ISSN 2587 – 7496 (Online) ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga Mathematical Society Journal

Том / Vol. 21 № / No. 1

2019

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет

ISSN 2587-7496 (Online) ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Том 21, № 1. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

Middle Volga Mathematical Society

National Research Mordovia State University

ISSN 2587-7496 (Online) ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Vol. 21, no. 1. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

– «Математика»,

– «Прикладная математика и механика»,

– «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).
ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society"(68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Редакционный совет

Editorial Board

Содержание

Математика

Прикладная математика и механика

Математическое моделирование и информатика

Математическая жизнь

Contents

Mathematical Modeling and Informatics

Mathematical life

Математика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.13-23

УДК 517.9

Робастное отслеживание траектории омни-мобильного робота с учетом проскальзывания колес

© А. С. Андреев[1], О. А. Перегудова[2]

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача построения робастного закона управления для отслеживания траектории мобильного робота с тремя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности. Построена динамическая модель робота, центр масс круглой платформы которого смещен относительно ее геометрического центра, учитывающая проскальзывание колес при торможении. Управление движением колесного робота осуществляется при помощи трех независимых электродвигателей постоянного тока. При этом моменты, развиваемые двигателями, являются линейными относительно напряжения, подаваемого на двигатель, и угловой скорости вращения ротора. На основе метода функций Ляпунова построен ограниченный закон управления без измерения скоростей, решающий задачу робастного слежения. Это означает, что каковы бы ни были начальные отклонения, по истечении некоторого времени траектория робота попадает в заданную окрестность отслеживаемой траектории и остается в ней. Доказана теорема о предельной ограниченности замкнутой системы. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность предложенного закона управления.

Ключевые слова: колесный мобильный робот, омни-колесо, скольжение, отслеживание траектории, функция Ляпунова, динамическая модель.

1. Введение

Мобильные роботы с омни-колесами обладают преимуществом перед роботами с обычным дифференциальным типом колес, которое состоит в высокой маневренности омни-колес, обеспечивающей движение робота в любом направлении без предварительного разворота. Такая возможность обеспечивается конструкцией омни-колес, по ободу которых нанизаны ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колеса. Таким образом, омни-колесо может двигаться не только в направлении, лежащем в плоскости колеса, но и перпендикулярно ему.

В работах [1]-[5] построены кинематические и динамические модели, описывающие движение робота с омни-колесами, а также решены задачи о стабилизации программных движений таких механических систем. В работах [6]-[7] рассмотрена задача построения

[1]**Андреев Александр Сергеевич**, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2]**Перегудова Ольга Алексеевна**, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

управления для кинематических моделей робота. Динамическая модель и закон управления для неголомного мобильного робота с омни-колесами были построены в работе [8].

Для решения задачи отслеживания траектории четырехколесного мобильного робота в работе [9] предложен закон управления, учитывающий действие сил, основанный на методе линеаризации обратной связью. Этот метод заключается в исключении всех нелинейных членов из уравнений движения с целью получить линейную стационарную систему в отклонениях. Отметим, что законы управления, основанные на этом методе, требуют вычисления всех сил, действующих на систему в режиме онлайн, что невозможно в условиях неполноты информации о массо-инерционных характеристиках системы.

Отметим, что построение робастного закона управления для динамической модели робота, позволяющего выводить робота на заданную траекторию и стабилизировать движение вдоль нее в условиях неполной информации о массо-инерционных характеристиках системы, является математически сложной и актуальной задачей. В работе [10] предложен адаптивный закон управления, основанный на методе бэкстеппинга и построении функции Ляпунова, позволяющий отслеживать траекторию робота с тремя омни-колесами с учетом неизвестных массо-инерционных параметров системы и действия сил трения скольжения. Отметим, что релейный закон управления, предложенный в [10], имеет сложную структуру и требует онлайн-вычислений оценок неизвестных параметров.

В работах [11]-[12] рассмотрены модели трехколесных омни-мобильных роботов без учета проскальзывания колес и построены законы управления, решающие задачу отслеживания траектории системы, в том числе при неточно известных параметрах системы.

В работах [13]-[14] построена нелинейная модель четырехколесного мобильного робота, учитывающая действие сил сухого и вязкого трения, и предложен закон управления для такой модели. Динамическая модель омни-мобильного робота, учитывающая проскальзывание колес, построена в [15].

В настоящей статье предложена новая динамическая модель робота с тремя омни-колесами и смещенным центром масс с учетом проскальзывания колес. Построен робастный закон управления для данной модели, обеспечивающий отслеживание нестационарной траектории. Представлены результаты численного моделирования.

2. Модель мобильного робота с учетом проскальзывания колес

Рассмотрим модель робота (Рис. 2.1) с тремя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности под действием моментов, развиваемых тремя электродвигателями постоянного тока, с учетом проскальзывания колес.

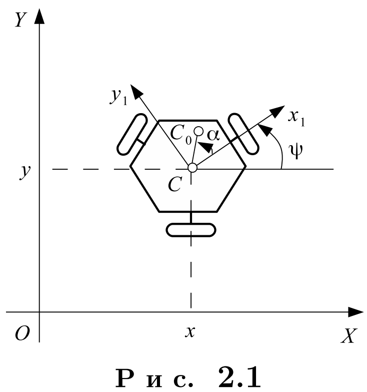


Рис. 2.1
Мобильный робот с тремя омни-колесами и смещенным центром масс

Робот имеет следующие массово-инерционные параметры: m_0 — масса платформы; m_1 — масса колеса робота; ρ_0, ρ_1 — соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс; r — радиус колеса; r_1 — радиус инерции колеса относительно оси вращения.

Пусть $OXYZ$ — неподвижная декартова система координат, связанная с горизонтальной опорной плоскостью OXY, ось OZ направлена вертикально вверх. Пусть C — центр равностороннего треугольника $C_1C_2C_3$ с вершинами, лежащими в центрах масс колес робота. $Cx_1y_1z_1$ — подвижная система координат с началом в точке C, жестко связанная с платформой робота. Ось Cx_1 совпадает с осью вращения первого колеса. Расстояние от центра платформы C до центра масс C_i $(i = 1, 2, 3)$ каждого колеса равно a.

Пусть x, y — координаты центра C платформы в системе координат $OXYZ$, ψ — угол поворота платформы вокруг вертикальной оси Cz_1. Центр масс робота C_0 смещен относительно центра C платформы на расстояние d, угол между осью Cx_1 и прямой CC_0 равен α.

Обозначим $q = (x, y, \psi)$, $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi})^T$, $V = (V_{x1}, V_{y1}, \omega)$ — вектор скорости платформы в подвижной системе координат $Cx_1y_1z_1$.

Выразим связь между векторами $\dot{q}$ и V в следующем виде [2]:

$$V = \Gamma\dot{q}, \tag{2.1}$$

где $\Gamma \in R^{3\times3}$ — матрица поворота следующего вида:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если движение робота происходит без проскальзывания колес, то справедливо следующее условие [2]:

$$\dot{\varphi} = JV, \tag{2.2}$$

где $\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)^T$ — вектор угловых скоростей колес, матрица $J \in R^{3\times3}$ имеет следующий вид:

$$J = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -a \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -a \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -a \end{pmatrix},$$

Если возникает проскальзывание i-го колеса, то будет отлична от нуля следующая величина [15]:

$$s_i = \frac{(r\omega_i - V_{ci})}{max\{r\omega_i, V_{ci}\}}, \tag{2.3}$$

где V_{ci} — абсолютная величина скорости центра C_i колеса; ω_i — абсолютная величина угловой скорости колеса.

Очевидно, что переменная s_i изменяется со временем в пределах от -1 до 1, $i = 1, 2, 3$.

Если имеет место скольжение колеса при торможении, т. е. $V_{ci} > r\omega_i$, то соотношение (2.3) можно записать в виде:

$$\omega_i = \frac{(1 + s_i)V_{ci}}{r}. \tag{2.4}$$

При этом условие (2.2) заменяется следующим соотношением:

$$\dot{\varphi} = (E + S)JV, \tag{2.5}$$

где $E = diag(1, 1, 1)$ — единичная матрица; $S = diag(s_1, s_2, s_3)$ — матрица переменных коэффициентов, характеризующих проскальзывание колес.

Построим динамическую модель робота, учитывая, что имеет место проскальзывание колес при торможении. Кинетическая энергия робота складывается из суммы кинетических энергий платформы и трех колес и имеет вид [2]

$$T = \frac{(m_s(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_q\dot{\psi}^2 - 2m_0 d\dot{\psi}(\dot{x}\sin(\alpha+\psi) - \dot{y}\cos(\alpha+\psi)) + m_1\rho_3^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2))}{2} \tag{2.6}$$

где $m_s = m_0 + 3m_1$ — масса робота; $I_q = m_0(\rho_0^2 + d^2) + 3m_1(\rho_1^2 + a^2)$ — момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс платформы.

Тогда уравнения динамики робота в системе координат $OXYZ$ примут вид

$$\begin{aligned} &A(q_3)\ddot{q} + \tilde{B}(q_3, \dot{q}_3)\dot{q} = P(q_3) r f_t \\ &I_\omega \ddot{\psi} = M - r f_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \psi$;

$$A(q_3) = \begin{pmatrix} m & 0 & -s(q_3) \\ 0 & m & c(q_3) \\ -s(q_3) & c(q_3) & I_s \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) = \begin{pmatrix} 0 & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & 0 & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P(q_3) = \begin{pmatrix} \sin q_3 & \sin\left(q_3 + \dfrac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(q_3 + \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos q_3 & -\cos\left(q_3 + \dfrac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3 + \dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix};$$

$c(q_3) = m_0 d\cos(\alpha + q_3)$; $s(q_3) = m_0 d\sin(\alpha + q_3)$; $I_w = m_1 r_1^2$ — момент инерции колеса относительно его оси вращения; $f_t = (f_{t1}, f_{t2}, f_{t3})^T$; f_{ti} — тяговое усилие, приложенное в точке контакта i-го колеса с поверхностью; $M = (M_1, M_2, M_3)^T$; M_i — вращающий момент, развиваемый i-ым электродвигателем;

$$m = m_0 + 3m_1 + \frac{3m_1\rho_3^2}{2r^2};$$
$$I_s = m_0(d^2 + \rho_0^2) + 3m_1\left[\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2\rho_3^2}{r^2}\right)\right].$$

Запишем уравнения (2.7) в виде

$$(A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + (\tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)I_\omega\dot{S}P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)M. \tag{2.8}$$

Согласно [2], предположим, что моменты, развиваемые электродвигателями постоянного тока, являются линейными относительно напряжения, подаваемого на двигатель, и угловой скорости вращения ротора, т. е.

$$M_j = c_u u_j - c_\nu \dot{\varphi}_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.9}$$

где c_u и c_ν — положительные постоянные коэффициенты; u_j — напряжение, подаваемое на j-ый двигатель; $c_\nu\dot{\varphi}_j$ — момент противоэлектродвижущей силы.

Подставляя выражения (2.9) в уравнения (2.7) и используя соотношения (2.2) и (2.5), получим

$$(A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E+S)P^T(q_3))\ddot{q} + (B(q_3,\dot{q}_3) + P(q_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)U, \quad (2.10)$$

где $U = (U_1, U_2, U_3)^T$, $U_j = c_u u_j$, $j = 1,2,3$, матрица $B(q_3,\dot{q}_3)$ имеет вид

$$B(q_3,\dot{q}_3) = \begin{pmatrix} h & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & h & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 2a^2h \end{pmatrix},$$

где $h = 3c_\nu/(2r^2)$.

3. Решение задачи об отслеживании траектории робота

Пусть $q = q^{(0)}(t)$ — отслеживаемая траектория, которая является дважды непрерывно дифференцируемой функцией времени. Предположим, что найдутся положительные числа ξ_1, η_k и ζ_k $(k = 1,2)$ – такие, что выполняются неравенства

$$|q_k^{(0)}(t)| \le \xi_1,\ |\dot{q}_k^{(0)}(t)| \le \eta_1,\ |\dot{q}_3^{(0)}(t)| \le \eta_2,$$
$$|\ddot{q}_k^{(0)}(t)| \le \zeta_1,\ |\ddot{q}_3^{(0)}(t)| \le \zeta_2,\ (k = 1,2).$$

Введем отклонения от отслеживаемой траектории:

$$e_k = q_k - q_k^{(0)}(t), \quad k = 1,2,3, \quad (3.1)$$

Будем решать задачу отслеживания траектории $q^{(0)}(t)$ робота при помощи управления

$$U = P^{-1}(q_3)(U^{(0)}(t) + U^{(2)}), \quad (3.2)$$

где функции $U^{(0)}(t)$ и $U^{(2)}$ определяются в виде

$$\begin{gathered} U^{(0)}(t) = A(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + B(q_3,\dot{q}_3^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t), \\ U_j^{(2)} = -\gamma_j \arctan(q_j - q_j^{(0)}),\ j = 1,2, \quad U_3^{(2)} = -\gamma_3 \sin\left(\frac{q_j - q_j^{(0)}}{2}\right) \end{gathered} \quad (3.3)$$

$\gamma_j > 0$, $j = 1,2,3$.

Уравнения в отклонениях (3.1) примут вид

$$\begin{gathered} (A(q_3^{(0)}(t)+e_3) + P(q_3^{(0)}(t)+e_3)I_\omega(E+S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3))\ddot{e}_q + \\ +(B(q_3^{(0)}(t)+e_3,\dot{q}_3^{(0)}(t)+\dot{e}_3) + P(q_3^{(0)}(t)+e_3)(I_\omega\dot{S}+c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3))\dot{e}_q + f(t,e_3)\dot{e}_3 = \\ = -diag(\gamma_1\arctan e_1, \gamma_2\arctan e_2, \gamma_3\sin e_3/2) + \delta(t,e_3). \end{gathered}$$

(3.4)

где $f = (m_2\dot{q}_2^{(0)}(t) - c(q_3^{(0)}(t)+e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t), -s(q_3^{(0)}(t)+e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t) - m_2\dot{q}_1^{(0)}(t), 0)^T$, $\delta(t,e_3) = P(q_3^{(0)}(t)+e_3)I_\omega(E+S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + P(q_3^{(0)}(t)+e_3)(I_\omega\dot{S}+c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3))\dot{q}^{(0)}(t)$.

Т е о р е м а 3.1 *Рассмотрим замкнутую систему в отклонениях* (3.4). *Пусть выполнены следующие неравенства:*

$$\begin{gathered} |\delta(t,e_3)| < \delta_0, \quad h > \varepsilon, \\ 2(2a^2h-\varepsilon)(h-\varepsilon) > (m_0 d\eta_2 + m_2\eta_1)^2, \\ \max\left(\frac{3}{2}, 2a^2\right)\frac{(c_\nu + 2I_\omega(\eta_2+\delta_3))}{r^2} < \varepsilon, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где ε *– малое положительное число,* $\delta_3 > 0$ *таково, что* $|\dot e_3| < \delta_3$.

Тогда система (3.4) *предельно ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}\dot e_q^T(A(q_3^{(0)}(t)+e_3) + P(q_3^{(0)}(t)+e_3)I_\omega(E+S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3))\dot e_q + \\ + \sum_{i=1}^{2}\gamma_i\int\limits_0^{e_i}\arctan e_i de_i + 2\gamma_3\left(1-\cos\frac{e_3}{2}\right) \tag{3.6}$$

Легко заметить, что функция V является положительно определенной, радиально неограниченной по всем переменным, кроме e_3, по которой она является периодической с периодом 4π, и выполняется следующее соотношение

$$V(t,e_q,\dot e_q) \to 0 \text{ равномерно по } t\in\mathbb{R} \text{ при } (e_q,\dot e_q)\to 0$$

.

Производная по времени функции Ляпунова (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot V = &\frac{1}{2}(\dot q_3^{(0)}(t)+\dot e_3)\times \\ &\times(\dot e_1,\dot e_2,\dot e_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c(q_3) \\ 0 & 0 & -s(q_3) \\ -c(q_3) & -s(q_3) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot e_1\\ \dot e_2\\ \dot e_3\end{pmatrix} - \\ &-\dot e_3(\dot e_1,\dot e_2,\dot e_3)\begin{pmatrix} 0 & m_2 & -c(q_3) \\ -m_2 & 0 & -s(q_3) \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot q_1^{(0)}(t)\\ \dot q_2^{(0)}(t)\\ \dot q_3^{(0)}(t)\end{pmatrix} - \\ &-(\dot e_3+\dot q_3^{(0)}(t))(\dot e_1,\dot e_2,\dot e_3)\begin{pmatrix} 0 & m_2 & -c(q_3) \\ -m_2 & 0 & -s(q_3) \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot e_1\\ \dot e_2\\ \dot e_3\end{pmatrix} - \\ &-(\dot e_1,\dot e_2,\dot e_3)diag(h,h,2a^2h)\begin{pmatrix}\dot e_1\\ \dot e_2\\ \dot e_3\end{pmatrix} + \\ &+(\dot q_3^{(0)}(t)+\dot e_3)\dot e_q^T P'(q_3^{(0)}(t)+e_3)I_\omega(E+S)P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3)\dot e_q + \\ &+\dot e_q^T P(q_3^{(0)}(t)+e_3)c_\nu S P^T(q_3^{(0)}(t)+e_3)\dot e_q + \dot e_q^T\delta(t,e_3) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя неравенства (3.5), получим, что выполняется следующее неравенство:

$$\dot V \le -\varepsilon(\dot e_1^2+\dot e_2^2+\dot e_3^2) + \delta_0\sqrt{\dot e_1^2+\dot e_2^2+\dot e_3^2}. \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.8) получим, что найдется такой момент времени $T > 0$, что $V(t) \le \varepsilon_0$ $\forall t \ge T$, где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число. Отсюда получаем предельную ограниченность системы (3.4). Теорема доказана.

4. Численное моделирование

Параметры робота выбраны следующими:

$$\begin{aligned} &m_0 = 20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad m_1 = 1 \text{ кг}, \\ &r = 0.1 \text{ м}, \quad a = 0.25 \text{ м}, \quad d = 0.05 \text{ м}, \\ &\alpha = \pi/61 \text{ рад}, \quad c_\nu = 6 * 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ &\rho_0 = 0.5 \text{ м}, \quad \rho_1 = 0.1 \text{ м}, \quad \rho_3 = 0.1 \text{ м}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Отслеживаемая траектория имеет вид

$$\begin{gathered} q_1^{(0)}(t) = 1 + 20\cos t \ \text{ м}, \quad q_2^{(0)}(t) = 2 + 30\cos(t) \ \text{ м}, \\ q_3^{(0)}(t) = \pi/4 + 10t \ \text{ рад}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Параметры управления выбраны следующими:

$$diag(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 20E,$$

где $E \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – единичная матрица; $h = 9$; $t = 100$ с.

На Рис. 4.1 и 4.2 показаны результаты численного моделирования движения робота. Зависимость от времени управляющих стабилизирующих моментов показана на Рис. 4.3. Анализируя графические результаты, можно сделать вывод, что закон управления (3.2)-(3.3) обеспечивает гладкую и быструю сходимость к отслеживаемой траектории.

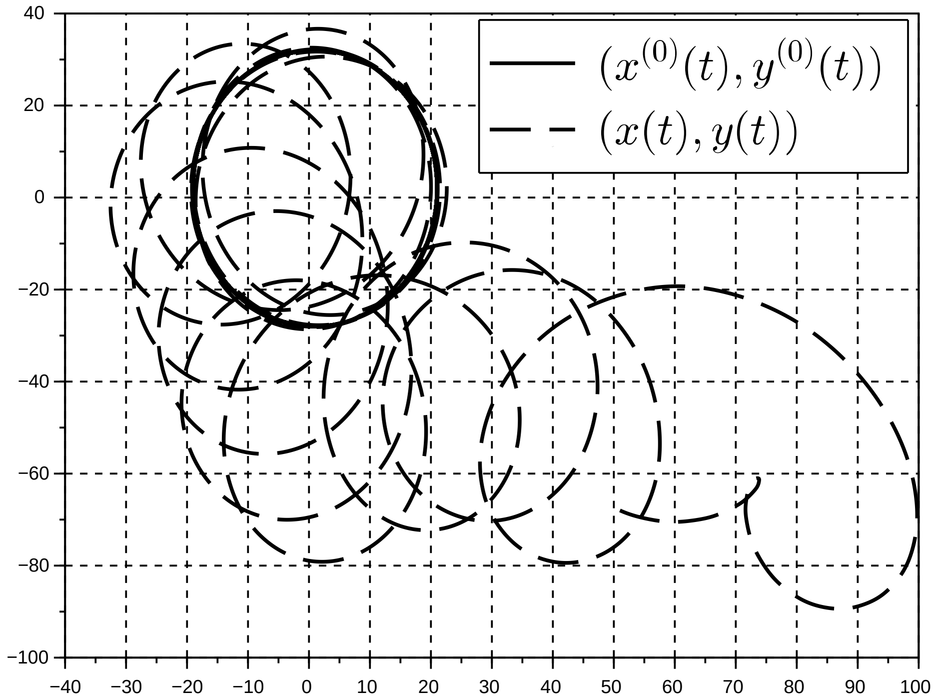
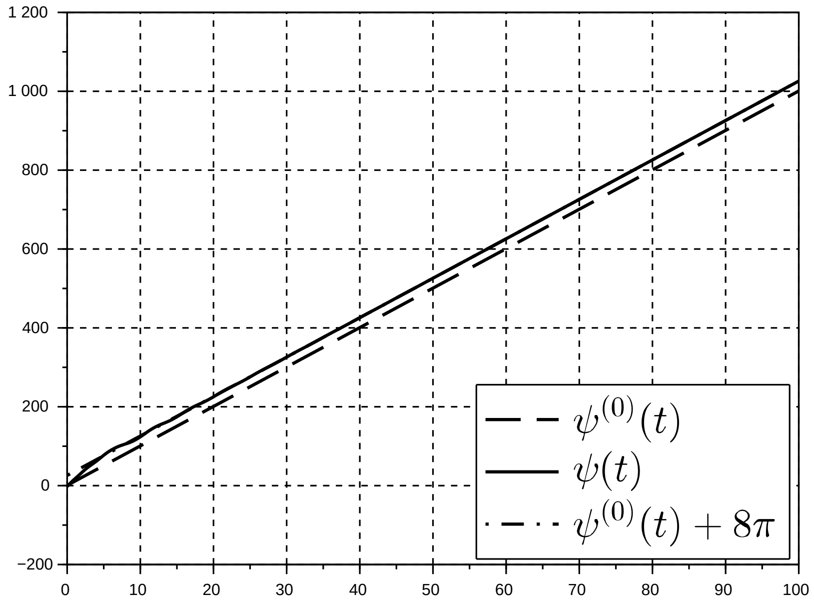
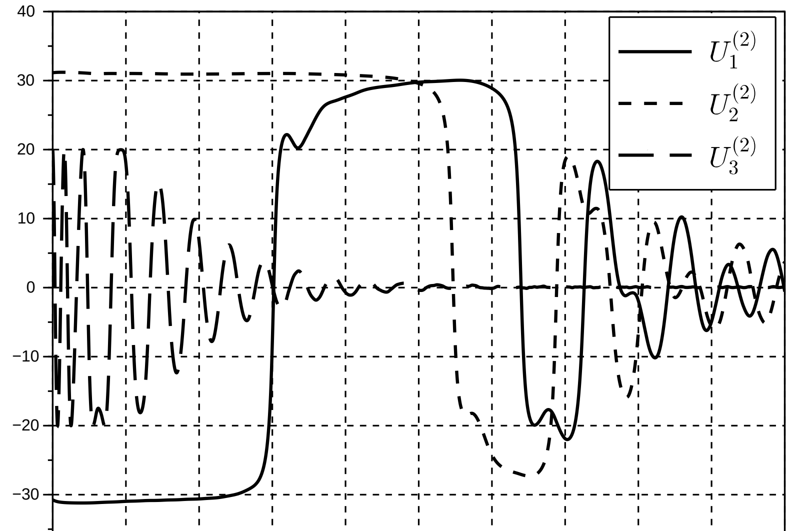


Рис. 4.1

Траектория мобильного робота и отслеживаемая траектория



Р и с. 4.2
Зависимость от времени угловой координаты платформы робота



Р и с. 4.3
Зависимость от времени управляющих стабилизирующих моментов

Робастность найденного закона управления (3.2)-(3.3) состоит в том, что он обеспечивает решение задачи отслеживания траектории робота при любых неизвестных изменяющихся коэффициентах скольжения s_i, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющих заданным ограничениям, сформулированным в Теореме.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания по НИР [9.5994.2017/БЧ] и РФФИ [18-01-00702].

Список литературы

1. Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский, “О движении мобильного робота с роликонесущими колесами”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2007, №6, 142–149.

2. Ю. Г. Мартыненко, “Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс”, *Прикладная математика и механика*, **74**:4 (2010), 610–619.

3. А. А. Зобова, Я. В. Татаринов, “Динамика экипажа с роликонесущими колесами”, *Прикладная математика и механика*, **73**:1 (2009), 13–22.

4. А. А. Зобова , К. В. Герасимов, “Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами”, *Прикладная математика и механика*, **82**:4 (2018), 427–440.

5. А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев, “Тележка с омниколесами на плоскости и сфере”, *Нелинейная динамика*, **7**:4 (2011), 785–801.

6. Ю. Л. Караваев, С. А. Трефилов, “Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами”, *Нелинейная динамика*, **9**:1 (2013), 91–100.

7. А. А. Килин, Ю. Л. Караваев, А. В. Клековкин, “Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 113–126.

8. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Dynamics and control of an omniwheel vehicle”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20** (2015), 153—172.

9. Y. Liu, J. J. Zhu, R. L. Williams, J. Wu, “Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization”, *Robotics and Autonomous Systems*, **56** (2008), 461–479.

10. H. C. Huang, C. C. Tsai, “Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties” (Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008), 2008, 5383–5388.

11. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “The motion control of a wheeled mobile robot”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:4 (2015), 316–324.

12. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots”, *IFAC Papers-OnLine*, **51**:4 (2018), 7–12.

13. S. J. C. Lins Barreto, A. G. Scolari Conceicao, C. E. T. Dorea, L. Martinez, E. R. De Pieri, “Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, **19**:2 (2014), 467–476.

14. Y. Huang, Q. Cao, C. Leng, "The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR", *Industrial Robot: An International Journal*, **37**:2 (2010), 193–201.

15. D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N.-S. Kuppuswamy, J.-H. Kim, "Nonlinera slip dynamics for a omniwheel mobile robot platform" (IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, April 10–14, 2007), 2007, 2367–2372.

Поступила 7.11.2018

MSC2010 45K05

Robust trajectory tracking control of omni-mobile robot with slipping of the wheels

© **A. S. Andreev**[1], **O. A. Peregudova**[2]

Abstract. In this paper we consider the problem of constructing a robust controller to track the trajectory of a mobile robot with three omni-wheels moving on a horizontal surface. A dynamic model of the robot has been constructed such that the center of mass of the circular platform is offset from its geometric center and the wheel slippage occurs during braking. The motion control of the wheeled robot is carried out by using three independent DC motors. The torques developed by the engines are linear with respect to voltage supplied to the engine and to angular velocity of the rotor. Basing on the Lyapunov function method we construct a bounded controller without velocity measurement that solves the robust trajectory tracking problem. This means that for all initial deviations the robot's trajectory falls into a given neighborhood of the tracked trajectory after some time and remains there forever. Theorem on an ultimate boundedness of a closed system is proved. The results of numerical simulation are presented confirming the effectiveness of the proposed controller.

Key Words: wheeled mobile robot, omni-wheel, slipping, trajectory tracking control, Lyapunov function, dynamical model.

References

1. Yu. G. Martynenko, A. M. Formalskii, "On the motion of a mobile robot with roller-carrying wheels", *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **46**:6 (2007), 976–983 (In Russ.).

2. Ju. G. Martynenko, "Stability of steady motions of mobile robot with omniwheels and displacement of the center of mass", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **74**:4 (2010), 436–442 (In Russ.).

3. A. A. Zobova, Ja. V. Tatarinov, "The dynamics of an omni-mobile vehicle", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **73**:1 (2009), 8–15 (In Russ.).

[1]**Aleksandr S. Andreev**, Head of Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2]**Olga A. Peregudova**, Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

4. A. A. Zobova, K. V. Gerasimov, “[The movement of a symmetric carriage on omni-wheels with massive rollers]”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **82**:4 (2018), 427–440 (In Russ.).

5. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere”, *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*, **1**:1 (2013), 33 (In Russ.).

6. Ju. L. Karavaev, S. A. Trefilov, “[Deviation based discrete control algorithm for omni-wheeled mobile robot]”, *Nelineynaya Dinamika*, **9**:1 (2013), 91–100 (In Russ.).

7. A. A. Kilin, Ju. L. Karavaev, A. V. Klekovkin, “[Kinematic control of a high manoeuvrable mobile spherical robot with internal omni-wheeled platform]”, *Nelineynaya Dinamika*, **10**:1 (2014), 113–126 (In Russ.).

8. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Dynamics and control of an omniwheel vehicle”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20** (2015), 153—172.

9. Y. Liu, J. J. Zhu, R. L. Williams, J. Wu, “Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization”, *Robotics and Autonomous Systems*, **56** (2008), 461–479.

10. H. C. Huang, C. C. Tsai, “Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties” (Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008), 2008, 5383–5388.

11. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “The motion control of a wheeled mobile robot”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:4 (2015), 316–324.

12. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, “Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots”, *IFAC Papers-OnLine*, **51**:4 (2018), 7–12.

13. S. J. C. Lins Barreto, A. G. Scolari Conceicao, C. E. T. Dorea, L. Martinez, E. R. De Pieri, “Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot”, *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, **19**:2 (2014), 467–476.

14. Y. Huang, Q. Cao, C. Leng, “The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR”, *Industrial Robot: An International Journal*, **37**:2 (2010), 193–201.

15. D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi, N.-S. Kuppuswamy, J.-H. Kim, “Nonlinear slip dynamics for a omniwheel mobile robot platform” (IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, Italy, April 10–14, 2007), 2007, 2367–2372.

Submitted 7.11.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.24-33

УДК 517.956.6

О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева

© С. З. Джамалов[1]

Аннотация. В статье доказана однозначная разрешимость и гладкость решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$ – целое число). Изучена однозначная разрешимость задач в пространстве $W_2^2(Q)$. Единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода доказана методом априорных оценок. Далее для доказательства существования решения рассматриваемых задач в пространстве $W_2^2(Q)$ использован метод Фурье. Другими словами рассматриваемая задача сводится к изучению однозначной разрешимости решения нелокальной краевой задачи для бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка. Для однозначной разрешимости полученных задач был использован метод «ε-регуляризации», т. е. сначала изучена методами функционального анализа однозначная разрешимость решения нелокальной краевой задачи для бесконечного числа систем уравнений составного типа с малым параметром, затем получены необходимые априорные оценки для рассматриваемых задач. Используя полученные оценки для бесконечного числа систем уравнений составного типа с малым параметром, с помощью теоремы о слабой компактности предельным переходом получено решение для бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка. Далее с помощью равенства Стеклова-Парсеваля для решения бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка была получена однозначная разрешимость первоначальной задачи. В конце статьи изучен вопрос гладкости решения поставленной задачи.

Ключевые слова: многомерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка, пространство Соболева, гладкость решения краевой задачи, нелокальная краевая задача.

1. Введение и постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Обозначим через

$$Q = \Omega \times (0, T) \times (0, \ell) = Q_1 \times (0, \ell) = \{(x, t, y); x \in \Omega, 0 < y < \ell, 0 < t < T < +\infty\}$$

область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial Q_1 \times (0, \ell)$, $S = \partial Q_1 = \partial\Omega \times (0, T)$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Lu \equiv K(x, t)\, u_{tt} - (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} - a(x, t)u_{yy} + \alpha\,(x, t)\, u_t + c\,(x, t)\, u = f\,(x, t, y), \tag{1.1}$$

где $K(x, 0) \leq 0 \leq K(x, T)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n, и будем предполагать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественнозначные и достаточно гладкие. Так как на знак функции

[1]**Джамалов Сирожиддин Зухриддинович**, доцент, старший научный сотрудник отдела «Дифференциальные уравнения» Института математики Академии наук Республики Узбекистан (100170, Узбекистан, г. Ташкент, Академгородок, ул. Мирзо Улугбек, д. 81), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129, siroj63@mail.ru

$K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений, то уравнение (1.1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода [1]–[2].

Предположим:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Кроме того, пусть выполнено одно из условий для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned} a)\quad & a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad \text{где } a_0 > 0, \\ b)\quad & a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2, \quad \text{где } a_1 < 0, \end{aligned}$$

здесь a_0, a_1 – некоторые константы.

Через $W_2^l(Q)$ ($2 \leq l$ – натуральное число) обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(\ ,\ )_l$ и нормой $\|\cdot\|_{W_2^l(Q)}$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ – пространство квадратично суммируемых функций.

При получении различных априорных оценок будем использовать неравенство Коши:

$$u \cdot v \leq \frac{\sigma u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}, \quad \forall\, u, v > 0,\ \forall\, \sigma > 0.$$

Для производных порядка p удобно принять обозначение:

$$D_z^p u = \frac{\partial^p u}{\partial z^p}, \quad \text{при этом } D_z^0 u = u.$$

Постановка *нелокальной краевой задачи* заключается в следующем: найти решение $u(x,t,y)$ уравнения (1.1) из пространства Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$, удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$u(x, 0, y) = \gamma \cdot u(x, T, y), \tag{1.2}$$

$$u|_S = 0, \tag{1.3}$$

$$u(x, t, 0) = u(x, t, \ell) = 0, \tag{1.4}$$

где γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Впервые нелокальные краевые задачи (1.2)–(1.3) для уравнения смешанного типа второго рода (1.1) в случае $a(x,t) = 0$ были исследованы функциональными методами в некоторых весовых и негативных пространствах в работах [3]–[4]. Далее в работах [5]–[6] в случае $K(x,0) = K(x,T) = 0$, $a(x,t) = 0$, γ – постоянное число, отличное от нуля, и при выполнении некоторых сравнительно сильных ограничений на коэффициенты уравнения (1.1) была доказана корректность решения задачи (1.1)–(1.3) в пространствах Соболева. Отметим, что в работах [7]–[9] в случае, когда $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$, $a(x,t) = 0$, γ – постоянное число, отличное от нуля, доказаны однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (1.1)–(1.3) в пространствах Соболева.

В настоящей работе с использованием результатов работ [7]–[9], в случае $a(x,t) \neq 0$ и при выполнении условия (1.4) на решение уравнения (1.1), изучаются однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (1.1)–(1.4) в многомерных пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

Сначала рассмотрим случай $m = 0$.

2. Единственность решения нелокальной краевой задачи

Т е о р е м а 2.1 *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (1.1)*; кроме того, пусть* $2\alpha(x,t) - K_t(x,t) + \lambda K(x,t) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\ c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\ a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \dfrac{-2}{T}\ln|\gamma|$, *причем* $|\gamma| < 1$ *в случае a) и* $|\gamma| > 1$ *в случае b),* $c(x,0) \leq c(x,T)$, $a\,(x,0) \leq a\,(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда, если для любой функции* $f(x,t,y) \in L_2(Q)$ *существует решение задачи* (1.1)–(1.4) *в пространстве* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем единственность решения задачи (1.1)–(1.4) с помощью интеграла энергии.

