

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  22  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  3

2020



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 22, № 3. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 22, NO. 3. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Мартьянов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, исполняющая обязанности ректора ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Acting Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**Е. Я. Гуревич, А. А. Макаров**

О классе топологической сопряженности с гомотетией . . . . . 261

---

**Е. А. Каледина**

Стабилизация многосвязной управляемой непрерывно-дискретной системы с непрерывными декомпозициями по части переменных . . . . . 268

---

**С. И. Митрохин**

Об асимптотике спектра дифференциального оператора четного порядка, потенциалом которого является дельта-функция 280

---

**Е. В. Ноздринова**

Сценарий изменения гомотопического типа замыкания инвариантного седлового многообразия . . . . . 306

---

**А. Н. Тында, К. А. Тимошенко**

Применение метода граничных интегральных уравнений к численному решению эллиптических краевых задач в  $\mathbb{R}^3$  . . . . 319

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**А. Р. Багапов, Р. В. Жалнин**

Моделирование акустических полей при обтекании тел потоком газа . . . . . 333

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова**

Математическое моделирование систем измерения давления в  
газожидкостных средах . . . . . 352

---

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 368

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 372

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 376

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 382

---

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 387

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 388

---

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

- E. Gurevich, A. Makarov**  
 On a class of topological conjugacy with a homothety . . . . . 261

- E.Á. Kaledina**  
 Stabilization in part variables of a multiconnected controlled  
 continuous discrete system with non-overlapped decompositions . . 268

- S. I. Mitrokhin**  
 On the asymptotic behavior of the spectrum of a sixth-order  
 differential operator, whose potential is the delta function . . . . . 280

- E. V. Nozdrinova**  
 A scenario of changing the homotopy type of the closure of an  
 invariant saddle manifold . . . . . 306

- A. N. Tynda, K. A. Timoshenkov**  
 Application of boundary integral equation method to numerical  
 solution of elliptic boundary value problems . . . . . 319

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

- A. R. Bagapov, R. V. Zhalnin**  
 Modeling of acoustic fields during gas flow around bodies . . . . . 333
-

---

# MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**P. A. Velmisov, Yu.A. Tamarova**

Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media . . . . . 352

---

The rules of article design (in Russian) . . . . . 368

The rules of article design (in English) . . . . . 372

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 376

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . . 382

---

Author Index (In Russian) . . . . . 387

Author Index (in English) . . . . . 388

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.261-267

УДК 517.9

## О классе топологической сопряженности с гомотетией

© Е. Я. Гуревич<sup>1</sup>, А. А. Макаров<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе рассматривается класс  $H(\mathbb{R}^n)$  сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  таких, что для любого гомеоморфизма  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  и для любой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  выполняются условия  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$ ,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} h^n(x) \rightarrow \infty$ , где  $O$  — начало координат. Доказывается, что для любого  $n \geq 1$  произвольный гомеоморфизм  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  топологически сопряжен с гомотетией  $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , определяемой формулой  $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$ . Для гладкого случая при условии, что все собственные числа линейной части рассматриваемого отображения лежат внутри единичной окружности, данный факт следует из классической теории динамических систем. В негладком случае при  $n \notin \{4, 5\}$  этот факт доказан в ряде работ конца XX века, но работы, где доказательство было бы изложено для случая  $n \in \{4, 5\}$ , авторам неизвестны. Настоящая работа заполняет этот пробел.

**Ключевые слова:** топологическая классификация гомеоморфизмов, топологическая сопряженность со сжатием, фактор-пространство, гомотетия

## 1. Введение и формулировка результатов

Пусть  $H(\mathbb{R}^n)$  — класс изотопных тождественному гомеоморфизмов евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  таких, что для любого гомеоморфизма  $h \in H$  и для любой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  выполняются условия  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$ ,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} h^n(x) \rightarrow \infty$ , где  $O$  — начало координат. Определим отображение  $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  формулой  $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$ . Напомним, что гомеоморфизмы  $h, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  такой, что  $h = \theta^{-1}g\theta$ .

Цель настоящей работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

**Т е о р е м а 1.1** *Для любого  $n \geq 1$  гомеоморфизм  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  топологически сопряжен с гомотетией  $a_n$ .*

Из условий, накладываемых на класс  $H(\mathbb{R}^n)$ , следует, что любой гомеоморфизм  $h$  из этого класса имеет единственную неподвижную точку, и эта точка совпадает с началом координат  $O$ .

<sup>1</sup>Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, [egurevich@hse.ru](mailto:egurevich@hse.ru)

<sup>2</sup>Макаров Алексей Александрович, магистрант, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2447-4836>, [leomakar@mail.ru](mailto:leomakar@mail.ru)

Если гомеоморфизм  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  является гладким и его дифференциал  $Dh : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  в точке  $O$  не имеет собственных чисел, равных по модулю единице, то из теоремы Гробмана-Хартмана следует, что  $h$  и  $Dh$  топологически сопряжены. Из этого и топологической классификации линейных отображений [4, теорема 5.5] следует, что  $h$  топологически сопряжен с  $a_n$ .

В работе рассматривается негладкий случай. Как будет показано ниже, для случая  $n = 1$  доказательство теоремы 1.1 является несложным. Для случая  $n = 2$  доказательство теоремы изложено в работе [1], для  $n = 3$  — в работе [2], для  $n \geq 6$  — в работе [3]. Основной результат настоящей работы состоит в независимом доказательстве теоремы 1.1 для случая  $n \geq 3$ .

## 2. Вспомогательные определения и факты

Напомним несколько определений и фактов, необходимых для доказательства результата.

Говорят, что группа  $G$  *действует* на многообразии  $X$ , если задано отображение  $\zeta : G \times X \rightarrow X$ , обладающее следующими свойствами:

- 1)  $\zeta(e, x) = x$  для всех  $x \in X$ , где  $e$  — нейтральный (единичный) элемент группы  $G$ ;
- 2)  $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$  для всех  $x \in X$  и  $g, h \in G$ .

Говорят, что группа  $G$  *действует свободно* на многообразии  $X$ , если  $\zeta(g, x) \neq x$  для любого  $x \in X$  и любого  $g \in G$ , кроме  $g = e$ .

Говорят, что группа  $G$  *действует разрывно* на многообразии  $X$ , если для каждого компактного подмножества  $K \subset X$  множество элементов  $g \in G$  таких, что  $\zeta(g, K) \cap K \neq \emptyset$  — конечно.

Группа  $A$  называется *циклической*, если существует элемент  $a \in A$  такой, что любой элемент группы  $A$  представляется в виде  $a^n, n \in \mathbb{Z}$ . Элемент  $a$  называют образующим элементом циклической группы  $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Если все степени элемента  $a$  различны, то, говорят что циклическая группа имеет *бесконечный порядок*. В противном случае порядком циклической группы  $A$  называется наименьшее положительное число  $p$ , для которого  $a^p = e$ . Известно, что все циклические группы одного и того же порядка (в т. ч. и бесконечного) изоморфны. В частности, любая группа бесконечного порядка изоморфна группе  $\mathbb{Z}$  с операцией сложения [5, гл. 4, §2]. Будем обозначать через  $\phi_A$  изоморфизм групп  $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$  и  $\mathbb{Z}$  такой, что  $\phi_A(a) = 1$ .

Пусть  $X$  — многообразие и  $h : X \rightarrow X$  — гомеоморфизм. Тогда множество  $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$  является циклической группой с образующим элементом  $h$  относительно операции композиции. Кроме того, отображение  $\zeta(h^n, x) = h^n(x)$  определяет действие группы  $\mathcal{H}$  на  $X$ . Введем на многообразии  $X$  отношение эквивалентности следующим условием: точки  $x, y \in X$  эквивалентны тогда и только тогда, когда существует число  $n \in \mathbb{Z}$  такое, что  $y = h^n(x)$ . Будем обозначать через  $X_h$  множество классов эквивалентности и через  $p_{X_h} : X \rightarrow X_h$  естественную проекцию, ставящую в соответствие любой точке  $x \in X$  ее класс эквивалентности. Множество  $X_h$ , оснащенное фактортопологией, называется *пространством орбит действия  $\mathcal{H}$  на  $X$* .

Обозначим через  $p_{X_h*} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X_h)$  гомоморфизм, индуцированный проекцией  $p_{X_h} : X \rightarrow X_h$ .

Предположим, что группа  $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$  действует свободно и разрывно на  $X$ . Тогда, согласно [5, теорема 17.1] естественная проекция  $p_{X_h} : X \rightarrow X/h$  является накрывающим отображением, т. е. сюръективным отображением, которое обладает следующим свойством: для любой точки  $x \in X/h$  существует окрестность  $U \in X/h$  такая, что  $p_{X_h}^{-1}(U)$  является объединением открытых попарно непересекающихся множеств  $V_j$ ,

$j \in J$ , таких, что для любого  $j \in J$  ограничение  $p_{x_h}|_{V_j} : V_j \rightarrow U$  является гомеоморфизмом.

Пусть  $X$  — связное<sup>3</sup> многообразие и группа  $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$  действует свободно и разрывно на  $X$ . Определим отображение  $\alpha_{x_h} : \pi_1(X_f) \rightarrow \mathbb{Z}$  следующим образом. Обозначим через  $p_{x_h}^{-1}(x)$  полный прообраз точки  $x \in X_h$ . Из определения проекции  $p_{x_h}$  следует, что  $p_{x_h}^{-1}(x)$  — орбита некоторой точки  $\tilde{x} \in p_{x_h}^{-1}(x)$ . Пусть  $[c] \in \pi_1(X_h, h)$  и  $c$  — некоторая петля, принадлежащая классу  $[c]$ . Тогда существует единственный путь  $\tilde{c}(t)$  с началом в точке  $\tilde{x}$  ( $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ ), накрывающий петлю  $c$  ( $p_{x_h}(\tilde{c}) = c$ ) [5, теорема 17.6]. Поэтому существует элемент  $n \in \mathbb{Z}$  такой, что  $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$ . Положим  $\alpha_{x_h}([c]) = \phi_n(h^n)$ .

Из [5, теорема 19.1, лемма 19.2] вытекает справедливость следующего предложения.

**Предложение 2.1** *Отображение  $\alpha_{x_h} : \pi_1(X_h) \rightarrow \mathbb{Z}$  является эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом) и его ядро совпадает с подгруппой  $p_{x_h*}(\pi_1(X))$ .*

Следующее предложение, вытекающее из [5, теорема 21.7], является ключевым для доказательства теоремы 1.1.

**Предложение 2.2** *Пусть  $X, Y$  — связные многообразия и  $h : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$  — гомеоморфизмы такие, что группы  $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$  действуют свободно и разрывно на  $X, Y$  соответственно. Пусть  $\varphi : X_h \rightarrow Y_g$  — гомеоморфизм такой, что  $\alpha_{x_h} = \alpha_{y_g} \circ \varphi_*$ . Тогда существует единственный гомеоморфизм  $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Y$ , сопрягающий гомеоморфизмы  $h$  и  $g$ .*

### 3. Доказательство основного результата

Ограничения гомеоморфизмов  $h, a_n$  на множество  $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  порождают группы  $\mathcal{H} = \{h^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{A} = \{a_n^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}$ , действующие на  $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  свободно и разрывно.

В силу предложения 2.2 для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать, что пространства  $V_h, V_{a_n}$  гомеоморфны. Сначала установим топологический тип пространства  $V_{a_n}$ .

Для  $n \geq 1$  положим  $\mathbb{B}_r^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}, D_{a_n} = \mathbb{B}_1^n \setminus \text{int } \mathbb{B}_{1/2}^n$ . Обозначим через  $\mathbb{S}^{n-1}$  границу единичного шара  $\mathbb{B}_1^n$ .

Множество  $D_{a_n}$  является фундаментальной областью действия группы  $\mathcal{A}$ : для любой точки  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  найдется такое  $i \in \mathbb{Z}$ , что  $a_n^i(x) \in D_{a_n}$ ; среди внутренних точек  $D_{a_n}$  нет точек, принадлежащих одной орбите отображения  $a_n$ , а для каждой точки  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  найдется такая точка  $y \in a_n(\mathbb{S}^{n-1})$ , что  $y = a_n(x)$ . Поэтому пространство, полученное из  $D_{a_n}$  отождествлением точек  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  и  $a_n(x)$  (по всем  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ), гомеоморфно пространству  $V_{a_n}$ . Поскольку  $a_n$  является сохраняющим ориентацию отображением, то в результате операции склеивания получим пару окружностей  $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1$  при  $n = 1$ , тор  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  при  $n = 2$  и прямое произведение  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  в случае  $n \geq 3$ . Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 3.1** *Пространство  $V_{a_n}$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ,  $n \geq 1$ .*

<sup>3</sup>Заметим, что любое связное  $n$ -многообразие является линейно связным [5, с. 117-119]

Покажем, что пространство  $V_h$  имеет тот же топологический тип, что и пространство  $V_{a_n}$ .

В случае  $n = 1$  из того факта, что  $h$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, следует, что  $h$  является возрастающей функцией. Поэтому  $h(\mathbb{B}_1^1) \subset \text{int } \mathbb{B}_1^1$ , следовательно, фундаментальная область  $D_h = \mathbb{B}_1^1 \setminus \text{int } h(\mathbb{B}_1^1)$  действия группы  $\mathcal{H}$ , как и область  $D_{a_1}$ , является парой отрезков, а пространство орбит  $V_h$  гомеоморфно паре окружностей. Таким образом, для  $n = 1$  теорема 1.1 доказана.

В случае  $n \in \{2, 3\}$  идея доказательства теоремы состоит в непосредственной модификации шара  $\mathbb{B}^n$  для получения шара  $B^n$  такого, что  $h(B^n) \subset \text{int } B^n$ . В размерности четыре и выше такая модификация затруднительна, поэтому доказательство требует другой техники. Для перехода к этой технике опишем предварительные свойства пространства  $V_h$ .

**Предложение 3.2** *При  $n \geq 3$  пространство орбит  $V_h$  является ориентируемым гладким замкнутым многообразием с фундаментальной группой, изоморфной группе  $\mathbb{Z}$ .*

**Доказательство.** Структура гладкого замкнутого многообразия на пространстве  $V_h$  непосредственно индуцируется естественной проекцией  $p_h : \mathbb{R}^n \rightarrow V_h$ , которая, как показано в предыдущем разделе, является накрывающим отображением. Так как  $h$  является по условию сохраняющим ориентацию, то  $V_h$  ориентируемо. Поскольку при  $n \geq 3$  многообразие  $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  односвязно, то оно является универсальным накрытием для  $V_h$  и фундаментальная группа  $\pi_1(V_h)$  изоморфна группе  $\mathcal{H}$ , которая, в свою очередь, изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ .

**Доказательство завершено.**

В работе [3], где теорема 1.1 доказана для случая  $n \geq 6$ , далее использовался результат, принадлежащий Броудеру и Левайну: ориентируемое гладкое замкнутое многообразие размерности шесть и выше, фундаментальная группа которого изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ , является пространством локально-тривиального расслоения над окружностью (для  $n = 3$  аналогичный результат доказан Сталлингсом). Далее устанавливалось, что слой этого расслоения имеет гомотопический тип сферы  $S^{n-1}$  (поскольку накрывающее пространство  $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  имеет тот же гомотопический тип). Поскольку существует только два негомеоморфных локально-тривиальных расслоения над окружностью со слоем  $S^{n-1}$  (ориентируемое, представляющее собой прямое произведение  $S^{n-1} \times S^1$ , и неориентируемое), то  $V_h$  гомеоморфно  $S^{n-1} \times S^1$ , что доказывает теорему 1.1. Результат, аналогичный теореме Броудера и Левайна до настоящего времени не удалось доказать для многообразий размерности четыре и пять, поэтому проведем доказательство в обход этих результатов.

Пусть  $n \geq 3$ . Вначале покажем, что существует такое  $i_* > 0$ , что  $h^{i_*}(\mathbb{B}_1^n) \subset \text{int } \mathbb{B}_1^n$ . Из определения класса следует, что для любой точки  $x \in S^{n-1}$  найдется такое  $i_x > 0$ , что  $h^i(x) \in \text{int } \mathbb{B}_1^n$  для всех  $i > i_x$ . Поскольку  $h$  — гомеоморфизм, то для любой точки  $x$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $h^i(y) \in \text{int } \mathbb{B}_1^n$  для любой точки  $y$  из  $\varepsilon$ -окрестности  $O_\varepsilon(x)$  точки  $x$  и для всех  $i > i_x$ . Объединение  $\{O_\varepsilon(x) \cap S^{n-1}, x \in S^{n-1}\}$  образует открытое покрытие сферы  $S^{n-1}$ . Выберем из него конечное подпокрытие и обозначим через  $x_1, \dots, x_m$  точки сферы  $S^{n-1}$ , окрестности которых образуют это конечное подпокрытие. Тогда  $i_* = \max\{x_1, \dots, x_m\}$  — искомое число.

Обозначим через  $V_{h^{i_*}}$  пространство орбит действия группы, порожденной степенями ограничения отображения  $h^{i_*}$  на множество  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Множество  $D_{h^{i_*}} = \mathbb{B}_1^n \setminus h^{i_*}(\text{int } \mathbb{B}_1^n)$  является фундаментальной областью действия этой группы. Аналогично доказательству предложения 3.1 получим, что  $V_{h^{i_*}}$  гомеоморфно прямому произведению  $S^{n-1} \times S^1$ .

Обозначим через  $p_{h^{i_*}} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow V_{h^{i_*}}$ ,  $p_h : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow V_h$  естественные проекции и определим отображение  $\tau_{i_*} : V_{h^{i_*}} \rightarrow V_{h^{i_*}}$  формулой  $\tau_{i_*} = p_{h^{i_*}} h p_{h^{i_*}}^{-1}$ , где  $p_{h^{i_*}}^{-1}(y)$  означает полный прообраз точки  $y$ , т. е. множество всех точек  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  таких, что  $y = p_{h^{i_*}}(x)$ . Отметим, что  $\tau_{i_*}^{i_*} = id$  и  $V_h = V_{h^{i_*}} / \tau_{i_*}$ .

Напомним, что гомеоморфизм  $\tau : X \rightarrow X$  называется инволюцией, если  $\tau^2 = id$ .

Далее будем использовать следующий результат работ [7] (для  $n = 3$ ) и [6] (для  $n \geq 4$ ).

**Предложение 3.3** Пусть  $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ,  $n \geq 3$  — инволюция без неподвижных точек. Тогда фактор-пространство  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) / \tau$  гомеоморфно одному из следующих многообразий: либо  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , либо неориентируемому локально тривиальному расслоению  $\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$  над окружностью, либо прямому произведению  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$ , либо связной сумме  $\mathbb{R}P^n \sharp \mathbb{R}P^n$  вещественных проективных пространств.

Если  $i_* = 2$ , то из предложения 3.3 следует, что  $V_h$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  (что доказывает теорему 1.1). Действительно, в этом случае отображение  $\tau_{i_*}$  является инволюцией без неподвижных точек, поэтому многообразие  $V_h = V_{h^{i_*}} / \tau_{i_*}$  гомеоморфно одному из четырех многообразий, описанных в предложении 3.3. В силу предложения 3.2 пространство  $V_h$  ориентируемо и его фундаментальная группа изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ , следовательно,  $V_h$  не может быть гомеоморфно неориентируемому расслоению над окружностью и многообразиям  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$ ,  $\mathbb{R}P^n \sharp \mathbb{R}P^n$ , фундаментальные группы которых отличны от  $\mathbb{Z}$ . Таким образом,  $V_h$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

Если  $i_* > 2$ , то найдется целое  $r$  такое, что  $2^r \leq i_* < 2^{r+1}$ . Положим  $g_r = h^{2^r}$ .

Пусть  $\xi : V_{h^{i_*}} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  — произвольный гомеоморфизм и  $S_0^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$  — такая сфера, что  $\xi p_{h^{i_*}}(S_0^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1} \times \{z\}$ , где  $z \in \mathbb{S}^1$  — произвольная точка. Тогда  $h^i(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$  для любого  $i \geq i_*$ , в частности  $g_r(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$ . В силу теоремы кольца множество  $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$ , ограниченное сферами  $S_0^{n-1}, g_r(S_0^{n-1})$ , гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ ; следовательно, пространство орбит  $V_{g_r}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Тогда в силу аргументов, аналогичных изложенным выше, и предложения 3.3, получим, что пространство орбит  $V_{g_{r-1}}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Если  $r = 1$ , то  $g^{r-1} = h$  и доказательство закончено. Если  $r > 1$ , то продолжим процесс и через  $(r - 1)$  шагов получим требуемый факт.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ и гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kerekjarto B. Topologische charakterisierung der linearen abbildungen // Acta Scientiarum Mathematicarum. 1934. Vol. 6, No. 4-4. pp. 235–262.
2. Homma T., Kinoshita S. On a topological characterization of the dilatation in  $E^3$  // Osaka Math. J. 1954. Vol. 6, No. 1. pp. 135–143.
3. Husch L. S. A topological characterization of the dilatation in  $E^n$  // Proceedings of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 28, No. 1. pp. 234–236.
4. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New York: Springer, 1982. 198 p.

5. Kosniowski Cz. A first course in algebraic topology. New York: Cambridge University Press, 1980. 269 p.
6. Jahren B., Kwasik S. Free involutions on  $S^1 \times S^n$  // *Math. Ann.* 2011. Vol. 351, No. 2. pp. 281–303.
7. Tao Y. On fixed point free involutions of  $S^1 \times S^2$  // *Osaka Math. J.* 1962. Vol. 14, No. 1. pp. 145–152.

*Поступила 1.08.2020*

*MSC2020 37C15*

## On a class of topological conjugacy with a homothety

© E. Gurevich<sup>1</sup>, A. Makarov<sup>2</sup>

**Abstract.** We consider a class  $H(\mathbb{R}^n)$  of orientation-preserving homeomorphisms of Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  such that for any homeomorphism  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  and for any point  $x \in \mathbb{R}^n$  a condition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) \rightarrow O$  holds, where  $O$  is the origin. It is proved that for any  $n \geq 1$  an arbitrary homeomorphism  $h \in H(\mathbb{R}^n)$  is topologically conjugated with the homothety  $a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , given by  $a_n(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$ . For a smooth case under the condition that all eigenvalues of the differential of the mapping  $h$  have absolute values smaller than one, this fact follows from the classical theory of dynamical systems. In the topological case for  $n \notin \{4, 5\}$  this fact is proven in several works of 20th century, but authors do not know any papers where it would be proven for  $n \in \{4, 5\}$ . This paper fills this gap.

**Key Words:** topological classification of homeomorphisms, topological conjugacy with dilatation, factor-space, homothety

## REFERENCES

1. B. Kerekjarto, “Topologische charakterisierung der linearen abbildungen”, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **6**:4-4 (1934), 235–262.
2. T. Homma, S. Kinoshita, “On a topological characterization of the dilatation in  $E^3$ ”, *Osaka Math. J.*, **6**:1 (1954), 135–143.
3. L. S. Husch, “A Topological characterization of the dilation in  $E^n$ ”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **28**:1 (1971), 234–236.
4. J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer., New York, 1982, 198. p.
5. Cz. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, New York, 1980, 269 p.

---

<sup>1</sup>**Elena Ya. Gurevich**, Associate Professor, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, [egurevich@hse.ru](mailto:egurevich@hse.ru)

<sup>2</sup>**Aleksey A. Makarov**, Undergraduate, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2447-4836>, [leomakar@mail.ru](mailto:leomakar@mail.ru)

6. B. Jahren, S. Kwasik, “Free involutions on  $S^1 \times S^n$ ”, *Math. Ann.*, **351**:2 (2011), 281–303.
7. Y. Tao, “On fixed point free involutions of  $S^1 \times S^2$ ”, *Osaka Math. J.*, **14**:1 (1962), 145–152.

*Submitted 1.08.2020*

УДК 517.977.1

# Стабилизация многосвязной управляемой непрерывно-дискретной системы с неперекрывающимися декомпозициями по части переменных

© Е. А. Каледина<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе рассматривается многосвязная управляемая динамическая система с неперекрывающимися декомпозициями. Учитывая, что большинство законов управления реализуется на цифровых регуляторах, управление системы реализуется в виде кусочно-постоянной функции. Многосвязность системы, в свою очередь, приводит к определенным трудностям в применении централизованного управления. Каждая изолированная подсистема должна работать устойчиво, а межсистемные связи могут осуществлять дестабилизирующее воздействие. В этом случае кусочно-постоянное управление строится двухуровневым, т. е. в виде суммы локального и глобального управления. Локальное управление стабилизирует положения равновесия отдельных линейных подсистем, а глобальное управление действует на межсистемные связи. Получены условия, при выполнении которых локальное управление стабилизирует линейные подсистемы, а положение равновесия исходной многосвязной системы будет асимптотически устойчиво по части переменных.

**Ключевые слова:** Многосвязная динамическая система, кусочно-постоянное управление, двухуровневое управление, асимптотическая устойчивость по части переменных, стабилизация

## 1. Введение и постановка задачи

В настоящее время большое внимание уделяется задаче стабилизации непрерывных систем кусочно-постоянным управлением. Данная задача возникает в объектах, где дискретные регулирующие устройства (компьютеры, микропроцессоры и просто пороговые устройства) сочетаются с непрерывными по своей природе объектами управления, то есть сочетается непрерывное и дискретное время [1–3]. Основная часть исследований посвящена построению кусочно-постоянных управлений для линейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с запаздыванием [4–5].

Отметим, что современные управляемые динамические объекты представляют собой комплекс подсистем, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом. Примерами таких объектов являются исполнительные системы роботов, газотурбинные двигатели, летательные аппараты и т. д. Математические модели подобных объектов представляют собой многосвязные системы, состоящие из отдельных подсистем, объединяемых в единую систему посредством внутрисистемных связей [6–7]. При управлении такими объектами необходимо учитывать тот факт, что большинство законов управления реализуется на цифровых регуляторах [8]. В связи с этим задача синтеза

<sup>1</sup>Каледина Елена Александровна, старший преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0992-9540>, [elena.lizina@gmail.com](mailto:elena.lizina@gmail.com)

непрерывно-дискретных систем управления многосвязными объектами является актуальной, а её решение востребованным.

В настоящей работе исследуется задача стабилизации многосвязной системы с помощью кусочно-постоянного управления по части переменных.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad (1.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $A$  – постоянная матрица размерности  $n \times n$ ;  $b$  – постоянный вектор размерности  $(n \times 1)$ . Управление  $u$  зависит от дискретных моментов времени и представляет собой кусочно-постоянную функцию, т. е.  $u(t) = u(ph)$ ,  $t \in [ph, (p+1)h]$ . Здесь  $h > 0$  – шаг квантования;  $p = 0, 1, \dots$ ;  $x(0) = x_0$  – начальное условие, характеризующее начальное отклонение от программного режима.

Положим, что матрица  $A$  допускает неперекрывающуюся декомпозицию вида

$$\dot{x}_s = A_s x_s + \sum_{j=1, j \neq s}^q A_{sj} x_j + b_s u_s, \quad s = \overline{1, q}, \quad (1.2)$$

где  $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $A_s$  – постоянные матрицы размерности  $n_s \times n_s$ ;  $A_{sj}$  – постоянные матрицы размерности  $(n_s \times n_j)$ ,  $\sum_{s=1}^q n_s = n$ . Ни одна из компонент вектора  $x_s$  не является одновременно компонентой какого-либо другого вектора  $x_j$  другой подсистемы. Матрица  $A_s$  отражает динамические свойства  $s$ -й подсистемы (1.2), а слагаемые  $\sum_{j=1, j \neq s}^q A_{sj} x_j$  содержат все остальные фазовые переменные  $x_j$ ,  $j = \overline{1, q}$  и указывают на связи между подсистемами.

Рассмотрим случай, когда кусочно-постоянное управляющее воздействие формируется в виде суммы  $u_s = u_s^\Lambda + u_s^\Gamma$ . Здесь  $u_s^\Lambda = u_s^\Lambda(ph)$  – управления на уровне подсистем (локальное управление), стабилизирующее подсистемы

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s u_s, \quad s = \overline{1, q}, \quad (1.3)$$

$u_s^\Gamma = u_s^\Gamma(ph)$  – управление на уровне исходной системы (1.2) (глобальное управление), воздействующее на межсистемные связи [9]. Пусть управления формируются по законам

$$u_s^\Lambda = k_s^T x_s(ph), \quad u_s^\Gamma = \sum_{j=1, j \neq s}^q k_j^T x_j(ph), \quad (1.4)$$

где  $k_s$  – постоянный вектор размерности  $n_s$ ,  $s = \overline{1, q}$ .

С учетом вида управлений (1.4) система (1.2) примет вид

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s k_s^T x_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^q A_{sj} x_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^q k_j^T x_j(ph), \quad s = \overline{1, q}. \quad (1.5)$$

Будем считать, что локальные управления построены таким образом, что действительные части характеристических чисел матриц  $(A_s + b_s k_s^T)$ ,  $s = \overline{1, q}$  – отрицательны. В этом случае исследуемую задачу стабилизации системы (1.5) по части переменных можно представить как поиск соответствующих условий, накладываемых лишь на глобальное управление.

## 2. Построение вспомогательной $\mu$ -системы для многосвязной управляемой системы

Представим вектор  $x$  в виде  $x = (x_1, \dots, x_n)^T = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^T$ ,  $m + p = n$ . Тогда система (1.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^m B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^m k_j^T y_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^p C_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1}^p k_j^T z_j(ph), \quad s = \overline{1, m}, \\ \dot{z}_s &= F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^p G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^p k_j^T z_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^m k_j^T y_j(ph), \quad s = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $B_{sj}$ ,  $C_{sj}$ ,  $F_s$ ,  $G_{sj}$ ,  $H_{sj}$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Для исследования задачи об асимптотической  $y$ -устойчивости положения равновесия  $y_i = 0$ ,  $z_j = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, p}$ ) системы (2.1) по отношению к переменным  $y_1, \dots, y_m$  воспользуемся работой В. И. Воротникова [10] и построим вспомогательную  $\mu$ -систему дифференциальных уравнений.

Для этого введём новые переменные:

$$\mu_s = \sum_{j=1}^p C_{sj} z_j, \quad (s = \overline{1, m_1}), \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $C_i = (C_{i1}, \dots, C_{ip})$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ,  $m_1 \leq m$ ) образуют линейно независимые столбцы в системе (2.2), а векторы  $C_{m_1+1}, \dots, C_m$  линейно выражаются через них.

При этом система (2.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^m B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^m k_j^T y_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj} \mu_j(ph), \quad s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s &= \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \eta_{sj} \mu_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph), \quad s = \overline{1, m_1}, \\ \dot{z}_s &= F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^p G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^p k_j^T z_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^m k_j^T y_j(ph), \quad s = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поведение переменных  $y_1, \dots, y_m$  системы (2.1), относительно которых рассматривается устойчивость невозмущенного движения, будет полностью описываться  $\mu$ -системой:

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^m B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^m k_j^T y_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj} \mu_j(ph), \quad s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s &= \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \eta_{sj} \mu_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph), \quad s = \overline{1, m_1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из этого следует, что на основании анализа устойчивости непрерывно-дискретной  $\mu$ -системы (2.4) по всем переменным решается вопрос об устойчивости по отношению к части переменных положения равновесия исходной системы (1.5) с двухуровневым кусочно-постоянным управлением.

В случае, когда при введении переменных (2.2) неравенства

$$\sum_{j=1}^p C_{sj} z_j = \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj} \mu_j$$

выполняются, допустим, лишь для первых  $m_2$  ( $m_2 < m_1$ ) равенств, система будет состоять из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^m B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^m k_j^T y_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_1} D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^{m_1} J_{sj} \mu_j(ph), \quad s = \overline{1, m}, \\ \dot{\mu}_s &= \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \eta_{sj} \mu_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph), \quad s = \overline{1, m_2}, \\ \dot{\mu}_s &= \alpha_s^* z_s + \beta_s^* z_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^p \gamma_{sj}^* z_j + \sum_{j=1, j \neq s}^{m_1} \eta_{sj}^* \mu_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph), \quad s = \overline{1, m_2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= F_s z_s + b_s k_s^T z_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^p G_{sj} z_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^p k_j^T z_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^m H_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1}^m k_j^T y_j(ph), s = \overline{1, p}, \\ \gamma_{sj}^* &= \sum_{i=1}^p C_{sj} G_{ij}, s = \overline{m_2 + 1, m_1}. \end{aligned}$$

В этом случае вводятся новые переменные:

$$\mu_{m_1+1} = \sum_{k=1}^p \gamma_{m_2+l, k} z_k, l = \overline{1, m_3},$$

где первые  $m_3$  из векторов  $\gamma_{m_2+1}^*, \dots, \gamma_{m_1}^*$  ( $m_3 \leq m_1 - m_2$ ) линейно независимы, а остальные выражаются через них. При этом система сводится к системе типа (2.3) или (2.5). В первом случае  $\mu$ -система построена, во втором – необходимо продолжать введение новых переменных.

В общем случае вспомогательные переменные  $\mu$ -системы выбираются из переменных (в векторном виде)

$$\mu = Cz, \mu^{(1)} = C\dot{z} = CGz, \dots, \mu^{(k)} = CG^k z \quad (1 \leq k \leq p - 1),$$

и для определения размерности  $\mu$ -системы с кусочно-постоянным управлением рассматривается матрица

$$K_p = (C^T, G^T C^T, \dots, (G^T)^{(p-1)} C^T),$$

где  $C^T, G^T$  – вектор-столбцы системы (2.1). Следовательно, для непрерывно-дискретной системы (2.4) верна лемма [10]: для того, чтобы размерность  $\mu$ -системы была равна  $(m + h)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $rank K_p = h$ .

