniz Algebras» (Ташкент)

– вторая конференция математиков США – Узбекистан (Ургенч)

– Пленарный доклад на Международной конференции Uzbek-Israel International Conference «Contemporary Problems in Mathematics and Physics» (Ташкент)

2018 г.

– Международный коллоквиум в Sichuan University (Чэнду, Китай)

– пленарный доклад на Международной конференции «Contemporary Problems in Mathematics and Mathematical Physics» (Самарканд)

– организатор летного семестра «USA-Uzbekistan Collaborative Research in Leibniz Algebras» (Ташкент)

– Международная школа-семинар для молодых математиков «Неассоциативные алгебры и их приложения», CIMPA Research School (Ташкент)

2019 г.

– пленарный доклад на «International Conference on Algebra» (Шэньчжэн, Китай)

– первая конференция математиков Китай – Центральная Азия (Чэнду, Китай)

– Международный семинар «Non-commutative Probability and Infinite-Dimensional Analysis» (Казань, Россия)

2020 г. – пленарный доклад на Международной конференции «Lie and Jordan Algebras» Sichuan University (Чэнду, Китай)

2021 г.

– Международный (online) семинар «Algebras, Representations, and Applications» (Сан-Паулу, Бразилия)

– Международная конференция «Problems of Modern Mathematics and its Applications» (Бишкек, Кыргызстан)

– пленарный доклад на Международной конференции «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite Dimensional Analysis-2021» (Москва, Россия)

ДИССЕРТАЦИИ, ПОДГОТОВЛЕННЫЕ ПОД РУКОВОДСТВОМ Ш. А. АЮПОВА

Докторские диссертации

1999

1. Рахимов Абдугафур Абдумажидович. Классификация инъективных вещественных факторов и их автоморфизмов.

2. Усманов Шухрат Муталлибович. Непрерывное и дискретное разложения и операторозначные веса для вещественных алгебр фон Неймана.

3. Абдуллаев Рустамбай Зайирович. Операторные алгебры Аренса и их изоморфизмы.

2006

4. Омиров Бахром Абдазович. Нильпотентные алгебры и супералгебры Лейбница.

2007

5. Бешимов Рузиназар Бебутович. Некоторые кардинальные инварианты и ковариантные функторы в категориях топологических пространств.

2008

6. Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович. Измеримые расслоения линейных операторов и их приложения к операторным алгебрам и дифференцированиям.

2011

7. Заитов Одилбек Атаханович. Слабо аддитивные функционалы на топологических пространствах.

8. Рахимов Исамиддин Саттарович. Инварианты многообразий филиформных алгебр Лейбница и эллиптических кривых.

2016

9. Худойбердиев Аброр Хакимович. Структурная теория конечномерных комплексных алгебр Лейбница и классификация нильпотентных супералгебр Лейбница.

10. Арзикулов Фарходжон Нематжонович. Йордановы операторные алгебры бэровского типа и приложения к теории измеримых операторов.

2020

11. Ботиров Голиб Исроилович. Gibbs measures of lattice systems with an infinite set of spin values.

2021

12. Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич. Описание вещественных гранево симметричных пространств и их приложения к геометрической характеризации JBW-алгебр.

13. Humberto Gil Silva Rafeiro (Portugal). Non-standard function spaces with application to harmonic analysis.

2022

14. Жураев Турсунбой Файзиевич. Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов.

Кандидатские диссертации
PhD диссертации

1984

1. Бердикулов М.А. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых банаховых алгебрах с полуконечным следом.
2. Абдуллаев Р.З. Пространства L_p для полуконечных JBW-алгебр.

1985

3. Усманов Ш.М. Строение и классификация йордановых алгебр самосопряженных операторов.

1986

4. Адизов А.А. Описание мер на проекторах и нормальных весов в йордановых банаховых алгебрах.
5. Закиров Ф.М. Автоморфизмы йордановых банаховых алгебр и их инвариантные состояния.

1987

6. Таджибаев Б.Р. Неассоциативные пространства Орлича в йордановых алгебрах и их абстрактная характеризация.
7. Каримов А.К. Почти равномерные сходимости на йордановых банаховых алгебрах и их приложения.

1989

8. Ядгоров Н.Ж. Строение и классификация упорядоченных банаховых пространств и выпуклых множеств.
9. Эгамбердиев О.И. Эргодические свойства абсолютных сжатий и инвариантность положительных функционалов в JBW-алгебрах.

1990

10. Яссин Абдужаббар Салих (Ирак). Отношение эквивалентности в вещественных алгебрах фон Неймана.

1991

11. Рахимов А.А. Периодические автоморфизмы и антиавтоморфизмы инъективных факторов типа II.

1993

12. Алимов А.А. Структура алгебр неограниченных операторов и их дифференцирований.

1994

13. Абдуллаев И.З. Лиевы и йордановы отображения вещественных алгебр фон Неймана.
14. Азизов Э.Ю. Условные ожидания на йордановых банаховых алгебрах.

1996

15. Бойкобилов Б.М. Вещественные инъективные алгебры фон Неймана.

1997

16. Кодиров К.Р. Субаддитивные меры на йордановых банаховых алгебрах.
17. Гбеха Ассиба Мишелин Виктуар (Бенин). Неассоциативные структуры и связанные с ними отображения в вещественных алгебрах фон Неймана.

1998

18. Тургунбаев Р.М. Неархимедовы гильбертовы пространства и C^*-алгебры.

1999

19. Жураев И.М. Крайние положительные линейные отображения пространств с порядковой единицей.
20. Омиров Б.А. Структурная теория конечномерных алгебр Лейбница.

2000

21. Азамов Н.А. Лиевы структуры в алгебрах фон Неймана.
22. Ибрагимов М.М. Сжимающие проекторы и геометрические свойства гранево симметрических банаховых пространств.

2002

23. Кудайбергенов К.К. Измеримые расслоения компактных множеств и их приложения к теореме Шоке и измеримым расслоениям компактных операторов.

2004

24. Заитов О.А. Некоторые свойства пространств знакопеременных мер и функтора слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов.

2006

25. Дадаходжаев Р.А. Алгебры измеримых операторов и идеалы компактных операторов для вещественной алгебры фон Неймана.
26. Джаббаров Г.Ф. Локально слабо сепарабельные пространства и функтор слабо аддитивных положительно однородных функционалов.
27. Тлеумуратов С.Ж. Геометрические свойства гранево симметрических банаховых пространств.

2007

28. Рихсибоев И.М. Нильпотентные алгебры Лейбница и диассоциативные алгебры.

2009

29. Сейпуллаев Ж.Х. Геометрические свойства единичных шаров сильно гранево симметричных пространств конечного ранга.

30. Давлетов Д.Э. Описание и категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов.

2010

31. Худойбердиев А.Х. Классификация некоторых конечномерных комплексных нильпотентных градуированных алгебр Лейбница.

32. Рузиев Ж.Э. Дифференцирования и автоморфизмы операторных алгебр над кольцом измеримых функций.

33. Жиемуратов Р.Е. Топологические и категорные свойства пространства нелинейных σ-гладких функционалов.

2012

34. Реджепов Ш.Б. Классификация естественным образом градуированных n-мерных алгебр Лейбница нильиндекса n˘2.

35. Таджиев И.И. Топологические свойства пространства идемпотентно-линейных функционалов на алгебре непрерывных функций компакта.

2016

36. Нуржанов Б.О. Local Derivations on Algebras of Measurable Operators.

2017

37. Масутова К.К. On some null-filiform algebras and solvable Leibniz algebras.

2020

38. Юсупов Б.Б. Local and 2-local derivations on Leibniz algebras.

2021

39. Абдурасулов К.К. Разрешимые алгебры Лейбница с ограничениями на дополняющее пространство к нильрадикалу.

40. Имомкулов А.Н. Approximation of finite dimensional algebras by evolution algebras.

2022

41. Жалилов А.А. Denjoy equality and infinite binary sequences associated with circle homeomorphisms.

42. Шерматова З.Х. Classification of five-dimensional solvable Leibniz algebras and certain complete Leibniz algebras.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Ш. А. АЮПОВА

Монографии

1. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, I.S. Rakhimov. Leibniz Algebras. Structure and Classification. CRC Press, Taylor&Francis Group, 2019, 324 p.

2. B. Russo, A. Aksoy, R. Ashurov, Sh. Ayupov. Topics in Functional Analysis and Algebra. Contemporary Mathematics, 672 (2016), Providence/Rhode Island.

3. Sh.A. Ayupov, A.A. Rakhimov. Real W^*-algebras, Actions of Groups and Index Theory for Real Factors. VDM Publishers, 2010.

4. Классическая наука Средней Азии и современная мировая цивилизация. Монография (под ред. П.К. Хабибуллаева, А.Ф. Файзуллаева). Ташкент, Фан, 2000.

5. Yu. Khakimdjanov, M. Goze and Sh.A. Ayupov. Algebra and Operator Theory. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London 1998, 250 p.