Пусть существует решение задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$. Рассмотрим равенство:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdtdy = 2\int\limits_Q f \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdydt. \tag{2.1}$$

Для любой функции $u \in W_2^2(Q)$ после интегрирования по частям равенства (2.1) нетрудно получить следующее равенство:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdtdy = \int\limits_Q e^{-\lambda t}\left\{(2\alpha - K_t + \lambda K)\ u_t^2 + \lambda\, a_{ij}\ u_{x_i}u_{x_j} + (\lambda a - a_t)u_y^2 + \right.$$
$$\left. + (\lambda c - c_t)u^2\right\} dxdtdy + \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\left\{Ku_t^2 e_t - 2a_{ij}u_{x_i}u_t e_{x_i} + a_{ij}\cdot u_{x_i}u_{x_j}e_t + cu^2 e_t + \right.$$
$$\left. + au_y^2 e_t - 2au_y u_t e_y\right\} ds, \tag{2.2}$$

где $e_{x_i} = \cos\alpha_i\ (i = 1,...,n)$, $e_t = \cos\ \beta$, $e_y = \cos\ \gamma$ - координаты внешней по отношению к Q единичной нормали $\overrightarrow{e}$ к границе ∂Q, $\alpha_i\ (i = 1,...,n)$, β, γ - соответствующие углы, которые образует с осями координат $Ox_i\ (i = 1,...,n), Ot, Oy$ единичная нормаль $\overrightarrow{e}$, $ds-$ инфинитезимальный элемент площади поверхности ∂Q (см. [11],стр.75). Условия теоремы 2.1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2)–(1.3), тогда выражение $\left[Ku_t^{\,2} + a_{ij}u_{\,x_i}u_{\,x_j} + cu^{\,2} + au_y^2\right]\cdot e_t \cdot e^{-\lambda t}$ – положительно на основаниях области Q (см. [2],стр.49), а на боковой границе ∂Q равно нулю. Наконец,a_{ij}, u_{x_i}, u_t, e_{x_i} равны нулю на ∂Q, так как $e_{x_i} = 0$ на основаниях области Q, $u(x,t) = 0$ на S, согласно условия (1.4) $au_{\,y}u_{\,t}e_y = 0$. Отбрасывая положительный граничный интеграл в равенстве (2.2), получим:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot \exp(-\lambda\, t)\cdot u_t\, dxdtdy \quad \geq \int\limits_Q \exp(-\lambda\, t)\cdot\{(2\,\alpha - K_t + \lambda K)\cdot u_t^2 +$$
$$+ \lambda\, a_k \cdot u_{x_i}\cdot u_{x_j} + (\lambda\, a - a_t)u_y^2 + (\lambda\, c - c_t)\, u^2\}\, dxdtdy, \tag{2.3}$$

где $a_k = a_0$ в случае a), $a_k = a_1$ в случае b).

Применяя неравенство Коши к (2.3), получим необходимую первую априорную оценку:

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1\, \|f\|^2_{L_2(Q)}\,. \tag{2.4}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$. Пусть существуют $u_1(x,t,y)$ и $u_2(x,t,y)$ – два решения задачи (1.1)–(1.4) из $W_2^2(Q)$, тогда для $u = u_1 - u_2$ из неравенства (2.4) получим $\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \le 0$, что возможно лишь в случае $u = 0$ или $u_1 = u_2$, что и доказывает единственность решения задачи (1.1)–(1.4) из $W_2^2(Q)$. Доказательство закончено.

Замечание 2.1 *Через c_i – здесь и далее обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные.*

Для доказательства разрешимости задачи (1.1)–(1.4) сначала применим метод Фурье. Для этого решение задачи (1.1)–(1.4) будем искать в виде:

$$u(x,t,y) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x,t) Y_s(y), \tag{2.5}$$

где функции $Y_s(y) = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_s y \right\}$, $\mu_s = \left(\frac{\pi s}{\ell}\right)^2$, $s = 1, 2, ...$ являются решениями спектральной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле. Известно, что система собственных функций $\{Y_s(y)\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и образует в нем ортонормированный базис [10]–[12].

В этом случае задача (1.1)–(1.4) сведется к определению функций $u_s(x,t)$, $s = 1, 2, ...$ в области $Q_1 = \Omega \times (0,T)$ из счетной системы уравнений смешанного типа второго порядка:

$$Lu_s \equiv K(x,t)u_{stt} - (a_{ij}(x)u_{sx_i})_{x_j} + \alpha(x,t)u_{st} + (c(x,t) + a(x,t)\mu_s^2)u_s = f_s(x,t),\ s = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$u_s\,(x,0) = \gamma \cdot u_s(x,T), \tag{2.7}$$

$$u_s\,|_S = 0, \tag{2.8}$$

где $f_s(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \int\limits_0^\ell f(x,t,y) \sin \mu_s y dy$.

Отметим, что в работах [7]–[9] при выполнении условий теоремы 2.1 исследована однозначная разрешимость задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W_2^{m+2}(Q_1)$, $(m = 0, 1, ...)$ при фиксированном s для случая, когда $a(x,t) = 0$.

3. Семейство уравнений составного типа с малым параметром

Разрешимость задачи (2.6)–(2.8) докажем методом «ε-регуляризации», а именно в области $Q_1 = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим краевую задачу для счетного семейства уравнений составного типа с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon} \equiv -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{s,\varepsilon} + L u_{s,\varepsilon} = f_s(x,t), \tag{3.1}$$

$$D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=0} = \gamma \cdot D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=T},\ q = 0, 1, 2; \tag{3.2}$$

$$u_{s,\varepsilon}|_S = 0, \tag{3.3}$$

где $s = 1, 2, ...$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$ – оператор Лапласа, ε – малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q = 1, 2$; $D_z^0 w = w$. Ниже используем системы уравнений составного типа с малым параметром (3.1) в качестве «ε-регуляризирующего» уравнения для системы

уравнений смешанного типа второго порядка (2.6) [1], [7]–[9],[13].
Через $W(Q_1)$ ниже будем обозначать пространство вектор-функций $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$, таких как $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^{\infty} \in W_2^2(Q_1)$, $\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vartheta_s\}_{s=1}^{\infty} \in L_2(Q_1)$, и удовлетворяющих соответствующим условиям (3.2)–(3.3).

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|\vartheta_s\|^2_{W(Q_1)} = \|\vartheta_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} + \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vartheta_s\right\|^2_{L_2(Q_1)}.$$

Очевидно, что пространство $W(Q_1)$ с заданной нормой является банаховым [11]–[12].

Определение 3.1 *Регулярным решением задачи* (3.1)–(3.3) *будем называть вектор-функцию* $\{u_{s,\varepsilon}(x,t)\} \in W(Q_1)$, *удовлетворяющую уравнению* (3.1).

Теорема 3.1 *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (3.1)*; кроме того, пусть* $2\alpha - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\ c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\ a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{-2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\gamma| > 1$ *в случае a) и* $\lambda = \frac{-2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\gamma| < 1$ *в случае b)*, $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любых функций* $f_s(x,t) \in L_2(Q_1)$, *таких, что* $f_{st}(x,t) \in L_2(Q_1)$, $\gamma \cdot f_s(x,0) = f_s(x,T)$, *существует единственное решение задачи* (3.1)–(3.3) *в пространстве* $W(Q_1)$ *и для решения задачи* (3.1)–(3.3) *справедливы следующие оценки:*

$$I)\quad \varepsilon\Big(\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2\Big) + \|u_{s,\varepsilon}\|_1^2 \leq c_2 \cdot \|f_s\|_0^2,$$

$$II)\quad \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\ u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2 + \|u_{s,\varepsilon}\|_2^2 \leq c_3 \cdot \ \big(\ \|\ f_s\ \|_0^2 + \|\ f_{st}\ \|_0^2\ \big)$$

Доказательство. Покажем справедливость первой оценки. Для этого рассмотрим равенство:

$$2\int_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\ \cdot u_{s,\varepsilon t}\,dxdt\ =\ 2\int_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot f_s \cdot u_{s,\varepsilon t}\,dxdt, \tag{3.4}$$

Интегрируя по частям равенство (3.4) и учитывая условия теоремы 3.1, нетрудно получить оценку I), аналогичную оценке (2.4), из которой следует единственность решения задачи (3.1)–(3.3) при фиксированном s.

Теперь докажем справедливость второй оценки. Для этого рассмотрим равенство:

$$-2\int_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\ \cdot \ell u_{s,\varepsilon}\,d\,x\,d\,t\ =\ -2\int_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot f_s\cdot \ell u_{s,\varepsilon}\,d\,x\,d\,t\,, \tag{3.5}$$

где $\ell u_{s,\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{s,\varepsilon} - \lambda\,u_{s,\varepsilon tt} + \frac{\lambda}{2}\,u_{s,\varepsilon xx} - \lambda u_{s,\varepsilon t}\right)$.

Интегрируя по частям (3.5), с учетом условий теоремы 3.1 и краевых условий (3.2)–(3.3), получим следующее неравенство:

$$c_3\ (\|\ f_{st}\,\|_0^2 + \|\ f_s\ \|_0^2) \geq \varepsilon\ \left\|\ \frac{\partial\,\Delta u_{s,\varepsilon}}{\partial\ t}\ \right\|_0^2 + \int_Q e^{-\lambda\cdot t}\,\{(\,2\alpha + K_t + \lambda\,K\ )u^2_{s,\varepsilon tt} +$$

$$+(2\alpha - K_t + \lambda\ K\ )u^2_{s,\varepsilon t x_i} + \lambda\ a_k(u^2_{s,\varepsilon x_i t} + u^2_{s,\varepsilon x_i x_j})\,\}dxdt\ +\ b_0\,\|u_{s,\varepsilon}\,\|^2_1 +$$

$$+\int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda\cdot t}\{K(u^2_{s,\varepsilon tt} + u^2_{s,\varepsilon x_i t}) + \alpha\ u_{s,\varepsilon t}u_{s,\varepsilon tt} + (a_{\,ij}u_{s,\varepsilon x_i})_{\,x_j}(u_{s,\varepsilon x_i x_j} + u_{s,\varepsilon tt}) +$$

$$+2\,(c + \mu_s^2 a)\,u_{s,\varepsilon}\,(u_{s,\varepsilon tt} + u_{s,\varepsilon x_i x_j})\,\}e_t\,ds + \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda\cdot t}\{Ku_{s,\varepsilon tt}u_{s,\varepsilon t x_i}\ + 2\alpha\ u_{s,\varepsilon t}u_{s,\varepsilon tt} +$$

$$+(a_{ij}\,u_{s,\varepsilon x_i})_{\,x_j t}u_{s,\varepsilon tt}\ \}\,e_{x_i}ds - \sigma(\|u_{s,\varepsilon tt}\|^2_0 + \|u_{s,\varepsilon x_i x_i}\|^2_0) - c_1(\sigma)\,\|u_{s,\varepsilon}\|^2_1 = \sum_{i=1}^{8} J_i, \tag{3.6}$$

где J_i $(i\ =\ 1,2,3,6,7,8)$ – интегралы по области; J_4, J_5 – интегралы по границе; σ и $c_1(\sigma) = \sigma^{-1}\max\{\|\alpha\|_{C^1(Q_1)},\ \|a_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^1(Q_1)}, \|a\|_{C^1(Q_1)}\}$ – коэффициенты неравенства Коши. Выбирая коэффициенты $b-\sigma \geq b_0 > 0$, $b = \min\{\delta_1,\ \lambda a_k, \delta_2 + \delta_3\cdot \left(\dfrac{\pi}{\ell}\right)^2\}$ и учитывая условия теоремы 3.1 и краевые условия (3.2)–(3.3), получим, что граничные интегралы $J_4\ =\ 0$, $J_5\ =\ 0$, а интегралы по области Q $J_i\ >\ 0$, $(i\ =\ 1,2)$.

Учитывая условия теоремы 3.1 и используя неравенство Коши, из неравенства (3.6) получим необходимую вторую оценку.

Из полученных оценок получим однозначную разрешимость задачи (3.1)–(3.3) из пространства $W(Q_1)$.

Доказательство закончено.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (2.6)–(2.8).

4. Существование решения нелокальной краевой задачи

Теорема 4.1 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда решение задачи* (2.6)–(2.8) *существует и единственно в* $W^2_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство теоремы 4.1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 в работах [8]–[9]. Единственность решения задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W^2_2(Q)$ доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование решения задачи (2.6)–(2.8) в $W^2_2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q_1 уравнение (3.1) и краевые условия (3.2)–(3.3) при $\varepsilon > 0$. Поскольку выполнены все условия теоремы 3.1, то существует единственное решение задачи (3.1)–(3.3) из $W(Q_1)$ при $\varepsilon > 0$, и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества вектор-функций $\{\,u_{s,\varepsilon}(x,t)\}\ \ ,\varepsilon\,>\,0$ при фиксированной s можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\,\} \to u_s\,(x,t)$ при $\varepsilon_i \to\ 0$ в $W(Q_1)$.

Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu_s = f_s$ (уравнению (2.6)) почти всюду. В самом деле, так как последовательность $\{\,u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W^2_2(Q)$, а последовательность $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\,s,\varepsilon\,i}(x,t)\right\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q_1)$ и оператор L – линейный, то

$$Lu_s - f_s = Lu_s - Lu_{\,s,\varepsilon_i} + \varepsilon_i\frac{\partial}{\partial\,t}\Delta u_{\,\varepsilon_i} = L\,(u_s - u_{\,s,\varepsilon_i}) + \varepsilon_i\frac{\partial}{\partial\,t}\Delta u_{\,\varepsilon_i}. \tag{4.1}$$

Из равенства (4.1), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$ и при фиксированном s, получим единственное решение задачи (2.6)–(2.8).

Доказательство закончено.

Докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Т е о р е м а 4.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1. Тогда решение задачи* (1.1)–(1.4) *существует и единственно в* $W_2^2(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность решения задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование решения задачи (1.1)–(1.4) в $W_2^2(Q)$. Мы доказали однозначную разрешимость задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W_2^2(Q_1)$ и для решения задачи (2.6)–(2.8) доказана соответствующая оценка:

$$\|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} \leq c_3 \cdot \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)}.$$

Поскольку система собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\sin\mu_s y\right\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис, используя равенство Парсеваля-Стеклова [11]–[12] для решения задачи (1.1)–(1.4), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} < c_3 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)} = c_3 \cdot \|f\|^2_1. \qquad (4.2)$$

Отсюда получим существование единственного решения задачи (1.1)–(1.4) из пространства $W_2^2(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Гладкость решения нелокальной краевой задачи

Теперь обратимся к исследованию гладкости решения задачи (1.1)–(1.4), когда $m \geq 1$. Ниже для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) необходимое число раз дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

Т е о р е м а 5.1 *Пусть выполнены условия теоремы 4.2; кроме того, пусть* $2(\alpha + mK_t) - |K_t| + \lambda K \geq \delta > 0$, $D_t^q K|_{t=0} = D_t^q K|_{t=T}$, $D_t^q \alpha|_{t=0} = D_t^q \alpha|_{t=T}$, $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$, $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t,y)$, *такой, что* $f \in W_2^m(Q)$, $D_t^{m+1} f \in L_2(Q)$, $D_t^m f|_{t=0} = \gamma \cdot D_t^m f|_{t=T}$ $(q = 0,1,2,3,...,m)$ *существует, причем единственное, решение задачи* (1.1)–(1.4) *в пространствах Соболева* $W_2^{m+2}(Q)$, *где* $m \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим также, что в работах [7]–[9] при фиксированном s, в более общем случае, когда $a(x,t) = 0$, и при ослабленных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (2.6) исследована гладкость решения нелокальной краевой задачи (2.6)–(2.8) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q_1)$, $m \in \mathbb{N}$ и доказаны соответствующие оценки:

$$\|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} \leq c_{m+3} \cdot \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)}, \; m \in \mathbb{N}. \qquad (5.1)$$

Путем аналогичных рассуждений при фиксированном s в случае $a(x,t) \neq 0$ для решения нелокальной краевой задачи (2.6)–(2.8) можно доказать априорные оценки (5.1).

Поскольку система собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\sin\mu_s y\right\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и образует в нем ортонормированный базис, используя равенство Парсеваля-Стеклова [11]–[12] для решения задачи (2.6)–(2.8), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} < c_{m+3} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)} = c_{m+3} \cdot \|f\|^2_{W_2^{m+1}(Q)}. \qquad (5.2)$$

Отсюда получим существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.4) из пространства $W_2^{m+2}(Q)$, $m \in \mathbb{N}$.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. В. Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, НГУ, Новосибирск, 1983, 84 с.

2. А. Г. Кузьмин, *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике*, ЛГУ, Ленинград, 1990, 204 с.

3. С. Н. Глазатов, “Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике”, *Сиб. мат. журн.*, **25**:6 (1985), 162–164.

4. А. Н. Терехов, *Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа. В сб. Неклассические уравнения математической физики*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 158 с.

5. С. З. Джамалов, *О корректности нелокальных краевых задач для многомерного уравнения смешанного типа. // В сб. Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1989, 70 с.

6. М. Г. Каратопраклиева, “Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа”, *Дифференциальные уравнения*, **27**:1 (1991), 68–79.

7. С. З. Джамалов, “Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в прямоугольнике.”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:4 (2017), 12–21.

8. S. Z. Djamalov, “On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle”, *IIUM Journal*, **17**:2 (2016), 95–104.

9. С. З. Джамалов, “О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве”, *Мат. заметки СВФУ*, **24**:4 (2017), 17–28.

10. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965, 798 с.

11. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва, 1973, 407 с.

12. В. А. Треногин, *Фунциональный анализ*, Наука, Москва, 1980, 495 с.

13. А. И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*, НГУ, Новосибирск, 1990, 130 с.

Поступила 4.06.2018

MSC2010 35M10, 35M20

On the smoothness of the solution of a nonlocal boundary value problem for the multidimensional second-order equation of the mixed type of the second kind in Sobolev space

© **S. Z. Dzamalov**[1]

Abstract. In this paper we prove the unique solvability and smoothness of the solution of a nonlocal boundary-value problem for a multidimensional mixed type second-order equation of the second kind in Sobolev space $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$ is an integer). First, we have studied the unique solvability of the problems in the space $W_2^2(Q)$. Solution uniqueness for a nonlocal boundary-value problem for a mixed-type equation of the second kind is proved by the methods of a priori estimates.Further, to prove the solution existence in the space $W_2^2(Q)$, the Fourier method is used. In other words, the problem under consideration is reduced to the study of unique solvability of a nonlocal boundary value problem for an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind. For the unique solvability of the problems obtained, the "ε-regularization" method is used, i.e, the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for an infinite number of systems of composite-type equations with a small parameter was studied by the methods of functional analysis. The necessary a priori estimates were obtained for the problems under consideration. Basing on these estimates and using the theorem on weak compactness as well as the limit transition, solutions for an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind are obtained. Then, using Steklov-Parseval equality for solving an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind, the unique solvability of original problem was obtained. At the end of the paper, the smoothness of the problem's solution is studied.

Key Words: multidimensional second-order equation of the mixed type of the second kind, Sobolev space, smoothness of the solution of the boundary problem, nonlocal boundary problem.

References

1. V . N. Vragov, *[Boundary problems for non-classical equations of mathematical physics]*, NGU, Novosibirsk, 1983 (In Russ.), 84 p.

2. A. G. Kuzmin, *[Non-classical mixed type equations and their applications to the gas dynamics]*, LGU, Leningrad, 1990 (In Russ.), 204 p.

3. S. N. Glazatov, "[Nonlocal boundary problems for mixed type equations in a rectangle]", *Siberian Math. Journ*, **26**:6 (1985), 162–164 (In Russ.).

4. A. N. Terekhov, "[Nonlocal boundary problems for equations of variable type]", 1985, 148–158 (In Russ.).

5. S. Z. Dzhamalov, *[About a correctness of a nonlocal value problems for the second order mixed type multidimensional equations]. Application of methods of the functional analysis to the nonclassical equations of mathematical physics]*, SO. AN. USSR, Novosibirsk, 1989 (In Russ.), 70 p.

[1]**Sirojiddin Z. Dzamalov**, Associate Professor, Senior Researcher, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences (81 Mirzo Ulugbek Str., Tashkent, 100170, Uzbekistan), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129, siroj63@mail.ru

6. M. G. Karatopraklieva, “[A nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type]”, *Differents. uravneniya*, **27**:1 (1991), 68–79 (In Russ.).

7. S. Z. Dzhamalov, “[About one nonlocal value problem with constant coefficients for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:4 (2017), 12–21 (In Russ.).

8. S. Z. Djamalov, “[On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]”, *IIUM Journal*, **17**:2 (2016), 95–104.

9. S. Z. Dzhamalov, “About a correctness of one nonlocal value problem with constant coefficients for the second order mixed type equations of the second kind in space”, *Mat. Notes SVFU*, **24**:4 (2017), 17–28 (In Russ.).

10. Yu. M. Berezansky, *[Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators]*, Naukova dumka, Kyev, 1965 (In Russ.), 798 p.

11. O. A. Ladyjenskaya, *[Boundary problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 407 p.

12. V. A. Trenogin, *The functional analysis*, Nauka Publ., Moscow., 1980 (In Russ.), 495 p.

13. A. I. Kozhanov, *[Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order]*, NGU, Novosibirsk, 1990 (In Russ), 130 p.

Submitted 4.06.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.34-47

УДК 519.85:517.988

Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проектирования в переменной метрике

© **В. Г. Малинов**[1]

Аннотация. В работе изучается новый непрерывный метод второго порядка для решения задач минимизации непрерывно дифференцируемых по Фреше выпуклых функций на выпуклом замкнутом простом множестве в сепарабельном нормированном гильбертовом пространстве с переменной метрикой. Этот метод ускоряет обычный непрерывный проекционный метод минимизации с помощью квазиньютоновских матриц. В методе использован, кроме оператора переменной метрики, вектор направления движения к минимуму функции, построенный во вспомогательной экстраполированной точке. Иными словами, исследован сложный непрерывный экстраградиентный метод с переменной метрикой. Дан краткий обзор развития родственных методов и указаны их связи с исследуемым методом. Приведены вспомогательные неравенства, используемые для теоретического обоснования метода. С их помощью, при заданных дополнительных условиях, включая требования к оператору метрики и к параметрам метода, доказана сходимость метода для выпуклых гладких функций. При условиях, полностью идентичных условиям теоремы сходимости, без дополнительных требований к свойствам функции, для выпуклых гладких функций, получены оценки скорости сходимости метода. Указано, что вычислительную реализацию метода нужно выполнять с помощью численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, с учётом условий доказанных теорем.

Ключевые слова: выпуклая функция, непрерывный метод минимизации, проекция в переменной метрике, сходимость, скорость сходимости.

1. Введение

Рассмотрим задачу минимизации на простом множестве $Q \subset H$:

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где Q – выпуклое замкнутое множество из сепарабельного гильбертова пространства H с нормой $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ $\forall$ $\mathbf{x} \in H$; «овражная» функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, с градиентами $\nabla f(\mathbf{x})$, удовлетворяющими условию Липшица,

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \le L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|, \ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H, \ L = const > 0. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что условия существования решения задачи выполнены,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : \ f(\mathbf{x}) = f_*\} \ne \emptyset. \tag{1.3}$$

В ряде работ как для решения задач вида (1.1), так и нелинейной минимизации при функциональных ограничениях исследованы как непрерывные проекционные методы (НПММ), основанные на дифференциальных моделях оптимизации (см. [1]–[7]), так и итеративные методы (см., например, [8]–[9]). НПММ имеют форму задачи Коши для

[1]**Малинов Валериан Григорьевич**, доцент ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, vgmalinov@mail.ru

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, с оператором метрики в обеих частях ОДУ или только в его правой части. ОДУ в них могут быть от первого до высоких порядков, в соответствии с этим определяется порядок НПММ.

Если проекционное отображение зависит от градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x}(t))$, то имеем метод проекции градиента (НМПГ) ([1]–[5]).

В общем случае НПММ называем непрерывный метод с проекционным оператором, зависящим от сложного векторного выражения, например, вида $g(\mathbf{y}(t)) + \delta(t)h(\mathbf{v}(t))$, где, например, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), \nabla f(\mathbf{y}(t)), g(\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(t) = \varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$ – вектор-функция; $\delta(t) \neq 0$ – скалярная или векторная функция; очевидно, что НМПГ — частный случай НПММ [6].

Быстрота и точность решения «овражных» задач с помощью НПММ выше для случая НПММ переменной метрики (НПММПМ). Поэтому предложены НПММПМ, сначала на основе простейших НМПГ (НМПГПМ) в работах [3]–[5], первого и второго порядков. В работе [4] доказана сходимость НМПГПМ второго порядка, но нет оценок скорости сходимости. В работе [5] доказана сходимость и получены оценки экспоненциальной скорости сходимости другого НМПГПМ второго порядка.

В работе [6] предложен и исследован НПММПМ второго порядка с оператором $P_Q(\mathbf{z}(t))$ проектирования не в переменной, а обычной евклидовой метрике, порожденной исходной нормой из задачи (1.1) (где сложная функция $\mathbf{z}(t) = g(\mathbf{y}(t)) + \beta(t)\mathbf{B}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))$ есть комбинация векторного выражения и произведения оператора метрики и градиента сложной функции; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t)$); доказаны сходимость и экспоненциальная скорость сходимости метода.

Цель предлагаемой работы — полное исследование НПММПМ второго порядка с оператором проектирования в новой, переменной метрике (см. [7]), итеративный аналог которого — проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный метод минимизации (ПОДМ) с оператором проектирования в переменной метрике [8].

2. Пространство H_1 и предлагаемый метод

Задачу (1.1) решаем в сепарабельном гильбертовом пространстве H_1 с двумя метриками. Первая метрика — обычная евклидова (см. постановку задачи), а вторая $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})} = (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ вводится новым скалярным произведением $(\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})$, где $\mathbf{G}(\mathbf{x}) : H \longrightarrow H$ при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in H$ есть положительный самосопряженный линейный оператор новой метрики пространства [3]–[4]. В новой метрике критерий проекции $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}(\mathbf{v}) \in Q$ (называемой $\mathbf{G}$-проекцией) есть неравенство

$$(\mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \ \mathbf{u} \in Q. \tag{2.1}$$

Эта $\mathbf{G}$-проекция определяется условием $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})} = \inf_{\mathbf{u}\in Q} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$, она существует, вычисляется как решение $\mathbf{w} \in Q$ квадратичной задачи

$$g(\mathbf{u}) = (\mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in Q, \tag{2.2}$$

и единственна в силу выпуклости множества Q и сильной выпуклости функции $g(\mathbf{u})$ [3].

В пространстве H_1 наряду с (2.1) имеет место классический критерий (см. [9], с. 189) проекции $\mathbf{w} \in Q$ вектора $\mathbf{v} \in H_1$

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in Q \tag{2.3}$$

на выпуклое замкнутое множество $Q \subset H_1$. Поскольку сепарабельные гильбертовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны ([10], с. 156), в H_1 сохраняются все соотношения и теоремы из E^n и H, связанные со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} \alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))}[\mathbf{y}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))], \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \sigma(t)\mathbf{x}'(t),\ t \geq 0,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ — параметры НПММПМ второго порядка (2.4); самосопряженный линейный оператор метрики $\mathbf{G}(\mathbf{y})$ таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{G}(\mathbf{y})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq M\|\mathbf{u}\|^2,\ 0 < m \leq M,\ \mathbf{u}, \mathbf{y} \in H_1; \tag{2.5}$$

а для обратного ему оператора имеют место неравенства

$$\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{M} \leq (\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{m},\ \mathbf{u}, \mathbf{y} \in H_1; \tag{2.6}$$

в правой части (2.4) проектирование проводится в новой метрике $\mathbf{G}(\mathbf{y})$, для этого вычисляется минимум сильно выпуклой функции в задаче вида (2.2). Предполагается, что решение задачи Коши (2.4) существует на всей полуоси $[0, \infty)$.

Приведем результаты исследования НПММПМ (2.4) для решения задачи вида (1.1) в пространстве H_1.

Отметим, что при $\alpha(t) = 0$, $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$, $\sigma(t) = 0$ из (2.4) получим НМПГ первого порядка [1]; при $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$, $\sigma(t) = 0$ из (2.4) получим НМПГ второго порядка [2]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\sigma(t) = 0$ метод (2.4) превращается в НМПГПМ первого порядка, предложенный и исследованный в работе [3]; при $\sigma(t) = 0$ и наличии оператора метрики при второй производной в левой части из (2.4) получим НМПГПМ второго порядка из работы [4]; при $\sigma(t) = 0$, $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v})} = P_Q(\mathbf{v})$ из (2.4) получим НМПГПМ второго порядка, предложенный и исследованный в работе [5]; если $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))(\mathbf{v})} = P_Q(\mathbf{v})$, $\sigma(t) \neq 0$, то (2.4) преобразуется в НПММПМ второго порядка из работы [6].

Данная работа дополняет теорию НПММ исследованием НПММПМ второго порядка без оператора метрики в левой части ОДУ вне оператора проектирования (см. [4]–[6]). (Аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$ параметров метода, и их производных часто опускаем.)

3. Вспомогательные утверждения

Приведем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве сходимости и оценок скорости сходимости НПММПМ семейства (2.4) и других методов в пространстве H_1.

Замечание 3.1 *Неравенство*

$$\left(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0\ \forall\ \mathbf{u} \in Q \tag{3.1}$$

можно получить путем применения критерия проекции (2.3) из равенства

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left(\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right), \quad \beta > 0.$$

Последнее соотношение и (3.1) для евклидова пространства E^n с переменной метрикой имеются в работе [3]. Они представляют собой условия оптимальности точки $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$. В E^n с обычной метрикой их аналоги даны в [9]. Следующая лемма выражает формальную взаимосвязь необходимых условий оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ для функции $f(\mathbf{x})$ в исходной метрике пространства H ([9], с. 165) и в метрике $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ в терминах оператора проекции $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$ в H_1.

Лемма 3.1 [3] *Пусть:* 1) *множество* $Q \subset H_1$ *выпукло и замкнуто;* 2) *функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$ *– выпуклая;* 3) $Q_* \neq \emptyset$, $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$.

Тогда из равенства $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)}\left[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right]$ *следует неравенство*

$$(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q. \tag{3.2}$$

Доказательство леммы 3.1 имеется в работе [3]. Неравенство (3.2) совпадает с критерием оптимальности точки для выпуклой функции ([9], с. 165, теорема 4.2.3).

Лемма 3.2 *В пространстве* H_1 *имеет место двойное неравенство*

$$\begin{gathered}(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \leq \\ \leq (1+\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + (1+\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in H_1.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Доказательство проводится с помощью соотношений

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{u}-\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.4}$$

$$2|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\mathbf{v}\|^2\ \forall\varepsilon > 0,\ \mathbf{u},\ \mathbf{x},\ \mathbf{v} \in H_1. \tag{3.5}$$

и неравенства Коши-Буняковского. Для E^n (3.3) доказано в работе [8] и используется в [7]. Правое неравенство (3.3) известное, здесь оно для единообразия изложения дано в H_1.

Лемма 3.3 *Для всякой тройки точек* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x} \in H_1$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \geq (\varepsilon-1)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2 - (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.6}$$

где $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{s \mp (s^2 - 4l_2l_3)^{1/2}}{2l_2}$ *есть решение неравенства*

$$l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0,$$

эквивалентного (3.5); $l_1 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$, $l_2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2$, $l_3 = \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2$, $s = l_1 + l_2 + l_3$.

Доказательство, опирающееся на неравенство четырёхугольника для метрики (см. [10], с. 56), для E^n приведено в работе [8].

Замечание 3.2 *Верхняя и нижняя границы числа* $\varepsilon > 0$ *в* (3.6) *зависят от соотношений длин сторон треугольника с вершинами* $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$*; случай их расположения на одной прямой возможен. Приведем пример не обременительных ограничений, при которых допустимы конкретные значения* $\varepsilon > 0$ *в (3.6):*

$$\|0.5(\mathbf{v}-\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|. \tag{3.7}$$

Для вычисления границ $\varepsilon > 0$ *в (3.6) при ограничении (3.7) решаем эквивалентное (3.6) неравенство* $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0$, *получаемое при* $l_1 = l_2 = 0.25l_3$ *в (3.6):* $l_3 \geq (\varepsilon-1)l_3 - 4(1-\varepsilon^{-1})l_3$, *то есть* $\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 4 \leq 0$. *Получаем* $\varepsilon_{1,2} = 3 \mp 5^{1/2}$, $\varepsilon_1 = 0.764$, $\varepsilon_2 = 5.236$*; тогда можно взять приближенное множество допустимых значений* $\varepsilon \in [0.8; 5.0]$.

Отметим, что в неравенстве (3.6) при подстановке конкретных векторов весьма желательна упорядоченность тройки $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x} \in H_1$ для сохранения $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2]$.

Неравенства ограничения (3.7) имеют простой геометрический смысл, эквивалентный их обоснованию (очевидный из построения треугольника). Например, из (3.7) следует, что в треугольнике с вершинами $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ длина половины основания $\mathbf{vx}$ (равная $\|\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{v})\|$) не превышает длину каждой из боковых сторон. В случае знаков равенства в (3.7) три вектора будут на одной прямой, и треугольник выродится в прямую.

Итак, о неравенствах (3.6)–(3.7) можно сделать следующие выводы.

1) (3.6) применяем как единое целое со множеством $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ возможных в (3.6) значений параметра $\varepsilon > 0$, то есть (3.6) вполне определяется в совокупности с вычисленным множеством $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$.

2) Ограничения неравенства (здесь вида (3.7)) служат лишь для вычисления границ множества допустимых $\varepsilon > 0$ в (3.6) и реализуют свойства «геометрии» метода.

3) Ограничения неравенства в общем случае не обязаны влиять на сходимость метода (но в случае линейной скорости сходимости метода значения $\varepsilon \in [\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ косвенно могут повлиять на величину знаменателя прогрессии).

4) (3.6) обеспечивает ослабление требований к минимизируемой функции (например, позволяет обходиться без требования сильной выпуклости функции для оценки скорости сходимости метода).

Лемма 3.4 *В пространстве H_1 $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1$ имеет место неравенство*

$$-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq (\varepsilon - 2)\|\mathbf{u}\|^2 - (2 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2, \tag{3.8}$$

где ε_1, ε_2 вычисляются по формулам из леммы 3.3.

Доказательство. Представим тождество (3.4) в виде

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathbf{x}) - (\mathbf{v} - \mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \mathbf{v} - \mathbf{x}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2.$$

Положив здесь $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, запишем равенство:

$$-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2. \tag{3.9}$$

К первому слагаемому в правой части (3.9) применим неравенство (3.6) при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда

$$-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq (\varepsilon - 1)\|\mathbf{u}\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= (\varepsilon - 2)\|\mathbf{u}\|^2 - (2 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}\|^2.$$

Доказательство закончено.

В предложениях 3.1–3.5 приведем другие вспомогательные неравенства (в них не существенно, $\mathbf{x}^* \in Q_*$ или иная точка).

Предложение 3.1 *Для метода (2.4) верны неравенства*

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*)\| \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*) - (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)\|, \tag{3.10}$$

следующие из (3.7) при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*)$.

Доказательство. Сначала покажем справедливость левого неравенства (3.10): с учетом левого (2.5)

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - m\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|;$$

или, с другой стороны, пользуясь правым неравенством (2.5):

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - M\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|.$$

Из этих двух оценок следует: $-M\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\| \leq -m\|\mathbf{w}-\mathbf{x}^*\|$, то есть $m \leq M$.

При доказательстве предложений 3.1–3.4 пользуемся известными неравенствами

$$|a-b| \leq |a|+|b|,\ |a-b| \geq |a|-|b|, |a+b| \leq |a|+|b|. \tag{3.11}$$

Из первого неравенства (3.11) имеем:

$$0 \geq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*) - (\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\| \geq$$

$$\geq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| = -\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|.$$

С другой стороны, получим оценку сверху:

$$0 \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*) - (\mathbf{y}-\mathbf{x}^*)\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| \leq$$

$$\leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}-\mathbf{x}^*)\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|.$$

Доказательство закончено.

Предложение 3.2 *Для метода (2.4) верны неравенства*

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}-(\mathbf{w}-\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}^*-\mathbf{w}\|, \tag{3.12}$$

следующие из (3.7) при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}=\mathbf{x}^*-\mathbf{y}$, $\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{y}$.

Доказательство проводится с помощью неравенств (3.11) аналогично доказательству предложения 3.1.

Предложение 3.3 *Для метода (2.4) имеет место неравенство*

$$-2(\mathbf{x}^{'}(t), \mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)) \geq \|\mathbf{x}'(t)\|^2 - \frac{5}{3}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)\|^2.$$

Доказательство следует из (3.8) при $\varepsilon = 3$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{'}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*-\mathbf{x}$. Легко проверить выполнение условий (3.7) (при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ в них), записываемых здесь в виде

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}^{'}(t)\| \leq \|\mathbf{x}^{'}-(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t))\|, \tag{3.13}$$

с помощью неравенств (3.11), аналогично сделанному в доказательстве предложения 3.1.