### 3. Асимптотическая устойчивость $\mu$ -систем

Далее, не теряя общности рассуждений, рассмотрим  $\mu$ -систему размерности  $(m + h)$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^m B_{sj} y_j + b_s \sum_{j=1, j \neq s}^m k_j^T y_j(ph) + \\ &+ \sum_{j=1}^h D_{sj} \mu_j + \sum_{j=1}^h J_{sj} \mu_j(ph), s = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph) + \sum_{j=1, j \neq s}^h \gamma_{sj} \mu_j + \sum_{j=1, j \neq s}^h \eta_{sj} \mu_j(ph) + \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j + \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph), s = \overline{1, h}. \tag{3.2}$$

Найдем  $\alpha_s, \beta_s, \gamma_{sj}, \eta_{sj}, \rho_{sj}, \xi_{sj}$  в уравнении (3.2) из равенств

$$\sum_{j=1}^h C_{sj} F_j z_j = \alpha_s \mu_s; \quad \sum_{j=1}^h C_{sj} b_j k_j^T z_j = \beta_s \mu_s; \quad \sum_{j=1}^h C_{sj} \sum_{k=1, k \neq j}^h G_{jk} z_k = \sum_{j=1, j \neq s}^h \gamma_{sj} \mu_j;$$

$$\sum_{j=1}^h C_{sj} b_j \sum_{l=1, l \neq s}^h k_l^T z_l(ph) = \sum_{j=1, j \neq s}^h \eta_{sj} \mu_j(ph); \quad \sum_{j=1}^h C_{sj} \sum_{k=1}^m H_{jk} y_k = \sum_{j=1}^m \rho_{sj} y_j;$$

$$\sum_{j=1}^h C_{sj} b_j \sum_{l=1, l \neq s}^m k_l^T y_l(ph) = \sum_{j=1}^m \xi_{sj} y_j(ph)$$

соответственно отсюда, учитывая замену (2.2), найдем коэффициенты уравнения (3.2) в матричной форме следующим образом:

$$\mathbb{A} = CFC^T(CC^T)^{-1}, \quad \mathbb{B} = C\Theta C^T(CC^T)^{-1}, \quad \Gamma = CGC^T(CC^T)^{-1},$$

$$N = C\bar{\Theta}_1 C^T(CC^T)^{-1}, \quad P = CH, \quad \Xi = C\bar{\Theta}_2,$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_h \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_h \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1h} \\ \gamma_{2h} & 0 & \dots & \gamma_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{h1} & \gamma_{h2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} & \dots & \eta_{1h} \\ \eta_{2h} & 0 & \dots & \eta_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{h1} & \eta_{h2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{h1} & \rho_{h2} & \dots & \rho_{hm} \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hm} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{h1} & C_{h2} & \dots & C_{hp} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_p \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p1} & H_{p2} & \dots & H_{pm} \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} b_{m+1} k_{m+1}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{m+2} k_{m+2}^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n k_n^T \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{m+1} k_{m+2}^T & \dots & b_{m+1} k_n^T \\ b_{m+2} k_{m+1}^T & 0 & \dots & b_{m+2} k_n^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n k_{m+1}^T & b_n k_{m+2}^T & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Theta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{m+1} k_2^T & \dots & b_{m+1} k_m^T \\ b_{m+2} k_1^T & 0 & \dots & b_{m+2} k_m^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n k_1^T & b_n k_2^T & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & \dots & \dots & G_{1p} \\ G_{21} & 0 & \dots & \dots & G_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{p1} & G_{p2} & \dots & G_{pp-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что коэффициенты усиления  $\beta_s$  кусочно-постоянного управления системы (3.2) стабилизируют соответствующие линейные подсистемы

$$\dot{\mu}_s = (\alpha_s + \beta_s)\mu_s, \quad s = \overline{1, h}.$$

Для этого ведем расширенную матрицу  $\tilde{C}$  размерности  $(n \times n)$ :

$$\tilde{C} = \left( \begin{array}{c|cc} E_{m \times m} & & O_{m \times p} \\ \hline O_{p \times m} & & C_{h \times p} \\ \hline & O_{(p-h) \times h} & E_{(p-h) \times (p-h)} \end{array} \right),$$

где  $E_{m \times m}$  и  $E_{(p-h) \times (p-h)}$  — единичные матрицы размерности  $(m \times m)$  и  $((p-h) \times (p-h))$  соответственно;  $O_{m \times p}$ ,  $O_{p \times m}$ ,  $O_{(p-h) \times h}$  — нулевые матрицы соответствующих размерностей. Далее обозначим через  $\tilde{A}$   $(n \times n)$  квадратную матрицу вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + bk^T & O_{m \times p} \\ O_{p \times m} & F + \Theta \end{pmatrix},$$

где  $A + bk^T$  — диагональная матрица размерности  $(m \times m)$ , элементы главной диагонали которой  $A_s + b_s k_s^T$ ,  $(s = \overline{1, m})$ ;  $F + \Theta$  — диагональная матрица размерности  $(p \times p)$ , где на главной диагонали находятся элементы  $F_s + b_s k_s^T$   $(s = \overline{1, p}, j = \overline{1 + m, p})$ ;  $O_{p \times m}$  и  $O_{m \times p}$  — нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Используя преобразование  $\tilde{C}\tilde{A}\tilde{C}^{-1}$ , получим матрицу, в которой первые  $m + h$  строк образуют систему

$$\dot{y}_s = (A_s + b_s k_s^T)y_s, \quad s = \overline{1, m}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\mu}_s = (\alpha_s + \beta_s)\mu_s, \quad s = \overline{1, h}. \quad (3.4)$$

Корни характеристических уравнений  $\|\tilde{A} - \lambda E_n\| = 0$  и  $\|\tilde{C}\tilde{A}\tilde{C}^{-1} - \lambda E_n\| = 0$  одинаковы [11]. Действительные части характеристических корней матрицы  $\tilde{A}$  отрицательны по построению, а значит, управления  $\beta_s \mu_s$   $(s = \overline{1, h})$  также будут стабилизировать линейные системы (3.4).

В работе В. И. Зубова [12] доказана теорема о стабилизации линейной управляемой системы, в т. ч. для случая, когда управление является линейной комбинацией фазовых координат объекта, вычисляемых в разные моменты времени. Опираясь на данную теорему, получим, что при достаточно малом шаге квантования  $h$  в системе (2.4) построенные коэффициенты усиления  $k_s$ ,  $\beta_s$  будут стабилизировать соответствующие линейные подсистемы

$$\dot{y}_s = A_s y_s + b_s k_s^T y_s(ph), \quad s = \overline{1, m},$$

$$\dot{\mu}_s = \alpha_s \mu_s + \beta_s \mu_s(ph), \quad s = \overline{1, h},$$

а задача об асимптотической  $y$ -устойчивости положения равновесия  $y_i = 0, z_j = 0$   $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p})$  системы (1.5) сводится к задаче об асимптотической устойчивости по всем переменным многосвязной системы с двухуровневым кусочно-постоянным управлением (3.1)–(3.2). Для ее решения воспользуемся теоремой о двухуровневой стабилизации многосвязной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями, доказанной в работе [13].

Для системы (3.1)–(3.2) выбирается векторная функция Ляпунова [14] вида

$$V(y, \mu) = (V_1(y_1), \dots, V_m(y_m), V_{m+1}(\mu_1), \dots, V_{m+h}(\mu_h))^T,$$

где  $V_s(y_s)$  и  $V_j(\mu_j)$  ( $s = \overline{1, m}, j = \overline{1, h}$ ) – функции Ляпунова, решающие вопрос об асимптотической устойчивости систем (3.3)–(3.4) соответственно. Поскольку данные подсистемы есть линейные системы дифференциальных уравнений, представим их как квадратичные формы вида [14]:

$$V_s(y_s) = y_s^T C_s^y y_s, s = \overline{1, m},$$

$$V_j(\mu_j) = \mu_j^T C_j^\mu \mu_j, j = \overline{1, h},$$

удовлетворяющие условиям Н. Н. Красовского [15]

$$\lambda_{1s}^y \|y_s\|^2 \leq V_s(y_s) \leq \lambda_{2s}^y \|y_s\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V_s(y_s)}{\partial y_s} \right\| \leq c_s^y \|y_s\|, \quad \left. \frac{dV_s(y_s)}{dt} \right|_{(3.3)} = -d_s^y \|y_s\|^2, s = \overline{1, m};$$

$$\lambda_{1j}^\mu \|\mu_j\|^2 \leq V_j(\mu_j) \leq \lambda_{2j}^\mu \|\mu_j\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V_j(\mu_j)}{\partial \mu_j} \right\| \leq c_j^\mu \|\mu_j\|, \quad \left. \frac{dV_j(\mu_j)}{dt} \right|_{(3.4)} = -d_j^\mu \|\mu_j\|^2, j = \overline{1, h};$$

соответственно, где  $\lambda_{1s}^y, \lambda_{2s}^y, c_s^y, d_s^y, \lambda_{1j}^\mu, \lambda_{2j}^\mu, c_j^\mu, d_j^\mu$  – положительные постоянные числа.

Повторяя рассуждения из работы [13], составим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{d_1^y}{2\lambda_{21}^y} & \cdots & \frac{c_1^y \|B_{1m} + b_1 k_m^T\|}{2(\lambda_{11}^y \lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_1^y \|D_{11} + J_{11}\|}{2(\lambda_{11}^y \lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_1^y \|D_{1h} + J_{1h}\|}{2(\lambda_{11}^y \lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\ \frac{c_2^y \|B_{21} + b_2 k_1^T\|}{2(\lambda_{12}^y \lambda_{11}^y)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_2^y \|B_{2m} + b_2 k_m^T\|}{2(\lambda_{12}^y \lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_2^y \|D_{21} + J_{21}\|}{2(\lambda_{12}^y \lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_2^y \|D_{2h} + J_{2h}\|}{2(\lambda_{12}^y \lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{c_m^y \|B_{m1} + b_m k_1^T\|}{2(\lambda_{1m}^y \lambda_{11}^y)^{1/2}} & \cdots & -\frac{d_m^y}{2\lambda_{2m}^y} & \frac{c_m^y \|D_{m1} + J_{m1}\|}{2(\lambda_{1m}^y \lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_m^y \|D_{mh} + J_{mh}\|}{2(\lambda_{1m}^y \lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\ \frac{c_1^\mu \|\rho_{11} + \xi_{11}\|}{2(\lambda_{11}^\mu \lambda_{11}^y)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_1^\mu \|\rho_{1m} + \xi_{1m}\|}{2(\lambda_{11}^\mu \lambda_{1m}^y)^{1/2}} & -\frac{d_1^\mu}{2\lambda_{21}^\mu} & \cdots & \frac{c_1^\mu \|\gamma_{1h} + \eta_{1h}\|}{2(\lambda_{11}^\mu \lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\ \frac{c_2^\mu \|\rho_{21} + \xi_{21}\|}{2(\lambda_{12}^\mu \lambda_{11}^y)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_2^\mu \|\rho_{2m} + \xi_{2m}\|}{2(\lambda_{12}^\mu \lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_2^\mu \|\gamma_{2m} + \eta_{21}\|}{2(\lambda_{12}^\mu \lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_2^\mu \|\gamma_{2h} + \eta_{2h}\|}{2(\lambda_{12}^\mu \lambda_{1h}^\mu)^{1/2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{c_h^\mu \|\rho_{h1} + \xi_{h1}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu \lambda_{11}^y)^{1/2}} & \cdots & \frac{c_h^\mu \|\rho_{h3} + \xi_{h3}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu \lambda_{1m}^y)^{1/2}} & \frac{c_h^\mu \|\gamma_{h1} + \eta_{h1}\|}{2(\lambda_{1h}^\mu \lambda_{11}^\mu)^{1/2}} & \cdots & -\frac{d_h^\mu}{2(\lambda_{2h}^\mu)} \end{pmatrix},$$

отрицательность собственных чисел которой гарантирует расчетную асимптотическую устойчивость положения равновесия системы (3.1)–(3.2) по всем переменным, а значит, и асимптотическую  $y$ -устойчивость системы (1.5). Таким образом, будет верна следующая теорема.

**Теорема 3.1** Если для многосвязной системы (1.1) с кусочно-постоянным управлением вида (1.4) выполняются условия:

- 1) векторы  $b_s, A_s b_s, \dots, A_s^{n-1} b_s$  линейно независимы,  $s = \overline{1, q}$ ;
- 2) «локальное» управление  $u_s^\Lambda = k_s^T x_s(ph)$  ( $s = \overline{1, q}$ ) стабилизирует линейные системы (1.3);
- 3) коэффициенты усиления «глобального» управления

$$u_s^\Gamma = \sum_{j=1, j \neq s}^q k_j^T x_j(ph)$$

обеспечивают отрицательность собственных чисел матрицы  $\tilde{A}$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\tilde{A}) < 0,$$

то нулевое решение многосвязной управляемой непрерывно-дискретной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями (1.5) при достаточно малом  $h$  будет расчетно асимптотически устойчивым по части переменных.

#### 4. Заключение

Доказана теорема о возможности двухуровневой стабилизации положения равновесия многосвязной управляемой динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями (1.2) по части переменных. При выполнении условий теоремы построенное по правилам (1.4) двухуровневое кусочно-постоянное управление стабилизирует линейные подсистемы (1.3) по всем переменным, а положение равновесия исходной многосвязной системы будет асимптотически устойчиво по части переменных.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляков К. Ю. Цифровая стабилизация непрерывных объектов с множественными запаздываниями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 30–37.
2. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ I // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 104–113.
3. Козлов Р. И., Козлова О. Р. Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ II // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № С. 41–50.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 446 с.
5. Розенвассер Е. Н. Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Наука, 1994. 461 с.
6. Александров А. Ю. Исследование устойчивости решений одного класса сложных систем // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. информ. проц. упр. 2011. № 4. С. 3–13.
7. Многосвязные системы управления / под ред. Меерова В. М. М.: Наука, 1990. 264 с.
8. Основы управления манипуляционными роботами: учеб. для вузов. – 2-е изд., исправ. и доп. / под. ред. С.Л. Зенкевича, А.С. Ющенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.

9. Воронов А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.
10. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
11. Мальцев А. Г. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.
12. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
13. Лизина Е. А., Щенников В. Н. Двухуровневая стабилизация многосвязной гибридной динамической системы с неперекрывающимися декомпозициями. Системы управления и информационные технологии. 2011. № 2 (44). С. 30–34.
14. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под. ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
15. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 222 с.

*Поступила 22.07.2020*

MSC2020 39A30

# Stabilization of a multiconnected controlled continuous discrete system with non-overlapped decompositions with respect to part of variables

© E. A. Kaledina<sup>1</sup>

**Abstract.** This paper considers a multi-connected controllable system with non-overlapping decompositions. Given that most of the control laws are implemented on digital controllers, the control of the system is implemented as a piecewise-constant function. Multiconnectivity of the system, in turn, makes it impossible to use centralized control. Every isolated subsystem must work stably, and intersystem connections can have a destabilizing effect. In this case, piecewise-constant control is constructed as two-level, i.e. in the form of a sum of local and global control. Local control stabilizes the equilibrium positions of individual linear subsystems. Global control acts on intersystem connections. Conditions are obtained under which local control stabilizes linear subsystems, and the equilibrium position of the original multi-connected system is asymptotically stable in part of variables.

**Key Words:** multivariable dynamic system, piecewise-constant control, two-level control, asymptotic stability in part of variables, stabilization

## REFERENCES

1. K. Y. Polyakov, “[Digital stabilization of continuous objects with multiple delays]”, *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **1** (2006), 30–37 (In Russ.).
2. R.I. Kozlov, O.R. Kozlova, “[Investigation of the stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics by the VFL method I]”, *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **2** (2009), 104–113 (In Russ.).
3. R.I. Kozlov, O.R. Kozlova, “[Investigation of the stability of nonlinear continuous-discrete models of economic dynamics by the VFL method II]”, *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, **3** (2009), 41–50 (In Russ.).
4. B. Kuo, *Teoriya i priktirovanie cifrovyyh sistem upravleniya [Theory and design of digital control systems]*, Mashinostroeniye, M., 1986 (In Russ.), 446 c.
5. E. N. Rozenvasser, *Lineynaya teoriya cifrovogo upravleniya v nepreryvnom vremeni [Linear theory of digital control in continuous time]*, Nauka, M., 1994 (In Russ.), 461 c.
6. A. Yu. Alexandrov, “[Investigation of the stability of solutions of one class of complex systems]”, *Vestn. S.-Peterburgskogo un-ta. – Ser. 10. Prikl. matem. inform. proc. upr.*, **4** (2011), 3–13 (In Russ.).
7. M. V. Meerov, A. V. Ahmetzyanov, Ya. M. Berschanskiy, V. N. Kulibanov, *Mnogosvyaznye sistemy upravleniya [Multiply connected control systems]*, Nauka, 1990 (In Russ.), 264 c.

<sup>1</sup>**Elena A. Kaledina**, Senior Teacher, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0992-9540>, [elena.lizina@gmail.com](mailto:elena.lizina@gmail.com)

8. S.L. Zenkevich, A.S. Yuschenko i dr., *Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami: Uchebnik dlya vuzov - 2-e izd, isprav. i dop. [Fundamentals of manipulation robots control: Textbook for universities. - 2nd ed., Revised. and add.]*, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2004 (In Russ.), 480 c.
9. A. A. Voronov., *Vvedenie v dinamiku slojnyh upravlyaemyh sistem [Introduction to the dynamics of complex control systems]*, Nauka, M., 1985 (In Russ.), 352 c.
10. V. I. Vorotnikov, *Ustoychivost dinamicheskikh sistem po otnosheniyu k chasti peremennyh [Stability of dynamical systems with respect to part variables]*, Nauka, M., 1992 (In Russ.), 288 c.
11. A. G. Maltcev, *Osnovy lineynoy algebry [Fundamentals of Linear Algebra]*, Nauka, M., 1970 (In Russ.), 400 c.
12. V. I. Zubov., *Lekcii po teorii upravleniya [Lectures on control theory]*, Nauka, M., 1975 (In Russ.), 496 c.
13. E. A. Lizina, V.N. Schennikov, “[Two-level stabilization of a multiply connected hybrid dynamical system with non-overlapping decompositions]”, *Sistemy upravleniya i informacionnye tehnologii*, **2 (44)** (2011), 30–34 (In Russ.).
14. A. A. Voronov, V.M. Matrosov i dr., *Metod vektornyh funktsiy Lyapunova v teorii ustoychivosti [Lyapunov vector function method in stability theory]*, Nauka, M., 1987 (In Russ.), 312 c.
15. N. N. Krasovskiy, *nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya [Some problems of the theory of stability of motion]*, Phizmatlit, M., 1959 (In Russ.), 222 c.

*Submitted 22.07.2020*

УДК 517.9

# Об асимптотике спектра дифференциального оператора четного порядка, потенциалом которого является дельта-функция

© С. И. Митрохин<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе предлагается новый метод изучения дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Рассматривается последовательность дифференциальных операторов шестого порядка с кусочно-гладкими коэффициентами. Пределом последовательности потенциалов этих операторов является дельта-функция Дирака. Граничные условия являются разделёнными. Для корректного определения решений дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами в точках разрыва требуются условия «склейки». Асимптотические условия «склейки» и исследованы граничные условия. В результате выведено уравнение на собственные значения изучаемого дифференциального оператора, которое представляет собой целую функцию. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, она представляет собой правильный шестиугольник. В различных секторах индикаторной диаграммы методом последовательных приближений найдена асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов. Предел асимптотики спектра задаёт спектр оператора шестого порядка, потенциалом которого является дельта-функция.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор с разрывными коэффициентами, асимптотика решений, кусочно-гладкий потенциал, дельта-функция Дирака, асимптотика собственных значений, спектр оператора

## 1. Введение. Постановка задачи

В данной статье мы изучим асимптотику спектра семейства дифференциальных операторов, задаваемых на отрезке дифференциальным уравнением

$$\vec{y}_n^{(6)}(x) + Q_n(x)\vec{y}(x) = \lambda a^6 \vec{y}_n(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a > 0,$$

с некоторыми граничными условиями, где  $Q_n(x)$  — потенциал;  $\lambda$  — спектральный параметр;  $\rho(x) = a^6$  — весовая функция, при этом потенциал  $Q_n(x)$  представляет собой последовательность кусочно-гладких функций, дающих в пределе  $\delta$ -функцию.

Рассмотрим дифференциальный оператор, задаваемый на отрезке  $[0, \pi]$  дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(6)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^6 y_1(x), \quad 0 \leq x < x_{1n}, \quad a > 0; \quad (1.1)$$

$$y_2^{(6)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda a^6 y_2(x), \quad x_{1n} \leq x \leq x_2; \quad (1.2)$$

$$y_3^{(6)}(x) + q_3(x)y_3(x) = \lambda a^6 y_3(x), \quad x_2 < x \leq x_{3n}; \quad (1.3)$$

$$y_4^{(6)}(x) + q_4(x)y_4(x) = \lambda a^6 y_4(x), \quad x_{3n} < x \leq \pi, \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>Митрохин Сергей Иванович, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Россия, г. Москва, Ленинские Горы, д. 6), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1896-0563>, [mitrokhin-sergey@yandex.ru](mailto:mitrokhin-sergey@yandex.ru)

с граничными условиями

$$y_1(0) = y_1''(0) = y_1^{(4)}(0) = y_4(\pi) = y_4''(\pi) = y_4^{(4)}(\pi) = 0, \quad (1.5)$$

при этом потенциал удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 0 \quad \text{при } x \in [0, x_{1n}); & q_4(x) &= 0, \quad x \in (x_{3n}, \pi]; \\ q_2(x) &> 0 \quad \text{при } x \in (x_{1n}, x_2); & q_3(x) &> 0, \quad x \in (x_2, x_{3n}); \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{1n} &= x_2; & \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} &= x_2; & \lim_{x \rightarrow x_{1n}} q_2(x) &= 0; & \lim_{x \rightarrow x_{3n}} q_3(x) &= 0; \\ & & \lim_{x \rightarrow x_2} q_2(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow x_2} q_3(x) &= +\infty; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t) dt = H_{2n}; \quad \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t) dt = H_{3n}; \quad H_{2n} + H_{3n} = 1, \quad (1.7)$$

также выполняются следующие условия гладкости:

$$q_2(x) \in C^5(x_{1n}, x_2); \quad q_3(x) \in C^5(x_2, x_{3n}). \quad (1.8)$$

Таким образом, в предельном случае получим:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(x) = \delta(x - x_2), \quad (1.9)$$

поэтому перепишем уравнение (1.1)–(1.4) в виде

$$\bar{y}^{(6)}(x) + \delta(x - x_2)\bar{y}(x) = \lambda a^6 \bar{y}_n(x), \quad 0 \leq x < \pi, \quad a > 0,$$

где  $\lambda$  – спектральный параметр.

Кроме того, для корректности решения уравнений (1.1)–(1.4), необходимо выполнение условий «склейки» в точках  $x_{1n}, x_2, x_{3n}$  разрыва коэффициентов

$$y_1(x_{1n} - 0) = y_2(x_{1n} + 0); \quad y_1^{(m)}(x_{1n} - 0) = y_2^{(m)}(x_{1n} + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (1.10)$$

$$y_2(x_2 - 0) = y_3(x_2 + 0); \quad y_2^{(m)}(x_2 - 0) = y_3^{(m)}(x_2 + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (1.11)$$

$$y_3(x_{3n} - 0) = y_4(x_{3n} + 0); \quad y_3^{(m)}(x_{3n} - 0) = y_4^{(m)}(x_{3n} + 0), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (1.12)$$

Приведем пример последовательности потенциалов, пределом которых является дельта-функция  $\delta(x - x_2)$ :  $x_2$  – фиксированная точка,  $x_2 \in (0, \pi)$ ;  $x_{1n} = x_2 - \frac{1}{n}$ ,  $x_{3n} = x_2 + \frac{2}{n}$  – достаточно большое число, чтобы выполнялись неравенства  $x_{1n} > 0$ ,  $x_{3n} < \pi$ ;  $q_1(x) = 0$  при  $x \in [0, x_{1n})$ ;  $q_2(x)$  – прямая, соединяющая точки  $A_{1n}(x_2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  и  $B_{1n}(x_2, 2n)$ , ее уравнение  $y = q_2(x) = (2n^2 - 1)x + (1 - 2n^2)x_2 + 2n$ ;  $q_3(x)$  – прямая, соединяющая точки  $D_{1n}(x_2, \frac{n}{2} + \frac{5}{2n})$  и  $G_{1n}(x_2 + \frac{2}{n}, \frac{2}{n})$ , ее уравнение  $y = q_3(x) = (-\frac{1}{4} - \frac{n^2}{4})x + (\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4})x_2 + \frac{n}{2} + \frac{5}{2n}$ ;  $q_4(x) = 0$  при  $x \in (x_{3n}, \pi]$ . Функции  $q_2(x)$  и  $q_3(x)$  удовлетворяют условиям (1.6) и (1.7):

$$\begin{aligned} \int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t) dt &= \int_{x_2 - \frac{1}{n}}^{x_2} [(2n^2 - 1)t + (1 - 2n^2)x_2 + 2n] dt = H_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}, \\ \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t) dt &= \int_{x_2}^{x_2 + \frac{2}{n}} \left[ \left( -\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \right) t + \left( \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \right) x_2 + \frac{n}{2} + \frac{5}{2n} \right] dt = H_{3n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}, \end{aligned}$$

$H_{2n} + H_{3n} = 1$ , поэтому при  $n \rightarrow \infty$  потенциал в пределе дает дельта-функцию  $\delta(x - x_2)$ .

## 2. Из истории вопроса

Идея статьи заключается в рассмотрении дифференциального оператора шестого порядка с потенциалом дельта-функцией Дирака как предела последовательности операторов с кусочно-гладкими потенциалами. В работе [1] было дано строгое обоснование метода дельта-потенциалов, используемого в физике, – например, для изучения модели нерелятивистского электрона, движущегося в жесткой кристаллической решетке, а также для описания короткодействующих примесей, дефектов и аналогичных явлений в различных системах. В этой работе была использована формула М. Г. Крейна для описания резольвенты дифференциального оператора второго порядка с точечными возмущениями (фактически с дельта-функциями). Модель точечных потенциалов, модель нерелятивистского электрона широко применяются в ядерной и атомной физике [2–5].

Спектральная теория дифференциальных операторов развивается в сторону уменьшения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, определяющих такие операторы. Дифференциальные операторы второго порядка с негладкими коэффициентами, заданные на отрезке, в разрезе спектральной теории (с кусочно-гладкими потенциалами или кусочно-гладкой весовой функцией) рассмотрены в работах [6–10].

Следующим этапом понижения гладкости потенциалов было рассмотрение дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами. В работе [11] найдена асимптотика собственных значений и асимптотика собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом с различными краевыми условиями.

В работах [12–15] автором предложен другой метод для изучения спектральных свойств операторов четвертого порядка и выше с разделенными либо неразделенными граничными условиями (с суммируемыми коэффициентами).

Различные дифференциальные операторы второго порядка с сингулярными потенциалами (в т. ч. и операторы с дельта-потенциалами), изучались в работах [16–21]. В работах [17–19] была получена формула первого регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля, потенциалом которого являлась дельта-функция Дирака. Операторы порядка выше второго с дельта-потенциалами до сих пор не были изучены, в нашей статье мы пытаемся устранить этот пробел.

## 3. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1.1)–(1.4) при больших значениях спектрального параметра $\lambda$

Введем следующие обозначения:  $\lambda = s^6$ ,  $s = \sqrt[6]{\lambda}$ , при этом для корректности дальнейших вычислений зафиксируем ту ветвь арифметического корня шестой степени, для которой  $\sqrt[6]{1} = +1$ . Пусть  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) – различные корни шестой степени из единицы:

$$\begin{aligned} \omega_k^6 &= 1; & \omega_k &= e^{\frac{2\pi i}{6}(k-1)}, & k &= 1, 2, \dots, 6; \\ \omega_1 &= 1, & \omega_2 &= e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; & \omega_3 &= e^{\frac{4\pi i}{6}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \\ \omega_4 &= -1; & \omega_5 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; & \omega_6 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \\ \omega_4 &= -\omega_1; & \omega_5 &= -\omega_2; & \omega_6 &= -\omega_3; & \omega_5 &= \bar{\omega}_3, \\ \omega_6 &= \bar{\omega}_2; & \omega_1 &= \bar{\omega}_1; & \omega_4 &= \bar{\omega}_4. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Числа  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) делят единичную окружность на шесть равных частей и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^6 \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \quad \sum_{k=1}^6 \omega_k^m = 6, \quad m = 0, \quad m = 6. \quad (3.2)$$

Методами, примененными в монографии [22, с. 2], с учетом условий гладкости (1.8) устанавливаются следующие утверждения.

**Т е о р е м а 3.1** *Общее решение дифференциального уравнения (1.1) при выполнении условия (1.6) ( $q_1(x) = 0$ ,  $x \in [0, x_{1n})$ ) имеет следующий вид:*

$$y_1(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad y_1^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.3)$$

где  $C_{1k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные,

$$y_{1k}(x, s) = e^{a\omega_k s x}; \quad y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}, \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad m = 1, 2, \dots, 5. \quad (3.4)$$

**Т е о р е м а 3.2** *Общее решение дифференциального уравнения (1.2) имеет вид*

$$y_2(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}(x, s); \quad y_2^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.5)$$

где  $C_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные. При этом для фундаментальной системы решений  $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^6$  справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:

$$y_{2k}(x, s) = e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x)}{s^5} + \frac{A_6^0(x)}{s^6} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^7}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad (3.6)$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x)}{s^5} + \frac{A_6^m(x)}{s^6} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^7}\right) \right], \quad (3.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, 6, \quad m = 1, 2, \dots, 5.$$

$$A_5(x) = -\frac{1}{6a^5} \int_{x_{1n}}^x q_2(t) dt; \quad A_5(x_{1n}) = 0; \quad A_5'(x) = -\frac{q_2(x)}{6a^5}; \quad (3.8)$$

$$A_6^0(x) = \frac{5q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^1(x) = \frac{3q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^2(x) = \frac{q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6};$$

$$A_6^3(x) = \frac{-q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^4(x) = \frac{-3q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}; \quad A_6^5(x) = \frac{-5q_2(x) - 5q_2(x_{1n})}{12a^6}. \quad (3.9)$$

При этом справедливо следующее свойство:

$$\sum_{k=0}^5 A_6^k(x) = \sum_{k=0}^5 A_6^k(x_{1n}) = \sum_{k=0}^5 A_6^k(x_2) = D_6 = \frac{(-5)q_2(x_{1n})}{2a^6}. \quad (3.10)$$

**Т е о р е м а 3.3** *Общее решение дифференциального уравнения (1.3) представимо в виде*

$$y_3(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{3k} y_{3k}(x, s); \quad y_3^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{3k} y_{3k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.11)$$

где  $C_{3k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные. При этом для фундаментальной системы решений  $\{y_{3k}(x, s)\}_{k=1}^6$  справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:

$$y_{3k}(x, s) = e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^0(x)}{s^6} + O\left(\frac{e^{|\text{Im}s|ax}}{s^7}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.12)$$

$$y_{3k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[ 1 + \frac{\omega_k B_5(x)}{s^5} + \frac{B_5^m(x)}{s^5} + O\left(\frac{e^{|\text{Im}s|ax}}{s^7}\right) \right], \quad (3.13)$$

$$k = 1, 2, \dots, 6, \quad m = 1, 2, \dots, 5.$$

$$B_5(x) = -\frac{1}{6a^5} \int_{x_2}^x q_3(t) dt; \quad B_5(x_2) = 0; \quad B_5'(x) = -\frac{q_3(x)}{6a^5}; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} B_6^0(x) &= \frac{5q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; & B_6^1(x) &= \frac{3q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; & B_6^2(x) &= \frac{q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \\ B_6^3(x) &= \frac{-q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; & B_6^4(x) &= \frac{-3q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; & B_6^5(x) &= \frac{-5q_3(x) - 5q_3(x_2)}{12a^6}; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\sum_{k=0}^5 B_6^k(x) = \sum_{k=0}^5 B_6^k(x_2) = \sum_{k=0}^5 B_6^k(x_{3n}) = E_6 = \frac{-5q_3(x_2)}{2a^6}. \quad (3.16)$$

**Теорема 3.4** *Общее решение дифференциального уравнения (1.4) при выполнении условия (1.6) ( $q_4(x) = 0, x \in (x_{3n}, \pi]$ ) имеет следующий вид:*

$$y_4(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{4k} y_{4k}(x, s); \quad y_4^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_{4k} y_{4k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 5, \quad (3.17)$$

где  $C_{4k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} y_{4k}(x, s) &= e^{a\omega_k s x}; & y_{4k}^{(m)}(x, s) &= (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}, \\ k &= 1, 2, \dots, 6; & m &= 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Наличие асимптотических формул (3.3)–(3.18) позволяет изучить условия «склейки» (1.10)–(1.12).

### 4. Изучение условий «склейки» (1.11)

Из условий «склейки» (1.11) в фиксированной точке  $x_2$  разрыва коэффициентов, применив формулы (3.5) и (3.11), получим:

$$y_3(x_2 + 0, s) \stackrel{(1.11)}{=} y_2(x_2 - 0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{3k} y_{3k}(x_2 + 0, s) = \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}(x_2 - 0, s); \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_3^{(m)}(x_2 + 0, s)}{(as)^m} &\stackrel{(1.11)}{=} \frac{y_2^{(m)}(x_2 - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{3k} \frac{y_{3k}^{(m)}(x_2 + 0, s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^6 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_2 - 0, s)}{(as)^m}, \\ m &= 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим систему (4.1)–(4.2) как систему из шести линейных уравнений с шестью неизвестными  $C_{31}, C_{32}, \dots, C_{36}$ , при этом  $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{26}$  — параметры. Из теоремы Крамера следует, что решение этой системы единственно и представляется в виде

$$C_{3n} = \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_{03}(s) \neq 0}, \quad n = 1, 2, \dots, 6, \tag{4.3}$$

где  $\Delta_{03}(x) = \Delta_{03}(x, s)$  (не зависит от  $x$ ) — определитель Вронского фундаментальной системы функций  $\{y_{31}(x, s); y_{32}(x, s), \dots, y_{36}(x, s)\}$ , и определители  $\Delta_{3n}$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) получаются из определителя  $\Delta_{03}(x_2, s)$  заменой  $n$ -го столбца на столбец

$$\left( \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}(x_2 - 0, s); \sum_{k=1}^6 C_{2k} \frac{y'_{2k}(x_2 - 0, s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^6 C_{26} \frac{y_{2k}^{(5)}(x_2 - 0, s)}{(as)^5} \right)^*. \tag{4.4}$$

Таким образом, определитель Вронского  $\Delta_{03}(s) = \Delta_{03}(x, s) = \Delta_{03}(x_2, s)$  имеет вид

$$\Delta_{04}(s) = \begin{vmatrix} y_{31}(x, s) & y_{32}(x, s) & \dots & y_{35}(x, s) & y_{36}(x, s) \\ y'_{31}(x, s) & y'_{32}(x, s) & \dots & y'_{35}(x, s) & y'_{36}(x, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{31}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \frac{y_{32}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \dots & \frac{y_{35}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \frac{y_{36}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

а определитель  $\Delta_{31}$  из (4.3)–(4.4) записывается в следующем виде:

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}(x_2 - 0, s) & y_{32}(x, s) & \dots & y_{35}(x, s) & y_{36}(x, s) \\ \sum_{k=1}^6 C_{2k} \frac{y'_{2k}(x_2 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{32}(x, s)}{as} & \dots & \frac{y'_{35}(x, s)}{as} & \frac{y'_{36}(x, s)}{as} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^6 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(5)}(x_2 - 0, s)}{(as)^5} & \frac{y_{32}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \dots & \frac{y_{35}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \frac{y_{36}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Подставив формулы (3.12)–(3.16) в формулу (4.5), учитывая свойства определителей, вынесем из каждого столбца множитель  $e^{a\omega_k s x}$ , запишем определитель  $\Delta_{03}(s)$  в виде

$$\Delta_{03}(s) = e^{a\omega_1 s x} e^{a\omega_2 s x} (\dots) e^{a\omega_5 s x} e^{a\omega_6 s x} \times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^0(x)}{s^6} + \dots \right] & b_{12} & \dots & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^0(x)}{s^6} + \dots \right] \\ \omega_1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^1(x)}{s^6} + \dots \right] & b_{22} & \dots & \omega_6 \left[ 1 + \frac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^1(x)}{s^6} + \dots \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^5(x)}{s^6} + \dots \right] & b_{62} & \dots & \omega_6^5 \left[ 1 + \frac{\omega_6 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^5(x)}{s^6} + \dots \right] \end{vmatrix}, \tag{4.7}$$

где «+...» означает « $+O\left(\frac{1}{s^7}\right)$ », при этом

$$(b_{12}; b_{22}; \dots; b_{62})^* = \left( 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_2 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^0(x)}{s^6} + \dots \right]; \right. \\ \left. \omega_2 \left[ 1 + \frac{\omega_2 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^1(x)}{s^6} + \dots \right]; \dots; \omega_2^5 \left[ 1 + \frac{\omega_2 B_5(x)}{s^5} + \frac{B_6^5(x)}{s^6} + \dots \right] \right)^*.$$

Из формулы (3.2) следует, что  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_5 + \omega_6 = 0$ , поэтому  $e^{a\omega_1 s x} e^{a\omega_2 s x} (\dots) e^{a\omega_5 s x} e^{a\omega_6 s x} = e^0 = 1$ .