6. Sh.A. Ayupov, A.A. Rakhimov, Sh.M. Usmanov. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-London, 1997. Math. and Appl., v. 418, 225 p.

7. Ш.А. Аюпов. Классификация и представления, упорядоченных йордановых алгебр (монография). Ташкент, Фан, 1986. 124 с.

8. Т.А. Сарымсаков, Ш.А. Аюпов, Дж.Х. Хаджиев, В.И. Чилин. Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983. 304 с.

Учебники и учебные пособия

1. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, A.X. Xudoyberdiyev. Abstrakt Algebra. O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2022, 250 bет.

2. Sh. A. Ayupov, R.M. Turg‘unbayev. P-adik Analizga Kirish. O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2020, 90 bet.

3. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, A.X. Xudoyberdiyev, F.H. Haydarov Algebra va Sonlar Nazariyasi. O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2019, 295 bet.

4. Sh.A. Ayupov, R.Z. Abdullaev, K.K. Kudaybergenov. Funksional Analizning tanlangan boblari. O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2015, 128 bet.

5. Sh.A. Ayupov, M. Berdiqulov, R. Turg‘unbayev. Matematik Analiz (Funksional Analizga Kirish). O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2014, 127 bet.

6. Sh.A. Ayupov, M.M. Ibragimov, K.K. Kudaybergenov. Funksional Analizdan Misol va Masalalar. O‘quv qo‘llanma, Nukus - 2009, 301 bet.

7. Sh.A. Ayupov, M. Berdiqulov, R. Turg‘unbayev. Funksional Analiz. O‘quv qo‘llanma, Toshkent - 2008, 106 bet.

8. Ш.А. Аюпов, М. Бердикулов, Р. Тургунбаев. Функциялар назарияси. Дарслик. Тошкент - 2004, 146 бет.

Научные статьи

2022

1. Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, Z.Kh. Shermatova. On Complete Leibniz Algebras. International Journal of Algebra and Computation, 32 (2), 2022, pp. 265-288.

2. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, Kh. Karimov. Isomorphisms of commutative regular algebras. Positivity, 26 (1), 2022, 11.

3. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, A. Allambergenov. Local and 2-Local Derivations on Octonion Algebras. Journal of Algebra and Its Applications, doi.org/10.1142/S0219498823501475 (2022).

4. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. Enveloping *-Algebras and Derivations of Baer JB-Algebras. Communications in Algebra, 2022. 50 (4). pp 1720-1727.

5. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов, Б.Б. Юсупов, Локальные и 2-локальные дифференцирования локально простых алгебр Ли. Современная математика. Фундаментальные направления. 68 (1), 2022, С. 59-69.

2021

6. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Ring Isomorphisms of Murray–von Neumann Algebras. Journal of Functional Analysis, 280 (5), 2021, 108891.

7. Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev. Local Derivations on Solvable Lie Algebras. Linear and Multilinear Algebra, 69 (7), 2021, pp. 1286-1301.

8. Sh.A. Ayupov, A. Jalilov. Asymptotic Distribution of Hitting Times for Critical Maps of the Circle. Vestnik Udmurtskogo Universiteta, Mathematics. 31 (3), 2021, pp. 1-19.

9. Sh.A. Ayupov. Ring isomorphisms of Murray–von Neumann Algebras. "Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis" International Conference MPDSIDA-2021, Dolgoprudny, Russia, June 30 – July 9, 2021, pp. 10-11.

10. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.B. Yusupov. 2-Local Derivations on Generalized Witt Algebras. Linear and Multilinear Algebra, 69 (6), 2021, pp. 3130-3140.

11. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Ring Isomorphisms of *-Subalgebras of Murray–von Neumann Factors. Lobachevskii Journal of Mathematics, 42 (12), 2021, 2730-2732.

12. Sh.A. Ayupov, Dj. Khadjiev, G. Beshimov. Affine Invariants of a Parametric Figure for Fundamental Groups of n-Dimensional Affine Space. Uzbek Mathematical Journal, 65 (4), 2021. pp. 27-61.

2020

13. Sh.A. Ayupov. K.K. Kudaybergenov, B.B. Yusupov. Local and 2-Local Derivations of p-Filiform Leibniz Algebras. Journal of Mathematical Sciences, 245 (3), 2020, pp. 359-367.

14. Sh.A. Ayupov. T.F. Dzuraev. On Projectively Inductively Closed Subfunctors of the Functor P of Probability Measures. Journal of Mathematical Sciences, 245 (3), 2020, pp. 382-389.

15. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. Description of 2-Local and Local Derivations on Some Lie Rings of Skew-Adjoint Matrices. Linear and Multilinear Algebra, 68 (4), 2020, pp. 764-780.

16. Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B. Yusupov. Local and 2-Local Derivations on Solvable Leibniz Algebras. International Journal of Algebra and Computation, 30 (6), 2020, pp. 1185-1197.

17. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Infinite Dimensional Central Simple Regular Algebras with Outer Derivations. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (3), 2020, pp. 326-332.

18. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov. Local and 2-Local Derivations and Automorphisms on Simple Leibniz Algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2022, pp. 2199-2234.

19. Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.B. Yusupov. Local and 2-Local Derivations on Solvable Leibniz Algebras. “Frontier in Mathematics and Computer Sciences” International online Conference, Tashkent, October 12-15, 2020, pp. 24-25.

20. Sh.A. Ayupov, Dj. Khadjiev, G. Beshimov. Complete Systems of Invariant of m-Tuples for Fundamental Groups of the Two-Dimensional Euclidian Space. Uzbek Mathematical Journal, 1, 2020, pp. 57-84.

21. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov, N. Umrzakov, O. Nuriddinov, Description of 2-Local Derivations and Automorphisms on Finite Dimensional Jordan Algebras. Linear and Multilinear Algebra, 2020. DOI: 10.1080/03081087.2020.1845595.

22. Sh.A. Ayupov, A.A. Jalilov. Sturmian Sequences and Hitting Times of Circle Maps. Доклады АН РУз, 2020, No. 6, pp. 9-12.

23. Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. 2-Local Derivations on Infinite-Dimensional Lie Algebras. Journal of Algebra and Its Applications. 19 (5), 2020, 2050100.

24. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov, Kaiming Zhao Semi-Simple Leibniz Algebras and their Derivations and Automorphisms. Linear and Multilinear Algebra, 68(10), 2020, 2005-2019.

2019

25. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, T. Kalandarov. 2-Local Automorphisms on AW^*-algebras. Trends in Mathematics, 2019. pp. 1-13.

26. Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. Local and 2-Local Derivations of Some Solvable Leibniz Algebras. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» Узбекско-Российская научная конференция, Ташкент, 24-26 октября 2019, С. 192-194.

27. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. Jordan Counterparts of Rickart and Baer *-algebras, II. Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, 13, 2019, pp. 27-38.

28. Sh.A. Ayupov, B.B. Yusupov. 2-Local Derivations on Virasoro Algebras. Bulletin of National University of Uzbekistan, 2 (4), 2019, pp. 217-230.

29. Ш.А. Аюпов, Т.Ф. Жураев. Пространства Дугунджи и проективно-индуктивно замкнутые функторы в категории Tych. Abstracts of the International Conference “Modern Problems of Geometry and Topology and their Applications” Tashkent, Uzbekistan, November 21-23, 2019, 10 p.

2018

30. Ш.А.Аюпов, Ф.Н. Арзикулов. 2-Local Derivations on Algebras of Matrix-Valued Functions on a Compact. Владикавказский математический журнал, 20 (1), 2018, pp. 38-49.

31. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local Derivations on Finite-Dimensional Lie and Leibniz Algebras. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 264, 2018, pp. 31-44.

32. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов, Б.Б. Юсупов. Локальные и 2-локальные дифференцирования p-филиформных алгебр Лейбница. Итоги Науки и Техники. Современная математика и её приложения. 44, 2018. С. 65-73.

33. Ш.А. Аюпов, Т.Ф. Жураев. О проективно индуктивно замкнутых подфункторах функтора P вероятностных мер. Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. 44, 2018, С. 65-73.

34. Ш.А. Аюпов. Т.Ф. Жураев. Абсолютные экстензоры на категории Tych и пространства Дугунджи. Республиканская Конференция с участием зарубежных учёных «Проблемы современной топологии и её приложения». Ташкент, 13 сентября 2018, С. 8-9.

35. Sh.A. Ayupov, A.N. Imomkulov. Two Dimensional Evolution Algebras and Evolution Algebras Corresponding to their Idempotents. Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий. Аль-Хорезми 2018», 2018, С. 136.

2017

36. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local Automorphisms on Finite-Dimensional Lie and Leibniz Algebras. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics vol.264, Algebra, Complex Analysis, and Potential Theory. 2 USUZCAMP, Urgench, Uzbekistan, August 8-12, 2017, pp. 31-44.

37. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, A. Alauadinov. 2-Local Derivations on Matrix Algebras and Algebras of Measurable Operators Advances in Operator Theory, 2 (4), 2017, pp. 494-505.

38. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. 2-Local Derivations on Associative and Jordan Matrix Algebras Over Commutative Rings. Linear Algebra and its Applications. 522, 2017, pp. 28-50.

39. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. 2-Local Derivations on AW*-algebras of Type I. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38 (1), 2017, pp. 148-161.

40. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов, Б.Б. Юсупов. Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница. Узбекский Математический Журнал, 2017, № 1, С. 44-54.

41. Ш.А. Аюпов, Б.Б. Юсупов. Локальные и 2-локальные дифференцирования квази-филиформных алгебр Лейбница. УзМУ Хабарлари, 2017, № 1, С. 7-83.

42. Sh.A. Ayupov, F. Arzikulov. 2-Local Derivations on Lie Algebras of Skew-Adjoint Infinite Dimensional Operators. “Contemporary Problems in Mathematics and Physics” Abstracts of Uzbek-Israel International Conference, October 6-10, 2017, pp 32-36.

43. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. 2-Local Derivations on Jordan Matrix Rings over Commutative Rings. Республиканская научно-практическая конференция. «Жизнь и творчество академика Ташмухамеда Ниязовича Кары-ниязова» Ташкент, 7-8 сентябрь, 2017.

2016

44. Sh.A. Ayupov, K.K.Kudaybergenov. Local Derivations on Finite-Dimensional Lie Algebras. Linear Algebra and its Applications. 493, 2016, pp. 381-398.

45. Sh.A. Ayupov, F.N Arzikulov. Jordan Counterparts of Rickart and Baer *-algebras. Узбекский Математический Журнал, 2016, № 1, С. 13-33.

46. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Derivations on Matrix Algebras over Semi-Prime Banach Algebras and on AW*-algebras. Journal of Physics: Conference Series. 697 (1), 2016, pp. 1-11.

47. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local Derivations on Measurable Operators and Commutativity. European Journal of Mathematics, 2 (4), 2016, pp. 1023-1030.

48. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Automorphisms on Finite-Dimensional Lie Algebras. Linear Algebra and its Applications. 507, 2016, pp. 121-131.

49. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Derivations, Local and 2-Local Derivations on Algebras of Measurable Operators. Contemporary Mathematics, 672, 2016, pp. 51-72.

50. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, A.M. Peralta. A Survey on Local and 2-Local Derivations on C^*-Algebras and von Neumann Algebras. Contemporary Mathematics, 672, 2016, pp. 73-126.

51. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. Reversible AJW-Algebras. Владикавказский математический журнал, 18 (3), 2016, pp. 15-21.

52. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. On Reversible AJW-Algebras. ACTA National University of Uzbekistan, Natural sciences. 2016, pp. 101-107.

53. Ш.А. Аюпов, Т.Ф. Жураев. C-пространства и ковариантные функторы конечной степени. Республиканская Конференция с участием зарубежных учёных «Проблемы современной топологии и её приложения». Ташкент, 5-6 май, 2016, С. 14-20.

54. Sh.A. Ayupov. Local and 2-Local Derivations and Automorphisms of Finite Dimensional Lie Algebras. 2nd International Conference on Mathematical Sciences and statistics ICMSS-2016, January 26-28, 2016, Kuala Lumpur, Malaysia. Program and Abstract book, pp. 22.

55. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local and 2-Local Automorphisms of Finite Dimensional Lie Algebras. International Conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies" Bukhara, Uzbekistan, November 9-10, 2016, C. 244-246.

2015

56. Sh.A. Ayupov. K.K. Kudaybergenov, I.S. Rakhimov. 2-Local Derivations on Finite-Dimensional Lie Algebra. Linear Algebra and its Applications. 474, 2015, pp. 1-11.

57. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Derivations on von Neumann Algebras. Positivity, 19 (3), 2015, pp. 445-455.

58. Sh.A. Ayupov, L.M. Camacho, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.A.Omirov. Leibniz Algebras Associated with Representations of Filiform Lie Aalgebras. Journal of Geometry and Physics, 98, 2015, pp. 181-195.

59. Ш.А. Аюпов, Ф.Н. Арзикулов. Йордановы алгебры абстрактных измеримых операторов для JB-алгебры бэровского типа. Доклады АН РУз, 6, 2015, С. 5-7.

60. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Derivations on Finite-Dimensional Lie Algebras. Республиканская Конференция с участием зарубежных учёных «Современные Проблемы Математической Физики и их Приложения». Ташкент, 15-17 Апрель, 2015, С. 94-95.

61. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Derivations on AW*-Algebras. Республиканская Конференция с участием зарубежных учёных «Алгебра, Анализ и Квантовая Вероятность» Ташкент. 10-12 Сентябрь, 2015, С. 30-32.

62. Sh.A. Ayupov, F.N Arzikulov. On Reversible AJW-Algebras. Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения. VII Ферганская конференция. Наманган, 2015, С. 277-280.

2014

63. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. 2-Local Derivations on Semi-Finite von Neumann Algebras. Glasgow Mathematical Journal, 56 (1), 2014, pp. 9-12.

64. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B. Nurjanov, A. Alauatdinov. Local and 2-Local Derivations on Noncommutative Arens algebras. Mathematica Slovaca, 64 (2), 2014, pp. 423-432.

65. Sh.A. Ayupov, R.Z. Abdullaev, K.K. Kudaybergenov. On a Certain Class of Operator Algebras and their Derivations. Eurasian Mathematical Journal, 5 (1), 2014, pp. 82-94.

66. Sh.A. Ayupov Derivations on Operator Algebras. USA-Uzbekistan Conference on Natural Sciences and Mathematics. California State University, Fullerton. May 20-24, 2014, pp. 3.

67. Sh.A. Ayupov 2-Local Derivations on von Neumann Algebras. International Congress of Mathematicians-Seoul. Abstracts of Short Communications, 2014, pp. 247.

2013

68. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, A. Alauatdinov. 2-Local Derivations on Algebras of Locally Measurable Operators. Annals of Functional Analysis, 4 (2), 2013, pp. 110-117.

69. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. AW^*-Algebras which are Enveloping C^*-Algebras of JC-Algebras. Algebras and Representation Theory, 16 (1), 2013, pp. 289-301.

70. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Innerness of Continuous Derivations on Algebras of Measurable Operators Affiliated with Finite Neumann Algebras. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 408 (1), 2013, pp. 256-267.

71. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, A.Alauatdinov. 2-Local Derivations on Matrix Algebras over Commutative Regular Algebras. Linear Algebra and its Applications, 439 (5), 2013, pp. 1294-1311.

72. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Spatiality of Derivations on the Algebra of tau-Compact Operators. Integral Equations and Operator Theory, 77 (4), 2013, 581-598.

73. Sh.A. Ayupov, R.Z. Abdullaev, K.K. Kudaybergenov. On a Certain Class of Operator Algebras and their Derivations. International conference. “Problems of Modern Topology and Applications”, Tashkent, May 20-24, 2013, pp. 19-22.

74. Ш.А. Аюпов. Исследования по топологии в Узбекистане. Тезисы докладов Международной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 20-24 май, 2013, С. 12-13.

75. Ш.А. Аюпов., А.Заитов. Слабо бесконечномерные пространства и функтор идемпотентных вероятностных мер. Тезисы докладов Международной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 20-24 май, 2013, С. 116-118.

76. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov. 2-Local Derivations on Matrix Rings over Associative Rings. Republican Conference “Topical issues of Complex analysis” Tashkent, September 19-21, 2013, pp. 19-20.

77. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Spatiality of Derivations on the Algebra of tau-Compact Operators. Republican Conference “Topical issues of Complex analysis” Tashkent, September 19-21, 2013, pp. 20-22.

2012

78. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, R.T. Jumamuratov. Topologies on Central Extensions of von Neumann Algebras. Central European Journal of Mathematics, 10 (2), 2012, pp. 654-664.

79. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. 2-Local Derivations and Automorphisms on B(H). Journal of Mathematical Analysis and Applications, 395 (1), 2012, pp. 15-18.

80. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Additive Derivations on Algebras of Measurable Operators. Journal of Operator Theory, 67 (2), 2012, pp. 495-510.

81. Sh.A. Ayupov, V.I. Chilin, R.Z. Abdullaev. Orlicz Spaces Associated with a semi-Finite von Neumann Algebra. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 53 (4), 2012, pp. 519-533.

82. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, R. Dadakhodjaev, A. Rakhimov. Index Theory for Real Factors. Eurasian Mathematical Journal, 3 (2), 2012, pp. 12-20.

83. Sh.A. Ayupov. 2-Local Derivations on Operator Algebras. Материалы Респ. конференции «Актуальные проблемы математического анализа», 9-10 ноябрь, 2012, pp. 12-13.