Предложение 3.4 *Для метода (2.4)–(2.6) имеет место оценка*

$$-2m\alpha(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}^*-\mathbf{x}(t)) \geq m\alpha(\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - \frac{5}{3}\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\|^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В неравенстве (3.8) положим $\mathbf{u} = \mathbf{x}''$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$, $\varepsilon = 3$. Выполнение неравенства (3.7), записываемого здесь в виде

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}''(t)\| \leq \|\mathbf{x}'' - (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t))\|, \tag{3.1}$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в (3.7), доказывается выкладками, аналогичными используемым при обосновании неравенства (3.13) в предложении 3.3, с заменой $\mathbf{x}'$ на $\mathbf{x}''$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

П р е д л о ж е н и е 3.5 *Для метода (2.4)–(2.6) справедлива оценка*

$$-2m\beta(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq -m\beta(\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^2).$$

Для доказательства необходимо воспользоваться неравенством (3.5) при $\varepsilon = 1$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}'$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

4. Исследование сходимости НПММПМ

Т е о р е м а 4.1 *Пусть выполнены условия:* 1) *множество* $Q \subset H_1$ *выпукло и замкнуто, функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ *– выпукла;* 2) *оператор* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *переменной метрики таков, что выполнены* (2.5) *и* (2.6)*;* 3) *выполнены неравенства* (3.7)*;* 4) *параметры НПММПМ (2.4), функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ *таковы, что*

$$\begin{gathered}
\alpha(t) \in C^2[0,\infty),\ \beta(t), \gamma(t) \in C^1[0,\infty), \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \\
\beta(t) \geq \beta_0 > 0,\ 1 > \beta(t) > \sigma(t) > 0,\ \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha_0, \\
\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \beta_0,\ \gamma(0) \geq \gamma(t) \geq \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0; \\
\alpha^{'}(t) \leq 0,\ \gamma'(t) \leq 0,\ \sigma'(t) < \beta^{'}(t) \leq 0\ \alpha^{''}(t) \geq 0; \\
(m-b)(\alpha\beta)' + (\alpha b\sigma)' < \frac{L}{4}\gamma'(t)\alpha\beta,\ 0 < \alpha(t) < \frac{3}{5}, \\
0 < \gamma < \frac{m-a}{0.25L},\ m^2 \geq \frac{1}{6},\ a = \frac{1+3m^2}{5+16m^2},\ a < m,\ t \geq 0.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H_1$ *для траектории метода* (2.4), (3.7) *существует такая точка* $\mathbf{x}^* \in Q_*$, *что*

$$\begin{gathered}
\int_0^{+\infty} (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2)\, ds < +\infty, \\
\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^{'}(t)\| + \|\mathbf{x}^{''}(t)\| \ \longrightarrow\ 0, \quad t \to \infty.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь (2.4) и свойством (2.1) оператора $\mathbf{G}$-проекции, получим вариационное неравенство

$$(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)) + \gamma(t)\nabla f(\mathbf{y}(t)), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{w}(t) = \alpha\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'} + \mathbf{x} \in Q$, $\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + (\beta(t) - \sigma(t))\mathbf{x}'(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$.

В новой метрике пространства H_1 для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ с учётом леммы 3.1 имеем $\gamma(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q,\ \gamma > 0$. Положим здесь $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in Q$, а в (4.3) примем $\mathbf{u} = \mathbf{x}^*$, полученные неравенства сложим:

$$(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{y}), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) \leq \gamma(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}),\ \mathbf{x}^* \in Q_*,\ t \geq 0. \tag{4.4}$$

Скалярное произведение в правой части (4.4) оценим с помощью неравенства для выпуклых функций $(\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}) \leq \dfrac{L}{4}\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{w} \in Q$ ([11], гл. 1, с. 25) и, учитывая, что $(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{x}^* - \mathbf{y}), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y})$, из (4.4) получим:

$$\begin{gathered}(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) + (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \leq \\ \leq L\gamma\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2/4.\end{gathered} \tag{4.5}$$

В (4.5) для оценки второго слагаемого, воспользовавшись неравенством (3.8) из леммы 3.4 при $\dfrac{4}{5} \leq \varepsilon = \dfrac{(1+4m^2)}{(2m^2)} \leq 5$, $m^2 \geq \dfrac{1}{6}$ (такое $\varepsilon \in [0.8; 5.0]$ допустимо при условии (3.7)), $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*)$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^*$, где $m \leq \|\mathbf{G}(\mathbf{y})\| \leq M$ в силу (2.5), получим:

$$-(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \geq \frac{1}{4}\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 - \frac{1+3m^2}{1+4m^2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Здесь первый квадрат нормы справа оценим с помощью (3.6) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^* - \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{w}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $m > 0$, $\dfrac{4}{5} \leq \varepsilon = \dfrac{(5+16m^2)}{(1+5m^2)} \leq 5$:

$$\frac{1}{4}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{w}\|^2 \geq \frac{1+3m^2}{1+5m^2}\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|^2 - a\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2,$$

где $a = \dfrac{1+3m^2}{5+16m^2}$ при $\{1 - 5m < 0,\ 3m^2\left(1 - \dfrac{16m}{3}\right) < 0\}$, то есть $m > \dfrac{1}{\sqrt{6}} > \dfrac{1}{5} > \dfrac{3}{16}$. Неравенства вида (3.7) для (3.8) и (3.6) выполнены в силу предложений 3.1 и 3.2. Тогда $(\mathbf{G}(\mathbf{y})(\mathbf{w} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}) \geq -a\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2$, и, обозначив $b(t) = a + \dfrac{L\gamma(t)}{4}$, из (4.5) имеем:

$$m\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 - b\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{w}(t)\|^2 \leq 0, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

В (4.6) учтем разложения, следующие из (2.4) и свойств пространства H_1:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w} - \mathbf{x}^*\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + \beta^2\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + 2(\alpha\mathbf{x}'' + \beta\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*),\end{gathered}$$

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + 2\alpha(\beta - \sigma)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + (\beta - \sigma)^2\|\mathbf{x}'\|^2. \tag{4.7}$$

С учетом тождеств (4.7) основное неравенство (4.6) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}a_{11}^0(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{12}^0(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + 2a_{13}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + 2m\alpha(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \\ + 2m\beta(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + m\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 0, \quad t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*,\end{gathered} \tag{4.8}$$

где $a_{11}^0(t) = \alpha^2(m - b(t)) > 0$, $a_{12}^0(t) = m\beta^2 - b(\beta - \sigma)^2 > 0$; по условию $a < m$, $m^2 \geq 1/6$, $m > b(t)$; $a_{13} = \alpha[m\beta - b(\beta - \sigma)] > 0$, $\beta > \sigma > 0$, $0 < \gamma(t) < \dfrac{4(m-a)}{L} = \gamma^{11}$.

Пользуясь тождествами

$$2(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})=\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}^{'}\|^2,\ 2(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^{'})=\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \tag{4.9}$$

и предложением 3.4 для четвертого слагаемого, преобразуем (4.8) к виду

$$\begin{gathered}a_{11}^1(t)\|\mathbf{x}^{''}\|^2+a_{12}^0(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+a_{13}(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}^{'}\|^2+\\ +a_{14}^0(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+m\beta(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le 0,\ t\ge 0,\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $a_{11}^1(t)=a_{11}^0(t)+m\alpha(t)=m\beta^2-b(t)(\beta-\sigma)^2+m\alpha>0$, $a_{14}^0(t)=m-\dfrac{5}{3}m\alpha(t)>0$, $0<\alpha(t)<\dfrac{3}{5}$, $0<\gamma<\gamma^{11}$.

Проинтегрировав (4.10) на отрезке $[\xi,t]$, $t>\xi\ge 0$, получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\xi}^{t}\left[a_{11}^1(s)\|\mathbf{x}''\|^2+a_{12}^1(s)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+a_{14}^1(s)\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2\right]ds+\\ +a_{13}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+m\beta(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le C_1(\xi,\mathbf{x}^*),\ t>\xi\ge 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*,\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $a_{12}^1(s)=a_{12}^0-a_{13}'(s)>0$ при $-a_{13}'=\dfrac{L}{4}\alpha\beta\gamma'-(m-b)(\alpha\beta)'-(\alpha b\sigma)'>0$,

$$C_1(\xi,\mathbf{x}^*)=a_{13}(\xi)\|\mathbf{x}'(\xi)\|^2+m\beta(\xi)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2. \tag{4.12}$$

С учетом этих условий и (4.1) подынтегральное выражение и интеграл в (4.11) положительны. Опуская положительные слагаемые из левой части (4.11), получим:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le\frac{C_1(\xi,\mathbf{x}^*)}{m\beta(t)},\ t>\xi\ge 0. \tag{4.13}$$

Из (4.13) следует предельное соотношение

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\le C_1(\xi,\mathbf{x}^*)(m\beta_0)^{-1},\ t>\xi\ge 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*. \tag{4.14}$$

Исследуем поведение второго слагаемого из (4.2). Заметим, что существуют числа $r>0$ и $\eta\ge 0$ такие, что для $s\ge\eta\ge\xi\ge 0$ в (4.11) в подынтегральных слагаемых для коэффициентов имеем: $a_{11}^1\ge r>0$, $a_{12}^1\ge r>0$; $a_{14}^1\ge r>0$. Тогда из (4.11) следует,

$$\begin{gathered}r\int\limits_{\xi}^{t}\{\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{x}^{'}\|^2+\|\mathbf{x}^{''}\|^2\}\,ds+a_{13}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+\\ +m\beta(t)\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2\le C_1(\xi,\mathbf{x}^*),\ t>\xi\ge\eta\ge 0.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Из (4.15) следуют неравенства

$$r\int_{\xi}^{t}(\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{x}^{'}\|^2+\|\mathbf{x}^{''}\|^2)\,ds\le\frac{C_1(\xi,\mathbf{x}^*)}{r} \tag{4.16}$$

$$\|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2\le a_{13}^{-1}(t)C_1(\xi,\mathbf{x}^*),\ t>\xi\ge\eta\ge 0. \tag{4.17}$$

Отсюда при $t \to \infty$ и с учетом условий (4.1) и $a_{13}^{\infty} = \overline{\lim}_{t\to\infty} a_{13}(t)$ следует:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 \le (a_{13}^{\infty})^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \ge 0. \tag{4.18}$$

Для оценки $\|\mathbf{x}^{''}(t)\|$ преобразуем третье слагаемое (4.10) с помощью (3.5),

$$a_{13}(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = 2a_{13}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') \ge -a_{13}(\|\mathbf{x}''\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2);$$

четвертое слагаемое — оценкой из предложения 3.5,

$$m\beta\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 = -2m\beta(\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \ge -m\beta(\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2).$$

После подстановки этих оценок слагаемых из (4.10) следует:

$$a_{11}(t)\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 - a_{12}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 - a_{14}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \le 0,\ t \ge 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{4.19}$$

где $a_{11}(t) = a_{11}^0 + m\alpha - a_{13} = \alpha^2(m - b(t)) + m\alpha(1 - \beta) + b\alpha(\beta - \sigma) > 0$ при $b(t) < m$; $a_{12}^0 - a_{13} - m\beta = -m\beta(1 + \alpha - \beta) - b(t)(\beta - \sigma)(\alpha - \beta + \sigma) = -a_{12} < 0$; $\dfrac{5}{3}\alpha(t) < 1$ по условиям (4.1), $a_{14}^0 - m\beta = m - \dfrac{5}{3}m\alpha - m\beta > m - m - m\beta = -a_{14}(t)$.

Запишем (4.19) в виде

$$a_{11}(t)\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \le a_{12}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 + a_{14}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \ge 0. \tag{4.20}$$

С учетом (4.1), (4.14), (4.18) $a_{11}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{11}(t)$, $a_{12}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{12}(t)$, $a_{14}^{\infty} = \overline{\lim_{t\to\infty}} a_{14}(t)$, из (4.20) следует:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \le C_2(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \ge 0, \tag{4.21}$$

где $C_2(\xi, \mathbf{x}^*) = (a_{11}^{\infty})^{-1}[(a_{12}^{\infty})(a_{13}^{\infty})^{-1} + a_{14}^{\infty} m^{-1}(\beta_0)^{-1}]C_1(\xi, \mathbf{x}^*)$.

Тогда при $\xi = 0$, $t \to \infty$ из неравенства (4.16) запишем

$$\int_0^{+\infty} \left(\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2\right) ds < +\infty. \tag{4.22}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}[\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2] = 0\ \forall\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.23}$$

Асимптотическую устойчивость траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (2.4) и единственность предельной точки траектории можно показать так же, как в работе [2].

В силу (4.22)–(4.23) существует такая подпоследовательность $\{t_i\}$, что

$$\|\mathbf{x}^{''}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}^{'}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\| \to 0,\ i \to \infty. \tag{4.24}$$

Для $t = t_i$ из (4.10) с учетом (4.9), обозначив

$$C_3(t_i, \mathbf{x}^*) = a_{12}(t_i)\|\mathbf{x}^{'}(t_i)\|^2 + 2a_{13}(t_i)(\mathbf{x}^{'}(t_i), \mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*) + a_{14}(t_i)\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\|^2$$

и учитывая (4.14), (4.18), (4.21)–(4.24), при $t_i \to \infty$ имеем

$$C_1(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ C_2(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ C_3(t_i, \mathbf{x}^*) \to 0,\ i \to \infty. \tag{4.25}$$

Тогда из (4.22) следует первое соотношение из (4.2), а из (4.14), (4.18), (4.21)–(4.25) – второе соотношение из (4.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Скорость сходимости НПММПМ для выпуклых функций

Теорема 5.1 *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1.*

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H_1$ *траектория метода* (2.4), (3.7), (4.1) *сходится к точке* $\mathbf{x}^* \in Q_*$ *и имеют место оценки* $\forall\, t \geq 0$*:*

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq [C_{31}(\mathbf{x}^*) m^{-1} \beta^{-1}(t)]^{1/2}, \tag{5.1}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\| \leq [C_{31}(\mathbf{x}^*) a_{13}^{-1}(t)]^{1/2}, \tag{5.2}$$

$$\|\mathbf{x}''(t)\| \leq \{a_{11}^{-1}(t) C_{31}(\mathbf{x}^*)[a_{12}(t) a_{13}^{-1}(t) + a_{14}(t) m^{-1} \beta^{-1}(t)]\}^{1/2}, \tag{5.3}$$

где $C_{31}(\mathbf{x}^*) = a_{13}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2 + m\beta(0)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2$*;* $a(t)$*,* $b(t)$*,* $a_{11}(t)$*,* $a_{12}(t)$*,* $a_{13}(t)$*,* $a_{14}(t)$ *из теоремы 4.1.*

Доказательство. . В условиях данной теоремы все выкладки теоремы 4.1 справедливы. Воспользуемся неравенством (4.10) из теоремы 4.1. Проинтегрировав его на отрезке $[0; t]$, получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \left(a_{11}^1(s)\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + a_{12}^1(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14}^1(s)\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right) ds + \\ + a_{13}(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + m\beta(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*),\ t \geq 0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где коэффициенты из (4.11), а $C_{31}(\mathbf{x}^*)$ приведен в формулировке теоремы 5.1 и следует из (4.12) при $\xi = 0$. Из (5.4) выкладками, аналогичными проведенным в теореме 4.1 при преобразовании выражения (4.11), получим аналог неравенства (4.13):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*) m^{-1} \beta^{-1}(t),\ t \geq 0. \tag{5.5}$$

Из (5.5) следует оценка (5.1).

Оценку (5.2) получим выкладками, аналогичными проведенным с (4.11) при выводе (4.17), но с учетом $\xi = 0$. Сначала из (5.4) получим аналог (4.16)

$$\int\limits_0^t [\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}''(s)\|^2]\, ds \leq \frac{C_{31}(\mathbf{x}^*)}{r},$$

и неравенство

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq C_{31}(\mathbf{x}^*) a_{13}^{-1}(t),\ t \geq 0.$$

Из этого неравенства следует оценка (5.2).

Исходя из (4.10), для получения оценки (5.3) сначала проведем такие же выкладки, как и при получении (4.20). Затем воспользуемся (5.5) и предыдущей оценкой, тогда получим:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}''\|^2 \leq a_{11}^{-1}(t)[a_{12}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2] \leq \\ \leq a_{11}^{-1}(t) C_{31}(\mathbf{x}^*)[a_{12}(t) a_{13}^{-1}(t) + a_{14}(t) m^{-1} \beta^{-1}(t)],\ t \geq 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует оценка (5.3).

Доказательство закончено.

НПММПМ (2.4) для решения прикладных задач реализуются с помощью численных методов решения задач Коши для ОДУ (в частности, для жестких систем дифференциальных уравнений) с параметрами метода, выбранными в соответствии с условиями доказанных теорем.

Список литературы

1. А. С. Антипин, “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, АН СССР, М., 1989, 5–43.

2. А. С. Антипин, “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:9 (1994), 1475–1486.

3. А. С. Антипин, Ф. П. Васильев, “О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой”, *Изв. вузов. Математика*, 1995, № 12(403), 3–9.

4. Т. В. Амочкина, “Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:10 (1997), 1174–1182.

5. В. Г. Малинов, “Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка с переменной метрикой”, *Функциональный анализ*, **39** (2006), 53–64.

6. В. Г. Малинов, “Версия непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 121–134.

7. В. Г. Малинов, “Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике”, *Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике*, VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Москва. 17–22 октября 2016 г.: Труды. Том II. (Москва. 17–22 октября 2016 г.), ФИЦ ИУ РАН, М., 2016, 48–50.

8. В. Г. Малинов, “ПОДМ с проектированием в переменной метрике”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:4 (2012), 44–56.

9. Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

10. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 544 с.

11. А. С. Антипин, *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа*, М., 1979, 73 с.

Поступила 2.11.2018

MSC2010 90C30

Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

© **V. G. Malinov**[1]

Abstract. The paper examines a new continuous projection second order method of minimization of continuously Frechet differentiable convex functions on the convex closed simple set in separable, normed Hilbert space with variable metric. This method accelerates common continuous projection minimization method by means of quasi-Newton matrices. In the method, apart from variable metric operator, vector of search direction for motion to minimum, constructed in auxiliary extrapolated point, is used. By other word, complex continuous extragradient variable metric method is investigated. Short review of allied methods is presented and their connections with given method are indicated. Also some auxiliary inequalities are presented which are used for theoretical reasoning of the method. With their help, under given supplemental conditions, including requirements on operator of metric and on method parameters, convergence of the method for convex smooth functions is proved. Under conditions completely identical to those in convergence theorem, without additional requirements to the function, estimates of the method's convergence rate are obtained for convex smooth functions. It is pointed out, that one must execute computational implementation of the method by means of numerical methods for ODEs solution and by taking into account the conditions of proved theorems.

Key Words: convex function, continuous minimization method, projection in variable metric, convergence, rate of convergence.

References

1. A. S. Antipin, "[Continuous and iterative proceses with projection ana projection-type operators]", *Voprosy kibernetiki. Vychislitelnie voprosy analiza bolshih sistem*, AN SSSR Publ., Moscow, 1989, 5–43 (In Russ.).
2. A. S. Antipin, "[Minimization of convex functions on convex sets by differential equations]", *Differential equations*, **30**:9 (1994), 1365–1375 (In Russ.).
3. A. S. Antipin, F. P. Vasil'ev, "[On continuous method of minimization in variable metric spaces]", *Russian Mathematics*, **39**:12 (1995), 1–6 (In Russ.).
4. T. V. Amochkina, "[Continuous second order variable metric gradient projection method]", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **37**:10 (1997), 1134–1142 (In Russ.).
5. V. G. Malinov, "[Continuous projection variable metric second order minimization method]", *Functionalniy analiz*, **39** (2006), 53–64 (In Russ.).
6. V. G. Malinov, "[On the version of continuous projection second order variable metric method]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **16**:1 (2014), 121–134 (In Russ.).

[1]**Valerian G. Malinov**, Associate Professor, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432000, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, vgmalinov@mail.ru

7. V. G. Malinov, *[Continuous second order minimization method with variable metric projection operator]*, VIII Moskovskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po issledovanijy operaciy. (ORM2016). Moskva, 17–22 okt., 2016. Trudy. Tom II. [VIII Moscow International Conference on Operations Research(ORM2016): Moscow, October 17–22, 2016: Proceedings: Vol II.] (Moscow, October 17-22, 2016), FRC CSC RAS Publ., Moscow, 48–50 (In Russ).

8. V. G. Malinov, "[PGTM with variable metric projection operator]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **14**:4 (2012), 44–56 (In Russ.).

9. F. P. Vasil'ev, *[Numerical methods solution of Extremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 552 p.

10. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *[Elements of function theory and functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 544 p.

11. A. S. Antipin, *[Methods of nonlinear programming, based on direct and dual modifications Lagrange function]*, VNII systems research Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 73 p.

Submitted 2.11.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.48-59

УДК 517.954

Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией

© А. А. Сарсенби[1]

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией. Доказана единственность решения задачи. Показана некорректность смешанной задачи с краевыми условиями типа Дирихле для этого уравнения. Методом Фурье получена спектральная задача для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом положительных и отрицательных собственных значений. Построена функция Грина полученного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией. Установлена равномерная оценка функции Грина при достаточно больших значениях спектрального параметра. Доказано существование функции Грина дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом. Методом оценки функции Грина доказана полнота собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом. В классе полиномов доказано существование разложения решения изучаемой некорректной задачи по собственным функциям.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, метод Фурье, функция Грина, собственные функции, базис.

1. Введение

В работах [1]–[2] рассмотрены различные задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией. Следует отметить, что спектральные задачи с инволюцией изучены сравнительно мало. В работах [3]–[5] рассмотрены спектральные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка. В последние годы появились работы, посвященные изучению спектральных задач для дифференциальных уравнений второго и высшего порядков с инволюцией (см., например, [6]–[11]), исследованию функции Грина краевых задач для одномерных дифференциальных уравнений с инволюцией [12]. Обратные задачи для уравнений в частных производных с инволюцией рассмотрены в работах [13]–[14]. Работа [15] посвящена изучению интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера с инволюцией, решение которого может быть тесно связано с обратными задачами по восстановлению потенциала одномерного уравнения Шредингера (некоторые аспекты этой теории можно посмотреть в работе [16]).

Корректность смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией рассматривались в работе [17] в следующей постановке:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=A_x u\left(x,t\right)+q\left(x\right)u\left(x,t\right),\ -1<x<1,\ t>0,\ u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \tag{1.1}$$

где A_x – некоторый полуограниченный дифференциальный оператор второго порядка с инволюцией, действующий по переменной x. Заметим, что преобразование S функции $f\left(x\right)$ из класса $L_2\left(-1,1\right)$ называют инволюцией, если $\left(S^2 f\right)\left(x\right)=f\left(x\right)$. В частности, преобразование вида $\left(Sf\right)\left(x\right)=f\left(-x\right)$ является инволюцией.

[1]**Сарсенби Абдисалам Абдижаханулы**, докторант кафедры математики, «Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова» (160012, Казахстан, г. Шымкент, пр. Таукехана, 5), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1667-3010, abdisalam@mail.ru

В настоящей заметке рассматривается смешанная задача (1.1) с оператором A_x, порожденным соотношениями вида

$$A_x y = -y''(-x) + q(x)\, y(x), \ -1 < x < 1, \ y(-1) = 0, \ y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Оператор A_x (при $q(x) \equiv 0$) имеет бесконечное число положительных и отрицательных собственных значений. Это означает, что оператор в правой части изучаемого уравнения (1.1) не является полуограниченным. Поэтому обсуждается вопрос о некорректности смешанных задач (1.1)–(1.2) для уравнения параболического вида с инволюцией. Изучены вопросы полноты собственных функций оператора A_x вида (1.2). Найдены достаточные условия на начальные данные, когда изучаемая задача имеет единственное решение. Найдено представление решения в виде частичных сумм ряда Фурье по собственным функциям. Доказано, что множество таких начальных функций всюду плотно в пространстве $L_2(-1,1)$.

Уравнение (1.1) мы называем уравнением типа теплопроводности с инволюцией, указывая лишь на внешнее сходство его с известным уравнением математической физики.

Необходимым условием существования решения задачи (1.1)–(1.2) является согласованность начальных данных с уравнением (1.1) и краевыми условиями (1.2). Поэтому мы будем требовать, что $\varphi(x) \in C^2[-1,1]$ и $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

Говорят, что задача (1.1)–(1.2) поставлена корректно, если

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственно;

3) решение задачи непрерывно зависит от начальных данных (устойчиво).

Применение метода Фурье к задаче (1.1)–(1.2) приводит к спектральной задаче с инволюцией:

$$-X''(-x) + q(x)\, X(x) = \lambda X(x), \ -1 < x < 1, \quad X(-1) = X(1) = 0. \tag{1.3}$$

2. Некорректность смешанной задачи (1.1)–(1.2)

При $q(x) \equiv 0$ спектральная задача (1.3) – самосопряженная и имеет две серии собственных значений: $\lambda_{k1} = -k^2\pi^2, \ \lambda_{k2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$. Им соответствуют собственные функции $X_{k1}(x) = \sin k\pi x, \ k = 1, 2, , , ; X_{k2}(x) = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x, \ k = 0, 1, 2, ...$; которые образуют полную ортонормированную систему в классе $L_2(-1,1)$.

Стандартным способом выписывается формальное решение смешанной задачи (1.1)–(1.2) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{\lambda_{k1}} A_k e^{-\lambda_{k1} t} sink\pi x + \sum_{\lambda_{k2}} B_k e^{-\lambda_{k2} t} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x, \tag{2.1}$$

где

$$A_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, sink\pi x dx, \quad B_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x) cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x dx. \tag{2.2}$$

Если последовательность $\left\{A_k e^{-\lambda_{k1} t}\right\}$ не убывает с достаточной быстротой при каждом фиксированном $t > 0$, то первый ряд в (2.1) расходится ввиду $\lambda_{k1} < 0$. Поэтому в случае общих начальных данных смешанная задача (1.1)–(1.2) может не иметь решения. В случае существования решения оно не обладает свойством устойчивости, т. е. не зависит непрерывно от начальных данных. Например, возмущение

$$u_\delta(x,t) = \varepsilon e^{-\lambda_{k1}t} \sin k\pi x$$

не превосходит числа ε при $t=0$, но будет большим любого наперед заданного числа C_0 для $t=\delta$ при достаточно малых ε и δ и достаточно большом k. Таким образом, смешанная задача (1.2) для уравнения типа теплопроводности с инволюцией (1.1) поставлена некорректно. Тем не менее, можно показать, что в зависимости от начальной функции решение изучаемой смешанной задачи существует и единственно.

3. Разрешимость смешанной задачи (1.1)–(1.2) в случае $q(x) \equiv 0$

Прежде всего покажем единственность решения смешанной задачи.

Теорема 3.1 *Если решение смешанной задачи* (1.1)–(1.2) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Любое решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.2) как функция от x представимо в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k1}(t)\, sink\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} T_{k2}(t)\, co\,\mathrm{s}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

по ортонормированному базису $\{X_k(x)\} = \left\{X_{k1} = sink\pi x,\, X_{k2} = \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}$. Поскольку этот ряд сходится в смысле нормы пространства $L_2(-1,1)$, то он сходится и в смысле скалярного произведения. Поэтому

$$T_{k1}(t) = (u(x,t), sink\pi x), \quad T_{k2}(t) = \left(u(x,t), co\,\mathrm{s}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

Эти два равенства запишем вкратце в виде

$$T_k(t) = (u(x,t), X_k(x)). \tag{3.1}$$

Умножив скалярно на $X_k(x)$ обе части уравнения (1.1), получим равенство

$$(u_t,\, X_k) = (u_{xx}(-x,t), X_k).$$

Правую часть полученного равенства два раза интегрируем по частям, а в левой части используем правило дифференцирования по параметру t под знаком интеграла. Учитывая уравнение (1.3), получим соотношение $\dfrac{\partial}{\partial t}(u, X_k) = \lambda_{k1}(u(x,t), X_k)$. В данное равенство подставим (3.1). В результате получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$T'_k(t) = -\lambda_k T_k(t), \;\; T_k(0) = (\varphi,\, X_k).$$

Начальное условие получено из (3.1) при $t=0$. В силу единственности решения задачи Коши $T_k(t)$ определяются единственным образом. Этим доказывается единственность решения задачи (1.1)–(1.2). Теорема 3.1 доказана.

Теперь покажем классы допустимых начальных функций $\varphi(x)$, для которых задача (1.1)–(1.2) имеет решение. Сначала покажем, что ряд (2.1) является решением задачи (1.1)–(1.2), если все коэффициенты A_k равны нулю.

Т е о р е м а 3.2 *Если начальная функция $\varphi(x)$ является нечетной, принадлежит классу $C^2[-1,1]$ и удовлетворяет условиям $\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$, то решение задачи* (1.1)–(1.2) *существует, единственно и представимо в виде ряда (2.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi(x)$ – нечетная функция, то все коэффициенты Фурье A_k вида (2.2) равны нулю. Поэтому ряд (2.1) принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k e^{-(k+0,5)^2\pi^2 t}\cos(k+0,5)\pi x \tag{3.2}$$

Теорема будет доказана, если ряд (3.2) сходится при любом $t>0$ и его можно почленно дифференцировать один раз по переменной t и два раза по переменной x. Последние две операции возможны при условии равномерной сходимости ряда

$$-\sum_{k=0}^{\infty}B_k(k+0,5)^2\pi^2 e^{-(k+0,5)^2\pi^2 t}\cos(k+0,5)\pi x \tag{3.3}$$

для всех $t>0$. Равномерная сходимость ряда (3.3) доказывается так же, как и в случае классического уравнения параболического типа (см., например, [18]). Сходимость ряда (3.2) будет следовать из сходимости мажорантного ряда

$$\|x(t:t_0,x_0)\|\le K_{D_1}e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||x_0||,\qquad t\ge t_0. \tag{3.4}$$

Сходимость ряда (3.4) доказывается так же, как доказывается абсолютная и равномерная сходимость классического ряда Фурье по тригонометрической системе [18]. Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.2) существует, единственно и представимо в виде ряда (3.2). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2), где начальная функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{N_1}a_k sink\pi x+\sum_{k=0}^{N_2}b_k cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x. \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 3.3 *Если начальная функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом вида* (3.5)*, то решение задачи* (1.1)–(1.2) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{N_1}A_k sink\pi x\, e^{k^2\pi^2 t}+\sum_{k=0}^{N_2}B_k cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\, e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t},$$

где

$$A_k=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,sink\pi x dx,\quad k=1,2,...,N_1;$$

$$B_k=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x dx,\ \ k=0,1,2,...,N_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы вытекает из равенства нулю коэффициентов $A_k=0,\quad k=N_1+1,\ N_1+2\,...,\quad B_k=0,\quad k=N_2+1,\ N_2+2,\ ...$ и Теоремы 3.1. Теорема 3.3 доказана.

Поскольку множество тригонометрических полиномов по полной ортонормированной системе $\{X_{k1}, X_{k2}\}$ всюду плотно в $L_2(-1,1)$, то из Теоремы 3.3 вытекает

Теорема 3.4 *Множество допустимых начальных функций, для которых смешанная задача* (1.1)–(1.2) *разрешима, всюду плотно в* $L_2(-1,1)$.

4. Полнота системы собственных функций спектральной задачи (1.3)

Хорошо известно, что применение метода Фурье к задаче (1.1)–(1.2) приводит к спектральной задаче (1.3). Для доказательства полноты системы собственных функций спектральной задачи (1.3) мы построили функцию Грина краевой задачи (1.3) при $q(x) \equiv 0$. С помощью равномерной оценки построенной функции Грина доказываем существование функции Грина общей краевой задачи (1.3). Полученные оценки функции Грина позволяют применить теорему М. А. Наймарка [19] о полноте собственных функций.

Функцией Грина краевой задачи (1.3) при $q(x) \equiv 0$ мы называем такую функцию $G(x,t,\lambda)$, что функция $X(x) = \int\limits_{-1}^{1} G(x,t,\lambda) f(t)\, dt$ является решением неоднородной краевой задачи

$$-X''(-x) = \lambda X(x) + f(x), \quad X(-1) = X(1) = 0.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что при $\lambda \neq \lambda_{ki}$, $i = 1,2$ функцией Грина краевой задачи (1.3) при $q(x) \equiv 0$ является функция вида

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\right\}+g(x,t,\lambda),$$

где $\rho = \sqrt{\lambda}$,

$$g(x,t,\lambda) = \tfrac{1}{8\rho}\begin{cases} -i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), & t \leq -x; \\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right), & t \in [-x,x]; \\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), & t > x. \end{cases}$$

В комплексной ρ-плоскости рассмотрим окружности

$$C_{k1}: |\rho| = k\pi + \frac{1}{4};\ C_{k2}: |\rho| = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{4}$$

с общим центром в начале координат. Эти окружности не пересекаются и не содержат собственных значений оператора A_x с нулевым коэффициентом. Обозначим через $O_\varepsilon(\rho_{ki})$, $i = 1,2$, малые окрестности величин $\rho_{k1},\ \rho_{k2}$. Пусть

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2,\ \rho_0 = \min\left(|\rho_1|, |\rho_2|\right).$$

Лемма 4.1 *Для функции Грина краевой задачи* (1.3) *с нулевым коэффициентом справедлива следующая равномерная оценка:*

$$|G(x,t,\lambda)| \leq \frac{C}{\rho}\left(e^{-\rho_0||x|-|t||}+e^{-\rho_0(2-||x|-|t||)}\right) \tag{4.1}$$

при достаточно больших $|\rho|$, *таких что* $\rho \notin O_\varepsilon(\rho_{ki})$, $i=1,2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $t \leq -x$ функцию Грина можно переписать в виде

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\left[\left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}+1\right)\left(e^{\rho(x+t)}-e^{-\rho(x-t)}\right)-\left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}-1\right)\left(e^{\rho(x-t)}-e^{-\rho(x+t)}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{8\rho}\left[\left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)}-i\right)\left(e^{i\rho(x+t)}+e^{-i\rho(x-t)}\right)+\left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)}+i\right)\left(e^{i\rho(x-t)}+e^{-i\rho(x+t)}\right)\right].$$

Из этого равенства следует неравенство

$$|G(x,t,\lambda)| \leq= \frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}\left(e^{\rho_1(x+t)}-e^{-\rho_1(x-t)}\right)-\frac{e^{-\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}\left(e^{\rho_1(x-t)}-e^{-\rho_1(x+t)}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{-\rho_2}}{e^{\rho_2}+e^{-\rho_2}}\left(e^{-\rho_2(x+t)}+e^{\rho_2(x-t)}\right)+\frac{e^{\rho_2}}{e^{\rho_2}+e^{-\rho_2}}\left(e^{-\rho_2(x-t)}+e^{\rho_2(x+t)}\right)\right].$$

Отсюда следует утверждение леммы в случае $t \leq -x$. Аналогичным образом убеждаемся в справедливости леммы при $-x \leq t \leq x$ и $t > x$. Лемма доказана.