Пусть  $\Delta_{00}$  — определитель Вандермонда чисел  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$  из (3.1):

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_6 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_6^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5 & \omega_2^5 & \omega_3^5 & \dots & \omega_6^5 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k > m; \\ k, m = 1, 2, \dots, 6}} (\omega_k - \omega_m) = \Delta_{00} \neq 0. \tag{4.8}$$

Обозначим через  $(\delta_{mk})$  ( $m, k = 1, 2, \dots, 6$ ) матрицу алгебраических миноров к элементам  $b_{mn}$  определителя  $\Delta_{00}$  из (4.8). Справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 4.1**

$$(\delta_{mk}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{61} & \delta_{62} & \dots & \delta_{66} \end{pmatrix} = \\ = \frac{\Delta_{00}}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & -\omega_5^{-1} & \omega_6^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \omega_5^{-2} & -\omega_6^{-2} \\ -\omega_1^{-3} & \omega_2^{-3} & -\omega_3^{-3} & \omega_4^{-3} & -\omega_5^{-3} & \omega_6^{-3} \\ \omega_1^{-4} & -\omega_2^{-4} & \omega_3^{-4} & -\omega_4^{-4} & \omega_5^{-4} & -\omega_6^{-4} \\ -\omega_1^{-5} & \omega_2^{-5} & -\omega_3^{-5} & \omega_4^{-5} & -\omega_5^{-5} & \omega_6^{-5} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Доказательство теоремы 4.1 приведено в работе автора [23].

Разложим определитель  $\Delta_{03}(s)$  из (4.7) на сумму определителей по столбцам, получим:

$$\Delta_{03}(x, s) = \Delta_{03}(s) = e^0 \left[ \Delta_{00} + \frac{\Delta_{03,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{03,6}}{s^6} + O\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \tag{4.10}$$

при этом найдем  $\Delta_{03,5}$  и  $\Delta_{03,6}$ , используя формулы (4.8)–(4.9):

$$\begin{aligned} \Delta_{03,5} &= \omega_1 B_5(x) \Delta_{00} + \omega_2 B_5(x) \Delta_{00} + \dots + \omega_6 B_5(x) \Delta_{00} = \\ &= (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_6) B_5(x) \Delta_{00} \stackrel{(3.2)}{=} 0 \cdot B_5(x) \Delta_{00} = 0; \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{03,6} &= B_6^0(x)[1 \cdot \delta_{11} - 1 \cdot \delta_{12} + 1 \cdot \delta_{13} - \dots - 1 \cdot \delta_{16}] + \\ &\quad + B_6^1(x)[- \omega_1 \delta_{21} + \omega_2 \delta_{22} - \omega_3 \delta_{23} + \dots + \omega_6 \delta_{26}] + \\ &\quad + B_6^2(x)[\omega_1^2 \delta_{31} - \omega_2^2 \delta_{32} + \omega_3^2 \delta_{33} - \dots - \omega_6^2 \delta_{36}] + \dots + \\ &\quad + B_6^5(x)[- \omega_1^5 \delta_{61} + \omega_2^5 \delta_{62} - \omega_3^5 \delta_{63} + \dots + \omega_6^5 \delta_{66}] = \\ &= B_6^0(x) \Delta_{00} + B_6^1(x) \Delta_{00} + B_6^2(x) \Delta_{00} + \dots + B_6^5(x) \Delta_{00} = \\ &= \Delta_{00} \sum_{k=0}^5 B_6^k(x) \stackrel{(3.16)}{=} \Delta_{00} E_6. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Таким образом, из формул (4.10)–(4.12) выведем:

$$\Delta_{03}(s) = \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{0}{s^5} + \frac{E_6}{s^6} + \underline{O} \left( \frac{1}{s^7} \right) \right]. \tag{4.13}$$

Из формул (4.6), (4.3)–(4.4) и свойств определителя следует, что

$$C_{3n} = \frac{1}{\Delta_{03}(s) \neq 0} \sum_{k=1}^6 C_{2k} \Delta_{3nk}, \quad n = 1, 2, \dots, 6. \tag{4.14}$$

Подставив в формулу (4.6) формулы (3.6)–(3.10) и (3.12)–(3.16), вынеся из столбцов соответствующие множители, выпишем подробно определитель  $\Delta_{311}$  из (4.14):

$$\begin{aligned} \Delta_{311} &= e^{a\omega_1 s x_2} (e^{a\omega_2 s x_2} e^{a\omega_3 s x_2} (\dots) e^{a\omega_6 s x_2}) \times \\ &\times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{12} & \dots & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_1 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \omega_1 \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{22} & \dots & \omega_6 \left[ 1 + \frac{\omega_6 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5 \left[ 1 + \frac{\omega_1 A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{62} & \dots & \omega_6^5 \left[ 1 + \frac{\omega_6 B_5(x_2)}{s^5} + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

столбец  $(b_{12}; b_{22}; \dots; b_{62})^*$  определен формулой (4.7).

Разложив по столбцам определитель  $\Delta_{311}$  из (4.15), перегруппируем получившиеся

слагаемые:

$$\Delta_{311} = e^{a\omega_1 s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2} \left[ \Delta_{00} + \frac{\Delta_{311,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{311,6}}{s^6} + O\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \tag{4.16}$$

$$\Delta_{311,5} = \omega_1 A_5(x_2) \Delta_{00} + (\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_6) B_5(x_2) \stackrel{(3.14)}{=} \Delta_{00} \omega_1 A_5(x_2); \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{311,6} &= [A_6^0(x_2) \cdot 1 \cdot \delta_{11} - A_6^1(x_2) \omega_1 \delta_{21} + A_6^2(x_2) \omega_1^2 \delta_{31} - \dots - A_6^5(x_2) \omega_1^5 \delta_{61}] + \\ &+ B_6^0(x_2) [-1 \cdot \delta_{12} + 1 \cdot \delta_{13} - \dots - 1 \cdot \delta_{16}] + B_6^1(x_2) [\omega_2 \delta_{22} - \omega_3 \delta_{23} + \dots + \omega_6 \delta_{26}] + \\ &+ B_6^2(x_2) [-\omega_2^2 \delta_{32} + \omega_3^2 \delta_{33} - \dots - \omega_6^2 \delta_{36}] + \dots + B_6^5(x_2) [\omega_2^5 \delta_{62} - \omega_3^5 \delta_{63} + \dots + \omega_6^5 \delta_{66}] \stackrel{(4.9)}{=} \\ &= \frac{\Delta_{00}}{6} \sum_{k=0}^5 A_6^k(x_2) + \frac{\Delta_{00}}{6} \cdot 5 \cdot \sum_{k=0}^5 B_6^k(x_2) \stackrel{(3.10),(3.16)}{=} \frac{\Delta_{00}}{6} [D_6 + 5E_6]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Определители  $\Delta_{31k}$  ( $k = 2, 3, \dots, 6$ ) из (4.14) получим из определителя из  $\Delta_{311}$  из (4.15) (после выноса из первого множителя  $e^{a\omega_k s x_2}$ ) заменой первого столбца на столбец

$$\left( 1 \cdot \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right]; \right. \\ \left. \omega_k \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right]; \dots; \omega_k^5 \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] \right)^*. \tag{4.19}$$

Вычтем в определителе  $\Delta_{31k}$  ( $k = 2, 3, \dots, 6$ ), полученном с помощью формул (4.15) и (4.19), из первого столбца  $k$ -ый столбец; получим, учитывая, что  $B_5(x_2) \stackrel{(3.14)}{=} 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{31k} &= e^{a\omega_k s x_2} (e^{a\omega_2 s x_2} e^{a\omega_3 s x_2} (\dots) e^{a\omega_6 s x_2}) \times \\ &\times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[ 0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{12} & \dots & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{B_5^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \omega_k \left[ 0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{22} & \dots & \omega_6 \left[ 1 + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^5 \left[ 0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] & b_{62} & \dots & \omega_6^5 \left[ 1 + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$k = 2, 3, \dots, 6.$

столбец  $(b_{12}; b_{22}; \dots; b_{62})^*$  определен формулой (4.7).

Разложив определитель  $\Delta_{31k}$  ( $k = 2, 3, \dots, 6$ ) из (4.20) по первому столбцу, получим

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2} \left[ 0 + \frac{\Delta_{31k,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{31k,6}}{s^6} + O\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \tag{4.21}$$

$$k = 2, 3, \dots, 6;$$

$$\Delta_{31k,5} = \omega_k A_5(x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k & \omega_2 & \dots & \omega_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^5 & \omega_2^5 & \dots & \omega_6^5 \end{vmatrix} = \omega_k A_5(x_2) \cdot 0 = 0, \tag{4.22}$$

$k = 2, 3, \dots, 6,$

т. к. у определителя из (4.22) при  $k = 2, 3, \dots, 6$  обязательно есть два совпадающих столбца (первый и  $k$ -ый),

$$\begin{aligned} \Delta_{31k,6} &= (A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)) \cdot 1 \cdot \delta_{11} - (A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2))\omega_k\delta_{21} + \\ &+ (A_6^2(x_2) - B_6^2(x_2))\omega_k^2\delta_{31} - \dots - (A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2))\omega_k^5\delta_{61} \stackrel{(4.9)}{=} \\ &= \frac{\Delta_{00}}{6} \left\{ (A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^0 + (A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \right. \\ &\left. + (A_6^2(x_2) - B_6^2(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + (A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2)) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Применив формулы (3.9) и (3.15), из (4.23) найдем:

$$\begin{aligned} \Delta_{31k,6} &= \frac{\Delta_{00}}{6} \frac{1}{12a^6} \left\{ -5q_2(x_{1n}) \left[ 1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 \right] + \right. \\ &\left. + 5q_3(x_2) [1 + \omega_5 + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^5] - \Delta\tilde{q}(x_2)G_k \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} G_k &= 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^0 + 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^3 - 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^4 - 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5, \\ &k = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned} \quad (4.25)$$

При этом

$$1 + \frac{\omega_k}{\omega_1} + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^5 = 1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^5 = \frac{1 - \omega_k^6}{1 - \omega_k} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_k} = 0$$

как сумма первых шести членов геометрической прогрессии ( $b_1 = 1, q = \frac{\omega_k}{\omega_1}, b_1 + b_2 + \dots + b_6 = \frac{b_1(1 - q^6)}{1 - q} \neq 0$ ); при этом из формулы (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} G_2 &\stackrel{(4.25)}{=} 5 + 3\omega_2 + \omega_2^2 - \omega_2^3 - 3\omega_2^4 - 5\omega_2^5 = 5 + 3\omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - 3\omega_5 - 5\omega_6 = 6 + 6\sqrt{3}i; \\ G_3 &= 6 + 2\sqrt{3}i; \quad G_4 = 6; \quad G_5 = \bar{G}_3 = 6 - 2\sqrt{3}i; \quad G_6 = \bar{G}_2 = 6 - 6\sqrt{3}i. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В формуле (4.24) введено обозначение

$$\Delta\tilde{q}(x_2) = q_3(x_2 + 0) - q_2(x_2 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x > x_2}} q_3(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x < x_2}} q_2(x), \quad (4.27)$$

где  $\Delta\tilde{q}(x_2)$  — «скачок» потенциала  $\vec{Q}(x)$  в точке разрыва  $x_2$ .

В результате из формул (4.21)–(4.27) следует, что

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_2} e^{-a\omega_1 s x_2} \Delta_{00} \left[ 0 + \frac{0}{s^5} - \frac{G_k \Delta\tilde{q}(x_2)}{6 \cdot 12a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \quad k = 2, 3, \dots, 6. \quad (4.28)$$

Определитель  $\Delta_{322}$  из (4.14) получается из определителя  $\Delta_{03}(s)$  из (4.7) заменой второго столбца на столбец (4.19) при  $k = 2$ . Значит, у определителя  $\Delta_{322}$  и определителя  $\Delta_{311}$  из (4.15) отличаются только первые два столбца: первый столбец определителя  $\Delta_{322}$  — это первый столбец определителя  $\Delta_{03}(s)$ , второй столбец определителя

$\Delta_{322}$  – столбец (4.19) при  $k = 2$ , третий, четвертый, пятый и шестой столбцы определителей  $\Delta_{311}, \Delta_{03}(s)$  и  $\Delta_{322}$  совпадают. Аналогично вычислению определителя  $\Delta_{311}$  из (4.15)–(4.18) для определителя  $\Delta_{322}$  выведем:

$$\Delta_{322} = e^{a\omega_2sx_2} e^{-a\omega_2sx_2} \left[ \Delta_{00} + \frac{\Delta_{322,5}}{s^5} + \frac{\Delta_{322,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \tag{4.29}$$

$$\Delta_{322,5} = \omega_2 A_5(x_2) \Delta_{00} + (\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6) B_5(x_2) \Delta_{00} = \Delta_{00} \omega_2 A_5(x_2), \tag{4.30}$$

$$\Delta_{322,6} = \frac{\Delta_{00}}{6} [D_6 + 5E_6] \stackrel{(4.18)}{=} \Delta_{311,6}. \tag{4.31}$$

Определители  $\Delta_{32k}$  ( $k = 1, 3, 4, 5, 6$ ) из (4.14) получаются из определителя  $\Delta_{322}$  (после выноса из второго столбца множителя  $e^{a\omega_ksx_2}$ ) заменой второго столбца на столбец (4.19).

Вычитая в определителе  $\Delta_{32k}$  ( $k = 1, 3, 4, 5, 6$ ) из второго столбца  $k$ -ый столбец ( $k \neq 2$ ), учтем, что  $B_5(x_2) = 0$ ; получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{32k} &= e^{a\omega_ksx_2} (e^{a\omega_1sx_2} e^{a\omega_3sx_2} (\dots) e^{a\omega_6sx_2}) \times \\ &\times \begin{vmatrix} 1 \cdot \left[ 1 + \frac{B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] & a_{12} & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] & \dots & 1 \cdot \left[ 1 + \frac{B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \omega_1 \left[ 1 + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] & a_{22} & \omega_3 \left[ 1 + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] & \dots & \omega_6 \left[ 1 + \frac{B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5 \left[ 1 + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] & a_{62} & \omega_3^5 \left[ 1 + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] & \dots & \omega_6^5 \left[ 1 + \frac{B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

при этом

$$\begin{aligned} (a_{12}; a_{22}; \dots; a_{62})^* &= \left( 1 \cdot \left[ 0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^0(x_2) - B_6^0(x_2)}{s^6} + \dots \right]; \right. \\ &\omega_k \left[ 0 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^1(x_2) - B_6^1(x_2)}{s^6} + \dots \right]; \dots; \\ &\left. \omega_k^5 \left[ 0 + \frac{\omega_k B_5(x_2)}{s^5} + \frac{A_6^5(x_2) - B_6^5(x_2)}{s^6} + \dots \right] \right)^*. \end{aligned}$$

Разложим определитель  $\Delta_{32k}$  из (4.32) по второму столбцу на сумму определителей:

$$\Delta_{32k} = e^{a\omega_ksx_2} e^{-a\omega_2sx_2} \left[ 0 + \frac{0}{s^5} + \frac{\Delta_{32k,6}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right], \quad k = 1, 3, 4, 5, 6, \tag{4.33}$$

при этом аналогично выводу формул (4.21)–(4.28) найдем

$$\begin{aligned} \Delta_{32k,6} &= \frac{\Delta_{00}}{6} \frac{1}{12a^6} \left\{ 5[q_3(x_2) - q_2(x_{1n})] \left[ 1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 + \dots + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5 \right] - \Delta \tilde{q}(x_2) H_k \right\}, \quad k = 1, 3, 4, 5, 6; \quad k \neq 2; \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$H_k = 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^0 + 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^3 - 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^4 - 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5, \quad k = 1, 3, 4, 5, 6. \tag{4.35}$$

При этом из формул (3.1)–(3.2) следует, что

$$1 + \frac{\omega_k}{\omega_2} + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^5 = 0; \quad H_k = G_{k-1} = H_{k+6}, \quad H_1 = G_6, \quad k = 1, 3, 4, 5, 6. \quad (4.36)$$

Аналогичным образом вычисляются определители  $\Delta_{3mk}$  ( $m = 3, 4, 5, 6; k = 1, 2, \dots, 6$ ) из (4.14). Формулу (4.14) удобно записывать в матричном виде:

$$\vec{C}_{3m} = \frac{1}{\Delta_{03}(s)} T_3 \vec{C}_{2k}; \quad \vec{C}_{3m} = (C_{31}, C_{32}, \dots, C_{36})^*, \quad \vec{C}_{2k} = (C_{21}, C_{22}, \dots, C_{26})^*, \quad (4.37)$$

при этом матрица

$$T_3 = (\Delta_{3mk}) = \begin{pmatrix} \Delta_{311} & \Delta_{312} & \dots & \Delta_{316} \\ \Delta_{321} & \Delta_{322} & \dots & \Delta_{326} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{361} & \Delta_{362} & \dots & \Delta_{366} \end{pmatrix}$$

в силу формул (4.15)–(4.35) выписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{3kk} &= e^{a\omega_k s x_2} e^{-a\omega_k s x_2} \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{F_6}{s^6} + \dots \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6; \\ \Delta_{3km} &= e^{a\omega_m s x_2} e^{-a\omega_k s x_2} \Delta_{00} \left[ 0 + \frac{0}{s^5} - \frac{P_{7+m+k}}{s^6} + \dots \right], \\ &k \neq m; \quad k, m = 1, 2, \dots, 6; \quad P_{k\pm 6} = P_k; \end{aligned} \quad (4.38)$$

при этом в формуле (4.38) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{D_6 + 5E_6}{6}, \quad D_6 \stackrel{(3.10)}{=} -\frac{5q_2(x_{1n})}{2a^6}, \quad E_6 = -\frac{5q_3(x_2)}{2a^6}; \\ P_k &= \frac{G_k \Delta \tilde{q}(x_2)}{6 \cdot 12a^6}, \quad k = 2, 3, \dots, 6; \quad \Delta \tilde{q}(x_2) = q_3(x_2 + 0) - q_2(x_2 - 0). \end{aligned} \quad (4.39)$$

### 5. Изучение условий «склейки» (1.10)

Из условий «склейки» (1.10) в точке разрыва  $x_{1n}$  с помощью формул (3.3)–(3.5) имеем

$$y_2(x_{1n} + 0, s) \stackrel{(1.10)}{=} y_1(x_{1n} - 0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{2k} y_{2k}(x_{1n} + 0, s) = \sum_{k=1}^6 C_{1k} y_{1k}(x_{1n} - 0, s); \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2^{(m)}(x_{1n} + 0, s)}{(as)^m} \stackrel{(1.10)}{=} \frac{y_1^{(m)}(x_{1n} - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n} + 0, s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^6 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_{1n} - 0, s)}{(as)^m}, \\ m = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично решению системы (4.1)–(4.2) из метода Крамера следует, что система (5.1), (5.2) имеет единственное решение:

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}; \dots; C_{26} = \frac{\Delta_{26}}{\Delta_{02}(s)}, \quad (5.3)$$

где  $\Delta_{02}(s)$  — определитель Вронского фундаментальной системы  $\{y_{21}(x, s); y_{22}(x, s); \dots; y_{26}(x, s)\}$  дифференциального уравнения (1.2)

$$\Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(x, s) = \det \text{Wr}[y_{21}(x, s); y_{22}(x, s); \dots; y_{26}(x, s)] =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{21}(x, s) & y_{22}(x, s) & \dots & y_{25}(x, s) & y_{26}(x, s) \\ y'_{21}(x, s) & y'_{22}(x, s) & \dots & y'_{25}(x, s) & y'_{26}(x, s) \\ as & as & \dots & as & as \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \frac{y_{22}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \dots & \frac{y_{25}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} & \frac{y_{26}^{(5)}(x, s)}{(as)^5} \end{vmatrix}, \tag{5.4}$$

определители  $\Delta_{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) из (5.3) получаются из определителя  $\Delta_{02}(s)$  из (5.4) заменой  $n$ -го столбца на столбец

$$\left( \sum_{k=1}^6 C_{1k} y_{1k}(x_{1n} - 0, s); \sum_{k=1}^6 C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_{1n} - 0, s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^6 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(5)}(x_{1n} - 0, s)}{(as)^5} \right)^*. \tag{5.5}$$

Проделав вычисления, аналогичные формулам (4.7)–(4.39), доказывается следующее утверждение.

**Т е о р е м а 5.1** *Для вектор-столбцов  $\vec{C}_{2m} = (C_{21}, C_{22}, \dots, C_{26})^*$  и  $\vec{C}_{2k} = (C_{11}, C_{12}, \dots, C_{16})^*$  из (5.3)–(5.5) справедливо следующее равенство:*

$$\vec{C}_{2m} = \frac{1}{\Delta_{02}(s) \neq 0} T_2 \vec{C}_{1k}, \tag{5.6}$$

при этом матрицу

$$T_2 = (\Delta_{2mk}) = \begin{pmatrix} \Delta_{211} & \Delta_{212} & \dots & \Delta_{216} \\ \Delta_{221} & \Delta_{222} & \dots & \Delta_{226} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{261} & \Delta_{262} & \dots & \Delta_{266} \end{pmatrix}$$

представим в следующем виде:

$$\Delta_{2kk} = \Delta_{00} e^{a\omega_k s x_{1n}} e^{-a\omega_k s x_{1n}} \left[ 1 + \frac{0}{s^5} + \frac{R_6}{s^6} + \dots \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6;$$

$$\Delta_{2km} = e^{a\omega_m s x_{1n}} e^{-a\omega_k s x_{1n}} \Delta_{00} \left[ 0 + \frac{0}{s^5} - \frac{U_{7+m-k}}{s^6} + \dots \right],$$

$$k \neq m; \quad k, m = 1, 2, \dots, 6; \quad U_{k\pm 6} = U_k; \tag{5.7}$$

$$R_6 = \frac{5D_6}{6}, \quad D_6 = -\frac{5q_2(x_{1n})}{2a^6}; \quad U_k = \frac{G_k q_2(x_{1n})}{6 \cdot 12a^6}, \quad k = 2, 3, \dots, 6. \tag{5.8}$$

Величины  $G_k$  определены формулами (4.25)–(4.26), для определителя  $\Delta_{02}(s)$  из (5.4) справедлива формула

$$\Delta_{02}(s) = \Delta_{00} \left[ 1 + \frac{0}{s^5} + \frac{D_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right] \neq 0. \tag{5.9}$$

### 6. Изучение условий «склейки» (1.10)

Из условий «склейки» (1.12) в точке разрыва  $x_{3n}$  с помощью формул (3.11), (3.17), (3.18) получим следующую систему уравнений:

$$y_4(x_{3n} + 0, s) \stackrel{(1.12)}{=} y_3(x_{3n} - 0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{4k} y_{4k}(x_{3n} + 0, s) = \sum_{k=1}^6 C_{3k} y_{3k}(x_{3n} - 0, s); \quad (6.1)$$

$$\frac{y_4^{(m)}(x_{3n} + 0, s)}{(as)^m} \stackrel{(1.12)}{=} \frac{y_3^{(m)}(x_{3n} - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{4k} \frac{y_{4k}^{(m)}(x_{3n} + 0, s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^6 C_{3k} \frac{y_{3k}^{(m)}(x_{3n} - 0, s)}{(as)^m},$$

$$m = 1, 2, \dots, 5. \quad (6.2)$$

В силу формул (3.17)–(3.18) определитель  $\Delta_{04}(s)$  системы (6.1)–(6.2) равен определителю Вронского фундаментальной системы функций  $\{y_{41}(x, s); y_{42}(x, s); \dots; y_{46}(x, s)\}$ :

$$\Delta_{04}(s) = \Delta_{04}(x, s) = \det \text{Wr}[y_{41}(x, s); y_{42}(x, s); \dots; y_{46}(x, s)] =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{a\omega_1 sx} & e^{a\omega_2 sx} & \dots & e^{a\omega_5 sx} & e^{a\omega_6 sx} \\ \omega_1 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2 e^{a\omega_2 sx} & \dots & \omega_5 e^{a\omega_5 sx} & \omega_6 e^{a\omega_6 sx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^5 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2^5 e^{a\omega_2 sx} & \dots & \omega_5^5 e^{a\omega_5 sx} & \omega_6^5 e^{a\omega_6 sx} \end{vmatrix} \stackrel{(3.2),(4.8)}{=} e^0 \Delta_{00} = \Delta_{00} \neq 0. \quad (6.3)$$

Система (6.1)–(6.2) – система из шести линейных уравнений с шестью неизвестными  $C_{41}, C_{42}, \dots, C_{46}$  (при этом  $C_{31}, C_{32}, \dots, C_{36}$  – параметры), определитель данной системы  $\Delta_{04}(s) = \Delta_{00}$  не равен нулю, поэтому решение этой системы единственно и находится по формуле

$$C_{41} = \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{04}(s) \neq 0}; \quad C_{42} = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{04}(s)}; \dots; C_{46} = \frac{\Delta_{46}}{\Delta_{04}(s)}, \quad (6.4)$$

определители  $\Delta_{4n}$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) получаются из определителя  $\Delta_{04}(s)$  из (6.3) заменой  $n$ -го столбца на столбец

$$\left( \sum_{k=1}^6 C_{3k} y_{3k}(x_{3n} - 0, s); \sum_{k=1}^6 C_{3k} \frac{y'_{3k}(x_{3n} - 0, s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^6 C_{3k} \frac{y_{3k}^{(5)}(x_{3n} - 0, s)}{(as)^5} \right)^*. \quad (6.5)$$

Аналогично выводу формул (5.6)–(5.9) и (4.7)–(4.39) доказывается следующая теорема.

**Т е о р е м а 6.1** Для вектор-столбцов  $\vec{C}_{4m} = (C_{41}, C_{42}, \dots, C_{46})^*$  и  $\vec{C}_{3k} = (C_{31}, C_{32}, \dots, C_{36})^*$  из (6.4)–(6.5) справедливо равенство

$$\vec{C}_{4m} = \frac{1}{\Delta_{04} \neq 0} T_4 \vec{C}_{3k}, \quad (6.6)$$

при этом матрица

$$T_4 = (\Delta_{4mk}) = \begin{pmatrix} \Delta_{411} & \Delta_{412} & \dots & \Delta_{416} \\ \Delta_{421} & \Delta_{422} & \dots & \Delta_{426} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{461} & \Delta_{462} & \dots & \Delta_{466} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$\Delta_{4kk} = \Delta_{00} e^{a\omega_k s x_{3n}} e^{-a\omega_k s x_{3n}} \left[ 1 + \frac{\omega_k B_5(x_{3n})}{s^5} + \frac{E_6}{6s^6} + \dots \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6;$$

$$\Delta_{4km} = \Delta_{00} e^{a\omega_m s x_{3n}} e^{-a\omega_k s x_{3n}} \left[ 0 + \frac{0}{s^5} + \frac{\Phi_{7+m-k}}{s^6} + \dots \right],$$

$$k \neq m; \quad k, m = 1, 2, \dots, 6; \quad \Phi_{k\pm 6} = \Phi_k; \tag{6.7}$$

$$E_6 = -\frac{5q_3(x_2)}{2a^6}; \quad \Phi_k = \frac{-G_k q_3(x_{3n})}{72a^6}, \quad k = 2, 3, \dots, 6. \tag{6.8}$$

### 7. Изучение граничных условий (1.5)

Применив формулы (3.3)–(3.4), из первых трех граничных условий (1.5) получим:

$$\frac{y_1^{(2m)}(0, s)}{(as)^{2m}} \stackrel{(1.5)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(2m)}(0, s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{1k} \omega_k^{2m} e^0 = 0, \quad m = 0, 1, 2. \tag{7.1}$$

Из граничных условий (1.5) в точке  $x = \pi$  с помощью формул (3.17)–(3.18) найдем:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi, s)}{(as)^{2m}} \stackrel{(1.5)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{4k} \frac{y_{4k}^{(m)}(\pi, s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{4k} \omega_k^{2m} e^{a\omega_k \pi} = 0, \quad m = 0, 1, 2. \tag{7.2}$$

Применив формулы (6.4)–(6.8), из (7.2) запишем:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi, s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{4k} \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s \pi} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \frac{\Delta_{4k}}{\Delta_{04}(s)} \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s \pi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \left( \sum_{n=1}^6 \Delta_{4kn} C_{3n} \right) \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s \pi} \Delta_{00} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{3k} \psi_{3k,m}(\pi, s) = 0, \tag{7.3}$$

$$m = 0, 1, 2;$$

$$\psi_{3k,m}(\pi, s) = \sum_{n=1}^6 \Delta_{4nk} \omega_n^{2m} e^{a\omega_n s \pi}, \quad m = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, 6. \tag{7.4}$$

Подставив формулы (5.3)–(5.9) в (7.3)–(7.4) и сделав необходимые преобразования, получим:

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi, s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{3k} \psi_{3k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{03}(s)} \psi_{3k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \left( \sum_{n=1}^6 \Delta_{3kn} C_{2n} \right) \psi_{3k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{2k} \varphi_{2k,m}(\pi, s) = 0, \quad m = 0, 1, 2; \tag{7.5}$$

$$\varphi_{2k,m}(\pi, s) = \sum_{n=1}^6 \Delta_{3nk} \psi_{3n,m}(\pi, s), \quad m = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, 6. \tag{7.6}$$

Подставив в (7.5)–(7.6) формулы (5.3)–(5.9), выведем

$$\frac{y_4^{(2m)}(\pi, s)}{(as)^{2m}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{2k} \varphi_{2k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \varphi_{2k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 \left( \sum_{n=1}^6 \Delta_{2kn} C_{1n} \right) \varphi_{2k,m}(\pi, s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^6 C_{1k} h_{1k,m}(\pi, s) = 0, \quad m = 0, 1, 2; \quad (7.7)$$

$$h_{1k,m}(\pi, s) = \sum_{n=1}^6 \Delta_{2nk} \varphi_{2n,m}(\pi, s), \quad m = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (7.8)$$

Объединив граничные условия (1.5) из (7.1) и (7.7)–(7.8) в одну систему, получим однородную систему из шести уравнений с шестью неизвестными  $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{16}$ , которая имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.1** *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1.1)–(1.8) имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_5^2 & \omega_6^6 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \dots & \omega_5^4 & \omega_6^4 \\ h_{11,0}(\pi, s) & h_{12,0}(\pi, s) & \dots & h_{15,0}(\pi, s) & h_{16,0}(\pi, s) \\ h_{11,1}(\pi, s) & h_{12,1}(\pi, s) & \dots & h_{15,1}(\pi, s) & h_{16,1}(\pi, s) \\ h_{11,2}(\pi, s) & h_{12,2}(\pi, s) & \dots & h_{15,2}(\pi, s) & h_{16,2}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.9)$$

Подставив формулы (7.6) в (7.8), применив формулы (5.7) и (4.38), оставим только главные по росту  $s$  величины; произведя вычисления с точностью до  $O\left(\frac{1}{s^6}\right)$ , из (7.9) получим следующие асимптотические формулы для  $h_{1k,m}(\pi, s)$ :

$$h_{1k,m}(\pi, s) = \sum_{k=1}^6 \Delta_{2nk} \varphi_{2n,m}(\pi, s) = \sum_{k=1}^6 \Delta_{2nk} \left( \sum_{p=1}^6 \Delta_{3pn} \psi_{3p,m}(\pi, s) \right) =$$

$$= \Delta_{2kk} \Delta_{3kk} \psi_{3k,m}(\pi, s) + \Delta_{2kk} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Delta_{3pk} \psi_{3p,m}(\pi, s) + \Delta_{3kk} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Delta_{2pk} \psi_{3p,m}(\pi, s) + O\left(\frac{1}{s^{12}}\right),$$

$$k = 1, 2, \dots, 6; \quad m = 0, 1, 2. \quad (7.10)$$

Аналогично, подставив в (7.10) величины  $\psi_{3p,m}(\pi, s)$  из (7.4), выведем следующие формулы:

$$h_{1k,m}(\pi, s) = \Delta_{2kk} \Delta_{3kk} \Delta_{4kk} \omega_k^m e^{a\omega_k s \pi} + \Delta_{2kk} \Delta_{3kk} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Delta_{4pk} \omega_p^m e^{a\omega_p s \pi} +$$

$$+ \Delta_{2kk} \Delta_{4kk} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Delta_{3pk} \omega_p^m e^{a\omega_p s \pi} + \Delta_{3kk} \Delta_{4kk} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Delta_{2pk} \omega_p^m e^{a\omega_p s \pi} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{s^{12}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad m = 0, 1, 2. \quad (7.11)$$

В формуле (7.11) первое слагаемое представляет собой величину порядка  $O(1)$ , второе, третье и четвертое – величины порядка  $O\left(\frac{1}{s^6}\right)$ .

Определитель  $f(s)$  из уравнения (7.9) по теореме Лапласа разложим по последним трем строкам на сумму определителей, в результате чего получим

$$f(s) = \begin{vmatrix} h_{11,0} & h_{12,0} & h_{13,0} \\ h_{11,1} & h_{12,1} & h_{13,1} \\ h_{11,2} & h_{12,2} & h_{13,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{12,0} & h_{13,0} & h_{14,0} \\ h_{12,1} & h_{13,1} & h_{14,1} \\ h_{12,2} & h_{13,2} & h_{14,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_1^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} h_{13,0} & h_{14,0} & h_{15,0} \\ h_{13,1} & h_{14,1} & h_{15,1} \\ h_{13,2} & h_{14,2} & h_{15,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_6^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} - \dots = 0. \tag{7.12}$$

При этом

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} = (\omega_3^2 - \omega_2^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \Phi_{30} \neq 0. \tag{7.13}$$

Для нахождения корней уравнения (7.12) необходимо изучить индикаторную диаграмму [24, с. 12] этого уравнения, т. е. в силу (7.11) требуется изучить выпуклую оболочку множества точек  $\{\omega_k + \omega_m + \omega_n, k \neq m, k \neq n, m \neq n, k, m, n = 1, 2, \dots, 6\}$ .

Индикаторная диаграмма уравнения (7.12) имеет следующий вид:

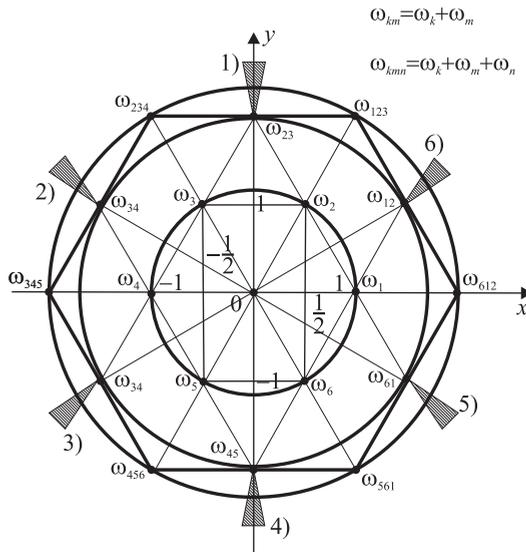


Рис. 7.1. Индикаторная диаграмма уравнения (7.12)

На представленной на рисунке диаграмме видно, что на асимптотику корней уравнения (7.12)–(7.13) влияют только экспоненты с показателями  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \omega_3 + \omega_4 + \omega_5, \omega_4 + \omega_5 + \omega_6, \omega_5 + \omega_6 + \omega_1$  и  $\omega_6 + \omega_1 + \omega_2$ , индикаторная диаграмма – правильный шестиугольник, показатели  $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4, \omega_1 + \omega_2 + \omega_4, \dots, \omega_m + \omega_k + \omega_p$  при условии  $|m - k| \geq 2, |m - p| \geq 2, |k - p| \geq 2$  попадают внутрь индикаторной диаграммы и на асимптотику корней уравнения не влияют, их можно отбросить; корни уравнения

$f(s)$  из (7.12) находятся в шести секторах бесконечно малого раствора, биссектрисами которых являются серединные перпендикуляры к отрезкам  $[\omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \omega_2 + \omega_3 + \omega_4]$ ,  $[\omega_2 + \omega_3 + \omega_4; \omega_3 + \omega_4 + \omega_5], \dots, [\omega_6 + \omega_1 + \omega_2; \omega_1 + \omega_2 + \omega_3]$ .

