

ISSN 2079 – 6900  
eISSN 2587 – 7496

**ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА**

**Middle Volga  
Mathematical Society Journal**

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  **20**  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  **1**

**2018**



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print), 2587-7496 (Online)

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 20, №1. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201801

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print), 2587-7496 (Online)

**Zhurnal Srednevolzhskogo  
Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 20, NO. 1. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201801

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединённом каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Петр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Логинов Борис Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Петр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Boris V. Loginov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Mahmud S. Salahitdinov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S. Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Head of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

- А. П. Жабко, О. Г. Тихомиров, О. Н. Чижова**  
Устойчивость асимптотического положения покоя возмущенных  
однородных нестационарных систем . . . . . 13

- Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, В. С. Медведев**  
Многомерные соленоидальные инвариантные множества седло-  
вого типа . . . . . 23

- Е. В. Ноздринова, О. В. Починка**  
О динамике бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги . . 30

- И. П. Рязанцева, О. Ю. Бубнова**  
Непрерывный метод второго порядка с постоянными коэффици-  
ентами для уравнений монотонного типа . . . . . 39

- Д. С. Талецкий**  
О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего  
максимальные независимые множества в полных деревьях . . . . . 46

- А. Н. Тында, Д. Н. Сидоров, И. Р. Муфтахов**  
Численный метод решения систем нелинейных интегральных  
уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами . . . . . 55

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

- О. В. Гермидер, В. Н. Попов**  
Математическое моделирование процессов переноса в цилиндри-  
ческом канале . . . . . 64

- Л. В. Ключкова, Ю. Н. Орлов, Р. В. Плешаков**  
Кинетическое уравнение для моделирования нестационарных  
неэквидистантных временных рядов . . . . . 78

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**Н. Д. Кузьмичев, И. В. Бурьянов, М. А. Васютин, А. Ю. Шитов**

Численное моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в толстый диск высокотемпературного сверхпроводника на основе алгоритма случайных блужданий . . . . . 88

---

**З. А. Хамидуллина, А. С. Исмагилова, С. И. Спивак**

Программная реализация алгоритма определения кинетического уравнения химической реакции . . . . . 96

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

Памяти Логинова Бориса Владимировича . . . . . 103

---

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

- A. P. Zhabko, O. N. Chizhova, O. G. Tikhomirov**  
Stability of the asymptotic quiescent position of perturbed homogeneous nonstationary systems . . . . . 13
- 
- E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, V. S. Medvedev**  
Many-dimensional solenoid invariant saddle-type sets . . . . . 23
- 
- E.V. Nozdrinova, O.V. Pochinka**  
On dynamics of bifurcation diffeomorphisms of a simple arc . . . . . 30
- 
- I. P. Ryazantseva**  
Continuous method of second order with constant coefficients for equations of monotone type . . . . . 39
- 
- D. S. Taletskii**  
Two results on a behavior of the solution of some recurrent equation 46
- 
- A. N. Tynda, D.N. Sidorov, I.R. Muftahov**  
Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels . . . . . 55
- 

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

- O. V. Germider, V. N. Popov**  
Mathematical modeling of transport processes in a cylindrical channel 64
- 
- L.V. Klochkova, Yu.N. Orlov, R.V. Pleshakov**  
Kinetic equation for simulation of non-stationary non-equidistant time-series. . . . . 78
- 

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

- N. D. Kuzmichev, I. V. Buryanov, M. A. Vasyutin, A. Yu. Shitov**  
Numerical modeling of the process of penetration of an external magnetic field into a thick disk-shaped of a high-temperature superconductors on the basis of the random walk algorithm . . . . . 88
-

<b>Z. A. Khamidullina, A. S. Ismagilova, S. I. Spivak</b> Software implementation of the algorithm for determining the kinetic equation of the chemical reaction . . . . .	96
--	----

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

IN MEMORY OF BORIS VLADIMIROVICH LOGINOV . . . . .	103
--	-----

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.13-22

УДК 517.9

**Устойчивость асимптотического положения покоя возмущенных однородных нестационарных систем**© А. П. Жабко<sup>1</sup>, О. Г. Тихомиров<sup>2</sup>, О. Н. Чижова<sup>3</sup>

**Аннотация.** В статье получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя для однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде исчезающих со временем функций. Метод доказательства основан на построении функции Ляпунова, которая удовлетворяет условиям доказанной В. И. Зубовым теоремы о существовании асимптотического положения покоя. Рассмотрен пример системы нелинейных и нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений, который иллюстрирует полученные результаты.

**Ключевые слова:** асимптотическое положение покоя, асимптотическая устойчивость, нестационарные дифференциальные уравнения, однородные дифференциальные уравнения, почти периодические функции, равномерное среднее

**1. Введение**

Понятие асимптотического положения покоя было введено В. И. Зубовым в работе [1]. При исследовании систем, не имеющих нулевого решения, актуальным является изучение поведения решений, начинающихся в достаточно малой окрестности нуля. Были получены достаточные условия [1]–[2] для указанных систем и рассмотрен случай системы стационарных однородных дифференциальных уравнений под воздействием стремящейся к нулю функции. Нестационарные однородные системы, для которых существует среднее, были рассмотрены в работах [3]–[4]. Для данных систем были приведены [5] достаточные условия существования асимптотического положения покоя под воздействием аналогичных возмущений. В настоящей работе рассмотрены обобщения ранее полученных результатов на случай более широкого класса возмущающих функций; получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя для систем с малым параметром. Рассмотрен пример, показывающий роль малого параметра в поведении решений.

<sup>1</sup> **Алексей Петрович Жабко**, профессор кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6379-0682>, zhabko.apmath.spbu@mail.ru

<sup>2</sup> **Олег Геннадьевич Тихомиров**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2321-5525>, olegtikhomirov@mail.ru

<sup>3</sup> **Ольга Николаевна Чижова**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9251-9915>, chizhovolg@yandex.ru

## 2. Постановка задачи

Приведем определение асимптотического положения покоя [1].

**О п р е д е л е н и е 2.1** *Положение  $x = 0$  будем называть асимптотическим положением покоя для системы траекторий, определяемых дифференциальными уравнениями*

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (2.1)$$

*если существует некоторая окрестность положения  $x = 0$ ,  $\|x\| < \varepsilon$  такая, что любое решение*

$$x = x(t, x_0, t_0)$$

*системы (2.1), начинающееся в этой окрестности при  $t = t_0$ ,  $t_0 \geq 0$ , будет ограничено при  $t \geq t_0$ , а, кроме того,*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим две системы следующего вида:

$$\dot{x} = F^\mu(t, x) + G(t, x), \quad (2.2)$$

$$\dot{x} = F^\mu(t, x) + \nu G(t, x), \quad (2.3)$$

где  $F^\mu(t, x)$  – однородная по  $x$  функция порядка  $\mu > 1$ , определенная при  $t \in [0, +\infty)$  и  $x \in E^n$ . Будем считать, что вещественная функция  $G(t, x)$  задана и непрерывна по  $t$ , непрерывно дифференцируема по  $x$  при  $t \in [0, +\infty)$  и  $x \in E^n$ ,  $\nu$  – вещественная постоянная. Кроме того,

$$G(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{x} 0 \quad (2.4)$$

во всякой ограниченной области, содержащей точку  $x = 0$ . Невозмущенной системой для (2.2) и (2.3) будем называть

$$\dot{x} = F^\mu(t, x). \quad (2.5)$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения относительно функции  $F^\mu(t, x)$ . Пусть она является непрерывной по  $t$  и непрерывно дифференцируемой по  $x$ . Кроме того, найдутся постоянные  $\alpha > 0$  и  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , такие, что при любых  $t$  и  $x$  из области определения выполняются следующие неравенства

$$\|F^\mu(t, x)\| \leq \alpha \|x\|^\mu, \quad (2.6)$$

$$\left\| \frac{\partial F^\mu(t, x)}{\partial x_i} \right\| \leq \beta_i \|x\|^{\mu-1}. \quad (2.7)$$

Также будем считать, что для функции  $F^\mu(t, x)$  существует среднее

$$\tilde{F}^\mu(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F^\mu(\tau, x) d\tau, \quad (2.8)$$

причем имеет место равномерная сходимость по  $(t, x) \in [0, +\infty) \times \{\|x\| \leq 1\}$ . В этом случае усредненная система для невозмущенной системы (2.5) будет иметь вид

$$\dot{x} = \tilde{F}^\mu(x). \quad (2.9)$$

Далее предположим, что функция  $\tilde{F}^\mu(x)$  является дважды непрерывно дифференцируемой, а система (2.9) асимптотически устойчива по Ляпунову. В этом случае [6] для данной системы найдется функция Ляпунова, непрерывно дифференцируемая столько же раз, как и функция  $\tilde{F}^\mu(x)$ .

Для того чтобы система (2.1) имела асимптотическое положение покоя, необходимо [1], чтобы выполнялись условия следующей теоремы.

**Т е о р е м а 2.1** *Если:*

1) найдется функция  $V(t, x_1, \dots, x_n)$  – положительно-определенная и

$$V \underset{x \rightarrow 0}{\overset{t}{\rightrightarrows}} 0 \text{ при } t \geq 0;$$

2) полная производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i = W + W_1,$$

определяемая в силу системы (2.1), обладает такими свойствами: функция  $W = W(t, x_1, \dots, x_n)$  – отрицательно-определенная, функция  $W_1 = W_1(t, x_1, \dots, x_n)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $x_1, \dots, x_n$  во всякой ограниченной области, содержащей точку  $x = 0$ ;

3) существуют числа  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ,  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  такие, что

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon_2} V(t, x) > \sup_{\|x\|=\varepsilon_1} V(t, x) \text{ для всех } t \geq 0$$

и  $W + W_1 < 0$  при  $\varepsilon_1 \leq \|x\| < \varepsilon_2$ ,  $t \geq 0$ , то положение  $x = 0$  есть асимптотическое положение покоя.

Также для доказательства потребуется следующая лемма.

**Л е м м а 2.1** [4] *Если для определенной, кусочно непрерывной по  $t \in (-\infty, +\infty)$ , непрерывной по  $x \in E^n$  и однородной по  $x$  порядка однородности  $\mu > 1$  функции  $f^\mu(t, x)$  выполнены условия:*

$$|f^\mu(t, x)| \leq M \|x\|^\mu,$$

где  $M$  – неотрицательная постоянная;

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f^\mu(\tau, x) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow +\infty \quad (2.10)$$

равномерно по  $(t, x) \in (-\infty, +\infty) \times \{\|x\| \leq 1\}$ , то будет верна оценка

$$\left| \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} f^\mu(\tau, x) d\tau \right| \leq \varphi(\varepsilon) \|x\|^\mu, \quad (2.11)$$

где  $\varphi(\varepsilon) \geq 0$  и  $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя

**Т е о р е м а 3.1** Если нулевое решение системы (2.9) асимптотически устойчиво по Ляпунову и выполнены указанные выше условия (2.4), (2.6), (2.7) и (2.8), то существует величина  $\Delta > 0$  такая, что при  $|\nu| < \Delta$  система (2.3) имеет асимптотическое положение покоя в точке  $x = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из устойчивости усредненной невозмущенной системы (2.9) следует [6], что существуют однородная порядка  $m$  положительно-определенная функция  $\tilde{V}(x)$  и положительно-определенная однородная функция  $\tilde{W}(x)$  порядка  $m + \mu - 1$ , связанные равенством

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \tilde{F}^\mu(x) = -\tilde{W}(x).$$

Кроме того, как мы предположили выше, функция  $\tilde{V}(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая. Для решения задачи используем функцию Ляпунова, которая строится на основе функции Ляпунова для усредненной системы

$$V(t, x) = \tilde{V}(x) + \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau.$$

Поскольку  $\tilde{V}(x)$  и  $\tilde{W}(x)$  – однородные функции порядков  $m$  и  $m + \mu - 1$  соответственно, имеют место оценки:

$$\begin{aligned} a_2 \|x\|^m &\geq \tilde{V}(x) \geq a_1 \|x\|^m, \\ b_2 \|x\|^{m+\mu-1} &\geq \tilde{W}(x) \geq b_1 \|x\|^{m+\mu-1}, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – положительные постоянные. Используя эти оценки, свойства однородных функций и (2.6), получим следующее неравенство:

$$V(t, x) \leq a_2 \|x\|^m + \frac{c}{\varepsilon} \|x\|^{m+\mu-1},$$

где  $c$  – положительная постоянная. Очевидно, что  $V \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  при  $t \geq 0$ . Дифференцируя  $V(t, x)$ , в силу системы (2.3), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(t, x)}{dt} \right|_{(2.3)} &= \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} F^\mu(t, x) + \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \nu G(t, x) + \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \tilde{F}^\mu(x) - \\ &- \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} F^\mu(t, x) - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} [F^\mu(t, x) + \nu G(t, x)]. \end{aligned}$$

Упростив данное равенство, получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(t, x)}{dt} \right|_{(2.3)} &= -\tilde{W}(x) + \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \nu G(t, x) - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} [F^\mu(t, x) + \nu G(t, x)]. \end{aligned}$$

Проверим выполнение второго условия теоремы:

$$\begin{aligned}
 W &= -\tilde{W}(x) - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} F^\mu(t, x), \\
 W_1 &= \nu \left[ \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} \right] G(t, x), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Используя условия (2.4), (2.6) и (2.7) запишем, что  $W_1 \rightarrow 0$  равномерно по  $x$  на любом ограниченном множестве при  $t \rightarrow +\infty$ . Если в качестве  $f^{m+\mu-1}(t, x)$  взять функцию

$$\begin{aligned}
 f^{m+\mu-1}(t, x) &= 0, \quad t < 0, \\
 f^{m+\mu-1}(t, x) &= \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) \left( \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(t, x) \right), \quad t \geq 0,
 \end{aligned}$$

то для нее, в силу предельного соотношения (2.8), справедливо условие (2.10). Следовательно, выполнены условия леммы и, таким образом, из неравенства (2.11) получим

$$\left| \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right| \leq \eta(\varepsilon) \|x\|^{m+\mu-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Используя свойства (2.4), (2.6), построим оценку следующего вида:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[ \tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} F^\mu(t, x) \right| \leq d \|x\|^{m+2\mu-2}.$$

После этого выберем величины  $\varepsilon$  и  $\delta$  такие, чтобы при  $\|x\| \leq \delta$  выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned}
 a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \|x\|^{\mu-1} &> 0, \\
 -b_1 + \eta(\varepsilon) + d \|x\|^{\mu-1} &< 0.
 \end{aligned}$$

Это возможно в силу теоремы и условия (3.2). Тогда  $V(t, x)$  положительно определена, а  $W(t, x)$  отрицательно определена. Осталось убедиться в том, что выполняется третье условие теоремы 2.1. Покажем, что существуют такие числа  $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ,  $n_1 < n_2$ , что неравенство

$$\inf_{\|x\|=n_2} V(t, x) > \sup_{\|x\|=n_1} V(t, x), \text{ справедливо для всех } t \geq 0.$$

Для величин в правой и левой частях последнего неравенства можно построить оценки:

$$\inf_{\|x\|=n_2} V(t, x) \geq n_2^m \left[ a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right], \quad \sup_{\|x\|=n_1} V(t, x) \leq n_1^m \left[ a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right].$$

Следует отметить, что величина  $\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}$  зафиксирована и равна некоторой константе. Таким образом, достаточно найти такие  $0 < n_1 < n_2$ , чтобы выполнялось неравенство:

$$n_1^m \left[ a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right] < n_2^m \left[ a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right].$$

Будем искать их в множестве  $n_2 < \delta$ . В этом случае требуемое неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{\left[ a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right]}{\left[ a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right]} < \left[ \frac{n_2}{n_1} \right]^m. \quad (3.3)$$

Дробь в левой части неравенства (3.3) стремится к  $a_2/a_1$  при  $n_1, n_2 \rightarrow 0$ . Поэтому для произвольного  $\tilde{\varepsilon} > 0$  можно выбрать такое достаточно малое  $\tilde{\delta}$ , что при  $n_1, n_2 < \tilde{\delta}$  будет выполняться включение

$$\frac{\left[ a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right]}{\left[ a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right]} \in \left[ \frac{a_2}{a_1} - \tilde{\varepsilon}, \frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon} \right].$$

Рассмотрим неравенство  $\frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon} < \left[ \frac{n_2}{n_1} \right]^m$ , которое выполняется при  $n_1 < \frac{n_2}{\sqrt[m]{\frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon}}}$ . Теперь выберем  $n_2 < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ ,  $n_1 < \min\{\tilde{\delta}, \frac{n_2}{\sqrt[m]{\frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon}}}\}$ . Очевидно такие  $n_1, n_2$  существуют, и для них выполняется цепочка неравенств

$$\left[ \frac{n_2}{n_1} \right]^m > \frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon} \geq \frac{\left[ a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right]}{\left[ a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right]}.$$

Таким образом, условие (3.3) выполнено и  $n_2 < \delta$ . Далее будем считать, что параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  выбраны таким образом, чтобы при  $\|x\| \leq \delta$

$$-b_1 + \eta(\varepsilon) + d\|x\|^{\mu-1} < -\frac{h}{2},$$

где  $h$  – некоторая положительная постоянная. Тогда при  $n_1 \leq \|x\| \leq n_2$ ,

$$W < -\frac{h}{2} \|x\|^{m+\mu-1} \leq -\frac{h}{2} n_1^{m+\mu-1}.$$

Выберем  $\Delta$  таким образом, чтобы при  $n_1 \leq \|x\| \leq n_2$  и  $t \geq 0$  было справедливым неравенство:

$$W_1 \leq \frac{h}{2} n_1^{m+\mu-1}. \quad (3.4)$$

Очевидно, это возможно в силу условий (2.4), (2.6) и (2.7). Тогда будет справедливо неравенство  $W + W_1 < 0$ . Третье условие теоремы 2.1 доказано. Следовательно [1], у системы (2.3) есть асимптотическое положение покоя в точке  $x = 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.1** Следует отметить, что наличие малого параметра носит существенный характер. Для системы (2.2) точка  $x = 0$  при  $t_0 = 0$  может не входить в область притяжения. Ниже будет рассмотрен пример, подтверждающий данное утверждение.

**Т е о р е м а 3.2** Для системы (2.2) существует  $t_0$  такое, что точка  $x = 0$  будет включена в область притяжения при  $t \geq t_0$ .

**Доказательство.** Выберем  $t_0$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство (3.4). Это можно сделать в силу (2.4) и (3.1) при  $\nu = 1$ . Тогда с помощью замены  $\tau = t + t_0$  получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}^\mu(\tau, x) + \tilde{G}(\tau, x), \quad (3.5)$$

где  $\tilde{F}^\mu(\tau, x) = F^\mu(t + t_0, x)$ ,  $\tilde{G}(\tau, x) = G(t + t_0, x)$ . Для системы (3.5) верны все условия доказанной выше теоремы 3.1. Наличие малого параметра уже не является необходимым, т. к. условие (3.4) выполнено. Таким образом,  $x = 0$  является асимптотическим положением покоя. Отсюда следует, что для исходной системы (2.2) все решения из некоторой окрестности нулевой точки будут стремиться к нулю при  $t \geq t_0$ . Следствие доказано.