Обозначим через $G_q(x,t,\lambda)$ функцию Грина краевой задачи (1.3) с непрерывным коэффициентом $q(x)$, а $G(x,t,\lambda)$ – функцию Грина той же задачи с нулевым коэффициентом. Поскольку почти всюду на интервале $(-1,1)$ выполняются соотношения

$$-\frac{\partial^2 G(-x,t,\lambda)}{\partial x^2}=\lambda G(x,t,\lambda),$$

$$-\frac{\partial^2 G_q(-x,t,\lambda)}{\partial x^2}+q(x)\,G_q(x,t,\lambda)=\lambda G_q(x,t,\lambda),$$

то почти всюду на этом интервале выполняется равенство

$$\left(G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right)''_{x=-x}+\lambda\left(G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right)=-q(x)\,G_q(x,t,\lambda).$$

Поэтому вне полюсов функций $G_q(x,t,\lambda)$ и $G(x,t,\lambda)$ имеет место следующее равенство:

$$G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)=\int_{-1}^{1} G(x,s,\lambda)\,q(s)\,G_q(s,t,\lambda)\,ds. \tag{4.2}$$

Если решение $G_q(x,t,\lambda)$ интегрального уравнения (4.2) существует, то оно будет функцией Грина краевой задачи (1.3). Поэтому существование функции Грина краевой задачи сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.1 *Если функция* $q(x)$ *непрерывна и* $\rho \neq \rho_{k1}$, $\rho \neq \rho_{k2}$, *то для достаточно больших* $|\rho|$ *решение* $G_q(x,t,\lambda)$ *интегрального уравнения* (4.2) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_{q0}(x,t,\lambda)=0$, и

$$G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)=\int\limits_{-1}^{1}G(x,s,\lambda)\,q(s)\,G_{qp}(s,t,\lambda)\,ds. \tag{4.3}$$

Согласно Лемме 4.1 для функции Грина $G(x,t,\lambda)$ краевой задачи с нулевым коэффициентом справедлива оценка

$$|G(x,t,\lambda)|\le\frac{C}{|\rho|}r(x,t), \tag{4.4}$$

где

$$r(x,t)=e^{-\rho_0||x|-|t||}+e^{-\rho_0(2-||x|-|t||)},\ \rho=\rho_1+i\rho_2,\ \rho_0=\min(|\rho_1|,|\rho_2|).$$

Из уравнения (4.3) при $p=0$ следует справедливость оценки (4.4) и для функции $G_{q1}(x,t,\lambda)$. Пользуясь неравенством (4.4) и этим замечанием, введем обозначение

$$\max|G_{q1}(x,t,\lambda)|\,|\rho|\,r^{-1}(x,t)=C_0,\ \max|G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G_{qp}(x,t,\lambda)|\,|\rho|\,r^{-1}(x,t)=C_p, \tag{4.5}$$

где максимум берется во всем $x\in[-1,1]$, для каждого фиксированного t и для достаточно больших $|\rho|$, $\rho\ne\rho_{k1},\ \rho\ne\rho_{k2}$. Покажем, что для произвольного числа p введенные величины удовлетворяют неравенствам

$$C_j\le\frac{C}{2^j},\ j=0,1,...,p. \tag{4.6}$$

При $j=0$ оценка (4.6) следует из оценки (4.4) для функции$G_{q1}(x,t,\lambda)$. Допустим справедливость оценки (4.6) при $j=1,2,...,p$ и докажем справедливость оценки (4.6) при $j=p+1$. Тогда получим справедливость оценки (4.6) для любого числа p. Пользуясь соотношением (4.3) из (4.5), получим неравенство

$$C_{p+1}\le CC_p|\rho|^{-1}\max\int\limits_{-1}^{1}r(x,s)\,r(s,t)\,r^{-1}(x,t)\,|q(s)|\,ds. \tag{4.7}$$

Заметим, что

$$r(x,s)\,r(s,t)\le 2r(x,t).$$

Это следует из неравенств

$$||x|-|t||\le||x|-|s||+||s|-|t||,$$

$$2-||x|-|t||\le 2-||x|-|s||+||s|-|t||,$$
$$2-||x|-|t||\le 2+||x|-|s||-||s|-|t||,$$
$$4-||x|-|s||-||s|-|t||\ge||x|-|t||.$$

Поэтому из (4.7) вытекает оценка

$$C_{p+1}\le 2CC_p|\rho|^{-1}\int\limits_{-1}^{1}|q(s)|\,ds.$$

При достаточно больших $|\rho|$ можно считать $2C|\rho|^{-1}\int\limits_{-1}^{1}|q(s)|\,ds < \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$C_{p+1} \le \frac{C_p}{2} \le \frac{C}{2^{p+1}}.$$

Таким образом неравенство (4.6) доказано. Далее из (4.5) и (4.6) следует, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\left(G_{qp+1}(x,t,\lambda) - G_{qp}(x,t,\lambda)\right)$$

сходится равномерно, и последовательность его частичных сумм имеет вид

$$S_n(x) = G_{qp+1}(x,t,\lambda) - G_{q1}(x,t,\lambda).$$

Из сходимости этой последовательности вытекает равномерная сходимость последовательности $\{G_{qp+1}(x,t,\lambda)\}$к пределу $G_q(x,t,\lambda)$. Теорема доказана.

Справедливость теоремы 4.1 для случае обыкновенных дифференциальных операторов показана в работе [20].

Из доказательства теоремы вытекает равномерная оценка вида (4.4) функции Грина $G_q(x,t,\lambda)$ краевой задачи (1.3):

$$|G_q(x,t,\lambda)| \le \frac{C}{|\rho|}r(x,t). \tag{4.8}$$

На основании оценки (4.8) и теоремы о полноте М.А. Наймарка [19] убеждаемся в справедливости теоремы о полноте собственных функций спектральной задачи (1.3).

Теорема 4.2 *Если функция $q(x)$ непрерывна, то система собственных функций оператора A_x вида (1.2) полна в пространстве $L_2(-1,1)$.*

Следствием самосопряженности спектральной задачи (1.3) при непрерывном вещественном $q(x)$ является

Теорема 4.3 *Если функция $q(x)$ непрерывна и вещественна, то система собственных функций оператора A_x вида (1.2) образует полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(-1,1)$.*

5. Разрешимость смешанной задачи (1.1)–(1.2) в общем случае

Собственные функции спектральной задачи (1.3), соответствующие собственным значениям λ_k, обозначим через $X_k(x)$. Справедлива следующая

Теорема 5.1 *Если в уравнении (1.1) коэффициент $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, начальная функция $\varphi(x)$ является полиномом вида*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k X_k(x),$$

то решение задачи (1.1), *с оператором* A_x *вида* (1.2) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где

$$A_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x) X_k(x)\, dx.$$

Доказательство. Доказательство теоремы очевидно в силу плотности множества полиномов по полной ортонормированной системе $X_k(x)$в классе $L_2(-1,1)$, для смешанной задачи (1.1), с оператором A_x вида (1.2).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, грант AP05131225.

Список литературы

1. D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument:an algebraic approach*, PWN Elsevier, Amsterdam, Warszawa, 1973, 354 p.

2. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, PWN Elsevier, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 410 p.

3. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. Sarsenbi, "Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution", *Abstract and Applied Analysis 2012*, 2012, № 4, Article ID 590781. DOI: https//doi.org/10.1155/2012/590781.

4. M. Sh. Burlutskaya, "Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions", *Comput. Mathematics and Math. Physics*, **54**:1 (2014), 3–12.

5. A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, E. A. Romanova, "Spectral analysis of a differential operator with an involution", *Journal of Evolution Equations*, **17**:2 (2017), 669–684.

6. A. M. Sarsenbi, "Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator", *Differential Equations*, **46**:4 (2010), 509–511.

7. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of a nonlocal problem for second order differential equation with an involution", *Differential Equations*, **51**:8 (2015), 990–996.

8. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**:278 (2015), 1–9.

9. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution", *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 33–46.

10. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data", *Filomat*, **32**:3 (2018), 1069–1078. DOI: https//doi.org/10.2298/FIL1803069K.

11. А. А. Сарсенби, “Полнота и базисность собственных функций спектральной задачи с инволюцией”, *Математический журнал*, **17**:2(64) (2017), 175–183.

12. A. Cabada, F. A. F. Tojo, “On linear differential equations and systems with reflection”, *Appl. Math. Comp.*, **305** (2017), 84–102.

13. M. Kirane, N. Al-Salti, “Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation”, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9** (2016), 1243–1251.

14. A. A. Sarsenbi, “On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution”, *AIP Conference Proceedings*, **1880** (2017), 040021. DOI: https//doi.org/10.1063/1.5000637.

15. M. J. Ablowitz, H. Z. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear Schredinger equation”, *Physical Review Letters*, **110** (2013), 064105. DOI: https//doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.064105.

16. А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев, “Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма-Лиувилля”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **20**:2 (2018), 148–158.

17. A. Ashyralyev, A. Sarsenbi, “Well-posedness of a parabolic equation with involution”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38**:10 (2017), 1295–1304 DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1972, 736 с.

19. М. А. Наймарк, “О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве”, *Доклады Академии наук СССР*, **98**:5 (1954), 727–730.

20. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Иностранная литература, М., 1958, 474 с.

Поступила 7.12.2018

MSC2010 34M03, 34L10

The ill-posed problem for the heat transfer equation with involution

© **A. A. Sarsenbi**[1]

Abstract. A mixed problem for an equation of heat transfer with involution is considered. The uniqueness of the problem's solution is proved. The ill-posedness of the mixed problem with Dirichlet-type boundary conditions for this equation is shown. By application of Fourier method, we obtain a spectral problem for a second-order differential operator with involution with an infinite number of positive and negative eigenvalues. The Green function of obtained second-order differential operator with involution is constructed. Uniform estimate of the Green's function is established for sufficiently large values of the spectral parameter. The existence of the Green's function of a second-order differential operator with involution and with variable coefficient is proved. By estimation of the Green's function completeness of the eigenfunctions's system for operator discussed is proved. In the class of polynomials the existence of a solution of this ill-posed problem is proved.

Key Words: differential equation with involution, Fourier method, Green's function, eigenfunctions, basis.

References

1. D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument:an algebraic approach*, PWN Elsevier, Amsterdam, Warszawa, 1973, 354 p.
2. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, PWN Elsevier, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 410 p.
3. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. Sarsenbi, "Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution", *Abstract and Applied Analysis 2012*, **1**:4 (2012), Article ID 590781. DOI: https//doi.org/10.1155/2012/590781.
4. M. Sh. Burlutskaya, "Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions", *Comput. Mathematics and Math. Physics*, **54**:1 (2014), 3–12.
5. A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, E. A. Romanova, "Spectral analysis of a differential operator with an involution", *Journal of Evolution Equations*, **17**:2 (2017), 669–684.
6. A. M. Sarsenbi, "Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator", *Differential Equations*, **46**:4 (2010), 509–511.
7. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of a nonlocal problem for second order differential equation with an involution", *Differential Equations*, **51**:8 (2015), 990–996.
8. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**:278 (2015), 1–9.

[1]**Abdisalam A. Sarsenbi**, doctoral candidate of Department of Mathematics, M. Auezov South Kazakhstan State University (5 Taukehan Av., Shymkent 160012, Kazakhstan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1667-3010, abdisalam@mail.ru

9. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution", *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 33–46.

10. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data", *Filomat*, **32**:3 (2018), 1069–1078. DOI: https//doi.org/10.2298/FIL1803069K.

11. A. A. Sarsenbi, "[Completeness and basicity of the eigenfunctions of the spectral problem with involution]", *Matematicheskiy zhurnal*, **17**:2(64) (2017), 175–183 (In Russ.).

12. A. Cabada, F. A. F. Tojo, "On linear differential equations and systems with reflection", *Appl. Math. Comp.*, **305** (2017), 84–102.

13. M. Kirane, N. Al-Salti, "Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9** (2016), 1243–1251.

14. A. A. Sarsenbi, "On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution", *AIP Conference Proceedings*, **1880** (2017), 040021. DOI: https//doi.org/10.1063/1.5000637.

15. M. J. Ablowitz, H. Z. Musslimani, "Integrable nonlocal nonlinear Schredinger equation", *Physical Review Letters*, **110** (2013), 064105. DOI: https//doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.064105.

16. A. M. Akhtyamov, I. M. Utyashev, "[Restoration of polynomial potential in the Sturm-Liouville problem]", *Zhurnal srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:2 (2018), 148–158 (In Russ.).

17. A. Ashyralyev, A. Sarsenbi, "Well-posedness of a parabolic equation with involution", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38**:10 (2017), 1295–1304 DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

18. A N. Tikhonov, A. A. Samarskiy, *[Equation of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 736 p.

19. M. A. Naymark, "[On some signs of completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of a linear operator in a Hilbert space]", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **98**:5 (1954), 727–730 (In Russ.).

20. E. A. Koddington, N. Levinson, *[Theory of ordinary differential equations]*, Inostrannaya literatura Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 474 p.

Submitted 7.12.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.60-69

MSC2010 34M03, 34L10

Construction of exact solutions and analysis of stability of complex systems by reduction to ordinary differential equations with power nonlinearities

© **A. A. Kosov**[1], **E. I. Semenov**[2]

Abstract. Complex systems described by nonlinear partial differential equations of parabolic type or large-scale systems of ordinary differential equations with switching right-side are considered. The reduction method is applied to the corresponding problem for the system of ordinary differential equations without switching. A parametric family of time-periodic and anisotropic on spatial variables exact solutions of the reaction-diffusion system is constructed. The stability conditions of a large-scale system with switching are obtained, which consist in checking the stability of the reduced system without switching. The conditions for the existence of the first integrals for the reduced system of ordinary differential equations expressed by a combination of power and logarithmic functions are found. For the cases of two-dimensional and three-dimensional reduced systems, these conditions are written in the form of polynomial equations relating the system parameters.

Key words: complex systems, large-scale switching systems, stability, reaction-diffusion systems, exact solutions, first integrals.

1. Introduction

Diffusion processes in multicomponent medium with interacting components are described by systems of nonlinear partial differential equations of parabolic type (PDE PT) [1]. Equations of this kind, called reaction-diffusion systems, are widely used in mathematical biology [2] and in chemical kinetics, in the description of chemical technologies and processes of heat and mass transfer [3], [4], [5]. In the study of parabolic systems of equations, it is important to construct exact solutions [1], [5], since they can be used to describe the operating modes in the modeling of technologies, as well as to verify and configure numerical methods for solving applied problems with boundary conditions. Since non-linear PDE systems are complex objects to study, the reduction method is usually applied to systems of ordinary differential equations (ODE) to construct exact solutions [1]. We consider a reaction-diffusion system modeled by PDE PT with power nonlinearities characterizing the reaction of the mixture components. The use of a special type of ansatz [6] in section 2 allows us to reduce the construction of the PDE PT system solution to a similar problem for two ODE systems, which can be solved sequentially. The first ODE system is nonlinear with right-hand sides represented by combinations of power nonlinearities (ODE PN). The second ODE system is linear with coefficients depending on the solutions of the first ODE system. Therefore, even the stationary solutions of the first ODE PN system are of interest, since in this case the second ODE system has constant coefficients and is integrable, thus we obtain the exact solutions of the original nonlinear PDE PT system. The efficiency of the proposed approach to the construction of exact solutions

[1]**Alexander A. Kosov**, Leading researcher; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russian Federation, http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, email: kosov_idstu@mail.ru

[2]**Eduard I. Semenov**, Senior researcher; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russian Federation, http://orcid.org/0000-0002-9768-9945, email: edwseiz@gmail.com

of PDE PT is illustrated by an example of a nonlinear system of 4 equations with 4 spatial coordinates, for which a parametric family of time-periodic and space-anisotropic solutions given by explicit formulas is obtained. In section 3, we consider a large-scale system [7], consisting of several subsystems and the relationships between them, described by ordinary differential equations. Subsystems are described by homogeneous equations with switching of the right parts, interrelations between subsystems can also be switched. Such systems, called switching systems or hybrid systems, have been intensively studied in the last decade [8], [9], [10]. Applying in this section the Matrosov comparison method [11], we reduce the problem of stability of zero solution of a complex system with switching to a similar problem for a much more simple system of ODE PN without switching with the right parts, represented by combinations of power nonlinearities of the same kind that was obtained in section 2. Thus, the properties of the ODE PN system with power nonlinearities, as shown in sections 2 and 3, are transferred to significantly more difficult to study classes of systems modeled by PDE PT and large-scale switching ODE systems. In addition, such ODE PN systems are of independent interest, as they are used in mathematical biology as models of interacting species [2]. Therefore, the study of the ODE PN system and the identification of qualitative properties of its solutions is important for a wider class of differential equations and can be extended to significantly more general and complex systems. The remaining part of the paper is devoted to the study of ODE PN systems with right-hand sides represented by combinations of power nonlinearities. Section 4 deals with the construction of stationary (time-independent) exact solutions and the first integrals of the reduced ODE PN system. Stationary solutions of ODE PN are found from a linear-quadratic system of equations for which a number of cases of nontrivial solvability are considered. Here we obtain conditions on the parameters of the ODE PN system, under which it has explicit first integrals, given by combinations of power and logarithmic functions from phase variables. A number of examples illustrating the results are given.

2. Reduction to the ODE system and the construction of exact solutions of reaction-diffusion system

Consider the system of N quasilinear PDE PT

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \nabla \cdot \left(u_k^{\lambda_k} \nabla u_k \right) + u_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t)\, u_j^{\lambda_j}, \tag{2.1}$$

where $u_k \triangleq u_k(t, \mathbf{x})$ — are the sought functions; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — is the vector of independent spatial variables, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $t \in [0, +\infty)$ — is time; $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$; ∇ — is the gradient operator; $\alpha_{kj}(t)$ — are known functions of time; and the real parameters λ_k represent nonlinearity of the medium.

We regard the required functions $u_k(t, \mathbf{x})$ as the concentrations of interacting components of some mixture of substances, while the known functions $\alpha_{kj}(t)$ characterize the rates of occurring reactions. We cover the situation when functions $\alpha_{kj}(t)$ vanish identically for some k and j.

In order to construct exact solutions for system (2.1) , we use the ansatz:

$$u_k(t, \mathbf{x}) = \psi_k(t) \Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_k(t) \Big]^{1/\lambda_k}. \tag{2.2}$$

Here

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \tag{2.3}$$

where the nonzero symmetric numerical matrix A of size $n \times n$, the constant vector $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ and constant $C \in \mathbb{R}$ are to be determined.

Inserting (2.2) into system (2.1) and rearranging, we arrive at

$$\psi_k' \Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_k\Big] + \frac{1}{\lambda_k}\,\psi_k \varphi_k' = \frac{1}{\lambda_k}\,\psi_k^{1+\lambda_k}\Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_k\Big]\Delta W(\mathbf{x}) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_k^2}\,\psi_k^{1+\lambda_k}\,|\nabla W(\mathbf{x})|^2 + \psi_k^{1-\lambda_k}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}(t)\,\psi_j^{\lambda_j}\Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_j\Big].$$

Here $\psi_k = \psi_k(t)$, $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $\psi_k' = \dfrac{d\psi_k}{dt}$, $\varphi_k' = \dfrac{d\varphi_k}{dt}$; $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$. We find from (2.3)

$$|\nabla W(\mathbf{x})|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} A \ \text{ -- trace of matrix } A.$$

With these relations and (2.3) the last N equalities rewrite as

$$\left(\psi_k' - \frac{\operatorname{tr} A}{\lambda_k}\,\psi_k^{1+\lambda_k} - \psi_k^{1-\lambda_k}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}(t)\,\psi_j^{\lambda_j}\right)\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C\right) +$$

$$+\psi_k'\varphi_k + \frac{1}{\lambda_k}\psi_k\varphi_k' = \frac{\operatorname{tr} A}{\lambda_k}\,\psi_k^{1+\lambda_k}\varphi_k +$$

$$+\frac{1}{\lambda_k^2}\psi_k^{1+\lambda_k}\Big((A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2\Big) + \psi_k^{1-\lambda_k}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}(t)\,\psi_j^{\lambda_j}\varphi_j. \tag{2.4}$$

It is straightforward to verify that if the symmetric matrix A, the vector $\mathbf{B}$ and the constant C satisfy the next system of algebraic equations:

$$A = 2\sigma\, A^2, \quad \mathbf{B} = 2\sigma\, A\mathbf{B}, \quad C = \sigma\,|\mathbf{B}|^2, \tag{2.5}$$

where $\sigma \neq 0$ is the separation constant, then (2.4) reduces to the system of ordinary differential equations:

$$\psi_k' = S_k\psi_k^{1+\lambda_k} + \psi_k^{1-\lambda_k}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}(t)\,\psi_j^{\lambda_j}, \tag{2.6}$$

$$\varphi_k' = \left(\operatorname{tr} A\,\psi_k^{\lambda_k} - \lambda_k\frac{\psi_k'}{\psi_k}\right)\varphi_k + \lambda_k\psi_k^{-\lambda_k}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}(t)\,\psi_j^{\lambda_j}\varphi_j, \tag{2.7}$$

where

$$S_k = \frac{\operatorname{tr} A}{\lambda_k} + \frac{1}{\sigma\lambda_k^2}. \tag{2.8}$$

These arguments justify following statement.

T h e o r e m 2.1 *Nonlinear reaction-diffusion system* (2.1) *admits exact solutions* (2.2), *where the function* $W(\mathbf{x})$ *can be an arbitrary polynomial of the form* (2.3) *with coefficients satisfying* (2.5), *while the functions* $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ *are solutions to* (2.6), (2.7).

Thus, theorem 2.1 reduce the problem finding of exact solutions for PDE PT (2.1) to solving ODE PN (2.6), (2.7). At the same time, even constant nontrivial solutions of a nonlinear system (2.6) are of interest. The linear autonomous system (2.7) corresponds to such solutions, that can be found in an explicit form.

Example 2.1 Consider the system like (2.1) of four equations in the case of four spatial coordinates

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot \left(u_1^{1/3} \nabla u_1\right) + u_1^{2/3} \left(\frac{3}{2}\, u_2^{1/3} - u_3^{1/3} + \frac{1}{2}\, u_4^{1/3}\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot \left(u_2^{1/3} \nabla u_2\right) + u_2^{2/3} \left(\frac{3}{2}\, u_1^{1/3} - u_3^{1/3} + \frac{1}{2}\, u_4^{1/3}\right),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot \left(u_3^{1/3} \nabla u_3\right) + u_3^{2/3} \left(2\, u_1^{1/3} - 2\, u_2^{1/3} + u_4^{1/3}\right),$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} = \nabla \cdot \left(u_4^{1/3} \nabla u_4\right) + u_4^{2/3} \left(\frac{9}{8}\, u_1^{1/3} + 20\, u_2^{1/3} - \frac{161}{8}\, u_3^{1/3}\right).$$

This system has the following parametric family of exact, periodic in time and anisotropic in spatial variables solutions:

$$u_k(t, \mathbf{x}) = \Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_k(t)\Big]^3, \quad k = \overline{1, 4},$$

where

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{1}{432}\, x_1^2 - \frac{1}{108}\, x_2^2 - \frac{1}{108}\, x_3^2 - \frac{1}{48} x_4^2 +$$
$$+ \frac{1}{108}\, x_1 x_2 + \frac{1}{108}\, x_1 x_3 - \frac{1}{54}\, x_2 x_3 + k x_1 - 2k\,(x_2 + x_3) - 108 k^2,$$
$$\varphi_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad \varphi_2(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$
$$\varphi_3(t) = \left(\frac{358}{193}\, C_1 + \frac{48}{193}\, C_2\right) \sin t + \left(\frac{358}{193}\, C_2 - \frac{48}{193}\, C_1\right) \cos t,$$
$$\varphi_4(t) = \left(\frac{467}{386}\, C_1 - \frac{1062}{193}\, C_2\right) \sin t + \left(\frac{467}{386}\, C_2 + \frac{1062}{193}\, C_1\right) \cos t.$$

Here k, C_1, C_2 are arbitrary real parameters.

Periodic chemical reactions were discovered by Belousov in the early 50s [12]. Questions of existence and construction of periodic solutions of reaction-diffusion systems are of interest for chemical technology and are studied in a number of papers [13], [14], [15].

3. Stability analysis of large-scale systems by common vector Lyapunov functions

Consider a large-scale system with switched subsystems and switched interconnections

$$\dot{y}_i = f_i^{(s_i(t))}(y_i) + \sum_{j \neq i}^{K} f_{ij}^{(s_{ij}(t))}(t, \mathbf{y}), \quad i = \overline{1, K}. \tag{3.1}$$

Here we denote the state vector for the i-th subsystem by $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ and $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ is the full state vector for the large-scale system (3.1). Functions $s_i(t)$, $s_i :\ [0, +\infty) \to M_i$, $M_i = \{1, 2, \dots, K_i\}$ determine the switching signal for the i-th subsystem. We suppose that functions $f_i^{(j)}(y_i)$, $i = \overline{1, K}$, $j \in M_i$ are continuous and homogeneous with order $\varsigma_i \geq 1$, where again the rational number ς_i has an odd numerator and an odd denominator. Functions $s_{ij}(t)$, $s_{ij} :\ [0, +\infty) \to M_{ij}$, $M_{ij} = \{1, 2, \dots, K_{ij}\}$, determine the switching laws of influence of the j-th subsystem on the

i-th one. The functions $s_i(t)$, $s_{ij}(t)$ are piecewise-constant, right-sided continuous and have a finite number of point of discontinuities on each finite interval. As far as the functions, which determine the influence of the j-th subsystem on the i-th one are concerned, we assume that inequalities $||f_{ij}^{(k)}(t,\mathbf{y})|| \leq h_{ij}||y_j||^{\beta_j}$ are satisfied (for all $k \in M_{ij}$, $t > 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$). Note that the system (3.1) refers to a class of switching systems or hybrid systems, for which urgent problem is to develop effective stability criteria [8], [9], [10]. Suppose that for any i-th family of homogeneous differential systems with an order ς_i

$$\dot{y}_i = f_i^{(k)}(y_i), \quad k \in M_i, \tag{3.2}$$

a homogeneous common Lyapunov function (CLF) with an order $\eta_i > 1$ has been constructed (e.g. on the basis of ([17], Theorem 1)). For all $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ the CLF satisfies the following inequalities

$$a_{1i}||y_i||^{\eta_i} \leq V_i(y_i) \leq a_{2i}||y_i||^{\eta_i}, \quad ||gradV_i(y_i)|| \leq a_{3i}||y_i||^{\eta_i-1},$$
$$\dot{V}_i(y_i)\big|_{(3.2)} \leq -a_{4i}||y_i||^{\eta_i-1+\varsigma_i}, \quad a_{ki} > 0. \tag{3.3}$$

Consider a common vector Lyapunov functions (CVLF), where each component represents a CLF for the corresponding family (3.2):

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}) = \mathrm{col}\left(V_1(y_1), \ldots, V_K(y_K)\right). \tag{3.4}$$

From (3.3), for the derivative of the i-th component of CVLF (3.4) with respect to system (3.1) we obtain the following estimate

$$\dot{V}_i(y_i)\big|_{(3.1)} \leq -a_{4i}a_{2i}^{-\frac{\eta_i-1+\varsigma_i}{\eta_i}} V_i^{\frac{\eta_i-1+\varsigma_i}{\eta_i}} + V_i^{\frac{\eta_i-1}{\eta_i}} \sum_{j\neq i}^{K} h_{ij}\, a_{3i}\, a_{1i}^{\frac{1-\eta_i}{\eta_i}}\, a_{1j}^{-\frac{\beta_j}{\eta_j}} V_j^{\frac{\beta_j}{\eta_j}}, \quad i = \overline{1,K}. \tag{3.5}$$

Let's use designations:

$$S_i = -a_{4i}a_{2i}^{-\frac{\eta_i-1+\varsigma_i}{\eta_i}}, \quad \lambda_i = \frac{\eta_i - 1 + \varsigma_i}{\eta_i}, \quad \mu_i = \frac{\eta_i - 1}{\eta_i}, \tag{3.6}$$

$$\alpha_{ij} = h_{ij}\, a_{3i}\, a_{1i}^{\frac{1-\eta_i}{\eta_i}}\, a_{1j}^{-\frac{\beta_j}{\eta_j}}, \quad \nu_j = \frac{\beta_j}{\eta_j} \tag{3.7}$$

Using estimates (3.5) and designations (3.6), (3.7) we obtain the comparison system

$$\dot{u}_i = S_i u_i^{\lambda_i} + u_i^{\mu_i} \sum_{j\neq i}^{K} \alpha_{ij} u_j^{\nu_j} \equiv \Phi_i(u_i), \quad i = \overline{1,K}. \tag{3.8}$$

The functions $\Phi_i(\mathbf{u})$ are continuous and quasimonotone for all $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^K$. Since CVLF (3.4) is positive definite, according to the comparison principle [11] the trivial solution $\mathbf{y} = 0$ of (3.1) has the same stability properties as the trivial solution of the comparison system.

Theorem 3.1 *If the trivial solution $u = 0$ of comparison system* (3.8) *is stable (asymptotically stable), then the trivial solution $\mathbf{y} = 0$ of large-scale system* (3.1) *is stable (asymptotically stable), at any switching laws $s_i(t)$, $s_{ij}(t)$.*

Thus, the theorem 3.1 allows to reduce a research of stability of large-scale system with the arbitrary switching laws to the analysis of stability of significantly more simple system (3.8) without switchings.

4. Stationary solutions and first integrals

As shown in section 2, the construction of exact solutions of the reaction-diffusion system leads to the ODE system (2.6), (2.7). We come to more general ODE system (3.8) this same kind in section 3 by applying the vector Lyapunov function method to analyze the stability of a large-scale switching system. Thus, completely different problems led us to study the ODE system (3.8). In addition, this system can meet in other problems and be of independent interest. Therefore, we consider some properties of this ODE system (3.8). In this section of the paper we obtain some exact solutions of the system (3.8) as well as its first integrals.

Stationary solutions of the system (3.8) satisfy the system of algebraic equations: $S_k u_k^{\lambda_k-\mu_k} + \sum\limits_{j\neq k} \alpha_{kj}\, u_j^{\nu_j} = 0$. We will make replacement $Z_k = u_k^{\nu_k}$ and rewrite the system as follows:

$$S_k Z_k^{\gamma_k} + \sum_{j\neq k} \alpha_{kj}\, Z_j = 0. \tag{4.1}$$

Here for convenience, the symbol $\gamma_k = \frac{(\lambda_k-\mu_k)}{\nu_k}$ is entered . The system (4.1) is nonlinear and in general it is difficult to explore its solvability under arbitrary coefficients, so we consider a number of special cases of interest.

1. Let under all $k = 1, 2, \ldots, n$ the equality holds $\lambda_k = \mu_k$. Then (4.1) becomes linear and is written as

$$Q\mathbf{Z} = -\mathbf{S}, \tag{4.2}$$

where $\mathbf{Z} = \mathrm{col}\,(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ is required vector, $\mathbf{S} = \mathrm{col}\,(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ — is vector of known numbers, and matrix $Q = [q_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$ set as follows: $q_{kj} = \alpha_{kj}$, $k \neq j$ and $q_{kj} = 0$, $k = j$. If $\det Q \neq 0$, then the solution of system (4.2) is issued the only way by Kramer's formulas.

2. Let as $S_k \neq 0$ and $\lambda_k \neq \mu_k$ for all $k = \overline{1,n}$. Then, if matrix of linear part system (4.1) has the form

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1n} \\ \alpha_{n1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

where $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$, $\ldots$, $\alpha_{n-1n} \neq 0$, $\alpha_{n1} \neq 0$, the system reduce to only one equation: $\Omega Z_1^{\gamma} + Z_1 = 0$, where $\gamma = \prod\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$ and

$$\Omega = \frac{S_n}{\alpha_{n1}} \left(-\frac{S_{n-1}}{\alpha_{n-1n}}\right)^{\gamma_n} \left(-\frac{S_{n-2}}{\alpha_{n-2n-1}}\right)^{\gamma_n\gamma_{n-1}} \times \ldots \times \left(-\frac{S_2}{\alpha_{23}}\right)^{\prod\limits_{k=3}^{n}\gamma_k} \left(-\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^{\prod\limits_{k=2}^{n}\gamma_k}.$$

The latter equation has a nontrivial solution $Z_1 = \left(-\dfrac{1}{\Omega}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$. In this case Z_2,..., Z_n are defined by formulas

$$Z_2 = -\frac{S_1}{\alpha_{12}}\, Z_1^{\gamma_1}, \quad Z_3 = -\frac{S_2}{\alpha_{23}} \left(-\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^{\gamma_2} Z_1^{\gamma_1\gamma_2},$$

$$Z_4 = -\frac{S_3}{\alpha_{34}} \left(-\frac{S_2}{\alpha_{23}}\right)^{\gamma_3} \left(-\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^{\gamma_3\gamma_2} Z_1^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \quad \text{etc.}$$

We proceed to the construction of the first integrals of the ODE system (3.8), in the case when the right part is autonomous $\alpha_{kj}(t) = \alpha_{kj} \equiv \text{const}$. Introduce the notation $\nu_k(t) = X_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ and rewrite the ODE system (3.8) for this case as follows:

$$\dot{X}_k = S_k X_k^{\lambda_k} + X_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\nu_j}, \quad X_k = X_k(t), \quad \dot{X}_k = \frac{dX_k}{dt}. \tag{4.4}$$

We show that the statement is true.

T h e o r e m 4.1 *Let the parameters of a system* (4.4) *satisfy the following conditions:*
1. $\lambda_k = 1$, $k = \overline{m+1,n}$, $m < n$;
2. $\nu_k = \mu_k - 1$, $k = \overline{m+1,n}$;
3. $\nu_k = \mu_k - \lambda_k$, $k = \overline{1,m}$
and the following system of algebraic equations:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k S_k = 0, \quad A_k \alpha_{kj} + A_j \alpha_{jk} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,k-1} \tag{4.5}$$

has a nontrivial solution $(A_1, \ldots, A_n)$. *Then system* (4.4) *has a first integral*

$$J = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1-\lambda_k}\, X_k^{1-\lambda_k} + \sum_{k=m+1}^{n} A_k \ln X_k. \tag{4.6}$$

P r o o f. Derived from the expression (4.6) to the system (4.4) has the form

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{k=1}^{m} A_k X_k^{-\lambda_k} \left[S_k X_k^{\lambda_k} + X_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\nu_j} \right] +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} A_k X_k^{-1} \left[S_k X_k^{\lambda_k} + X_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\nu_j} \right].$$

Given the conditions $1-3$, the last equation is rewritten as

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{k=1}^{m} A_k S_k + \sum_{k=1}^{m} A_k X_k^{\mu_k - \lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\mu_j - \lambda_j} +$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=m+1}^{n} A_k X_k^{\mu_k - 1} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\mu_j - \lambda_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=1}^{m} A_k X_k^{\mu_k - \lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\mu_j - \lambda_j} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} A_k X_k^{\mu_k - \lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, X_j^{\mu_j - \lambda_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=\overline{1,n},\, j=\overline{1,k-1}} \left(A_k \alpha_{kj} + A_j \alpha_{jk} \right) X_k^{\mu_k - \lambda_k} X_j^{\mu_j - \lambda_j}.$$

Thus, if the constant A_k, $k = \overline{1,n}$ satisfy a system of algebraic equations (4.5), then $\dfrac{dJ}{dt} = 0$. That is what we wanted to prove. □

R e m a r k 4.1 Statement 4.1 remains valid also for cases when $\lambda_k \neq 1$ for all $k = \overline{1,n}$ and $\lambda_k = 1$ for all $k = \overline{1,n}$. In the first case, the expression for the first integral (4.6) will not contain logarithmic terms, and in the second it will not contain power terms.

R e m a r k 4.2 The system (4.5) is a linear homogeneous system $N = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ equations with respect to $n < N$ unknowns $(A_1, \ldots, A_n)$. For nontrivial solutions to exist, it is necessary and sufficient that the rank of the matrix of this system r is less than n. For $r = n - 1$, the expression (4.6) gives only the first integral whose coefficients A_k, $k = \overline{1,n}$ are determined to an arbitrary nonzero factor. For $r < n - 1$, the expression (4.6) yields a family of first integrals whose coefficients A_k, $k = \overline{1,n}$ depend on $n - r \geq 2$ arbitrary parameters.