### 8. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 7.1

Чтобы найти асимптотику корней уравнения (7.12) в секторе 1), в данном уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  и  $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 8.1** *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1.1)–(1.8) в секторе 1) имеет следующий вид:*

$$g_1(s) = \begin{vmatrix} h_{11,0} & h_{12,0} & h_{13,0} \\ h_{11,1} & h_{12,1} & h_{13,1} \\ h_{11,2} & h_{12,2} & h_{13,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{12,0} & h_{13,0} & h_{14,0} \\ h_{12,1} & h_{13,1} & h_{14,1} \\ h_{12,2} & h_{13,2} & h_{14,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_1^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} = 0, \tag{8.1}$$

где величины  $h_{1k,m}(\pi, s)$  определены формулой (7.11).

Аналогично формуле (7.13) из (3.1) получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_4^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_5^2 & \omega_6^2 \\ \omega_1^4 & \omega_5^4 & \omega_6^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} = \Phi_{30} \neq 0,$$

поэтому уравнение (8.1) разделим на  $\Phi_{30} \neq 0$ , применим свойства определителей, перепишем его в виде

$$\begin{vmatrix} h_{11,0}(\pi, s) - h_{14,0}(\pi, s) & h_{12,0}(\pi, s) & h_{13,0}(\pi, s) \\ h_{11,1}(\pi, s) - h_{14,1}(\pi, s) & h_{12,1}(\pi, s) & h_{13,1}(\pi, s) \\ h_{11,2}(\pi, s) - h_{14,2}(\pi, s) & h_{12,2}(\pi, s) & h_{13,2}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0, \tag{8.2}$$

где величины  $h_{1k,m}(\pi, s)$  определены формулами (7.11), (6.7), (5.7) и (4.38). При этом необходимо оставить в уравнении только экспоненты с показателями  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  и  $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ . Применяв формулы (4.8), (5.7), (6.7), (7.11), получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{2kk} \Delta_{3kk} \Delta_{4kk} &= \left[ 1 + \frac{\omega_k A_5(x_2)}{s^5} + \frac{F_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right] \left[ 1 + \frac{R_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{\omega_k B_5(x_{3n})}{s^5} + \frac{E_6}{6s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right] = 1 + \frac{\omega_k W_5}{s^5} + \frac{W_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right); \\ W_5 &= A_5(x_2) + B_5(x_{3n}); \\ W_6 &= F_6 + R_6 + \frac{E_6}{6} = \frac{D_8 + 5E_6}{6} + \frac{5D_6}{6} + \frac{E_6}{6} = D_6 + E_6, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \tag{8.3} \\ h_{1k,m}(\pi, s) &= \left[ 1 + \frac{\omega_k W_5}{s^5} + \frac{W_6}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) \right] \omega_k^{2m} e^{a\omega_k s \pi} + \frac{T_{k6,m}}{s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^7}\right), \\ T_{k6,m} &= T_{k6,m,3} - T_{k6,m,1} - T_{k6,m,2}; \\ T_{k6,m,3} &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 \Phi_{7+k-p} e^{a(\omega_k - \omega_p) s x_{3n}} \omega_p^{2m} e^{a\omega_p s \pi}; \quad \Phi_{k+6} = \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned}$$

$$T_{k6,m,2} = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 U_{7+k-p} e^{a(\omega_k - \omega_p) s x_1 n} \omega_p^{2m} e^{a\omega_p s \pi};$$

$$T_{k6,m,1} = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^6 P_{7+k-p} e^{a(\omega_k - \omega_p) s x_2} \omega_p^{2m} e^{a\omega_p s \pi};$$

$$U_{k+6} = U_k, \quad P_{k+6} = P_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6; \quad m = 0, 1, 2. \tag{8.4}$$

Подставив формулы (8.3)–(8.4) в уравнение (8.2), разложим определитель  $g_1(s)$  по столбцам на сумму определителей:

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) + \frac{g_{1,5}(s)}{s^5} + \frac{g_{1,6,1}(s)}{s^6} + \frac{g_{1,6,2}(s)}{s^6} Q \left( \frac{1}{s^7} \right) = 0, \tag{8.5}$$

$$g_{1,0}(s) = e^{a\omega_1 s \pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} - e^{a\omega_4 s \pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi}, \tag{8.6}$$

при этом входящие в данное выражение определители равны  $\Phi_{30}$  по формуле (7.13):

$$g_{1,5}(s) = \omega_1 W_5 e^{a\omega_1 s \pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} - \tag{8.7}$$

$$- \omega_4 W_5 e^{a\omega_4 s \pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} +$$

$$+ \omega_2 W_5 e^{a\omega_2 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_1 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} - \omega_2 W_5 e^{a\omega_2 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_4 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} + \tag{8.8}$$

$$+ \omega_3 W_5 e^{a\omega_3 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_1 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi} - \omega_3 W_5 e^{a\omega_3 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_4 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi};$$

$$g_{1,6,1}(s) = W_6 \Phi_{30} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} [e^{a\omega_1 s \pi} - e^{a\omega_4 s \pi}] + W_6 \Phi_{30} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} [e^{a\omega_1 s \pi} - e^{a\omega_4 s \pi}] + \tag{8.9}$$

$$+ W_6 e^{a\omega_3 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_1 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi} - W_6 e^{a\omega_3 s \pi} \Phi_{30} e^{a\omega_4 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi}.$$

$$g_{1,6,2}(s) = \begin{vmatrix} T_{16,0} & 1 & 1 \\ T_{16,1} & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ T_{16,2} & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} - \begin{vmatrix} T_{46,0} & 1 & 1 \\ T_{46,1} & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ T_{46,2} & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_2 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & T_{26,0} & 1 \\ \omega_1^2 & T_{26,1} & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & T_{26,2} & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_1 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} - \begin{vmatrix} 1 & T_{26,0} & 1 \\ \omega_4^2 & T_{26,1} & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & T_{26,2} & \omega_3^4 \end{vmatrix} e^{a\omega_4 s \pi} e^{a\omega_3 s \pi} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & T_{36,0} \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & T_{36,1} \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & T_{36,2} \end{vmatrix} e^{a\omega_1 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & T_{36,0} \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & T_{36,1} \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & T_{36,2} \end{vmatrix} e^{a\omega_4 s \pi} e^{a\omega_2 s \pi}. \tag{8.10}$$

Разделим уравнения (8.5)–(8.10) на  $\Phi_{30} e^{a(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) s \pi} \neq 0$ , сделаем необходимые

преобразования, приведем его к виду

$$g_1(s) = [e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} - 1] + \frac{W_5}{s^5} [(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)] + \frac{3W_6}{s^6} [e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} - 1] - \frac{g_{1,6,2}(s)e^{-a(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s\pi}}{\Phi_{30}s^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^7}\right) = 0, \quad (8.11)$$

$$g_{1,6,2}(s) = e^{a(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)s\pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_4^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_4^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} [\Phi_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_2} - U_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_{1n}}] - \quad (8.12)$$

$$- e^{a(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s\pi} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 \end{vmatrix} [\Phi_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_2} - U_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_{1n}}];$$

$$\Phi_4 \stackrel{(6.8)}{=} -\frac{G_4 q_3(x_{3n})}{72a^6}; \quad G_4 \stackrel{(4.26)}{=} 6; \quad P_4 \stackrel{(4.39)}{=} \frac{G_4 \Delta \tilde{q}(x_2)}{72a^6}; \quad U_4 \stackrel{(5.8)}{=} \frac{G_4 q_2(x_{1n})}{72a^6}. \quad (8.13)$$

Основное приближение уравнения (8.11), (8.13) имеет вид

$$e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} = 1 = e^{2\pi i k} \Leftrightarrow s_{k,1, \text{очн}} = \frac{2ik}{a(\omega_1 - \omega_4)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вид асимптотики корней уравнения (8.11), (8.13) следует из общей теории нахождения корней квазимногочленов вида (8.11), (8.13) [24, с. 12], [25]. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.2** *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1.1)–(1.8) в секторе 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2i}{a(\omega_1 - \omega_4)} \left[ k + \frac{d_{5k,1}}{k^5} + \frac{d_{6k,1}}{k^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right], \quad (8.14)$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_4 = -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Применив формулу Маклорена и подставив  $s_{k,1}$  из (8.14) в уравнение (8.11), (8.13), получим

$$\left[ 1 + \frac{2\pi i d_{5k,1}}{k^5} + \frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right] - 1 + \frac{W_5}{k^5} \frac{a^5(\omega_1 - \omega_4)^5}{2^5 i^5} \left[ (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right) - (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \right] + \frac{3W_6}{k^6} \frac{a^6(\omega_1 - \omega_4)^6}{2^6 i^6} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) - 1 \right] - \frac{a^6(\omega_1 - \omega_4)^6}{\Phi_3 k^6} \frac{g_{1,6,2}(s)}{2^6 i^6} \Big|_{s_{k,1}} e^{-a(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s\pi} \Big|_{s_{k,1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) = 0. \quad (8.15)$$

В формуле (8.15) при  $k^0$  имеем верное равенство  $1 - 1 = 0$ , что свидетельствует о правильности выбора асимптотики вида (8.14). При  $k^{-5}$  в (8.15) получим

$$d_{5k,1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{W_5 a^5(\omega_1 - \omega_4)^6}{2^5 i^5} = \frac{a^5 W_5}{\pi} \stackrel{(8.3)}{=} \frac{a^5}{\pi} [A_5(x_2) + B_5(x_{3n})],$$

откуда, применив формулы (3.8) и (3.14), выведем формулу

$$\begin{aligned} d_{5k,1} = d_{5k,1}(n) &= \frac{a^5}{\pi} \left( -\frac{1}{6a^5} \right) \left[ \int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t) dt + \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t) dt \right] = \\ &= -\frac{1}{6\pi} \left[ \int_{x_{1n}}^{x_2} q_2(t) dt + \int_{x_2}^{x_{3n}} q_3(t) dt \right], \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Применив формулу (1.7), из (8.16) получим:

$$d_{5k,1} = d_{5k,1}(n) = -\frac{1}{6\pi} [H_{2n} + H_{3n}] = -\frac{1}{6\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8.17)$$

Таким образом, коэффициент  $d_{5k,1}$  формулы (8.14) от  $n$  не зависит, и такое же значение будет иметь коэффициент  $d_{5k,1}(n)$  формулы (8.14) у предельного оператора (при  $n \rightarrow +\infty$ ), потенциалом которого является дельта-функция Дирака  $\delta(x - x_2)$ .

Приравнявая в уравнении (8.15) коэффициенты при  $k^{-6}$ , найдем

$$\begin{aligned} d_{6k,1} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{a^6 (\omega_1 - \omega_4)^6}{2^6 i^6} \left[ 3W_6(1-1) - \frac{g_{1,6,2}(s) e^{-a(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s\pi}}{\Phi_{30}} \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} \right] = \\ &= \frac{a^6}{2\pi i} \left[ e^{a(\omega_1 - \omega_4)s\pi} (\Phi_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_2} - U_4 e^{-a(\omega_1 - \omega_4)sx_{1n}}) - \right. \\ &\quad \left. - (\Phi_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_{3n}} - P_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_2} - U_4 e^{a(\omega_1 - \omega_4)sx_{1n}}) \right] \Big|_{s_{k,1, \text{оч}} = \frac{ik}{a}} = \\ &= \frac{a^6}{2\pi i} (-2i) [\Phi_4 \sin(2x_{3n}k) - P_4 \sin(2x_2k) - U_4 \sin(2x_{1n}k)]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Подставив в формулу (8.18) значения величин  $\Phi_4$ ,  $P_4$  и  $U_4$  из (8.13), получим:

$$\begin{aligned} d_{6k,1} &= \frac{1}{12\pi} [q_3(x_{3n} \sin(2x_{3n}k) - \Delta\tilde{q}(x_2) \sin(2x_2k) + q_2(x_{1n}) \sin(2x_{1n}k)]; \\ \Delta\tilde{q}(x_2) &= q_3(x_2 + 0) - q_2(x_2 - 0), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Формулы (8.16)–(8.19) показывают, что коэффициенты  $d_{5k,1}$  и  $d_{6k,1}$  асимптотического разложения (8.14) находятся единственным образом, в статье приведены явные формулы для их вычисления, поэтому теорема 8.2 полностью доказана.

Рассматривая аналогичным образом сектора 2), 3), ..., 6) индикаторной диаграммы, получим следующий результат.

**Теорема 8.3** 1) В секторах 2), 3), ..., 6) индикаторной диаграммы асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1.1)–(1.8) удовлетворяет следующим формулам:

$$\begin{aligned} s_{k,2} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{6}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2} e^{\frac{2\pi i}{6}} = s_{k,1} e^{\frac{4\pi i}{6}}; \dots; s_{k,m+1} = s_{k,m} e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{6}m}, \\ m = 0, 1, 2, \dots, 5; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

величины  $s_{k,1}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) определены формулами (8.14), (8.16)–(8.18).

2) При этом  $\lambda_{k,p} = s_{k,p}^6$ ,  $p = 1, 2, \dots, 6$   $k = 1, 2, 3, \dots$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
2. Peng O. Z., Wang X., Zeng J. Y. Analytic solution to the Schrodinger equation with a harmonic oscillator potential plus  $\delta$ -potential // Sci. China., Ser. A. 1991. Vol. 34, No. 10. pp. 1215–1221.
3. Fassari S., Inglese G. On the spectrum of the harmonic oscillator with a  $\delta$ -type perturbation // Helv. Phys. Acta. 1994. Vol. 67, No. 6. pp. 650–659.
4. Fassari S., Inglese G. On the spectrum of the harmonic oscillator with a  $\delta$ -type perturbation. II // Annales Henri Poincare. 1997. Vol. 70, No. 6. pp. 858–865.
5. Кревчик В. Д., Зайцев Р. В. Примесное поглощение света в структурах с квантовыми точками // Физика твердого тела. 2001. Т. 43, № 3. С. 504–507.
6. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.
7. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 1986. Т. 22, № 6. С. 3–6.
8. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.
9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
10. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // ДАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
11. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Сер.: Матем. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.
12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды МИАН. 2010. Т. 270, С. 188–197.
13. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
14. Митрохин С. И. Спектральные свойства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2017. Т. 17, № 4. С. 3–15.

15. Митрохин С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 136–149.
16. Савчук А. М., Шкалик А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
17. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с  $\delta$ -потенциалом // УМН. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.
18. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего  $\delta$ -функции // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 735–751.
19. Савчук А. М., Шкалик А. А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
20. Гейлер В. А., Маргулис В. А., Чучаев И. И. Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 36, № 4. С. 828–841.
21. Борисов Д. И. О лакунах в спектре Лапласиана в полосе с периодическим дельта-взаимодействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 46–53.
22. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
23. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Математика. 2018. № 6. С. 31–47.
24. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
25. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

*Поступила 19.06.2020*

MSC2020 34L20, 34B40, 47E05

# On the asymptotic behavior of the spectrum of a sixth-order differential operator, whose potential is the delta function

© S. I. Mitrokhin<sup>1</sup>

**Abstract.** In this paper we propose a new method for studying differential operators with discontinuous coefficients. We consider a sequence of sixth-order differential operators with piecewise-smooth coefficients. The limit of the sequence of these operators' potentials is the Dirac delta function. The boundary conditions are separated. To correctly determine solutions of differential equations with discontinuous coefficients at the points of discontinuity, "gluing" conditions are required. Asymptotic solutions were written out for large values of the spectral parameter, with the help of them the "gluing" conditions were studied and the boundary conditions were investigated. As a result, we derive an eigenvalues equation for the operator under study, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalues equation, which is a regular hexagon, is investigated. In various sectors of the indicator diagram, the method of successive approximations has been used to find the eigenvalues asymptotics of the studied differential operators. The limit of the asymptotic of the spectrum determines the spectrum of the sixth-order operator, whose potential is the delta function.

**Key Words:** differential operator with discontinuous coefficients, asymptotic behavior of solutions, piecewise-smooth potential, Dirac delta function, asymptotic behavior of eigenvalues, spectrum of an operator

## REFERENCES

1. F. A. Berezin, L. D. Faddeev, "[Remarks on the Schrodinger equation with a singular potential]", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **137**:5 (1961), 1011–1014 (In Russ.).
2. O. Z. Peng, X. Wang, J. Y. Zeng, "Analytic solution to the Schrodinger equation with a harmonic oscillator potential plus delta-potential", *Sci. China. Ser. A.*, **34**:10 (1991), 1215–1221.
3. S. Fassari, G. Inglese, "On the spectrum of the harmonic oscillator with a  $\delta$ -type pertubation", *Helv. Phys. Acta.*, **67**:6 (1994), 650–659.
4. S. Fassari, G. Inglese, "On the spectrum of the harmonic oscillator with a  $\delta$ -type pertubation. II", *Annales Henri Poincare*, **70**:6 (1997), 858–865.
5. V. D. Krevchik, R. V. Zaitsev, "[Impurity absorption of light in structures with quantum dots]", *Physics of the Solid State*, **43**:3 (2001), 504–507 (In Russ.).
6. V. A. Il'in, "Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator", *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **22**:5 (1977), 670–872.
7. S. I. Mitrokhin, "[Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients]", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 1986, no. 6, 3–6 (In Russ.).

---

<sup>1</sup>Sergey I. Mitrokhin, senior researcher, Lomonosov Moscow State University (4, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0003-1896-0563>, mitrokhin-sergey@yandex.ru

8. S. I. Mitrokhin, “[On trace formulas for a boundary value problem with a functional differential equation with a discontinuous coefficient]”, *Differential Equations*, **22**:6 (1986), 927–931 (In Russ.).
9. V. A. Il’in, “[Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators]”, *Differential Equations*, **22**:12 (1986), 2059–2071 (In Russ.).
10. S. I. Mitrokhin, “[On some spectral properties of second-order differential operators with discontinuous weight function]”, *Doklady Akademii nauk*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russ.).
11. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, “Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential”, *Izvestiya: Mathematics*, **64**:4 (2000), 695–754.
12. S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **270** (2010), 184–193.
13. S. I. Mitrokhin, “[Spectral properties of boundary value problems for a functional differential equation with summable coefficients]”, *Differential Equations*, **46**:8 (2010), 1085–1093 (In Russ.).
14. S. I. Mitrokhin, “[Spectral properties of even-order differential operators with summable coefficients]”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, **17**:4, 3–15 (In Russ.).
15. S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with a summable potential”, *Trudy instituta matematiki i mekhaniki URO RAN*, **25**:1 (2019), 136–149 (In Russ.).
16. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm-Liouville operators with singular potentials”, *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.
17. A. M. Savchuk, “First-order regularised trace of the Sturm-Liouville operator with  $\delta$ -potential”, *Russian Mathematical Surveys*, **55**:6 (2000), 1168–1169.
18. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, “The asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and a trace formula for a potential with delta functions”, *Differential Equations*, **38**:6 (2002), 772–789.
19. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Trace formula for Sturm-Liouville Operators with singular potentials”, *Mathematical Notes*, **69**:3 (2001), 387–400.
20. V. A. Geiler, V. A. Margulis, I. I. Chuchaev, “Potentials of zero radius and Carleman operators”, *Siberian Mathematical Journal*, **36**:4 (1995), 714–726.
21. D. I. Borisov, “Gaps in the spectrum of the Laplacian in a strip with periodic delta interaction”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary Issues)*, **305**:suppl. 1 (2019), S16–S23.
22. M. A. Naimark, [*Linear differential operators*], Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.

23. S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of differential operator with alternating weight function”, *Russian Mathematics*, 2018 vol 62, no. 6, 27–42.
24. R. Bellman, K. L. Cook, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 462 p.
25. V. A. Sadovnichyi, V. B. Lyubishkin, “[On some new results in the theory of regularized traces of differential operators]”, *Differential Equations*, **18**:1 (1982), 109–116 (In Russ.).

*Submitted 19.06.2020*

УДК 517.9

## Сценарий изменения гомотопического типа замыкания инвариантного седлового многообразия

© Е. В. Ноздринова<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье рассматриваются поверхностные градиентно-подобные диффеоморфизмы. Замыкания инвариантных многообразий седловых точек таких систем содержат в своем замыкании узловые точки. В случае, когда такая точка одна, замыкание инвариантного многообразия является замкнутой кривой, гомеоморфной окружности. Сопрягающий гомеоморфизм в общем случае меняет гомотопический тип замкнутой кривой, при этом сами диффеоморфизмы могут остаться в одном изотопическом классе. Это означает, что в пространстве диффеоморфизмов две такие системы соединяются дугой, но любая такая дуга необходимо претерпевает бифуркации. В настоящей работе описан сценарий изменения гомотопического типа замыкания инвариантного седлового многообразия. При этом построенная дуга является устойчивой в пространстве диффеоморфизмов.

**Ключевые слова:** устойчивая дуга, седло-узел, гомотопический тип кривой, бифуркация, многообразия

### 1. Введение и формулировка результата

Напомним, что диффеоморфизм  $f$ , заданный на замкнутом многообразии, является *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются.

Диффеоморфизм  $f$  называется *полярным*, если множество  $\Omega_f$  содержит ровно две узловые точки, а именно одну стоковую и одну источниковую.

Обозначим через  $G$  класс полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Зафиксируем систему образующих фундаментальной группы тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ :

$$a = \mathbb{S}^1 \times \{0\} = \langle 1, 0 \rangle; \quad b = \{0\} \times \mathbb{S}^1 = \langle 0, 1 \rangle.$$

Из результатов работ [1–4] следует, что любой диффеоморфизм  $f \in G$  обладает следующими свойствами:

1. Неблуждающее множество  $\Omega_f$  диффеоморфизма  $f$  состоит в точности из четырех неподвижных гиперболических точек: стока  $\omega_f$ , источника  $\alpha_f$  и седел  $\sigma_f^1, \sigma_f^2$ , замыкания инвариантных многообразий которых являются замкнутыми кривыми:

$$c_f^{u1} = cl W_{\sigma_f^1}^u = W_{\sigma_f^1}^u \cup \omega_f, \quad c_f^{s1} = cl W_{\sigma_f^1}^s = W_{\sigma_f^1}^s \cup \alpha_f,$$

$$c_f^{u2} = cl W_{\sigma_f^2}^u = W_{\sigma_f^2}^u \cup \omega_f, \quad c_f^{s2} = cl W_{\sigma_f^2}^s = W_{\sigma_f^2}^s \cup \alpha_f.$$

<sup>1</sup>Ноздринова Елена Вячеславовна, научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

2. Существует единственная унимодулярная целочисленная матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} \mu_f^1 & \mu_f^2 \\ \nu_f^1 & \nu_f^2 \end{pmatrix}$$

такая, что кривые  $c_f^{u1}$ ,  $c_f^{s2}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu_f^1, \nu_f^1 \rangle$  и кривые  $c_f^{u2}$ ,  $c_f^{s1}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu_f^2, \nu_f^2 \rangle$  в базисе  $a, b$ .

3. Для любой унимодулярной целочисленной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \mu^1 & \mu^2 \\ \nu^1 & \nu^2 \end{pmatrix}$$

существует диффеоморфизм  $f \in G$  такой, что  $A_f = A$ .

Таким образом, все диффеоморфизмы класса  $G$  лежат в одном изотопическом классе и, следовательно, соединяются дугой в пространстве диффеоморфизмов. Однако в общем случае дуга, соединяющая изотопные диффеоморфизмы, может иметь бесконечное число бифуркаций. Например, таким свойством обладает любая дуга, соединяющая грубые преобразования окружности с разными числами вращения. Кроме того, сами бифуркации на дуге могут оказаться нетипичными, что делает дугу *неустойчивой* – меняющей свои качественные свойства при малом шевелении.

Согласно [5], для диффеоморфизмов замкнутого многообразия  $M^n$  с конечным предельным множеством, устойчивость дуги  $\{f_t \in \text{Diff}(M^n), t \in [0, 1]\}$  характеризуется конечным числом бифуркационных значений  $0 < b_1 < \dots < b_k < 1$ ; при этом бифуркационный диффеоморфизм  $f_{b_i}, i \in \{1, \dots, k\}$  обладает следующими свойствами:

1) диффеоморфизм  $f_{b_i}$  имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флип или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично;

2) все инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма  $f_{b_i}$  пересекаются трансверсально и диффеоморфизм не имеет циклов.

Хорошо известно, что изотопные диффеоморфизмы Морса-Смейла на многообразиях любой размерности в общем случае не соединяются устойчивой дугой, в отличие от потоков (см., например, [6] для обзора результатов по данной тематике). В частности, в размерности два, препятствия к существованию такой дуги связаны с разницей последовательностей фильтрации [7], периодических данных [6], [8], гетероклинических пересечений [9] и др.

В настоящей работе на примере полярных диффеоморфизмов тора показано, что разница гомотопических типов замыканий инвариантных седловых многообразий не является препятствием к существованию устойчивой дуги. Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего факта.

**Т е о р е м а 1.1** *Существует устойчивая дуга  $f_t$  с двумя седло-узловыми бифуркациями, соединяющая диффеоморфизмы  $f_0, f_1 \in G$  такие, что  $A_{f_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,*

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Вспомогательные конструкции

### 2.1. Построение диффеоморфизма $f_0$

Простейшим примером диффеоморфизма из класса  $G$  является прямое произведение двух копий диффеоморфизма источник-сток на окружности  $\mathbb{S}^1$ . Сначала построим диффеоморфизм источник-сток на окружности. Для этого рассмотрим функцию  $\bar{\phi}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой:

$$\bar{\phi}_0(x) = x - \frac{1}{4\pi} \sin\left(2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$

По построению  $x = \frac{1}{4}$  и  $x = \frac{3}{4}$  – неподвижные точки отображения  $\bar{\phi}_0$  на отрезке  $[0, 1]$  (Рис. 2.1).

Рассмотрим проекцию  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , заданную формулой  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ . В силу того, что функция  $\bar{\phi}_0$  является строго монотонно возрастающей и периодической с периодом 1, она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма

$$\phi_0 = \pi \bar{\phi}_0 \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

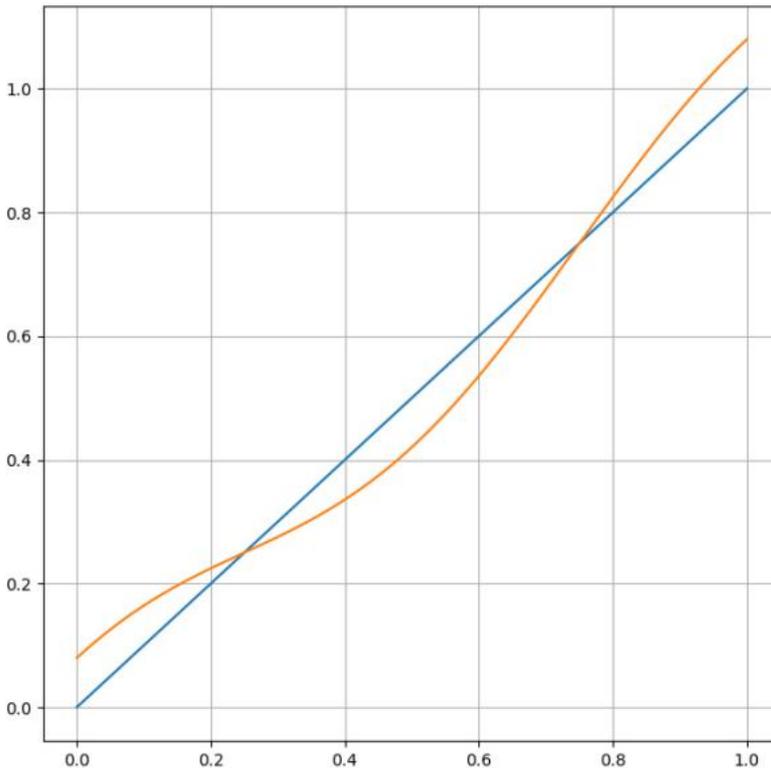


Рис. 2.1. График отображения  $\bar{\phi}_0$

По построению диффеоморфизм  $\phi_0$  имеет неподвижный гиперболический сток в точке  $N = \pi\left(\frac{1}{4}\right)$  и неподвижный гиперболический источник в точке  $S = \pi\left(\frac{3}{4}\right)$ .

Определим диффеоморфизм  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  по формуле (Рис.2.2)

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

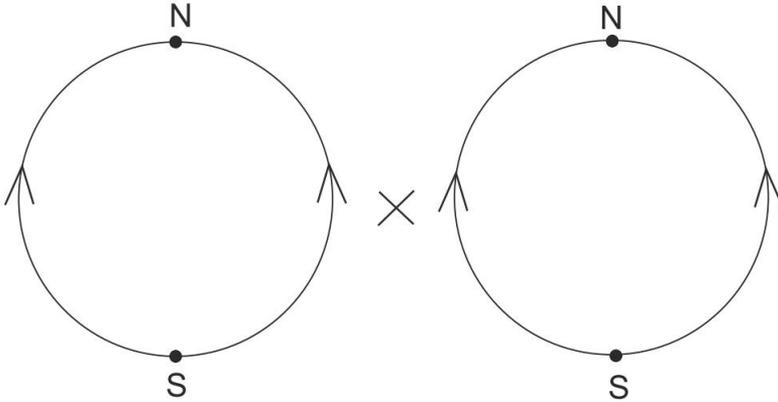


Рис. 2.2. Декартов квадрат диффеоморфизма  $\phi_0$

По построению диффеоморфизм  $f_0$  имеет неподвижный гиперболический сток в точке  $\omega = (N, N)$ , гиперболический источник  $\alpha = (S, S)$  и две седловые точки  $\sigma_1 = (N, S), \sigma_2 = (S, N)$  (Рис.2.3). При этом замыкания инвариантных многообразий каждой из них лежат в классе образующих  $a, b$ . Именно,

$$c_{f_0}^{u1} = cl W_{\sigma_1}^u = \mathbb{S}^1 \times \{S\}, \quad c_{f_0}^{s1} = cl W_{\sigma_1}^s = \{N\} \times \mathbb{S}^1,$$

$$c_{f_0}^{u2} = cl W_{\sigma_2}^u = \{S\} \times \mathbb{S}^1, \quad c_{f_0}^{s2} = cl W_{\sigma_2}^s = \mathbb{S}^1 \times \{N\}.$$

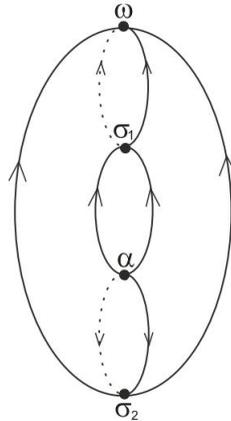


Рис. 2.3. Диффеоморфизм  $f_0$

## 2.2. Построение модельных функций

В этом разделе построены модельные функции, которые в дальнейшем будут использованы в построении устойчивой дуги, соединяющей диффеоморфизм  $f_0$  с диффеоморфизмом  $f_1$ . В основе построения лежит принцип склейки бесконечно гладких функций посредством следующей *сигмоид-функции*.

Пусть  $a < b$  и  $\delta_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  сигмоид-функция, определенная формулой (см. рисунок 2.4)

$$\delta_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(a+b)/2-x}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

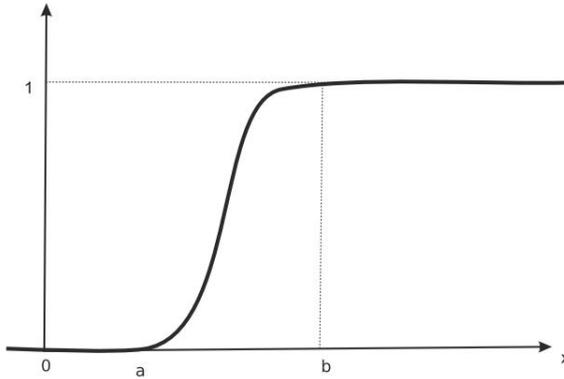


Рис. 2.4. График сигмоид-функции

Определим функцию  $\bar{\phi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле (Рис. 2.5).

$$\bar{\phi}_1(x) = x - \frac{1}{12\pi} \sin\left(6\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$

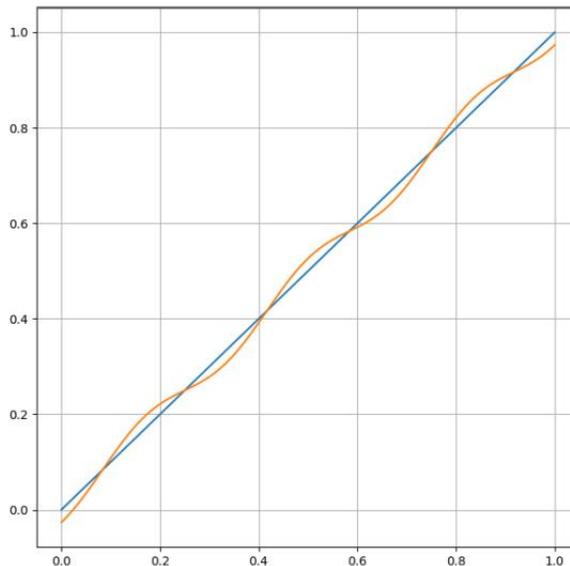
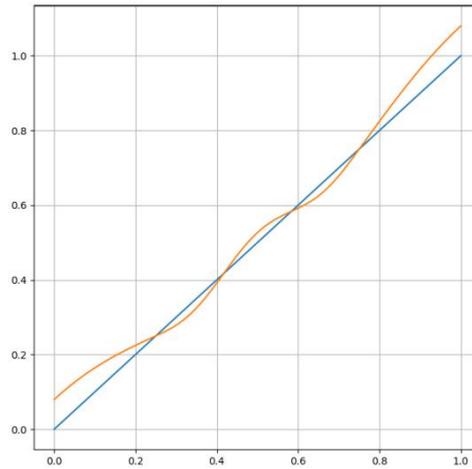


Рис. 2.5. График функции  $\bar{\phi}_1(x)$

Определим функцию  $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Рис. 2.6) по формуле

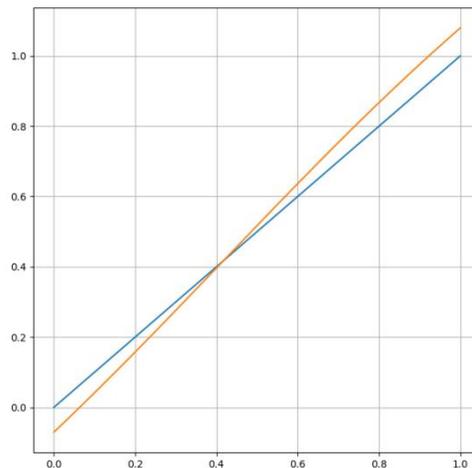
$$\bar{g}_1(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_0(x), & 0 \leq x \leq 0,26, \\ (1 - \delta_{0,26;0,27}(x))\bar{\phi}_0(x) + \delta_{0,26;0,27}(x)\bar{\phi}_1(x), & 0,26 < x < 0,27, \\ \bar{\phi}_1(x), & 0,27 \leq x \leq 0,76, \\ (1 - \delta_{0,76;0,77}(x))\bar{\phi}_1(x) + \delta_{0,76;0,77}(x)\bar{\phi}_0(x), & 0,76 < x < 0,77, \\ \bar{\phi}_0(x), & 0,77 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



**Рис. 2.6.** График функции  $\bar{g}_1(x)$

Определим функцию  $\bar{\phi}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Рис. 2.7) по формуле

$$\bar{\phi}_2(x) = x + \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{5}{6}\pi\left(x - \frac{5}{12}\right)\right).$$



**Рис. 2.7.** График функции  $\bar{\phi}_2(x)$

Определим функцию  $\bar{g}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (см. Рис. 2.8) по формуле

$$\bar{g}_2(x) = \begin{cases} \bar{g}_1(x), & 0 \leq x \leq 0,42, \\ (1 - \delta_{0,42;0,43}(x))\bar{g}_1(x) + \delta_{0,42;0,43}(x)\bar{\phi}_2(x), & 0,42 < x < 0,43, \\ \bar{\phi}_2(x), & 0,43 \leq x \leq 0,98, \\ (1 - \delta_{0,98;0,99}(x))\bar{\phi}_2(x) + \delta_{0,98;0,99}(x)\bar{g}_1(x), & 0,98 < x < 0,99, \\ \bar{g}_1(x), & 0,99 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

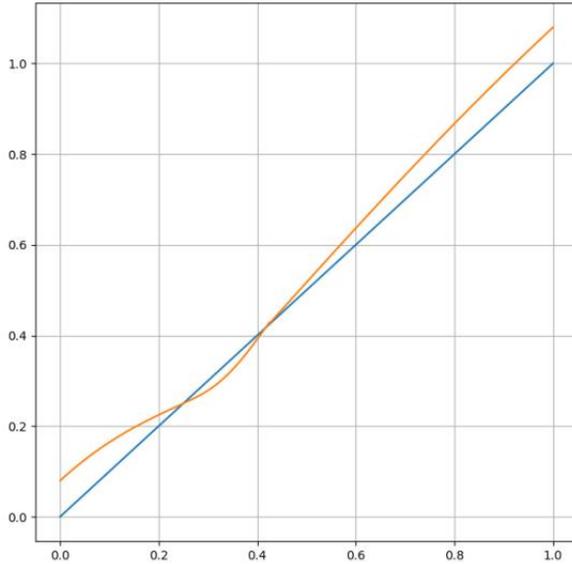


Рис. 2.8. График функции  $\bar{g}_2(x)$

### 3. Построение устойчивой дуги (доказательство Теоремы 1.1)

Устойчивая дуга  $f_t$ , соединяющая диффеоморфизм  $f_0$  с некоторым диффеоморфизмом  $f_1$  таким, что  $A_{f_1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , является произведением дуг  $\Gamma_t^1$  и  $\Gamma_t^2$ , построенных в шаге 1 и шаге 2 ниже. Везде далее в этом разделе отображения без черты являются проекциями на  $\mathbb{S}^1$  посредством  $\pi$  отображения с чертой, заданного на прямой  $\mathbb{R}$ .