#### 4. Пример системы с асимптотическим положением покоя

**Пример 4.1** Приведем пример, иллюстрирующий полученные результаты. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + \varphi(t)y^3 + \nu \frac{e^y}{t+1}, \\ \dot{y} &= -y^3 + \psi(t)x^3 + \nu \frac{e^x}{t^2+1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

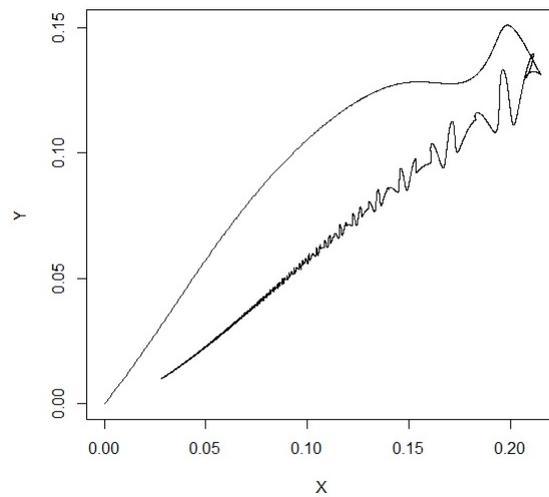
В качестве функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  возьмем следующие почти периодические функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \cos(\sqrt{2}t) + \sin(t), \\ \psi(t) &= \sin(\sqrt{2}t) + \cos(t). \end{aligned}$$

Известно [7], что для них существует равномерное среднее и будет выполнено условие (2.8). Усредненная невозмущенная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3, \\ \dot{y} &= -y^3. \end{aligned}$$

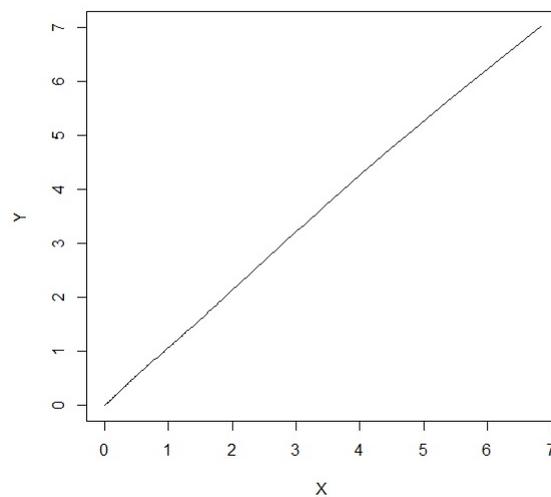
Очевидно, что нулевое решение для нее является асимптотически устойчивым. Для исходной системы (4.1) выполнены все условия теоремы 3.1. Рассмотрим траектории решений, начинающихся в точке  $(0, 0)$ , при различных начальных данных и значениях параметра  $\nu$  (Рис. 4.1).



Р и с у н о к 4.1

Траектория при  $t_0 = 0$  и  $\nu = 0.1$ 

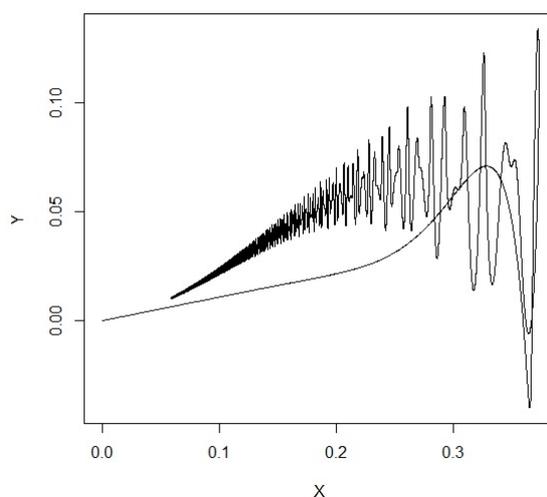
Из рисунка видно, что при данных значениях траектория начинается в нулевой точке, отдаляется от нее, а затем возвращается к ней с течением времени. Можно показать, что система имеет асимптотическое положение покоя (Рис. 4.2).



Р и с у н о к 4.2

Траектория при  $t_0 = 0$  и  $\nu = 1$ 

График показывает, что система перестает иметь асимптотическое положение покоя при увеличении параметра  $\nu$ . Это следует из того, что решение, начинающееся в нулевой точке, отдаляется от нее и не возвращается с течением времени.



Р и с у н о к 4.3

Траектория при  $t_0 = 10$  и  $\nu = 1$ 

Из траектории (Рис. 4.3) видно, что точка  $(0, 0)$  попадает в область притяжения при увлечении  $t_0$ . График имеет сходство с изображенным на Рис. 4.1. Другими словами, решение, начинающееся в нулевой точке, отдаляется от нее, но с течением времени приближается к ней снова. Можно сказать, что система будет иметь асимптотическое положение покоя начиная с некоторого  $t_0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Зубов, *Колебания и волны*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1989, 415 с.
2. С. Е. Купцова, “Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений”, *Труды Средневолжского математического общества*, **8:1** (2006), 235–243.
3. А. Ю. Александров, *Устойчивость движений неавтономных динамических систем*, Изд-во С.-Петербур. ун-та, СПб., 2004, 183 с.
4. О. Г. Тихомиров, “Устойчивость однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вестник СПбГУ*, **10:3** (2007), 123–192.
5. О. Г. Тихомиров, Е. В. Темкина, “Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений”, *Вестник СПбГУ*, **10:3** (2014), 58–65.
6. В. И. Зубов, *Устойчивость движения*, Высшая Школа, М., 1973, 272 с.
7. Н. А. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company, Chelsea, 1947, 113 p.

Поступила 10.01.2018

MSC2010 34D05

# Stability of the asymptotic quiescent position of perturbed homogeneous nonstationary systems

© A. P. Zhabko <sup>4</sup>, O. G. Tikhomirov <sup>5</sup>, O. N. Chizhova <sup>6</sup>

**Abstract.** Sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position for homogeneous non-stationary systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of functions that disappear with time are obtained in this article. The method of proof is based on the construction of the Lyapunov function, which satisfies the conditions of the theorem proved by V. I. Zubov for the existence of an asymptotic quiescent position. An example of a system of non-linear and non-stationary ordinary differential equations is considered, which illustrates the obtained results.

**Key Words:** asymptotic quiescent position, asymptotic stability, non-autonomous differential equations, homogeneous differential equation, almost periodic functions, almost uniform average.

## REFERENCES

1. V. I. Zubov, *Kolebaniya i volny [Oscillations and waves]*, Leningrad University Publ., Leningrad, 1989 (In Russ.), 415 p.
2. S. E. Kuptsova, “[On the asymptotic behavior of solutions of systems of nonlinear nonstationary differential equations]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **8**:1 (2006), 235–243 (In Russ.).
3. A. Yu. Aleksandrov, *[Stability of motions of nonautonomous dynamical systems]*, Saint-Petersburg University Publ., Saint-Petersburg, 2004 (In Russ.), 183 p.
4. O. G. Tikhomirov, “[Stability of homogeneous nonstationary systems of ordinary differential equations]”, *Vestnik SPbGU*, **10**:3 (2007), 123–192 (In Russ.).
5. O. G. Tikhomirov, E. V. Temkina, “[Asymptotic quiescence position for systems of homogeneous non-stationary differential equations]”, *Vestnik SPbGU*, **10**:3 (2014), 58–65 (In Russ.).
6. V. I. Zubov, *[Stability of motion]*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 272 p.
7. H. A. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company, Chelsea, 1947, 113 p.

Submitted 10.01.2018

---

<sup>4</sup> **Aleksei P. Zhabko**, Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6379-0682>, zhabko.apmath.spbu@mail.ru

<sup>5</sup> **Oleg G. Tikhomirov**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2321-5525>, olegtikhomirov@mail.ru

<sup>6</sup> **Olga N. Chizhova**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9251-9915>, chizhovolg@yandex.ru

УДК 517.938

## Многомерные соленоидальные инвариантные множества седлового типа

© Е. В. Жужома<sup>1</sup>, Н. В. Исаенкова<sup>2</sup>, В. С. Медведев<sup>3</sup>

**Аннотация.** В статье мы строим пример гладкого диффеоморфизма замкнутого многообразия, который имеет одномерное (в топологическом смысле) соленоидальное базисное множество с устойчивым инвариантным многообразием произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности и устойчивым инвариантным многообразием произвольной размерности, большей или равной двум. Базисное множество имеет седловой тип (не является ни аттрактором, ни репеллером). Кроме этого, построенный диффеоморфизм имеет положительную топологическую энтропию и в некоторой окрестности одномерного соленоидального базисного множества является консервативным (другими словами, якобиан диффеоморфизма в этой окрестности равен единице). Конструкция, представленная в данной статье, позволяет построить диффеоморфизм с указанными свойствами на многообразии, диффеоморфном прямому произведению окружности на сферу коразмерности один.

**Ключевые слова:** дискретная динамическая система, базисное множество, соленоид, сепаратор, топологическая энтропия.

### 1. Введение

Соленоиды изучаются в различных разделах математики, например, в топологии, теории групп, теории динамических систем и многих других. Соленоид как инвариантное множество некоторой динамической системы впервые был упомянут в книге [1], где использовался для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящего из почти периодических траекторий.

Соленоид в топологию был введен в [2], где рассматривался как пример однородного множества (локальная структура одинакова во всех точках), для которого не была применима стандартная теория гомологий и когомологий. Независимо было введено понятие соленоида как компактной абелевой топологической группы [3]. Приведем наиболее распространенное определение соленоида: пересечение последовательности вложенных друг в друга полноториев, таких, что для оси любого предыдущего полнотория ось последующего монотонно прокручивается вокруг нее несколько раз, не образуя крючков [4]. С топологической точки зрения соленоид является неразложимым континуумом, который нельзя вложить в поверхность [5]–[6].

<sup>1</sup> **Жужома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, zhuzhoma@mail.ru

<sup>2</sup> **Исаенкова Наталья Викторовна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГКОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское ш., д. 3, бокс 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4880-3526>, nisaenkova@mail.ru

<sup>3</sup> **Медведев Вячеслав Сергеевич**, научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6369-0000>, vmedvedev@hse.ru

С. Смейл ввел соленоиды в гиперболическую теорию динамических систем. Им были построены примеры структурно устойчивых и  $\Omega$ -устойчивых диффеоморфизмов с притягивающими инвариантными множествами (растягивающимися аттракторами); основные факты, определения теории динамических систем см. в [7]–[11]. Схематично пример Смейла [12] можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, а затем сжатие в направлении, перпендикулярном оси. После этого полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория с сохранением дисковой структуры. Такие отображения часто встречаются при изучении бифуркаций седло-узловых циклов [10], [13]. Из работы [14], а также [15]–[16] следует, что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до некоторого диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме Смейла, замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами (одно – аттрактор, а второе – репеллер).

В статье мы строим пример диффеоморфизма, который имеет одномерное соленоидальное базисное множество с неустойчивым и устойчивым инвариантными многообразиями произвольной ненулевой (наперед заданной) размерности. Базисное множество имеет седловой тип, т. е. не является ни аттрактором, ни репеллером. Кроме этого построенный диффеоморфизм имеет положительную топологическую энтропию и в некоторой окрестности базисного множества является консервативным. Основная теорема представляет собой обобщением основных результатов работ [17]–[18].

**Т е о р е м а 1.1** *Для любых натуральных чисел  $n \geq 3$  и  $1 \leq k \leq n-1$  существует  $A$ -диффеоморфизм  $F : M^n \rightarrow M^n$  некоторого замкнутого многообразия  $M^n$  такого, что неблуждающее множество  $NW(F)$  диффеоморфизма  $F$  содержит одномерное базисное множество  $\Lambda$ , являющееся топологическим соленоидом, с размерностями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий  $\dim W^s(x) = k$ ,  $\dim W^u(x) = n-k+1$  соответственно для всех точек  $x \in \Lambda$ . Более того,  $F$  имеет положительную топологическую энтропию, и в некоторой окрестности множества  $\Lambda$  якобиан диффеоморфизма  $F$  равен единице.*

## 2. Основная конструкция

В этом параграфе мы приводим построение диффеоморфизма  $F$  и показываем, что он обладает требуемыми свойствами. Для общности, в построении присутствует параметр  $\lambda$ . Поэтому ниже  $F$  будет обозначаться через  $F_\lambda$ .

Для числа  $a > 0$  будем обозначать через

$$I_a^m = [-a; a]^m = \underbrace{[-a; a] \times \cdots \times [-a; a]}_{m \text{ множителей}}$$

$m$ -мерный куб евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$ , наделенного координатами  $(x_1, \dots, x_m)$ . Зафиксируем натуральные числа  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $n \geq 3$ , и действительное число  $\lambda > 1$ . Рассмотрим диффеоморфизм

$$\psi_\lambda : I_1^n = I_1^k \times I_1^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ вида } (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}} x_1, \dots, \frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}} x_k, \sqrt[n-k]{\lambda} \cdot x_{k+1}, \sqrt[n-k]{\lambda} \cdot x_n \right).$$

Ясно, что  $\psi_\lambda(I_1^n) = I_{\frac{1}{\sqrt[k]{2\lambda}}}^k \times I_{\sqrt[n-k]{\lambda}}^{n-k}$ , и якобиан отображения  $\psi_\lambda$  равен  $J(\psi_\lambda) = \frac{1}{2}$ .

Для определения диффеоморфизма  $F_\lambda$  нам понадобится модификация отображения, известного как подкова Смейла [12]. Напомним, что классическая подкова Смейла представляет собой диффеоморфизм некоторого достаточно большого круга плоскости  $\mathbb{R}^2$  в себя, который содержит квадрат  $K = D_0^2$ . Диффеоморфизм  $w : D_0^2 = D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  квадрата есть композиция сжатия вдоль оси  $Ox$ , растяжения вдоль оси  $Oy$ , сгибания полученного прямоугольника и сдвига так, чтобы пересечение  $D^2 \cap w(D^2)$  представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси  $Oy$ . Иногда подкова определяется как диффеоморфизм квадрата, который затем продолжается на плоскость. Известно, что  $w$  можно продолжить до отображения всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности  $D^2$  [8].

Обозначим через  $C : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  отображение, которое является центральной симметрией на множителе  $\mathbb{R}^k$  и тождественным отображением на множителе  $\mathbb{R}^{n-k}$ . Следуя конструкции Смейла, обозначим через  $w_\lambda : I_1^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  композицию отображения  $\psi_\lambda$ , сгиба  $n$ -мерного параллелепипеда  $I_{\frac{1}{\sqrt[2k]{2\lambda}}}^k \times I_{\frac{1}{\sqrt[2k]{\lambda}}}^{n-k}$  и некоторого сдвига вида  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + \alpha_1, \dots, x_k + \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  так, чтобы  $w_\lambda(I_1^n)$  и  $C \circ w_\lambda(I_1^n)$  образовали две непересекающиеся конфигурации:  $P$  и  $C(P)$  – подковы Смейла соответственно. Чтобы выполнялось последнее условие, достаточно подобрать сдвиг  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + \alpha_1, \dots, x_k + \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  так, чтобы  $w_\lambda(I_1^n)$  и  $C \circ w_\lambda(I_1^n)$  не пересекались (очевидно, это можно сделать). Аналогично двумерному случаю можно показать, что диффеоморфизм  $w_\lambda$  продолжается до некоторого диффеоморфизма (его также обозначим  $w_\lambda$ )  $n$ -мерного шара

$$D^n \supset \left( I_1^n \cup \left( I_{\frac{1}{\sqrt[2k]{2\lambda}}}^k \times I_{\frac{1}{\sqrt[2k]{\lambda}}}^{n-k} \right) \right) \cup w_\lambda(I_1^n) \cup (C \circ w_\lambda(I_1^n)) = D_0^n,$$

тождественного на границе  $\partial D^n$  шара  $D^n$ .

Обозначим через  $I(\mathbb{R}^n)$  группу изотопных тождественному диффеоморфизмов евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , которые консервативны на множестве  $D_0$ . В силу изотопности тождественному можно считать (использував, если необходимо, больший шар  $D^n$ ), что диффеоморфизмы группы  $I(\mathbb{R}^n)$  равны тождественному отображению вне  $D^n$ . Возьмем в группе  $I(\mathbb{R}^n)$  простой гладкий путь  $S_t \in Iso(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , такой, что  $S_0 = id$  представляет собой тождественное отображение и  $S_1 = C$ . Другими словами,  $S_t$  является гладкой изотопией в группе  $I(\mathbb{R}^n)$  от тождественного отображения к отображению  $S_1 = C$ . Поскольку  $w_\lambda(I_1^n) \cap C \circ w_\lambda(I_1^n) = \emptyset$ , то получаем равенство

$$w_\lambda(I_1^n) \cap S_1 \circ w_\lambda(I_1^n) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Фактор-пространство  $[0; 1]/(0 \sim 1) = S^1$  является окружностью, на которой фактор-отображение  $[0; 1] \rightarrow [0; 1]/(0 \sim 1) = S^1$  индуцирует циклическую координату  $t \pmod 1$ . Учитывая равенство  $C(D^n) = D^n$ , рассмотрим фактор-пространство

$$K = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (t; S_t(D^n)) / (S_0(D^n) = S_1(D^n)),$$

в котором  $(0; S_0(D^n))$  отождествляется с  $(1; S_1(D^n))$ . Поскольку каждый диффеоморфизм  $S_t$  изотопен тождественному,  $K$  гомеоморфно прямому произведению  $S^1 \times D^n$ . Более того, из равенства  $S_t(D^n) = D^n$  следует включение  $K \subset S^1 \times D^n$ . В множестве  $K$  выделим подмножество

$$K_0 = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (t; S_t(I_1^n)) / (S_0(I_1^n) = S_1(I_1^n)) \subset K,$$

гомеоморфное  $S^1 \times I_1^n$ .

Для  $t \in S^1$  положим  $D_t^n = \{t\} \times S_t(D^n) \subset K \subset S^1 \times D^n$ ,  $I_t^n = \{t\} \times S_t(I_1^n) \subset S^1 \times D^n$ . Отображение  $E_2 : S^1 \rightarrow S^1$  вида  $t \rightarrow 2t \bmod 1$  является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два. Определим отображение  $F_\lambda : S^1 \times D^n \rightarrow S^1 \times D^n$ . Для любых  $t \in [0; 1)$  и  $z \in D_t^n = \{t\} \times S_t(D^n)$  положим

$$F_\lambda(t; z) = (E_2(t); S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(z)), \quad t \in [0; 1), \quad z \in D_t^n.$$

Заметим, что выполняется следующее включение:  $F_\lambda(t, I_t^n) \subset D_{2t \bmod 1}^n = D_{E_2(t)}^n$ . Ограничение отображения  $F_\lambda$  на  $S^1 \times I_1^n \subset S^1 \times D^n$  будем обозначать также через  $F_\lambda$ .