E x a m p l e 4.1 Let $n = 3$ and the conditions $\lambda_k \neq 1$ for all $k = \overline{1,3}$ are satisfied. In this case, the following autonomous ODE system:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= S_1 X_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2 - \lambda_2} + \alpha_{13} X_1^{\mu_1} X_3^{\mu_3 - \lambda_3}, \\
\dot{X}_2 &= S_2 X_2^{\lambda_2} + \alpha_{21} X_1^{\mu_1 - \lambda_1} X_2^{\mu_2} + \alpha_{23} X_2^{\mu_2} X_3^{\mu_3 - \lambda_3}, \\
\dot{X}_3 &= S_3 X_3^{\lambda_3} + \alpha_{31} X_1^{\mu_1 - \lambda_1} X_3^{\mu_3} + \alpha_{32} X_2^{\mu_2 - \lambda_2} X_3^{\mu_3},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

according to statement 4.1 has first integral in the form $J = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{A_k}{1 - \lambda_k} X_k^{1-\lambda_k}$. The unknowns A_1, A_2, A_3 satisfy the system of linear algebraic equations

$$A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3 = 0, \quad A_1 \alpha_{12} + A_2 \alpha_{21} = 0,$$

$$A_1 \alpha_{13} + A_3 \alpha_{31} = 0, \quad A_2 \alpha_{23} + A_3 \alpha_{32} = 0. \tag{4.8}$$

For the existence of nontrivial solutions we require, for example, the equality of all minors of the third order to zero, which leads to the following relations on the parameters of the system:

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{23}\alpha_{31} S_1 + \alpha_{13}\alpha_{32} S_2 - \alpha_{13}\alpha_{23} S_3 = 0. \tag{4.9}$$

When these equations are hold, the rank of the system matrix (4.8) is 2 and therefore it has a nontrivial solution:$A_1 = -\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}}\, a$, $A_2 = -\dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}}\, a$, $A_3 = a$, where $a \neq 0$ is arbitrary constant. Thus, the system (4.7) with parameters satisfying the equality (4.9) has first integral:

$$J_1 = \frac{\alpha_{31}}{(1-\lambda_1)\,\alpha_{13}} X_1^{1-\lambda_1} + \frac{\alpha_{32}}{(1-\lambda_2)\,\alpha_{23}} X_2^{1-\lambda_2} - \frac{1}{1-\lambda_3} X_3^{1-\lambda_3} = \text{const}.$$

E x a m p l e 4.2 Consider a system (4.4) with $n = 2$, in the form

$$\dot{X}_1 = S_1 X_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} X_1^{\mu_1} X_2^{\nu_2}, \quad \dot{X}_2 = S_2 X_2^{\lambda_2} + \alpha_{21} X_2^{\mu_2} X_1^{\nu_1}. \tag{4.10}$$

We show that there are 4 different variants of conditions on the parameters S_i, λ_i, μ_i, ν_i, $(i = 1, 2)$, α_{12}, α_{21}, under which the system (4.10) has the first integrals.

1. Let parameters of system (4.10) satisfy conditions:

$$\lambda_1 \neq 1, \quad \lambda_2 \neq 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - \lambda_1, \quad \nu_2 = \mu_2 - \lambda_2, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

then system (4.10) has first integral

$$J_1 = (1-\lambda_2)\,\alpha_{21} X_1^{1-\lambda_1} - (1-\lambda_1)\,\alpha_{12} X_2^{1-\lambda_2} \equiv \mathcal{C}_1,$$

where $\mathcal{C}_1$ is arbitrary real constant.

2. Let parameters of system (4.10) satisfy conditions:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - 1, \quad \nu_2 = \mu_2 - 1, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

then system (4.10) has first integral

$$J_2 = \alpha_{21} \ln X_1 - \alpha_{12} \ln X_2 \equiv \mathcal{C}_2,$$

where $\mathcal{C}_2$ is arbitrary real constant.

3. Let parameters of system (4.10) satisfy conditions:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 \neq 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - 1, \quad \nu_2 = \mu_2 - \lambda_2, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

then system (4.10) has first integral

$$J_3 = (1 - \lambda_2)\, \alpha_{21} \ln X_1 - \alpha_{12} X_2^{1-\lambda_2} \equiv \mathcal{C}_3,$$

where $\mathcal{C}_3$ is arbitrary real constant.

4. Let parameters of system (4.10) satisfy conditions:

$$\lambda_1 \neq 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - \lambda_1, \quad \nu_2 = \mu_2 - 1, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

then system (4.10) has first integral

$$J_4 = \alpha_{21} X_1^{1-\lambda_1} - (1 - \lambda_1)\, \alpha_{12} \ln X_2 \equiv \mathcal{C}_4,$$

where $\mathcal{C}_4$ is arbitrary real constant.

Acknowledgments. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 19-08-00746).

References

1. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Second Edition, Updated, Revised and Extended*, Publisher: Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London-New York, 2012, 1912 p.

2. J. D. Murray, *Mathematical biology. I. An Introduction*, Springer, 2002, 552 p.

3. J. L. Vazquez, *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford: Clarendon Press, 2007.

4. A. D. Polyanin, A. M. Kutepov, A. V. Vyazmin, D. A. Kazenin, *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, Taylor & Francis, London, New York, 2002, 387 p.

5. V. A. Galactionov, S. R. Svirshchevskii, *Subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Chapman & Hall/CRC, 2007, 493 p.

6. G. A. Rudykh, E. I. Semenov, "Construction of exact solutions of the multidimensional quasilinear heat equation", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **33**:8 (1993), 1087-1097.

7. D. D. Šiljak, *Large-scale dynamic systems: stability and structure*, North-Holland, New York, 1978, 416 p.

8. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2004.

9. R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulf, C. King, "Stability criteria for switched and hybrid systems", *SIAM Rev*, **49**:4 (2007), 545-592.

10. Hai Lin, P. J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **54**:2 (2009), 308-322.

11. V. M. Matrosov, *Metod vektornyx funkcij lyapunova: analiz dinamicheskix svojstv nelinejnyx sistem [The Method of Vector Lyapunov Functions: Analysis of Dynamical Properties of Nonlinear Systems]*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russ.).

12. B. P. Belousov, *Sbornik statej po radiacionnoj medicine za 1958 [The collection of papers on radiation medicine during 1958]*, Medgiz, Moscow, 1959 (In Russ.), 145 p.

13. J. J. Morgan, S. L. Hollis, "The existence of periodic solutions to reaction-diffusion systems with periodic data", *SIAM J. Math. Anal.*, **26**:5 (1995), 1225-1232.

14. Sandro Merino., "Positive periodic solutions for semilinear reaction diffusion systems on $\mathbb{R}^N$", *Advances in Differential Equations*, **1**:4 (1996), 579-609.

15. N. N. Nefedov, E. I. Nikulin, "Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-Diffusion Equations in the Two-Dimensional Case", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 342-348.

16. S. N. Vassilyev, A. A. Kosov, A. I. Malikov, *Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress (Milano, Italy, August 28–September 2 2011), 5718-5723.

17. A. Yu. Aleksandrov, A. A. Kosov, A. V. Platonov, "On the asymptotic stability of switched homogeneous systems", *Systems & Control Letters*, **61**:1 (2012), 127-133.

Submitted (дату ставит редакция журнала)

Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.70-77

УДК 517.958:531.12; 534.11

Вычисление собственных частот поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции

© **В. Н. Анисимов**[1], **В.Л. Литвинов** [2]

Аннотация. В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Рассмотренная математическая модель учитывает широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Объект принадлежит к широкому кругу одномерных колеблющихся объектов с движущимися границами. Наличие движущихся границ затрудняет описание таких объектов. В статье введены новые переменные, останавливающие границы. При помощи приближенного метода Галеркина получено алгебраическое уравнение четвертого порядка, позволяющее получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Рассмотренные методы постановки и решения задачи позволяют решить проблемы, возникающие при изучении колебаний объектов с движущимися границами. Полученные результаты исследований могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологических установок по изготовлению кабелей.

Ключевые слова: : колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, резонансные свойства, колебания кабеля, собственные частоты.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками [1]–[2]. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [3]–[9], гибкие звенья передач [10]–[14], лентопротяжные механизмы [15]–[16], конвейеры [17]–[18] и т. д. Наличие движущихся границ существенно осложняет математическое описание таких объектов, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

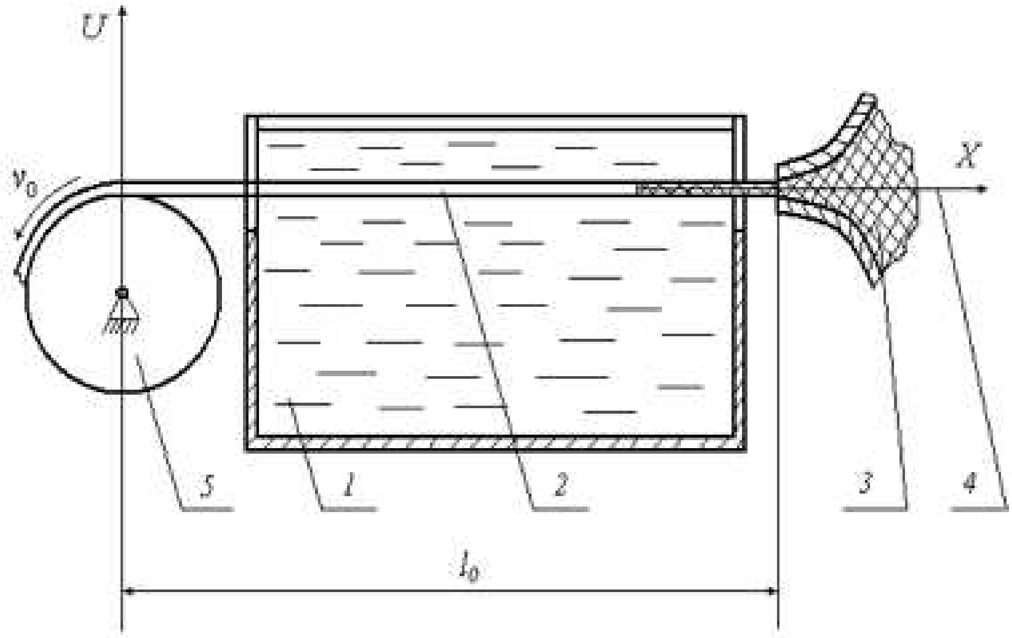
2. Постановка задачи

Схема технологической установки по изготовлению кабелей изображена на рис. 2.1. Здесь в точке $x = l_0$ через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5.

[1]**Анисимов Валерий Николаевич**, заведующий кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д. 45.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1346-167X, anisimov170159@mail.ru

[2]**Литвинов Владислав Львович**, заместитель заведующего кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д. 45.), кандидат технических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6108-803X, vladlitvinov@rambler.ru

Особенность задачи заключается в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется по длине. Скорость волн, бегущих из точки x=0 в точку $x = l_0$, уменьшается, так как уменьшается жесткость струны, поэтому волны концентрируются с приближением к точке $x = l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и среда этим волнам, как указывается в статье [16], оказывает меньшее сопротивление, чем волнам, бегущим в обратном направлении. Указанные факты могут привести к большим амплитудам колебаний вблизи точки $x = l_0$, что нежелательно. Чтобы предотвратить это, необходимо знать собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.



Р и с. 2.1

Схема технологической установки по изготовлению кабелей.

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[C(x-\nu_0 t)\,U_{xx}(x,t)\right] - \rho U_{tt}(x,t) - \lambda U_t(x,t) - RU_x(x,t) = 0; \qquad (2.1)$$

$$U(\nu_0 t,t) = 0; \quad U(\nu_0 t + l_0,t) = 0; \quad U_x(\nu_0 t,t) = 0; \quad U_x(\nu_0 t + l_0,t) = 0. \qquad (2.2)$$

Здесь λ, R – коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x-\nu_0 t)$ – функция, характеризующая изгибную жесткость кабеля; ν_0 - скорость продольного движения кабеля, T – сила натяжения кабеля, ρ – масса единицы длины кабеля.

Если принять

$$R = \lambda \nu_0, \qquad (2.3)$$

то на волну $U = \varphi(x-\nu_0 t)$, бегущую со скоростью ν_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют $(F_c = \lambda U_t + RU_x = 0)$, что соответствует действительности.

Введем новые переменные:

$$\zeta = x - \nu_0 t; \quad V(\zeta,t) = U(x,t)\,. \qquad (2.4)$$

После преобразований, с учетом (2.4), получим задачу с условиями, заданными на неподвижной границе:

$$\left(a^2-\nu_0^2\right)V_{\zeta\zeta}\left(\zeta,t\right)-\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[C\left(\zeta\right)V_{\zeta\zeta}\left(\zeta,t\right)\right]+2\nu_0V_{\zeta t}\left(\zeta,t\right)-V_{tt}\left(\zeta,t\right)-\tfrac{\lambda}{\rho}V_t\left(\zeta,t\right)=0;$$
$$V\left(0,t\right)=0;\quad V\left(l_0,t\right)=0;$$
$$V_\zeta\left(0,t\right)=0;\quad V_\zeta\left(l_0,t\right)=0.$$

Примем зависимость жесткости от ζ линейной:

$$C\left(\zeta\right)=d-b\zeta.$$

Введем в задачу безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{\zeta}{l_0}-0,5;\quad \tau=\frac{at}{l_0};\qquad Z\left(\xi,\tau\right)=V\left(\zeta,t\right).$$

Окончательная постановка задачи примет вид

$$r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}\left(\xi,\tau\right)+\gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}\left(\xi,\tau\right)+2rZ_{\xi\xi\xi}\left(\xi,\tau\right)+$$
$$+\left(1-\nu^2\right)Z_{\xi\xi}\left(\xi,\tau\right)+2\nu Z_{\xi\tau}\left(\xi,\tau\right)-Z_{\tau\tau}\left(\xi,\tau\right)-\beta Z_\tau\left(\xi,\tau\right)=0; \tag{2.5}$$

$$Z\left(-0{,}5;\tau\right)=0,\quad Z\left(0{,}5;\tau\right)=0,\quad Z_\xi\left(-0{,}5;\tau\right)=0,\quad Z_\xi\left(0{,}5;\tau\right)=0, \tag{2.6}$$

где

$$r=\frac{b}{\rho l_0a^2},\quad \gamma=\frac{0{,}5b}{\rho l_0a^2}-\frac{d}{\rho l_0^2a^2},$$
$$\nu=\frac{\nu_0}{a},\quad \beta=\frac{\lambda l_0}{\rho a}.$$

Безразмерные параметры характеризуют: ν - скорость продольного движения; r, γ - переменную изгибную жесткость; β - сопротивление внешней среды.

Изоляционная масса выдавливается в жидком виде, поэтому изгибную жёсткость в точке $x=l_0$ можно принять равной нулю. При этом $\gamma=-0,5r$.

3. Приближенное решение задачи методом Галеркина

Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций:

$$Z\left(\xi,\tau\right)=\mu\left(\xi\right)e^{W\tau}.$$

Тогда для $\mu\left(\xi\right)$ получим следующую задачу:

$$L\left[\mu\left(\xi\right)\right]\equiv r\xi\mu''''\left(\xi\right)+\gamma\mu''''\left(\xi\right)+2r\mu'''\left(\xi\right)+\left(1-\nu^2\right)\mu''\left(\xi\right)+$$
$$+2\nu W\mu'\left(\xi\right)-\left(W^2+\beta W\right)\mu\left(\xi\right)=0; \tag{3.1}$$

$$\mu\left(-0{,}5\right)=0;\quad \mu\left(0{,}5\right)=0;\quad \mu'\left(-0{,}5\right)=0;\quad \mu'\left(0{,}5\right)=0. \tag{3.2}$$

Для определения собственных частот задачи (3.1)-(3.2) воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина [19]–[20]. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu\left(\xi\right)=A\varphi_1\left(\xi\right)+B\varphi_2\left(\xi\right),$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \xi^4 - 0{,}5\xi^2 + 0{,}0625, \quad \varphi_2(\xi) = \xi^5 - 0{,}5\xi^3 + 0{,}0625\xi$$

– две линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям (3.2) и являющиеся ортогональными на интервале $(-0,5; 0,5)$.

При использовании метода Галеркина коэффициенты A и B следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} A\int\limits_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)\,d\xi + B\int\limits_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)\,d\xi = 0, \\ A\int\limits_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)\,d\xi + B\int\limits_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)\,d\xi = 0. \end{cases}$$

Здесь оператор L определяется выражением (3.1).

Приравняв нулю определитель системы, после преобразований получим уравнение для собственных частот:

$$W^4 + 2\beta W^3 + W^2\left(\beta^2 - 4465\cdot\gamma - 12\cdot\nu^2 + 56\right) + W\left[56\beta\left(1-\nu^2\right) - 4465\cdot\beta\gamma\right] +$$

$$+1996855\cdot\gamma^2 - 69726\cdot\gamma\left(1-\nu^2\right) + 528\left(1-\nu^2\right)^2 - 128407\cdot r^2 = 0. \quad (3.3)$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно-сопряженных корней:

$$W_1 = \omega_{01} \pm i\omega_1, \quad W_2 = \omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Действительные части корней характеризуют затухание свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Уравнение (3.3) решалось в среде MATLAB. В таблице приведены собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров ν и r при $\beta = 0{,}5$ и $\gamma = -0{,}5r$.

Таблица 1: Собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров ν и r

r \ ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0	$-0,250+3,455i$	$-0,247+3,414i$	$-0,237+3,294i$	$-0,222+3,100i$	$-0,204+2,840i$
	$-0,250+6,629i$	$-0,253+6,641i$	$-0,263+6,674i$	$-0,278+6,722i$	$-0,297+6,775i$
0,1	$-0,250+5,573i$	$-0,250+5,560i$	$-0,250+5,508i$	$-0,250+5,420i$	$-0,240+5,300i$
	$-0,25+15,750i$	$-0,250+15,751i$	$-0,250+15,760i$	$-0,250+15,770i$	$-0,250+15,780i$
0,2	$-0,25+7,015i$	$-0,250+7,002i$	$-0,249+6,963i$	$-0,248+6,897i$	$-0,246+6,805i$
	$0,250+21,288i$	$-0,250+21,289i$	$-0,251+21,294i$	$-0,252+21,301i$	$-0,254+21,311$

Анализ таблицы показывает, что частота колебаний (мнимая часть комплексно-сопряженных корней) увеличивается с увеличением r (характеризует изгибную жёсткость) и уменьшением ν (характеризует скорость продольного движения). Действительные части корней, характеризующие затухание, от r и ν зависят слабо.

Заметим, что если W_n безразмерная частота для задачи (2.5)-(2.6), то частота ω_n для исходной задачи (2.1)-(2.2) находится по формуле: $\omega_n = \frac{aW_n}{l_0}$.

4. Заключение

Рассмотренная математическая модель позволяет учесть широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Полученное уравнение собственных частот позволяет с использованием стандартных программных средств получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологической установки по изготовлению кабелей.

Список литературы

1. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки»*, **19**:2 (2015), 382–397.

2. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами”, *Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия), СамГТУ, Самара, 2017, 35–39.

3. О. А. Горошко, Г. Н. Савин, *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наукова думка, Киев, 1971, 270 с.

4. А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами*, Физматлит, М., 2001, 320 с.

5. S. M. Sahebkar, M. R. Ghazavi, S. E. Khadem, M. H. Ghayesh, “Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well”, *Mech. and Mach. Theory*, **46**:5 (2011), 743–760.

6. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении”, *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, **19**:4 (2017), 161–165.

7. W. D. Zhu, Y. Chen, “Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control”, *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **128**:1 (2006), 66–78.

8. А. И. Весницкий, А. И. Потапов, “Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках”, *Динамика систем*, **7** (1975), 84–89.

9. Л. О. Кечеджиян, Н. А. Пинчук, А. М. Столяр, “Об одной задаче математической физики с подвижной границей”, *Извест. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*, **1** (2008), 22–27.

10. А. А. Лежнева, “Изгибные колебания балки переменной длины”, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, **1** (1970), 159–161.

11. W. D. Zhu, N. A. Zheng, “Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation”, *Trans. ASME. J. Appl.Mech.*, **75**:3 (2008), 031003.

12. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении”, *«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского*, Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара, Средне-Волжское математическое общество, Саранск, 2018, 120–125.

13. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость”, *Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций*, Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1, СамГТУ, Самара, 2008, 38–42.

14. В. С. Тихонов, А. А. Абрамов, “Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке”, *Вестник МГУ. Сер. 1*, **5** (1993), 45–48.

15. К. И. Рагульский, “Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов”, *В сб.: Динамика машин*, Наука, М., 1971, 169—177.

16. Ю. П. Самарин, “Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве”, *Прикладная математика и механика*, **26**:3 (1964), 77–80.

17. В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, Е. Е. Лисенкова, “Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой”, *Вестник научно–технического развития*, **62**:6 (2013), 18–29.

18. Kotera Tadashi, “Vibration of a string with time-varying length”, *Bulleten Japan Sosietyof Mechanical Engineers*, **21**:162 (1978), 1677–1684.

19. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, И. В. Корпен, “Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах”, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, **2** (2018), 70–77.

20. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **329**:17 (2010), 3484–3494.

Поступила 15.12.2018

MSC2010 35R37; 35G30, 35Q70

Calculation of the natural frequencies of the transverse of cable oscillations at the area of application of insulation

© **V.N. Anisimov [1], V.L. Litvinov [2]**

Abstract. Researches the transverse vibrations of the cable in the area where the insulation is applied to it. The considered mathematical model takes into account a wide range of factors affecting the oscillations: longitudinal motion, variable bending stiffness, environmental resistance, cable tension. The object belongs to a wide range of one-dimensional objects with moving boundaries. Moving boundaries complicate the description of such objects. The article introduces new variables that stop the boundaries. In this paper, using the Galerkin method, a fourth-order algebraic equation is obtained, which makes it possible to obtain two first natural frequencies of cable oscillations. The considered methods of statement and solution of the problem allow to solve the problems arising in the study of oscillations of objects with moving boundaries. Results can be used to ensure reliable operation of the technological installation for the manufacture of cables.
Key Words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, resonant properties, cable oscillations, natural frequencies.

References

1. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, "Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders", *Vestn. Samar. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **19**:2 (2015), 382–397 (In Russ.).

2. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, "Comparative analysis of linear and nonlinear models describing oscillations of systems with moving boundaries", *Proceedings of the X All-Russian Conference on Solid Mechanics* (September 18–22, 2017, Samara, Russia), Samara State Technical University, Samara, 2017, 35–39 (In Russ.).

3. O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Introductionin mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length*, Naukova Dumka, Kiev, 1971 (In Russ.), 270 p.

4. A. I. Vesnitskii, *Vaves in systems with moving boundaries and loads*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.

5. S. M. Sahebkar, M. R. Ghazavi, S. E. Khadem, M. H. Ghayesh, "Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well", *Mech. and Mach. Theory*, **46**:5 (2011), 743–760.

6. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, "Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction", *News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, **19**:4 (2017), 161–165 (In Russ.).

7. W. D. Zhu, Y. Chen, "Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control", *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **128**:1 (2006), 66–78.

[1]**Valeriy N. Anisimov**, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1346-167X, anisimov170159@mail.ru

[2]**Vladislav L. Litvinov**, Deputy Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Technical), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6108-803X, vladlitvinov@rambler.ru

8. A. I. Vesnitsky, A. I. Potapov, “Transverse oscillations of ropes in mine hoists”, *Dynamics of systems*, **7** (1975), 84–89 (In Russ.).

9. L. O. Kechedgiyan, N. A. Pinchuk, A. M. Stolyar, “A problem of mathematical physics with moving boundary”, *Vest. Vuzov North-Kaukaz. Region.Natural Sciences*, **1** (2008), 22–27 (In Russ.).

10. A. A. Lezhneva, “Bending vibration of beam of variable length”, *Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanic of solidstate*, **1** (1970), 159–161 (In Russ.).

11. W. D. Zhu, N. A. Zheng, “Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation”, *Trans. ASME. J. Appl.Mech.*, **75**:3 (2008), 031003.

12. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Investigation of lateral vibrations of a rope moving in the longitudinal direction”, *"Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky*, Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar, Middle Volga Mathematical Society, Saransk, 2018, 120–125 (In Russ.).

13. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Calculation of natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having flexural rigidity”, *Mathematical modeling and boundary value problems*, Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 1, Samara State Technical University, Samara, 2008, 38–42 (In Russ.).

14. V. S. Tikhonov, A. A. Abramov, “Transverse oscillations of a flexible thread of variable length in the flow”, *Vestnik MGU. Ser. 1*, **5** (1993), 45–48 (In Russ.).

15. K. I. Ragulsky, “Voprosy dinamiki pretsizionnykh lentoprotiazhnykh mekhanizmov [Questions of dynamics of precision tape drive mechanisms]”, *Dynamics of cars*, Nauka Publ., M., 1971, 169—177 (In Russ.).

16. Yu. P. Samarin, “Ob odnoi nelineinoi zadache dlia volnovogo uravneniia v odnomernom prostranstve [About one nonlinear task for the wave equation in one-dimensional space of]”, *Applied mathematics and mechanics*, **26**:3 (1964), 77–80 (In Russ.).

17. V. I. Erofeev, D. A. Kolesov, E. E. Lisenkova, “Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load”, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, **62**:6 (2013), 18–29 (In Russ.).

18. Kotera Tadashi, “Vibration of a string with time-varying length”, *Bulleten Japan Sosietyof Mechanical Engineers*, **21**:162 (1978), 1677–1684.

19. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, I. V. Korpen, “Use of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries”, *News of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*, **2** (2018), 70–77 (In Russ.).

20. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **329**:17 (2010), 3484–3494.

Submitted 15.12.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.78-88

УДК 532.5.011:517.958

Парное магнитогидродинамическое взаимодействие твердых сфер в медленном продольном потоке вязкой жидкости

© **И. П. Борискина [1], А. О. Сыромясов [2]**

Аннотация. Строится и изучается математическая модель двух твердых сфер равного радиуса и с одинаковыми физическими свойствами, помещенных в сильно вязкую жидкость, где действует магнитное поле. На бесконечном удалении от частиц поток и поле однородны. Предположение о слабости объемных токов в жидкости позволяет разделить магнитные и гидродинамические эффекты взаимодействия частиц. Распределение магнитного поля найдено для произвольной ориентации невозмущенного поля относительно линии, соединяющей центры сфер, и представлено в виде мультипольного разложения. Это выражение использовано при вычислении силы, действующей на частицы со стороны магнитного поля. Вместе с известными выражениями для гидродинамических сил указанный результат может быть использован для исследования динамики взвешенных сфер в однородном потоке магнитной жидкости. В статье более подробно изучен частный случай, когда невозмущенные поле и поток направлены вдоль линии центров. Обсуждена возможность коагуляции частиц в магнитогидродинамических потоках указанного вида.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Стокса, медленное течение, взвешенные частицы, магнитная жидкость, гидродинамическое взаимодействие, коагуляция.

1. Введение

Как известно, отсутствие примесей в жидкости – скорее, исключение, чем правило. В большинстве природных и технологических процессов задействованы суспензии и эмульсии – жидкости, содержащие мелкие инородные частицы, твердые или жидкие, соответственно.

Наличие взвеси может существенно влиять на усредненные характеристики вещества. В пионерской работе А. Эйнштейна [1] была вычислена эффективная вязкость разбавленной суспензии твердых сфер. При этом предполагалось, что каждая частица обтекается так, как если бы других частиц взвеси в жидкости не было. Следующий важный шаг был сделан Дж. Бэтчелором и Дж. Грином [2, 3, 4]: было учтено парное гидродинамическое взаимодействие частиц. Указанное явление заключается в том, что каждому инородному телу "видны" возмущения, вносимые в поток другим близко расположенным телом. Дальнейшие исследования в этой области связаны с учетом большего числа частиц, одновременное взаимодействие которых принимается во внимание [5, 6].

При распространении в среде тепла [7], электрического или магнитного поля наблюдаются аналогичные непрямые взаимодействия, вызванные искажением внешних полей инородными включениями.

[1]**Борискина Ирина Петровна**, доцент кафедры математического анализа, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3536-5838, irinaboriskina@mail.ru

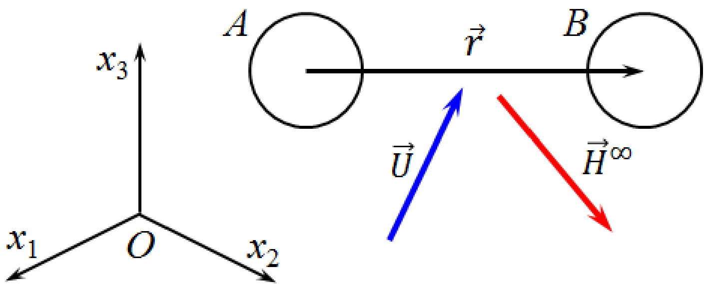
[2]**Сыромясов Алексей Олегович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6520-0204, syal1@yandex.ru

Каждый из таких эффектов порознь в достаточной степени изучен. Однако большой интерес представляют "наложения" двух и более эффектов: электрогидродинамическое, термогидродинамическое взаимодействие и т.д. Они могут приводить к результатам, принципиально недостижимым при учете лишь одного из эффектов, например, к образованию или разрушению агрегатов из частиц взвеси [8]. В свою очередь, наличие агрегатов способно существенно изменить свойства дисперсной среды.

В настоящей работе изучается магнитогидродинамическое взаимодействие идентичных твердых сфер, имеющих нейтральную плавучесть и помещенных в однородный поток вязкой жидкости.

2. Постановка задачи о магнитогидродинамическом взаимодействии частиц

Имеются две одинаковые твердые сферические частицы A и B радиуса a, плотности ρ_p и магнитной проницаемости μ_p. Их центры находятся в точках с радиус-векторами $\vec{r}^A$ и $\vec{r}^B$ относительно начала O декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Вектор $\vec{r} = \vec{r}^B - \vec{r}^A$ соединяет центры частиц (рис. 2.1)



Р и с. 2.1

Геометрия задачи о магнитогидродинамическом взаимодействии

Эти сферы помещены в жидкость с вязкостью η, плотностью ρ_f и магнитной проницаемостью μ_f. Вектор-функции $\vec{u}$, $\vec{H}_f$, $\vec{H}^A$ и $\vec{H}^B$ задают, соответственно, скорость течения жидкости, напряженность магнитного поля в ней, а также магнитное поле внутри частиц A и B. На большом удалении от инородных сфер поток и поле однородны:

$$\vec{u} \to \vec{U} = \text{const}, \ \vec{H}_f \to \vec{H}^\infty; \ |\vec{x}| \to \infty. \tag{2.1}$$

Здесь и далее $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть радиус-вектор точки среды относительно O.

Находясь в потоке и во внешнем магнитном поле, твердые сферы начнут двигаться, причем их скорости, вообще говоря, будут отличаться от скорости течения. Динамика частиц описывается уравнениями

$$m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt} = \vec{F}(A), \ m_B \frac{d\vec{V}^B}{dt} = \vec{F}(B), \tag{2.2}$$

где t – время, m_A и m_B – массы, $\vec{V}^A$ и $\vec{V}^B$ – абсолютные скорости центров A и B, $\vec{F}(A)$ и $\vec{F}(B)$ – силы, приложенные к A и B. В зависимости от своих начальных положений и скоростей частицы под действием этих сил могут отдаляться друг от друга или сближаться (вплоть до коагуляции). Однако $\vec{F}(A)$ и $\vec{F}(B)$ зависят от внутренних напряжений, действующих в среде. Поэтому перед исследованием динамики инородных тел необходимо найти распределение гидродинамических и магнитных полей в жидкости.

Считая происходящие процессы стационарными, а плотность объемных электрических токов – малой, получим, что напряженность поля удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}. \tag{2.3}$$

Здесь под $\vec{H}$ понимается напряженность поля как вне, так и внутри частиц. Условия на границе раздела "жидкость–частица" найдем, пренебрегая поверхностными токами на ней. Тогда касательная к поверхности напряженности поля и нормальная к поверхности компонента магнитной индукции должны быть непрерывны [9]. Для сферы A будем иметь:

$$\vec{H}_f \cdot \vec{\tau} = \vec{H}^A \cdot \vec{\tau},\ \mu_f \vec{H}_f \cdot \vec{n} = \mu_p \vec{H}^A \cdot \vec{n};\ |\vec{x} - \vec{r}^A| = a, \tag{2.4}$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ суть единичные векторы касательной и внешней нормали к поверхности сферы. Аналогичные равенства выполнены и для частицы B.

Как известно, уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в отсутствие немагнитных массовых сил имеют вид:

$$\rho_f \Big[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\Big] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь p – давление в жидкости.

Будем предполагать, что размеры взвешенных частиц малы, а жидкость достаточно вязкая, так что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_f |\vec{U}| a/\eta$ много меньше единицы. Тогда в первом из указанных соотношений можно пренебречь инерционными слагаемыми. Кроме того, второе из условий (2.3) позволяет не учитывать влияние магнитного поля на движение жидкости. Т.о., "гидродинамическая" и "магнитная" части задачи разделяются, а течение описывается в приближении Стокса:

$$\eta \Delta \vec{u} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{2.6}$$

На границах частиц должны быть выполнены условия прилипания – скорость жидкости должна быть равна скорости точки поверхности. Так, при $|\vec{x} - \vec{r}^A| = a$

$$u_i = V_i^A + \Gamma_{ij}^A (x_j - r_j^A),\ i = \overline{1,3}. \tag{2.7}$$

Тензор $\vec{\Gamma}^A$ задает абсолютную угловую скорость частицы. Координаты векторов и компоненты тензоров более высокого порядка обозначаются нижними индексами, по повторяющимся индексам происходит суммирование в пределах от 1 до 3.

Итак, изначально требуется решить задачи (2.3), (2.4) и (2.6), (2.7) с учетом условий на бесконечности (2.1).

3. Нахождение возмущения однородного магнитного поля

Метод решения "магнитной" части задачи в общих чертах описан в [10].

Будем искать напряженность поля в вне частиц в виде

$$\vec{H} = \vec{H}^\infty + \vec{H}', \tag{3.1}$$

где $\vec{H}'$ – искажение, вносимое инородными телами. Из (2.1) следует, что

$$\vec{H}' \to \vec{0},\ |\vec{x}| \to \infty.$$

Второе из условий (2.3) означает, что вне и внутри частиц магнитное поле имеет потенциал:

$$\vec{H}' = \nabla\Phi_f,\ \vec{H}^A = \nabla\Phi^A,\ \vec{H}^B = \nabla\Phi^B. \tag{3.2}$$

Исходя из первого уравнения в (2.3), можно сделать вывод, что функции Φ_f, Φ^A, Φ^B – гармонические:

$$\Delta\Phi_f = 0,\ \Delta\Phi^A = 0,\ \Delta\Phi^B = 0. \tag{3.3}$$

При этом Φ^A и Φ^B, зависящие от $\vec{x} - \vec{r}^A$ и $\vec{x} - \vec{r}^B$, соответственно, не имеют особенностей в центрах частиц, а Φ_f затухает на бесконечности:

$$\Phi^A(\vec{0}) < \infty,\ \Phi^B(\vec{0}) < \infty;\ \Phi_f(\vec{x}) \to 0,\ |\vec{x}| \to \infty. \tag{3.4}$$

Условия (2.4) при $|\vec{x} - \vec{r}^A|$ теперь выглядят так:

$$\Big(\frac{\partial\Phi_f}{\partial x_i} + H_i^\infty\Big)\tau_i = \frac{\partial\Phi^A}{\partial x_i}\tau_i,\ \mu_f\Big(\frac{\partial\Phi_f}{\partial x_i} + H_i^\infty\Big)n_i = \mu_f\frac{\partial\Phi^A}{\partial x_i}n_i, \tag{3.5}$$

Соотношения на поверхности B имеют такой же вид с заменой Φ^A на Φ^B.

Из (3.3) и (3.4) следует, что искомые потенциалы можно записать в виде

$$\begin{array}{rcl}
\Phi^A & = & \Phi_j^{int}(A)L_j(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^3 + \Phi_{jk}^{int}(A)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^5 + \\
 & & +\Phi_{jkl}^{int}(A)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^7 + \ldots \\
\Phi_f & = & \Phi_j^{ext}(A)L_j(\vec{x} - \vec{r}^A) + \Phi_{jk}^{ext}(A)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^A) + \Phi_{jkl}^{ext}(A)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^A) + \ldots \\
 & & +\Phi_j^{ext}(B)L_j(\vec{x} - \vec{r}^B) + \Phi_{jk}^{ext}(B)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^B) + \Phi_{jkl}^{ext}(B)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^B) + \ldots
\end{array} \tag{3.6}$$

Мультиполи $L_{j\cdots k}$ суть частные производные фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$L_{j\cdots k}(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\cdots\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{|\vec{y}|}\Big).$$

Неизвестными в разложениях (3.6) являются тензорные коэффициенты $\Phi_j^{int}(A)$, $\ldots\Phi_{jkl}^{ext}(B)$,... Индексы “int” и “ext” относятся к полю внутри и вне частиц, а обозначения “(A)” и “(B)” относят то или иное слагаемое к сферам A и B, соответственно.