#### Шаг 1. Первая седло-узловая бифуркация

##### 1. Рождение седло-узловой точки

Начнем с диффеоморфизма  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , определенного по формуле

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Положим

$$\bar{\eta}_t^1(x) = (1 - t)\bar{\phi}_0(x) + t\bar{g}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1]$$

и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^1(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^1(x) + \tau\bar{\phi}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  по формуле

$$H_t^1(w, z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t, |8x-2|}^1(z)), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), z), & x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

При  $t = \frac{3}{4}$ , диффеоморфизм  $H_{\frac{3}{4}}^1$  имеет седло-узловую точку  $p = (N, \pi(0))$ , чье устойчивое многообразие диффеоморфно полуплоскости, границей которой является дуга  $\gamma_p$  (Рис. 3.9).

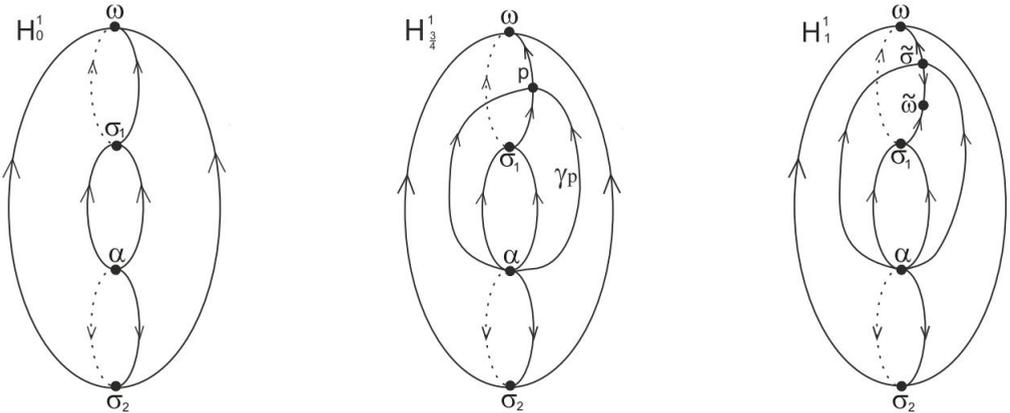


Рис. 3.9. Изотопия  $H_t^1$  на торе

**2. Поворот сепаратрисы седла  $\sigma_2$**

Рассмотрим фундаментальную область  $K = \left[ \pi(0), \pi\left(\frac{1}{4\pi}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$  ограничения диффеоморфизма  $f_0$  на  $V = \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$ . Положим  $\hat{V} = V/f_0$ . Тогда  $\hat{V}$  – двумерный тор, полученный из  $K$  отождествлением границ в силу отображения  $f_0$ . Обозначим через  $q : V \rightarrow \hat{V}$  естественную проекцию. Положим  $\hat{\gamma}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap V)$  и  $\hat{\gamma}_1 = q(W_{\sigma_1}^s \cap V)$ . Поскольку диффеоморфизм  $H_t$  при всех  $t \in [0, 1]$  совпадает с  $f_0$  на кольце  $\left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{8}\right) \right] \times \mathbb{S}^1$ , то корректно определена окружность  $\hat{\gamma}_p = q(\gamma_p \cap K)$ .

Положим  $W = \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \times \left[ \pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right) \right]$  и  $\hat{W} = p(W)$ . По построению окружность  $\hat{\gamma}_p$  делит кольцо  $\hat{W}$  на два кольца, замыкания которых обозначим через  $\hat{W}_1, \hat{W}_2$ , полагая, что  $\hat{\gamma}_1 \subset \hat{W}_1$  и  $\hat{\gamma}_2 \subset \hat{W}_2$  (Рис. 3.10).

Выберем не гомотопную нулю окружность  $\hat{\gamma} \subset \text{int } \hat{W}_1$ . Согласно работе [4], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм  $\hat{h}_1 : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$  такой, что  $\hat{h}_1(\hat{\gamma}_2) = \hat{\gamma}$ .

Для  $x_i \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$  положим  $K_i = [\pi(x_i); (\pi(\bar{\phi}_0^{-1}(x_i)))] \times \mathbb{S}^1$ . Выберем открытое покрытие  $D = \{D_1, \dots, D_{k_1}\}$  тора  $\mathbb{T}^2$  такое, что компонента связности  $\bar{D}_i$  множества  $q^{-1}(D_i)$  является подмножеством  $K_i$  для некоторых  $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$ . Согласно лемме о фрагментации [10] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы  $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{k_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:

i) для каждого  $i \in \{1, \dots, k_1\}$  существует гладкая изотопия  $\{\hat{w}_{i,t}\}$ , тождественная вне  $D_i$  и соединяющая тождественное отображение и  $\hat{w}_i$ ;

ii)  $\hat{h}_1 = \hat{w}_1 \dots \hat{w}_{k_1}$ .

Пусть  $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – диффеоморфизм, который совпадает с  $(q|_{K_i})^{-1} \hat{w}_{i,t} q$  на  $K_i$  и с тождественным отображением вне  $K_i$ . Положим

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{k_1,t} f_0, \quad G_t^1 = \begin{cases} \zeta_{2t}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \zeta_1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

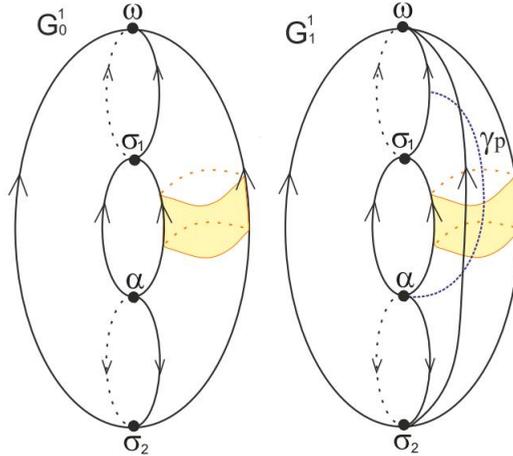


Рис. 3.10. Изотопия  $G_t^1$  на торе

**3. Объединение изотопий  $H_t^1$  и  $G_t^1$**

Определим гладкую дугу  $\Gamma_t^1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, t \in [0, 1]$  по формуле (см. Рис. 3.11):

$$\Gamma_t^1(z, w) = \begin{cases} H_t^1(\pi(x), w), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^1(\pi(x), w), & x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), w), & x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[0, \frac{3}{8}\right], z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

**Шаг 2. Вторая седло-узловая бифуркация**

**1. Слияние седловой и узловой точек**

Для всех  $t \in [0; 1]$  положим  $\bar{\eta}_t^2(x) = t\bar{g}_2(x) + (1 - t)\bar{g}_1(x), x \in \mathbb{R}$  и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^2(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^2(x) + \tau\bar{\phi}_0(x), x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1], \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, t \in [0, 1]$  по формуле:

$$H_t^2(w, z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t, |8x-2|}^2(z)), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ \Gamma_1(\pi(x), z), & x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

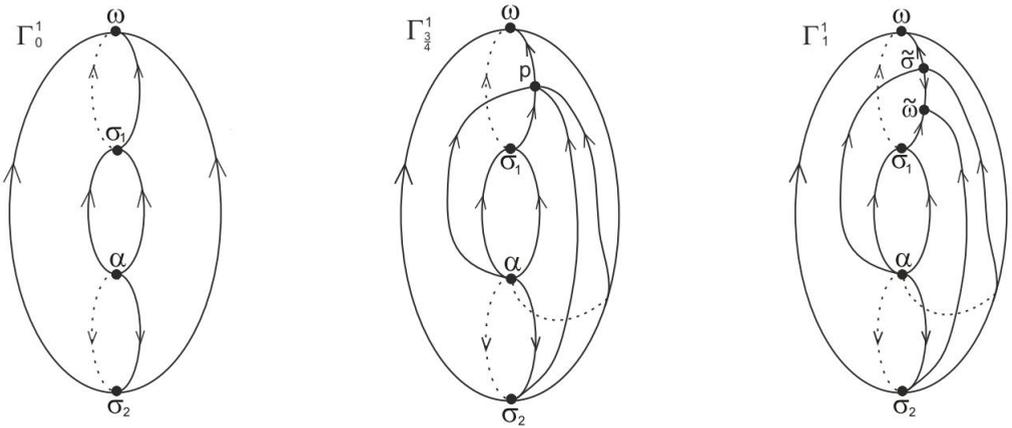


Рис. 3.11. Изотопия  $\Gamma_t^1$  на торе

Дуга  $H_t^2$  реализует слияние стока  $\tilde{\omega}$  и седла  $\sigma_1$  в седло-узловую точку  $\tilde{p}$  и дальнейшее ее исчезновение. Обозначим через  $\beta_{\tilde{p}}$  границу устойчивого многообразия седло-узла  $\tilde{p}$ .

**2. Поворот сепаратрисы седла  $\sigma_2$**

Поскольку диффеоморфизм  $H_t^2$  при всех  $t \in [0, 1]$  совпадает с  $f_0$  на кольце  $K$ , то корректно определены окружности  $\hat{\beta}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap K)$ ,  $\hat{\beta}_1 = q(W_{\sigma_1}^s \cap K)$  и  $\hat{\beta}_{\tilde{p}} = q(\beta_{\tilde{p}} \cap K)$ .

Положим  $\hat{W}_3 = \hat{V} \setminus \hat{W}$ . Выберем не гомотопную нулю окружность  $\hat{\beta} \subset \text{int } \hat{W}_3$ . Согласно работе [4], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм  $\hat{h}_2 : \hat{V} \rightarrow \hat{V}$  такой, что  $\hat{h}_2(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}$  и  $\hat{h}_2(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1$ .

Выберем открытое покрытие  $U = \{U_1, \dots, U_{k_2}\}$  тора  $\mathbb{T}^2$  такое, что компонента связности  $\bar{U}_i$  множества  $q^{-1}(U_i)$  является подмножеством  $K_i$  для некоторых  $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$ . Согласно лемме о фрагментации [10], существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы  $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  со следующими свойствами:

- i) для каждого  $i \in \{1, \dots, k_2\}$  существует гладкая изотопия  $\{\hat{v}_{i,t}\}$ , тождественная вне  $U_i$  и соединяющая тождественное отображение и  $\hat{v}_i$ ;
- ii)  $\hat{h}_2 = \hat{v}_1 \dots \hat{v}_{k_2}$ .

Пусть  $v_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – диффеоморфизм, который совпадает с  $(q|_{K_i})^{-1} \hat{v}_{i,t} q$  на  $K_i$  и с тождественным отображением вне  $K_i$ . Положим

$$\xi_t = v_{1,t} \dots v_{k_2,t} \Gamma_1, \quad G_t^2 = \begin{cases} \xi_{2t}, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \xi_1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**3. Объединение изотопий  $H_t^2$  и  $G_t^2$**

Определим гладкую дугу  $\Gamma_t^2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  (см. Рис. 3.11) по формуле

$$\Gamma_t^2(z, w) = \begin{cases} H_t^2(\pi(x), w), & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^2(\pi(x), w), & x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right), z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), w), & x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[0, \frac{3}{8}\right], z \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

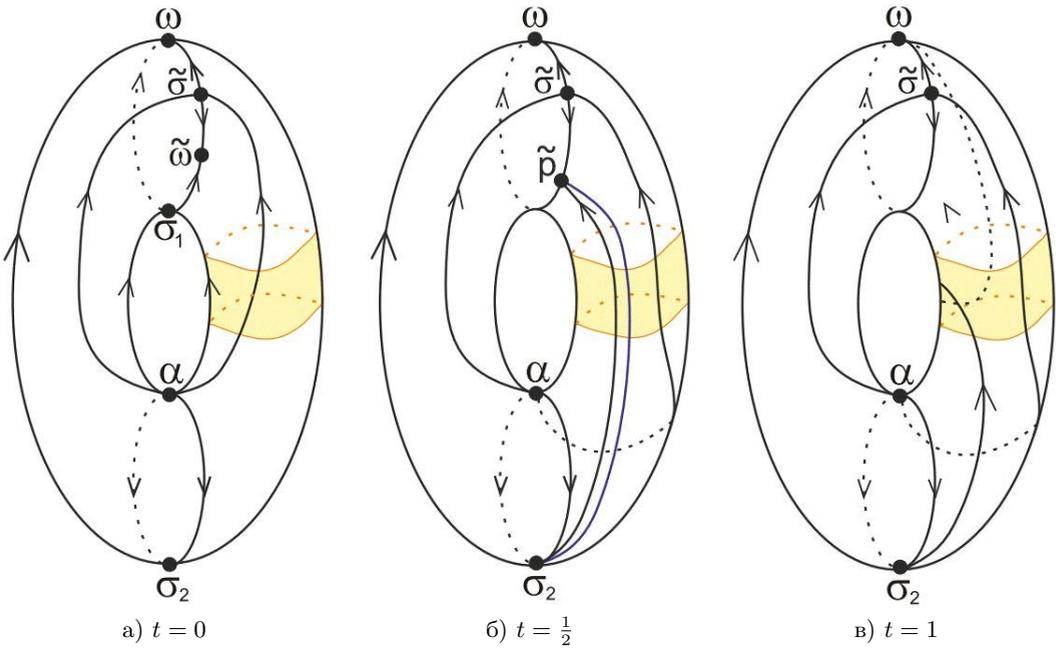


Рис. 3.12. Изотопия  $\Gamma_t^1$  на торе

**Благодарности.** Автор благодарит О. В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Grines V., T. Medvedev, O. Pochinka Dynamical systems on 2- and 3-manifolds // Switzerland, Springer. 2016. 313 p.
2. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
3. Nozdrinova E., Pochinka O. On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 990. No. 1. pp. 1–7.
4. Rolfsen D. Knots and links // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83, No. 5 pp. 931–935.
5. Newhouse S. E., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications Mathematiques de l'I.H.E.S. 1983. Vol. 57 pp. 5–71.
6. Nozdrinova E., Pochinka O. Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020.
7. Blanchard P. Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces // Duke Mathematical Journal. 1980. Vol. 47, No. 1. pp. 33–46.

8. Newhouse S., Peixoto M. There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows // *Aserisque*. 1976. Vol. 31. pp. 15–41.
9. Matsumoto S. There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs // *Inventiones Mathematicae*. 1979. Vol. 51. pp. 1–7.
10. Banyaga A. The structure of the group of equivariant diffeomorphism // *Topology*. 1977. Vol. 16. pp. 279–283.

*Поступила 24.07.2020*

MSC2020 37B35

## A scenario of the homotopy type changing of the invariant saddle manifold closure

© E. V. Nozdrinova<sup>1</sup>

**Abstract.** The paper deals with surface gradient-like diffeomorphisms. The closures of the invariant manifolds of saddle points of such systems contain nodal points in their closure. In the case when there is only one such point, the closure of the invariant manifold is a closed curve that is homeomorphic to the circle. In a general case the conjugating homeomorphism changes the homotopy type of the closed curve, while the diffeomorphisms themselves may remain in the same isotopic class. This means that in the space of diffeomorphisms two such systems are connected by an arc, but every such arc necessarily undergoes bifurcations. In this paper, we describe a scenario for changing the homotopy type of the closure of the invariant saddle manifold. Moreover, the constructed arc is stable in the space of diffeomorphisms.

**Key Words:** stable arc, saddle-node, homotopy type of curve, bifurcation, manifold

### REFERENCES

1. V. Grines T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.
2. J. Milnor, [*Morse theory*], Moscow Mir Publ., 1965, 184 p.
3. E. Nozdrinova, O. Pochinka, “On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere”, *Journal of Physics: Conference Series*, **990**:1 (2018), 1–7.
4. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:5 (1977), 931–935.
5. S. E. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publications Mathématiques de l’I.H.E.S.*, **57** (1983), 5–71.
6. E. Nozdrinova, O. Pochinka, “Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2020.

---

<sup>1</sup>**Elena V. Nozdrinova**, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, [maati@mail.ru](mailto:maati@mail.ru)

7. P. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46.
8. S. Newhouse, M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows”, *Asterisque*, **31** (1976), 15–41.
9. S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs”, *Inventiones Mathematicae*, **51** (1979), 1–7.
10. A. Banyaga, “The structure of the group of equivariant diffeomorphism”, *Topology*, **16** (1977), 279–283.

*Submitted 24.07.2020*

УДК 517.9

# Применение метода граничных интегральных уравнений к численному решению эллиптических краевых задач в $\mathbb{R}^3$

© А. Н. Тында<sup>1</sup>, К. А. Тимошенко<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе предлагаются численные методы решения внешних и внутренних краевых задач для уравнений Гельмгольца и Лапласа в сложных пространственных областях, основанные на их сведении к граничным интегральным уравнениям в  $\mathbb{R}^2$ . С помощью потенциалов простого и двойного слоя получены граничные интегральные уравнения типа Фредгольма относительно неизвестной плотности для краевых задач Дирихле и Неймана. В результате применения интегральных уравнений по границе области размерность задач снижается на единицу. Для аппроксимации решений получаемых слабосингулярных уравнений Фредгольма разработан общий численный метод, основанный на сплайн-аппроксимации решений и применении адаптивных кубатур, учитывающих особенности ядер. При построении кубатурных формул построены существенно неравномерные сетки с показателем неравномерности, зависящим от гладкости входных данных. Эффективность метода подтверждается приведенными результатами решения ряда тестовых задач.

**Ключевые слова:** эллиптические краевые задачи, слабосингулярные интегральные уравнения Фредгольма, метод сплайн-коллокации, неравномерные сетки, аппроксимация интегралов

## 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца в трехмерных областях. Такого рода задачи часто возникают в математической физике. Например, известно, что моделирование распространения гармонических волн приводит к однородному уравнению Гельмгольца.

Уравнения Лапласа, Гельмгольца и Пуассона относятся к классу эллиптических задач, для решения которых разработан метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющий свести трехмерные краевые задачи к интегральным уравнениям.

Для однородного уравнения Гельмгольца такой подход исследовался разными авторами (см., например, [1] и [2]). Основная идея метода заключается в представлении решения краевой задачи в виде так называемых поверхностных потенциалов. Такое представление позволяет переформулировать краевую задачу в виде ГИУ, заданного на замкнутой поверхности, которая является границей области, в которой требуется найти решение. Это особенно актуально при решении внешних граничных задач, когда решение требуется найти в неограниченной области, т.к. метод позволяет перейти к уравнениям по конечной границе.

<sup>1</sup>Тында Александр Николаевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

<sup>2</sup>Тимошенко Константин Александрович, магистрант кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6082-6558>, timoshenkov.ka@yandex.ru

В практически задачах граничные уравнения, получаемые с помощью метода потенциалов, не разрешимы аналитически. Вопрос построения численных методов решения ГИУ представляет особую сложность, поскольку граничные уравнения являются сингулярными (т.е. их ядра содержат особенности). Различные численные алгоритмы решения ГИУ для уравнений Лапласа и Гельмгольца рассматривались в работах [4], [5].

В рамках данной работы мы будем рассматривать только ГИУ, которые относятся к классу слабосингулярных. Далее будет показано, что краевые задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений можно свести к слабосингулярным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Для решения уравнений данного класса в работе предлагается численный метод, основанный на применении сплайн-коллокационной техники на специальных адаптивных сетках, учитывающих сингулярности.

## 2. Постановки краевых задач для эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^3$

В рамках настоящей работы нас прежде всего будет интересовать однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.1)$$

где  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  — неизвестная функция  $\Delta u$  — оператор Лапласа,  $k \in \mathbb{C}$  — волновое число, такое, что  $\operatorname{Im} k \geq 0$ . Если положить  $k = 0$ , то уравнение (2.1) перейдет в уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (2.2)$$

Решение уравнений (2.1)-(2.2) требуется найти в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , если на границе этой области  $\Gamma$  задано одно из следующих краевых условий

1. Условие Дирихле: на границе известно значение функции  $u$

$$u|_{\Gamma} = f(x). \quad (2.3)$$

2. Условие Неймана: на границе известна нормальная производная от  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = g(x), \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$  — единичная внешняя нормаль к  $\Gamma$ .

В дальнейшем будем считать, что область  $G$  — открытая и ограниченная и через  $\overline{G}$  обозначим её замыкание. Граница  $\Gamma$  представляет собой замкнутую поверхность, которую будем считать достаточно гладкой. А именно, потребуем, чтобы для  $\Gamma$  выполнялось условие Ляпунова: в каждой точке  $x \in \Gamma$  существует непрерывная по Гёльдеру нормаль  $\mathbf{n}(x)$ , т. е. для любых двух точек  $x, y$ , лежащих на  $\Gamma$  выполняется соотношение

$$|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)| \leq M_1 |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \Gamma, \quad (2.5)$$

где  $M_1 > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Как отмечалось в [1], любая замкнутая и ограниченная поверхность, входящая в класс  $C^2$  (класс дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей), удовлетворяет условию (2.5) с показателем  $\alpha = 1$ . Поэтому дальше для простоты изложения будем полагать, что  $\Gamma \in C^2$ .

В случаях, когда решение уравнения (2.1) требуется отыскать в неограниченной области  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$  на функцию  $u$  требуется дополнительно накладывать условия Зоммерфельда

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{|x|}, \nabla u(x)\right) - iku(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty; \\ \left(\frac{x}{|x|}, \nabla u(x)\right) + iku(x) &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия (2.6) необходимы для обеспечения единственности решения краевых задач.

Для уравнения (2.1) будем рассматривать следующие краевые задачи

1. Внутренняя задача Дирихле ( $\mathbf{D}_1$ ). Найти функцию  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ , удовлетворяющую уравнению (2.1) в  $G$  и граничному условию (2.3).
2. Внутренняя задача Неймана ( $\mathbf{N}_1$ ). Найти функцию  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  (для которой существует нормальная производная), удовлетворяющую уравнению (2.1) в  $G$  и граничному условию (2.4).
3. Внешняя задача Дирихле ( $\mathbf{D}_2$ ). Найти функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus G)$ , удовлетворяющую уравнению (2.1) в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$ , условиям Зоммерфельда (2.6) на бесконечности и граничному условию (2.3).
4. Внешняя задача Неймана ( $\mathbf{N}_2$ ). Найти функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus G)$ , удовлетворяющую уравнению (2.1) в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$ , условиям Зоммерфельда (2.6) на бесконечности и граничному условию (2.4).

Данные краевые задачи можно переформулировать в виде эквивалентных граничных интегральных уравнений (ГИУ). Для краевых задач эллиптического типа ГИУ можно вывести через теорию потенциала. Такой способ подробно описан в книге [2], следуя которой, ниже приведем ГИУ для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Решение уравнений (2.1)-(2.2) можно представить в виде поверхностных потенциалов вида

$$v(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \eta(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (2.7)$$

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (2.8)$$

где  $\Phi(x, y)$  — фундаментальное решение. Функция  $v(x)$  называется потенциалом простого слоя с плотностью  $\eta$ ; функция  $w(x)$  есть потенциал двойного слоя с плотностью  $\psi$ . Для уравнения Гельмгольца фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (2.9)$$

а для уравнения Лапласа (полагая  $k = 0$ ) получим фундаментальное решение

$$\Phi_0(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}. \quad (2.10)$$

## 2.1. Уравнение Лапласа

Решение задач  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  для уравнения (2.2) можно представить в виде потенциала двойного слоя (2.8) с фундаментальным решением  $\Phi_0$  и неизвестной плотностью  $\psi(x)$ . Для внутренней задачи  $\mathbf{D}_1$  плотность  $\psi(x)$  определяется как решение интегрального уравнения

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} K_y^0(x, y) \psi(y) ds(y) = -2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.11)$$

В случае внешней задачи  $\mathbf{D}_2$  плотность определим из уравнения

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} K_y^0(x, y) \psi(y) ds(y) = 2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.12)$$

где ядро  $K_y^0(x, y)$  имеет вид

$$K_y^0(x, y) = \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = \nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{n}(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - y_i) \mathbf{n}_i(y)}{|x - y|^3} = \frac{(x - y, \mathbf{n}(y))}{4\pi |x - y|^3}. \quad (2.13)$$

Решение задач  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$  представим в виде потенциала простого слоя (2.7) с неизвестной плотностью  $\eta(x)$ . При решении задачи  $\mathbf{N}_1$  уравнение для плотности  $\eta(x)$  имеет вид

$$\eta(x) + 2 \int_{\Gamma} K_x^0(x, y) \eta(y) ds(y) = 2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.14)$$

Для внешней задачи  $\mathbf{N}_2$  уравнение для плотности имеет вид

$$\eta(x) - 2 \int_{\Gamma} K_x^0(x, y) \eta(y) ds(y) = -2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Ядро  $K_x^0(x, y)$  в уравнениях (2.14)-(2.15) имеет вид

$$K_x^0(x, y) = \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{(y_i - x_i) \mathbf{n}_i(x)}{|x - y|^3} = \frac{(y - x, \mathbf{n}(x))}{4\pi |x - y|^3}. \quad (2.16)$$

## 2.2. Уравнение Гельмгольца

Краевые задач  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  для уравнения Гельмгольца (2.1) будем искать в виде потенциала (2.8). Для внутренней задачи  $\mathbf{D}_1$  плотность определим из ГИУ

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} K_y(x, y) \psi(y) ds(y) = -2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.17)$$

В случае внешней задачи  $\mathbf{D}_2$  имеем уравнение

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} K_y(x, y) \psi(y) ds(y) = 2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.18)$$

Ядро граничных уравнений (2.17)-(2.18) можно записать в виде

$$K_y(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}(y) = \frac{e^{ik|x-y|}(ik|x-y| - 1)}{4\pi|x-y|^3}(y-x, \mathbf{n}(y)). \quad (2.19)$$

Решение задач  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$  представим в виде потенциала (2.7). Для внутренней задачи  $\mathbf{N}_1$  получим ГИУ

$$\eta(x) + 2 \int_{\Gamma} K_x(x, y)\eta(y)ds(y) = 2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.20)$$

Для внешней задачи  $\mathbf{N}_2$  ГИУ имеет вид

$$\eta(x) - 2 \int_{\Gamma} K_x(x, y)\eta(y)ds(y) = -2g(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.21)$$

Ядро  $K_x(x, y)$  имеет вид

$$K_x(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{e^{ik|x-y|}(ik|x-y| - 1)}{4\pi|x-y|^3}(x-y, \mathbf{n}(y)). \quad (2.22)$$

### 3. Решение слабосингулярного интегрального уравнения Фредгольма

Полученные ранее граничные уравнения представляют собой интегральные уравнения Фредгольма второго рода с ядрами, имеющими особенность при  $x = y$ . В книге [2] показано, что при выполнении условия (2.5) для поверхности  $\Gamma$  для ядер  $K_x^0(x, y)$ ,  $K_y^0(x, y)$ ,  $K_x(x, y)$ ,  $K_y(x, y)$  верна оценка

$$|K(x, y)| \leq \frac{M_2}{|x-y|^{2-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это означает, что указанные ядра содержат слабую особенность, а соответствующие им интегральные уравнения относятся к классу слабосингулярных.

Таким образом, абстрагируясь от конкретного вида ГИУ, теперь можно рассматривать интегральное уравнение со слабосингулярным ядром  $K(x, y)$ :

$$\psi(x) - \int_{\Gamma} K(x, y)\psi(y)ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3.1)$$

Для того, чтобы конкретизировать уравнение (3.1), поверхность  $\Gamma$  будем задавать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_2(\varphi_1, \varphi_2), \quad \varphi_1 \in [a_1, a_2], \varphi_2 \in [b_1, b_2] \\ x_3 = \alpha_3(\varphi_1, \varphi_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

Учитывая представление (3.2), можно записать касательные векторы к поверхности в точке с параметрическими координатами  $(\varphi, \theta)$

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi_1} = \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi_1} \right\}, \quad x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \varphi_2} = \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_2}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_2}, \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi_2} \right\}.$$

Единичную нормаль к  $\Gamma$  в точке  $x$  можно определить с помощью векторного произведения векторов  $x_{\varphi_1}$  и  $x_{\varphi_2}$ :

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(\varphi, \theta) = \frac{[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]}{\|[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]\|} = \frac{1}{\sqrt{g}}[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}] \quad (3.3)$$

где  $g = \|[x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}]\|^2$ . Элемент поверхности  $ds(x)$  в точке определится по формуле:

$$ds(x) = ds(\varphi_1, \varphi_2) = \|[x_{\varphi_1}d\varphi_1, x_{\varphi_2}d\varphi_2]\| = \sqrt{g}d\varphi_1d\varphi_2. \quad (3.4)$$

Используя формулы (3.3) и (3.4), от поверхностного интеграла в (3.1) удобно перейти к двойному интегралу по прямоугольной области  $D : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ .

$$\psi(x(\varphi_1, \varphi_2)) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} K(x(\varphi_1, \varphi_2), y(\theta_1, \theta_2))\psi(y(\theta_1, \theta_2))d\theta_1d\theta_2 = f(x(\varphi_1, \varphi_2)) \quad (3.5)$$

С целью сокращения записи, уравнение (3.5) перепишем в виде

$$\gamma(\varphi_1, \varphi_2) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} H(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2)\gamma(\theta_1, \theta_2)d\theta_1d\theta_2 = \beta(\varphi_1, \varphi_2), \quad (3.6)$$

где введены следующие обозначения:  $\gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \psi(x(\varphi_1, \varphi_2))$ ,  $H(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) = K(x(\varphi_1, \varphi_2), y(\theta_1, \theta_2))$ ,  $\beta(\varphi_1, \varphi_2) = f(x(\varphi_1, \varphi_2))$ .

Построим численный метод для решения слабосингулярного уравнения (3.6) на основе сплайн-коллокации. Неизвестное решение  $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$  аппроксимируем с помощью сплайна  $T(\varphi_1, \varphi_2)$ . Для этого область  $D$  разобьем на  $N_1 \times N_2$  подобластей  $\Delta_{ij}$

$$\Delta_{ij} = \{d_1^i \leq \varphi_1 \leq d_1^{i+1}; d_2^j \leq \varphi_2 \leq d_2^{j+1}\}$$

$$d_1^i = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1}i, \quad i = \overline{0, N_1}$$

$$d_2^j = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2}j, \quad j = \overline{0, N_2}$$

В каждой из областей  $\Delta_{ij}$  аппроксимируем функцию  $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$  интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ , который построим по узлам  $\varphi_{ij}^{kp} \in \Delta_{ij}$ ,  $k, p = \overline{1, R}$ . В качестве узлов будем использовать систему из  $R \times R$  узлов Гаусса-Лежандра  $\xi^k$ ,  $k = \overline{1, R}$ , которые мы спроецируем в каждую из областей  $\Delta_{ij}$ , тогда сетка узлов определится следующим образом:

$$\varphi_{ij}^{kp} = (\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \left\{ \frac{d_1^i - d_1^{i-1}}{2}\xi^k + \frac{d_1^i + d_1^{i-1}}{2}; \frac{d_2^j - d_2^{j-1}}{2}\xi^p + \frac{d_2^j + d_2^{j-1}}{2} \right\} \quad (3.7)$$

$$i = \overline{1, N_1}; j = \overline{1, N_2}; k, p = \overline{1, R}$$

Полином Лагранжа, аппроксимирующий решение в области  $\Delta_{ij}$  записывается в виде

$$L_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=1}^R \sum_{p=1}^R \gamma_{ij}^{kp} \Psi_k^1(\varphi_1) \Psi_p^2(\varphi_2) \quad (3.8)$$

где  $\gamma_{ij}^{kp} = \gamma(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$  — неизвестные коэффициенты полинома;  $\Psi_k^1$  — фундаментальный полином, построенный по узлам  $\varphi_{ik}^1$ ;  $\Psi_p^2$  — фундаментальный полином, построенный по узлам  $\varphi_{jp}^2$ :

$$\Psi_k^1(x_1) = \prod_{l=1, l \neq k}^R \frac{\varphi_1 - \varphi_{il}^1}{\varphi_{ik}^1 - \varphi_{il}^1}; \quad \Psi_p^2(x_2) = \prod_{l=1, l \neq k}^R \frac{\varphi_2 - \varphi_{jl}^2}{\varphi_{jp}^2 - \varphi_{jl}^2}$$

В исходное уравнение (3.6) вместо функции  $\gamma(\varphi_1, \varphi_2)$  подставим сплайн  $T(\varphi_1, \varphi_2)$  и приравняем левую и правую часть уравнения в узлах  $(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$ , получим

$$T(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) T(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \beta(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2).$$

Интеграл представим в виде суммы интегралов по областям  $\Delta_{ij}$  и, учитывая что  $T(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = L_{ij}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \gamma_{ij}^{kp}$ , перепишем предыдущее соотношение в виде:

$$\gamma_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) L_{qs}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \beta_{ij}^{kp}, \quad (3.9)$$

где  $\beta_{ij}^{kp} = \beta(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$ . Подставим выражение для интерполяционного полинома (3.8) в (3.9) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\gamma_{ij}^{kp} - \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \sum_{t=1}^R \sum_{u=1}^R \gamma_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \beta_{ij}^{kp}; \quad k, p = \overline{1, R}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2} \quad (3.10)$$

где коэффициенты  $I_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2)$  выпишем отдельно

$$I_{qs}^{tu}(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2) = \int_{d_1^{q-1}}^{d_1^q} \int_{d_2^{s-1}}^{d_2^s} H(\varphi_{ik}^1, \varphi_{jp}^2, \theta_1, \theta_2) \Psi_t^1(\theta_1) \Psi_u^2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.11)$$

Выражение (3.10) представляет собой систему линейных уравнений размера  $N_1 N_2 R^2$  относительно неизвестных коэффициентов  $\gamma_{ij}^{kp}$ .