84. Sh.A. Ayupov. Derivations and Local Derivations on Algebras of Measurable Operators. International Conference "Operator Algebras and Related Topics", Tashkent, September 12-14, 2012, pp. 14-15.

2011

85. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov, B. Nurjanov. Local Derivations on Algebras of Measurable Operators. Communications in Contemporary Mathematics, 13, 2011, pp. 643-657.

86. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, R.Z. Abdullaev, K.K. Kudaybergenov. Additive Derivations on Generalized Arens Algebras. Lobachevskii Journal of Mathematics, 32 (3), 2011, pp. 194-202.

87. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov, R.T. Jumamuratov. Automorphisms of Central Extensions of Type I von Neumann algebras. Studia Mathematica, 207 (1) 2011, pp. 1-17.

88. Ш.А. Аюпов, А. Заитов. О некоторых топологических свойствах пространства слабо аддитивных функционалов. Узбекский Математический Журнал, 4, 2011, С. 36-51.

2010

89. Sh.A. Ayupov. S. Albeverio, R.Z. Abdullaev. Arens Algebras Associated with von Neumann Algebras and Normal States. Positivity, 14 (1), 2010, pp. 105-121.

90. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Derivations on Algebras of Measurable Operators. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 13 (2), 2010, pp. 305-337.

91. Sh.A. Ayupov, T. Kurbanbaev. The Classification of 4-dimensional p-adic Filiform Leibniz Algebras. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 1 (2), 2010, pp. 155-162.

92. Ш.А. Аюпов. К.К.Кудайбергенов, Б.О. Нуржанов. Локальные дифференцирования алгебры измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана типа I. Узбекский математический журнал, 2010, № 3, С. 9-18.

93. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, R. Dadakhodjaev, A. Rakhimov. Jones Index for Real W*-Algebras. Eurasian Mathematical Journal, 2010, 1 (4). pp. 5-19.

2009

94. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, A.Kh. Khudoyberdiyev. The Classification of Filiform Leibniz Superalgebras of Nilindex n+m. Acta Mathematica Sinica, 25 (2), 2009, pp. 171-190.

95. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Structure of Derivations on Various Algebras of Measurable Operators for Type I von Neumann Algebras. Journal of Functional Analysis, 256, 2009, pp. 2917-2943.

96. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, B.A. Omirov, R.M. Turdibaev. Cartan Subalgebras of Leibniz n-Algebras. Communications in Algebra, 37 (6), 2009, pp. 2080-2096.

97. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Description of Derivations on Locally Measurable Operator Algebras of Type I. Extracta Mathematicae, 24 (1), 2009, pp. 1-15.

98. Ш.А. Аюпов, А.А. Заитов. Функтор слабоаддитивных тау-гладких функционалов и отображения. Украинский математический журнал, 61 (9), 2009, С. 1167-1173.

99. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, A.A. Zaitov, J.E. Ruziev. Algebras of Unbounded Operators over the Ring of Measurable Functions and their Derivations and Automorphisms. Methods of Functional Analysis and Topology, 15 (2), 2009, pp. 177-187.

2008

100. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, B.A. Omirov, A. Kh. Khudoyberdiyev. n-Dimensional Filiform Leibniz Algebras of Length $(n-1)$ and their Derivations. Journal of Algebra, 319, 2008, pp. 2471-2488.

101. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Innerness of Derivations on Subalgebras of Measurable Operators. Lobachevskii Journal of Mathematics, 29 (2), 2008, pp. 60-67.

102. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Derivations on the Algebra of t-Compact Operators Affiliated with a Type I von Neumann Algebra. Positivity, 12, 2008, pp. 375-386.

103. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Derivations on Algebras of Measurable Operators Affiliated with Type I von Neumann Algebras. Siberian Advances in Mathematics, 18 (2), 2008, pp. 86-94.

104. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, A.A. Zaitov. On Certain Properties of the Spaces of Order-Preserving Functionals. Topology and its Applications, 155 (16), 2008, 792-799.

105. Sh.A. Ayupov, К. Кудайбергенов. Операторы типа дифференцирования на алгебре измеримых операторов. Вестник Каракалпакского Государственного университета им. Бердаха. Естественные и технические науки, 2008, № 1, С. 7-8.

106. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, R.Z. Abdullaev. On an Algebra of Operators Related to Finite Traces on a von Neumann Algebra. Preprint, SFB 611, Universitat Bonn, 419, 2008.

107. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов. Дифференцирования неограниченных операторных алгебр типа I. В сборнике «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», ИПМИ ВНЦ РАН, Владикавказ 2008, С. 33-40.

2007

108. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов. Дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса. Функциональный анализ и его приложение. 41 (4), 2007, С. 70-72.

109. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов. Дифференцирования C^*-алгебр над кольцом измеримых функций. Узбекский математический журнал, 2007, No. 1, pp. 39-47.

110. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Derivations on the Algebra of t-Compact Operators Affiliated with a Type I von Neumann Algebra. SFB 611, Universitat Bonn, preprint, 324, 2007.

111. Sh.A. Ayupov. Derivations on Operator Algebras. Proceedings of the Third International Conference on Research and Education in Mathematics (ICREM 3), Kuala-Lumpur, Malaysia, April 10-12, 2007, pp. 8-14.

112. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Non commutative Arens Algebras and their Derivations. Journal of Functional Analysis, 253 (1), 2007, pp. 285-302.

113. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, K.K. Kudaybergenov. Description of Derivations on Measurable Operator Algebras of Type I. Preprint, SFB 611, Universitat Bonn, 361, 2007.

114. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, A.A. Zaitov. On Metrizability of the Spaces of Order-Preserving Functionals. Preprint, SFB 611, Universitat Bonn, 363, 2007.

115. Sh.A. Ayupov, A.A. Zaitov. On the Weight and the Density of the Space of Order-Preserving Functionals. arXiv:math. 0710.3344v1.

116. Ш.А. Аюпов, К.К. Кудайбергенов, Т.С. Каландаров. *-Автоморфизмы алгебры Аренса, ассоциированной с алгеброй фон Неймана типа I. Узбекский математический журнал, 2007, № 4, С. 9-17.

2006

117. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, B.A. Omirov. Cartan Subalgebras, Weight Spaces, and Criterion of Solvability of Finite Dimensional Leibniz Algebras. Revista Matematica Complutense 19 (1), 2006, pp. 183-195.

118. Ш.А. Аюпов, А.А. Заитов, Ж.Э. Рузиев. Дифференцирования и автоморфизмы алгебр неограниченных операторов над кольцом измеримых функций. Узбекский математический журнал, 2006, № 1, С. 28-42.

119. Ш.А. Аюпов, Ф.Н. Арзикулов. Максимальные вещественные алгебры фон Неймана в гильбертовом пространстве. Узбекский математический журнал, 2006, № 3, С. 7-12.

120. Ш.А. Аюпов, А.А. Заитов. Слабо аддитивные функционалы на линейных пространствах. Доклады АН РУз, 2006, No 4-5, С. 7-12.

121. Ш.А. Аюпов, В.К. Кабулов Проблемы алгоритмизации алгебраических систем. Вопросы вычислительной и прикладной математики. 2006, № 117, С. 5-19.

122. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, R.A. Dadakhodjayev. On Partially Ordered Real Involutory Algebras. Acta Applicandae Mathematicae, 94 (3), 2006, pp. 195-214.

123. Ш.А. Аюпов, А.А. Заитов. Принцип равномерной ограниченности для слабо аддитивных операторов. Узбекский математический журнал, 2006, № 4, С. 3-10.

124. Ш.А. Аюпов, К.К.Кудайбергенов. Некоммутативные алгебры Аренса и их дифференцирования. Материалы Республиканской научной конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа», Нукус 2006, С. 6-8.

2005

125. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, B.A. Omirov. On Nilpotent and Simple Leibniz Algebras. Communication in Algebra. 33, 2005, 159-172.

126. Sh.A. Ayupov, S. Albeverio, A. Abduvaitov. On Real AW^*-Algebras. Methods of Functional Analysis and Topology, 11 (2), 2005, pp. 99-112.

127. Ш.А. Аюпов, М.А. Бердикулов. Задачи теории вероятностей на пространствах с порядковой единицей. Владикавказский математический журнал, 7 (11), 2005, С. 1-26.

128. Sh.A. Ayupov. Derivations on Unbounded Operator Algebras. International Conference “Operator Algebras and Quantum Probability”, Tashkent, September 7-10, 2005, pp. 38-42.

129. Ш.А. Аюпов, Б.Омиров. Сопряженность подалгебр Картана комплексных конечномерных алгебр Лейбница. Международная конференция «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей», Ташкент, 7-10 Сентябрь, 2005, С. 42-44.

2004

130. Ш.А. Аюпов. Описание вещественных AW^*-факторов типа I. Математические заметки, 76 (3), 2004, С. 344-349.

131. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Нильпотентные свойства алгебры Лейбница $Mn(C)D$. Сибирский математический журнал, 45 (3) 2004, С. 483-496.