Покажем, что отображение  $F_\lambda : S^1 \times I_1^n \rightarrow F_\lambda(S^1 \times I_1^n) \subset S^1 \times D^n$  является диффеоморфизмом на свой образ. Предположим противное:  $F_\lambda(t_1; z_1) = F_\lambda(t_2; z_2)$  для некоторых  $t_1, t_2 \in S^1$ , и  $z_1 \in S_{t_1}(I_1^n)$ ,  $z_2 \in S_{t_2}(I_1^n)$ . Тогда  $F_\lambda(t_1, S_{t_1}(I_1^n)) \cap F_\lambda(t_2, S_{t_2}(I_1^n)) \neq \emptyset$ . Из определения  $F_\lambda$  вытекает равенство  $E_2(t_2) = E_2(t_1)$ , т. е.,  $2t_1 \bmod 1 = 2t_2 \bmod 1$ . Поскольку отображение  $w_\lambda$  является диффеоморфизмом на свой образ, то можно считать  $0 \leq t_1 \neq t_2 \leq 1$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда  $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ . Далее для простоты записей будем считать  $t_1 = t$ . Тогда  $F_\lambda(t, S_t(I_1^n)) = (E_2(t), S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(I_1^n))$ . Поэтому, в силу предположения,

$$S_{E_2(t)} \circ w_\lambda \circ S_t^{-1}(S_t(I_1^n)) \cap S_{E_2(t+\frac{1}{2})} \circ w_\lambda \circ S_{t+\frac{1}{2}}^{-1}(S_{t+\frac{1}{2}}(I_1^n)) \neq \emptyset$$

и  $S_{E_2(t)} \circ w_\lambda(I_1^n) \cap S_{E_2(t+\frac{1}{2})} \circ w_\lambda(I_1^n) \neq \emptyset$ ,  $S_{E_2(t+\frac{1}{2})} S_{E_2(t)} \circ S_1$ , получаем  $w_\lambda(I_1^n) \cap S_1 \circ w_\lambda(I_1^n) \neq \emptyset$ , что противоречит (2.1). Это доказывает, что отображение  $F_\lambda : S^1 \times I_1^n \rightarrow F_\lambda(S^1 \times I_1^n) \subset S^1 \times D^n$  является диффеоморфизмом на свой образ.

В силу построения  $n$ -мерный диск  $\{0\} \times D^n = D_0^n$  инвариантен относительно  $F_\lambda$ , и ограничение  $F_\lambda$  на  $\{0\} \times I_1^n$  представляет собой модификацию классической подковы Смейла. Обозначим через  $\Omega_0$  нетривиальное (нигде не плотное) нульмерное базисное множество ограничения  $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n} : \{0\} \times I_1^n \rightarrow D_0^n$ . Тогда  $F_\lambda$  имеет одномерное соленоидальное базисное множество  $\Lambda$ , гомеоморфное  $S^1 \times \Omega_0$ . Поскольку  $E_2 : S^1 \rightarrow S^1$  является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два, то якобиан отображения  $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n}$  равен  $2 \cdot J(w_\lambda) = 1$ . Следовательно,  $F_\lambda$  консервативен в некоторой окрестности множества  $\Lambda$ .

Очевидно, что  $F_\lambda : S^1 \times D^n \rightarrow S^1 \times D^n$  аналогичен ограничению диффеоморфизма Смейла-Виеториса на базовое многообразие [19]. Поэтому если отождествить границы копий многообразия  $S^1 \times D^n$  с помощью естественного диффеоморфизма  $\partial(S^1 \times D^n) = S^1 \times S^{n-1} \rightarrow S^1 \times S^{n-1}$ , то получится многообразие  $M^{n+1} = S^1 \times S^n$ , а  $F_\lambda$  будет продолжаться на  $M^{n+1}$  до некоторого А-диффеоморфизма (обозначим также через  $F_\lambda$ ), который имеет одномерное соленоидальное базисное множество  $\Lambda$ . В силу конструкции  $\dim W^s(x) = k$ ,  $\dim W^u(x) = n - k + 1$  соответственно для всех точек  $x \in \Lambda$ .

Осталось показать, что  $F_\lambda$  имеет положительную топологическую энтропию. Действительно, хорошо известно, что отображение  $F_\lambda|_{\{0\} \times I_1^n}$  с подковой Смейла имеет положительную топологическую энтропию [8]–[9], [12]. Отсюда и [20] вытекает требуемый результат. Это завершает доказательство теоремы.

*Благодарности.* Работа проведена при финансовой поддержке РФФ (проект 17-11-01041).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.–Л., 1947, 448 с.
2. L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454–472.
3. F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219–225.
4. J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.
5. R. H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 209–230.
6. R.H. Bing, “Embedding circle-like continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
7. Д. В. Аносов, “Исходные понятия”, *Динамические системы - 1*, **1** (1985), 156–178.
8. Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Гиперболические множества”, *Динамические системы - 9*, **1** (1991), 12–99.
9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 1999, 506 с.
10. Ю. С. Ильяшенко, Ли Вейгу, *Нелокальные Бифуркации*, МЦНМО-ЧеРо, М., 1999, 415 с.
11. S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996), 344–367.
12. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
13. Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599.
14. H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
15. B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.
16. J. Ma, Y. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154**:11 (2007), 3021–3031.
17. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, “О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»)", *Успехи физ. наук*, **106**:3 (1972), 431–457.

18. Е. В. Жужома, В. С. Медведев, А. Е. Шищенко, “Об одной модели быстрого кинематического динамо”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15:2** (2013), 23–26.
19. Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202:3** (2011), 47–68.
20. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 23–41.

*Поступила 25.11.2017*

*MSC2010 37D20, 37G70*

## Many-dimensional solenoid invariant saddle-type sets

© E. V. Zhuzhoma <sup>4</sup>, N. V. Isaenkova <sup>5</sup>, V. S. Medvedev <sup>6</sup>

**Abstract.** In the paper we construct some example of smooth diffeomorphism of closed manifold. This diffeomorphism has one-dimensional (in topological sense) basic set with stable invariant manifold of arbitrary nonzero dimension and the unstable invariant manifold of arbitrary dimension not less than two. The basic set has a saddle type, i.e. is neither attractor nor repeller. In addition, it follows from the construction that the diffeomorphism has a positive entropy and is conservative (i.e. its jacobian equals one) in some neighborhood of the one-dimensional solenoidal basic set. The construction represented in this paper allows to construct a diffeomorphism with the properties stated above on the manifold that is diffeomorphic to the prime product of the circle and the sphere of codimension one.

**Key Words:** discrete dynamical system, basic set, solenoid, separator, topological entropy.

## REFERENCES

1. V. V. Nemytskiy, V. V. Stepanov, *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenij [Qualitative Theory Of Differential Equations]*, OGIZ, M.–L., 1947 (In Russ.), 448 p.
2. L. Vietoris, “Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen”, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454–472.
3. F. Takens, “Multiplications in solenoids as hyperbolic attractors”, *Topology and Appl.*, **152** (2005), 219–225.
4. J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111:4** (1991), 1161–1163.

---

<sup>4</sup> **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher school of Economics» (25/12 B. Pecherskaya st., Nizhny Novgorod 603005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, zhuzhoma@mail.ru

<sup>5</sup> **Nataliya V. Isaenkova**, Professor of Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoye Sh., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4880-3526>, nisaenkova@mail.ru

<sup>6</sup> **Vyacheslav S. Medvedev**, Researcher TAPRADESS laboratory, National Research University «Higher school of Economics» (25/12 B. Pecherskaya, Nizhny Novgorod 603005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6369-0000>, vmedvedev@hse.ru

5. R. H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 209–230.
6. R.H. Bing, “Embedding circle-like continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
7. D. V. Anosov, “The original concepts”, *Dynamic systems–1*, **1** (1985), 156–178 (In Russ.).
8. D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamic systems–9*, **1** (1991), 12–99 (In Russ.).
9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., CRC Press, Boca Qaton, 1999, 506 c.
10. Yu. Ilyashenko, Li Veigu, *Nelokal’nye Bifurkacii [Nonlocal bifurcations]*, MTSNMO-CheRo Publ., Moscow, 1999 (In Russ.), 415 p.
11. S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, E. V. Zhuzhoma, “Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces”, *Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.*, **153** (1996), 344–367.
12. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
13. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, “About disasters a blue sky”, *Doklady RAN*, **342**:5 (1995), 596–599 (In Russ.).
14. H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
15. B. Jiang, Y. Ni, S. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.
16. J. Ma, Y. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154**:11 (2007), 3021–3031.
17. S. I. Weinstein, Ya. B. Zeldovich, “On the origin of magnetic fields in astrophysics (Dynamo Turbulent mechanisms)”, *Phys. Usp.*, **106**:3 (1972), 431–457 (In Russ.).
18. E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, A. E. Shishenkova., “A model for fast cinematic Dynamo”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15**:2 (2013), 23-26 (In Russ.).
19. E. V. Zhuzhoma, N. V. Isaenkova, “Zero-dimensional solenoidal base sets”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 351–372 (In Russ.).
20. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 23–41.

*Submitted 25.11.2017*

УДК 517.938.5, 512.721

## О динамике бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги

© Е. В. Ноздринова<sup>1</sup>, О. В. Починка<sup>2</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается класс диффеоморфизмов замкнутого  $n$ -мерного многообразия, являющихся бифуркационными точками простых дуг в пространстве диффеоморфизмов. Понятие простой дуги возникло в результате исследований Ш. Ньюхауса, Дж. Палиса и Фл. Такенса, которое показало, что типичное множество дуг, стартующих в системе Морса-Смейла, имеют в качестве первой бифуркационной точки диффеоморфизм с регулярной динамикой. Именно, неблуждающее множество такого диффеоморфизма конечно, но в отличие от систем Морса-Смейла, он может иметь либо одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом, либо одну орбиту нетрансверсального пересечения инвариантных многообразий периодических точек. Авторами изучены асимптотические свойства и структура вложения инвариантных многообразий неблуждающих точек бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги, также установлена возможность полного упорядочивания периодических орбит таких диффеоморфизмов.

**Ключевые слова:** бифуркационные точки, простая дуга.

### 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим гладкое замкнутое многообразие  $M^n$ ,  $n \geq 2$  с метрикой  $d$ , пространством  $Diff(M^n)$ , заданных на нем диффеоморфизмов,  $C^1$ -топологией, и его подмножеством  $MS(M^n)$ , состоящем из диффеоморфизмов Морса-Смейла. *Гладкой дугой* в  $Diff(M^n)$  называется отображение  $\xi: M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$ , гладко зависящее от координат  $(x, t) \in M^n \times [0, 1]$  и являющееся диффеоморфизмом при каждом  $t$  или, равносильно, гладко зависящее от  $t$  семейство диффеоморфизмов

$$\{\xi_t \in Diff(M^n), t \in [0, 1]\}.$$

Рассмотрим гладкие дуги такие, что  $\xi_t \in MS(M^n)$  для любого  $t \in ([0, 1] \setminus B)$ , где  $B$  конечное множество. Согласно [5], для типичного множества таких дуг, диффеоморфизм  $\xi_b$ ,  $b \in B$  имеет конечное неблуждающее множество  $\Omega_{\xi_b}$ , все орбиты которого являются гиперболическими, кроме, возможно, одной, которая представляет собой седло-узел или флип. При этом, если все орбиты множества  $\Omega_{\xi_b}$  гиперболические, то все их инвариантные многообразия пересекаются трансверсально, кроме одной пары инвариантных многообразий, которые имеют нетрансверсальное пересечение вдоль одной гетероклинической орбиты; при наличии негиперболической периодической орбиты все инвариантные

<sup>1</sup> **Ноздринова Елена Вячеславовна**, стажер-исследователь лаборатории топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский институт "Высшая школа экономики"» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

<sup>2</sup> **Починка Ольга Витальевна**, заведующая лаборатории топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский институт "Высшая школа экономики"» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

многообразия всех неблуждающих точек пересекаются трансверсально. Также диффеоморфизм  $\xi_b$  не имеет циклов (т. е. последовательности попарно различных периодических орбит  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k, k \geq 2$  со свойством  $W_{\mathcal{O}_1}^s \cap W_{\mathcal{O}_2}^u \neq \emptyset, \dots, W_{\mathcal{O}_{k-1}}^s \cap W_{\mathcal{O}_k}^u \neq \emptyset, W_{\mathcal{O}_k}^s \cap W_{\mathcal{O}_1}^u \neq \emptyset$ ).

Дуга с описанными выше свойствами называется *простой дугой* [4]. Обозначим через  $\Phi$  множество бифуркационных точек простых дуг или, равносильно, множество диффеоморфизмов с описанными выше свойствами. В настоящей работе приводится доказательство следующей теоремы.

**Т е о р е м а 1.1** Пусть  $f \in \Phi$ . Тогда

1.  $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$ ;
2.  $W_p^u$  является гладким подмногообразием многообразия  $M^n$  для любой периодической точки  $p \in \Omega_f$ ;
3. Множество периодических орбит  $\{\mathcal{O}_p, p \in \Omega_f\}$  допускает отношение полного порядка  $\prec$ , удовлетворяющее отношению Смейла

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q, \text{ если } W_{\mathcal{O}_p}^s \cap W_{\mathcal{O}_q}^u \neq \emptyset;$$

4.  $cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) \subset \bigcup_{r \in \Omega_f: \ell_r^u \cap W_p^s \neq \emptyset} W_r^u$  для любой неустойчивой сепаратрисы  $\ell_p^u$  (компоненты связности множества  $W_p^u \setminus p$ ) периодической точки  $p \in \Omega_f$ .

## 2. Неблуждающее множество диффеоморфизмов класса $\Phi$

Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  диффеоморфизм класса  $\Phi$ ;  $p$  — его неподвижная точка. Определим тип неподвижной точки с помощью дифференциала; тип периодической точки периода  $k$  определяется типом этой точки как неподвижной точки диффеоморфизма  $f^k$ .

Дифференциал  $Df_p$  индуцирует разложение касательного пространства  $T_p M^n$  в прямую сумму инвариантных подпространств  $T_p M^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ . Линейные отображения  $Df_p|_{E^u}, Df_p|_{E^c}, Df_p|_{E^s}$  имеют собственные значения внутри, на границе и вне единичного круга соответственно. Обозначим размерности данных подпространств через  $\lambda_p^u, \lambda_p^s, \lambda_p^c$ . Если  $\lambda_p^c = 0$ , то точка  $p$  называется *гиперболической*. В этом случае  $p$  имеет *неустойчивое многообразие*, определяемое в топологических терминах условием

$$W_p^u = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(y) = p\},$$

являющееся гладкой (с гладкостью не меньше, чем гладкость  $f$ ) инъективной иммерсией пространства  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u}$  и касающееся подпространства  $E^u$ . Аналогично точка  $p$  имеет *устойчивое многообразие*, определяемое в топологических терминах условием

$$W_p^s = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(y) = p\},$$

являющееся гладкой инъективной иммерсией пространства  $\mathbb{R}^{\lambda_p^s}$  и касающееся подпространства  $E^s$ . Согласно теореме Гробмана-Хартмана (см., например, [6]), в окрестности гиперболической точки  $p$  поведение динамической системы с точностью до гомеоморфизма совпадает с поведением ее линеаризации и, более того, топологически сопряжено отображению

$$A_h(x_1, \dots, x_n) = \left( \pm 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{\lambda_p^u}, \pm \frac{x_{\lambda_p^u+1}}{2}, \frac{x_{\lambda_p^u+2}}{2}, \dots, \frac{x_{\lambda_p^u+\lambda_p^s}}{2} \right). \tag{2.1}$$

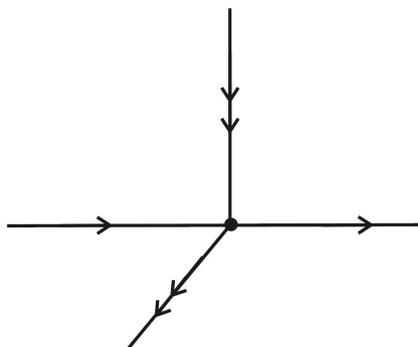
Гиперболическая точка называется *стоком*, если  $\lambda_p^u = 0$ , *источником*, если  $\lambda_p^u = n$  и *седлом*, если  $0 < \lambda_p^u < n$ .

Если  $\lambda_p^c \neq 0$ , то согласно [3], существует инвариантное подмножество  $W_p^c$  многообразия  $M^n$ , касательное к  $E^c$  в точке  $p$  и являющееся гладкой (с гладкостью не меньше, чем гладкость  $f$ ) инъективной иммерсией пространства  $\mathbb{R}^{\lambda_p^c}$ . Оно называется *центральным многообразием* точки  $p$ . Центральное многообразие не единственно, но отображения  $f|_{W_p^c}$  и  $f|_{\tilde{W}_p^c}$  топологически сопряжены для любых центральных многообразий  $W_p^c$  и  $\tilde{W}_p^c$ . Динамика в окрестности не гиперболической точки  $p$  в данном случае не определяется линейной частью диффеоморфизма, но в некоторых простейших случаях динамика в окрестности негиперболической неподвижной точки допускает каноническое описание. Опишем два из них. На поясняющих рисунках двойными стрелками схематично изображены направления движения с экспоненциальным сжатием и растяжением, а одинарными стрелками выделены направления движения по центральному многообразию негиперболической точки.

1) Неподвижная точка  $p$  диффеоморфизма  $f$  называется *седло-узлом*, если  $\lambda_p^c = 1$  и отображение  $f|_{W_p^c}$  для любого центрального многообразия  $W_p^c$  имеет вид:

$$f|_{W_p^c}(x) = x + \alpha x^2 + O(x^3), \alpha \neq 0.$$

Согласно, например, [3], существует устойчивое  $W_p^s$  и неустойчивое  $W_p^u$  многообразия седло-узловой неподвижной точки, топологически определяемые аналогично гиперболическому случаю, но они являются гладкой инъективной иммерсией полупространств  $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^s+1}$  и  $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^u+1}$  соответственно. Устойчивое многообразие  $W_p^s$  касается подпространства  $E^u \oplus E^c$ , а неустойчивое – подпространства  $E^s \oplus E^c$  в точке  $p$ .