Интеграл (3.11) является сингулярным, если  $q = i$  и  $s = j$ ; в этом случае для его аппроксимации используем специальную кубатурную формулу. Если  $q \neq i$  или  $s \neq j$ , то интеграл (3.11) не содержит особенностей и его можно аппроксимировать с помощью стандартной кубатурной формулы Гаусса.

### 3.1. Аппроксимация слабосингулярных интегралов

При построении численного метода для решения ГИУ возникает необходимость вычисления слабосингулярных интегралов вида

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (3.12)$$

заданных в некоторой прямоугольной области  $B = \{a_1 \leq \theta_1 \leq a_2; b_1 \leq \theta_2 \leq b_2\}$ , и имеющие особенность при  $(\varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2)$ . Построим кубатурную формулу, аппроксимирующую интегралы вида (3.12).

Для учета особенности построим специальную неравномерную сетку, сгущающуюся к точке  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Рассмотрим две сетки узлов вида:

$$s_k^1 = \varphi_1 - (\varphi_1 - a_1) \left( \frac{k}{M_1} \right)^v; \quad k = \overline{1, M_1}$$

$$s_k^2 = \varphi_1 + (a_2 - \varphi_1) \left( \frac{k}{M_2} \right)^v; \quad k = \overline{1, M_2}$$

Узлы  $s_k^1$  сгущаются к точке  $\varphi_1$  слева, а узлы  $s_k^2$  сгущаются к  $\varphi_1$  справа. Соединив узлы  $s_k^1$  и  $s_k^2$ , получим систему из  $M_1 + M_2$  узлов для переменной  $\theta_1$ :

$$\theta_1^k = \begin{cases} s_k^1; & k = \overline{1, M_1} \\ s_{k-M_1}^2; & k = \overline{M_1 + 1, M_1 + M_2}. \end{cases}$$

Для переменной  $\theta_2$  строим аналогичную систему узлов:

$$\theta_2^l = \begin{cases} s_l^3; & l = \overline{1, M_1} \\ s_{l-M_1}^4; & l = \overline{M_1 + 1, M_1 + M_2}, \end{cases}$$

где

$$s_l^3 = \varphi_2 - (\varphi_2 - b_1) \left( \frac{l}{M_1} \right)^v; \quad l = \overline{1, M_1}$$

$$s_l^4 = \varphi_2 + (b_2 - \varphi_2) \left( \frac{l}{M_2} \right)^v; \quad l = \overline{1, M_2}$$

Параметр  $v$  определяет степень сгущения сетки; его следует выбирать, исходя из гладкости функции  $F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2)$ . Теоретические оценки для  $v$  можно найти в работе [3].

Заметим, что если  $|\varphi_1 - a_1| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число, то систему узлов  $s_k^1$  строить нецелесообразно и данные узлы следует отбросить. С другой стороны, если  $|\varphi_1 - a_2| < \varepsilon$ , то нужно отбросить узлы  $s_k^2$ . Аналогично будем поступать и с узлами  $s_l^3$  и  $s_l^4$  по переменной  $\theta_2$ .

Построенная сетка узлов разбивает область  $B$  на прямоугольные подобласти  $B_{kl}$ .

$$B_{kl} = \{\theta_1^k \leq \theta_1 \leq \theta_1^{k+1}; \theta_2^l \leq \theta_2 \leq \theta_2^{l+1}\}, \quad k = \overline{1, M_1 + M_2 - 1}, l = \overline{1, M_1 + M_2 - 1}$$

При этом особая точка попадает только в одну область при  $k = l = M_1$ , а во всех остальных областях особенностей нет. Область, содержащую особенность, будем обозначать  $B^*$ .

Разобьем интеграл (3.12) на сумму интегралов по прямоугольникам  $B_{kl}$ :

$$\begin{aligned} \iint_B F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 &= \sum_{k,l} \iint_{B_{kl}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \sum_{k,l; k,l \neq M_1} \iint_{B_{kl}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + \iint_{B^*} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку особенность локализована в области  $B^*$ , в выражении (3.13) интеграл по области  $B^*$  записан отдельно от суммы. Для вычисления этого интеграла будем использовать формулу левых прямоугольников:

$$\iint_{B^*} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \approx (\theta_1^{k+1} - \theta_1^k)(\theta_2^{l+1} - \theta_2^l) F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1^k, \theta_2^l);$$

остальные интегралы, стоящие под знаком суммы, вычислим по квадратурной формуле Гаусса:

$$\iint_{B_{i,j}} F(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \approx \frac{\theta_1^i - \theta_1^{i-1}}{2} \frac{\theta_2^j - \theta_2^{j-1}}{2} \sum_{k=1}^Q \sum_{p=1}^Q g_k g_p F(\varphi_1, \varphi_2, \xi_1^k, \xi_2^p)$$

где  $Q$  — число узлов формулы Гаусса,  $g_k, g_p$  — весовые коэффициенты формулы,  $\xi_1^k, \xi_2^p$  — узлы Гаусса  $\xi_i$ , спроецированные на отрезки  $[s_{i-1}^1, s_i^1]$  и  $[s_{j-1}^2, s_j^2]$  соответственно:

$$\begin{aligned} \xi_1^k &= \frac{\theta_1^i + \theta_1^{i-1}}{2} + \frac{\theta_1^i - \theta_1^{i-1}}{2} \xi_k, & k = \overline{1, Q}, \\ \xi_2^p &= \frac{\theta_2^j + \theta_2^{j-1}}{2} + \frac{\theta_2^j - \theta_2^{j-1}}{2} \xi_p, & k = \overline{1, Q}. \end{aligned}$$

#### 4. Численные результаты

Для реализации численных методов решения краевых задач  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  было создано приложение на языке программирования C++ (стандарт C++11) с использованием компилятора GCC в операционной системе GNU/Linux.

Работу предложенного метода проиллюстрируем на следующих модельных задачах.

##### 4.1. Задача $\mathbf{D}_1$ для уравнения Лапласа на торе

Рассмотрим задачу  $\mathbf{D}_1$  для уравнения (2.2) на торе, заданном параметрически

$$\mathbf{T}(r_m, r_t) \equiv \begin{cases} x_1 = (r_m + r_t \cos(\varphi_1)) \cos(\varphi_2) \\ x_2 = (r_m + r_t \cos(\varphi_1)) \sin(\varphi_2) \\ x_3 = r_t \sin(\varphi_1) \end{cases}, \quad \varphi_1 \in [-\pi, \pi], \varphi_2 \in [0, 2\pi]. \quad (4.1)$$

где  $r_m$  — расстояние от центра образующей окружности до оси вращения, а  $r_t$  — радиус образующей окружности. Будем решать следующую задачу:

**Модельная задача:** решить задачу  $\mathbf{D}_1$  для уравнения (2.2) на торе  $\mathbf{T}(1, 0.5)$  с известным точным решением для контроля погрешности

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 - x_2} \cos(\sqrt{2} x_3) - 1.$$

Для того, чтобы оценить погрешность решения данной задачи требуется выбрать множество контрольных точек  $z_k$ , в которых будем вычислять приближенное решение. Мы решаем внутреннюю задачу  $\mathbf{D}_1$ , следовательно точки  $z_k$  должны быть расположены внутри тора  $\mathbf{T}$ .

Выберем некоторый параллелепипед  $\mathbf{P}_T$ , который вмещает тор  $\mathbf{T}$ . Затем сгенерируем массив случайных точек  $z_k^* \in \mathbf{P}_T$  и отбросим те точки, которые не попадают внутрь объема тора. Оставшиеся точки  $z_k^*$ ,  $k = \overline{1, N_c}$  веберем в качестве контрольных. Абсолютную погрешность приближенного решения будет оценивать по формуле

$$E_{abs} = \max_k |u(z_k^*) - u^*(z_k^*)|, \tag{4.2}$$

где  $u^*$  — приближенное решение, выражаемое потенциалом (2.8).

На графике 4.1 приведены зависимости абсолютной погрешности  $E_{abs}$  от числа полиномов  $N_1, N_2$  сплайна  $T(\varphi_1, \varphi_2)$  при различных фиксированных значениях числа узлов  $R$  в каждом из полиномов  $L_{ij}$ . Параметры квадратурных формул были выбраны следующим образом:  $M_1 = M_2 = 4, Q = 8, v = 4$ . Число контрольных точек  $N_c = 512$ .

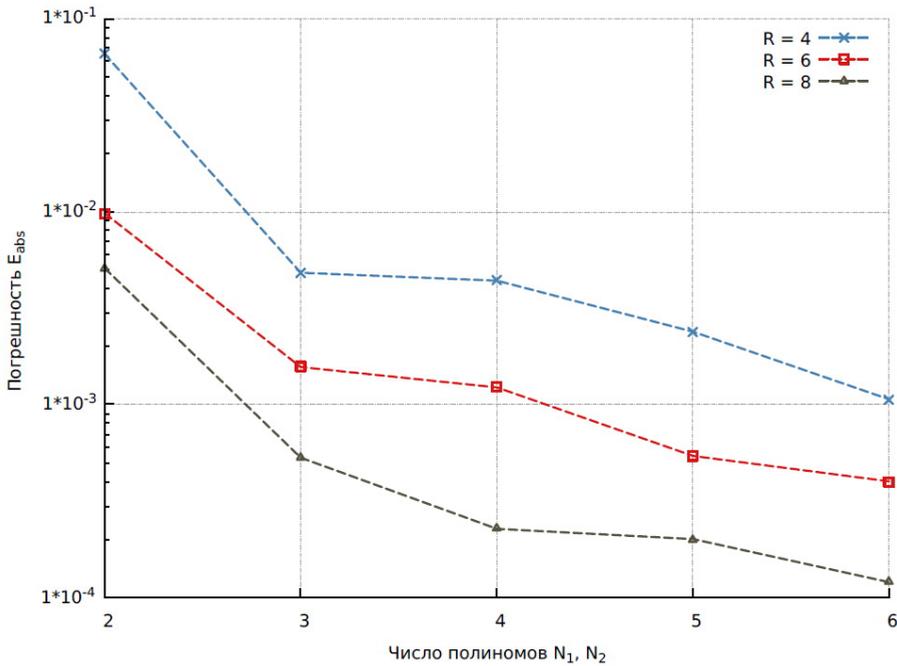


Рис. 4.1. Абсолютная погрешность решения задачи  $\mathbf{D}_1$  для уравнения Лапласа

#### 4.2. Задача $\mathbf{N}_2$ для уравнения Гельмгольца на эллипсоиде

Рассмотрим эллипсоид  $\mathbf{E}(a, b, c)$  с полуосями  $a, b, c$ :

$$\mathbf{E}(a, b, c) \equiv \begin{cases} x_1 = a \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \\ x_2 = b \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \\ x_3 = c \sin(\varphi_1) \end{cases}, \quad \varphi_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi_2 \in [0, 2\pi]. \tag{4.3}$$

Рассмотрим следующую задачу:

**Модельная задача:** решить задачу  $\mathbf{N}_2$  для уравнения (2.1) на эллипсоиде  $\mathbf{E}(0.5, 0.6, 0.8)$  с волновым числом  $k = 2i$  и известным точным решением

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{r^2(x)} e^{-2r(x)} \left( 1 + \frac{1}{2r(x)} \right), \quad r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

В данном случае мы решаем внешнюю задачу и контрольные точки  $z_k$  необходимо выбирать так, чтобы они располагались во внешней части пространства относительно поверхности  $\mathbf{E}$ . Для эллипсоида (4.3) точки  $z_k$  удобно выбрать следующим образом:  $z_k = (z_1^{i,j,k}, z_2^{i,j,k}, z_3^{i,j,k})$ , где

$$z_1^{i,j,k} = \rho_i a \cos(\varphi_{1,j}) \cos(\varphi_{2,k})$$

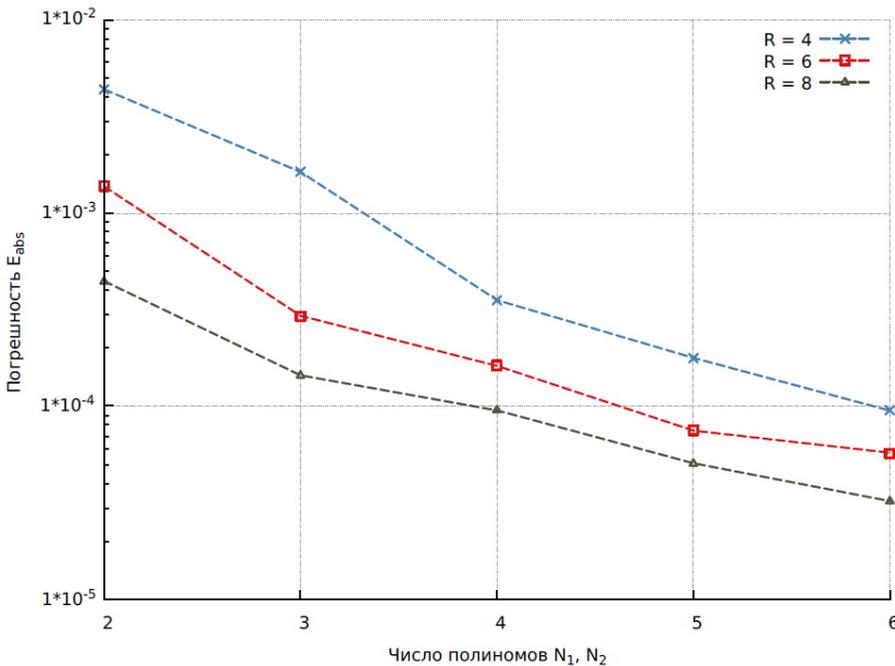
$$z_2^{i,j,k} = \rho_i b \cos(\varphi_{1,j}) \sin(\varphi_{2,k})$$

$$z_3^{i,j,k} = \rho_i c \sin(\varphi_{1,j})$$

$$\rho_i = 1 + \frac{i+1}{M+1}, \quad i = \overline{1, M}; \quad \varphi_{1,j} = -\frac{\pi}{2} + j \frac{\pi}{N}, \quad j = \overline{0, N-1}; \quad \varphi_{2,k} = \frac{2k\pi}{K}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

При этом точки  $z_k$  будут попадать вне эллипсоида  $\mathbf{E}$  и будут лежать на охватывающих эллипсоидах, расходящихся от  $\mathbf{E}$ .

Зависимость погрешности  $E_{abs}$  от значений  $N_1, N_2$  приведена на графике 4.2. Параметры численного метода выбирались так же, как и в предыдущей задаче.



**Рис. 4.2.** Абсолютная погрешность решения задачи  $\mathbf{N}_2$  для уравнения Гельмгольца

## 5. Заключение

Предложенный выше метод сплайн-коллокаций может быть применен для решения широкого класса эллиптических краевых задач. В настоящей работе рассматривались только граничные задачи Дирихле и Неймана, однако слабосингулярные ГИУ можно получить и для смешанной задачи. Такие уравнения рассматривались в работе [6]. Кроме того, отметим, что метод граничных интегральных уравнений можно применять к неоднородным эллиптическим уравнениям. Например, ГИУ для уравнения Пуассона рассмотрены в работе [7]. Реализация сплайн-коллокационных методов для решения смешанных задач и задач для уравнения Пуассона представляет интерес для дальнейших исследований.

Основываясь на результатах данной работы, можно сказать, что численный метод сходится на модельных задачах и обеспечивает неплохую точность решения. Стоит отметить недостаток метода: предложенный способ аппроксимации слабосингулярных интегралов требует построения сильно сгущающихся сеток с большими значениями параметра  $\nu$ . На практике реализация таких сеток на ЭВМ может привести к возникновению ошибок округления, связанных с возникновением очень больших и очень маленьких чисел в ходе вычислений. Одним из подходов, позволяющим преодолеть такие технические ограничения, является использование математических пакетов с алгоритмами высокоточной арифметики для представления мантисс чисел с плавающей точкой произвольной разрядности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. — 512 с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: пер. с англ. Москва: Мир, 1987. — 311 с.
3. Tynda A., Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2008. Vol. 10, No. 2. pp. 68-78.
4. Захаров Е. В., Калинин А. В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1197-1206.
5. Каширин А. А., Смагин С. И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1492–1505.
6. Халилов Э. Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, 7. С. 1340–1348.
7. Kublik C., Tanushev N., Tsai R. An implicit interface boundary integral method for Poisson's equation on arbitrary domains // Journal of Computational Physics. 2013. Vol. 247. pp. 279–311.

*Поступила 8.07.2020*

MSC2020 65R20, 35J25, 47G40

# Application of boundary integral equation method to numerical solution of elliptic boundary-value problems in $\mathbb{R}^3$

© A. N. Tynda<sup>1</sup>, K. A. Timoshenkov<sup>2</sup>

**Abstract.** In this paper we propose numerical methods for solving interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz and Laplace equations in complex three-dimensional domains. The method is based on their reduction to boundary integral equations in  $\mathbb{R}^2$ . Using the potentials of the simple and double layers, we obtain boundary integral equations of the Fredholm type with respect to unknown density for Dirichlet and Neumann boundary value problems. As a result of applying integral equations along the boundary of the domain, the dimension of problems is reduced by one. In order to approximate solutions of the obtained weakly singular Fredholm integral equations we suggest general numerical method based on spline approximation of solutions and on the use of adaptive cubatures that take into account the singularities of the kernels. When constructing cubature formulas, essentially non-uniform graded meshes are constructed with grading exponent that depends on the smoothness of the input data. The effectiveness of the method is illustrated with some numerical experiments.

**Key Words:** elliptic boundary-value problems, weakly singular Fredholm integral equations, spline-collocation method, nonuniform meshes, approximation of integrals

## REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russ.).
2. D. Colton, R. Cress, *Integral equation methods in scattering theory*, A Wiley Interscience Publ., New-York, 1983.
3. A. Tynda, “Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **10:2** (2008), 68–78.
4. E. V. Zakharov, A. V. Kalinin, “Method of boundary integral equations as applied to the numerical solution of the three-dimensional Dirichlet problem for the laplace equation in a piecewise homogeneous medium”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **49:7** (2009), 1141–1150.
5. A. A. Kashirin, S. I. Smagin, “Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52:8** (2012), 1173–1185.
6. E. H. Khalilov, “Justification of the collocation method for the integral equation for a mixed boundary value problem for the Helmholtz equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56:7** (2016), 1310–1318.

<sup>1</sup>Aleksandr N. Tynda, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

<sup>2</sup>Konstantin A. Timoshenkov, MSc student, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), timoshenkov.ka@yandex.ru

7. C. Kublik, N. Tanushev, R. Tsai, “An implicit interface boundary integral method for Poisson’s equation on arbitrary domains”, *Journal of Computational Physics*, **247** (2013), 279–311.

*Submitted 8.07.2020*

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.333-351

УДК 519.6

**Моделирование акустических полей при обтекании тел потоком газа**© А. Р. Багапов<sup>1</sup>, Р. В. Жалнин<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье описывается моделирование акустического поля на основе анализа колебаний давления. Для этого реализуется математическая модель, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии в двумерной постановке. Для расчётов используются схема HLLC решения задачи о распаде произвольного разрыва и WENO-схема реконструкции газодинамических параметров на границах между ячейками. Для моделирования акустического поля была выбрана усреднённая по времени характеристика – общий уровень звукового давления (OASPL). В работе рассматривается акустическое поле получаемое при обтекании газом одиночного квадратного тела, каскада квадратных тел, ступеньки и каверны, даётся интерпретация происходящих процессов. Результатом исследования является визуализация и описание явлений, возникающих при обтекании тел потоком газа, а также изучение влияния удаления точки наблюдения на акустические эффекты в пределах моделируемой области.

**Ключевые слова:** газовая динамика, HLLC, WENO, акустическое поле, акустический шум, OASPL

**1. Введение**

В настоящее время методы математического моделирования повсеместно внедряются в производство, численный расчёт становится мощным способом повысить надёжность и точность инженерных исследований [1]. В частности, одной из сфер, в которых широко применяются численные методы моделирования, является авиация. Расчёт и анализ аэродинамических и акустических параметров воздушных судов является актуальной задачей на сегодняшний день.

Расчёт данных параметров однозначно приводит к необходимости численного решения уравнений газовой динамики [2]. При решении практических задач зачастую приходится сталкиваться с газодинамическими течениями, характеризующимися нестационарностью, нелинейностью происходящих процессов, разнохарактерным и сложным механизмом взаимодействия, для моделирования которых необходимо использовать численные методы повышенного порядка точности [3], чтобы получить максимально близкие к реальным результатам.

<sup>1</sup>**Багапов Ариф Ренатович**, магистрант факультета математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7975-6019>, [bagarov99@mail.ru](mailto:bagarov99@mail.ru)

<sup>2</sup>**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

В данной работе рассматривается задача моделирования акустических полей при обтекании тел потоком газа. Для решения задачи использовался интегро-интерполяционный метод с WENO-реконструкцией газодинамических параметров на границах ячеек [4], а при вычислении дискретных потоков использовался метод HLLC [5].

## 2. Математическая модель и вычислительный алгоритм

В работе рассматривается модель идеального, нетеплопроводящего, невязкого газа. Математическая модель изучаемых в работе процессов представляет собой законы сохранения массы, импульса и энергии [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}(e + p)) = 0.$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа,  $p$  – давление,  $\mathbf{v} = \{u, v\}$  – вектор скорости,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия на единицу массы,  $e = \rho \left( \varepsilon + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right)$  – полная энергия,  $T$  – температура газа,  $\mathbf{\Pi} = \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}$  – тензор плотности потока импульса ( $\mathbf{I}$  – единичный тензор). В качестве уравнения состояния принимается уравнение состояния идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma$ :

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho. \quad (2.1)$$

Отсюда получаем, что в векторной форме система уравнений (2.1) приобретает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^{(1)}U}{\partial x} + \frac{\partial F^{(2)}U}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

При рассмотрении конкретной модели также необходимо задать начальные и граничные условия для полного описания решаемой задачи.

Для построения дискретной модели область непрерывного изменения аргумента накроем сеткой, равномерной по каждому направлению:

$$\omega_{\Delta} = \omega_{\Delta_x} \times \omega_{\Delta_y},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta_x} &= \{\Delta_i, i = 1, \dots, N_x, \Delta_i = x_i - x_{i-1}, |\Delta_i| = h_x, h_x N_x = L_x\}, \\ \omega_{\Delta_y} &= \{\Delta_j, j = 1, \dots, N_y, \Delta_j = y_j - y_{j-1}, |\Delta_j| = h_y, h_y N_y = L_y\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $L_x, L_y$  – размеры исследуемой области по соответствующим направлениям. Все газодинамические функции будем задавать как средние значения в ячейках сетки.

Для аппроксимации системы (2.2) использовалась нелинейная консервативная квазимонотонная дифференциально-разностная схема [3]:

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{H_{i+\frac{1}{2}j}^{(1)} - H_{i-\frac{1}{2}j}^{(1)}}{h_x} + \frac{H_{ij+\frac{1}{2}}^{(2)} - H_{ij-\frac{1}{2}}^{(2)}}{h_y} = 0, \quad (2.5)$$

где  $H_{i+\frac{1}{2}j}^{(1)} = H^{(1)}(U_{i+\frac{1}{2}j}^L, U_{i+\frac{1}{2}j}^R)$ ,  $H_{ij+\frac{1}{2}}^{(2)} = H^{(2)}(U_{ij+\frac{1}{2}}^L, U_{ij+\frac{1}{2}}^R)$  - дискретные потоки, для которых должны выполняться условия согласования:

$$\begin{aligned} H^{(1)}(U_{ij}, U_{ij}) &= F^{(1)}(U_{ij}), \\ H^{(2)}(U_{ij}, U_{ij}) &= F^{(2)}(U_{ij}). \end{aligned}$$

Здесь  $U_{i+\frac{1}{2}j}^L, U_{i+\frac{1}{2}j}^R$  - значения вектора консервативных переменных слева и справа от границы между ячейками с индексами  $(i, j)$  и  $(i+1, j)$  соответственно, на которой вычисляется поток. Для вычисления этих значений слева и справа использовалась WENO-схема, обеспечивающая пятый порядок точности в области, где сохраняется гладкость решения [4; 6; 7].

Для вычисления дискретных потоков использовалась схема HLLC [5].

Запишем дифференциально-разностную схему (2.5) в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(U). \quad (2.6)$$

Для дискретизации по времени уравнения (2.6) использовалась TVD-схема Рунге-Кутты третьего порядка [7]:

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t \cdot L(U^n), \\ U^{**} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^* + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L(U^*), \\ U^{***} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \Delta t \cdot L(U^{**}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 3. Расчёт акустических характеристик

Описанные выше схемы и подходы позволяют проводить моделирование течения газа около некоего объекта и, таким образом, получать плоскостно-временное распределение газодинамических переменных. В рамках данного исследования наибольший интерес представляет давление и его пульсации, именно они и позволяют определить акустическое поле, как в ближней окрестности объекта, так и в любой точке моделируемой области.

Одной из наиболее важных характеристик акустического поля является зависимость общего уровня звукового давления (Overall Sound Pressure Level – OASPL) от направления на точку наблюдения [8].

Введём дискретную сетку для времени:

$$\omega_{\Delta t} = \{ \Delta_k, k = 1, \dots, N_t, \Delta_k = t_k - t_{k-1}, |\Delta_k| = \Delta_t, \Delta_t N_t = T \}, \quad (3.1)$$

здесь  $[0, T]$  – промежуток времени, на котором проводится исследование. Отсюда, пульсации давления  $p'(R, t)$  в точке  $R$  для каждого момента времени находятся по формуле:

$$p'(R, t_k) = p(t_k) - p(t_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N_t. \quad (3.2)$$

Аналогичную операцию повторим для некоторого количества точек, равномерно расположенных вокруг исследуемого объекта на равном расстоянии от его центра, чтобы в дальнейшем получить диаграмму направленности общего уровня звукового давления. Увеличение количества точек для рассмотрения сделает диаграмму более подробной, но вместе с этим увеличится и время расчёта необходимых параметров.

Полученный акустический сигнал (последовательность пульсаций давления) для каждой исследуемой точки подвергается дальнейшему анализу для получения интересующих акустических характеристик. Одной из наиболее показательных характеристик является общий уровень пульсаций давления, измеряемый в децибелах. Данный показатель определяется по следующей формуле [9]:

$$OASPL(R) = 10 \log_{10} \left( \frac{\langle p'(R)^2 \rangle}{p_0^2} \right), \quad (3.3)$$

где  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па – минимальный порог слышимости звука,  $\langle p'(R)^2 \rangle$  – среднее значение квадрата колебаний давления в точке  $R$ , вычисляемое по формуле:

$$\langle p'(R)^2 \rangle = \frac{\sum_{k=0}^{N_t} p_k'^2}{N_t}. \quad (3.4)$$

С точки зрения инженерных разработок наиболее полезным представлением о картине общего уровня звукового давления является азимутальная диаграмма направленности – график в полярных координатах, на котором отражена зависимость общего уровня звукового давления в некоторой плоскости для некоторого диапазона значений азимутального угла. Как правило, значения угла берутся либо от 0 до  $\pi$ , либо от 0 до  $2\pi$ . В данной работе исследуется двумерный случай, поэтому выбор плоскости представления ограничен одной.

В то время, как аэродинамические характеристики потока могут быть достаточно точно вычислены и на маломасштабной модели, расчёт акустического поля требуется проводить на области, по размерам соответствующей экспериментальному объекту. Естественно, что для таких действий потребуется большое количество ресурсов и времени, из-за чего в реальности они оказываются практически невыполнимы. Поэтому для расчёта общего уровня звукового давления, создаваемого при обтекании «квазидвумерных» тел, рассчитанного на основе аэродинамических характеристик, полученных для области размером значительно меньшей, чем реальные размеры объекта, в работах [10; 11; 12] предложены некоторые поправки.

Используемая в данном исследовании поправка исходит из допущения, что акустические колебания от участков объекта длины  $l$ , на которые может быть разбит реальный объект, являются некоррелированными между собой. Отсюда следует, что суммарный спектральный уровень звуковых колебаний равен сумме колебаний на отдельных участках длины  $l$ , то есть искомая поправка определяется формулой:

$$\Delta(\text{дБ}) = 10 \lg(N), \quad (3.5)$$

где  $\Delta(\text{дБ})$  – величина поправки в децибелах,

$$N = \frac{l_{exp}}{l},$$

где  $l_{exp}$  – размер тела в эксперименте [10].

Например, для реального кубического тела со стороной  $l_{exp} = 0.1$  м, которое в расчётах представлено моделью со стороной  $l = 0.001$  м искомая поправка будет равна

$$\Delta(\text{дБ}) = 10 \lg(N) = 10 \lg\left(\frac{0.1}{0.001}\right) = 20 \text{дБ}.$$

Существуют и более точные поправки, но они в данной работе не описываются из-за относительной трудности расчёта при использовании описанного выше метода анализа.

## 4. Моделирование акустических полей при обтекании различных тел

### 4.1. Моделирование обтекания квадратного блока

Рассмотрим базовый пример обтекания одного блока квадратной формы. Для моделирования данного процесса и всех следующих были выбраны следующие параметры:

- размеры моделируемой области:  $1,78D \times 6,5D$ , где  $D$  – некоторый множитель для масштабирования, равный для данной модели  $0,05$  м. На данной области вводится сетка размерами  $89 \times 325$ ;
- газодинамические параметры:
  - начальное состояние области:
    - $\rho = 1,20 \text{ кг/м}^3$ ;
    - $(u; v) = (0; 0) \text{ м/с}$ ;
    - $p = 101325 \text{ Па}$ ;
  - параметры втекающего газа:
    - $\rho = 1,65 \text{ кг/м}^3$ ;
    - $(u; v) = (0; 114,4) \text{ м/с}$ ;
    - $p = 158900 \text{ Па}$ ;
- шаг по времени:  $\tau = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ ;
- размеры объекта в примере:  $10 \times 10$  ячеек сетки, что соответствует  $0,2D \times 0,2D$  (сторона равна  $0,01$  м).

Так как сравнения с реальным проведённым экспериментом в работе не проводится, то невозможно внести корректную поправку в соответствии с формулой (3.5). Поэтому, считая, что размер экспериментального тела соответствует размеру моделируемого, поправку вносить не следует. Отдельные этапы протекания процесса показаны на рисунке 4.1.

В момент  $t \approx 0,0029$  с, как видно на рисунке 4.1б, происходит смещение области пониженного давления, которая до этого момента была симметричной (рисунок 4.1а). Это приводит к образованию так называемой вихревой дорожки (дорожки Кармана), которая видна на рисунке 4.1в. Более явно её можно наблюдать на рисунке 4.2, где показано поле плотности исследуемой области.

Опытным путём было выяснено, что для данной модели оптимальным выбором являются 12 точек исследования, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Также, для исследования влияния дальности расположения точки от объекта на уровень звуковых колебаний, было проведено несколько вариантов расчётов, в которых точки располагались на расстоянии  $0,3D$ ,  $0,5D$  и  $0,8D$  от центра объекта (рисунок 4.3).

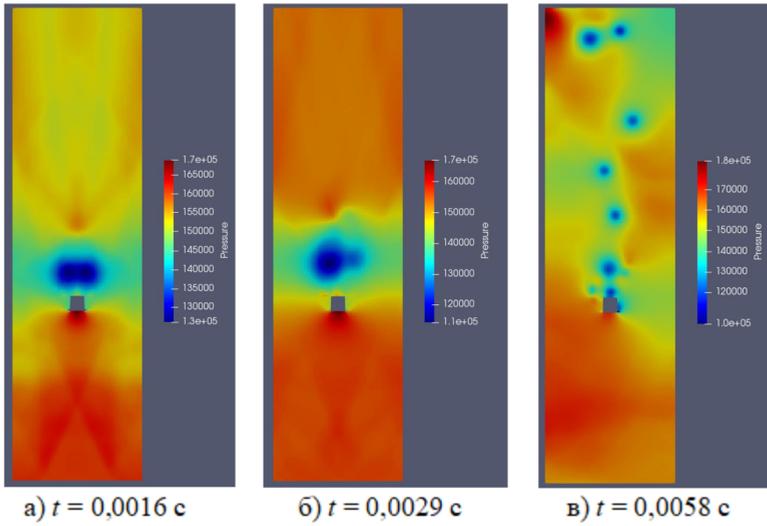


Рис. 4.1. Поле распределения давления

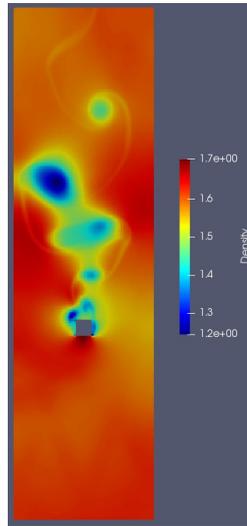


Рис. 4.2. Поле распределения плотности

В итоге были получены данные, представленные в таблице 4.1, а также в виде азимутальной диаграммы направленности на рисунке 4.4.

По приведённым в таблице и на диаграмме данным можно сделать вывод, что исследование на близком расстоянии более информативно, так как оно показывает уменьшение общего уровня шума за объектом, как следствие появления там области пониженного давления без последующих колебаний (до образования завихрений).

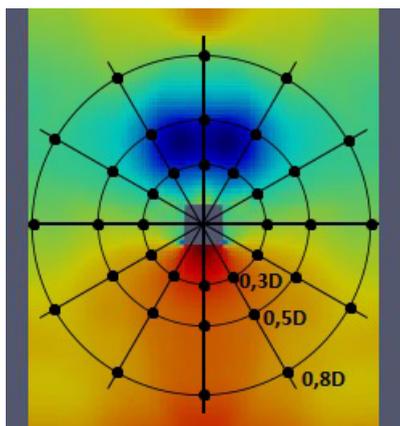


Рис. 4.3. Расположение точек исследования

Таблица 4.1. Общий уровень звукового давления

Азимут	Расстояние до центра объекта		
	0.3D	0.5D	0.8D
180	119.810	127.925	130.127
150	129.896	130.693	131.446
120	130.557	130.000	131.741
90	130.915	130.624	130.416
60	131.690	130.859	130.219
30	132.451	131.741	131.228
0	132.568	132.230	131.803
330	131.738	132.494	132.449
300	130.800	132.527	132.391
270	130.147	131.254	131.221
240	130.191	130.687	130.777
210	129.463	129.530	130.805

#### 4.2. Моделирование обтекания каскада из двух квадратных блоков

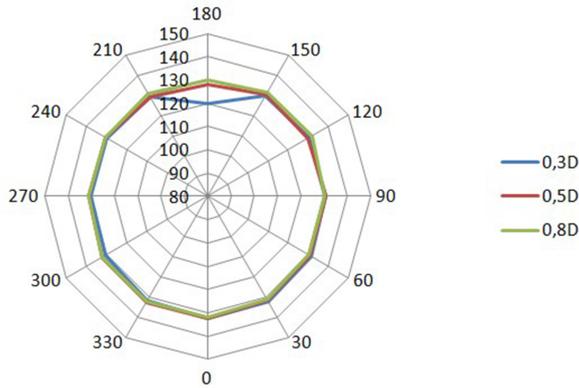
Также был выполнен анализ тех же параметров, для каскада из двух объектов размером  $0,2D \times 0,2D$ , находящихся на расстоянии  $0,3D$  друг от друга.

На рисунке 4.5 приведены отдельные моменты визуализации процесса.