132. Ш.А. Аюпов. Вещественные AW^*-алгебры типа I. Функциональный анализ и его приложения, 38 (3), 2004, С. 79-81.

133. Ш.А. Аюпов, С. Альбеверио, А.Х. Абдуваитов. О совпадении типов вещественной AW^*-алгебры и её комплексификации. Известия РАН, 68 (5), 2004, С. 3-12.

134. Ш.А. Аюпов, А.Х. Абдуваитов. Об одном свойстве вещественной AW^*-алгебры типа II1. Доклады АН РУз. 2004, № 2, С. 3-6.

135. Ш.А. Аюпов, Р.А. Дадаходжаев. Дискретные вещественные O^*-факторы. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент, 16-19 ноябрь, 2004, С. 142-144.

136. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Наитончайшие и градуированные тонкие алгебры Лейбница. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент, 16-19 ноябрь, 2004, С. 126-128.

137. Sh.A. Ayupov. Derivation on Algebras of Measurable Operators: Recent Results and Open Problems. Материалы конференции молодых ученых, посвященных 125-летию В.И. Романовского. Ташкент, 9-10 декабрь, 2004, С. 5-8.

2003

138. Ш.А. Аюпов, W^*-вложимость вещественных AW^*-алгебр. Доклады АН РУз, 2003, № 2, С. 3-7.

139. Ш.А. Аюпов, Р. Дадаходжаев. К теории вещественных O^*-алгебр. Узбекский математический журнал, 2003, № 1, С. 16-24.

140. Ш.А. Аюпов, Р. Дадаходжаев. Вещественные O^*-алгебры и их комлексификации. Доклады АН РУз, 2003, № 3, С. 6-10.

141. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov On the Variety of Nilpotent Leibniz Algebras. Конференция "Колмогоров и современная математика", Москва, Июнь 16-21, 2003, С. 255-256.

142. Ш.А. Аюпов, М.А. Бердикулов, Р. Дадаходжаев. Замонавий алгебра хакида маълумотлар. Физика, математика ва информатика, 2003, № 3, С. 3-10.

143. Ш.А. Аюпов, Классификация комплексных нильпотентных 4-х мерных алгебр Лейбница. II Международная конференция «Наука и технология в XXI веке», Ташкент 2003, С. 84-85.

144. Ш.А. Аюпов, Ф.Н. Арзикулов Йордановы аналоги коммутаторов. Шу куннинг долзарб муаммолари. Материалы конференции, посвященной 60 летию АН РУз, Ташкент, 2003. С. 9-12.

2002

145. Ш.А. Аюпов, Описание вещественных алгебр фон Неймана с абелевой косоэрмитовой частью. Функциональный анализ и его приложения, 36 (2), 2002, С. 75-77.

146. Ш.А. Аюпов, А.А. Рахимов, А.Х. Абдуваитов. Вещественные W^*-алгебры с абелевой эрмитовой частью. Математические заметки, 71 (3), 2002, С. 473-476.

147. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Некоторые нильпотентные классы алгебр Лейбница. Международная конференция «Алгебра и её приложения», Красноярск, 5-9 август, 2002, с. 8.

148. Sh.A. Ayupov. Real von Neumann Algebras with Abelian Symmetric or Skew Symmetric Part. International Congress of Mathematicians 2002, Beijing, Abstracts of short communications, 2002, pp. 142.

149. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. О комплексных алгебрах Лейбница, у которых фактор алгебра по правому аннулятору является абелевой алгеброй Ли. Вестник НУУз, 2002, № 2, С. 21-24.

2001

150. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сибирский математический журнал, 42 (1), 2001, С. 18-29.

151. Ш.А. Аюпов, Н.А. Азамов. Представление косоэрмитовых элементов в алгебрах фон Неймана косыми коммутаторами. Функциональный анализ и его приложения, 35 (3), 2001, С. 75-77.

152. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Глобальная нильпотентность алгебр Лейбница над полем характеристики нуль, удовлетворяющих n-му условию Энгеля. Вестник Кыргызского ГНУ, Математические науки, информатика и информационные Технологии, 2001, № 5, С. 30-32.

153. Ш.А. Аюпов, А.А. Рахимов, А.Х. Абдуваитов. Вещественные W^*-алгебры с абелевой эрмитовой частью. International Conference on Functional Analysis, Kyiv, August 22-26, 2001, С. 7-8.

154. Ш.А. Аюпов, А.А. Рахимов, А.Х. Абдуваитов. Вещественные W^*-алгебры с абелевой эрмитовой частью. Доклады АН РУз, 2001, № 4-5, С. 3-6.

155. Ш.А. Аюпов, Ферманинг буюк теоремаси исботланди. Физика, математика ва информатика, 2001, № 2, С. 3-6.

2000

156. Sh.A. Ayupov. Non Commutative Arens Algebras. International Functional Analysis Meeting, Valencia, Spain, July 3-7, 2000. Abstracts, p. 10.

157. Ш.А. Аюпов. Дифференцирования в алгебрах измеримых операторов. Доклады АН РУз, 2000, № 3, С. 14-17.

158. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov. On a Description of Irreducible Component in the Set of Nilpotent Leibniz Algebras Containing the Algebra of Maximal Nilindex, and Classification of Graded Filiform Leibniz Algebras. Proc. of the Third Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, CASC 2000, Samarkand, Oct 5-9, 2000, Springer, Berlin/Heidelberg/New-York, pp. 21-34.

159. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Описание неприводимой компоненты множества нильпотентных алгебр Лейбница, содержащей алгебру максимального нильиндекса, и классификация комплексных конечномерных градуированных филиформных алгебр Лейбница. Доклады АН РУз, 2000, № 8, С. 3-6.

1999

160. Ш.А. Аюпов, Р.М. Тургунбаев. О неархимедовых C^*-алгебрах. Доклады АН РУз, 1999, № 1, С. 6-9.

161. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. О 3-х мерных алгебрах Лейбница. Узбекский математический журнал, 1999, № 1, С. 9-14.

162. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Описание конечномерных нильпотентных комплексных алгебр Лейбница, обладающих максимальным нильиндексом. Доклады АН РУз, 1999, № 2, С. 3-6.

1998

163. Sh.A. Ayupov. On tracial Properties of States on Real von Neumann Algebras. Узбекский математический журнал, 1998, № 2, С. 13-19.

164. Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov. On Leibniz Algebras. «Algebra and Operator Theory». Proc. of Colloq., Tashkent-1997, Kluwer A.P., Dodrecht-Boston-London, 1998, pp. 1-13.

165. Ш.А. Аюпов, Н.А. Азамов. О косых коммутаторах в вещественных факторах. Известия вузов, 1998, № 1-4, С. 41-46.

166. Sh.A. Ayupov. Nilpotent Leibniz Algebras of Low Dimension. International Congress of Mathematicians, Berlin 1998, Abstracts of Short Communications, pp. 13.

167. Ш.А. Аюпов, Р.З. Абдуллаев. Алгебры Аренса на йордановых операторных алгебрах и на обертывающих алгебрах фон Неймана. Узбекский математический журнал, 1998, № 3, С. 11-17.

1997

168. Ш.А. Аюпов. Следовые свойства состояний на вещественных алгебрах фон Неймана. Доклады АН РУз, 1997, № 7, С. 3-5.

169. Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров. Об одном случае вырождения Алгебр Лейбница. Доклады АН РУз, 1997, № 6, С. 3-6.

170. Ш.А. Аюпов, С. Тулаганов. Олий ўкув юртларида олий математика фанини ўктилиш савиясини кўтаришнинг баъзи муаммолари. Таълим ва Тарбия, 1997, № 1-2, С. 5-13.

1996

171. Sh.A. Ayupov. Skew Commutators and Lie Isomorphisms in Real von Neumann Algebras. Journal of Functional Analysis, 138 (1), 1996, pp. 170-187.

172. Sh.A. Ayupov, N.A. Azamov. Commutators and Lie Isomorphisms of Skew Elements in Prime Operator Algebras. Communications in Algebra, 24 (4), 1996, pp. 1501-1520.

173. Sh.A. Ayupov, S.V. Ferleger, F.A. Sukochev. Isomorphisms between the Associative and Non-Associative L_p-Spaces of Type II1 Hyperfinite Factors. Mathematica Scandinavica, 78, 1996, pp. 271-285.

1995

174. Sh.A. Ayupov. Anti-Automorphisms of Factors and Lie Operator Algebras. The Quarterly Journal of Mathematics, 46, 1995, pp. 129-140.

1994

175. Sh.A. Ayupov, N.J. Yadgorov. Geometry of the State Spaces in Quantum Probability. Probability Theory and Mathematical Statistics, 1994, pp. 1-9.

176. Sh.A. Ayupov. Skew Commutators and Lie Isomorphisms in Real von Neumann Algebras. Preprint IRMA, Strasbourg, ULP, 1994, 20 pp.