Р и с у н о к 2.1

Седло-узел

Согласно, например, [5], в окрестности седло-узловой точки  $p$  динамика системы топологически сопряжена отображению

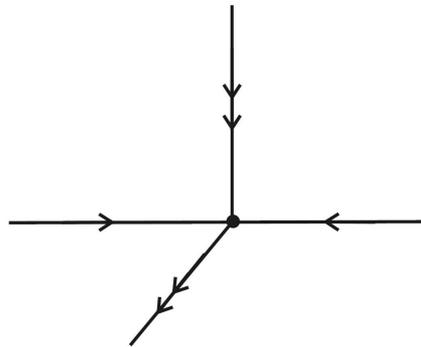
$$A_s(x_1, \dots, x_n) = (A_h(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n + x_n^2). \quad (2.2)$$

2) Неподвижная точка  $p$  диффеоморфизма  $f$  называется *флипом*, если  $\lambda_p^c = 1$  и отображение  $f|_{W_p^c}$  для любого центрального многообразия  $W_p^c$  имеет вид:

$$f|_{W_p^c}(x) = -x + \alpha x^2 + \gamma x^3 + o(|x^3|), \gamma + \alpha^2 \neq 0.$$

Другими словами, точка  $p$  является негиперболическим стоком ограничения отображения  $f$  на центральное многообразие (аналогичное отображение с источником получает-

ся рассмотрением обратного отображения). Согласно, например, [3], существует устойчивое  $W_p^s$  и неустойчивое  $W_p^u$  многообразия флипа, топологически определяемые аналогично гиперболическому случаю, являющиеся гладкой инъективной иммерсией пространств  $\mathbb{R}^{\lambda_p^s+1}$  и  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u}$  соответственно.



Р и с у н о к 2.2  
Флип

Согласно, например, [5], в окрестности флипа  $p$  динамика системы топологически сопряжена отображению

$$A_f(x_1, \dots, x_n) = (A_h(x_1, \dots, x_{n-1}), -x_n + x_n^3). \tag{2.3}$$

**Л е м м а 2.1** (*Лемма 2.1*<sup>3</sup>, [1]) Пусть  $p$  — неподвижная точка диффеоморфизма  $f \in \Phi$ , гиперболическая или флип, и такая, что  $0 < \dim W_p^u < n$ . Пусть  $T_p \subset W_p^s$  — компактная окрестность точки  $p$  и  $\xi \in T_p$ . Тогда для любой последовательности точек  $\{\xi_m\} \subset (M^n \setminus T_p)$ , сходящейся к точке  $\xi$ , существует подпоследовательность  $\{\xi_{m_j}\}$ , последовательность целых чисел  $k_{m_j} \rightarrow +\infty$  и точка  $\eta \in (W_p^u \setminus p)$  такие, что последовательность точек  $\{f^{k_{m_j}}(\xi_{m_j})\}$  сходится к точке  $\eta$ .

**Л е м м а 2.2** Пусть  $p$  — неподвижная седло-узловая точка диффеоморфизма  $f \in \Phi$ . Пусть  $T_p \subset W_p^s$  — компактная окрестность точки  $p$  и  $\xi \in T_p$ . Тогда для любой последовательности точек  $\{\xi_m\} \subset (M^n \setminus T_p)$ , сходящейся к точке  $\xi$ , существует подпоследовательность  $\{\xi_{m_j}\}$ , последовательность целых чисел  $k_{m_j} \rightarrow +\infty$  и точка  $\eta \in \partial W_p^u$  такие, что последовательность точек  $\{f^{k_{m_j}}(\xi_{m_j})\}$  сходится к точке  $\eta$ . При этом  $\eta \neq p$ , если  $\partial W_p^u \neq p$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не уменьшая общности, можно считать, что диффеоморфизм  $f$  сохраняет ориентацию на  $W_p^u$  (в противном случае все рассуждения можно провести для диффеоморфизма  $f^2$ ). Согласно формуле (2.2), существуют окрестности  $V_p \subset M^n$ ,  $V_O \subset \mathbb{R}^n$  точек  $p$ ,  $O \in \mathbb{R}^n$ , соответственно и гомеоморфизм  $\psi : V_p \rightarrow V_O$  такой, что  $\psi(f(x)) = B(\psi(x))$  для любой точки  $x \in (V_p \cap f(V_p))$ , где  $A_{sf}$  — диффеоморфизм, заданный формулой

$$A_s(x_1, \dots, x_n) = \left( 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{\lambda_p^u}, \frac{x_{\lambda_p^u+1}}{2}, \frac{x_{\lambda_p^u+2}}{2}, \dots, \frac{x_{\lambda_p^u+\lambda_p^s}}{2}, x_n + x_n^2 \right).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что  $(V_p \cap W_p^s) \subset T_p$ ,  $\xi \in (V_p \cap f(V_p))$  и  $\{\xi_m\} \subset (V_p \cap f(V_p))$ . Выберем число  $r \in (0, 1/2)$  так, чтобы куб  $K_r(O) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r, i = 1, \dots, n\}$  был подмножеством множества  $V_O \cap A_s(V(O))$ .

<sup>3</sup> В действительности в цитируемой монографии Лемма 2.1 доказано только для седловой точки. Но ход доказательства абсолютно верен и для флипа.

Положим  $\psi(\xi_m) = \bar{\xi}_m = (\bar{\xi}_{1,m}, \dots, \bar{\xi}_{n,m})$ ,  $B_r^u = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_p^u}) \in O_{x_1 \dots x_{\lambda_p^u}} : (x_1^2 + \dots + x_{\lambda_p^u}^2) \leq r^2\}$ ,  $K_r^u = \{(x_1, \dots, x_{\lambda_p^u}, x_n) \in O_{x_1 \dots x_{\lambda_p^u} x_n^+} : |x_i| \leq r, i = 1, \dots, \lambda_p^u, 0 \leq x_n \leq r\}$ . Тогда замыкание множества  $B^u = B_r^u \setminus B_{r/2}^u$  является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма  $A_s$  на  $O_{x_1 \dots, x_{\lambda_p^u}} \setminus O$  и замыкание множества

$$K^u = K_r^u \setminus \{(x_1, \dots, x_{\lambda_p^u}, x_n) \in K_r^u : |x_i| \leq r/2, i = 1, \dots, \lambda_p^u, 0 \leq x_n \leq \sqrt{r+1/4} - 1/2\}$$

является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма  $A_s$  на  $O_{x_1 \dots, x_{\lambda_p^u} x_n^+} \setminus O$ . С точностью до рассмотрения подпоследовательности для  $\bar{\xi}_{n,m}$  возможны два варианта: а)  $\bar{\xi}_{n,m} \leq 0$ ; б)  $\bar{\xi}_{n,m} > 0$ . Рассмотрим два варианта.

В случае а) отдельно рассмотрим подслучай  $\lambda_p^u = 0$  или, равносильно,  $\partial W_p^u = p$ . В этом подслучае  $\bar{\xi}_m \in (W_O^s \setminus O)$  и из определения устойчивого многообразия следует, что существует последовательность  $\{k_m\} \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} A_s^{k_m}(\bar{\xi}_m) = O$ . Тогда  $\xi_m = \psi^{-1}(\bar{\xi}_m)$  — искомая подпоследовательность.

Если  $\lambda_p^u > 0$ , то для любого  $m \in \mathbb{N}$  существует единственное целое число  $k_m$  такое, что  $A_s^{k_m}(\bar{\xi}_{1,m}, \dots, \bar{\xi}_{\lambda_p^u,m}, 0, \dots, 0) \in B^u$ . Положим  $\bar{\eta}_m = A_s^{k_m}(\bar{\xi}_m) = (\bar{\eta}_{1,m}, \dots, \bar{\eta}_{n,m})$ . Поскольку  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_m = \psi(\xi) \in W_O^s$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_{i,m} = 0$  для любого  $i \in \{1, \dots, \lambda_p^u\}$  и, следовательно,  $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = +\infty$ . Кроме того, последовательность  $\{\bar{\xi}_{i,m}\}$  ограничена для любого  $i \in \{\lambda_p^u + 1, \dots, n\}$  и, следовательно,  $\bar{\eta}_{i,m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$  для  $i \in \{\lambda_p^u + 1, \dots, n\}$ .

Таким образом, точки  $\bar{\eta}_m$  лежат внутри некоторого компактного подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Поскольку для любой последовательности, заданной на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность, то существуют подпоследовательность  $\{k_{m_j}\}$  последовательности  $\{k_m\}$  и точка  $\bar{\eta} \in (\partial W_O^u \setminus O)$  такие, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\eta}_{m_j} = \bar{\eta}$ . Тогда  $\xi_{m_j} = \psi^{-1}(A_s^{-k_{m_j}}(\bar{\eta}_{m_j}))$  — искомая подпоследовательность.

В случае б) для любого  $m \in \mathbb{N}$  существует единственное целое число  $k_m$  такое, что  $A_s^{k_m}(\bar{\xi}_{1,m}, \dots, \bar{\xi}_{\lambda_p^u,m}, 0, \dots, 0, \bar{\xi}_{n,m}) \in K^u$ . Положим  $\bar{\eta}_m = A_s^{k_m}(\bar{\xi}_m) = (\bar{\eta}_{1,m}, \dots, \bar{\eta}_{n,m})$ . Поскольку  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_m = \psi(\xi) \in W_O^s$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_{i,m} = 0$  для любого  $i \in \{1, \dots, \lambda_p^u, n\}$  и, следовательно,  $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = +\infty$ . Кроме того, последовательность  $\{\bar{\xi}_{i,m}\}$  ограничена для любого  $i \in \{\lambda_p^u + 1, \dots, n-1\}$  и, следовательно,  $\bar{\eta}_{i,m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$  для  $i \in \{\lambda_p^u + 1, \dots, n-1\}$ .

Таким образом, точки  $\bar{\eta}_m$  лежат внутри некоторого компактного подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Поскольку для любой последовательности, заданной на компакте, существуют сходящаяся подпоследовательность, то существует подпоследовательность  $\{k_{m_j}\}$  последовательности  $\{k_m\}$  и точка  $\bar{\eta} \in (\partial W_O^u \setminus O)$  такие, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\eta}_{m_j} = \bar{\eta}$ . Тогда  $\xi_{m_j} = \psi^{-1}(A_s^{-k_{m_j}}(\bar{\eta}_{m_j}))$  — искомая подпоследовательность.

### 3. Разложение несущего многообразия в объединение инвариантных многообразий периодических точек

#### Доказательство пункта (1) Теоремы 1.1

Докажем, что  $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$  для любого диффеоморфизма  $f \in MS(M^n)$ .

Не уменьшая общности, будем считать, что неблуждающее множество диффеоморфизма  $f$  неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма  $f$ . Тогда  $\Omega_f$  является объединением конечного числа неподвижных точек  $\Omega_f = p_1 \cup \dots \cup p_r$ .

Пусть  $x \in M^n$ . Поскольку многообразие  $M^n$  компактно, то  $\alpha$ -предельное множество  $\alpha(x)$  (множество точек  $y \in M^n$ , для которых существует последовательность  $k_n \rightarrow \infty$

такая, что  $\lim_{k_n \rightarrow \infty} f^{-k_n}(y) = x$ ) не пусто и является подмножеством  $\Omega_f$ . Покажем, что  $\alpha(x)$  состоит в точности из одной неподвижной точки, зависящей от  $x$ .

Предположим противное: существуют различные неподвижные точки  $p_v, p_w \in \alpha(x)$ . Поскольку  $\Omega_f$  конечно, то существует  $\rho > 0$  такое, что  $d(p_i, p_j) > \rho$  для любых  $i \neq j$ . Положим  $V_i = \{y \in M^n : d(y, p_i) < \frac{\rho}{3}\}$ . Поскольку любая точка  $p_i, i = \overline{1, r}$  неподвижна, то существует окрестность  $U_i$  такая, что  $cl(U_i) \subset V_i$  и  $f^{-1}(cl(U_i)) \cap V_j = \emptyset$  для любого  $j \neq i$ . Предположительно существует возрастающая последовательность  $q_\ell$  итераций  $f^{-1}$  такая, что  $f^{-q_{2m}}(x) \in U_v, f^{-q_{2m+1}}(x) \in U_w$  и  $q_{2m+1} - q_{2m} \geq 2$ . Выберем последовательность  $n_m$  так, что  $n_m$  — наибольшее натуральное число из интервала  $(q_{2m}, q_{2m+1})$ , для которого  $f^{-(n_m-1)}(x) \in cl(U_v)$ . Тогда  $f^{-n_m}(x) \notin cl(U_v)$ . С другой стороны,  $f^{-n_m}(x) = f^{-1}(f^{-(n_m-1)}(x)) \notin V_j$  для  $j \neq v$  и, следовательно,  $f^{-n_m}(x) \in (M^n \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i)$ . Следовательно  $\alpha(x)$  не является подмножеством  $\Omega_f$ . Получили противоречие.

Таким образом, для любой точки  $x \in M^n$  существует единственная точка  $p_v(x) \in \Omega_f$  такая, что  $\alpha(x) = p_v(x)$ . Т. е. существует последовательность  $k_n \rightarrow +\infty$  такая, что  $\lim_{k_n \rightarrow +\infty} d(f^{-k_n}(x), p_v(x)) = 0$ . Из свойств динамики диффеоморфизма  $f$  в окрестности точки  $p_v(x)$  (см. формулы (2.1), (2.2), (2.3)) следует, что  $f^{-k_n}(x) \in W_{p_v(x)}^u$  для всех  $n$  больших некоторого  $n_0$ . В силу инвариантности неустойчивого многообразия,  $x \in W_{p_v(x)}^u$ .

#### 4. Топология вложения инвариантных многообразий периодических точек

##### Доказательство пункта (2) Теоремы 1.1

Докажем, что  $W_p^u$  является гладким подмногообразием многообразия  $M^n$  для любой периодической точки  $p \in \Omega_f$  диффеоморфизма  $f \in \Phi$ .

Доказательство. Пусть  $x \in W_p^u$  и  $T_p(x) \subset W_p^u$  — компактная окрестность точки  $p$ , содержащая точку  $x$ . Согласно разделу 2. данной работы,  $W_p^u = J_p^u(R)$ , где  $R$  либо  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u}$ , либо  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u+1}$ , либо  $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^u+1}$  и  $J_p^u : R \rightarrow M^n$  — инъективная иммерсия. В силу, например, [2], инъективная иммерсия является вложением на компакте, следовательно, существует карта  $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  многообразия  $M^n$  такая, что  $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = Q$ , где  $Q$  либо  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u}$ , либо  $\mathbb{R}^{\lambda_p^u+1}$ , либо  $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^u+1}$ . Если  $Q = \mathbb{R}^n$  или  $Q = \mathbb{R}^0$ , то  $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = \psi_x(U_x \cap W_p^u)$ . Из этого следует, что неустойчивое многообразие точки  $p$  в этих случаях является гладким подмногообразием. Покажем теперь, что  $W_p^u$  является гладким подмногообразием  $M^n$  в оставшихся случаях.

Предположим противное:  $W_p^u$  не является гладким подмногообразием  $M^n$ . Не уменьшая общности, будем считать точку  $p$  неподвижной. Из предположения о противном следует, что существует точка  $x \in W_p^u$  такая, что  $(U_x \setminus T_p(x)) \cap W_p^u \neq \emptyset$  для любой карты  $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  многообразия  $M^n$  такой, что  $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = Q$ . Следовательно, существует последовательность  $\{x_m\} \subset (W_p^u \setminus T_p(x))$  такая, что  $x_m \rightarrow x$  при  $m \rightarrow +\infty$ .

Согласно Леммам 2.1 и 2.2, существуют подпоследовательность  $x_{m_j}$  и последовательность  $k_j$  такая, что последовательность  $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j}) \subset W_p^u$  сходится к точке  $y \in (W_p^s \setminus p)$ . Согласно пункту (1) Теоремы 1.1, существует точка  $r \in \Omega_f$  такая, что  $y \in W_r^u$ . Из условия, что диффеоморфизмы  $f \in \Phi$  не имеют циклов, следует отсутствие у них гомоклинических точек, а значит  $p \neq r$ . Применяя аналогичные рассуждения к последовательности  $y_j$ , мы получим последовательность  $z_i \subset W_p^u$ , сходящуюся к точке  $z \in (W_r^s \setminus r)$ , и точку  $v \in \Omega_f$  такую, что  $z \in W_v^u$ . В силу отсутствия циклов точка  $v$  отлична от точек  $p$  и  $r$ . Повторяя рассуждения, мы получим бесконечную последовательность

различных периодических точек, что невозможно в силу конечности неблуждающего множества диффеоморфизма  $f$ .

## 5. Отношение порядка на множестве периодических орбит диффеоморфизма класса $\Phi$

### Доказательство пункта (3) Теоремы 1.1

Покажем, что множество периодических орбит  $\{\mathcal{O}_p, p \in \Omega_f\}$  диффеоморфизма  $f \in \Phi$  допускает отношение полного порядка  $\prec$ , удовлетворяющее отношению Смейла:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q, \text{ если } W_{\mathcal{O}_p}^s \cap W_{\mathcal{O}_q}^u \neq \emptyset.$$

Для этого напомним, что бинарное отношение  $\prec$  на множестве  $X$  называется *отношением (нестрогого) частичного порядка*, если имеют место:

- рефлексивность:  $\forall x \in X \Rightarrow x \prec x$ ;
- антисимметричность:  $\forall x, y \in X : x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$ ;
- транзитивность:  $\forall x, y, z \in X : x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$ .

Отношение частичного порядка  $\prec$  называется отношением *полного (линейного) порядка*, если  $\forall x, y \in X \Rightarrow x \prec y \vee y \prec x$ .

Согласно теореме Шпильрайна (см., например, [7]), любое отношение частичного порядка  $\prec$  может быть продолжено до отношения полного порядка.

Из формул (2.1), (2.2), (2.3) следует, что  $W_{\mathcal{O}_p}^s \cap W_{\mathcal{O}_p}^u \neq \emptyset$  для любой периодической орбиты  $\mathcal{O}_p$  и, следовательно, отношение Смейла обладает рефлексивностью:  $\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_p$ . Антисимметричность отношения Смейла следует из условия отсутствия циклов у диффеоморфизмов класса  $\Phi$ . Для выполнения транзитивности достаточно добавить к отношению Смейла следующее условие:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q, \text{ если } W_{\mathcal{O}_p}^s \cap W_{\mathcal{O}_q}^u = \emptyset \text{ и существует периодическая орбита } \mathcal{O}_r :$$

$$W_{\mathcal{O}_p}^s \cap W_{\mathcal{O}_r}^u \neq \emptyset \text{ и } W_{\mathcal{O}_r}^s \cap W_{\mathcal{O}_q}^u \neq \emptyset.$$

Таким образом, дополненное отношение Смейла является отношением частичного порядка, а значит, множество периодических орбит диффеоморфизма  $f \in \Phi$  допускает полное упорядочивание.

## 6. Асимптотическое поведение инвариантных многообразий периодических точек

### Доказательство пункта (4) Теоремы 1.1

Докажем, что  $cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) \subset \bigcup_{r \in \Omega_f : \ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$  для любой периодической точки  $p \in \Omega_f$  диффеоморфизма  $f \in MS(M^n)$ .

**Доказательство.** Для доказательства утверждения достаточно показать импликацию (i): если  $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$ , то  $x \in W_r^u$  для некоторой точки  $r \in \Omega_f$  такой, что  $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$ . Не уменьшая общности, будем считать, что неблуждающее множество диффеоморфизма  $f$  неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма  $f$ .