Чтобы найти указанные величины, следует подставить (3.6) в граничные условия (3.5). Для снижения количества неизвестных применяются следующие упрощения.

Во-первых, из геометрических соображений следует, что распределение напряженности симметрично относительно середины отрезка, соединяющего центры сфер. Поскольку дифференцирование меняет четность функции, распределение потенциала антисимметрично относительно этой же точки:

$$\Phi_f\Big(\frac{\vec{r}^A + \vec{r}^B}{2} - \vec{y}\Big) = -\Phi_f\Big(\frac{\vec{r}^A + \vec{r}^B}{2} + \vec{y}\Big).$$

Для выполнения этого условия необходимо положить

$$\Phi_j^{ext}(B) = \Phi_j^{ext}(A),\ \Phi_{jk}^{ext}(B) = -\Phi_{jk}^{ext}(A),\ \Phi_{jkl}^{ext}(B) = \Phi_{jkl}^{ext}(A), \ldots \tag{3.7}$$

Во-вторых, искомые тензорные коэффициенты сворачиваются с мультиполями $L_{j\cdots k}$, симметричными по всем индексам, а значит, и сами являются симметричными.

В-третьих, из (3.5) вытекает, что решение задачи линейно по $\vec{H}^\infty$. Поэтому тензорные коэффициенты также линейны по $\vec{H}^\infty$; кроме того, они зависят от $\vec{r}$. Опуская индексы "int" и "ext", а также обозначения "(A)" и "(B)", запишем общие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= H_i^{\infty\|} FA + H_i^{\infty\perp} FB, \\ \Phi_{ij} &= H_i^{\infty\|} r_j FC + (H_i^{\infty\perp} r_j + H_j^{\infty\perp} r_i) FD, \\ \Phi_{ijk} &= H_i^{\infty\|} r_j r_k FE + (H_i^{\infty\perp} r_j r_k + H_j^{\infty\perp} r_i r_k + H_k^{\infty\perp} r_i r_j) FF. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь и далее индексы "$\|$" и "$\perp$" обозначают компоненты того или иного вектора, параллельные и перпендикулярные $\vec{r}$, соответственно.

Сходные соображения были использованы в [11] при решении задачи о термодинамическом взаимодействии сфер в неоднородном поле температуры.

Окончательно, скалярные функции $FA^{int}(A)$, $FB^{int}(A)$,... отыскиваются из граничных условий (3.5) в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon = a/r$:

$$\begin{aligned} FA^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p} + \frac{2a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FB^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p} - \frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FC^{ext}(A) &= -\frac{3a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FD^{ext}(A) &= \frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FE^{ext}(A) &= \frac{2a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FF^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{2(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FA^{int}(A) &= -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p} + \frac{6\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FB^{int}(A) &= -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p} - \frac{3\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FC^{int}(A) &= -\frac{15\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{2a^2(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FD^{int}(A) &= \frac{5\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{2a^2(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FE^{int}(A) &= \frac{14\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{3a^4(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FF^{int}(A) &= -\frac{7\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{6a^4(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Их достаточно, чтобы вычислить потенциалы магнитного поля с точностью до ε^5.

При $\varepsilon \to 0$, т.е. когда частицы взвеси бесконечно удалены друг от друга, полученные разложения переходят в решение задачи об одиночной сфере в однородном магнитном поле. В этом случае имеется единственное выделенное направление, связанное с вектором $\vec{H}^\infty$, поэтому $FA = FB$ и

$$\Phi_j^{ext}(A) = -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p} H_j^\infty, \ \Phi_j^{int}(A) = -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p} H_j^\infty.$$

Остальные тензорные коэффициенты, включающие компоненты $\vec{r}$, в данном приближении равны нулю.

4. Динамика частиц и образование агрегатов в продольных полях

Как известно, сила, действующая со стороны сплошной среды на тело Ω, равна

$$F_i = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j dS, \tag{4.1}$$

где $\partial\Omega$ – поверхность Ω, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений среды. В рассматриваемом случае этот тензор распадается на гидродинамическую и магнитную компоненты, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{hyd} + \sigma_{ij}^{mag}$, причем [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{hyd} &= -p\delta_{ij} + \eta\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \\ \sigma_{ij}^{mag} &= \frac{\mu_f}{4\pi}\Big(H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} H_k H_k\Big). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\vec{u}$, p являются решениями задачи (2.6), (2.7), (2.1), а $\vec{H}$ – задачи (2.3), (2.4), (2.1).

Вернемся к уравнениям (2.2). Будем считать, что плотности частиц и жидкости достаточно близки. Это позволит не учитывать массовые силы, приложенные к сферам (силу тяжести и т.д.) так же, как они не учитывались в (2.5). Тогда в соответствии с (4.1) и (4.2)

$$\vec{F}(A) = \vec{F}^{hyd}(A) + \vec{F}^{mag}(A),\ \vec{F}(B) = \vec{F}^{hyd}(B) + \vec{F}^{mag}(B).$$

Рассмотрим, например, движение сферы A. Характерным масштабом времени служит отношение $a/|\vec{U}|$, поэтому левая часть первого уравнения (2.2) имеет порядок

$$\Big|m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt}\Big| \sim \frac{4}{3}\pi a^2 \rho_p |\vec{V}^A - \vec{U}| \cdot |\vec{U}|.$$

С другой стороны, из закона Факсена [12] следует, что $|\vec{F}^{hyd}(A)| \sim 6\pi\eta a|\vec{V}^A - \vec{U}|$. Поэтому отношение суммарной силы, действующей на A, к ее гидродинамической составляющей имеет порядок числа Рейнольдса Re:

$$\Big|m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt}\Big| \cdot \frac{1}{|\vec{F}^{hyd}(A)|} \sim \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho_p |\vec{U}| a}{\eta}.$$

Однако ранее Re было объявлено пренебрежимо малым. Поэтому и производной от $\vec{V}^A$ в уравнении движения частицы следует пренебречь. Т.о., динамика инородных тел в выбранном приближении описывается уравнениями:

$$\vec{F}^{hyd}(A) + \vec{F}^{mag}(A) = \vec{0},\ \vec{F}^{hyd}(B) + \vec{F}^{mag}(B) = \vec{0}. \tag{4.3}$$

Для вычисления магнитной компоненты силы подставим решение (3.1), (3.2), (3.6)–(3.9) в (4.2) и (4.1). После упрощений найдем силу, приложенную к сфере A:

$$\begin{aligned} F_i^{mag}(A) &= -\mu_f [FA^{ext}(A)]^2 H_j^\infty H_k^\infty L_{ijk}(\vec{r}) = \\ &= -\mu_f \Big(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p}\Big)^2 a^6 \Big(6\frac{H_i^\infty H_j^\infty r_j}{r^5} + 3\frac{H_j^\infty H_j^\infty r_i}{r^5} - 15\frac{H_j^\infty H_k^\infty r_j r_k r_i}{r^7}\Big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь значение $FA^{ext}(A)$ взято с точностью до ε^0.

При $r \to \infty$ величина $F_i^{mag}(A) \to 0$, т.е. на одиночную сферу в однородном магнитном поле сила со стороны сплошной среды не действует.

Как было сказано выше, распределение магнитного поля в решаемой задаче должно быть симметрично относительно точки с радиус-вектором $(\vec{r}^A + \vec{r}^B)/2$. Поэтому распределение магнитных напряжений вблизи частицы B также симметрично распределению возле частицы A. Однако вектор внешней нормали $\vec{n}$ в точке на поверхности B направлен противоположно вектору в симметричной точке на поверхности A. Поэтому магнитные силы, приложенные к двум сферам и вычисленные согласно (4.1), противоположны:

$$\vec{F}^{mag}(B) = -\vec{F}^{mag}(A). \tag{4.5}$$

Подробно изучим случай, когда невозмущенные поток и поле направлены вдоль прямой, проходящей через центры сфер: $\vec{U} \parallel r$, $\vec{H}^\infty \parallel r$. Дополнительно будем предполагать, что в некоторый момент времени частицы не вращались и двигались вдоль своей линии центров. Тогда и в произвольный момент времени вращение будет отсутствовать, а частицы продолжат двигаться по указанной прямой:

$$\vec{\Gamma}^A = \vec{\Gamma}^B = \vec{0},\ \vec{\omega}^A = \vec{\omega}^B = \vec{0},\ \vec{U}^{A\perp} = \vec{U}^{B\perp} = \vec{0}.$$

Поэтому далее заменим все векторы их проекциями на $\vec{r}$.

Без ограничения общности можно считать, что векторы $\vec{r}$ и $\vec{H}^\infty$ сонаправлены. Тогда из (4.4) следует, что

$$F^{mag}(A) = 6\frac{\mu_f}{r^4}[FA^{ext}(A)H^\infty]^2 = 6\mu_f\left(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p}\right)^2\frac{a^6}{r^4}(H^\infty)^2. \tag{4.6}$$

Т.к. $F^{mag}(A) > 0$, то из (4.5) следует, что $\vec{F}^{mag}(B)$ направлена противоположно $\vec{r}$. Это значит, что однородное магнитное поле, приложенное вдоль линии центров, действует на одинаковые сферические частицы, подобно силе притяжения.

Задача (2.6), (2.7) о парном гидродинамическом взаимодействии тел в сильно вязкой жидкости решена, например, в [5]. Из результатов этой работы следует, что на две одинаковые сферы A и B, движущиеся вдоль линии центров со скоростями U^A и U^B *относительно* жидкости, действуют гидродинамические силы

$$F^{hyd}(A) = -6\pi\eta a[U^A f^{\parallel}(\varepsilon) + U^B g^{\parallel}(\varepsilon)],\ F^{hyd}(B) = -6\pi\eta a[U^B f^{\parallel}(\varepsilon) + U^A g^{\parallel}(\varepsilon)], \tag{4.7}$$

где $f^{\parallel}(\varepsilon) = 1 + 9\varepsilon^2/4$, $g^{\parallel}(\varepsilon) = -3\varepsilon/2 - 19\varepsilon^8/8$.

Из (4.3) и (4.5) вытекает, что $F^{hyd}(B) = -F^{hyd}(A)$. Вместе с (4.7) это ведет к соотношениям

$$\begin{aligned} U^B &= -U^A, \\ F^{hyd}(A) &= -6\pi\eta a U^A \chi(\varepsilon), \\ \chi(\varepsilon) &= f^{\parallel}(\varepsilon) - g^{\parallel}(\varepsilon) = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{9}{4}\varepsilon^2 + \frac{19}{8}\varepsilon^3. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Скорость тела A относительно жидкости теперь можно определить из (4.3), (4.6) и (4.8):

$$U^A = \frac{\mu_f[FA^{ext}(A)H^\infty]^2}{r^4\pi\eta a\chi(\varepsilon)}. \tag{4.9}$$

Особенный интерес представляет вопрос о возможности коагуляции частиц взвеси, т.е. об их сближении вплоть до касания. Чтобы сферы в потоке сближались, требуется, чтобы проекция скорости B относительно A на $\vec{r}$ была отрицательна. Обозначим

$$U^{BA} = V^B - V^A = U^B - U^A. \tag{4.10}$$

Тогда относительное движение сфер вдоль линии центров описывается уравнением

$$\frac{dr}{dt} = U^{BA}(r),\ r(0) = r_0,$$

где r_0 – начальное расстояние между центрами сфер. Касанию частиц и образованию агрегата соответствует значение $r(t) = 2a$.

Исходя из (4.8), (4.9) и (4.10), легко получить, что в рассматриваемом приближении

$$U^{BA}(r) = -2\mu_f\Big(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p}\Big)^2 \cdot \frac{(H^\infty)^2}{\pi\eta} \cdot \frac{a^5}{r^4 + \frac{3}{2}ar^3 + \frac{9}{4}a^2r^2 + \frac{19}{8}a^3r}.$$

Т.к. $U^{BA}(r) < 0$, то в продольном потоке вязкой магнитной жидкости частицы взвеси будут сближаться вне зависимости от соотношения μ_f и μ_p. Более того, поскольку при $r \geq 2a$ величина $|U^{BA}(r)|$ не обращается в нуль, то в рамках изучаемого приближения сближение сфер до их контакта произойдет за конечное время. Из того, что $|U^{BA}(r)|$ растет при уменьшении r, следует, что это время не превышает величины

$$\frac{r_0 - 2a}{|U^{BA}(r_0)|}.$$

Очевидно, более точная модель поведения инородных сфер должна быть основана на решениях магнитной и гидродинамической задач, содержащих более высокие степени малого параметра ε. В качестве альтернативы при $r \approx 2a$, т.е. вблизи контакта частиц, может быть использовано т.н. приближение смазки.

5. Заключение

В данной статье изучено поведение двух идентичных твердых сфер, помещенных в вязкую магнитную жидкость. При этом предполагается, что магнитное и гидродинамическое взаимодействие частиц могут быть рассмотрены по отдельности друг от друга.

В случае, когда невозмущенное магнитное поле однородно, вычислены искажения, вносимые частицами в распределение напряженности поля, а также силы, действующие на каждую из частиц. Для этого был использован метод мультипольного разложения.

Динамика твердых сфер в однородном потоке жидкости изучена в безынерционном приближении. Показано, что если невозмущенные поток и поле направлены вдоль прямой, соединяющей центры частиц, то сами эти частицы начинают сближаться, причем их касание достигается за конечное время. Это означает, что в продольных (по отношению к линии центров) магнитных полях возможно образование агрегатов из инородных тел, помещенных в жидкость.

Список литературы

1. A. Enstein, “Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen”, *Annalen der Physik*, **19** (1906), 289–306.

2. G. K. Batchelor, “The stress system in a suspension of force-free particles”, *Journal of Fluid Mechanics*, **41**:3 (1970), 545–570.

3. G. K. Batchelor, J. T. Green, “The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400.

4. G. K. Batchelor, J. T. Green, “The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:3 (1972), 401–427.

5. С. И. Мартынов, *Взаимодействие частиц в суспензии*, Изд-во Казан. матем. об-ва, Казань, 1998, 135 с.

6. A. A. Zick, G. M. Homsy, “Stokes flow through periodic array of spheres”, *Journal of Fluid Mechanics*, **115** (1982), 13–26.

7. А. Л. Бердичевский, “Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями”, *Доклады АН СССР*, **247**:6 (1979), 1363–1367.

8. С. И. Мартынов, “Влияние образования и разрушения агрегатов на вязкость магнитной жидкости”, *Магнитная гидродинамика*, **25**:1 (1989), 47–52.

9. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды.* Т. 1, 6, стер., Лань, СПб., 2004, 528 с.

10. И. П. Борискина, “Взаимодействие частиц в неоднородном магнитном поле”, *Вестник Мордовского университета*, **13**:3–4 (2003), 120–123.

11. А. О. Сыромясов, “Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры”, *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, **4(3)** (2011), 1158–1160.

12. Дж. Хаппель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, М., 1976, 630 с.

Поступила 4.12.2018

MSC2010 76W05, 76D07, 70F05, 35Q35

Pair-wise MHD-interaction of rigid spheres in longitudinal creeping flow

© **I. P. Boriskina** [1], **A. O. Syromyasov**[2]

Abstract. Authors describe and study the mathematical model of two identical rigid spheres immersed in highly viscous fluid with magnetic field acting in it. At infinite distance from suspended particles the flow and the field are uniform. The hypothesis that bulk currents are weak allows to split magnetic and hydrodynamic interactions of the spheres. Distribution of magnetic field is obtained for arbitrary orientation of undisturbed field with respect to line going through the spheres' centers and is written in the form of multipole expansion. This expression is used to calculate magnetic force acting on both particles. Together with known expressions for hydrodynamic forces this result may be applied in study of particle dynamics in uniform flow of viscous magnetic fluid. In the paper particular case of field and flow being parallel to line of centers is examined in more detail. The opportunity of particles' coagulation in such flow is discussed.
Key Words: viscous fluid, Stokes equation, creeping flow, suspended particles, magnetic fluid, hydrodynamic interaction, coagulation.

References

1. A. Enstein, "Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", *Annalen der Physik*, **19** (1906), 289–306.

2. G. K. Batchelor, "The stress system in a suspension of force-free particles", *Journal of Fluid Mechanics*, **41**:3 (1970), 545–570.

3. G. K. Batchelor, J. T. Green, "The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field", *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400.

4. G. K. Batchelor, J. T. Green, "The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2", *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:3 (1972), 401–427.

5. S. I. Martynov, *Vzaimodejstvie chastic v suspenzii [Interaction of particles in a suspension]*, **33**, Kazan Mathematical Society, Kazan, 1998 (In Russ.), 135 p.

6. A. A. Zick, G. M. Homsy, "Stokes flow through periodic array of spheres", *Journal of Fluid Mechanics*, **115** (1982), 13–26.

7. A. L. Berdichevsky, "Ob ehffektivnoj teploprovodnosti sred s periodicheski raspolozhennymi vklyucheniyami [On effective heat conductance of media with periodically located inclusions]", *Doklady AN SSSR [Reports of USSR Academy of Sciences]*, **247**:6 (1979), 1363–1367 (In Russ.).

[1]**Irina P. Boriskina**, Associate Professor, Department of Calculus, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3536-5838, irinaboriskina@mail.ru

[2]**Aleksei O. Syromyasov**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6520-0204, syal1@yandex.ru

8. S. I. Martynov, "Vliyanie obrazovaniya i razrusheniya agregatov na vyazkost' magnitnoj zhidkosti [Influence of aggregate formation and disruption on the viscosity of magnetic fluid]", *Magnitnaya gidrodinamika [Magnetohydrodynamics]*, **25**:1 (1989), 47–52 (In Russ.).

9. L. I. Sedov, *Mekhanika sploshnoj sredy [A course in continuum mechanics]*. V. 1, 6, Lan Publishers, St. Petersburg., 2004 (In Russ.), 528 p.

10. I. P. Boriskina, "Vzaimodejstvie chastic v neodnorodnom magnitnom pole [Interaction of particles in non-uniform magnetic field]", *Mordovia University Bulletin*, **13**:3–4 (2003), 120–123 (In Russ.).

11. A. O. Syromyasov, "Termodinamicheskoe vzaimodejstvie sfericheskih chastic v srede s postoyannym gradientom temperatury [Thermodynamic interaction of spherical particles in a fluid with constant temperature gradient]", *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, **4(3)** (2011), 1158–1160 (In Russ.).

12. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, 1965.

Submitted 4.12.2018

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.89-110

УДК 519.6, 519.865.1

Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса

© В. К. Горбунов[1], А. Г. Львов[2]

Аннотация. Обратная задача теории рыночного спроса заключается в построении коллективной функции полезности по конечному набору данных торговой статистики. Основная вычислительная проблема в данном случае – решение систем линейных неравенств Африата, определяющих значения функции полезности и множителя Лагранжа задачи максимизации функции полезности на статистических данных о спросе, называемые «числами Африата». Данная обратная задача некорректно поставлена ввиду множественности решений неравенств, их возможной несовместности и неустойчивости. Предложен метод регуляризации, заключающийся в релаксации неравенств, обеспечивающей локальную хаусдорфову непрерывность множества их решений, и введении различных критериев отбора решений, формализующих желаемые характеристики аналитических индексов спроса, определяемых функцией полезности Африата: оптимизм, пессимизм, объективность. Приводятся результаты построения аналитических индексов для реальных данных Ульяновской области.

Ключевые слова: обратная задача теории рыночного спроса, аналитические индексы, неравенства Африата, методы регуляризации, релаксация неравенств.

1. Введение: обратная задача и индексы рыночного спроса

1.1. О теории рыночного спроса

Современная неоклассическая экономическая теория построена в рамках методологического индивидуализма, согласно которому общественное поведение полностью сводится к поведению независимых и рациональных индивидов (акторов), и экономическая система не нуждается в регулировании и управлении государством. При этом игнорируется взаимовлияние индивидов, возникновение коалиций разных типов и отрицается несводимость социальных явлений (рынок, стоимость) к сумме действий независимых индивидов. В рамках этой методологии построена математическая теория индивидуального потребителя [1], но на этой основе оказалось невозможным построение научной теории коллективного рыночного спроса – объекта реального экономического интереса.

Статья написана на основе доклада на VIII Международной научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, г. Саранск, 16–20 июля 2018 г.

[1]**Горбунов Владимир Константинович**, профессор кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501, vkgorbunov@mail.ru

[2]**Львов Александр Геннадьевич**, доцент кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), кандидат экономических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234, aglvov@mail.ru

Теория рыночного спроса, адекватная реальности, построена в работах В. К. Горбунова [2–4] на иной – холистической (целостностной) – методологической основе. Эта теория формально повторяет теорию индивидуального спроса [1], но относится не к индивиду/домохозяйству с нереальными свойствами, а к *статистическому ансамблю потребителей* (п. 1.4 в [4]) реального рынка n благ, представленному торговой статистикой количества продаж $x^t \in E^n_+$, цен $p^t \in E^{n*}_+$ (сопряженное пространство) и расходов e_t за отчетные периоды t:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\right\}, \quad e_t = \left\langle p^t, x^t \right\rangle. \tag{1.1}$$

Коллективная рациональность моделируется задачей максимизации непрерывной, возрастающей и вогнутой *порядковой коллективной функции полезности* $u(x)$, $x \in E^n_+$, представляющей *потребительские предпочтения*, на множестве благ, доступных при ценах p и расходах e всех потребителей:

$$\max\{u(x) : \langle p, x\rangle \leq e, x \geq 0\}. \tag{1.2}$$

Важную роль в теории спроса и аналитических индексов играет множитель Лагранжа этой задачи выпуклого программирования $\lambda(p, e)$.

Теория рыночного спроса представляет собой систему экономически содержательных теорем (утверждений), получаемых в результате анализа регулярной модели (1.2), когда функция полезности $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемая, возрастающая и строго квазивогнутая. В этом случае решение задачи (1.2) единственно, и его зависимость от параметров $x(p, e)$ – непрерывная и дифференцируемая *функция спроса*. **Обратная задача теории спроса** заключается в построении функции полезности по конечному набору данных (1.1).

Функциональные обратные задачи математического моделирования обычно некорректно поставлены [5]. Множество их приближенных решений, эквивалентных относительно возможных вариаций исходных данных, чрезмерно велико по диаметру. Они являются по существу предзадачами, требующими доопределения (регуляризации) до новой, корректно поставленной (возможно, в ослабленном смысле) задачи с привлечением дополнительной информации о решении и, если они имеются, о погрешностях данных [5–7].

Особенностью обратных задач экономики является, как правило, отсутствие надежных оценок погрешностей данных, играющих ключевую роль в теории и большинстве методов регуляризации задач естествознания. В обратных задачах экономики под регуляризацией может пониматься переход к новой задаче, решение которой устойчиво к малым возмущениям исходных данных, приближенно удовлетворяет исходным соотношениям (балансам, ресурсным ограничениям, условиям рациональности) и удовлетворяет дополнительным требованиям. В качестве дополнительной информации для выделения решения обратной задачи теории рыночного спроса с желаемыми свойствами мы используем **индексы рыночного спроса**, которые являются важными индикаторами состояния потребительских рынков и экономики в целом.

1.2. Об индексах спроса

Существует множество подходов к построению индексов спроса [8–13], которые дают различные результаты, и в большинстве подходов не учитываются предпочтения людей, по-разному оценивающих ситуацию на потребительских рынках. Это позволяет подбирать индексы в зависимости от политических целей экономического анализа [9]. До настоящего времени статистические органы используют в основном бинарные индексы, вычисляемые по различным формулам и статистическим парам «цена-количество» продаж в двух сравниваемых периодах: базовом (p^s, x^s) и текущем (p^t, x^t). Наиболее распространенными на практике и используемыми в нашем исследовании являются формульные индексы цен и количества Е. Ласпейреса, и М. Пааше:

$$P_{st}^L = \frac{\langle p^t, x^s \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}, \quad Q_{st}^L = \frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle} \quad \text{и} \quad P_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^t \rangle}, \quad Q_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^t, x^s \rangle}. \tag{1.3}$$

Индексы Пааше часто дают заниженные значения относительно индексов Ласпейреса:

$$P_{st}^P \le P_{st}^L, \quad Q_{st}^P \le Q_{st}^L. \tag{1.4}$$

Этот эффект носит имя американского статистика А. Гершенкрона. В случае однородных предпочтений эффект Гершенкрона является обязательным (п. 5.4.3 в [4]). В качестве усреднения индексов Ласпейреса и Пааше были введены *индексы Фишера*:

$$P_{st}^F = \sqrt{P_{st}^L P_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^t, x^s \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}\frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^t \rangle}}, \quad Q_{st}^F = \sqrt{Q_{st}^L Q_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}\frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^t, x^s \rangle}}. \tag{1.5}$$

В нашем исследовании выбор решения обратной задачи рыночного спроса определяется *аналитическими индексами цен и количества*, называемыми также *экономическими индексами* (п. 7.4 в [3]; п. 5.4 в [4]; [8–11]). Идея этих индексов восходит к работе А. А. Конюса 1924 г. [14], где он построил «истинный индекс стоимости жизни» (ИСЖ) с учетом потребительских предпочтений, представляемых семейством поверхностей безразличия. В современном представлении аналитические индексы определяются через *функцию потребительских расходов*, определяющую наименьшую стоимость набора благ, обеспечивающего уровень потребления $w = u(x*)$, где $x*$ – некоторый референтный набор:

$$e(p, w) = \min \left\{ \langle p, x \rangle : u(x) \ge w, x \ge 0 \right\}. \tag{1.6}$$

Экономическими (аналитическими, Конюса) индексами изменения цен и количеств потребления между периодами сравнения – «базового» s и «текущего» t – называются [10], соответственно, отношения

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))}, \quad Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}. \tag{1.7}$$

Здесь векторы количеств x и цен p определяют произвольные "ситуации сравнения".

Для построения аналитических индексов далее используются значения на статистических данных (1.1) функции полезности $u_t = u(x^t)$ и множителя Лагранжа $\lambda_t = \lambda(p^t, e_t)$, называемые **числами Африата** [2].

Для теории спроса и аналитических индексов важен частный случай **однородных (гомотетичных) предпочтений**[3]. Известно (Ex. 3.C.5 в [1]), что потребительские предпочтения однородны тогда и только тогда, когда они имеют представление **линейно однородной функцией полезности** $u(\cdot)$. В этом случае спрос имеет структуру $x\,(p, e) = x\,(p)\,e$, множитель Лагранжа $\lambda\,(p) = u\,(x(p))$, и справедливо тождество (пп. 3.4 и 4.1.4 в [4])

$$e(p, u(x)) = \frac{u(x)}{\lambda(p)}, \quad p > 0, x > 0. \tag{1.8}$$

[3]Однородность (гомотетичность) потребительских предпочтений определяется через понятие эквивалентности наборов благ (sec. 3.B в [1]; п. 3.1 в [4]). Наборы x и x' эквивалентны, если $u(x) = u(x')$, и однородность предпочтений означает, что при масштабировании этих наборов с одинаковым коэффициентом эквивалентность сохраняется: $u(\alpha x) = u(\alpha x'), \alpha > 0$. Функция $u(\cdot)$ называется линейно однородной, если$u(\alpha x) = \alpha u(x), \alpha > 0$.

Подстановка статистических значений (p^t, x^t) в это тождество дает связь чисел Африата при однородных предпочтениях:

$$u_t = \lambda_t e_t, \quad t = \overline{0,T}. \tag{1.9}$$

Соответствующие числа $\{u_t\}$ и $\{\lambda_t\}$ будем называть *однородно сопряженными.*

Из тождества (1.8) следует, что индексы (1.7) не зависят от наборов сравнения x и p:

$$P\left(p^t, p^s; x\right) = \frac{\lambda\left(p^s\right)}{\lambda\left(p^t\right)} \equiv \frac{\lambda_s}{\lambda_t} \triangleq P_{st}, \quad Q\left(x^t, x^s; p\right) = \frac{u\left(x^t\right)}{u\left(x^s\right)} \equiv \frac{u_t}{u_s} \triangleq Q_{st}. \tag{1.10}$$

По причине этой независимости индексы (1.10) названы в [10] *инвариантными.*

Структура однородного спроса $x\left(p, e\right) = x\left(p\right) e$ плохо отражает реальный спрос. Здесь исключается изменение пропорций потребления благ различной потребительской ценности с изменением доходов потребителей[4]. Однако простота однородного спроса и инвариантных индексов (1.10), определяемых только числами Африата, стимулирует использование гипотезы однородности предпочтений как приближение реальности – **аналог линеаризации** нелинейных процессов. Кроме того, эта гипотеза часто не отвергается при обработке агрегированных данных (1.1). Таким образом, несмотря на чрезмерную в общем случае идеализацию предположения однородности предпочтений, этот вариант моделирования рыночного спроса полезен как приближение, облегчающее решение обратной задачи рыночного спроса и построение общих аналитических индексов (1.7).

В [2] введены и в [12, 13] построены для реальных данных *квазиинвариантные индексы* цен и количества, вычисляемые по числам Африата $\{u_t, \lambda_t\}$:

$$\widetilde{P}_{st} = \sqrt{\frac{u_s \lambda_s e_t}{u_t \lambda_t e_s}}, \quad \widetilde{Q}_{st} = \sqrt{\frac{u_t \lambda_t e_t}{u_s \lambda_s e_s}}. \tag{1.11}$$

Подстановка равенств (1.9) в формулы (1.11) показывает, что квазиинвариантные индексы являются эвристическим обобщением инвариантных индексов (1.10) на случай неоднородных предпочтений. Квазиинвариантные индексы могут быть полезным промежуточным инструментом перехода от инвариантных к общим аналитическим индексам.

До настоящего времени аналитические индексы не использовались статистическими службами, так как они не имели научного обоснования из-за отсутствия теории коллективного рыночного спроса. Холистическая теория рыночного спроса [2–4] обеспечивает аналитическим индексам «экономическую легитимность».

1.3. О непараметрическом анализе спроса

Наиболее эффективным методом построения функции полезности по статистике потребления является *непараметрический анализ спроса*, разработанный (в рамках теории индивидуального спроса) в основном С. Африатом [15–16] и Х. Вэрианом [17–18]. Основная вычислительная проблема здесь – решение систем линейных **неравенств Африата**, определяющих числа Африата. Некорректность задачи построения функции полезности проявляется в множественности решений неравенств Африата, их возможной несовместности и неустойчивости. Это требует стабилизации множества приближенных решений неравенств Африата и введения критерия отбора решения с уточняемыми свойствами. Однако Африат и Вэриан ограничились разработкой алгоритмов комбинаторного типа,

[4]На нереалистичность гипотезы однородности для реального спроса и необходимость развития метода общих индексов (1.7) обращали внимание П. Самуэльсон и С. Свэми: «…the Santa Claus hypothesis of homotheticity…» [10, с. 592].

определяющих в совместном случае некоторое решение, без какого-либо обсуждения альтернативного выбора решений. Их последователи развивали метод линейного программирования (ЛП), вводя искусственные переменные в каждое неравенство [19] или одну общую переменную, обеспечивающую совместность всей системы неравенств [20]. В обоих случаях ставилась задача минимальной коррекции, также приводящая к некоторому решению минимально возмущенных систем без какого-либо экономически содержательного обоснования и внимания к типичной неустойчивости таких задач.

Первым методом решения систем неравенств Африата, преодолевающим проблему их неустойчивости и построения приближенного решения с ориентацией на наиболее эффективные статистические индексы спроса Фишера, является статья В. К. Горбунова [21]. В ней был предложен релаксационно-штрафной (РШ) метод класса квадратичного программирования (КП), основанный на однопараметрической релаксации неравенств Африата и выборе решения, ближайшего к набору чисел Африата, определяемого через индексы Фишера. В [12–13] РШ метод реализован для построения инвариантных и квазиинвариантных индексов продуктовых рынков. Основная часть нашей статьи посвящена развитию этого подхода с целью выбора различных по содержательным характеристикам и устойчивых решений неравенств Африата, а также построения общих аналитических индексов (1.7) для реальных данных Ульяновской области.

2. Непараметрический анализ спроса

2.1. Неравенства Африата и их редукция

Непараметрический анализ потребительского спроса Африата-Вэриана разработан с целью выяснения ответа на вопрос, является ли статистика потребления (1.1) совместимой с неоклассической моделью потребительского выбора (1.2) в наиболее общем классе *ненасыщаемых функций полезности*[5]? Основатели считали статистику идеальной и данный вопрос свели к вопросу существования ненасыщаемой функции полезности $u(\cdot)$, **рационализирующей** данные (1.1) в смысле

$$u\left(x^t\right) = \max\left\{u\left(x\right) : \left\langle p^t, x\right\rangle \le e_t, x \ge 0\right\}, \quad t = \overline{0, T}.$$

Введем перекрестные стоимости и элементы **матрицы Африата**

$$e_{ts} = \left\langle p^t, x^s\right\rangle, \quad a_{ts} = e_{ts} - e_t, \quad s, t = \overline{0, T}. \tag{2.1}$$

Согласно **теореме Африата** (п. 8.3.1 в [3]; п. 6.2.1 в [4]; [17, с. 946]) критерием существования ненасыщаемой функции полезности, рационализирующей данные (1.1), является положительная разрешимость системы ***неравенств Африата***

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s, t = \overline{0, T} \wedge s \ne t. \tag{2.2}$$

Более того, если $\{u_\tau > 0, \lambda_\tau > 0\}$ – решение системы (2.2), то ***функция Африата***

$$\bar{u}(x) = \min_\tau \{u_\tau + \lambda_\tau \left\langle p^\tau, x - x^\tau\right\rangle\} \tag{2.3}$$

рационализирует данные (1.1) и является вогнутой интерполянтой таблицы значений $\{x_t, u_t : t = \overline{0, T}\}$: $\bar{u}(x^t) = u_t$. Другими словами рационализируемость торговой статистики

[5]Функция полезности $u(\cdot)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E^n_+$ существует такая точка $x' \in E^n_+$, что $u(x') > u(x)$.

в широком классе ненасыщаемых функций полезности эквивалентна рационализируемости в более удобном классе вогнутых функций полезности.

Система (2.2) состоит из $T(T+1)$ трехкомпонентных неравенств, связывающих $2T+2$ числа Африата $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{0,T}\}$, и является разряженной системой «высокого типа». Эта система алгебраически однородна, u-числа входят в неравенства разностями $u_s - u_t$, и на ее решения $\{u_\tau, \lambda_\tau\}$ удобно наложить два условия [21]:

$$\lambda_0 = 1, \quad u_0 = e_0. \tag{2.4}$$

Подстановка данных условий в неравенства (2.2) при $s = 0$ и $t = 0$ делает эту систему неоднородной относительно переменных $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1,T}\}$:

$$\begin{cases} e_0 - \lambda_t a_{t0} \le u_t, \quad u_s \le e_0 + a_{0s} \equiv e_{0s}, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge \ s \ne t\ . \end{cases} \tag{2.5}$$

Будем называть (2.5) *общей редуцированной системой Африата.*

2.2. Однородные предпочтения. Специальная система Африата

Условия рационализируемости статистики (1.1) при дополнительном предположении однородности, когда выполняются равенства (1.9), позволяют получить из общей системы трехкомпонентных неравенств Африата (2.2) две системы двухкомпонентных неравенств Африата, связывающих только u-числа или λ-числа. Можно ограничиться одной из них, и обычно рассматривается *специальная λ-система*

$$\lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{0,T} \wedge s \ne t. \tag{2.6}$$

Любое решение этой системы $\{\lambda_t > 0\}$ определяет по формуле (1.9) однородно сопряженные компоненты $\{u_t > 0\}$ решения общей системы (2.2).