177. Sh.A. Ayupov, S.V. Ferleger, F.A. Sukochev. Are Non Associative L_p-Spaces Really Non-Associative? Preprint IRMA, Strasbourg University, 1994, pp. 1-17.

178. Sh.A. Ayupov. Lie Isomorphisms of Skew Elements in Real von Neumann Algebras. International Congress of Mathematics, Zurich 1994, 116.

179. Ш.А. Аюпов, Коммутаторы в вещественных алгебрах фон Неймана и следовые свойства состояний. Узбекский математический журнал, 1994, № 1, С. 3-7.

180. Ш.А. Аюпов, М.А. Бердикулов. Пространства с порядковой единицей типа I_n со свойством банахова шара. Доклады АН РУз, 1994, № 10, С. 1-3.

181. Ш.А. Аюпов, Изоморфизмы лиевских операторных алгебр. Узбекский математический журнал, 1994, № 3, С. 47-53.

182. Ш.А. Аюпов, Г.П. Матвиевская. Школа Улугбека и ее место в истории математики стран ислама. Узбекский математический журнал, 1994, № 4.

1993

183. Ш.А. Аюпов, И.З. Абдуллаев. Дифференцирования на вещественных алгебрах фон Неймана. Доклады АН РУз, 1993, № 4-5, С. 3-5.

184. Ш.А. Аюпов, А.А. Алимов. Дифференцирование на $EW\#$-алгебрах. Доклады АН РУз, 1993, № 1, С. 3-4.

185. Sh.A. Ayupov. N. Yadgorov Geometry of the State Spaces in Quantum Probability. Sixth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. 1993, pp. 20-21.

186. Ш.А. Аюпов, Н.Ж. Ядгоров. Геометрия пространств состояний модулярных йордановых алгебр. Известия РАН, 57 (6), 1993, С. 199-211.

187. Ш.А. Аюпов, Р.М. Тургунбаев. Двузначные меры на проекторах р-адических гильбертовых пространств. Доклады АН РУз, 1993, № 8, С. 6-9.

188. Ш.А. Аюпов, Об изоморфизмах лиевых операторных алгебр. Узбекский математический журнал, 1993, № 3, С. 34-39.

189. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков, Т.Д. Джураев, Ш.А. Алимов, М.М. Лаврентьев и др. «М.С. Салахитдинов (к 60-летию со дня рождения)». Успехи Математических Наук, 48 (1993), вып. 6.

1992

190. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов, В.Н. Желябин. Мультипликативные отображения упорядоченных йордановых алгебр. Математические заметки, 51 (2), 1992, 3-8.

191. Ш.А. Аюпов, Анти-автоморфизмы и лиевы структуры в факторах. Узбекский математический журнал, 1992, № 2, С. 8-13.

192. Ш.А. Аюпов, О центрозначных следах на вещественных операторных алгебрах. Функциональный анализ и его приложения, 26 (2), 1992, С. 1-9.

193. Ш.А. Аюпов, А.А. Алимов. Коммутативные $EW\#$-алгебры. Доклады АН РУз, 1992, № 1, С. 3-4.

194. Ш.А. Аюпов, Н.Ж. Ядгоров. Об экстремальных точках проективных выпуклых множеств. Доклады АН РУз, 1992, № 2, С. 5-7.

195. Ш.А. Аюпов, Б. Таджибаев. Группы и алгебры Ли, ассоциированные с анти-автоморфизмами алгебр фон Неймана. Доклады АН РУз, 1992, № 3, С. 3-5.

196. Ш.А. Аюпов, Р.М. Тургунбаев. р-адические гильбертовы пространства и неархимедовы $C*$-алгебры. Узбекский математический журнал, 1992, № 3, С. 32-41.

197. Sh.A. Ayupov. Jordan and Lie Operator Algebras. Mathematisches Forschunsinstitut Oberwofach. Tagungspericht 35/1992, Jordan-Algebren 9-15, VIII, 1992, pp. 2-3.

1991

198. Ш.А. Аюпов, Б. Таджибаев. Лиевы и йордановы структуры в конечных факторах. Узбекский математический журнал, 1991, № 1, С. 15-21.

199. Sh.A. Ayupov. On Jordan and Lie Isomorphisms of Real Factors. Int. Conf. on Algebra in memory of I.A. Shirshov, Barnaul, August 20-25, 1991, pp. 3.

200. Sh.A. Ayupov. B. Tadjibaev. Lie Structures in Finite factors. Conference on Algebra in Memory of I.A. Shirshov, Barnaul, August 20-25, 1991, pp. 4.

201. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов, В.Н. Желябин. Теорема о классификации упорядоченных йордановых алгебр и ее при-ложения. Conference on Algebra in Memory of I. A. Shirshov, Barnaul, August 20-25, 1991, pp. 11.

202. Ш.А. Аюпов, Э.Ю. Азизов, М.А. Бердикулов. Условные ожидания на спин факторах. Узбекский математический журнал, 1991, № 3, С. 7-10.

203. Ш.А. Аюпов, Э.Ю. Азизов, Ш.М. Усманов. О существовании условных ожиданий на йордановых операторных алгебрах. Узбекский математический журнал, 1991, № 6, С. 11-14.

204. Ш.А. Аюпов, Р.З. Абдуллаев. Центрозначные следы на JW-алгебрах и обертывающих алгебрах фон Неймана. Доклады АН УзССР, 1991, № 8, С. 3-4.

1990

205. Ш.А. Аюпов, Б. Иокум, Н.Ж. Ядгаров. Геометрия пространств состояний конечномерных йордановых алгебр. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1990, № 3, С. 19-22.

206. Sh.A. Ayupov. B. Iochum, N. Yadgorov. Symmetry Versus Facial Homogeneity for Self-Dual Cones. Linear Algebra and its Applications, 142 (1990), 83-89.

207. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Линейность йордановых отображений JBW-алгебр. Неклассические и некорректно поставленные задачи мат. физики и анализа. Тезисы докладов Советско-Итальянского симпозиума, Самарканд, 2-6 Октябрь. 1990.

208. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Линейность мультипликативных отображений йордановых банаховых алгебр. Доклады АН УзССР, 1990, № 10, С. 5-6.

209. Ш.А. Аюпов, Р.З. Абдуллаев. Изометрии неассоциативных L_p–пространств. Доклады АН УзССР, 1990, № 11, С. 3-4.

210. Sh.A. Ayupov. Probability Measures on Quantum Logics and a Non-Commutative Choquet Theory. Prob. Theory and Math. Stat. B. Grigelionis et. al. (Eds.) 1990, VSP/Mokslas, v. I, pp. 68-77.

211. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Линейность мультипликативных отображений JBW-факторов типа I. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1990, № 6, С. 11-16.

1989

212. Ш.А. Аюпов, О существовании следа на модулярном JW-факторе. Успехи математических наук, 44:1 (265), 1989, С. 183-184.

213. Ш.А. Аюпов, Ш.М. Усманов. Диаметры пространств состояний йордановых банаховых алгебр. Известия АН СССР, сер. матем., Т. 53, № 2, 1989, С. 227-242.

214. Sh.A. Ayupov. A New Proof of the Existence of Traces on Jordan Operator Algebras and Real von Neumann Algebras. Journal of Functional Analysis, 84 (2), 1989, 312-321.

215. Sh.A. Ayupov, B. Iochum, N. Yadgorov. Symmetry Versus Facial Homogeneity for Self-Dual Cones. Preprint CPT-89/P2268, CNES Marseille, May 1989.

216. Sh.A. Ayupov. Probability Measures on Quantum Logics and a Non-Commutative Choquet Theory. Fifth Int. Vilnius Conf. on Probability Theory and Math. Stat., 1989, Abstracts of Communications, vol. I, pp. 30-31.

217. Sh.A. Ayupov. State Space of Jordan Algebras and Non-Commutative Choquet theory. Международная конференция I по алгебре, посв. памяти А.И. Мальцева, Новосибирск, 1989, С. 169.

218. Ш.А. Аюпов, Н.Ж. Ядгоров. Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1989, № 3, С. 3-7.

219. Ш.А. Аюпов, Н.Ж. Ядгоров. Свойства спектральных выпуклых множеств. Доклады АН УзССР, 1989, № 7, С. 3-4.

220. Ш.А. Аюпов, Н.Ж. Ядгоров. Двойственность упорядоченных пространств и характеризация проективных единиц. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1989, № 6, С. 13-19.

221. Sh.A. Ayupov, R.Z. Abdullaev. Isometries of Non-Associative Lp-Spaces. Quantum probability and Applications IV (Proc. of the Year of QP held at the Univ. of Roma II, Italy, 1987) Lect. Notes Math., 1396, 1989. p. 99-106.

1988

222. Ш.А. Аюпов, Следы на JW-алгебрах и обертывающих W^*-алгебрах. В сб. «Операторные алгебры и функциональные пространства», Ташкент, Фан, 1988, С. 3-11.