Пусть  $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$ . Тогда существует последовательность  $\{x_m\} \subset \ell_p^u$  такая, что  $d(x_m, x) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$ . В силу пункта (1) Теоремы 1.1  $x \in W_r^u$  для некоторой точки  $r \in \Omega_f$ . В силу пункта (2) Теоремы 1.1, существует карта  $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  многообразия  $M^n$

такая, что  $\psi_x(U_x \cap W_r^u(x)) = Q$ , где  $Q$  либо  $\mathbb{R}^{\lambda_r^u}$ , либо  $\mathbb{R}^{\lambda_r^u+1}$ , либо  $\mathbb{R}_+^{\lambda_r^u+1}$ . Покажем, что  $Q \neq \mathbb{R}^n$ . Предположим противное, тогда  $x_m \in W_r^u$  для всех  $m$ , начиная с некоторого, а значит  $r = p$ . Следовательно,  $\ell_p^u \cup p = W_r^u$  и  $x \notin W_r^u$ . Получили противоречие.

Таким образом,  $Q \neq \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим два случая: а)  $Q = \mathbb{R}^0$ , б)  $Q \neq \mathbb{R}^n$  и  $Q \neq \mathbb{R}^0$ .

В случае а)  $W_r^u = r$ ,  $x = r$  и  $x_m \in W_r^s$  для всех  $m$ , начиная с некоторого. Следовательно,  $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$ , т. е. импликация (i) верна.

В случае б), согласно Леммам 2.1 и 2.2, существует подпоследовательность  $x_{m_j}$  и последовательность  $k_j$  такая, что последовательность  $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j})$  сходится к точке  $y \in (W_r^s \setminus r)$ . Согласно пункту (1) Теоремы 1.1, существует точка  $v \in \Omega_f$  такая, что  $y \in \ell_v^u$ . Если  $\ell_v^u = \ell_p^u$ , то утверждение доказано. В противном случае, повторяя процесс и учитывая конечность неблуждающего множества и отсутствие циклов, мы получим утверждение через конечное число шагов.

*Благодарности.* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01041, введение отношения полного порядка в разделе 5 выполнено в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.
2. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, New York, 1979, 280 p.
3. M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub., *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1977, 583 p.
4. S. Matsumoto, "There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs", *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–8.
5. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms", *Publ. Math. de l' IHES*, **57**:1 (1983), 5–71.
6. Я. Палис, В. Мело, *Геометрическая теория динамических систем*, Изд.-во Мир, Москва, 1998, 301 с.
7. Фукс Л., *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Изд.-во Мир, Москва, 1965, 342 с.

Поступила 26.12.2017

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

## On the dynamics of bifurcation diffeomorphisms of a simple arc

© E. V. Nozdrinova <sup>4</sup>, O. V. Pochinka <sup>5</sup>

**Abstract.** In this paper we consider the class of diffeomorphisms of a closed  $n$ -dimensional manifold that are bifurcation points of simple arcs in the space of diffeomorphisms. The concept of a simple arc arose as a result of research by S. Newhouse, J. Palis and Fl. Takens. They showed that a generic set of arcs starting in a Morse-Smale system have a diffeomorphism with a regular dynamics as the first bifurcation point. Namely, the non-wandering set of such a diffeomorphism is finite, but unlike Morse-Smale systems, it can have either one non-hyperbolic periodic orbit that is a saddle-node or a flip, or one orbit of a non-transversal intersection of invariant manifolds of periodic points. The authors studied the asymptotic properties and the embedding structure of the invariant manifolds of non-wandering points of bifurcation diffeomorphisms of a simple arc. The possibility of complete ordering of periodic orbits of such diffeomorphisms is also established.

**Key Words:** bifurcation points, simple arc.

### REFERENCES

1. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.
2. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, New York, 1979, 280 p.
3. M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub., *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1977, 583 p.
4. S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs”, *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–8.
5. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publ. Math. de l’IHES*, **57**:1 (1983), 5–71.
6. J. Palis, W. Melo, *Geometricheskaja teorija dinamicheskikh sistem [Geometric theory of dynamical systems]*, Mir Publ., Moscow, 1998 (In Russ.), 301 p.
7. L. Fuchs, *Chastichno uporyadochennyye algebraicheskie sistemy [Partially ordered algebraic systems]*, Mir Publ., Moscow, 1965 (In Russ.), 342 p.

Submitted 26.12.2017

---

<sup>4</sup> **Elena V. Nozdrinova**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12, Bolshaya Pecherskaya st., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

<sup>5</sup> **Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12, Bolshaya Pecherskaya st., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

УДК 519.624

# Непрерывный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для уравнений монотонного типа

© И. П. Рязанцева<sup>1</sup>, О. Ю. Бубнова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Исследована сходимость непрерывного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных уравнений. Отдельно рассмотрены случаи монотонного операторного уравнения в гильбертовом пространстве и аккретивного операторного уравнения в рефлексивном банаховом пространстве, строго выпуклом вместе со своим сопряженным. В каждом случае получены достаточные условия сходимости по норме пространства указанного метода. В аккретивном случае достаточные условия сходимости непрерывного метода включают не только требования на оператор уравнения и коэффициенты дифференциального уравнения, определяющего метод, но и на геометрию пространства, в котором решается уравнение. Приведены примеры банаховых пространств с требуемыми свойствами геометрий.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, банахово пространство, сильно монотонный оператор, условие Липшица, сильно аккретивный оператор, дуальное отображение, непрерывный метод, сходимость.

## 1. Уравнение с монотонным оператором в гильбертовом пространстве

Пусть  $H$  – вещественное гильбертово пространство;  $(u, v)$  – скалярное произведение элементов  $u$  и  $v$  из  $H$ ;  $A : H \rightarrow H$  – нелинейный оператор, обладающий свойствами:

а)  $A$  – сильно монотонный оператор, т. е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad M > 0; \quad (1.1)$$

б)  $A$  удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \quad L > 0. \quad (1.2)$$

Рассмотрим в  $H$  уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \quad (1.3)$$

В наших предположениях оно имеет единственное решение  $x$  в  $H$  (см., например, [1]–[2]).

Построим задачу Коши следующего вида:

$$y''(t) + \lambda y'(t) + \mu[Ay(t) - f] = 0, \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> **Рязанцева Ирина Прокофьевна**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [ryazantseva@appliedmath.ru](mailto:ryazantseva@appliedmath.ru)

<sup>2</sup> **Бубнова Оксана Юрьевна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГБОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское шоссе, д. 3, бокс 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5845-4652>, [bubnovaou@mail.ru](mailto:bubnovaou@mail.ru)

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad (1.5)$$

где  $t \geq t_0 \geq 0$ ;  $y_0$  и  $y'_0$  – элементы из  $H$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – некоторые положительные постоянные. В заданных условиях задача (1.4)–(1.5) однозначно разрешима в классе функций  $C^2[t_0, +\infty)$  (см. [3]).

Исследуем поведение  $y(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Прежде всего с учетом (1.3) перепишем (1.4) в следующем виде:

$$y''(t) + \lambda y'(t) + \mu[Ay(t) - Ax] = 0. \quad (1.6)$$

Умножив (1.6) скалярно на  $y(t) - x$ , получим:

$$(y''(t), y(t) - x) + \lambda(y'(t), y(t) - x) + \mu(Ay(t) - Ax, y(t) - x) = 0. \quad (1.7)$$

Определим функцию  $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2$ , тогда

$$r'(t) = (y'(t), y(t) - x), \quad r''(t) = (y''(t), y(t) - x) + \|y'(t)\|^2.$$

После этого приняв во внимание свойство (1.1) оператора  $A$ , из (7) выведем неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2M\mu r(t) \leq \|y'(t)\|^2. \quad (1.8)$$

Умножив (1.6) скалярно на  $y'(t)$ , получим:

$$(y''(t), y'(t)) + \lambda\|y'(t)\|^2 + \mu(Ay(t) - Ax, y'(t)) = 0. \quad (1.9)$$

Пусть  $\rho(t) = \|y'(t)\|^2/2$ , тогда  $\rho'(t) = (y''(t), y'(t))$ . Приняв во внимание свойство (1.2) оператора  $A$ , из (1.9) запишем:

$$\rho'(t) + 2\lambda\rho(t) \leq \mu L\|y(t) - x\|\|y'(t)\|. \quad (1.10)$$

Применив в правой части (1.10) числовое неравенство  $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ , из (1.10) получим неравенство:

$$\rho'(t) + 2\lambda\rho(t) \leq \mu L[r(t) + \rho(t)],$$

или

$$\rho'(t) + (2\lambda - \mu L)\rho(t) \leq \mu Lr(t). \quad (1.11)$$

Пусть

$$2\lambda - \mu L = \gamma > 0. \quad (1.12)$$

Используя лемму 1 [4], из (1.11) выведем неравенство:

$$\rho(t) \leq \rho(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} + \mu L \int_{t_0}^t r(s)e^{-\gamma(t-s)} ds.$$

Применив к интегралу в последнем неравенстве правило Лопиталья при  $t \rightarrow \infty$ , получим следующую оценку:

$$\rho(t) \leq a_0 e^{-\gamma t} + \frac{\mu L \alpha_1}{\gamma} r(t), \quad (1.13)$$

где  $a_0 = \rho(t_0)e^{\gamma t_0}$ ,  $\alpha_1 > 1$ .

Учитывая определение функции  $\rho(t)$  и оценку (1.13), из (1.8) получим неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu \left( M - \frac{L\alpha_1}{\gamma} \right) r(t) \leq 2a_0 e^{-\gamma t}. \quad (1.14)$$

Характеристическое уравнение для однородного линейного дифференциального уравнения с левой частью, равной левой части (1.14), имеет вид

$$k^2 + \lambda k + 2\mu \left( M - \frac{L\alpha_1}{\gamma} \right) = 0.$$

Корни этого уравнения будут различными и отрицательными, если

$$0 < M - \frac{L\alpha_1}{\gamma} < \frac{\lambda^2}{8\mu}, \quad \alpha_1 > 1. \quad (1.15)$$

Пусть данные корни есть числа  $k_1 = -\gamma_1$ ,  $k_2 = -\gamma_2$ ,  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Тогда согласно лемме 2 из работы [5], из (1.14) вытекает оценка:

$$r(t) \leq a_1 e^{-\beta t}, \quad a_1 > 0, \quad (1.16)$$

где  $\beta = \min\{\gamma, \gamma_1\}$  при  $\gamma \neq \gamma_1$  и  $\beta < \gamma$  при  $\gamma = \gamma_1$ .

Отсюда заключим, что в наших предположениях  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Сформулируем полученный результат.

**Т е о р е м а 1.1** Пусть  $H$  – вещественное гильбертово пространство; оператор  $A : H \rightarrow H$  обладает свойствами (1.1)–(1.2). Тогда задача Коши (1.4)–(1.5) имеет единственное решение класса  $C^2[t_0, +\infty)$  при любых постоянных  $\lambda$  и  $\mu$  и любых элементах  $y_0, y'_0$  из  $H$ . Пусть коэффициенты уравнения (1.4) положительны и удовлетворяют условиям (1.12), (1.15), тогда  $\|y(t) - x\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $x$  – решение уравнения (1.3);  $y(t)$  – решение задачи Коши (1.4)–(1.5).

**З а м е ч а н и е 1.1** Ранее (см., например, [6]) метод второго порядка рассматривался при условии, что  $\mu = \mu(t)$  есть бесконечно малая функция при  $t \rightarrow +\infty$ , и в доказательстве сходимости метода для оценки слагаемого  $\mu(t)(Ay(t) - Ax, y'(t))$  использовались предполагаемая ограниченность  $y(t)$  на  $[t_0, +\infty)$  и вытекающая из (1.2) ограниченность оператора  $A$ . При этом оценка сверху для  $r(t)$  ухудшалась по сравнению с (1.16).

## 2. Уравнение с аккретивным оператором в банаховом пространстве

Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное банахово пространство;  $X^*$  – его сопряженное. Не теряя общности, считаем, что  $X$  и  $X^*$  строго выпуклы. Пусть  $J : X \rightarrow X^*$  – дуальное отображение (см. [1]–[2]), т. е.

$$\|Jx\| = \|x\|, \quad \langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in X,$$

где  $\langle u, v \rangle$  при  $u \in X^*$ ;  $v \in X$  есть отношение двойственности между пространствами  $X$  и  $X^*$ .

Пусть оператор  $A : X \rightarrow X$  обладает следующими свойствами:

а)  $A$  является сильно аккретивным, т. е.

$$\langle J(u - v), Au - Av \rangle \geq m\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X, \quad m > 0; \quad (2.1)$$

б)  $A$  удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq l\|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \quad l > 0. \quad (2.2)$$

Предположим, что уравнение (1.3) разрешимо. В силу свойства (2.1) оператора  $A$  решение (1.3) является единственным (см., например, [1]–[2]). Непрерывный метод второго порядка для уравнения (1.3) в условиях данного пункта определим также равенствами (1.4)–(1.5). Вместо (1.7) запишем уравнение:

$$\langle J(y(t) - x), y''(t) \rangle + \lambda \langle J(y(t) - x), y'(t) \rangle + \mu \langle J(y(t) - x), Ay(t) - Ax \rangle = 0, \quad (2.3)$$

и для функции  $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2$  в банаховом пространстве  $X$  найдем

$$r'(t) = \langle J(y(t) - x), y'(t) \rangle, \quad r''(t) = \langle J(y(t) - x), y''(t) \rangle + \left\langle \frac{dJ(y(t) - x)}{dt}, y'(t) \right\rangle.$$

С учетом свойства а) оператора  $A$  из (2.3) получим неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2m\mu r(t) \leq \left\langle \frac{dJ(y(t) - x)}{dt}, y'(t) \right\rangle = \beta(t). \quad (2.4)$$

Далее вычислим значение линейного функционала  $Jy'(t) \in X^*$  на элементах правой и левой частей уравнения (1.4) и придем к равенству:

$$\langle Jy'(t), y''(t) \rangle + \lambda \|y'(t)\|^2 + \mu \langle Jy'(t), Ay(t) - Ax \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Пусть  $\rho(t) = \|y'(t)\|^2/2$ , тогда  $\rho'(t) = \langle Jy'(t), y''(t) \rangle$ . Используя (2.2), из (2.5) получим следующее неравенство (см. вывод (1.11)):

$$\rho'(t) + (2\lambda - \mu l)\rho(t) \leq \mu l r(t).$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$2\lambda - \mu l = \bar{\gamma} > 0. \quad (2.6)$$

Подобно (1.13) установим оценку

$$\rho(t) \leq b_0 e^{-\bar{\gamma}t} + \frac{\mu l \alpha_2}{\bar{\gamma}} r(t), \quad b_0 = \rho(t_0) e^{\bar{\gamma}t_0}, \quad \alpha_2 > 1. \quad (2.7)$$

Найдем оценку сверху для  $|\beta(t)|$  на  $[t_0, +\infty)$ . Для этого сделаем дополнительное предположение относительно геометрии банахова пространства  $X$ .

Пусть дуальное отображение в  $X$  дифференцируемо и обладает свойством

$$\left\| \frac{dJu(t)}{dt} \right\| \leq \sigma \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|, \quad \sigma > 0 \quad (2.8)$$

для любой дифференцируемой на  $[t_0, +\infty)$  функции  $u(t)$ , значения которой принадлежат  $X$ .

Тогда справедливо неравенство:

$$\left\| \frac{dJ(y(t) - x)}{dt} \right\| \leq \sigma \|y'(t)\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Следовательно,

$$|\beta(t)| \leq \sigma \|y'(t)\|^2 = 2\sigma\rho(t).$$

Теперь с помощью оценки (2.7) из (2.4) получим неравенство:

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu m r(t) \leq 2\sigma \left[ b_0 e^{-\bar{\gamma}t} + \frac{\mu l \alpha_2}{\bar{\gamma}} r(t) \right],$$

или

$$r''(t) + \lambda r'(t) + 2\mu \left( m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}} \right) r(t) \leq b_1 e^{-\bar{\gamma}t}, \quad b_1 > 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k^2 + \lambda k + 2\mu \left( m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}} \right) = 0$$

будут различными и отрицательными, если

$$0 < m - \frac{\sigma l \alpha_2}{\bar{\gamma}} < \frac{\lambda^2}{8\mu}, \quad \alpha_2 > 1. \quad (2.9)$$

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.1, приходим к утверждению.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным; оператор  $A : X \rightarrow X$  обладает свойствами (2.1)–(2.2); дуальное отображение в  $X$  дифференцируемо; уравнение (1.3) разрешимо; неравенство (2.8) справедливо. Предположим, что параметры  $\lambda$  и  $\mu$  уравнения (1.4) положительны и удовлетворяют неравенствам (2.6), (2.9). Тогда  $\|y(t) - x\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $y(t)$  и  $x$  – единственные решения задачи Коши (1.4)–(1.5) и уравнения (1.3) соответственно.

Отметим, что в [7]–[8] установлена дифференцируемость дуальных отображений и справедливость неравенства (2.8) в пространствах Лебега  $L^p[a, b]$  и  $l^p$  при  $p > 2$ , причем  $\sigma = 2p - 3$ . Укажем, что достаточные условия разрешимости уравнения (1.3) с аккретивным оператором  $A$  содержат требования на свойства оператора дуального отображения, которые также представляют собой некоторые условия на геометрию пространств  $X$  и  $X^*$  (см., например, [1]–[2]).

Замечание 1.1 справедливо и в условиях данного раздела.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972, 416 с.
2. Ya. Alber, Ya. Ryazantseva, *Nonlinear III-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006, 410 p.
3. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.
4. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981, 410 с.

5. И. П. Рязанцева, “Непрерывный метод решения задач условной минимизации”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **39**:5 (1999), 734–742.
6. И. П. Рязанцева, “Методы второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **50**:9 (2014), 1264–1275.
7. И. П. Рязанцева, О. Ю. Бубнова, “Непрерывный метод второго порядка для нелинейных аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Труды Средневолжского математического общества*, **3–4**:1 (2002), 327–334.
8. О. Ю. Бубнова, *Непрерывные и итеративные методы решения нелинейных некорректных задач монотонного типа*, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Нижний Новгород, 2005, 111 с.

*Поступила 30.11.2017*

*MSC2010 65J15*

## Continuous method of second order with constant coefficients for equations of monotone type

© I. P. Ryazantseva<sup>3</sup>, O. Yu. Bubnova<sup>4</sup>

**Abstract.** Convergence of the second order continuous method with constant coefficients for nonlinear equations is investigated. The cases of a monotone operator equation in Hilbert space and of an accretive operator equation in reflexive Banach space which is strictly convex together with its conjugate, are considered separately. In each case, sufficient conditions for the convergence with respect to the norm of the space specified by the method are obtained. In the accretive case, sufficient conditions for the continuous method convergence include not only the requirements on the operator equation and on the coefficients of the differential equation defining the method, but also on the geometry of space where the equation is solved. Examples of Banach spaces with the desired geometric properties are shown.

**Key Words:** Hilbert space, Banach space, strongly monotone operator, Lipschitz condition, strongly accretive operator, duality mapping, continuous method, convergence.