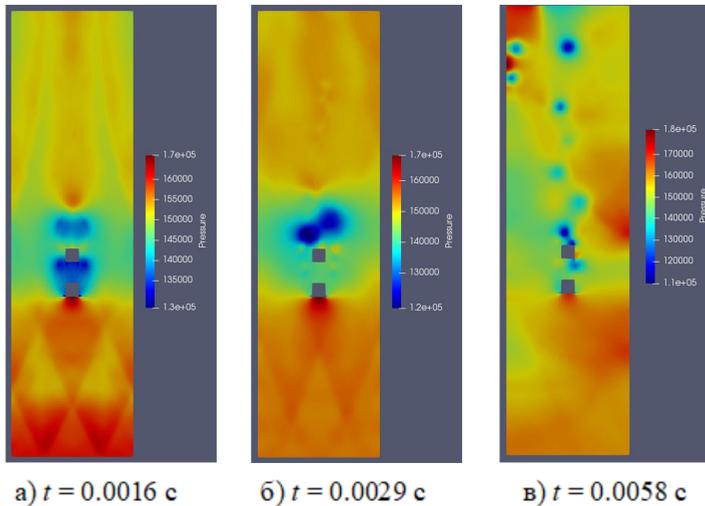
На начальном этапе две области пониженного давления симметричны относительно продольной оси пары объектов, периодически объединяются в одну. Однако за вторым объектом область гораздо меньше в силу того, что он находится в области действия так называемого «кармана» за первым объектом, следовательно, испытывает меньшие нагрузки со стороны среды.

Спустя время, как и в случае с одним объектом, наблюдались вихревые дорожки Кармана (подробнее показаны на рисунке 4.6).

Для расчёта акустического поля целесообразно использовать не окружность, а вытянутую фигуру, чтобы захватить оба объекта. Например, можно использовать эллипс,



**Рис. 4.4.** Азимутальная диаграмма направленности общего уровня звукового давления



**Рис. 4.5.** Поле распределения давления

фокусами которого являются центры объектов. Количество точек исследования было увеличено до 16.

На рисунке 4.8 представлена полученная для каскада кубов диаграмма направленности общего уровня шума (OASPL).

Как можно судить по диаграмме, минимальный уровень звуковых колебаний наблюдается сразу за вторым объектом, а также ближе к центру пространства между объектами, что обосновано наличием там областей низкого давления на протяжении всего времени. Заметим, что диаграмма не совсем симметрична: связано это с тем, что образование вихревых дорожек происходит преимущественно на правой стороне из-за чего в одних и тех же областях наблюдается как высокое, так и низкое давление, что в свою очередь делает картину менее информативной на больших промежутках времени, сглаживая средние значения. С левой же стороны ситуация более стабильна, а потому об уровне шума можно судить даже по расчётам приведённым выше.

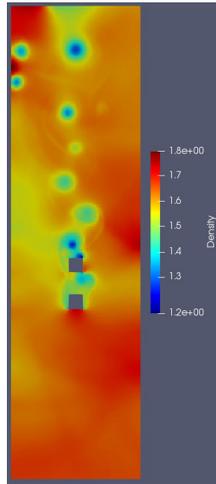


Рис. 4.6. Поле распределения плотности

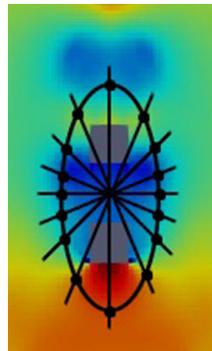


Рис. 4.7. Расположение точек исследования

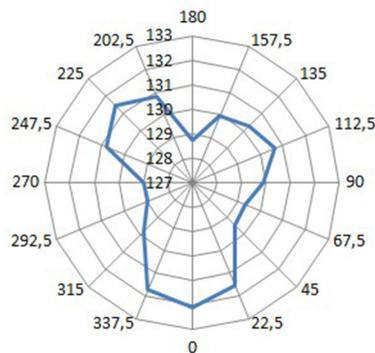
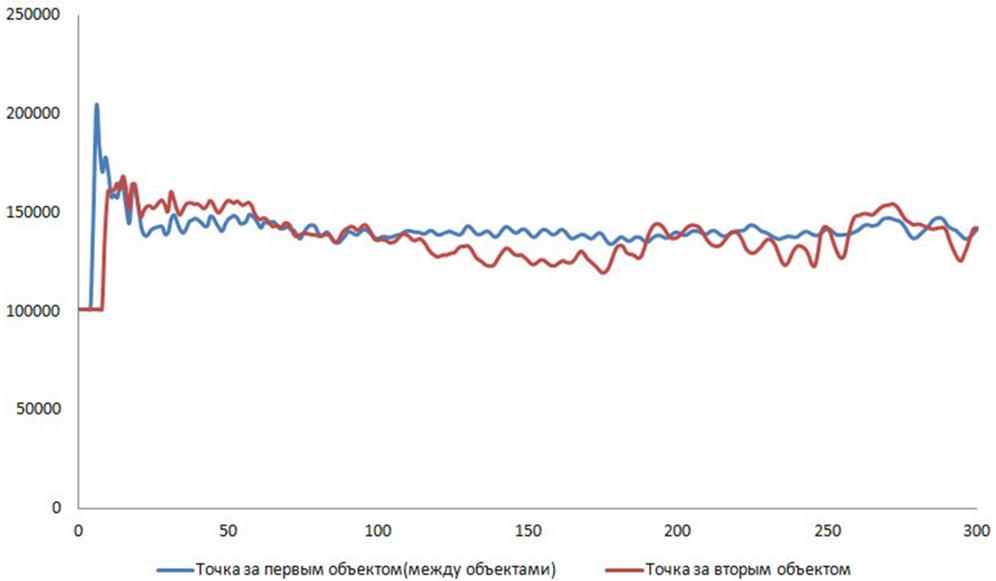


Рис. 4.8. Диаграмма направленности общего уровня шума

Отдельный интерес представляет сравнение графиков изменения давления за каждым из объектов, которое представлено на рисунке 4.9.



**Рис. 4.9.** Графики колебания давления

По этим графикам можно видеть, как в самом начале временного отрезка ударная волна гасится первым кубом и оказывает на второй меньшее давление. Далее видно, как до момента ( $t = 0,0003$  с) давление в обеих точках постепенно падает с незначительными колебаниями. После того, как происходит смещение области пониженного давления и образуются вихревые потоки, колебания давления за вторым блоком становятся сильнее, что обусловлено срывами с этого блока сильных вихрей. Говоря об этих процессах в терминах акустики, ударная волна повлечёт за собой повышение уровня шума до пика, далее он будет спадать в обеих областях. После появления завихрений колебания снова начнут вызывать повышение уровня шума, но на данном отрезке времени между блоками это будет заметно меньше, так как там сохраняется область низкого давления. Тем не менее, уровень шума незначительно повысится и в этой области, что и показывает увеличение колебаний в конце временного отрезка.

Расчёт общего уровня звуковых колебаний для точки между объектами дал значение 128,6 дБ — такая незначительная разница со значением для точки за вторым объектом (128,7 дБ), несмотря на меньшие колебания, обусловлен большим пиком в начале.

### 4.3. Моделирование обтекания ступеньки

Моделирование обтекания прямой ступеньки является одной из наиболее популярных модельных задач вычислительной газовой динамики. В том или ином виде эта базовая задача встречается во многих реальных проектах.

Высота подъёма ступеньки, которая была выбрана для модели, равна  $0,5D$ . Подъём находится на расстоянии  $2,4D$  от границы, через которую втекает газ. Обтекание подобных тел вызывает колебания давления и звуковые волны, как в ближнем, так и в дальнем поле, но в данной работе акцент сделан именно на моделирование ближнего поля.

На рисунке 4.10 представлены этапы развития течения.

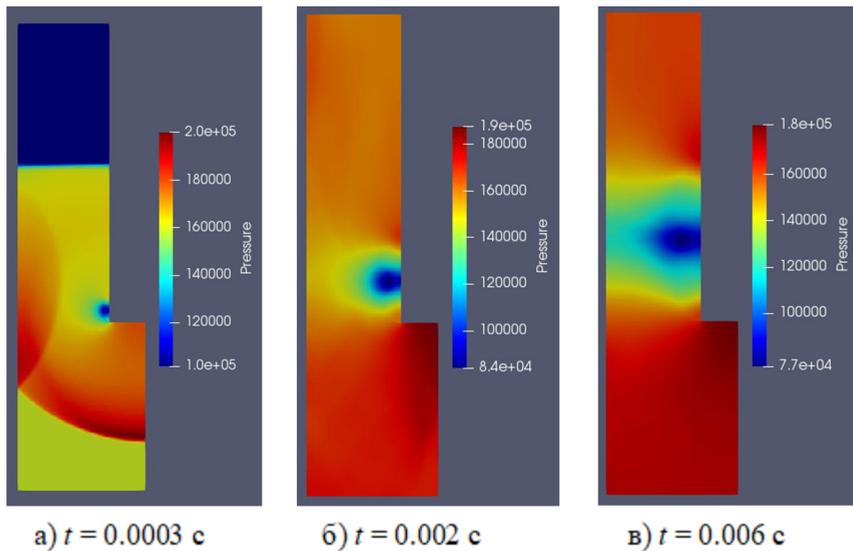


Рис. 4.10. Распределение поля давления

Точки исследования были установлены, как показано на рисунке 4.11. Это расположение обусловлено желанием рассчитать общий уровень шума в непосредственной близости к ступеньке.

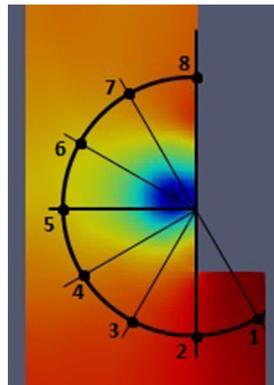
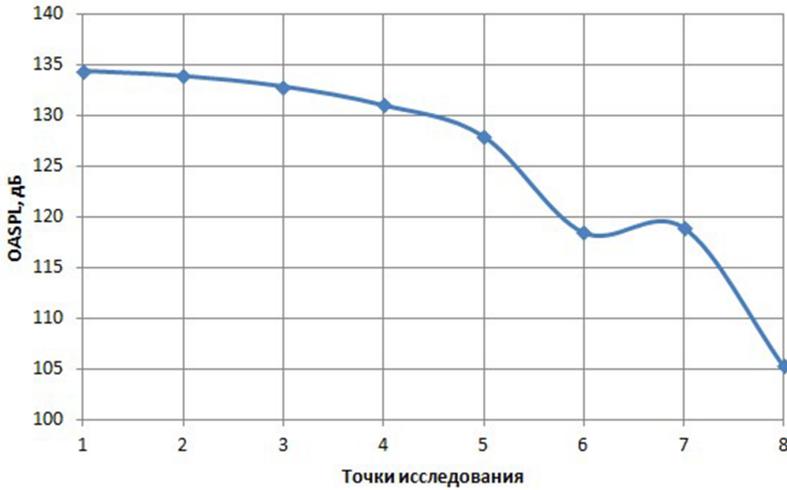


Рис. 4.11. Расположение точек исследования

На рисунке 4.12 представлен график зависимости общего уровня звукового давления от положения точки.

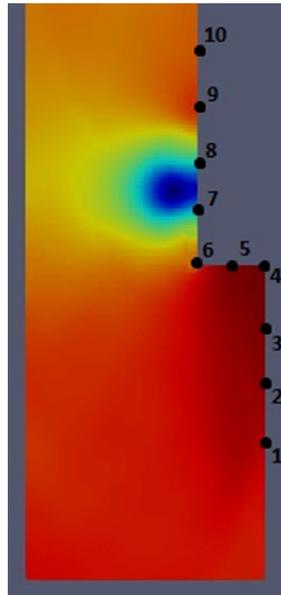
Ударная волна, пришедшая на ступеньку, вызвала колебания давления, что привело к большому уровню звукового давления. Низкий уровень шума в точке 8 объясняется тем, что возникшая на подъёме ступеньки область низкого давления постепенно увеличивалась и медленно двигалась в направлении потока. Также при контакте потока со ступенькой происходит отрыв, из-за которого основная часть потока проходит над поверхностью ступеньки, не касаясь её и не вызывая колебаний давления.

Продемонстрировать разницу уровней звукового давления до ступеньки, на подъёме и после него позволит расчёт акустического поля на поверхности правой стенки, а



**Рис. 4.12.** График зависимости общего уровня звукового давления от положения точки

также на подъёме ступеньки. Схема расположения точек показана на рисунке 4.13.



**Рис. 4.13.** Расположение точек исследования

В результате был получен график зависимости общего уровня звукового давления от расположения точки (рисунок 4.14), а также графики колебания давления в точках 1, 4, 6, 7 и 10 (рисунок 4.15).

Видно, что общий уровень звукового давления согласуется с графиком, полученным для ближнего поля около ступеньки, то есть он снижается по направлению потока после подъёма. Довольно резкое возрастание уровня шума в точке 10 показывает, что за

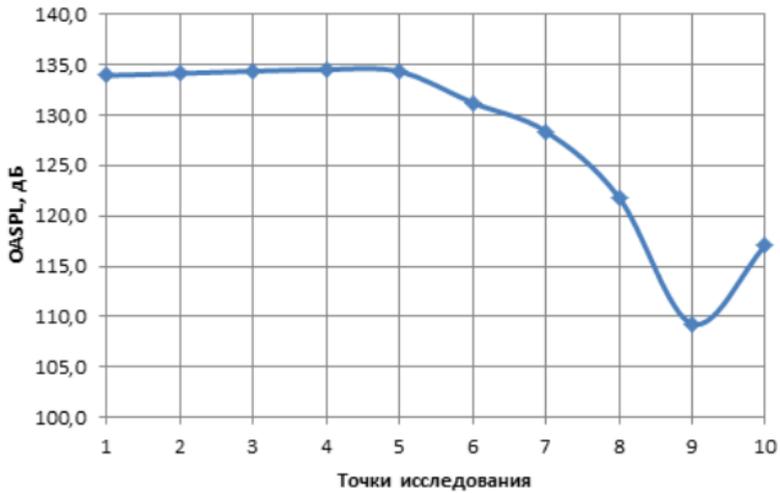


Рис. 4.14. График зависимости общего уровня звукового давления от положения точки

моделируемый отрезок времени в данной точке область высокого давления сменилась зоной низкого давления, в то время как точки 7, 8, 9 находились в более стабильной части, где давление в основном понижалось.

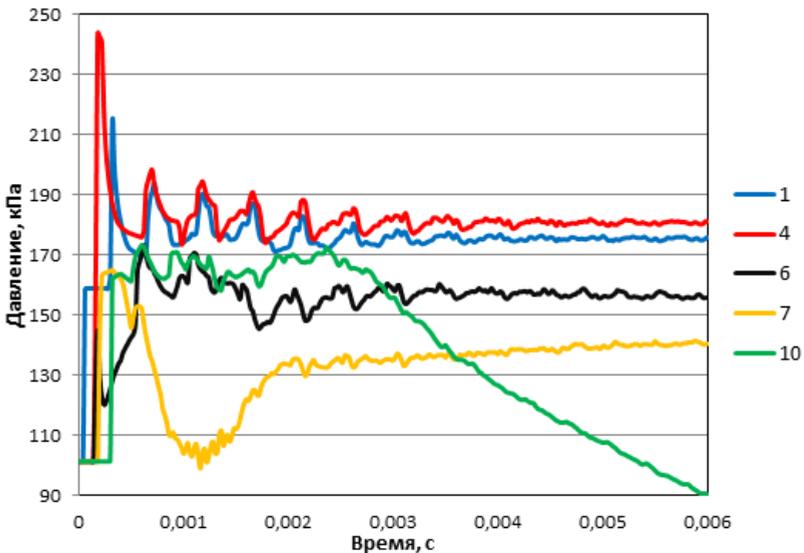


Рис. 4.15. Графики колебания давления

На рисунке 4.15 можно увидеть некоторые закономерности поведения давления в разных областях ступеньки. Области до подъёма ступеньки и после него характеризуются своего рода семействами графиков: можно увидеть, насколько похожи графики разных краёв одной зоны (1 и 4 и 7 и 10). Разница графиков заключается в следующем:

– до подъёма: в общем уровне и пиковом значении давления, форма колебаний же практически одинакова. Чем ближе точка к подъёму, тем выше в ней уровень давления. Это и объясняет постепенный пологий подъём общего уровня звуковых колебаний на рисунке 4.14;

– после подъёма: в размере так называемого «провала». Влияние на график в данной области оказывает расширяющаяся идвигающаяся область низкого давления. Чем дальше точка от края ступеньки, тем шире будет «провал». Точка 6 находится на выступе подъёма, именно там зарождается область низкого давления – это объясняет небольшой подъём и резкий «провал» графика в этой точке. Далее давление здесь возрастает и довольно сильно колеблется, что становится причиной высокого уровня акустического излучения. До точки 7 область низкого давления доходит спустя время и задерживается дольше, вызывая похожие эффекты. Точка 10 характеризуется начальным колебанием давления, но спустя время давление там лишь снижается, и этот процесс продолжается до завершения моделирования.

#### 4.4. Моделирование обтекания каверны

Нестационарное пульсирующее течение, возникающее при обтекании плоской каверны параллельным ей набегающим потоком интересно как с точки зрения аэродинамических нагрузок, так и сильного звукового излучения. Несмотря на простую геометрию области, в ней имеет место довольно сложное течение, включающее турбулентные слои, возвратно-циркуляционную зону, вихреобразование [13].

Размеры моделируемой каверны составляют  $0,5D \times 1D$ , её левый край находится на расстоянии  $2,4D$  от границы, через которую втекает газ.

На рисунке 4.16 представлен фрагмент визуализации модели. На данном фрагменте поток движется слева направо. Внутри каверны можно наблюдать систему волн давления.

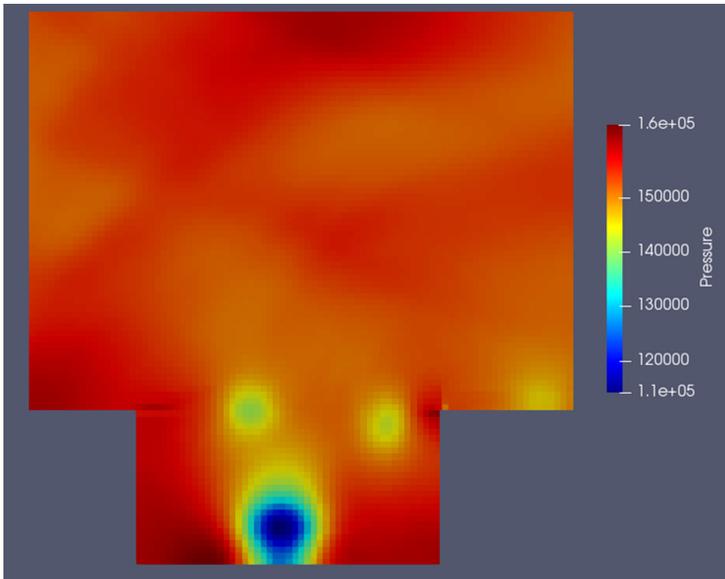
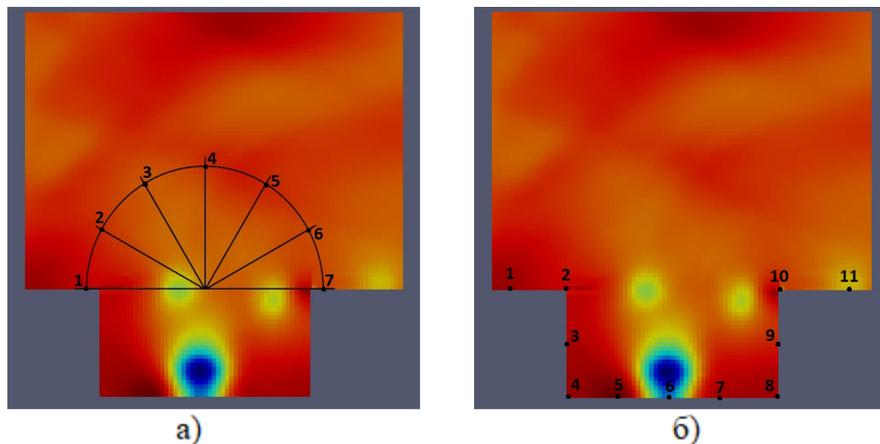


Рис. 4.16. Поле распределения давления

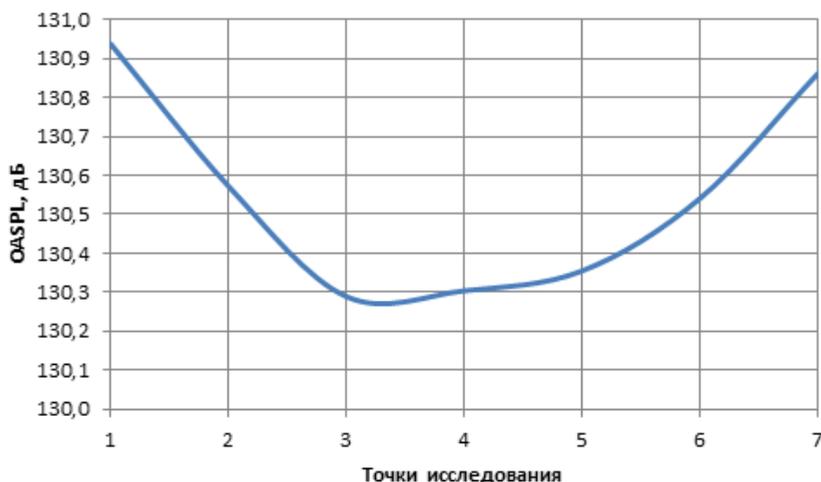
Как и в случае со ступенькой, для каверны проведены расчёты в ближнем поле

над ней и на поверхности: до передней стенке, на ней, на дне, на задней стенке и после неё. Расположения точек исследования в обоих случаях показаны на рисунке 4.17. Зона пониженного давления, находящаяся в глубине каверны, остаётся там на протяжении всего времени моделирования, вращаясь по часовой стрелке, что иллюстрирует создаваемые в каверне циркуляционные потоки.



**Рис. 4.17.** Расположение точек исследования

На полученном графике (рисунок 4.18) для точек над каверной видно, что общий уровень звукового давления в различных точках ближнего поля отличается не более чем на 0,7 дБ, что является пренебрежимо малой величиной по сравнению с абсолютными значениями. Следовательно, можно считать, в данной области акустическое поле однородно.



**Рис. 4.18.** График зависимости общего уровня звукового давления от положения точки

На рисунке 4.19, который показывает зависимость общего уровня звукового давле-

ния от положения точек на поверхности каверны, видно, как уровень звукового давления слегка поднимается, подходя к кромкам каверны. В промежутке между точками 2 и 10 можно наблюдать влияние на общий уровень звукового давления нелинейных эффектов, являющихся следствием раздваивающегося потока и циркуляционного движения внутри каверны. Самый высокий показатель звукового давления приходится на точку 8, так как именно в углу между правой стенкой и дном образуется зона повышенного давления из-за части потока идущей внутрь каверны.

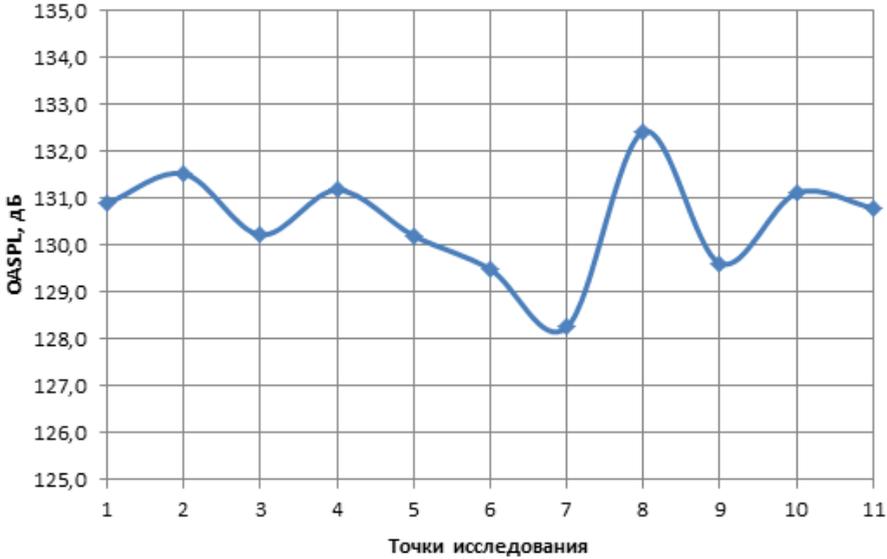


Рис. 4.19. График зависимости общего уровня звукового давления от положения точки

## 5. Заключение

Был разработан вычислительный алгоритм повышенного порядка точности для исследования акустических полей в двумерной постановке. Использовались схемы типа WENO для реконструкции газодинамических параметров с численными потоками HLLC. Преимуществом созданной программы является возможность простого изменения параметров течения газа, параметров среды, размера и положения обтекаемых объектов. Было проведено моделирование процесса обтекания и расчёт акустического поля для ряда модельных задач: квадратного блока, каскада из двух квадратных блоков, ступеньки и каверны. Для каждого объекта был выполнен анализ акустического поля на основе расчёта общего уровня звукового давления (OASPL).

*Благодарности.* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-41-130001).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козелков А. С., Курулин В. В., Лашкин С. В., Шагалиев Р. М., Ялозо А. В. Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного

- моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 8. С. 1524–1535.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1980. 424 с.
  3. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.
  4. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of computational physics. 1996. Vol. 126, No. 1. pp. 202–228.
  5. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009. 724 p.
  6. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66
  7. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report 97-65. 1997. 84 p.
  8. Бобков В. Г. Численное моделирование обтекания винта вертолета и определение аэроакустических характеристик. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Москва, 2018, 176 с.
  9. Wijkер J. J. Spacecraft Structures. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2008. 504 p.
  10. Гарбарук А. В., Спаларт Ф. Р., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Расчет аэродинамики и шума при обтекании тандема цилиндров // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 6. С. 119–136.
  11. Kato C., Iida A., Tanako Y., Fujita H., Ikegawa M. Numerical prediction of aerodynamic noise radiated from low Mach number turbulent wake // AIAA Paper 93-145
  12. Seo J. H., Chang K. W., Moon Y. J. Aerodynamic noise prediction for long-span-bodies // AIAA Paper 2006-2573.
  13. Савельев А. Д. Численное моделирование акустического излучения двумерной каверны в дозвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. 45, № 1. С. 57–74.

*Поступила 12.07.2020*

MSC2020 76N15

# Modeling of acoustic fields during gas flow around bodies

© A. R. Bagapov<sup>1</sup>, R. V. Zhalnin<sup>2</sup>

**Abstract.** The article describes the modeling of the acoustic field based on the analysis of pressure fluctuations. For this a model based on the laws of mass, energy and momentum is implemented in a two-dimensional setting. For the calculations, the HLLC scheme for solving the Riemann problem and the WENO scheme for reconstructing the gas-dynamic parameters on the faces between the cells are used. To simulate the acoustic field, a time-averaged characteristic was chosen - the overall sound pressure level (OASPL). The paper considers the acoustic field obtained when a gas flows around a single square body, a cascade of square bodies, a step and a cavity, an interpretation of the ongoing processes is given. The result of the study is the visualization and description of the phenomena that arise when a gas flow around bodies, as well as the study of the effect of removing the observation point on acoustic effects within the simulated area.

**Key Words:** gas dynamics, HLLC, WENO, acoustic field, acoustic noise, OASPL

## REFERENCES

1. A. S. Kozelkov, V. V. Kurulin, S. V. Lashkin, R. M. Shagaliev, A. V. Yalozo, “Investigation of supercomputer capabilities for the scalable numerical simulation of computational fluid dynamics problems in industrial applications”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **56**:8 (2016), 1524–1535; *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:8 (2016), 1506–1516.
2. A. A. Samarskiy, Yu. P. Popov, [*Raznostnye metody resheniya zadach gazovoy dinamiki*], Nauka, M., 1980, 424 c.
3. V. F. Tishkin, V. V. Nikishin, I. V. Popov, A. P. Favorskiy, “[Raznostnye skhemy trekhmernoy gazovoy dinamiki dlya zadachi o razvitii neustoychivosti Rikhtmaera-Meshkova]”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **7**:5 (1995), 15–25.
4. G.-S. Jiang, C.-W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes”, *Journal of computational physics*, **126**:1 (1996), 202–228.
5. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2009, 724 c.
6. R. V. Zhalnin, N. V. Zmitrenko, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “[Numerical simulation of Richtmyer–Meshkov instability development using the difference schemes of high order of accuracy]”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **19**:10 (2007), 61–66.
7. C.-W. Shu, “Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws”, *ICASE Report 97-65*, 1997, 84 c.

<sup>1</sup>Arif R. Bagapov, master’s student at the Faculty of Mathematics and Information Technologies, National Research Mordovia State University, (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7975-6019>, bagapov99@mail.ru

<sup>2</sup>Ruslan V. Zhalnin, head of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

8. В. Г. Бобков, [*Numerical simulation of a helicopter propeller flow and determination of aeroacoustic characteristics*], дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Москва, 2018, 176 с.
9. J. J. Wijker, *Spacecraft Structures*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Heidelberg, 2008, 504 с.
10. A. V. Garbaruk, F. R. Spalart, M. Kh. Strelets, M. L. Shur, “Raschet aerodinamiki i shuma pri obtekanii tandem tsilindrov”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **26**:6 (2014), 119–136.
11. C. Kato, A. Iida, Y. Tanako, Y. Fujita, M. Ikegawa, “Numerical prediction of aerodynamic noise radiated from low Mach number turbulent wake”, *AIAA Paper*, 93–145.
12. J. H. Seo, K. W. Chang, Y. J. Moon, “Aerodynamic noise prediction for long-span-bodies”, *AIAA Paper*, 2006–2573.
13. A. D. Savel’ev, “[Numerical modeling of acoustic noise of a two-dimensional cavity in a subsonic flow]”, *Uchenye zapiski TsAGI*, **45**:1 (2014), 57–74.

*Submitted 12.07.2020*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.352-367

УДК 517.9, 532.5, 539.3

**Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах**© П. А. Вельмисов<sup>1</sup>, Ю. А. Тамарова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления», которая предназначена для измерения давления в газожидкостных средах. На основе предложенных моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющего датчик с камерой сгорания двигателя. Для описания движения рабочей среды используются линейные модели механики жидкости и газа, для описания динамики чувствительного элемента применяются как линейные, так и нелинейные модели механики твердого деформируемого тела. Решения указанных начально-краевых задач проводятся на основе метода Галеркина и конечно-разностного метода.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, аэроупругость, трубопровод, датчик давления, упругий элемент, динамика, метод конечных разностей, метод Галеркина

**1. Введение**

Развитие техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстремными условиями эксплуатации. Описанию датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик посвящены работы [1]-[8].

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Влияние нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения рассмотрено в [9], вопросам повышения виброустойчивости датчиков, выбора конструкционных и функциональных материалов посвящена работа [10]. Размещение датчика давления непосредственно на двигателе принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, при этом на датчики давления действуют большие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

Таким образом, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой датчик расположен на некотором расстоянии от

<sup>1</sup>**Вельмисов Петр Александрович**, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

<sup>2</sup>**Тамарова Юлия Александровна**, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovaua@mail.ru](mailto:kazakovaua@mail.ru)

двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод – датчик давления» в случае несжимаемости рабочей среды рассматривались в работах [11]–[16]. Совокупность моделей и методов исследования механической системы «трубопровод – датчик давления» представлена в монографиях [17],[18].

В данной работе исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе на основе двумерных и трехмерных моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений. Динамика рабочей среды в трубопроводе описывается дифференциальным уравнением с частными производными, соответствующим линейной теории движения жидкостей или газов в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. С помощью приближенного метода решения, основанного на введении усредненных характеристик, исследование указанных начально-краевых задач сведено к исследованию одномерной задачи, в которой для описания динамики чувствительного элемента используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одномассовой системы. Исследование указанной одномерной начально-краевой задачи основано на методе Галеркина и конечно-разностном методе [19],[20].

## 2. Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»

### 2.1. Двумерная плоская модель системы «трубопровод-датчик давления»

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей плоской модели механической системы «трубопровод – датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.3)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.4)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \quad (2.5)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (2.5), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(\dot{w}, w); \quad (2.6)$$

$$L(w(y, t)) \equiv L^*(w(y, t)) - w'' \left( \mu \int_0^l w'^2 dy + \eta \frac{d}{dt} \int_0^l w'^2 dy \right); \quad (2.7)$$

$$L(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + \left[ Dw'' \left( 1 - \frac{3}{2} w'^2 \right) \right]'' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + f(\dot{w}, w); \quad (2.8)$$

$$L(w(y, t)) \equiv mw_{tt} + \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + Nw_{yy} + \beta \left[ Dw_{yy} \left( 1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(\dot{w}, w). \quad (2.9)$$

В модели (2.7) учтена нелинейность продольной силы, возникающей вследствие удлинения трубопровода из-за его деформации; модель (2.8) учитывает нелинейность изгибающего момента; в модели (2.9) предполагаются нелинейными упругие силы и их демпфирование.

В (2.1)-(2.9)  $\varphi(x, y, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками  $y = 0$ ,  $y = h$ ;  $w(y, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $a_0$  - плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды;  $P(y, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ;  $P_*$  - внешнее воздействие на упругий элемент;  $m$  и  $D$  - погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента;  $N$  - сжимающее (растягивающее) элемент усилие;  $\beta$ ,  $\eta$  - коэффициенты внутреннего демпфирования;  $\mu$  - коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик элемента и типа его закрепления;  $f(\dot{w}, w)$  - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации  $w(y, t)$  и скорости деформации  $\dot{w}(y, t)$ ; индексы  $x$ ,  $y$ ,  $t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ , точка сверху - частную производную по  $t$ , штрих - частную производную по  $y$ .

Уравнение (2.1) описывает движение идеального газа в трубопроводе; (2.2), (2.3) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.4) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.5) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, t)$ ,  $w(y, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для  $w(y, t)$  при  $y = 0$ ,  $y = h$ , соответствующие типу закрепления концов элемента (например,  $w = w_y = 0$  для жесткого защемления,  $w = w_{yy} = 0$  для шарнирного закрепления).

Рассмотрим один из способов решения задачи (2.1)-(2.5). Введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int_0^h \varphi(x, y, t) dy, & \xi(t) &= \int_0^h w(y, t) dy, \\ G(t) &= \int_0^h P(y, t) dy, & Q(w) &= \int_0^h L(w(y, t)) dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда, проводя в (2.1)-(2.5) интегрирование по  $y$  в пределах от 0 до  $h$ , с учетом граничных условий (2.2), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.11)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.12)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.13)$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \quad (2.14)$$

Положим  $w(y, t) = g(y)\theta(t)$ ,  $w_0 = \int_0^h g(y) dy$ , где функция  $g(y)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например,

в случае шарнирного закрепления обоих концов можно задать  $g(y) = \sin \frac{\pi y}{h}$ . Тогда  $\xi(t) = w_0 \theta(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(y, t)) = m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}'''' + \alpha\dot{w} + \gamma w$ , где  $\alpha, \gamma$  - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \quad (2.15)$$

где  $m_0 = m \int_0^h g(y) dy$ ,  $\alpha_0 = \alpha \int_0^h g(y) dy + \beta \int_0^h g''''(y) dy$ ,  $\gamma_0 = D \int_0^h g''''(y) dy + N \int_0^h g''(y) dy + \gamma \int_0^h g(y) dy$ . Таким образом, решение задачи (2.1)-(2.5) сведено к исследованию одномерной системы (2.11)-(2.14) для функций  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.15), а  $\xi(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

## 2.2. Двумерная осесимметричная модель

Приведем математическую постановку, соответствующую осесимметричной модели механической системы «трубопровод-датчик давления»

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left( \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.16)$$

$$\varphi_r(x, R, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.17)$$

$$\varphi_x(l, r, t) = \dot{w}(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (2.18)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, t) = P(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (2.19)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, t) - P_* = L(w(r, t)), \quad r \in (0, R). \quad (2.20)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (2.20), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D \nabla^4 w + N \nabla^2 w + \beta \nabla^4 \dot{w} + f(\dot{w}, w), \quad (2.21)$$

где  $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$ ,  $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}$ .