223. Ш.А. Аюпов, М.Ш. Гольдштейн, Б. Таджибаев. Монотонно полные йордановы алгебры с p-аддитивной нормой. В сб.«Операторные алгебры и функциональные пространства», Ташкент, Фан, 1988, С. 12-17.

224. Ш.А. Аюпов, Ш.М. Усманов. Диаметры пространств состояний йордановых алгебр. «Топологическая алгебра», тезисы конференции, Кишинев, Штиинца, 1988, С. 10.

225. Ш.А. Аюпов, Некоммутативная теория Шоке для мер на гранях выпуклых множеств. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1988, № 6, С. 3-7.

1987

226. Sh.A. Ayupov. Traces on JW-Algebras and Enveloping W^*-Algebras. Mathematlsche Zeitschrift, 194, 1987, pp. 15-23.

227. Sh.A. Ayupov. Isometries of Non-Associative Lp–Spaces. Preprint 05-1987, University Roma II.

228. Sh.A. Ayupov. Diameters of State Spaces of Jordan Banach Algebras. Baku Int. Topological Conference Abstracts, vol. II, 1987, pp. 22.

229. Ш.А. Аюпов, Новое доказательство существования следов на JW-алгебрах и вещественных алгебрах фон Неймана. Деп. ВИНИТИ, № 67-87.

230. Ш.А. Аюпов, Изометрии неассоциативных L_p–пространств. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1987, № 5, С. 8-12.

1986

231. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Markov Operator on Quantum Probability Spaces. Proc. First World Congress Bernoulli Soc., Tashkent, 8-14 Sept. 1986, editors Yu.V. Prokhorov, V.V. Sazonov, Utrecht, The Netherlands, "VNU SCI, Press B.V. vol. 1, 1987.

232. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Меры на проекторах и состояния на JBW-алгебрах. Докл. АН УзССР, 1986, № 1, С. 3-4.

233. Ш.А. Аюпов, Ф.М. Закиров. Действия компактных групп на JBW-алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ. мат. наук, 1986, № 3, С. 8-11.

234. Ш.А. Аюпов, М.Ш. Гольдштейн, Б. Таджибаев. О существовании следа на упорядоченных алгебрах с р-аддитивной нормой. Доклады АН УзССР, 1986, № 8, С. 3-4.

235. Ш.А. Аюпов, Сарымсаков Т.А. Markov operators on Quantum Probability spaces. I Всемирный Конгресс общества мат. статистики им. Бернулли. Ташкент, 1986, Т. II, 687.

236. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Сингулярные меры на идемпотентах JBW-алгебр. Известия. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1986, № 6, С. 6-9.

1985

237. Ш.А. Аюпов, JW-факторы и анти-автоморфизмы алгебр фон Неймана. Известия АН СССР, сер. матем., 49 (1), 1985, С. 211-220.

238. Sh.A. Ayupov. R.Z Abbullayev. The Radon-Nikodym Theorem for Weights on Semi-Finite JBW-Algebras. Mathematische Zeitschrift, 188, 1985, pp. 475-484.

239. Ш.А. Аюпов, В.Н. Желябин. Совместность элементов в йордановых алгебрах. Математические заметки, 37 (3), 1985, С. 305-312.

240. Ш.А. Аюпов, А.А. Адизов. Вероятностные меры на проекторах JBW-алгебр. Деп. ВИНИТИ № 7822-84.

241. Ш.А. Аюпов, Теорема Радона-Никодима для положительных линейных функционалов на JBW-алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1985, № 3, С. 3-4.

242. Ш.А. Аюпов, Йордановы операторные алгебры. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 27 (ВИНИТИ АН СССР), М. 1985, С. 67-98.

243. Ш.А. Аюпов, Квантовые вероятностные пространства на спин факторах. IV Международная Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. стат., 1985, Т. 1, С. 48-49.

244. Ш.А. Аюпов, Ф.М. Закиров. Модулярные свойства G-конечных JBW-алгебр. Доклады АН УзССР, 1985, № 10, С. 3-4.

245. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков, А.А. Адизов. Теорема о разложении мер на JBW-алгебрах и ее применение к исследованию марковских операторов. Доклады АН УзССР, 1985, № 11, С. 3-4.

246. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков, М.Ш. Гольдштейн, Г. Грабарник. Эргодические теоремы для марковских операторов, действующих в бесконечномерных пространствах. IV Международная Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. стат., 1985, Т. III, С. 104-106.

1984

247. Ш.А. Аюпов. Probabilistic Aspects of Jordan Algebras. Proc. 7th Conf. on Probability Theory, August 29 - September 4, 1982, Brashov, Romania, Editura Academiei, 1984, p. 155-162.

248. Ш.А. Аюпов, Локально измеримые операторы для JW-алгебр и представление упорядоченных йордановых алгебр. Известия АН СССР, серия матем., 48 (2), 1984, 211-236.

249. Ш.А. Аюпов, Классификация инъективных JW-факторов. Функциональный анализ и его приложения, 18 (3), 1984, 68-69.

250. Ш.А. Аюпов, О существовании йордановьх алгебр самосопряженных операторов заданного типа. Сибирский математический журнал, 25 (5), 1984, 3-8.

251. Ш.А. Аюпов, О классификации инъективных JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части алгебры фон Неймана. VI Международный симпозиум по теории информации, Ташкент, 1984, тезисы докладов, ч. III, С. 31-33.

252. Ш.А. Аюпов, Р.З. Абдуллаев. Теорема Радона-Никодима и пространства LP для весов на полуконечных JBW-алгебрах. Деп. ВИНИТИ № 2469-84.

253. Ш.А. Аюпов, Ф.М. Закиров. Модулярность и эргодичность в йордановых алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1984, № 6, С. 7-12.

1983

254. Ш.А. Аюпов. Классификация, представления и вероятностные аспекты упорядоченных йордановых алгебр. Автореферат докторской диссертации. Ташкент, 1983.

255. Ш.А. Аюпов. Типы йордановых алгебр самосопряженных операторов и их обертывающих алгебр фон Неймана. Функциональный анализ и его приложения, 17 (1), 1983, С. 65-66.

256. Ш.А. Аюпов. Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН СССР, серия матем., 47 (1), 1983, С. 3-25.

257. Ш.А. Аюпов. Теоремы о сходимости мартингалов и усиленные законы больших чисел в йордановых алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 2, 1983, С. 3-7.

258. Ш.А. Аюпов. Супермартингалы на йордановых алгебрах. В сб. «Случайные процессы и мат. статистика», Ташкент, Фан, 1983, С. 20-31.

259. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Основные понятия теории вероятностей на алгебраических структурах. В сб. «Случайные процессы и мат. статистика», Ташкент, Фан, 1983, С. 169-174.

260. Ш.А. Аюпов, М.А. Бердикулов. Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах, Деп. ВИНИТИ № 5044-83.

1982

261. Ш.А. Аюпов. Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1982, № 3, С. 12-15.

262. Ш.А. Аюпов. Независимость и марковские процессы в вероятностных пространствах на йордановых алгебрах. «Предельные теоремы для случайных процессов и смежные вопросы». Ташкент, Фан, 1982, С. 28-41.

263. Ш.А. Аюпов, Р.Р. Халматов. Порядковые свойства йордановых алгебр. Докл. АН УзССР, 1982, № 9, С. 3-4.

264. Sh.A. Ayupov. Extension of Traces and Type Criterions for Jordan Algebras of Self-Adjoint Operators. Mathematische Zeitschrift, 181, 1982, 253-268.

265. Ш.А. Аюпов. Модулярные йордановы алгебры самосопряженных операторов. Теоретическая и математическая физика, 53 (1), 1982, 77-82.

266. Sh.A. Ayupov. Measure and Topology on Jordan Algebras. Proc. of the Int. Conf. "Topology & Measure III"(Vitte/Hiddensee, GDR, 1980), Greifswald, 1982, part I, pp. 1-14.

267. Sh.A. Ayupov. Probabilistic Aspects of Jordan Algebras. Abstracts of the 7th Conf. on Probability Theory (Brashov, Romania, 1982), Bucharest, 1982, pp. 6-8.

268. Ш.А. Аюпов. Представление упорядоченных йордановых алгебр. 5-й Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1982, С. 8.

269. Ш.А. Аюпов. О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов. Доклады АН СССР, 267 (3), 1982, 521-524.

270. Ш.А. Аюпов. Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах II. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1982, № 5, С. 7-12.

271. Ш.А. Аюпов. Инвариантные средние на JBW-алгебрах. Труды ТашГУ «Математический анализ и теория вероятностей», 1982, № 689, С. 3-4.

272. Ш.А. Аюпов. Классификация, представления и вероятностные аспекты упорядоченных йордановых алгебр. Докторская диссертация, Ташкент, 1982.

1981

273. Sh.A. Ayupov. Probability Spaces on Jordan Algebras. Third International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 1981, v. III, pp. 3-4.

274. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Об однородных цепях Маркова на полуполях. Теория вероятностей и ее применения, 26 (3), 1981, 521-531.

275. Ш.А. Аюпов. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах. Доклады АН УзССР, 1981, №10, С. 3-5.

276. Ш.А. Аюпов. Йордановы алгебры измеримых операторов. Известия АН УзССР, сер.физ.-мат. наук, 1981, № 5, С. 3-6.

277. Ш.А. Аюпов. Статистические эргодические теоремы в йордановых алгебрах. Успехи математических наук, 36:6, 222, 1981, С. 201-202.

278. Sh.A. Ayupov. Ergodic Theorems in Jordan Algebras of Measurable Elements. Anal. Univ. Craiova, Ser. Mat. Fiz-Chim., 9, 1981, 22-28.

279. Sh.A. Ayupov. Martingale Convergence and Strong Laws of Large Numbers in Jordan Algebras. Anal. Univ. Craiova, Ser. Mat. Fiz-Chim., 9, 1981, p. 29-34.

280. Ш.А. Аюпов. О классификации йордановых алгебр самосопряженных операторов. Деп. ВИНИТИ, № 5760-81, РЖ Мат. 1982, 4Б, 923.

1980

281. Ш.А. Аюпов. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры. Успехи математических наук, 35:3 (213), 1980, С. 138-140.

282. Ш.А. Аюпов. OJ-алгебры ограниченных элементов. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 2, С. 3-8.

283. Ш.А. Аюпов. Матричные OJ-алгебры. Доклады АН УзССР, 1980, № 5, С. 3-4.

284. Ш.А. Аюпов. Нормальные состояния на OJB-алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 3, С. 9-13.

285. Ш.А. Аюпов. Теорема эргодического типа в йордановых алгебрах. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 6, С. 10-16.

286. Ш.А. Аюпов, Ш.М. Усманов. R-топология в OJ-алгебрах. Доклады АН УзССР, 1980, № 8, С. 3-4.

287. Ш.А. Аюпов, Ш.М. Усманов. Порядок и топология в йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, № 4232-80, РЖ Мат. 1981, 1А291.

288. Ш.А. Аюпов. Универсальные OJ-алгебры. Труды ТашГУ «Мат. анализ и геом.», вып. 623, 1980, С. 3-5.

1979

289. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Регулярность цепей Маркова на O^*-алгебрах. Доклады АН УзССР, 1979, № 4, С. 3-5.

290. Ш.А. Аюпов. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры. Международная Топологическая конференция, Москва, 1979, С. 23.

291. Ш.А. Аюпов. К теории частично упорядоченных йордановых алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 87, С.6-8.

292. Ш.А. Аюпов. Спектральная теорема для OJ-алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 9, С. 3-5.

293. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Частично упорядоченные йордановы алгебры. Доклады АН СССР, 249 (4), 1979, 789-792.

294. Ш.А. Аюпов. Несколько эргодических теорем для цепей Маркова на O^*-алгебрах. Труды ТашГУ «Математический анализ», 576, 1979, С. 3-13.

295. Ш.А. Аюпов, Т.А. Сарымсаков. Марковские процессы на O^*-алгебрах. Труды ТашГУ «Прикладная математика и механика», вып. 590, 1979, С. 6-11.

1978

296. Ш.А. Аюпов. Об одном классе топологий в универсальном полуполе. Труды ТашГУ «Функциональный анализ», вып. 573, 1978, С. 15-17.

297. Ш.А. Аюпов. Эргодические теоремы для цепей Маркова на O^*-алгебрах. Доклады АН УзССР, 1978, № 7, С. 11-13.

1977

298. Ш.А. Аюпов. Гомоморфизмы одного класса колец и двузначные меры на булевых алгебрах. Функциональный анализ и его приложения, 11 (3), 1977, 68-69.

299. Ш.А. Аюпов. Тихоновские кольца, их гомоморфизмы и модули. Автореферат кандидатской диссертации, 1977.

300. Ш.А. Аюпов. Теория двойственности для булево-нормированных модулей. Труды ТашГУ «Вопросы математики», вып. 548, 1977, С. 6-10.

301. Ш.А. Аюпов. Эргодическая теорема в O^*-алгебрах. Доклады АН УзССР, 1977, № 3, С. 3-4.

1976

302. Ш.А. Аюпов. T_m-топология в полных булевых алгебрах. Труды ТашГУ «Вопросы математики» вып. 490, 1976, С. 27-37.

303. Ш.А. Аюпов. Линейно-топологические пространства. Доклады АН УзССР, 1976, № 1, с. 7-9.

304. Ш.А. Аюпов. Тихоновские кольца, их гомоморфизмы и модули. Доклады АН УзССР, 1976, № 6, С. 6-7.

305. Ш.А. Аюпов. Топология С-сходимости в полуполях. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 5, С. 3-7.

306. Ш.А. Аюпов. Тихоновские кольца, их гомоморфизмы и модули. Кандидатская диссертация, Ташкент, 1976.

1975

307. Ш.А. Аюпов, Дж. Хаджиев. Топология в K-пространствах с единицей. Доклады АН УзССР, 1975, № 1, С. 3-4.

308. Ш.А. Аюпов. T_m-топологические алгебры Буля. Доклады АН УзССР 1975, № 9, С. 9-10.

1974

309. Ш.А. Аюпов. Теорема Крейна-Мильмана в локально K-выпуклых пространствам. Доклады АН УзССР, 1974, № 5, С. 3-5.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

– УДК (только на русском);
– MSC2020 (только на английском);
– название статьи;
– аффиляция автора(-ов);
– информация об авторе(-ах);
– аннотация;
– ключевые слова;
– текст статьи (на русском или английском);
– список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффиляция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличие);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;

г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);

д) ученая степень (указывается при наличие);

е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте https://orcid.org/;

ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными"(написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка.* Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментиронном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];

– Название русскоязычного источника (транслитерация);

– [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];

– Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);

– Количество страниц в издании;

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом *https://translit.ru/ru/bgn/*. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

The rules of article design

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутсвует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal SVMO, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]", Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTex**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

– UDC (only in Russian);
– MSC2020 (only in English);
– article title;
– affiliation of the author(s);
– information about every author(s);
– abstract;
– keywords;
– text of the article (in English);
– references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);

b) Position, Department (indicated if available);

c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;

d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);

e) academic degree (indicated if available);

f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at https://orcid.org/.

g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

– it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;

– do not include non-essential details;

– use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;

– the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;

– it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

- *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

– Author(s) (transliteration);

- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];

– The name of the Russian-language source (transliteration);

– [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];

– Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);

– An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

– Author(s) (transliteration);

– title of the book (transliteration);

– [Translation of the book's name in square brackets];

– Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;

– The number of pages in the book;

– Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website *https://translit.ru/ru/bgn/* you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTex system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – *http://www.miktex.org*.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules*. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой **\input** в файл-преамбулу. Например, **\input{shamanaev.tex}**

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды **\headerRus** и **\headerEn**, соответственно.

Команда **\headerRus** имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда **\headerEn** имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerEn**.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром: **\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

The rules for article layout in the LaTex system

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
**Название первого столбца & Название второго столбца **
**Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке **
\hline
**1 & 2 **
\hline
**3 & 4 **
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись под_рис_на_английском_языке} {имя файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая подпись_на_английском_языке}

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под рис\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень сжатия} {имя файла.eps} {подпись_под_рис\\подпись_на_английском_языке} {степень сжатия} {общая подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных бибилиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных бибилиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневолжского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибиков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Высш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTex system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – *http://www.miktex.org.*

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command **\input** in the preamble file. For example, **\input{shamanaev.tex}**

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English **\headerRus** and **\headerEn**, respectively.

The command **\headerRus** has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command **\headerEn** has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command **\headerFirstEn** *with the same parameters as for the command* **\headerEn**.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command **\sect** with one parameter:**\sect{Header}**

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands **\subsection**, **\subsubsection** and **\paragraph**.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands **\label{label}** and **\eqref{label}**, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked **\label{ivanov14}**, Theorem 5 of this articles — **\label{ivanovt5}**, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command **\ref{label}**).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands \ **proof** and **\proofend** (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

\begin{table}[h!]

\caption{Table name \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption of_the_figure_in_English}

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English} {file name.eps} {caption_of_the figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common caption_in_English}

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

e) insert two pictures with common caption only

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {common_caption} {common_caption_in_English}

g) insert of three pictures with common caption only

\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

\RBibitem{label for a link to the source },

and every English reference – by a command

\Bibitem{label for a link to the source }.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

Алфавитный указатель авторов

Author Index

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».

С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 14.09.2022. Дата выхода в свет 30.09.2022. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,55 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 908.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 14.09.2022. Date of publishing 30.09.2022. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,55.

Number of copies 100. Order no. 908.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

CBMO