В дальнейшем рассматривается *специальная редуцированная λ-система*, получаемая из системы (2.6) подстановкой условия из (2.4) $\lambda_0 = 1$:

$$e_0 \le \lambda_t e_{t0}, \quad e_s \lambda_s \le e_{0s}, \quad \lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \tag{2.7}$$

Первые блоки в (2.7) запишем как двусторонние оценки λ-чисел:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} \le \lambda_t \le \frac{e_{0t}}{e_t}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{2.8}$$

Из этих оценок и равенств (1.9) следуют оценки однородно-сопряженных u-чисел:

$$\frac{e_0 e_t}{e_{t0}} \le u_t \le e_{0t}, \quad t = \overline{1,T}. \tag{2.9}$$

Двусторонние оценки (2.8) и (2.9), выполняемые при однородных предпочтениях, ввиду положительности стоимостей e_t и e_{st} обеспечивают требуемую положительность решений специальных систем.

2.3. Вычисление функции потребительских расходов

Рационализирующая кусочно-линейная функция полезности Африата (2.3) недифференцируема и порождает многозначный спрос, не отражающий аналитическую теорию спроса. Однако эта функция делает задачу (1.6) вычисления потребительских расходов $e(p, w)$ простой задачей линейного программирования (ЛП). Рассмотрим данную задачу с функцией (2.3), где числа Африата удовлетворяют системе (2.4) и (2.5).

Условия минимизации в (1.6), очевидно, эквивалентны системе линейных неравенств

$$\left\langle p^0, x\right\rangle \geq w, \quad \lambda_\tau \left\langle p^\tau, x\right\rangle \geq w - u_\tau + \lambda_\tau e_\tau, \quad \tau = \overline{1, T}, \quad x \geq 0. \tag{2.10}$$

Эта система совместна при любых наборах чисел $\{u_\tau > 0, \lambda_\tau > 0\}$ и нетривиальных векторах цен $\{p^t \geq 0\}$, и вычисление $e(p, w)$ сводится к задаче ЛП – **минимизации по** x **функции** $\langle p, x\rangle$ **при условиях** (2.10)

$$e(p, w) = \min\left\{\langle p, x\rangle : (2.10)\right\} \tag{2.11}$$

Данная задача разрешима в силу неотрицательности минимизируемой функции.

3. Некоторые сведения об индексах спроса

3.1. Тесты Фишера

Для объективной оценки качества различных индексов И. Фишером предложена система *тестов* [8–11]. Смысл этих тестов сводится к установлению соответствия свойств произвольных индексов цен и количеств

$$\overline{P}_{st} = \overline{P}(p^s, x^s; p^t, x^t), \quad \overline{Q}_{st} = \overline{Q}(p^s, x^s; p^t, x^t)$$

свойствам *элементарных индексов цен и количества*:

$$\pi_i^{st} = \frac{p_i^t}{p_i^s}, \quad \chi_i^{st} = \frac{x_i^t}{x_i^s}.$$

Проблемным является совмещение следующих наиболее важных тестов: *транзитивности* (или *циркулярности*: для любых трех наблюдений (r, s, t) выполняется $\overline{P}_{rt} = \overline{P}_{rs} \cdot \overline{P}_{st}$ и $\overline{Q}_{rt} = \overline{Q}_{rs} \cdot \overline{Q}_{st}$), *мультипликативности* $\left(\overline{P}_{st} \cdot \overline{Q}_{st} = e_t/e_s\right)$ и *среднего*:

$$\min_i \pi_i^{\mathrm{st}} \leq \overline{P}_{st} \leq \max_i \pi_i^{\mathrm{st}}, \quad \min_i \chi_i^{\mathrm{st}} \leq \overline{Q}_{st} \leq \max_i \chi_i^{\mathrm{st}}. \tag{3.1}$$

Известно (см. п. 7.3 в [3]), что индексы Ласпейреса и Пааше удовлетворяют из перечисленных тестов только тесту среднего (3.1). Известно также, что никакие формульные индексы не могут удовлетворять совокупности этих тестов для произвольных статистик (3.1). Индексы Фишера (1.5) удовлетворяют всем основным тестам, кроме транзитивности. Они также удовлетворяют тесту *обратимости*:

$$P_{ts}^F = 1/P_{st}^F, \quad Q_{ts}^F = 1/Q_{st}^F.$$

Индексы Фишера являются лучшими формульными индексами относительно выполнения тестов и названы Фишером «идеальными индексами». Однако свойство транзитивности желательно и достижимо. Оно очевидно выполняется для общих аналитических индексов (1.7) с произвольными ситуациями сравнения и для инвариантных индексов (1.10). Последние удовлетворяют всем основным тестам и достойны названия **идеальных индексов**.

Нетрудно проверить, что квазиинвариантные индексы (1.11) транзитивны и мультипликативны, но тест среднего (3.1) для них не гарантирован.

3.2. Индексы Конюса-Фишера

Для применения аналитических индексов к анализу конкретных данных (1.1) в качестве ситуаций сравнений в формулах (1.7) будем использовать значения количеств и цен для периодов s или t. Подставляя в (1.7) ситуации сравнения $x = x^s$, $p = p^s$, и используя очевидное свойство функции расходов (1.6)

$$e(p^\tau, u(x^\tau)) \equiv e(p^\tau, u_\tau) = \langle p^\tau, x^\tau \rangle = e_\tau,$$

получим *индексы Конюса-Ласпейреса*:

$$P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s) = \frac{e(p^t, u_s)}{e_s}, \quad Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s) = \frac{e(p^s, u_t)}{e_s}. \tag{3.2}$$

ИСЖ Конюса – это индекс цен P_{st}^{KL}. Аналогично определяются *индексы Конюса-Пааше*

$$P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t) = \frac{e_t}{e(p^s, u_t)}, \quad Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t) = \frac{e_t}{e(p^t, u_s)} \tag{3.3}$$

и среднегеометрические индексов (3.2) и (3.3) – *индексы Конюса-Фишера*:

$$P_{st}^{KF} \triangleq \sqrt{P_{st}^{KL} P_{st}^{KP}} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s) e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} \triangleq \sqrt{Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP}} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t) e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \tag{3.4}$$

Задача построения индексов Конюса (3.2)–(3.3) сводится к определению значений условных расходов $e(p^t, u_s)$ и $e(p^s, u_t)$ как значений задачи (2.11) с параметрами $p = p^t$, $w = u_s$ и $p = p^s$, $w = u_t$ соответственно.

Нетрудно проверить, что индексы Конюса-Фишера (3.4) удовлетворяют тестам обратимости и мультипликативности.

4. Методы решения систем Африата

4.1. Известные методы

Сидней Африат после фундаментальной работы [15] ограничил теоретические исследования потребительского спроса случаем однородных предпочтений, объявив его «концептуальным базисом индекса цен» [16], не рассматривая индекс количества потребления. Он разработал в 1970-х гг. комбинаторные алгоритмы для решения λ-системы неравенств (2.6). Другие комбинаторные алгоритмы решения общей и специальной (как возможного варианта) систем Африата предложены Х. Вэрианом [17–18]. Для λ-системы (2.6) Вэриан приспособил алгоритм Варшалла, предназначенный для поиска пути минимальной стоимости между вершинами связного графа. Алгоритмы Африата, Вэриана и Варшалла определяют некоторые из множества решений неравенств без возможности содержательного выбора, необходимого для качественного решения обратной задачи и построения аналитических индексов. Подходы к решению общей системы Африата методом ЛП [19–20], основанные на введении искусственных переменных в неравенства, приводят к некоторым решениям исходной системы, которые, как и решения Африата и Вэриана, не имеют экономических характеристик и могут быть неустойчивыми.

Далее подход к выбору содержательного решения [21] развивается как набор инструментов устойчивого выбора решений систем Африата (специальной и общей) с желаемыми содержательными свойствами аналитических индексов: *оптимизм* (занижение индексов цен при завышении индексов количества), *пессимизм* (наоборот) и *объективность* – близость к индексам цен и количества Фишера.

4.2. Регуляризация множеств решений систем неравенств Африата

Задачи содержательного выбора решений неравенств Африата РШ метода [12–13], [21] и новые задачи, представленные далее, являются задачами на условный экстремум с допустимыми множествами решений редуцированных неравенств (2.5) и (2.7). Эти неравенства могут быть несовместными как в силу неадекватности исходной модели спроса (1.2) статистике (1.1), так и в силу неточностей этой статистики, определяющей коэффициенты (2.1). Если некоторая мера несовместности достаточно мала (экспертно), то гипотеза адекватности модели (1.2) с однородными (как первое приближение) или неоднородными предпочтениями не отвергается; можно применять некоторый метод регуляризации систем неравенств и вводить различные критерии отбора их решений с желаемыми свойствами. Ввиду отсутствия оценок погрешностей исходных данных (1.1), регуляризацию будем выполнять методами [6–7], обеспечивая, в общем случае локально, непрерывность по Хаусдорфу зависимости допустимого множества решений от данных[6].

Регулярность допустимого множества экстремальной задачи в метрическом пространстве означает *локальную хаусдорфову непрерывность* зависимости множества решений неравенств от исходных данных [6, с. 578–579], [7, с. 424]. Для множеств, определяемых нестрогими неравенствами непрерывных функций, регулярность обеспечивается, согласно лемме 1.4 из [22], ограниченностью этого множества и его совпадением с замыканием множества соответствующих строгих неравенств.

Для специальной системы (2.7) ограниченность в пространстве всех чисел Африата (λ и сопряженных u-чисел) обеспечивается двусторонними оценками (2.8) и (2.9). Для общей системы (2.5) имеются лишь верхние оценки u-чисел $u_s \le e_{0s}$, но множители λ_t можно считать ограниченными некоторой величиной Λ, существенно превосходящей наибольшее верхнее ограничение e_{0t}/e_t в (2.8). При этом множество решений общей системы останется шире множества решений специальной системы, и желаемую характеристику анализа статистического спроса можно будет улучшить.

Таким образом, регулярность множеств решений систем Африата (2.5) и (2.7) обеспечивается их строгой совместностью, что соответствует условию Слейтера регулярности задач выпуклого программирования (ВП), и выполнением некоторой априорной оценки $\lambda_t \le \Lambda$ для общей системы (2.5).

Согласно второму утверждению леммы 1.1 из [22], регулярность допустимого множества обеспечивает непрерывную зависимость значения экстремальной задачи от исходных данных, и если при этом пространство конечномерно и минимизируется строго выпуклый критерий, то задача корректна и ее решение непрерывно зависит от исходных данных (Cor. Theor. 1 в [6]).

Для выяснения регулярности систем Африата и, если установлена нерегулярность рассматриваемой системы, для перехода к близкой (в хаусдорфовой метрике) регулярной системе неравенств будем вводить в правые части неравенств аддитивный *малый параметр релаксации* r, аналогично РШ методу. Этот параметр будет представлять меру возмущения исходной системы неравенств. В обоих случаях, общем (2.5) и однородном (2.7), аддитивные компоненты неравенств имеют размерность стоимости благ e_t, которая меняется на периоде статистики T, обычно не выходя из числового порядка, но сильно варьируется для различных статистик. Для придания универсальности мере возмущения r нерегулярных систем перед релаксацией нормируем их так, чтобы все аддитивные компоненты общей системы (2.5), связывающей разномасштабные переменные λ_tи u_t, стали порядка

[6]Многозначное отображение $A(\cdot)$ из векторного пространства X в пространство Λ с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$ называется непрерывным по Хаусдорфу в точке x^0, если $h(A(x), A(x^0)) \to 0$ при $x \to x^0$, где $h(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$, $\beta(A,B) = \sup\{\inf\{\rho(a,b) : b \in B\} : a \in A\}$, $A \subseteq \Lambda$ и $B \subseteq \Lambda$.

единицы. Для этого неравенства первого блока в (2.5) (для $s = 0$) разделим на e_t, неравенства второго блока (для $t = 0$) – на e_s, а третьего блока – на $\sqrt{e_s e_t}$, после чего введем в правую часть параметр r и получим **общую редуцированную релаксированную нормированную систему Африата**:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_t}{e_t} - \lambda_t \dfrac{a_{t0}}{e_t} \le -\dfrac{e_0}{e_t} + r, \quad \dfrac{u_s}{e_s} \le \dfrac{e_{0s}}{e_s} + r, \\ \dfrac{u_s}{\sqrt{e_s e_t}} - \dfrac{u_t}{\sqrt{e_s e_t}} - \lambda_t \dfrac{a_{ts}}{\sqrt{e_s e_t}} \le r, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge \ s \ne t \ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Все аддитивные компоненты неравенств системы (4.1), кроме параметра r, имеют порядок единицы, и она совместна в области положительных чисел Африата при достаточно большом значении r. Если система (4.1) совместна при $r < 0$, то система (2.5) регулярна, так как является строго совместной. Если отрицательное r отделено от нуля существенно относительно уровня вычислительных погрешностей, то исходная система (2.5) может быть основой постановок устойчивых задач содержательного выбора решения без релаксации.

Выведем из общей системы (4.1) **специальную редуцированную нормированную релаксированную λ-систему Африата**, используя условие однородности $u_t = \lambda_t e_t$:

$$-\lambda_t \le -\frac{e_0}{e_{t0}} + \frac{e_t}{e_{t0}} r, \quad \lambda_s \le \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \quad \lambda_s - \lambda_t \frac{e_{ts}}{e_s} \le \sqrt{\frac{e_t}{e_s}} r, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \tag{4.2}$$

Подобно редуцированной λ-системе (2.7), первые два блока системы (4.2) запишем как двусторонние оценки λ-чисел Африата:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} - \frac{e_t}{e_{t0}} r \le \lambda_t \le \frac{e_{0t}}{e_t} + r, \quad t = \overline{1,T}. \tag{4.3}$$

При достаточно малых значениях параметра r нижняя оценка (4.3) будет положительной.

Специальная система (4.2) будет использоваться на первом этапе, результатом которого станет построение инвариантных индексов. Ее решение – положительные λ-числа и им сопряженные u-числа – может использоваться на втором этапе как начальное приближение для решения общей системы (4.1).

Системы (4.1) и (4.2) могут считаться допустимыми аппроксимациями исходных систем (2.5) и (2.7) при достаточно малых положительных значениях возмущения r , которые сравнимы с влиянием неточностей статистики (1.1) на решения. Для выявления совместности и регулярности исходных систем поставим задачи о минимальном значении параметра r, при котором релаксированные системы (4.1) и (4.2) совместны. Начнем с более простого варианта специальной λ-системы (4.2) в пространстве переменных $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, r\}$:

$$r_\lambda = \arg\min \{r : (4.2), \lambda \ge 0\} . \tag{4.4}$$

Данную задачу ЛП будем называть *специальной задачей минимальной релаксации*. Согласно леммам 1.1 и 1.4 из [22], допустимое множество этой задачи регулярно, и значение задачи r_λ непрерывно зависит от данных (1.1). Обозначим решение задачи (4.4) как $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, r_\lambda)$. Если $r_\lambda \le 0$, то исходная система (2.7) совместна, набор множителей $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r)$ является одним из ее решений и, при $r_\lambda > 0$, – псевдорешений. Для этой части решения задачи (4.4) непрерывность зависимости от данных (1.1) не гарантирована и не обладает специальной экономической характеристикой. Соответственно, эти компоненты не должны использоваться для дальнейшего построения инвариантных индексов.

Аналогичную задачу поставим для общей релаксированной системы (4.1) в расширенном пространстве переменных $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_T, u_1, \ldots, u_T, r\}$:

$$r_{\lambda u} = \arg\min \{r : (4.1), \lambda \geq 0, u \geq 0\}. \tag{4.5}$$

Данную задачу ЛП будем называть *общей задачей минимальной релаксации*. Допустимое множество этой задачи также регулярно, и значение задачи $r_{\lambda u}$ непрерывно зависит от данных (1.1). Решение этой задачи обозначим $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, u_1^r, \ldots, u_T^r, r_{\lambda u})$. Набор чисел Африата $(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_T^r, u_1^r, \ldots, u_T^r)$ при $r_{\lambda u} \leq 0$ является решением системы (2.5) и, при $r_{\lambda u} > 0$, – псевдорешением. Для этой части решения задачи (4.5) непрерывная зависимость от данных также не гарантирована, и она не имеет специальной экономической характеристики. Соответственно, эти компоненты не должны использоваться для дальнейшего построения аналитических индексов.

Специальная система (4.2) эквивалентна общей системе (4.1) с наложенным дополнительным условием однородности (1.9). Поэтому в случае совместности расширенное множество решений специальной системы (с сопряженными u-числами) является подмножеством решений общей системы. Следовательно, значения задач (4.5) и (4.4) связаны априорным соотношением $r_{\lambda u} \leq r_\lambda$.

Сверхрелаксация. Для экономически содержательных решений систем (4.1) и (4.2) далее поставлены экстремальные задачи, для которых эти системы определяют допустимые множества в соответствующих пространствах чисел Африата при закрепленном параметре релаксации r. Если этот параметр равен значению задачи минимальной релаксации (4.5) и (4.4) соответственно, то система (4.1) или (4.2) не будет иметь внутренних решений и может стать несовместной при сколь угодно малых возмущениях исходных данных. Поэтому параметр релаксации должен быть несколько больше, чем значение минимальной релаксации $r_{\lambda u}$ или r_λ, чтобы обеспечить как регулярность, так и практическую устойчивость допустимого множества. Положительную величину превышения минимальной релаксации назовем *сверхрелаксацией* и обозначим ρ. Соответственно, параметр релаксации будет принимать значения $r_{\lambda u}^\rho = r_{\lambda u} + \rho$ для системы (4.1) и $r_\lambda^\rho = r_\lambda + \rho$ для (4.2).

Параметр сверхрелаксации должен быть достаточно малым, чтобы вносимое им возмущение в решение не нарушало **принятую точность представления содержательного результата**. В нашем случае неравенства Африата и их решения – числа Африата – играют техническую роль инструмента вычисления функции потребительских расходов (2.11), через которую вычисляются аналитические индексы Конюса-Фишера (3.4), и инвариантные индексы (1.10) вычисляются непосредственно по числам Африата. Индексы спроса принято определять с точностью до десятых долей процента. Эта норма ограничивает абсолютную погрешность вычисления индексов величиной $\Delta = 0.001$.

Основное значение обычно придается индексу цен. Пусть это будет инвариантный индекс изменения цен на всем периоде $P_{0T}(r)$, вычисленный по некоторому решению λ-системы (4.2). В данном случае $P_{0T}(r) = \lambda_T^{-1}(r)$. Конечное возмущение (вариацию) этого индекса обозначим

$$\delta P_{0T}(r, \rho) \stackrel{\Delta}{=} P_{0T}(r + \rho) - P_{0T}(r). \tag{4.6}$$

Ввиду нерегулярности множества решения системы (4.2) при $r = r_\lambda$ будем вычислять вариацию (4.6) для значений $r = r_\lambda + \rho$, обеспечивающих регулярность этой системы, и определять параметр ρ из условий

$$|\delta P_{0T}(r_\lambda + \rho, \rho)| = |P_{0T}(r_\lambda + 2\rho) - P_{0T}(r_\lambda + \rho)| \leq \Delta, \quad |\delta P_{0T}(r_\lambda + \rho, \rho)| \approx \Delta. \tag{4.7}$$

Первое условие обеспечивает ограничение влияния сверхрелаксации $\rho > 0$ на конечный индекс цен P_{0T} в пределах погрешности Δ, и второе условие предупреждает выбор очень малой величины ρ, неэффективный относительно регуляризации множества допустимых решений.

Отдавая приоритет исходной системе (2.7), множество решений которой при $r_\lambda < 0$ имеет непустую внутренность, будем добавлять релаксационный параметр $r = r_\lambda + \rho$ только при $-\rho < r_\lambda$. При этом допустимое множество задач содержательного (псевдо) решения этой системы будет представляться системой (4.2) с параметром релаксации

$$r_\lambda^\rho = \begin{cases} 0, & r_\lambda \le -\rho, \\ r_\lambda + \rho, & -\rho < r_\lambda. \end{cases} \tag{4.8}$$

Таким образом, **регулярное допустимое множество** задач содержательного псевдорешения или решения (при $r_\lambda^\rho = 0$) λ-системы (2.7) определяется системой неравенств

$$-\lambda_t e_{t0} \le -e_0 + e_t r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s \le e_{0s} + e_s r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s - \lambda_t e_{ts} \le \sqrt{e_t e_s} r_\lambda^\rho, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge s \ne t. \tag{4.9}$$

Допустимое множество задач содержательного выбора решений общей системы (2.5) аналогично однородному случаю (4.8)–(4.9) будет представляться системой (4.1) с параметром сверхрелаксации

$$r_{\lambda u}^\rho = \begin{cases} 0, & r_{\lambda u} \le -\rho, \\ r_{\lambda u} + \rho, & -\rho < r_{\lambda u}, \end{cases} \tag{4.10}$$

и уровень сверхрелаксации ρ будет выбираться из условий, аналогичных (4.7) с использованием индекса цен Конюса-Фишера $P_{0T}^{KF}(r)$ вместо индекса $P_{0T}(r)$.

Таким образом, **регулярное допустимое множество** задач содержательного псевдорешения или решения (при $r_{\lambda u}^\rho = 0$) общей системы (2.5) определяется системой неравенств

$$\begin{cases} -u_t - \lambda_t a_{t0} \le -e_{0s} + r_{\lambda u}^\rho e_t, \quad u_s \le e_{0s} + r_{\lambda u}^\rho e_s, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le r_{\lambda u}^\rho \sqrt{e_s e_t}, \quad s,t = \overline{1,T} \wedge \ s \ne t, \end{cases} \tag{4.11}$$

с параметром релаксации (4.10).

4.3. Задачи содержательного выбора

Каждое решение специальной (4.9) или общей (4.11) системы Африата определяет по $T(T+1)$ пар индексов – инвариантных $\{P_{st}, Q_{st}\}$ или Конюса-Фишера $\{P_{st}^{KF}, Q_{st}^{KF}\}$, и эти индексы допускают множество вариантов целевых индикаторов социально-экономической динамики. Мы ограничиваемся в качестве основных индикаторов индексами, представляющими накопленные изменения цен и количеств за весь период наблюдений – (P_{0T}, Q_{0T}) или $(P_{0T}^{KF}, Q_{0T}^{KF})$. В силу мультипликативности эти индексы жестко связаны. Минимизация индекса цен одновременно максимизирует сопряженный ему индекс количества, что эквивалентно относительно достижения оптимистической оценки конечного состояния рынка, и наоборот. При этом можно также управлять поведением промежуточных индексов $\{P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF}\}$ различными способами, усложняя целевые функции и вводя дополнительные условия на выбор решений систем Африата.

Специальная система Африата. Начнем с λ-системы (4.9), разрешимость которой при достаточно малом значении минимальной релаксации (4.4) означает возможность построения инвариантных индексов$\{P_{0t}, Q_{0t}\}$. Эти индексы, определяющие качество решения системы (4.9), связаны с решениями простыми формулами $P_{0t} = \lambda_t^{-1}$ и $Q_{0t} = u_t/e_0$. При допустимом произвольном выборе решения можно ставить задачи минимизации или максимизации накопленного индекса цен P_{0T}, получая при этом максимальный или минимальный сопряженный индекс количества Q_{0T} и реализуя цель улучшения или ухудшения этих важных показателей социально-экономической динамики.

Первая однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9) с максимальным значением множителя λ_T:

$$\lambda_T^{Max} = \arg\max \left\{ \lambda_T : (4.9) \right\}. \tag{4.12}$$

Эта задача ЛП обеспечивает минимальное значение индекса цен P_{0T} и максимальное значение индекса количества потребления Q_{0T}. Соответственно, решение $(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_T^M)$ задачи (4.12) можно назвать **оптимистическим**.

Вторая однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9) с минимальным значением множителя λ_T:

$$\lambda_T^{\min} = \arg\min \left\{ \lambda_T : (4.9) \right\} \tag{4.13}$$

Эта задача ЛП, в отличие от задачи (4.12), обеспечивает противоположные показатели социально-экономической динамики – максимальное значение индекса цен P_{0T} и минимальное значение индекса количества Q_{0T}. Соответственно, решение $(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_T^m)$ задачи (4.13) можно назвать **пессимистическим**.

В третьей задаче выбор решения системы (4.9) будем ориентировать на близость соответствующих инвариантных индексов цен набору бинарных индексов цен Фишера (1.5). Если составлять функционал – сумму квадратов разностей $P_{0t} - P_{0t}^F = \lambda_t^{-1} - P_{0t}^F$, то получим задачу нелинейного программирования (НП) с невыпуклым функционалом. Поставим более простую аналогичную задачу, заменив разности $P_{0t} - P_{0t}^F$ на разности обратных индексов $P_{t0} - P_{t0}^F = \lambda_t - P_{t0}^F$. При этом получим задачу класса КП.

Третья однородная задача. Найти решение λ-системы (4.9), для которого соответствующий набор *обратных инвариантных индексов цен* $\{P_{10}, \ldots, P_{T0}\}$ наиболее близок к набору *обратных индексов цен Фишера* $\left\{P_{10}^F, \ldots, P_{T0}^F\right\}$:

$$F_\lambda(\lambda) = \sum_{t=1}^{T} \left(\lambda_t - P_{t0}^F\right)^2. \tag{4.14}$$

Краткая форма третьей задачи:

$$F_\lambda^{\min} = \min \left\{ F_\lambda(\lambda) : (4.9) \right\}. \tag{4.15}$$

Целью задачи (4.15) является нахождение инвариантных индексов, наиболее близких к индексам Фишера, удовлетворяющим естественным критериям наилучшим образом, и этот вариант выбора решения можно считать **объективным**. Для данной задачи выполнены условия классической корректности из [9], приведенные в п. 4.2: регулярность допустимого множества (4.9) и строгая выпуклость функционала (4.14). Решение задачи $\left(\lambda_1^F, \ldots, \lambda_T^F\right)$ является проекцией «точки Фишера» $(P_{10}^F, \ldots, P_{T0}^F)$ на множество решений системы (4.9).

При решении задачи КП (4.15) для сокращения вычислений важно иметь хорошее приближение искомого решения. Таким приближением для общих алгоритмов НП будет точка Фишера, и для метода КП «активных наборов» [2], [12–13], стартующего с допустимой точки, можно использовать усреднение решений первых двух задач.

Общая система Африата. Задачи содержательного выбора решений общей системы (4.11), подобные задачам для специальной λ-системы (4.9) – минимизации (4.12) или максимизации (4.13) инвариантного индекса цен $P_{0T} = \lambda_T^{-1}$, а также задачи (4.15) о проекции точки Фишера – предполагают замену индексов $P_{0t} = \lambda_t^{-1}$ на индексы Конюса-Фишера $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$. Однако эти индексы определяются числами Африата не формулой, а алгоритмически, через значения $e\,(p^t, e_0)$ и $e\,(p^0, u_t)$ задачи ЛП (2.11). На данном этапе мы решаем более простые задачи, используя в функционалах вместо индексов Конюса-Фишера квазиинвариантные индексы:

$$\widetilde{P}_{0t} = \sqrt{\frac{e_t}{u_t\lambda_t}}, \qquad \widetilde{Q}_{0t} = \frac{\sqrt{u_t\lambda_t e_t}}{e_0}. \tag{4.16}$$

После решения поставленных далее задач по соответствующим числам Африата будут вычисляться индексы Конюса-Фишера $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$, которые мы принимаем за конечные показатели экономической динамики, отражаемой статистикой (1.1).

Максимизация или минимизация каждого из квазиинвариантных индексов (4.16) на выпуклом множестве решений системы (4.11) эквивалентна соответствующей экстремизации билинейного квазивогнутого функционала

$$u_T\lambda_T. \tag{4.17}$$

Первая общая задача. Найти решение системы (4.11) с максимальным значением функционала (4.17).

Первый вариант выбора решения системы (4.11) можно назвать **квазиоптимистическим**. Здесь естественно ожидать невысокий уровень индекса цен и высокий уровень индекса количества, по крайней мере, при небольшом нарушении свойства однородности предпочтений, когда квазиинвариантные индексы близки к инвариантным и общим аналитическим индексам. Эта задача как максимизация квазивогнутого функционала на выпуклом множестве подобна задаче ВП совпадением локального и глобального максимумов. Для ускорения процесса решения в данном случае естественно использовать в качестве начального решения набор чисел Африата, определяемых как решение первой однородной задачи $(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_T^M)$, и сопряженных u-чисел $(u_1^M, \ldots, u_T^M)$.

Вторая общая задача. Найти решение системы (4.11) с минимальным значением функционала (4.17).

Этот вариант можно назвать **квазипессимистическим**. Здесь естественно ожидать высокий уровень индекса цен и невысокий уровень индекса количества. Ввиду возможной многоэкстремальности в данном случае особенно важна роль хорошего начального приближения, в качестве которого, подобно предыдущей задаче, естественно взять решение второй специальной задачи с добавлением сопряженных u-чисел $(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_T^m; u_1^m, \ldots, u_T^m)$.

Для первой и особенно второй задач возможно получение чрезмерно малых или больших компонент решения, приводящих к неестественным значениям промежуточных индексов $(P_{0t}^{KF}, Q_{0t}^{KF})$ или невозможности вычисления функции расходов, определяющей эти индексы. Для предотвращения этих и других патологий можно вводить условия отделения от нуля множителей (например, $\lambda_t \geq 0.3\lambda_t^m$) или их монотонность $(\lambda_t \geq \lambda_{t+1})$, соответствующую монотонному росту цен.

Третья общая задача. Найти решение $(\lambda_1, \ldots, \lambda_T; u_1, \ldots, u_T)$ системы (4.11), минимизирующее квадратическое отклонение квазиинвариантных индексов (4.16) от индексов Фишера $\{P_{0t}^F, Q_{0t}^F\}$:

$$F_{\lambda u}\,(\lambda, u) = \sum_{t=1}^{T}\left[\left(\sqrt{\frac{e_t}{u_t\lambda_t}} - P_{0t}^F\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{u_t\lambda_t e_t}}{e_0} - Q_{0t}^F\right)^2\right]. \tag{4.18}$$

Для хорошего начального приближения решения этой задачи НП естественно использовать усреднение решений первых двух задач.

5. Пример построения аналитических индексов

В таблицах 1 и 2 представлена статистика потребления [23] в Ульяновской области в период 2006–2017 гг. следующих агрегированных продуктов питания: 1 – хлебные продукты; 2 – картофель; 3 – овощи и бахчевые; 4 – мясо и мясопродукты; 5 – фрукты и ягоды; 6 – молоко и молочные продукты; 7 – яйца; 8 – рыба и рыбопродукты; 9 – сахар, включая кондитерские изделия; 10 – масло растительное и другие жиры.

Таблица 1. Цены на продукты питания

Период		Цена (руб./кг, 7 – руб./шт)									
T	год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2006	25.74	7.71	20.28	33.84	91.31	9.43	2.07	56.00	46.09	33.83
1	2007	30.04	8.27	25.81	35.22	98.36	11.60	2.56	63.53	45.48	39.12
2	2008	41.08	11.27	31.06	45.51	119.29	16.51	3.13	81.09	54.45	63.64
3	2009	45.35	11.79	32.44	50.02	139.17	17.33	2.98	86.22	69.69	54.73
4	2010	46.88	16.34	38.82	50.17	140.59	19.34	2.98	93.79	77.39	53.36
5	2011	55.67	23.92	36.94	50.09	157.77	21.43	3.12	102.08	92.73	72.23
6	2011	60.45	11.68	37.37	53.50	172.11	22.14	3.52	118.93	91.05	67.11
7	2013	69.02	17.07	43.18	54.00	173.43	24.61	3.95	135.39	98.03	69.67
8	2014	74.58	22.77	45.67	60.28	189.67	28.81	4.39	145.05	104.01	66.51
9	2015	83.95	23.31	53.62	79.20	220.14	33.78	5.53	176.96	135.93	85.52
10	2016	92.62	17.99	56.23	84.86	222.19	36.47	5.51	181.14	140.34	95.51
11	2017	95.35	22.25	57.35	83.52	218.45	39.87	5.00	200.63	139.21	93.75
2017/06		3.70	2.89	2.83	2.47	2.39	4.23	2.42	3.58	3.02	2.77

Таблица 2. Потребление продуктов питания

T	Количество (кг/год, 7 – шт. на чел.)										Расходы
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(руб./год)
2006	114.0	86.1	82.0	44.4	59.1	253.2	181.0	18.0	28.9	9.4	17580.4
2007	102.6	76.5	76.8	55.3	57.9	247.3	176.0	19.4	26.7	9.2	19465.7
2008	96.2	67.4	83.3	52.6	59.2	238.8	165.0	19.0	26.4	8.9	24758.2
2009	92.0	69.5	85.7	54.7	57.9	241.3	171.0	17.3	25.5	9.1	27023.8
2010	98.9	62.0	96.9	65.8	68.0	261.1	189.0	21.7	28.3	10.3	32660.4
2011	98.3	59.0	99.8	66.5	73.4	268.6	193.0	22.7	29.7	10.5	37669.5
2012	99.1	64.0	103.6	69.8	74.7	276.8	191.0	23.6	30.8	10.3	40303.6
2013	94.9	64.8	98.3	70.6	74.7	283.4	198.0	24.4	30.1	9.8	43361.9
2014	93.4	63.5	101.0	68.4	77.7	279.2	216.0	22.9	30.4	9.4	47985.6
2015	91.5	61.1	111.1	65.7	78.2	285.6	211.0	22.5	29.9	9.5	57154.0
2016	94.9	62.5	121.3	72.2	82.6	300.9	236.0	21.1	33.1	9.8	62892.0
2017	88.4	59.1	104.1	70.5	81.8	262.5	228.0	19.2	29.8	9.6	59977.8
2017/06	0.78	0.69	1.27	1.59	1.38	1.04	1.26	1.07	1.03	1.02	3.41

В таблице 3 приведены соответствующие значения формульных индексов цен и количества потребления Ласпейреса, Пааше (1.3) и Фишера (1.5). Для данной статистики эффект Гершенкрона (1.4) выполняется во всех позициях. В конце периода $T = 11$ превышение индекса цен Ласпейреса P^L_{0T} над индексом цен Пааше P^P_{0T} составляет 0.112, т. е. 11.2 %. Индекс количества Ласпейреса Q^L_{0T} также превосходит индекс Пааше Q^P_{0T} на 0.042, т. е. на 4.2 %. Отметим, что разница индексов Ласпейреса и Пааше однонаправленная, и это не позволяет в общем случае выбирать их для тенденциозной оценки экономической ситуации. Индексы Фишера усредняют значения этих наиболее распространенных индексов цен и количества (уровня) потребления и являются в классе формульных индексов наиболее объективными и качественными относительно выполнения естественных тестов Фишера, не удовлетворяя только тесту транзитивности.

Таблица 3. Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера

Период T	Индексы цен			Индексы количества		
	P_{0t}^L	P_{0t}^P	P_{0t}^F	Q_{0t}^L	Q_{0t}^P	Q_{0t}^F
0	1	1	1	1	1	1
1	1.129	1.127	1.128	0.982	0.980	0.981
2	1.459	1.452	1.456	0.970	0.965	0.967
3	1.610	1.603	1.606	0.959	0.955	0.957
4	1.725	1.706	1.716	1.089	1.077	1.083
5	1.944	1.894	1.919	1.131	1.102	1.117
6	2.000	1.973	1.987	1.162	1.147	1.154
7	2.184	2.135	2.159	1.156	1.129	1.142
8	2.413	2.348	2.381	1.162	1.131	1.147
9	2.843	2.784	2.813	1.168	1.144	1.156
10	2.961	2.894	2.927	1.236	1.208	1.222
11	3.050	2.938	2.993	1.161	1.119	1.140

Для приведенной торговой статистики были реализованы все поставленные в предыдущем разделе задачи построения аналитических индексов. На первом этапе в предположении однородности предпочтений построены инвариантные индексы (1.10). Значение задачи минимальной релаксации (4.4) λ-системы (4.2) оказалось равным $r_\lambda = 0.00022$. Это означает несовместность исходной редуцированной λ-системы (2.7) и необходимость ее регуляризации. Для всех трех содержательных задач – максимизации λ_{11} (4.12), минимизации λ_{11} (4.13) и проекции точки Фишера (4.15) – были получены одинаковые значения сверхрелаксации $\rho = 0.000025$. Соответственно, фиксированный параметр (4.8) релаксации системы (4.9) равен $r_\lambda^\rho = 0.000245$. Соответствующие решения и инвариантные индексы представлены в таблице 4.