### REFERENCES

1. M. M. Vainberg, *Variacionnyj metod i metod monotonnyh operatorov v teorii nelinejnyh uravnenij [Variational method and the monotone operator method in the theory of nonlinear equations]*, Nauka, Publ., M., 1972 (In Russ.), 416 p.
2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear III-posed problems of monotone type*, Springer Publ., Dordrecht, 2006, 410 p.

---

<sup>3</sup> Irina P. Ryazantseva, Professor, Department of Mathematics, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (24 Minin St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [lryazantseva@aplmath.ru](mailto:lryazantseva@aplmath.ru)

<sup>4</sup> Oksana Yu. Bubnova, Associate Professor, Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoe shosse, boks 268, Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5845-4652>, [bubnovaoyu@mail.ru](mailto:bubnovaoyu@mail.ru)

3. V. A. Trenogin, *Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 495 p.
4. F. P. Vasilev, *Metody reshenija ekstremal'nyh zadach [Methods for solving of extremal problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 410 p.
5. I. P. Ryazantseva, “[Continuous methods for constrained minimization problems]”, *Comp. Math. and Math. Phys.*, **39**:5 (1999), 702–710.
6. I. P. Ryazantseva, “[Second order methods for accretive inclusions in a Banach space]”, *Differenc. uravneniya*, **50**:9 (2014), 1264–1275 (In Russ.).
7. I. P. Ryazantseva, O. Yu. Bubnova, “[Continuous second order methods for nonlinear accretive inclusions in a Banach space]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **3–4**:1 (2002), 327–334 (In Russ.).
8. O. Yu. Bubnova, *Nepreryvnye i iterativnye metody reshenija nelinejnyh nekorrektnykh zadach monotonnogo tipa [Continuous and iterative methods for solving nonlinear ill-posed problems of monotone type]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [Ph.D. phys. and math. sci. diss.], Nizhny Novgorod, 2005, 111 p.

*Submitted 30.11.2017*

УДК 519.17

## О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего максимальные независимые множества в полных деревьях

© Д. С. Талецкий<sup>1</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается нелинейное рекуррентное уравнение второго порядка, возникающее при анализе количества независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях. Ранее было доказано, что при  $q = 2$  решение данного уравнения имеет предел, а при любом достаточно большом  $q$  оно распадается на три сходящиеся подпоследовательности, индексы которых соответствуют классам вычетов по модулю три. Ранее проведенный вычислительный эксперимент позволил предположить, что этот эффект имеет место при любом  $q \geq 11$ . В настоящей работе доказывается расходимость решения при любом  $q \geq 3$ . Необходимым условием одновременной сходимости всех трех подпоследовательностей решения, индексы которых соответствуют классам вычетов по модулю три, является существование специального решения некоторой системы нелинейных уравнений. Проведенный в настоящей работе численный поиск решений системы показал, что при  $3 \leq q \leq 9$  соответствующего решения системы не существует. Численно-аналитическим образом в данной работе показывается нераспадаемость на три подпоследовательности и для  $q = 10$ .

**Ключевые слова:** рекуррентное уравнение, теорема расходимости, вычислительный эксперимент.

### 1. Введение

Исследованию асимптотики количества независимых множеств в графах из параметрически заданных классов (в зависимости от параметров класса) посвящено множество работ ([1]–[8]). Так, А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко исследовали асимптотику количества независимых множеств в  $n$ -мерном кубе [1]. Н. Калкин и Г. Вилф описали слабую асимптотику количества независимых множеств в плоской прямоугольной решетке [5]. П. Киршенхофер, Х. Продинггер и Р. Тишай рассматривали случай полных  $q$ -арных деревьев. Количество независимых множеств в полном  $q$ -арном дереве высоты  $n$  обозначим через  $i(q, n)$ . П. Киршенхофер, Х. Продинггер и Р. Тишай доказали в [2] существование таких констант  $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$  ( $\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2}$ ), что для любого  $q \in \overline{2,4}$  при  $n \rightarrow \infty$  выполнена асимптотика  $i(q, n) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$  и для любого  $q \geq 5$  при  $k \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики:

$$i(q, 2k) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}, i(q, 2k+1) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}.$$

В работе [4] рассматривалась величина  $mi(q, n)$  — количество максимальных независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях высоты  $n$ . Согласно данному исследованию, для некоторых констант  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство  $mi(q, n) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$ . В работе [4] было также доказано, что для любого достаточно большого  $q$ , некоторых трех попарно различных констант  $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$  и константы  $b_q$  при

<sup>1</sup> Талецкий Дмитрий Сергеевич, лаборант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0966-3903>, dmitailmail@gmail.com

$k \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические равенства:

$$\text{mi}(q, 3k) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \text{mi}(q, 3k + 1) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \text{mi}(q, 3k + 2) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}.$$

Проведенный в [4] вычислительный эксперимент позволил предположить, что второй результат справедлив для любого  $q \geq 11$ . Оба результата получены анализом свойств решения определенного рекуррентного уравнения с некоторыми начальными условиями, связывающего величины  $\text{mi}(q, n)$ ,  $\text{mi}(q, n - 1)$  и  $\text{mi}(q, n - 2)$ . Если принять  $a(q, n) \triangleq \frac{\text{mi}(q, n)}{(\text{mi}(q, n - 1))^q}$ , то данное уравнение приобретает вид:

$$\begin{aligned} a(q, n) &= \frac{1}{(a(q, n-1))^q} + 1 - \left(1 - \frac{1}{a(q, n-1) \cdot (a(q, n-2))^q}\right)^q, \\ a(q, 1) &= 2, \\ a(q, 2) &= 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В [4] было доказано, что последовательность  $\{a(2, n)\}$  имеет предел и что каждая из последовательностей  $\{a(q, 3k)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 1)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 2)\}$  также имеет свой предел при любом достаточно большом  $q$ . Из этого утверждения следуют результаты, упомянутые в предыдущем абзаце. Однако в работе [4] не исследовалось поведение последовательности  $\{a(q, n)\}$  при малых  $q$ . В настоящей работе мы показываем, что при любом  $q \geq 3$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  не имеет предела, а следовательно не существует констант  $\alpha_q''$  и  $\beta_q''$  таких, что  $\text{mi}(q, n) \sim \alpha_q'' \cdot (\beta_q'')^{q^n}$ . Это первый основной результат настоящей работы. Необходимым условием одновременной сходимости всех трех подпоследовательностей  $\{a(q, 3k)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 1)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 2)\}$  является существование специального решения некоторой системы нелинейных уравнений. Проведенный в настоящей работе численный поиск решений данной системы показал, что при  $3 \leq q \leq 9$  соответствующего решения не существует. Поэтому для таких значений  $q$  не существует трех попарно различных констант  $\alpha_q^{(I)}$ ,  $\alpha_q^{(II)}$ ,  $\alpha_q^{(III)}$  и константы  $\beta_q'''$  таких, что при  $k \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические равенства:

$$\text{mi}(q, 3k) \sim \alpha_q^{(I)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k}}, \text{mi}(q, 3k + 1) \sim \alpha_q^{(II)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k+1}}, \text{mi}(q, 3k + 2) \sim \alpha_q^{(III)} \cdot (\beta_q''')^{q^{3k+2}}.$$

Дополнительные численно-аналитические рассуждения показали, что данное утверждение справедливо также для  $q = 10$ . Полученные результаты составляют второй основной результат настоящей работы.

## 2. О расходимости последовательности $a(q, n)$ при $q \geq 3$

В данном разделе докажем, что при любом  $q \geq 3$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  не имеет предела. Введем обозначение:  $f(t_1, t_2) \triangleq \frac{1}{t_1} + 1 - \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right)^q$ . Отметим, что в списках аргументов функций мы не будем явно указывать аргумент  $q$ . Тогда соотношение 1.1 имеет вид:  $a(q, n) = f(a(q, n - 1), a(q, n - 2))$ . Согласно работе [4] доказано, что  $1 \leq a(q, n) \leq 2$  для любых  $q \geq 2$  и  $n$ , поэтому далее будем рассматривать функцию  $f(t_1, t_2)$  только на множестве  $\{(t_1, t_2) : (t_1, t_2) \in [1, 2]^2, f(t_1, t_2) \geq 1\}$ .

Частные производные функции  $f(t_1, t_2)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(t_1, t_2) &= -\frac{q}{t_1^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2}, \\ f'_{t_2}(t_1, t_2) &= -q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right)^{q-1} \cdot \frac{q}{t_1 t_2^{q+1}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Поскольку частные производные функции  $f(t_1, t_2)$  отрицательны при положительных  $t_1$  и  $t_2$ , то функция  $f(t_1, t_2)$  убывает в первом квадранте. Вместе с тем  $f(1, 1) = 2$  и

$f(2, 2) < 2$  для любого  $q \geq 2$ . Поэтому уравнение  $f(t, t) = t$  имеет единственное решение на множестве  $[1, 2]$ , которое мы обозначим через  $L_q$ . Очевидно, что  $1 < L_q < 2$ . Не существует такого  $n$ , что выполнено равенство  $a(q, n+1) = a(q, n) = L_q$ . Действительно, иначе  $L_q = f(L_q, a(q, n-1))$ , откуда по формулам 2.1 следовало бы, что  $a(q, n-1) = L_q$  и поэтому  $a(q, 1) = a(q, 2)$ . Данное равенство не возможно.

Предположим, что при некотором  $q \geq 3$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  имеет предел. Тогда он должен быть решением уравнения  $f(t, t) = t$ , т.е. совпадать с  $L_q$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_q &\triangleq f'_{t_1}(L_q, L_q) = -\frac{q}{L_q^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{L_q^{q+1}}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{L_q^{q+2}}, \\ B_q &\triangleq f'_{t_2}(L_q, L_q) = -q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{L_q^{q+1}}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{L_q^{q+2}}, \\ T_q &\triangleq 1 - \frac{1}{L_q^{q+1}}. \end{aligned}$$

Тогда равенство  $f(L_q, L_q) = L_q$  переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} T_q^q + L_q \cdot T_q = 1 \\ T_q = 1 - \frac{1}{L_q^{q+1}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Л е м м а 2.1** При любом  $q \geq 3$  справедливы неравенства  $B_q < -1$  и  $B_q < A_q + 1$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Компьютерные вычисления показывают, что верны равенства:

$$\begin{aligned} L_3 &= 1.265\dots, L_4 = 1.238\dots, L_5 = 1.216\dots, \\ A_3 &= -1.515\dots, A_4 = -1.689\dots, A_5 = -1.836\dots, \\ B_3 &= -1.032\dots, B_4 = -1.255\dots, B_5 = -1.447\dots \end{aligned}$$

Очевидно, что утверждение леммы верно при  $3 \leq q \leq 5$ . Предположим, что  $q \geq 6$ . Пусть  $\lambda = 1.432\dots$  — решение уравнения  $\lambda \cdot e^\lambda = 6$ . Очевидно, что  $|B_q| = q^2 \cdot \frac{T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}}$ .

Предположим, что  $T_q \geq 1 - \frac{\lambda}{q}$ . Из второго равенства системы 2.2, неравенства Бернулли  $T_q^q > 1 - \frac{q}{L_q^{q+1}}$  и неравенства  $(1 - 1/x)^x > \frac{1}{e}$ , верного для любого  $x > 1$ , следует, что справедливо неравенство:

$$\frac{1}{e^\lambda} + 1 - \frac{\lambda}{q} < \max \left( \left(1 - \frac{\lambda}{q}\right)^q + 1 - \frac{\lambda}{q}, 1 - \frac{q}{L_q^{q+1}} + L_q \cdot T_q \right) \leq T_q^q + L_q \cdot T_q = 1,$$

откуда  $q < \lambda \cdot e^\lambda = 6$ . Поэтому  $T_q < 1 - \frac{\lambda}{q}$ . Тогда  $\frac{1}{L_q^{q+1}} > \frac{\lambda}{q}$  и  $|B_q| > \lambda \cdot q \cdot \frac{T_q^{q-1}}{L_q}$ . Покажем, что  $\lambda \cdot q \cdot \frac{T_q^{q-1}}{L_q} > 1$ . Предположим противное:  $T_q^q \leq \frac{L_q \cdot T_q}{\lambda \cdot q}$ . Отсюда и первого равенства системы (2.2) следует, что  $L_q \cdot T_q \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda \cdot q}\right) \geq 1$ , т. е.

$$L_q \cdot T_q \geq \frac{\lambda \cdot q}{1 + \lambda \cdot q} = 1 - \frac{1}{\lambda \cdot q + 1} > 1 - \frac{1}{\lambda \cdot q}.$$

Тогда из последнего неравенства и первого равенства системы (2.2) следует, что выполнены неравенства:

$$T_q^q < \frac{1}{\lambda \cdot q}, L_q^q \cdot T_q^q > \left(1 - \frac{1}{\lambda \cdot q}\right)^q > e^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

Поскольку  $\frac{1}{L_q^{q+1}} > \frac{\lambda}{q}$ , то  $\frac{q}{\lambda} > L_q^{q+1} > L_q^q$ . Тогда  $\frac{1}{\lambda^2} > L_q^q \cdot T_q^q > e^{-\frac{1}{\lambda}}$ , т. е.  $\lambda^2 e^{-\frac{1}{\lambda}} < 1$ . Но  $\lambda^2 e^{-\frac{1}{\lambda}} = 1.020\dots$ . Получаем противоречие с предположением. Поэтому неравенство  $B_q < -1$  выполнено для любого  $q \geq 3$ .

Очевидно, что  $A_q = -\frac{q}{L_q^{q+1}} + \frac{B_q}{q}$  и поэтому неравенство  $B_q < 1 + A_q$  равносильно неравенству:

$$\frac{q \cdot (q - 1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} > \frac{q}{L_q^{q+1}} - 1. \tag{2.3}$$

Предположим, что неравенство (2.3) не выполняется. Тогда выполнены неравенства:

$$\frac{q \cdot (q - 1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} \leq \frac{q}{L_q^{q+1}}, T_q^q \leq \frac{L_q \cdot T_q}{q - 1}.$$

Отсюда и второго равенства системы (2.2) следует, что выполнено неравенство  $L_q \cdot T_q \geq (1 - \frac{1}{q})$ . Но тогда выполнены неравенства:

$$L_q^{q-1} \cdot T_q^{q-1} \geq (1 - \frac{1}{q})^{q-1} \geq (1 - \frac{1}{q-1})^{q-1} > \frac{1}{e},$$

т. е.  $T_q^{q-1} > \frac{1}{e \cdot L_q^{q-1}}$ . Из последнего неравенства следует выполнение неравенств:

$$\frac{q \cdot (q - 1) \cdot T_q^{q-1}}{L_q^{q+2}} > \frac{q \cdot (q - 1)}{e \cdot L_q^{2q+1}} > \frac{q \cdot (q - 1)}{e \cdot L_q^{2q+2}}.$$

Проверим, что выполнено неравенство  $\frac{q \cdot (q - 1)}{e \cdot L_q^{2q+2}} > \frac{q}{L_q^{q+1}} - 1$ . Рассмотрим функцию  $g(t) \triangleq \frac{q \cdot (q - 1)}{e} \cdot t^2 - q \cdot t + 1$ . Функция  $g(t)$  является квадратным трехчленом с положительным старшим коэффициентом. Уравнение  $g(t) = 0$  не имеет вещественных корней, поскольку соответствующий дискриминант равен  $q^2 - \frac{4}{e} \cdot q \cdot (q - 1)$ , который является отрицательным при любом  $q \geq 4$ . Тогда  $g(t) > 0$  для любого  $t$ . Заметим, что

$$g\left(\frac{1}{L_q^{q+1}}\right) = \frac{q \cdot (q - 1)}{e \cdot L_q^{2q+2}} - \frac{q}{L_q^{q+1}} + 1 > 0.$$

Поэтому предположение было неверным и выполняется неравенство 2.3, т. е. неравенство  $B_q < 1 + A_q$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**Л е м м а 2.2** Пусть  $z_{q,1}, z_{q,2}$  — корни уравнения  $z^2 = A_q \cdot z + B_q$ , возможно, комплексные. Тогда выполнено неравенство  $\min(|z_{q,1}|, |z_{q,2}|) > 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Уравнение  $z^2 - A_q \cdot z - B_q = 0$  имеет коэффициенты  $A_q < 0$  и  $B_q < -1$ , согласно предыдущей лемме. Дискриминант  $D_q$  этого уравнения равен  $A_q^2 + 4 \cdot B_q$ . Если  $D_q \geq 0$ , то  $A_q^2 \geq -4 \cdot B_q > 4$ , т. е.  $A_q < -2$ . Тогда

*Д. С. Талецкий. О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего...*

$$z_{q,1} = \frac{A_q - \sqrt{D_q}}{2}, z_{q,2} = \frac{A_q + \sqrt{D_q}}{2}, z_{q,1} \leq z_{q,2}.$$

Поскольку  $B_q < A_q + 1$ , согласно предыдущей лемме, то выполнено неравенство  $z_{q,2} < -1$ . Если  $D_q < 0$ , то справедливы равенства:

$$|D_q| = -A_q^2 - 4 \cdot B_q, z_{q,1} = \frac{A_q - \sqrt{|D_q|} \cdot i}{2}, z_{q,2} = \frac{A_q + \sqrt{|D_q|} \cdot i}{2}.$$

Тогда  $|z_{q,1}| = |z_{q,2}| = -B_q > 1$ .

Доказательство закончено.

**Теорема 2.1** Для любого  $q \geq 3$  последовательность  $\{a(q, n)\}$  не имеет предела.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть  $\epsilon_q(n) \triangleq a(q, n) - L_q$ . Тогда  $\epsilon_q(n) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , причем последовательность  $\{\epsilon_q(n)\}$  не содержит двух подряд идущих нулей. Из формулы Тейлора следует, что

$$\epsilon_q(n) = A_q \cdot \epsilon_q(n-1) + B_q \cdot \epsilon_q(n-2) + O(\epsilon_q^2(n-1) + \epsilon_q^2(n-2)).$$

Уравнение  $b_q(n) = A_q \cdot b_q(n-1) + B_q \cdot b_q(n-2)$  с нетривиальными начальными условиями  $(b_q(1), b_q(2)) \neq (0, 0)$  имеет характеристическое уравнение  $z^2 = A_q \cdot z + B_q$ . Значит, для некоторых констант  $C_{q,1}, C_{q,2}$  справедливо равенство  $b_q(n) = C_{q,1} \cdot (z_{q,1})^n + C_{q,2} \cdot (z_{q,2})^n$ . Поскольку  $(b_q(1), b_q(2)) \neq (0, 0)$ , то  $C_{q,1}^2 + C_{q,2}^2 \neq 0$ . Поэтому  $b_q(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При больших  $n$  значение  $b_q(n)$  будет близко к  $\epsilon_q(n)$ . Значит,  $\epsilon_q(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Получаем противоречие с предположением.

Доказательство закончено.