В (2.16)-(2.21)  $\varphi(x, r, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе;  $w(r, t)$  - деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(r, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ;  $R$  - радиус упругого элемента, представляющего собой круглую деформируемую пластину; индексы  $x, r, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, r$  и времени  $t$ , точка сверху - производную по  $t$ .

Уравнение (2.16) описывает движение идеального газа (жидкости) в трубопроводе; (2.17), (2.18) - условия непротекания стенки  $r = R$  трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.19) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.20) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, r, t)$ ,  $w(r, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для  $w(r, t)$  при  $r = R$ , соответствующие типу закрепления элемента (например,  $w(R, t) = w_r(R, t) = 0$  для жесткого защемления,  $w(R, t) = w_{rr}(R, t) = 0$  для шарнирного закрепления).

Для решения задачи (2.16)-(2.20) введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \int_0^R r\varphi(x, r, t)dr, & \xi(t) &= \int_0^R rw(r, t)dr, \\ G(t) &= \int_0^R rP(r, t)dr, & Q(w) &= \int_0^R rL(w(r, t))dr.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Тогда, проводя в (2.16)-(2.20) интегрирование по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , с учетом граничного условия (2.17), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2\Phi_{xx} = 0,\tag{2.23}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t),\tag{2.24}$$

$$-\rho_0\Phi_t(0, t) = G(t),\tag{2.25}$$

$$(P_0 - P_*)\frac{R^2}{2} - \rho_0\Phi_t(l, t) = Q(w).\tag{2.26}$$

Положим  $w(r, t) = g(r)\theta(t)$ ,  $w_0 = \int_0^R rg(r)dr$ , где функция  $g(r)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например, в случае жесткого защемления упругого элемента в точках его границы  $r = R$  можно задать  $g(r) = 1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3$ ). Тогда  $\xi(t) = w_0\theta(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w$ . Тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\theta}(t) + \alpha_0\dot{\theta}(t) + \gamma_0\theta(t),\tag{2.27}$$

где  $m_0 = m \int_0^R rg(r)dr$ ,  $\alpha_0 = \alpha \int_0^R rg(r)dr + \beta \int_0^R r \nabla^4 g(r)dr$ ,  $\gamma_0 = D \int_0^R r \nabla^4 g(r)dr + N \int_0^R r \nabla^2 g(r)dr + \gamma \int_0^R rg(r)dr$ . Таким образом, для дальнейшего решения задачи (2.16)-(2.20) необходимо исследовать одномерную систему (2.23)-(2.26) для функций  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.27), а  $\xi(t) = w_0\dot{\theta}(t)$ .

### 2.3. Трехмерная модель в декартовой системе координат

Рассмотрим математическую постановку, соответствующую трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления», в которой сечение трубопровода  $D$  имеет прямоугольную форму

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.28}$$

$$\varphi_y(x, 0, z, t) = \varphi_y(x, a, z, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad z \in (0, b),\tag{2.29}$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = \varphi_z(x, y, b, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, a),\tag{2.30}$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.31}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b),\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = \\
 &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad y \in (0, a), \quad z \in (0, b), \\
 \text{где } \Delta w &= w_{yy} + w_{zz}, \quad \Delta^2 w = w_{yyyy} + 2w_{yyzz} + w_{zzzz}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

В (2.28)-(2.33)  $\varphi(x, y, z, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе прямоугольной формы;  $w(y, z, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(y, z, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, y, z, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, y, z$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.28) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением прямоугольной формы; (2.29)-(2.30) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.32) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.33) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $w(y, z, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(y, z, t)$ .

Одним из способов решения задачи (2.28)-(2.33) является введение усредненных характеристик основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, y, z, t) dS, \quad \xi(t) = \iint_D w(y, z, t) dS, \\
 G(t) &= \iint_D P(y, z, t) dS, \quad Q(w) = \iint_D L(w(y, z, t)) dS,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где область интегрирования  $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq b\}$ ,  $dS = dydz$ . Тогда, проведя в (2.28)-(2.33) интегрирование по области  $D$ , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{2.35}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \tag{2.36}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{2.37}$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w), \tag{2.38}$$

где  $S = ab$  - площадь сечения  $D$ . Положим  $w(y, z, t) = \theta(t)g(y, z)$ ,  $w_0 = \iint_D g(y, z) dS$ , где функция  $g(y, z)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0 \theta(t)$ .

Если, например,  $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$ , то

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \tag{2.39}$$

где  $m_0 = m \iint_D g(y, z) dS$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D g(y, z) dS + \beta \iint_D \Delta^2 g(y, z) dS$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 g(y, z) dS + N \iint_D \Delta g(y, z) dS + \gamma \iint_D g(y, z) dS$ . Таким образом, решение задачи (2.28)-(2.33) сведено к исследованию одномерной системы (2.35)-(2.38) для  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.39), а  $\dot{\xi}(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

**2.4. Трехмерная модель в цилиндрической системе координат**

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left( \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.40)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.41)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.42)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.43)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.44)$$

$$L(w(r, \theta, t)) \equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.45)$$

где  $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ ,  $\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ .

В (2.40)-(2.45)  $\varphi(x, r, \theta, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора, ограниченного плоскостями  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ ;  $w(r, \theta, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(r, \theta, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, r, \theta, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, r, \theta$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.40) описывает движение идеального газа в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора; (2.41)-(2.43) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.44) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.45) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, r, \theta, t), w(r, \theta, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(r, \theta, t)$ .

Для решения задачи (2.40)-(2.45) введем усредненные характеристики

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, r, \theta, t) r dr d\theta, & \xi(t) &= \iint_D w(r, \theta, t) r dr d\theta, \\ G(t) &= \iint_D P(r, \theta, t) r dr d\theta, & Q(w) &= \iint_D L(w(r, \theta, t)) r dr d\theta, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где область интегрирования  $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ . Тогда, проводя в (2.40)-(2.45) интегрирование по области  $D$ , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.47)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.48)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.49)$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \quad (2.50)$$

Положим  $w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta)$ ,  $w_0 = \iint_D rg(r, \theta)drd\theta$ , где функция  $g(r, \theta)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0\psi(t)$ .

Пусть, например,  $L(w(r, \theta, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w$ , тогда

$$Q(w) = m_0 \ddot{\psi}(t) + \alpha_0 \dot{\psi}(t) + \gamma_0 \psi(t), \quad (2.51)$$

где  $m_0 = m \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta + \beta \iint_D \Delta^2 g(r, \theta)rdrd\theta$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 g(r, \theta)rdrd\theta + N \iint_D \Delta g(r, \theta)rdrd\theta + \gamma \iint_D g(r, \theta)rdrd\theta$ . Таким образом, решение задачи (2.40)-(2.45) сведено в исследованию одномерной системы (2.47)-(2.50)  $\Phi(x, t)$ ,  $\psi(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.51), а  $\dot{\xi}(t) = w_0\dot{\psi}(t)$ .

## 2.5. Трехмерная модель для трубопровода с сечением произвольной формы

Приведем математическую постановку, соответствующую трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» для трубопровода, сечение которого имеет форму  $D$ , ограниченную произвольным контуром  $L$  с уравнением  $G(y, z) = 0$ , например, состоящим из кривых  $y = f(z)$ ,  $y = g(z)$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$ :

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}), \quad x \in (0, l), \quad (y, z) \in D, \quad (2.52)$$

$$\varphi_x(l, y, z, t) = w_t(y, z, t), \quad (y, z) \in D, \quad (2.53)$$

$$\varphi_n = 0, \quad x \in (0, l), \quad (y, z) \in L, \quad (2.54)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, z, t) = P(y, z, t), \quad (y, z) \in D, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} L(w(y, z, t)) &\equiv mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) \\ &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, z, t) - P_*, \quad (y, z) \in D. \end{aligned} \quad (2.56)$$

В (2.52)-(2.56)  $\varphi(x, y, z, t)$  - потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с сечением произвольной формы;  $w(y, z, t)$  - деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода  $x = l$ ;  $P(y, z, t)$  - заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод  $x = 0$ ; индексы  $x, y, z, t$  снизу обозначают частные производные по координатам  $x, y, z$  и времени  $t$ .

Уравнение (2.52) описывает движение идеального газа в трубопроводе с сечением произвольной формы; (2.53), (2.54) - условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.55) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.56) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $w(y, z, t)$ , которая должна быть дополнена начальными условиями для этих функций, а также граничными условиями для  $w(y, z, t)$ .

Введем усредненные характеристики

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \iint_D \varphi(x, y, z, t)dydz, \quad \xi(t) = \iint_D w(y, z, t)dydz, \\ G(t) &= \iint_D P(y, z, t)dydz, \quad Q(w) = \iint_D L(w(y, z, t))dydz. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Проинтегрируем (2.52)-(2.56) по области  $D$ , используя формулу Грина и граничное условие (2.54). Тогда получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (2.58)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.59)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (2.60)$$

$$(P_0 - P_*)S - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w), \quad (2.61)$$

где  $S = \int_{z_1}^{z_2} (f(z) - g(z))dz$  - площадь сечения  $D$ . Положим  $w(y, z, t) = \theta(t)v(y, z)$ ,  $w_0 = \iint_D v(y, z)dS$ , где функция  $v(y, z)$  удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента. Тогда  $\xi(t) = w_0\theta(t)$ .

Если, например,  $L(w(y, z, t)) = mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + \alpha \dot{w} + \gamma w$ , то

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \quad (2.62)$$

где  $m_0 = m \iint_D v(y, z)dydz$ ,  $\alpha_0 = \alpha \iint_D v(y, z)dydz + \beta \iint_D \Delta^2 v(y, z)dydz$ ,  $\gamma_0 = D \iint_D \Delta^2 v(y, z)dydz + N \iint_D \Delta v(y, z)dydz + \gamma \iint_D v(y, z)dydz$ . Таким образом, решение задачи (2.52)-(2.56) сведено в исследованию одномерной системы (2.58)-(2.61) для  $\Phi(x, t)$ ,  $\theta(t)$ , в которой  $Q(w)$  имеет вид (2.62), а  $\dot{\xi}(t) = w_0 \dot{\theta}(t)$ .

### 3. Исследование одномерной модели механической системы «трубопровод-датчик давления»

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей одномерной модели механической системы «трубопровод – датчик давления», к исследованию которой сводятся все рассмотренные выше задачи, имеет вид

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, t) = P(t), \quad (3.2)$$

$$\varphi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (3.3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha \dot{w} + \gamma w = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, t) - P_*. \quad (3.4)$$

Рассмотрим некоторые способы исследования одномерной задачи (3.1)-(3.4).

#### 3.1. Метод Галеркина

а) Потенциал скорости  $\varphi(x, t)$  представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $g_m(x) = \sin \lambda_m x$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $g_m(0) = 0$ ,  $g_m(l) = 0$ , соответствующим условиям (3.2), (3.4)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{l}. \quad (3.5)$$

Удовлетворяя условиям (3.2), (3.4), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad \dot{b} = -\frac{1}{\rho_0 l} (P_* - P_0 + L(w(t)) - P(t)). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5),(3.6) в (3.1),(3.3), получим

$$\sum_{m=1}^M \left[ \ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \lambda_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \lambda_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) + \frac{x}{\rho_0 l} (\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t)), \quad (3.7)$$

$$P_* - P_0 + L(w(t)) - P(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \lambda_m \cos \lambda_m l + \rho_0 l \ddot{w}(t) = 0. \quad (3.8)$$

Согласно методу Галеркина, выполняя условие ортогональности невязки уравнения (3.7) к базисным функциям  $\{\sin \lambda_k x\}_{k=1, \overline{M}}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \lambda_k^2 \psi_k(t) &= \frac{2}{l \rho_0} \dot{P}(t) \int_0^l \sin \lambda_k x dx + \\ &+ \frac{2}{\rho_0 l^2} (\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t)) \int_0^l x \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1 \div M. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Продифференцируем уравнение (3.8):

$$\dot{L}(w(t)) - \dot{P}(t) - \rho_0 l \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \lambda_m \cos \lambda_m l + \rho_0 l \ddot{w}(t) = 0. \quad (3.10)$$

Дополняя начальными условиями систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.9),(3.10) для функций  $w(t), \psi_k(t), k = 1 \div M$ , получим задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

б) Представим потенциал скорости  $\varphi(x, t)$  в виде отрезка ряда по полной на отрезке  $[0, l]$  системе функций  $g_m(x) = \sin \nu_m x$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям  $g_m(0) = 0, g'_m(l) = 0$ , соответствующим условиям (3.2),(3.3)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \nu_m x, \quad \nu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (3.11)$$

Удовлетворяя условиям (3.2),(3.3), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b = \dot{w}(t). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11),(3.12) в (3.1),(3.4), получим

$$\sum_{m=1}^M \left[ \ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \nu_m^2 \psi_m(t) \right] \sin \nu_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (3.13)$$

$$P(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l = P_* - P_0 + L(w(t)). \quad (3.14)$$

Выполняя условие ортогональности невязки уравнения (3.13) к базисным функциям  $\{\sin \nu_k x\}_{k=1, \overline{M}}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \nu_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \nu_k} \dot{P}(t) - 2\ddot{w}(t) \frac{\sin(\nu_k l)}{l \nu_k^2}, k = 1 \div M. \quad (3.15)$$

Дифференцируя уравнение (3.14), получим

$$\dot{P}(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \nu_m l = m \ddot{w}(t) + \alpha \ddot{w}(t) + \gamma_1 \dot{w}(t). \quad (3.16)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15), (3.16) для функций  $w(t), \psi_k(t), k = 1 \div M$ , дополненная начальными условиями, представляет собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

### 3.2. Метод конечных разностей

Дополним задачу (3.1)-(3.4) начальными условиями:

$$w(0) = S, \quad \dot{w}(0) = Q, \quad (3.17)$$

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \psi_2(x). \quad (3.18)$$

Проведем численное исследование задачи (3.1)-(3.4), (3.17), (3.18) методом конечных разностей. Разобьем отрезок  $[0, l]$  на  $N$  частей точками  $x_n = h_x n, n = 0, 1, \dots, N$ , где  $h_x = l/N$ , отрезок  $[0, T]$  - на  $K$  частей точками  $t_k = h_t k, k = 0, 1, \dots, K$ , где  $h_t = T/K$ .

Введем обозначения  $\varphi(x_n, t_k) = \varphi_n^k, w(t_k) = w^k$ .

Явная конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (3.1) - (3.4), (3.17), (3.18) имеет вид

$$\frac{\varphi_n^{k+1} - 2\varphi_n^k + \varphi_n^{k-1}}{h_t^2} - a_0^2 \frac{\varphi_{n+1}^k - 2\varphi_n^k + \varphi_{n-1}^k}{h_x^2} = 0, \quad (3.19)$$

$$-\frac{\rho_0}{h_t} (\varphi_0^{k+1} - \varphi_0^k) = P(t_k), \quad (3.20)$$

$$\frac{\varphi_N^{k+1} - \varphi_N^{k-1}}{h_x} = \frac{w^{k+1} - w^k}{h_t}, \quad (3.21)$$

$$\frac{m(w^{k+1} - 2w^k + w^{k-1}))}{h_t^2} + \frac{\alpha(w^k - w^{k-1})}{h_t} + \gamma w^k = P_0 - P_* - \frac{\rho_0(\varphi_N^k - \varphi_N^{k-1})}{h_t}, \quad (3.22)$$

$$w^0 = S, \quad w^1 = w^0 + h_t Q, \quad (3.23)$$

$$\varphi_n^0 = \psi_1(x_n), \quad \varphi_n^1 = \psi_1(x_n) + h_t \psi_2(x_n). \quad (3.24)$$

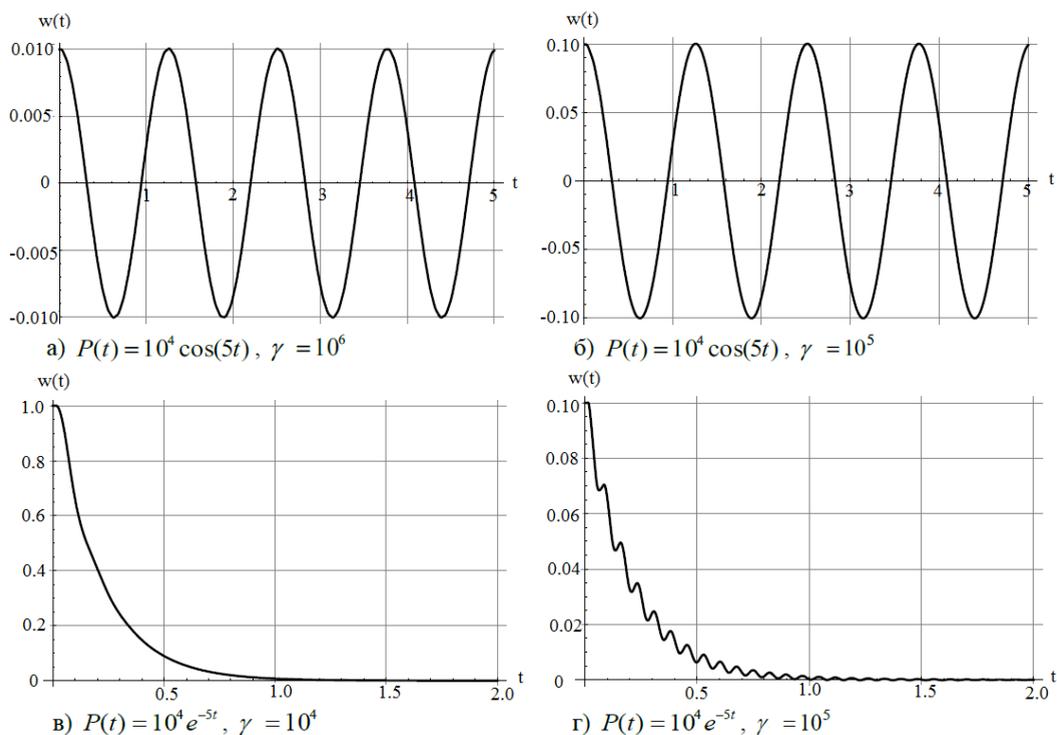
Разностная схема (3.19)-(3.24) является условно устойчивой. Исследование устойчивости проводилось с использованием спектрального признака Неймана с привлечением критерия Бабенко-Гельфанда [19].

### 3.3. Численный эксперимент

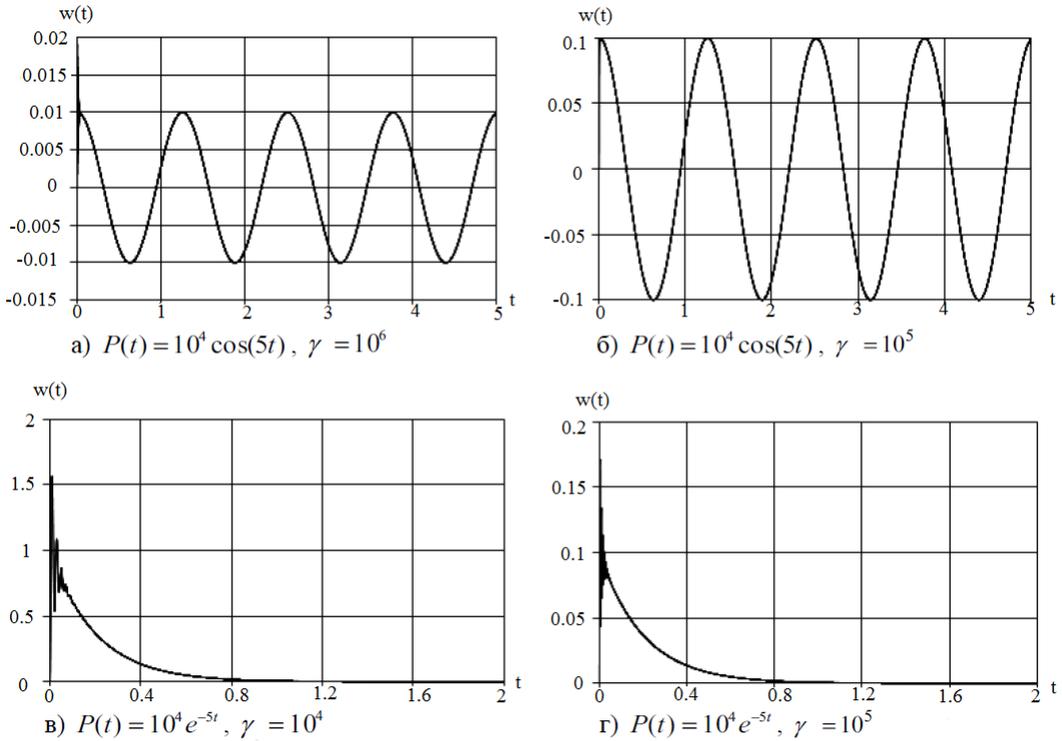
Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – воздух ( $\rho_0 = 1$ ). Параметры системы:  $P_0 = P_* = 10^5$ ,  $a_0 = 331$ ,  $l = 5$ ,  $m = 0,1$ ,  $\alpha = 200$  (все значения приведены в системе СИ).

С помощью системы Mathematica численно получены решения системы (3.9),(3.10) и системы (3.15),(3.16). Начальные условия заданы в виде:  $\psi_k(0) = \dot{\psi}_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ ,  $w(0) = \frac{P(0)}{\gamma_1}$ ,  $\dot{w}(0) = \dot{w}(0) = 0$ . Ввиду того, что численные расчеты на основе системы (3.9),(3.10) полностью совпадают с расчетами для системы (3.15),(3.16), в качестве примера на рисунке 1 представлены примеры расчетов для первой системы.

Для решения на основе разностной схемы (3.19)-(3.24) разработана программа на C++, позволяющая получать графики функции  $w(t)$  при различном задании закона изменения давления  $P(t)$ . При численном эксперименте было введено разбиение  $n = 200$ ,  $K = 100000$ , начальные данные заданы в виде:  $w(0) = \dot{w}(0) = 0$ ,  $\psi_1(x) = 0$ ,  $\psi_2(x) = 0$ . На рисунке 2 представлены примеры расчетов при различном задании функции  $P(t)$  и параметра  $\gamma$ .



**Рис. 3.1.** Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод Галеркина  $M = 10$ ).



**Рис. 3.2.** Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод конечных разностей).

Из рисунков 3.1, 3.2 видно, что решение задачи (3.1)-(3.4), (3.17), (3.18), полученное по методу конечных разностей (Рис. 3.2), достаточно точно согласуется с решением, построенным с помощью метода Галеркина (Рис. 3.1). Следует отметить значительное влияние параметра  $\gamma$  на амплитуду колебаний подвижного элемента.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты №18-41-730015, №19-41-730006).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белозубов Е.М., Васильев В.А., Запевалин А.И., Чернов П.С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерительная техника. 2011. № 1. С. 17-19.
2. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
3. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн.1. Пер. с франц. М.: Мир, 1992. 480 с.
4. Аш Ж. и соавторы Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с франц. М.: Мир, 1992. 424 с.

5. Агейкин Д.И., Костина Е.Н., Кузнецова Н.Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
6. Корсунов В.П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
7. Пирогов С.П. Манометрические трубчатые пружины. С.Петербург: Недра, 2009. 276 с.
8. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. 2-е издание. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
9. Мокров Е.А., Лебедев Д.В., Базаев В.П., Ефремов Е.В., Семина И.А., Колчин П.А. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений // Датчики и системы. 2008. № 6. С.2-7.
10. Белозубов Е.М., Мокров Е.А., Тихомиров Д.В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. 2004. №1. С.26-29.
11. Вельмисов П.А., Горбоконеко В.Д. Об одной математической модели системы «трубопровод – датчик давления» // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Одиннадцатой межвузовской конференции. Самара: СамГТУ, 2001. Ч. 2. С. 15-17.
12. Velmisov P.A., Garnefska L.V., Gorbokonenko V.D. An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor” // Applications of Mathematics in Engineering and Economics: Proceedings of the XXVII Summer School. – Heron Press.Sofia, Bolgaria, 2002. – P. 542-548.
13. Вельмисов П. А., Горбоконеко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы "трубопровод – датчик давления" // Датчики и системы. 2003. № 6(49). С. 12–15.
14. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы "трубопровод - датчик давления" // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, №4. С.85–93.
15. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series, 2019. Vol. 1353, 012085, P. 1-6; doi: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085.
16. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Mizher U.J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019); doi: 10.1063/1.5133495.
17. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконеко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления". Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188с.
18. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем // Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
19. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». М., 1977. 440 с.

20. Калиткин Н.Н. Численные методы. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». М., 1978. 512 с.

Поступила 1.06.2020

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

## Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media

© P. A. Velmisov<sup>1</sup>, Yu. A. Tamarova<sup>2</sup>

**Abstract.** The article discusses the initial-boundary value problems for systems of differential equations, which are mathematical models of the mechanical system "pipeline - pressure sensor that is designed to measure pressure in gas-liquid media. On the basis of the proposed models, the joint dynamics of the pressure sensor sensitive element and of the working medium in the pipeline connecting the sensor to the combustion chamber of the engine is investigated. To describe the movement of the working medium, linear models of the mechanics of liquid and gas are used; to describe the dynamics of the sensitive element, both linear and nonlinear models of the mechanics of a solid deformable body are used. The solutions of stated initial-boundary value problems are carried out on the basis of the Galerkin method and the finite-difference method.

**Key Words:** differential equations, aeroelasticity, pipeline, pressure sensor, elastic element, dynamics, finite difference method, Galerkin method

### REFERENCES

1. E. M. Belozubov, V. A. Vasil'ev, A. I. Zapevalin, P. S. Chernov, "[Designing the elastic elements of nano- and microelectromechanical systems]", *Measuring technique*, 1 (2011), 17–19 (In Russ.).
2. L. G. Etkin, [*Vibration sensors. Theory and practice*], Publishing House of Moscow State Technical University. N.E.Bauman, M., 2004 (In Russ.), 408 p.
3. J. Ash et al, [*Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 1. Translation from fr.*], Mir, M., 1992 (In Russ.), 480 p.
4. J. Ash et al, [*Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2. Translation from fr.*], Mir, M., 1992 (In Russ.), 424 p.
5. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, [*Sensors of control and regulation*], N. Mechanical Engineering, M., 1965 (In Russ.), 928 p.
6. V. P. Korsunov, [*Elastic sensitive elements*], Publishing house of the Saratov University, Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.

<sup>1</sup>**Velmisov Petr Aleksandrovich**, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

<sup>2</sup>**Tamarova Yuliya Aleksandrovna**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, [kazakovau@mail.ru](mailto:kazakovau@mail.ru)

7. S. P. Pirogov, [*Manometric tubular springs*], Nedra, S.Petersburg, 2009 (In Russ.), 276 p.
8. L. E. Andreeva, [*Elastic elements of devices. 2nd edition* ], Engineering, M., 1981 (In Russ.), 392 p.
9. E. A. Mokrov, D. V. Lebedev, V. P. Bazaev, E. V. Efremov, I. A. Semina, P. A. Kolchin, “[On the design and technological improvement of strain gauge thin-film pressure sensors]”, *Sensors and systems*, **6** (2008), 2–7 (In Russ.).
10. E. M. Belozubov, E. A. Mokrov, D. V. Tihomirov, “[Minimizing the error of thin-film strain gauge pressure sensors when exposed to non-stationary temperature]”, *Sensors and Systems*, **1** (2004), 26–29 (In Russ.).
11. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, “[About one mathematical model of the “pipeline – pressure sensor” system]”, *Mathematical modeling and boundary value problems: proceedings of the Eleventh Interuniversity Conference, Part2*, 2001, 15–17 (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, L. V. Garnefska, V. D. Gorbokonenko, “An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor””, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics: Proceedings of the XXVII Summer School*, 2002, 542–548.
13. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor]”, *Sensors and systems*, **6(49)** (2003), 12–15 (In Russ.).
14. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline - pressure sensor]”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **12:4** (2010), 85–93 (In Russ.).
15. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019), 1–6.
16. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019), 030006.
17. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. V. Pokladova, [*Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”*], UIGTU, Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
18. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, [*Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems*], UIGTU, Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
19. S. K. Godunov, V. S. Ryabenkij, [*Difference schemes (introduction to theory)*], The main edition of the physical and mathematical literature of the Nauka publishing house, M., 1977 (In Russ.), 440 p.
20. N. N. Kalitkin, [*Numerical methods*], The main edition of the physical and mathematical literature of the Nauka publishing house, M., 1978 (In Russ.), 512 p.

*Submitted 1.06.2020*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC2020;
- название статьи;
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

**Коды УДК и MSC2020.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, почтовый адрес организации. Почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- г) ученая степень (указывается при наличии);
- д) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>.
- е) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты – основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение – выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*, который можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmobib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английский язык (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**

### **Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadrachnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in English, then it should contain the following sections only in English:

- MSC2020 codes;
- article title;
- information about every author;
- abstract;
- keywords;
- text of the article;
- references.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

**Information about the author(s)**. The section contains the following information for each author:

- a) Name O. Surname;
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted, the postal address of the organization. The mailing address is indicated in the form: house street, city postcode, country.
- d) academic degree (indicated if available);
- e) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- e) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ...»). Author(s) should not include in the abstract historical references (if

they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

**Keywords** should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number

should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system.**

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

*Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова

нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления многострочных формул рекомендуется использовать окружение `equation` с вложенным окружением `array`:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2, \\
x * y = 1. \\
\end{array}
\end{equation}
```

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы}
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {общая_подпись_под_рисунком}
```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {общая_подпись}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись_под_рисунком}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

## Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

### Статьи в журналах на русском языке

#### В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневожского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
```

#### В разделе `thebibliographyEn`:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

### Статьи в журналах на английском языке (в разделах `thebibliography` и `thebibliographyEn` оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

### Статьи в электронном журнале на русском языке

#### В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
```

\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**В разделе thebibliographyEn:**

\Bibitem{shamanaevBib3En}  
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
 \jour Ogarev-online  
 \vol 20  
 \yr 2016  
 \lang In Russ.  
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке:**

**В разделе thebibliography:**

\RBibitem{shamanaevBib4}  
 \by A. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
 \paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
 \inbook Прикладная математика и механика  
 \publaddr Ульяновск  
 \publ УлГТУ  
 \yr 2014  
 \issue 10  
 \pages 4–13

**В разделе thebibliographyEn:**

\Bibitem{shamanaevBib4En}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UIGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \issue 10  
 \pages 4–13  
 \lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

**В разделе thebibliography:**

\RBibitem{shamanaevBib5}  
 \by Ю. Н. Бибигов  
 \book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
 \publaddr М.

\publ Выш. шк.  
 \yr 1991  
 \totalpages 303

**В разделе thebibliographyEn:**

\Bibitem{shamanaevBib5En}  
 \by Yu. N. Bibikov  
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
 \publaddr Moscow  
 \publ Visshay shkola Publ.  
 \yr 1991  
 \totalpages 303  
 \lang In Russ.

**Статьи в материалах конференций на русском языке:**

**В разделе thebibliography:**

\RBibitem{shamanaevBib6}  
 \by В. Г. Малинов  
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике  
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды  
 \bookvol II  
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.  
 \yr 2016  
 \pages 48–50  
 \publ ФИЦ ИУ РАН  
 \publaddr М.

**В разделе thebibliographyEn:**

\Bibitem{shamanaevBib6En}  
 \by V. G. Malinov  
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator  
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings  
 \bookvol II  
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016  
 \yr 2016  
 \pages 48–50  
 \publ FRC CSC RAS Publ.  
 \publaddr Moscow

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors)} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {Author1 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For multi-line formulas, it is recommended to use the **equation** environment with the nested **array** environment:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2, \\
x * y = 1. \\
\end{array}
\end{equation}
```

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name} \label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```
\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```
\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption}
```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```
\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {common_caption}
```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```
\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

e) insert two pictures with common caption only

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption}
```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package**

**Journal articles in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in
the form of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

\issue 1  
 \pages 145–151  
 \lang In Russ.

### Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}  
 \by M. J. Berger, J. Olinger  
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
 \jour Journal of Computational Physics  
 \yr 1984  
 \vol 53  
 \pages 484–512

### Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}  
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
 \jour Ogarev-online  
 \vol 20  
 \yr 2016  
 \lang In Russ.  
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UIGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \issue 10  
 \pages 4–13  
 \lang In Russ.

### Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}  
 \by Yu. N. Bibikov  
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
 \publaddr Moscow  
 \publ Visshay shkola Publ.  
 \yr 1991

\totalpages 303

\lang In Russ.

**Conference proceedings in Russian:**

\Bibitem{shamanaevBib6En}

\by V. G. Malinov

\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings

\bookvol II

\procinfo Moscow, October 17-22, 2016

\yr 2016

\pages 48-50

\publ FRC CSC RAS Publ.

\publaddr Moscow

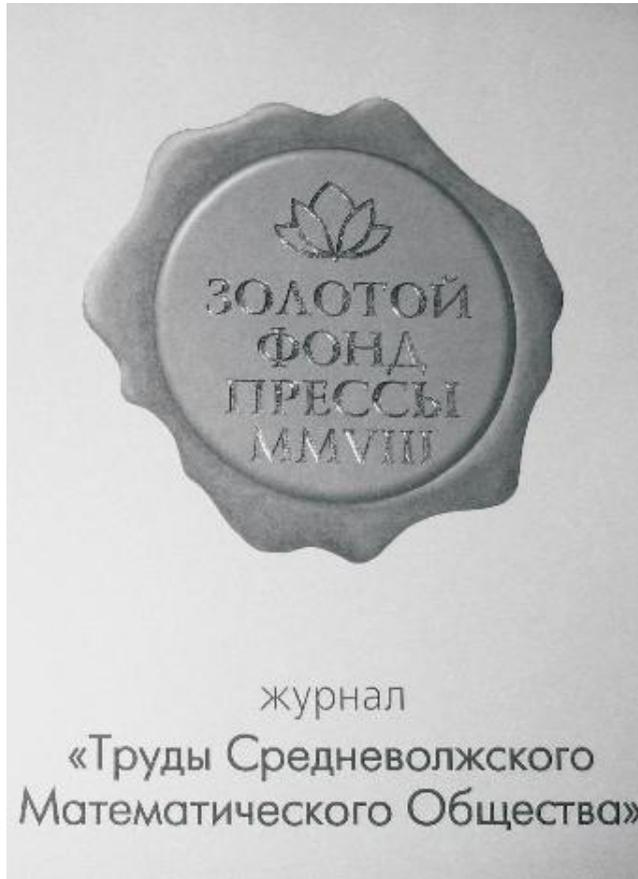
**Алфавитный указатель авторов**

Багапов А. Р.	333	Макаров А. А.	261
Вельмисов П. А.	352	Митрохин С. И.	280
Гуревич Е. Я.	261	Ноздринова Е. В.	306
Жалнин Р. В.	333	Тамарова Ю. А.	352
Каледина Е. А.	268	Тимошенко К. А.	319
Тында А. Н.		319	

## Author Index

Bagapov A. R.	333	Nozdrinova E. V.	306
Gurevich E. Ya.	261	Tamarova Yu. A.	352
Kaledina E. A.	268	Timoshenkov K. A.	319
Makarov A. A.	261	Tynda A. N.	319
Mitrokhin S. I.	280	Velmisov P. A.	352
Zhalnin R. V.	333		

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 10.09.2020. Дата выхода в свет 30.09.2020. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 12,6 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1107.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 10.09.2020. Date of publishing 30.09.2020. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 12,6.

Number of copies 100. Order no. 1107.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

**Для заметок**