Таблица 4. Инвариантные индексы

T	$\max\lambda_T$ (4.12)			Проекция (4.15)			$\min\lambda_T$ (4.13)		
	λ^M	P_{0t}	Q_{0t}	λ^F	P_{0t}	Q_{0t}	λ^m	P_{0t}	Q_{0t}
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.887	1.128	0.982	0.886	1.129	0.981	0.885	1.130	0.980
2	0.689	1.452	0.970	0.686	1.457	0.967	0.686	1.458	0.966
3	0.624	1.603	0.959	0.622	1.608	0.956	0.621	1.609	0.955
4	0.584	1.711	1.086	0.583	1.716	1.082	0.582	1.718	1.081
5	0.525	1.903	1.126	0.524	1.910	1.122	0.523	1.911	1.121
6	0.505	1.982	1.157	0.503	1.989	1.153	0.503	1.990	1.152
7	0.466	2.145	1.150	0.464	2.153	1.145	0.464	2.155	1.144
8	0.423	2.364	1.155	0.421	2.374	1.150	0.421	2.375	1.149
9	0.357	2.802	1.160	0.356	2.813	1.156	0.355	2.815	1.155
10	0.343	2.918	1.226	0.341	2.931	1.221	0.341	2.934	1.219
11	0.336	2.980	1.145	0.334	2.997	1.139	0.333	3.006	1.135

Здесь первый (оптимистический) вариант (4.12) выбора наилучших конечных индексов дал результат $P_{0,11} = 2.980$, $Q_{0,11} = 1.145$; пессимистический вариант – $P_{0,11} = 3.006$, $Q_{0,11} = 1.135$. Значения конечных индексов варианта (4.15) $P_{0,11} = 2.997$, $Q_{0,11} = 1.139$ находятся между этими крайними значениями, что соответствует предположению их объективности.

На втором этапе решалась общая система Африата и строились индексы Конюса-Фишера (3.4). Задача минимальной релаксации (4.5) для данной статистики имеет значение $r_{\lambda u} = -0.00028$. Значение параметра сверхрелаксации оказалось наименьшим для третьей общей задачи – минимизации функционала (4.18): $\rho = 0.000001$. Это означает, что исходная общая редуцированная система (2.5) для данной статистики регулярна, и параметр (4.10) релаксации системы (4.11) равен $r^{\rho}_{\lambda u} = 0$. При решении первой и второй общих задач в исходной постановке были получены наборы чисел Африата с немонотонными выбросами первых чисел, что приводило к сильному отклонению индексов Конюса-Фишера от статистических индексов Фишера и близким к последним инвариантным индексам. Во второй задаче также получались нулевые λ-числа. В обоих случаях система неравенств (4.11) была дополнена условием монотонности $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$, и во второй задаче было введено условие $\lambda_{11} \geq 0.5\lambda_{11}^{Max}$, где λ_{11}^{Max} – значение первой задачи. Соответствующие решения и аналитические индексы Конюса-Фишера представлены в таблице 5.

Таблица 5. Индексы Конюса-Фишера

t	$\max\lambda_T u_T$: (4.11), $\lambda_t \leq \lambda_{t-1}$				Третья общая задача				$\min \lambda_T u_T$: (4.11), $\lambda_t \leq \lambda_{t-1}$, $\lambda_{11} \geq 0.5\lambda_{11}^{Max}$			
	λ_t^M	u_t^M	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}	λ_t	u_t	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}	λ_t^m	u_t^m	P_{0t}^{KF}	Q_{0t}^{KF}
0	1.000	17580	1	1	1.000	17580	1	1	1.000	17580	1	1
1	1.000	17190	1.131	0.979	0.887	17234	1.129	0.980	0.991	17206	1.130	0.980
2	0.993	16830	1.461	0.964	0.688	16983	1.458	0.966	0.977	16872	1.458	0.966
3	0.978	16554	1.615	0.952	0.623	16803	1.608	0.956	0.956	16606	1.611	0.954
4	0.628	19088	1.716	1.083	0.584	19000	1.719	1.081	0.314	18312	1.754	1.059
5	0.573	19839	1.909	1.123	0.523	19689	1.913	1.120	0.286	18687	1.969	1.088
6	0.538	20419	1.983	1.156	0.495	20221	1.991	1.151	0.269	18977	2.060	1.113
7	0.514	20294	2.151	1.146	0.468	20106	2.158	1.143	0.257	18915	2.231	1.105
8	0.463	20376	2.371	1.151	0.425	20181	2.380	1.147	0.232	18955	2.461	1.109
9	0.388	20488	2.807	1.158	0.356	20283	2.819	1.153	0.194	19011	2.918	1.114
10	0.371	21735	2.917	1.227	0.340	21427	2.934	1.219	0.185	19635	3.072	1.164
11	0.371	20170	2.994	1.140	0.335	19968	3.005	1.135	0.185	18819	3.108	1.098

В данном случае квазиоптимистические индексы Конюса-Фишера ухудшили оценку конечной ситуации по сравнению с оптимистическими инвариантными индексами как относительно инфляции ($P_{0,11}^{KF} = 2.994 > P_{0,11} = 2.980$), так и по уровню потребления ($Q_{0,11}^{KF} = 1.140 < Q_{0,11} = 1.145$). В пессимистическом варианте аналогичные соотношения подтвердили более широкие возможности допустимой целенаправленной «подгонки» индексов: $P_{0,11}^{KF} = 3.108 > P_{0,11} = 3.006$, $Q_{0,11}^{KF} = 1.098 < Q_{0,11} = 1.135$ (цены выше, потребление ниже). Несоответствие ожиданию в первом варианте объясняется тем, что функционалы задач выбора содержательных решений построены не на основе индексов Конюса-Фишера, отражающих потребительские предпочтения в общем (неоднородном) случае, а на основе их эвристической аппроксимации квазиинвариантными индексами. Для данной статистики критерий оптимистического выбора первой общей задачи оказался неэффективным относительно варианта однородных предпочтений.

Подобные расчеты выполнены для аналогичных статистик потребления в Республике Мордовия и Приволжском федеральном округе в целом. Ограничимся перечислением конечных показателей обобщенной динамики потребления. Для Мордовии конечные индексы Фишера равны $P^F_{0,11} = 2.926$, $Q^F_{0,11} = 1.137$; инвариантные индексы цен, построенные по решениям трех однородных задач (4.12), (4.13) и (4.15), равны $P^{(1)}_{0,11} = 2.911$, $P^{(2)}_{0,11} = 2.977$, $P^{(3)}_{0,11} = 2.944$ соответственно (верхний индекс соответствует номеру задачи); инвариантные индексы количеств $Q^{(1)}_{0,11} = 1.143$, $Q^{(2)}_{0,11} = 1.117$, $Q^{(3)}_{0,11} = 1.129$. Индексы Конюса-Фишера, построенные по решениям трех общих задач, равны $P^{KF(1)}_{0,11} = 2.914$, $P^{KF(2)}_{0,11} = 3.111$, $P^{KF(3)}_{0,11} = 2.960$; $Q^{KF(1)}_{0,11} = 1.141$, $Q^{KF(2)}_{0,11} = 1.096$, $Q^{KF(3)}_{0,11} = 1.124$ соответственно.

Аналогичные показатели для ПФО: индексы Фишера $P^F_{0,11} = 2.966$, $Q^F_{0,11} = 1.196$; инвариантные индексы цен $P^{(1)}_{0,11} = 2.950$, $P^{(2)}_{0,11} = 2.971$, $P^{(3)}_{0,11} = 2.966$; инвариантные индексы количеств $Q^{(1)}_{0,11} = 1.203$, $Q^{(2)}_{0,11} = 1.194$, $Q^{(3)}_{0,11} = 1.197$. Индексы Конюса-Фишера $P^{KF(1)}_{0,11} = 2.967$, $P^{KF(2)}_{0,11} = 3.042$, $P^{KF(3)}_{0,11} = 2.967$; $Q^{KF(1)}_{0,11} = 1.196$, $Q^{KF(2)}_{0,11} = 1.166$, $Q^{KF(3)}_{0,11} = 1.196$.

В заключение отметим, что все приведенные варианты аналитических индексов – инвариантных, предполагающих однородность потребительских предпочтений (усредненных по ансамблю потребителей), и общих аналитических индексов Конюса-Фишера – допустимы относительно современной индексологии и непараметрического анализа рыночного спроса, представляющего наиболее эффективный метод современного экономического анализа. Различные значения одинаковых показателей отражают объективные возможности статистических методов для целенаправленного, субъективного и в то же время «честного» манипулирования оценками социально-экономической ситуации различными специалистами, администраторами и политиками, проявляющегося в рамках существующей статистической практики.

Мы также представили вариант объективной оценки рыночной динамики на основе принятия формульных индексов Фишера как ориентиров построения аналитических индексов Конюса-Фишера. Использование на данном этапе квазиинвариантных индексов в критериях отбора решений общей системы Африата ограничивает степень достижения содержательных целей выбора, и преодоление этого ограничения является целью нашего следующего исследования.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Ульяновской области (проект № 18-410-730017), а также РФФИ – проект № 19-010-00972.

Список литературы

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, NY, 1995, 981 p.

2. В. К. Горбунов, *Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал*, Экономика, М., 2004, 174 с.

3. В. К. Горбунов, *Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения*, УлГУ, Ульяновск, 2015, 264 с., URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

4. В. К. Горбунов, *Математическое моделирование рыночного спроса: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп.*, Лань, СПб., 2018, 212 с.

5. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986, 288 с.

6. V. K. Gorbunov, "Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **9**:6 (2001), 575–594.

7. В. К. Горбунов, "Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными", *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов, Физматлит, М., 2003, 418–447.

8. П. Кевеш, *Теория индексов и практика экономического анализа*, Фин. и стат., М., 1990, 304 с.

9. W. E. Diewert, "The consumer price index and index number purpose", *Journal of Economic and Social Measurement*, **27** (2001), 167–248.

10. P. A. Samuelson, S. Swamy, "Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis", *The American Economic Review*, **64**:4 (1974), 566–593.

11. W. E. Diewert, "The economic theory of index numbers: a survey", *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London, 1981, 163–208.

12. В. К. Горбунов, Л. А. Козлова, "Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления", *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, **19**:3 (2008), 120–127.

13. В. К. Горбунов, Л. А. Козлова, "Моделирование рыночного потребительского спроса и аналитические индексы", *Вопросы статистики*, **6** (2015), 36–45.

14. А. А. Конюс, "Проблема истинного индекса стоимости жизни", *Экономический бюллетень конъюнктурного института*, **9–10** (1924), 64–71.

15. S. N. Afriat, "The construction of utility functions from expenditure data", *Intern. Economic Review*, **8**:1 (1967), 67–77.

16. S. N. Afriat, *The index number problem. Construction theorems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2014, 220 p.

17. H. Varian, "The nonparametric approach to demand analysis", *Econometrica*, **50**:4 (1982), 945–973.

18. H. Varian, "Non-parametric tests of consumer behaviour", *The Review of Economic Studies*, **50**:1 (1983), 99–110.

19. W. E. Diewert, "Afriat and revealed preference theory", *Rev. Econ. Studies*, **40** (1973), 419–425.

20. A. Fleissig, G. Whitney, "Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities", *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**:3 (2005), 355–362.

21. В. К. Горбунов, "О линейных неравенствах обратной задачи теории потребления", *Ученые записки УлГУ: Фунд. пробл. математики и механики*, **1** (1998), 46–53.

22. В. В. Федоров, *Численные методы максимина*, Наука, М., 1979, 280 с.

23. *Потребление продуктов питания в домашних хозяйствах: стат. бюлл.*, 2008–2018, URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140095125312.

Поступила 12.01.2019

MSC2010 91B42, 91B82, 90C30

Inverse problem of the market demand theory and analytical indices of demand

© V. K. Gorbunov[1], A. G. Lvov[2]

Abstract. The inverse problem of the market demand's theory is constructing a collective utility function via a trade statistics consisting of a finite set of pairs "prices-quantities". The main computational problem here is the solution of the Afriat's inequalities system, which determines the values of the utility function and the Lagrange multiplier on the trade statistics data, which are "Afriat's numbers". This inverse problem is ill-posed one because of multiplicity of inequalities system's solutions and also because of their possible inconsistency and instability. A regularization method for this problem is proposed, based on the relaxation of the Afriat's system yielding local Hausdorf continuity of its solution set, and on the use of characteristics of analytical index numbers determined via Afriat's numbers. These characteristics formalized by choice criteria are: optimism, pessimism, objectivity. The results of constructing analytical index numbers for real trade statistics of Ulyanovsk region are presented.

Key Words: inverse problem of the market demand's theory, analytical indices, Afriat's inequalities, regularization methods, relaxation of inequalities.

References

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, NY, 1995, 981 p.

2. V. K. Gorbunov, *[Mathematical model of consumers' demand: Theory and applied potential]*, Economizdat Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 174 p.

3. V. K. Gorbunov, *[Consumers' demand: Analytical theory and applications]*, ULSU Publishing, Ulyanovsk, 2015 (In Russ.), 264 p.

4. V. K. Gorbunov, *[Mathematical modeling of market demand: Manual. 2-nd ed., revised]*, Lan Publishing, Saint Petersburg, 2018 (In Russ.), 212 p.

[1]**Vladimir K. Gorbunov**, Professor of Digital Economics Department, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5276-0501, vkgorbunov@mail.ru

[2]**Alexander G. Lvov**, Associate Professor of Digital Economics Department, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia), PhD (Economics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6726-8234, aglvov@mail.ru

5. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, Wiley, New York, 1977, 258 p.

6. V. K. Gorbunov, “Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization”, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **9**:6 (2001), 575–594.

7. V. K. Gorbunov, “[Regularization of nonlinear ill-posed problems with parametrized data]”, *Nelinejnyi analiz i nelinejnyie differentsial'nije uravnenija*, eds. V. A. Trenogin, A. F. Filippov, Fizmatlit Publ., Moscow, 2003, 418–447 (In Russ.).

8. P. Kves, *Index Theory and Economic Reality*, Akademiai Kiado, Budapest, 1983, 313 p.

9. W. E. Diewert, “The consumer price index and index number purpose”, *Journal of Economic and Social Measurement*, **27** (2001), 167–248.

10. P. A. Samuelson, S. Swamy, “Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis”, *The American Economic Review*, **64**:4 (1974), 566–593.

11. W. E. Diewert, “The economic theory of index numbers: a survey”, *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, ed. A. Deaton, Cambridge University Press, London, 1981, 163–208.

12. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, “[The construction and investigation of quasi-invariant consumption indices]”, *Sovremennyye technologii. Sistemnyy analis. Modelirovanye*, **19**:3 (2008), 120–127 (In Russ.).

13. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, “[The modeling of the market demand and analytical index numbers]”, *Voprosy statistiki*, **6** (2015), 36–45 (In Russ.).

14. A. A. Konus, “The problem of the true index of the cost of living”, *Econometrica*, **7** (1939), 10–29.

15. S. N. Afriat, “The construction of utility functions from expenditure data”, *Intern. Economic Review*, **8**:1 (1967), 67–77.

16. S. N. Afriat, *The index number problem. Construction theorems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2014, 220 p.

17. H. Varian, “The nonparametric approach to demand analysis”, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 945–973.

18. H. Varian, “Non-parametric tests of consumer behaviour”, *The Review of Economic Studies*, **50**:1 (1983), 99–110.

19. W. E. Diewert, “Afriat and revealed preference theory”, *Rev. Econ. Studies*, **40** (1973), 419–425.

20. A. Fleissig, G. Whitney, “Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities”, *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**:3 (2005), 355–362.

21. V. K. Gorbunov, “[On linear inequalities of the consumption theory's inverse problem]”, *Uchenyye zapiski UlGU: Fundamentalnyye problemy matematiki i mekhaniki*, **1** (1998), 46–53 (In Russ.).

22. V. V. Fedorov, *Chislennije metody maksimina [Numerical methods for maxmin]*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russ.), 280 p.

23. *[Household food consumption]*, Statisticheskij byulleten' (vypuski 2008–2018gg.) (In Russ.), Available at: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140095125312.

Submitted 12.01.2019

Математическая жизнь

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА ФЁДОРОВИЧА ТИШКИНА

23 февраля 2019 года отметил свой 70-летний юбилей крупнейший специалист в области математического моделирования и вычислительной математики Владимир Фёдорович Тишкин.

Владимир Фёдорович родился в г. Саранске, здесь же окончил с золотой медалью среднюю школу № 9. В 1966 г. поступил на факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института, который окончил в 1972 г. по кафедре, возглавляемой академиком А. А. Самарским. В 1972–1975 гг. работал младшим научным сотрудником ВНИИЭФ (Арзамас-16). В 1975 г. поступил в аспирантуру Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Научным руководителем был назначен академик, Герой Социалистического труда А. А. Самарский. С 1975 по 1990 гг. работал в должностях младшего научного сотрудника, старшего научного сотрудника, главного научного сотрудника. В 1986 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. С 1990 по 2009 гг. – заместитель директора по научной работе и руководитель отдела численных методов механики сплошной среды Института математического моделирования РАН. С 2010 по 2018 гг. – заместитель директора по научной работе, с 2018 г. – заведующий отделом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. В. Ф. Тишкин является профессором кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, профессором кафедры «Вычислительная математика и программирование» Московского авиационного института, профессором кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики МГУ им. Н. П. Огарёва. В 2016 г. он был избран членом-корреспондентом Российской академии наук.

В настоящее время Владимир Фёдорович является автором более 300 научных работ, в том числе пяти монографий. Им был разработан ряд новых вычислительных методов для решения задач механики сплошной среды и решены конкретные практически значимые задачи в этой области знаний. Разработанный при его непосредственном участии метод опорных операторов, основывающийся на разностной аппроксимации основных инвариантных дифференциальных операторов векторного и тензорного анализа, в настоящее время получил широкое распространение как в России, так и за рубежом, и используется многими научными группами.

Важным достижением В. Ф. Тишкина является разработка алгоритмов по построению адаптивных расчетных сеток. Предложенная в его работах методика, связанная с использованием метрики кратчайшего пути, позволяет строить эффективные алгоритмы такого типа при наличии произвольных ограничений. Получили известность также его работы по созданию квазимонотонных разностных схем повышенного порядка точности, математическому моделированию физики плазмы.

За цикл работ по математическому моделированию агрегатов космического корабля «Буран» В. Ф. Тишкин в 1990 г. был награжден медалью «За трудовую доблесть».

Большой цикл работ Владимира Фёдоровича посвящен математическому моделированию задач инерциального управляемого термоядерного синтеза. Под его непосредственным руководством был разработан пакет прикладных программ «АТЛАНТ», с помощью которого выполнен цикл расчетов по устойчивости и симметрии различных типов лазерных мишеней. В этих расчетах впервые было обнаружено определяющее влияние нелинейного насыщения скорости роста возмущений, что позволило теоретически обосновать возможность использования тонкостенных оболочечных мишеней для получения термоядерной плазмы.

За цикл работ по изучению гидродинамических неустойчивостей и возникающих при этом турбулентных течений В. Ф. Тишкин был удостоен премии им. А. Н. Крылова в 2001 г. Результаты этих работ имеют большое значение для определения параметров, входящих в приближенные модели турбулентности и используемых для проектирования конкретных конструкций.

Ещё одним актуальным направлением работы В. Ф. Тишкина является математическое моделирование прямых и обратных задач распространения загрязнений, моделирование лесных пожаров, техногенных аварийных ситуаций и других задач экологической направленности.

Большое количество работ посвящено применению многосеточных методов для эффективного решения уравнений диффузионного типа. На основе данных методов им разработан новый вычислительный алгоритм, хорошо приспособленный к архитектуре многопроцессорных вычислительных систем.

Последние работы В. Ф. Тишкина посвящены развитию метода Галёркина с разрывными базисными функциями. Исследована точность метода; показано, что схемы разрывного метода Галёркина могут трактоваться как обобщение метода Годунова на кусочно-полиномиальные функции; предложены новые «лимитеры» для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом.

Наряду с научной работой Владимир Фёдорович успешно занимается педагогической деятельностью. Им прочитан ряд общих и специальных курсов лекций и успешно осуществляется руководство выпускными квалификационными работами студентов и аспирантов. Под его руководством защитились три доктора и тринадцать кандидатов физико-математических наук.

Работы В. Ф. Тишкина получили международное признание и высокую оценку многих ведущих ученых. Он является членом редколлегии журналов «Математическое моделирование», «Вопросы атомной науки и техники» (серия «Математическое моделирование физических процессов»), членом ряда диссертационных, экспертных, научных и ученых советов. Владимир Фёдорович руководит рядом научно-исследовательских проектов, поддержанных РФФИ и РНФ.

Значительная часть научной и педагогической деятельности В. Ф. Тишкина связана с Мордовским государственным университетом. При его активном участии в 1993 г. между Мордовским государственным университетом и Институтом математического моделирования РАН был заключен договор о сотрудничестве.

С 1994 по 1998 гг. В. Ф. Тишкин был председателем ГАК по специальности «Прикладная математика» Мордовского государственного университета. С 1998 г. Владимир Фёдорович Тишкин работает по совместительству в должности профессора Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва. Им подготовлено более 50 специалистов и магистров по направлению «Прикладная математика и информатика». В настоящее время на кафедре прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий работают трое сотрудников, защитивших кандидатские диссертации под руководством В. Ф. Тишкина.

Под его идейным руководством на факультете ведутся исследования по разработке вычислительных методов повышенного порядка точности для решения задач механики сплошной среды на высокопроизводительных вычислительных системах. Эта работа поддержана грантами Президента РФ, РФФИ и Минобрнауки РФ. В. Ф. Тишкин является председателем программного комитета ежегодных международных конференций «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» и школ-семинаров «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е. В. Воскресенского, проводимых на базе МГУ им. Н. П. Огарёва.

В. Ф. Тишкин – главный редактор рецензируемого научного издания «Журнал Средневолжского математического общества», индексируемого в международной реферативной базе данных zbMath.

Владимир Фёдорович входит в состав научно-технического совета Центра развития науки, технологий и образования в области обороны и обеспечения безопасности государства при МГУ им. Н. П. Огарёва. Под его руководством на факультете математики и информационных технологий бакалаврами и магистрантами защищаются выпускные работы, посвященные актуальным проблемам прикладной математики и современных информационных технологий. Это, безусловно, способствует повышению уровня подготовки специалистов, обладающих компетенциями, востребованными на современном высокотехнологичном рынке труда и являющихся критически важными для развития Республики Мордовия.

Свое 70-летие Владимир Фёдорович встречает в расцвете творческих сил, с новыми замыслами и идеями. Друзья, коллеги и ученики горячо поздравляют юбиляра и желают ему здоровья, творческого долголетия и дальнейших успехов на благо российской и мировой науки!

И. В. Бойков, Д. И. Бояркин, С. М. Вдовин, П. А. Вельмисов, В. З. Гринес, И. М. Губайдуллин, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Егорова, Р. В. Жалнин, В. Т. Жуков, Т. Ш. Кальменов, Л. В. Клочкова, М. М. Краснов, В. Н. Кризский, Е. Б. Кузнецов, М. Е. Ладонкина, Т. Ф. Мамедова, В. Ф. Масягин, П. П. Матус, Н. Д. Морозкин, С. М. Мурюмин, О. А. Неклюдова, Ю. Н. Орлов, А. Ю. Павлов, Е. Е. Пескова, Ю. А. Повещенко, И. П. Рязанцева, В. И. Сафонкин, П. В. Сенин, Г. А. Смолкин, С. И. Спивак, Д. В. Сузан, Л. А. Сухарев, А. О. Сыромясов, О. Б. Феодоритова, И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева, Н. Г. Ярушкина

К ВОСЬМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ МИХАИЛА ТИХОНОВИЧА ТЕРЁХИНА

М. Т. Терёхин родился 5 января 1934 года в крестьянской семье в деревне Алехино Ермишинского района Рязанской области. В 1951 году он поступил на физико-математический факультет Рязанского государственного педагогического института. В декабре того же года в институте была организована кафедра математического анализа, с которой связана вся трудовая жизнь Михаила Тихоновича.

В 1955 году Михаил Тихонович Терёхин с отличием окончил РГПИ, преподавал математику и физику в Ильинской средней школе Пронского района Рязанской области. В 1959 году после службы в Советской армии поступил в аспирантуру. Его научным руководителем был заслуженный деятель науки РСФСР, профессор Иринарх Петрович Макаров – ученик известного математика профессора В. В. Немыцкого, основатель рязанской научной школы по качественной теории дифференциальных уравнений. В 1965 году М. Т. Терёхин защитил в Куйбышевском государственном педагогическом институте кандидатскую диссертацию по результатам исследований предельных циклов систем на плоскости. В дальнейшем Михаил Тихонович активно занимался исследованиями по следующим направлениям: существование и оценка числа предельных циклов систем второго порядка; существование и бифуркации периодических, почти периодических и ограниченных решений в критических случаях; неподвижные точки операторов; ветвление решений нелинейных уравнений; управляемость систем с неуправляемой линейной частью; устойчивость решений; свойства решений и периодические краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений, в том числе уравнений с отклоняющимся аргументом, с максимумами; решение прикладных задач экономики, биологии, механики. В 1992 году Михаил Тихонович Терёхин защитил докторскую диссертацию в Санкт-Петербургском государственном университете. По результатам исследований им опубликовано свыше 200 работ.

С 1962 года он прошел все этапы работы от ассистента до Почетного профессора, был заведующим кафедрой математического анализа, деканом физико-математического факультета в родном вузе, преобразованном в Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина. Профессор М. Т. Терёхин более 40 лет являлся руководителем научной школы по теории дифференциальных уравнений и их приложений, поддерживающей связи с научными центрами Москвы, С.-Петербурга, Минска, Тулы, Перми, Ижевска, Нижнего Новгорода, Самары, Воронежа, Казани, Саранска, Тамбова, Твери. Под руководством Михаила Тихоновича Терёхина защищено 45 кандидатских диссертаций, один из его учеников защитил докторскую диссертацию. Ученики профессора Терёхина работают во всех вузах Рязани, а также в Астрахани, Барнауле, Белгороде, Бирске, Вологде, Курске, Москве, Чебоксарах, Уфе. Все с благодарностью и теплом вспоминают аспирантские годы: неповторимую атмосферу творческого поиска, совместные поездки на конференции, ежегодные выезды на природу с песнями у костра и традиционной ухой.

С Мордовским государственным университетом им. Н. П. Огарёва Михаила Тихоновича связывают долгие годы сотрудничества. В диссертационном совете Мордовского государственного университета, которым руководил профессор Е. В. Воскресенский, прошли защиту несколько аспирантов Михаила Тихоновича. В этом же совете профессор М. Т. Терёхин неоднократно выступал в качестве официального оппонента.

М. Т. Терёхин принимает активное участие в деятельности Средне-Волжского математического общества, возглавляет рязанское отделение общества. М. Т. Терёхин и его ученики регулярно участвуют в Международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, проводимых Мордовским государственным университетом им. Н. П. Огарёва и Средне-Волжским математическим обществом.

Профессор М. Т. Терёхин избран членом-корреспондентом Российской академии естественных наук, действительным членом Российской Академии естествознания. Он ведёт активную научно-организационную деятельность в качестве главного редактора сборника «Дифференциальные уравнения (качественная теория)» (1991–1997 гг.) и журнала «Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения» (1998–2012 гг.); ответственного редактора серии «Дифференциальные уравнения» журнала «Вестник РАЕН» (с 2013 г. по настоящее время), члена редколлегии журналов «Вестник Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина», «Журнал Средневолжского математического общества», «Известия Тульского государственного университета. Серия дифференциальные уравнения и прикладные задачи». Много лет он руководил еженедельным научно-исследовательским семинаром и научно-исследовательской лабораторией по качественной теории дифференциальных уравнений РГУ имени С. А. Есенина.

Педагогическая и научная деятельность профессора М. Т. Терёхина отмечена медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, другими правительственными, ведомственными и общественными наградами.

Михаил Тихонович Терёхин – интеллигентный и эрудированный человек, крупный специалист в области дифференциальных уравнений, преданно служащий своему делу.

Сердечно поздравляем Михаила Тихоновича с юбилеем! Желаем Михаилу Тихоновичу Терёхину доброго здоровья, семейного счастья и дальнейших творческих успехов!

В. В. Абрамов, Д. И. Бояркин, И. М. Буркин, К. В. Бухенский, О. В. Дружинина, Д. К. Егорова, Р. В. Жалнин, И. В. Ионова, А. Н. Коненков, А. Н. Куликов, А. Г. Кушнер, Е. Ю. Лискина, С. С. Мамонов, О. Н. Масина, А. К. Муртазов, А. Ю. Павлов, П. М. Симонов, А. О. Харламова, Т. Ф. Мамедова, С. М. Мурюмин, В. И. Сафонкин, Г. А. Смолкин, Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин, И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

– коды УДК и MSC 2010;

– название статьи;

– информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;

– аннотация;

– ключевые слова;

– текст статьи (на русском);

– список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными"(написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

— введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

— материалы и методы решения задачи и принятые допущения;

— результаты - основное содержание статьи;

— обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;

— заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журнале на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– Перевод заглавия статьи на английский язык;

– Название русскоязычного источника (транслитерация);

– [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– название книги (транслитерация);

– [Перевод названия книги в квадратных скобках];

– Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;

– Количество страниц в издании (250 p.);

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете amsbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте *https://translit.ru/ru/bgn/* можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ***ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка****, располагаться за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru.* ***ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*** *можно скачать из раздела* ***Полезные материалы*** *меню* ***Для автора*** *на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTex**.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo

matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

P. A. Shamanaev, ”[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Диссертации на русском языке:

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. … kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The text of the article should be prepared in TeX publishing system using LaTeX macroextension.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in Russian, then it should contain the following sections in Russian and English:

– UDC and MSC 2010 codes;

– article title;

– information about every author: full name, position, address of the organization, academic degree, ORCID, e-mail;

– abstract;

– keywords;

– text of the article (only in Russian);

– references (bibliography).

If the article is in English, the relevant sections are presented only in English. UDC code is not used.

The Subject Classification Index (MSC 2010) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of UDC and MSC 2010 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

– it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;

– do not include non-essential details;

– use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;

– the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;

– it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

Keywords should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

— introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;

— materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;

— results – the main content of the article;

— discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;

— conclusion — conclusions and recommendations.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

– Author(s) (transliteration);

– Translation of the article title into English;

– The name of the Russian-language source (transliteration);

– [Translation of the source name into English – paraphrase (for magazines one may not do it)];

– Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);

– An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

– Author(s) (transliteration);

– title of the book (transliteration);

– [Translation of the book's name in square brackets];

– Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;

– The number of pages in the book (250 p.);

– Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

References in Russian and English are made according to the citation style adopted for use in the field of mathematics by the American Mathematical Society (AMS) and the European Mathematical Union (Zentralblatt MATH, zbMATH). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the amsbib.sty style package.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website *https://translit.ru/ru/bgn/* you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

*References in Russian in text format, designed in accordance with the requirements of **GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link**, must be located behind the list of references in Russian and should be commented out. This list of references will be used when downloading the electronic version of the journal on the site elibrary.ru **GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link** can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** menu on the journal website.*

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTex system**.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Theses in Russian:

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – *http://www.miktex.org.*

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой **input** в файл-преамбулу. Например, **input{shamanaev.tex}**

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды **headerRus** и **headerEn**, соответственно.

Команда **headerRus** имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда **headerEn** имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда **headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **headerEn**.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **sect** с одним параметром: **sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **subsection**, **subsubsection** и **paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **proof** и **proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных бибилиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных бибилиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]

\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.

Статьи в журналах на английском языке:

\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Статьи в электронном журнале на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib5}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\serial 10

\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib6}
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
\publaddr Moscow
\publ Nauka Publ.
\yr 1966
\totalpages 576
\lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib8}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]
\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]
\proc Tezisy dokladov [Abstract]
\procinfo Suzdal, 6-11 July 2018
\pages 218–219
\lang In Russ.

Диссертации на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib9}
\by P. A. Shamanaev
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]
\publaddr Saransk
\yr 1997
\totalpages 145
\lang In Russ.

The rules for article layout in the LaTex system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – *http://www.miktex.org.*

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command **input** in the preamble file. For example, **input{shamanaev.tex}**

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English **headerRus** and **headerEn**, respectively.

The command **headerRus** has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors)} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command **headerEn** has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {Author1\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command **headerFirstEn** *with the same parameters as for the command* **headerEn**.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command **sect** with one parameter:**sect{Header}**

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands **subsection**, **subsubsection** and **paragraph**.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands \ **proof** and **proofend** (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands **label{label}** and **eqref{label}**, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked **label{ivanov14}**, Theorem 5 of this articles — **label{ivanovt5}**, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command **ref{label}**).

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture without a caption but indicating compression ratio

insertpicture{label}{file_name.eps}{degree_of_compression}

where **degree_of_compression** is a number from 0 to 1.

b) insert a numbered picture with the signature

\ **insertpicturewcap{label}{file_name.eps } {caption_of_the_figure }**

c) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio vskip 3mm noindent **insertpicturecapscale{label}{file_name.eps}{degree_of_compression } {caption}**

d) insert a picture without a number under the picture, but with a caption or without it

insertpicturenonum{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

RBibitem{label for a link to the source },

and every English reference – by a command

Bibitem{label for a link to the source }.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the command **cite** or **pgcite** (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' design for the *References* section using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1

\pages 145–151
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\serial 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6}
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
\publaddr Moscow
\publ Nauka Publ.
\yr 1966
\totalpages 576
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib8}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]
\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]
\proc Tezisy dokladov [Abstract]
\procinfo Suzdal, 6-11 July 2018
\pages 218–219
\lang In Russ.

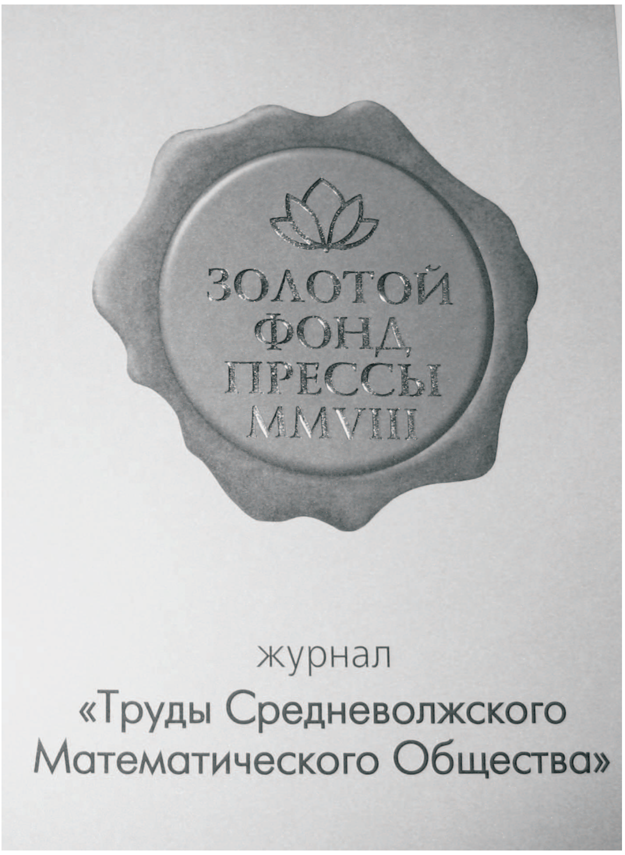
Theses in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib9}
\by P. A. Shamanaev
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]
\publaddr Saransk
\yr 1997
\totalpages 145
\lang In Russ.

Алфавитный указатель авторов

Author Index

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*
Редактор: *Язовцева О. С.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 06.03.2019. Дата выхода в свет 30.03.2019. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,9 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 526.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Shamanaev P. A.*
Editor: *Yazovtseva O. S.*
Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 06.03.2019. Date of publishing 30.03.2019. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,9.

Number of copies 100. Order no. 526.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

CBMO