### 3. Численно-аналитическое обоснование отсутствия при малых $q$ периодических точек периода 3

В данном разделе мы рассматриваем значения  $q \in \overline{3, 10}$  и численно-аналитически показываем, что подпоследовательности  $\{a(q, 3k)\}, \{a(q, 3k+1)\}, \{a(q, 3k+2)\}$  не могут быть одновременно сходящимися. Предположим противное, т. е. что одновременно выполнены предельные переходы:

$$a(q, 3k+1) \rightarrow z_q^*, a(q, 3k+2) \rightarrow x_q^*, a(q, 3k+3) \rightarrow y_q^*.$$

Очевидно, что  $(x_q^*, y_q^*, z_q^*) \neq [1, 2]^3 \setminus \{(L_q, L_q, L_q)\}$  — решение следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x = f(z, y), \\ y = f(x, z), \\ z = f(y, x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Мы будем работать со следующей системой уравнений, которая является следствием системы (3.4), и численно искать все ее решения на множестве  $[0, 2]^2$ :

$$\begin{cases} x = f(f(y, x), y), \\ y = f(x, f(y, x)). \end{cases} \quad (3.5)$$

Д. С. Талецкий. О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего...

Систему (3.5) будем численно решать следующим образом. На квадрате  $[0, 2]^2$  введем сетку  $1000 \times 1000$  и будем искать точки данной сетки, принадлежащие множеству  $[0, 2]^2 \setminus [L_q - \frac{1}{10}, L_q + \frac{1}{10}]^2$ , в которых невязка системы 3.5 близка к минимальной. На квадрате  $[L_q - \frac{1}{10}, L_q + \frac{1}{10}]^2$  опять наложим сетку  $1000 \times 1000$  и будем искать точки данной сетки, в которых невязка системы (3.5) близка к минимальной. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что решения системы 3.4 имеют следующий вид:

Таблица 1: Решения системы 3.4.

$q$	Решения системы 3.4
3	$(1.265\dots, 1.265\dots, 1.265\dots) = (L_3, L_3, L_3)$
4	$(1.238\dots, 1.238\dots, 1.238\dots) = (L_4, L_4, L_4)$
5	$(1.216\dots, 1.216\dots, 1.216\dots) = (L_5, L_5, L_5)$
6	$(1.198\dots, 1.198\dots, 1.198\dots) = (L_6, L_6, L_6)$
7	$(1.183\dots, 1.183\dots, 1.183\dots) = (L_7, L_7, L_7)$
8	$(1.171\dots, 1.171\dots, 1.171\dots) = (L_8, L_8, L_8)$
9	$(1.160\dots, 1.160\dots, 1.160\dots) = (L_9, L_9, L_9)$
10	$(1.151\dots, 1.151\dots, 1.151\dots) = (L_{10}, L_{10}, L_{10})$ $(1.001\dots, 1.034\dots, 1.715\dots), (1.715\dots, 1.001\dots, 1.034\dots), (1.034\dots, 1.715\dots, 1.001\dots)$

Из проведенного эксперимента видно, что при любом  $q \in \overline{3, 9}$  точки  $(x_q^*, y_q^*, z_q^*)$  не существует. Значит, при всех таких  $q$  подпоследовательности  $\{a(q, 3k)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 1)\}$ ,  $\{a(q, 3k + 2)\}$  не могут быть одновременно сходящимися.

Определим параметры:

$$\zeta_{q,k} \triangleq a(q, 3k + 1) - z_q^*, \theta_{q,k} \triangleq a(q, 3k + 3) - y_q^*.$$

В работе [4] была показана справедливость следующего равенства:

$$\begin{pmatrix} \zeta_{q,k+1} \\ \theta_{q,k} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_q \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{q,k} \\ \theta_{q,k-1} \end{pmatrix} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2),$$

где  $\mathbf{M}_q \triangleq \begin{pmatrix} M_q^{(1,1)} & M_q^{(1,2)} \\ M_q^{(2,1)} & M_q^{(2,2)} \end{pmatrix}$  и коэффициенты  $M_q^{(1,1)}, M_q^{(1,2)}, M_q^{(2,1)}, M_q^{(2,2)}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_q^{(1,1)} &\triangleq f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) + f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \\ M_q^{(1,2)} &\triangleq f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \\ M_q^{(2,1)} &\triangleq f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) \\ M_q^{(2,2)} &\triangleq f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \end{aligned}$$

Далее примем  $q = 10$  и вычислим обе частные производные функции  $f(t_1, t_2)$  в трех точках. В точке  $(x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*) = (1.001\dots, 1.034\dots, 1.715\dots)$  они равны:

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) &= -9.934\dots, f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) = -0.045\dots, f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) = -6.922\dots, \\ f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) &= -0.254\dots, f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) = -0.312\dots, f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) = 0.000\dots; \end{aligned}$$

в точке  $(x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*) = (1.715\dots, 1.001\dots, 1.034\dots)$  они равны:

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) &= -6.922\dots, f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) = -9.934\dots, f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) = -0.045\dots, \\ f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) &= 0.000\dots, f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) = -0.254\dots, f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) = -0.312\dots; \end{aligned}$$

в точке  $(x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*) = (1.034\dots, 1.715\dots, 1.001\dots)$  они равны:

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) &= -0.045\dots, f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) = -6.922\dots, f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) = -9.934\dots, \\ f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) &= -0.312\dots, f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) = 0.000\dots, f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) = -0.254\dots; \end{aligned}$$

В первом случае  $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} -1.336\dots & -21.454 \\ 0.193\dots & 3.099\dots \end{pmatrix}$ , во втором  $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} -0.005\dots & 0.0001\dots \\ 68.763\dots & 1.758\dots \end{pmatrix}$ , а в третьем  $\mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} 1.763\dots & 0.000\dots \\ -0.312\dots & 0.000\dots \end{pmatrix}$ . В первом случае собственные значения матрицы  $\mathbf{M}_{10}$  равны 1.762... и 0.0002..., во втором — 1.761... и -0.008..., а в третьем — 1.763... и 0.000...

При больших значениях  $k$  пара  $(\zeta_{10,k+1}, \theta_{10,k})$  будет близка к паре  $(x_{k+1}, y_k)$  — решению системы  $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{10} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$  с некоторыми начальными условиями. Общим решением данной системы будет  $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = C_1 \cdot \lambda_1^k \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \lambda_2^k \cdot \mathbf{v}_2$ , где  $\lambda_1 > 1, \lambda_2$  — собственные числа матрицы  $\mathbf{M}_{10}$ , а  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  — ее собственные векторы. Если для некоторых начальных условий  $C_1 = 0$ , то норма вектора  $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$  будет экспоненциально быстро сходиться к нулю, а следовательно норма вектора  $\begin{pmatrix} \zeta_{10,k+1} \\ \theta_{10,k} \end{pmatrix}$  также должна экспоненциально быстро сходиться к нулю. Проведенный в работе [4] вычислительный эксперимент показал, что это не так. Поэтому  $C_1 \neq 0$ . Значит, норма вектора  $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$  не будет стремиться к нулю, и поэтому либо  $a(10, 3k+1) \rightarrow z_{10}^*$ , либо  $a(10, 3k+2) \rightarrow x_{10}^*$ , либо  $a(10, 3k+3) \rightarrow y_{10}^*$ .

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда в рамках научного проекта № 17-11-01336.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Д. Коршунов, А. А. Сапоженко, “О числе двоичных кодов с расстоянием 2”, *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 111–130.
2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.
3. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: III”, *Proceedings of the First International Conference on Fibonacci Numbers and Applications*, 1986, 105–120.
4. Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, “О количестве максимальных независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях”, *Дискретная математика*, **28**:4 (2016), 139–149.
5. N. J. Calkin, H. S. Wilf, “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.
6. S. Oh, S. Lee, “Enumerating independent vertex sets in grid graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.

Д. С. Талецкий. О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего...

7. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.
8. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

*Поступила 4.12.2017*

MSC2010 05C30

# On properties of solution of a recurrent equation appearing in enumeration of maximal independent sets in complete trees

© D. S. Taletskii<sup>2</sup>

**Abstract.** The article considers a second-order nonlinear recurrent equation arising in analysis of the independent sets' quantity in complete  $q$ -ary trees. We proved earlier that for  $q = 2$  its solution has a limit and for any sufficiently large  $q$  the solution splits into three converging subsequences with indices corresponding to the residue classes modulo 3. Computational experiment allowed to assume that this effect holds for any  $q \geq 11$ . The present paper proves divergence of the solution for any  $q \geq 3$ . The necessary condition for simultaneous convergence of all subsequences of the solution, with indices corresponding to the residue classes modulo 3, is the existence of a special solution of some nonlinear equations' system. Numerical search for solutions of the system, conducted in the present paper, showed that there is no corresponding solution of the system for any  $3 \leq q \leq 9$ . We numerically and analytically show that the non-disintegrability into three subsequences takes place also for  $q = 10$ .

**Key Words:** recurrent equation, divergence theorem, computational experiment.

## REFERENCES

1. A. D. Korshunov, A. A. Sapozhenko, “[On the number of binary codes with distance two]”, *Problemy kibernetiki*, **40** (1983), 111–130 (In Russ.).
2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.
3. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: III”, *Proceedings of the First International Conference on Fibonacci Numbers and Applications*, 1986, 105–120.
4. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, “[On the number of maximal independent sets in complete  $q$ -ary trees]”, *Diskretnya Matematika*, **28**:4 (2016), 139–149 (In Russ.).
5. N. J. Calkin, H. S. Wilf, “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.
6. S. Oh, S. Lee, “Enumerating independent vertex sets in grid graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.
7. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.
8. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Submitted 4.12.2017

---

<sup>2</sup> **Dmitry S. Taletskii**, Laboratory Assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0966-3903>, [dmitailmail@gmail.com](mailto:dmitailmail@gmail.com)

УДК 517.9

# Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами

© А. Н. Тында<sup>1</sup>, Д. Н. Сидоров<sup>2</sup>, И. Р. Муфтахов<sup>3</sup>

**Аннотация.** Работа посвящена численному исследованию систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с ядрами, имеющими конечные разрывы вдоль непрерывных кривых. Приведены необходимые теоретические сведения относительно существования и единственности решений таких систем. Предлагается новый итерационный численный метод, в основе которого лежит линейаризация интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Для этого вычислены производные Фреше компонентов нелинейного векторного интегрального оператора в точке начального приближения. Ядра интегральных уравнений линейных систем остаются неизменными на каждой итерации, что позволяет снизить вычислительные затраты при численной реализации метода. Для линейных систем интегральных уравнений, возникающих на каждом шаге итерационного процесса, применяется кусочно-постоянная аппроксимация точного решения и специальные адаптивные сетки, учитывающие разрывы ядер. Приведена оценка погрешности метода. Предложенный численный подход допускает также использование более точных аппроксимаций решения в сочетании с соответствующими квадратурными формулами. При использовании кусочно-линейной аппроксимации порядок точности возрастает на единицу.

**Ключевые слова:** системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, разрывные ядра, метод Ньютона-Канторовича, адаптивные сетки, аппроксимация интегралов.

## 1. Введение

Функциональные уравнения (дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения) с различного рода отклоняющимися аргументами (задержками) являются универсальным средством моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, медицины, экономики и в других областях, см., например, [1]–[2]. При этом основанные на них модели обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания. Интегральными динамическими моделями с запаздываниями можно описывать большое многообразие процессов. Такие модели учитывают эффект памяти динамических систем, когда прошлые состояния системы воздействуют на развитие в будущем. Интегральные уравнения с отклоняющимися аргументами (задержками) являются удобным аппаратом моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, экономики и т. д. Точные решения таких

<sup>1</sup> Тында Александр Николаевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

<sup>2</sup> Сидоров Денис Николаевич, ведущий научный сотрудник Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1325>, contact.dns@gmail.com

<sup>3</sup> Муфтахов Ильдар Ринатович, специалист Главного вычислительного центра ОАО «РЖД» (664005, г. Иркутск, ул. Маяковского, д. 25), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2516-459X>, ildar\_sm@mail.ru

уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальной является разработка эффективных численных методов их решения.

Одним из классов функциональных уравнений с задержками являются интегральные уравнения Вольтерра и их системы, ядра которых терпят конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле работ авторов [2] – [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек. В данной работе итерационный численный метод обобщается и распространяется на системы уравнений такого типа.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Вольтерра I рода [2], [4]:

$$\begin{cases} \int_0^t h_1(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_1(t) = 0, \\ \int_0^t h_2(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_2(t) = 0, \\ \vdots \\ \int_0^t h_n(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds - f_n(t) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $t \in [0, T]$ , а ядра  $h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$ , терпящие конечные разрывы на линиях  $\alpha_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , имеют вид

$$h_i(t, s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) = \begin{cases} K_{i1}(t, s)G_{i1}(s, x_1(s)), & (t, s) \in m_1, \\ K_{i2}(t, s)G_{i2}(s, x_2(s)), & (t, s) \in m_2, \\ \vdots \\ K_{in}(t, s)G_{in}(s, x_n(s)), & (t, s) \in m_n, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $m_j = \{(t, s) \mid \alpha_{j-1}(t) < s \leq \alpha_j(t)\}$ ;  $\alpha_0(t) = 0$ ;  $\alpha_n(t) = t$ ;  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, n}$ . Функции  $K_{ij}(t, s)$ ,  $f_i(t)$  и  $\alpha_j(t)$  имеют непрерывные производные относительно  $t$  при  $(t, s) \in \overline{m_j}$ ,  $K_{in}(t, t) \neq 0$ ,  $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$ . Функции  $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  являются неубывающими при  $t \in [0, T]$ . Вопрос существования и единственности решения такого класса нелинейных систем изучался в работе [4].

В данной работе предлагается итерационный метод решения такого рода систем, основанный на линеаризации интегрального вектор-оператора. Для решения возникающих в итерационном процессе систем линейных уравнений с разрывными ядрами используется обобщение алгоритма прямой дискретизации, предложенного в работах [3]–[5]. Метод основан на кусочно-постоянной аппроксимации точных решений и имеет первый порядок точности.

## 3. Описание приближенного метода

Обозначим через  $P_i$  левую часть  $i$ -го уравнения системы (2.1):

$$P_i = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t, s)G_{ij}(s, x_j(s)) ds - f_i(t), \quad (3.1)$$

через  $X$  – вектор неизвестных функций, а через  $F$  – вектор правых частей  $f_i$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Также введем матричный интегральный оператор

$$P(X) \equiv \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

компонентами которого являются нелинейные интегральные операторы

$$(P_{ij}x)(t) \equiv \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t, s) G_{ij}(s, x(s)) ds, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Перепишем систему (2.1) в операторном виде:

$$P(X) = 0. \quad (3.3)$$

Для построения итерационного численного метода решения уравнения (3.3) используем модифицированную схему Ньютона-Канторовича [6]:

$$X^{m+1} = X^m - [P'(X^0)]^{-1}(P(X^m)), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3.4)$$

где  $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$  – вектор-функция начального приближения, а решение уравнения

(3.3) определяется как предел  $X^* = \lim_{m \rightarrow \infty} X^m$ . Производная  $P'(X^0)$  оператора (3.2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \frac{\partial P_{1n}}{\partial x_n(t)} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \frac{\partial P_{2n}}{\partial x_n(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_{n1}}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial P_{n2}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \frac{\partial P_{nn}}{\partial x_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ее компоненты  $\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)(t) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(x_j^0 + \omega x) - P_{ij}(x_j^0)}{\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t, s) [G_{ij}(s, x_j^0(s) + \omega x(s)) - G_{ij}(s, x_j^0(s))] ds. \end{aligned}$$

Осуществив предельный переход под знаком интеграла, получим:

$$\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)(t) = \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t, s) G_{ij_x}(s, x_j^0(s)) x(s) ds,$$

где

$$G_{ij_x}(s, x_j^0(s)) = \left. \frac{\partial G_{ij}(s, x_j(s))}{\partial x_j} \right|_{x=x_j^0}.$$

На итерации с номером  $m$  имеем операторное уравнение относительно поправки  $\Delta X^{m+1} = X^{m+1} - X^m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$P'(X^0) \Delta X^{m+1} = -P(X^m),$$

которое в развернутом виде эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t, s) G_{1j}(s, x_j^0(s)) \Delta x_j^{m+1}(s) ds = f_1(t) - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t, s) G_{1j}(s, x_j^m(s)) ds, \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t, s) G_{2j}(s, x_j^0(s)) \Delta x_j^{m+1}(s) ds = f_2(t) - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t, s) G_{2j}(s, x_j^m(s)) ds, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{nj}(t, s) G_{nj}(s, x_j^0(s)) \Delta x_j^{m+1}(s) ds = f_n(t) - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{nj}(t, s) G_{nj}(s, x_j^m(s)) ds. \end{cases}$$

Последняя система после ряда упрощений приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t, s) G_{1j}(s, x_j^0(s)) x_j^{m+1}(s) ds = \Psi_1^m(t), \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t, s) G_{2j}(s, x_j^0(s)) x_j^{m+1}(s) ds = \Psi_2^m(t), \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{nj}(t, s) G_{nj}(s, x_j^0(s)) x_j^{m+1}(s) ds = \Psi_n^m(t), \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

где

$$\Psi_i^m(t) = f_i(t) - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t, s) [G_{ij_x}(s, x_j^0(s)) x_j^m(s) - G_{ij}(s, x_j^m(s))] ds.$$

Система (3.6) является системой линейных интегральных уравнений Вольтерра с разрывными ядрами  $K_{ij}(t, s) G_{ij}(s, x_j^0(s))$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , не изменяющимися от итерации к итерации. Численный метод решения подобных систем уравнений, участвующих в итерационном процессе (3.4), предложим далее.

## 4. Дискретизация системы линейных интегральных уравнений

### 4.1. Формулировка проблемы

В данном параграфе предлагается численный метод решения систем линейных интегральных уравнений, возникающих на каждом шаге итерационного процесса (3.4).

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений I рода следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_1(t, s) x_j(s) ds = f_1(t), \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_2(t, s) x_j(s) ds = f_2(t), \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_n(t, s) x_j(s) ds = f_n(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где ядра  $h_i(t, s)$ ,  $i = \overline{1, n}$  терпят конечные разрывы на линиях  $\alpha_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n-1}$  и имеют вид:

$$h_i(t, s) = \begin{cases} K_{i1} := K_{i1}(t, s) G_{i1}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_0(t) \leq s \leq \alpha_1(t); \\ K_{i2} := K_{i2}(t, s) G_{i2}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_1(t) \leq s \leq \alpha_2(t); \\ \vdots \\ K_{in} := K_{in}(t, s) G_{in}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_{n-1}(t) \leq s \leq \alpha_n(t). \end{cases}$$

Здесь, как и ранее,  $\alpha_0(t) \equiv 0$ ;  $\alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_n(t) \equiv t$ ;  $f(0) = 0$ . Введенные с целью упрощения изложения новые ядра  $K_{ij}(t, s)$  и правая часть  $f_i(t)$  являются непрерывными и достаточно гладкими функциями. Функции  $\alpha_j(t) \in C^1[0, T]$  и являются неубывающими. Кроме того,  $\alpha'_1(0) \leq \alpha'_2(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1$ . Подробное теоретическое исследование уравнений такого типа проведено в книге [2].

### 4.2. Кусочно-постоянная аппроксимация

Для построения численного решения системы (4.1) на отрезке  $[0, T]$  (в условиях существования единственного непрерывного решения) введем сетку узлов (необязательно равномерную):

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \quad h = \max_{j=\overline{1, N}} (t_j - t_{j-1}) = O(N^{-1}).$$

Приближенное решение системы (4.1) будем искать в виде вектора кусочно-постоянных функций:

$$X^N(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N x_1^j \delta_j(t) \\ \sum_{j=1}^N x_2^j \delta_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N x_n^j \delta_j(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (0, T], \quad \delta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \Delta_j = (t_{j-1}, t_j], \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j \end{cases}$$

с неопределенными пока коэффициентами  $x_i^j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Для определения значений  $x_i^0 = x_i(0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , продифференцируем обе части каждого уравнения системы (4.1) по  $t$ :

$$f'_i(t) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} \frac{\partial K_{ij}(t, s)}{\partial t} x_j(s) ds + \alpha'_j(t) K_{ij}(t, \alpha_j(t)) x_j(\alpha_j(t)) - \alpha'_{j-1}(t) K_{ij}(t, \alpha_{j-1}(t)) x_j(\alpha_{j-1}(t)) \right).$$

Используя последнее соотношение, приходим к необходимости решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n K_{1j}(0, 0) [\alpha'_j(0) - \alpha'_{j-1}(0)] x_j^0 = f'_1(0), \\ \sum_{j=1}^n K_{2j}(0, 0) [\alpha'_j(0) - \alpha'_{j-1}(0)] x_j^0 = f'_2(0), \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n K_{nj}(0, 0) [\alpha'_j(0) - \alpha'_{j-1}(0)] x_j^0 = f'_n(0) \end{cases} \quad (4.2)$$

относительно значений  $x_j^0$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Предполагается, что компоненты уравнения (4.1) таковы, что система линейных алгебраических уравнений (4.2) имеет единственное нетривиальное решение.

Введем далее обозначение  $f_i^k = f_i(t_k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Для определения коэффициентов  $x_j^1$  запишем каждое уравнение системы (4.1) в точке  $t = t_1$ :

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_1)}^{\alpha_j(t_1)} K_{ij}(t_1, s) x_j(s) ds = f_i^1. \quad (4.3)$$

Поскольку на данном шаге длины всех отрезков интегрирования  $\alpha_j(t_1) - \alpha_{j-1}(t_1)$  в (4.3) не превосходят максимального шага сетки  $h$ , а компоненты приближенного решения принимают значения  $x_j^1$ ,  $j = \overline{1, n}$ , то, применяя квадратурную формулу средних прямоугольников, получим систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (\alpha_j(t_1) - \alpha_{j-1}(t_1)) K_i(t_1, \frac{\alpha_j(t_1) + \alpha_{j-1}(t_1)}{2}) x_j^1 = f_i^1, \\ \sum_{j=1}^n (\alpha_j(t_1) - \alpha_{j-1}(t_1)) K_i(t_1, \frac{\alpha_j(t_1) + \alpha_{j-1}(t_1)}{2}) x_j^1 = f_i^2, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (\alpha_j(t_1) - \alpha_{j-1}(t_1)) K_i(t_1, \frac{\alpha_j(t_1) + \alpha_{j-1}(t_1)}{2}) x_j^1 = f_i^n, \end{cases}$$

из которой определяются значения  $x_j^1$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Обозначим далее через  $l_j^k$  номер отрезка сетки, на который попадает значение  $\alpha_j(t_k)$ , т. е. выполняется условие  $t_{l_j^k-1} \leq \alpha_j(t_k) \leq t_{l_j^k}$ .

Теперь предположим, что уже найдены значения  $x_j^2, x_j^3, \dots, x_j^{l_j^k-1}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Преобразуем систему уравнений (4.1) и потребуем выполнения равенств в точке  $t = t_k$ :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{1j}(t_k, s)x_j(s)ds = f_1^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{1j}(t_k, s)x_j^N(s)ds, \\ \sum_{j=1}^n \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{2j}(t_k, s)x_j(s)ds = f_2^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{2j}(t_k, s)x_j^N(s)ds, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{nj}(t_k, s)x_j(s)ds = f_n^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{nj}(t_k, s)x_j^N(s)ds. \end{cases}$$

С учетом используемой аппроксимации приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j^{l_j^k} \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{1j}(t_k, s)ds = f_1^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{1j}(t_k, s)x_j^N(s)ds, \\ \sum_{j=1}^n x_j^{l_j^k} \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{2j}(t_k, s)ds = f_2^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{2j}(t_k, s)x_j^N(s)ds, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j^{l_j^k} \int_{t_{j^{k-1}}}^{\alpha_j(t_k)} K_{nj}(t_k, s)ds = f_n^k - \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{j^{k-1}}} K_{nj}(t_k, s)x_j^N(s)ds. \end{cases} \quad (4.4)$$

При этом для вычисления интегралов в (4.4) используются составные формулы средних прямоугольников, построенные по вспомогательной сетке узлов, привязанной при каждом конкретном значении  $N$  к линиям  $\alpha_i(t)$  разрывов ядра  $K(t, s)$ .

Очевидно, что при такой аппроксимации метод имеет первый порядок точности, а оценку погрешности можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_N = \|X - X_N\|_{C[0, T]} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Также следует отметить, что предложенный численный подход допускает использование более точной аппроксимации решения. В частности, при использовании кусочно-линейной аппроксимации порядок точности возрастает на единицу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, 208 p.
2. D. N. Sidorov, *Integral dynamical models: singularities, signals and control*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 260 p.

3. Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов, “Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами”, *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*, **7:3** (2014), 107–115.
4. I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, “Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **9:1** (2016), 130–136.
5. I. R. Muftahov, A. N. Tynda, D. N. Sidorov, “Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313:15** (2017), 119–128.
6. L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 604 p.

Поступила 14.01.2018

MSC2010 65R20

## Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels

© A. N. Tynda <sup>4</sup>, D. N. Sidorov <sup>5</sup>, Ildar R. Muftahov <sup>6</sup>

**Abstract.** In this paper we investigate the systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with kernels having jump discontinuities along the set of smooth curves. The necessary theory concerning the existence and uniqueness of solutions of such systems is described. An iterative numerical method is proposed, based on the linearization of integral operators using the modified Newton-Kantorovich scheme. For this purpose, we calculate the Fréchet derivatives of the components of integral vector-operator at the initial approximation point. The kernels of the integral equations in the linear systems remain constant for each iteration. This allows to reduce the computational expenses in numerical realization of the method. For linear systems of integral equations arising at each step of the iterative process, we use a piecewise-constant approximation of the exact solution and special adaptive grids that take into account kernels discontinuities. The error of the method is estimated. Suggested numerical approach also allows the application of some more accurate approximations of the exact solution in aggregate with the corresponding quadrature formulas. The accuracy order increases by unity when the piecewise-linear approximation is used.

**Key Words:** systems of nonlinear Volterra integral equations, discontinuous kernels, Newton-Kantorovich method, adaptive meshes, approximation of the integrals.

---

<sup>4</sup> **Aleksandr N. Tynda**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)

<sup>5</sup> **Denis N. Sidorov**, Leading Research Fellow Energy Systems Institute Russian Academy of Sciences (130 Lermontov St. Irkutsk 664033, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1325>, [contact.dns@gmail.com](mailto:contact.dns@gmail.com)

<sup>6</sup> **I. R. Muftahov**, Postgraduate student, Main Computing Center of Joint Stock Company «Russian Railways» (25 Mayakovskogo St., Irkutsk 664005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2516-459X>, [ildar\\_sm@mail.ru](mailto:ildar_sm@mail.ru)

## REFERENCES

1. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, 208 p.
2. D. N. Sidorov, *Integral dynamical models: singularities, signals and control*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 260 p.
3. D. N. Sidorov, A. N. Tynda, I. R. Muftahov, “[Numerical solution of Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels]”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **7**:3 (2014), 107–115 (In Russ.).
4. I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, “Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **9**:1 (2016), 130–136.
5. I. R. Muftahov, A. N. Tynda, D. N. Sidorov, “Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119–128.
6. L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 604 p.

*Submitted 14.01.2018*

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.64-77

УДК 533.72

## Математическое моделирование процессов переноса в цилиндрическом канале

© О. В. Гермидер<sup>1</sup>, В. Н. Попов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В рамках кинетического подхода найдено решение задач о тепло- и массопереносе в длинном цилиндрическом канале с использованием зеркально-диффузной модели граничного условия Максвелла. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано уравнение Вильямса в предположении, что в канале поддерживается постоянный продольный градиент температуры. Уравнение Вильямса записано в декартовой системе координат. Решение линеаризованной задачи о неизотермическом течении разреженного газа через канал получено с применением метода характеристик. Показано, что вид граничного условия становится определяющим при построении этого решения. В широком диапазоне изменения значений числа Кнудсена вычислены приведенные потоки тепла и массы газа через поперечное сечение канала в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Получены предельные выражения этих потоков для свободномолекулярного и гидродинамического режимов течения. Проведено сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытой печати. Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых нанотехнологий.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Вильямса, зеркально-диффузное отражение, зеркально-диффузная модель, модель Максвелла, аналитическое решение, число Кнудсена.

## 1. Введение

Исследование течений в микро- и наноканалах в зависимости от модели взаимодействия молекул газа с обтекаемыми поверхностями имеет большое значение для применения новых технологий [1]. Наиболее известной моделью граничных условий является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. В модели Максвелла функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, имеет вид [2]:

$$f^+(\mathbf{r}'_{\Gamma}, \mathbf{v}) = (1 - \alpha)f^-(\mathbf{r}'_{\Gamma}, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{nv})) + \alpha f_{\Gamma}(\mathbf{r}'_{\Gamma}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{vn} > 0, \quad (1.1)$$

$$f_{\Gamma}(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n_{\Gamma}(\mathbf{r}') \left( \frac{m}{2\pi k_B T_{\Gamma}(\mathbf{r}')} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T_{\Gamma}(\mathbf{r}')} \mathbf{v}^2 \right), \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Гермидер Оксана Владимировна, аспирант кафедры математики, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова», (163002, Россия, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, o.germider@narfu.ru

<sup>2</sup> Попов Василий Николаевич, заведующий кафедрой математики, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова», (163002, Россия, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

где  $\alpha$  – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа;  $f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v})$  – функция распределения падающих молекул газа на обтекаемую поверхность  $\Gamma$ ;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности  $\Gamma$ , направленный в сторону газа;  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}$  – радиус-вектор и скорость молекул газа;  $m$  – масса молекул газа;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T_\Gamma(\mathbf{r}')$ ;  $n_\Gamma(\mathbf{r}')$  – температура и концентрация газа на поверхности соответственно. Коэффициент аккомодации тангенциального импульса в модели зеркально-диффузного отражения Максвелла (1.1) определяет вероятность того, что молекула отразится от стенки диффузно. При  $\alpha = 1$  зеркально-диффузное граничное условие переходит в модель диффузного отражения. В случае зеркального отражения коэффициент аккомодации тангенциального импульса принимает нулевое значение.

Другой моделью, описывающей взаимодействие молекул газа с поверхностью, является модель Черчиньяни-Лэмпис, в которой учитываются два параметра: коэффициент аккомодации тангенциального импульса и коэффициент аккомодации кинетической энергии  $\alpha_\tau$ , связанной с компонентой скорости  $v_n$  направленной по нормали к поверхности. В рамках этой модели функция распределения молекул газа, отраженных от поверхности канала, имеет вид [3]:

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = \frac{1}{|v_n|} \int_{v'_n < 0} |v'_n| R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}') d\mathbf{v}',$$

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{4\pi^2 \alpha_n \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau) (k_B T)^2} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sqrt{1 - \alpha_n} m v_n v'_n \cos \phi}{k_B T \alpha_n}\right) d\phi \times$$

$$\times \exp\left(\frac{m(v_n^2 + (1 - \alpha_n)v_n'^2)}{2k_B T \alpha_n} - \frac{m(\mathbf{v}_\tau + (1 - \alpha_\tau)\mathbf{v}'_\tau)^2}{2k_B T \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau)}\right), \quad (1.3)$$

где  $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  – ядро рассеяния;  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}$  – векторы скорости падающих и отраженных молекул газа от стенок канала. При  $\alpha_\tau = 0$  и  $\alpha_n = 0$  отражение является зеркальным, при  $\alpha_\tau = 1$  и  $\alpha_n = 1$  – диффузным.

В рамках модели зеркально-диффузного граничного условия Максвелла в работах [1], [4], [5] проведено вычисление потоков тепла и массы газ в зависимости от значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса в канале, образованном двумя бесконечными параллельными плоскостями. Для цилиндрического канала результаты вычислений массового потока с использованием зеркально-диффузного граничного условия Максвелла и S-модели кинетического уравнения Больцмана приведены в [6]; в [7] – на основе БГК. Диффузная модель отражения была использована в работах [8]–[11] для получения значений потоков тепла и массы в прямоугольном канале, в [12] – в канале треугольного сечения, в [13]–[16] в цилиндрическом канале, в [17]–[18] – в канале эллиптического сечения. В работах [8]–[10], [12]–[15], [17] результаты получены с использованием численного интегрирования S-модели кинетического уравнения Больцмана.

Вместе с тем интерес представляет применение точных аналитических методов. Аналитическое решение уравнения Вильямса в задачах о тепловом крипе в прямоугольном, цилиндрическом и эллиптическом каналах получено в [11], [16]–[18] соответственно. Численное моделирование процесса массопереноса с граничным условием Черчиньяни-Лэмпис в прямоугольном канале осуществлено в [19]. В представленной работе в отличие от [13]–[16] получены выражения для потоков тепла и массы в цилиндрическом канале в задаче о тепловом крипе на основе кинетического уравнения Вильямса с использованием зеркально-диффузной модели отражения молекул газа поверхностью канала. Решение уравнения

Вильямса было построено с применением метода характеристик [20]. В широком диапазоне изменения числа Кнудсена найдены значения потоков тепла и массы в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Проведено сравнение полученных результатов моделирования с экспериментальными данными [21]–[22] значений потока массы газа в канале.

## 2. Постановка задачи. Построение функции распределения

Рассмотрим установившееся течение газа в длинном цилиндрическом канале радиуса  $R'$ . Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль его оси  $Oz'$ . Изменение состояния газа будем описывать уравнением Вильямса, которое для стационарного режима течения газа в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид [11]:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f), \quad (2.1)$$

где  $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$ ;  $\mathbf{v}$  – скорость молекул газа;  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$  – массовая скорость газа;  $\mathbf{r}'$  – размерный радиус-вектор;  $l_g$  – средняя длина свободного пробега молекул газа;  $\gamma = 5/2$ ,  $T_0$  – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат;

$$f_* = n_* \left( \frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right). \quad (2.2)$$

Параметры  $n_*$ ,  $T^*$  и  $\mathbf{u}_*$  в функции (2.2) выбираем из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворял законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [23].

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла (1.1). В качестве размерного масштаба длины выберем радиус цилиндра  $R'$ , при этом соответствующие безразмерные величины длины будем обозначать без штриха. Будем полагать, что безразмерный градиент температуры является малыми по абсолютной величине, т. е.

$$G_T = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dz}, \quad |G_T| \ll 1, \quad (2.3)$$

где  $z = z'/R'$ ,  $R = 1$ . В линейном приближении температура газа имеет вид

$$T(z) = T_0(1 + G_T z). \quad (2.4)$$

Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения (1.2) с параметрами, заданными на стенках канала, относительно абсолютного максвеллиана  $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ , где  $\beta = m/(2k_B T_0)$ ,  $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$  – безразмерная скорость молекул газа. Предположим, что давление, поддерживаемое в канале, является постоянным. Учитывая при этом, что  $p = n(z)k_B T(z)$ , приходим к следующему выражению для  $f_\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ :

$$f_\Gamma(z, \mathbf{C}) = f_0(C) \left( 1 + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) z \right). \quad (2.5)$$

В силу медленного течения газа и постоянного состояния теплового равновесия со стенками канала проведем линеаризацию функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$  относительно  $f_\Gamma(z, \mathbf{C})$  и, учитывая выражение (2.5), представляем ее как

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) \left( 1 + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) z + h(x, y, \mathbf{C}) \right). \quad (2.6)$$

Функцию  $f_*(\mathbf{r}', \mathbf{C})$  запишем в следующем виде:

$$f_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)(1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (2.7)$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n(z)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{\delta T_*}{T(z)}. \quad (2.8)$$

Подставив (2.7) в модельное кинетическое уравнение Вильямса (2.1), получим линеаризованное релаксационное уравнение для определения функции  $h(x, y, \mathbf{C})$ :

$$\begin{aligned} \left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z G_T \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\right) \gamma K n + C h(x, y, \mathbf{C}) = \\ = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') h(x, y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}', \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$ .

Представим функцию  $h(x, y, \mathbf{C})$  в виде:

$$h(x, y, \mathbf{C}) = \gamma K n G_T C_z \left(C - \frac{5}{2C}\right) Z(x, y, C_x, C_y). \quad (2.10)$$

Подставив (2.10) в (2.9), получим:

$$\left(C_x \frac{\partial Z}{\partial x} + C_y \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \gamma K n + C Z(x, y, C_x, C_y) + C = 0 \quad (2.11)$$

с граничным условием

$$Z(x_\Gamma, y_\Gamma, C_x, C_y) = (1 - \alpha) Z(x_\Gamma, y_\Gamma, C_x^*, C_y^*), \quad x_\Gamma C_x + y_\Gamma C_y < 0,$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{C}),$$

где  $\mathbf{C}^*$  — безразмерная молекулярная скорость до отражения, а  $x_\Gamma^2 + y_\Gamma^2 = 1$ . Изменение функции вдоль траектории (характеристики)

$$d\mathbf{r}_\perp = \mathbf{C}_\perp dt, \quad (2.12)$$

определяется уравнением:

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}_\perp} \mathbf{C}_\perp \gamma K n \sin \theta + C_\perp Z(x, y, \varphi, \theta) + C_\perp = 0, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{C} = (C_\perp \cos \varphi, C_\perp \sin \varphi, C_z), \quad \mathbf{C}_\perp = (C_\perp \cos \varphi, C_\perp \sin \varphi), \quad C_\perp = C \sin \theta,$$

где  $\mathbf{C}_\perp$  — вектор проекции  $\mathbf{C}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $z'$ ;  $\tilde{Z}(x, y, \varphi, \theta) \equiv Z(x, y, C_x, C_y)$ , где углы  $\varphi$  и  $\theta$  отсчитываются от положительных направлений осей  $C_x$  и  $C_z$  соответственно. Далее знак тильды будем опускать. Перепишем уравнение (2.13) в виде:

$$dZ = -\frac{1}{\gamma K n \sin \theta} (C_\perp Z(x, y, \varphi, \theta) + C_\perp) dt. \quad (2.14)$$

Решением уравнения (2.14) является функция

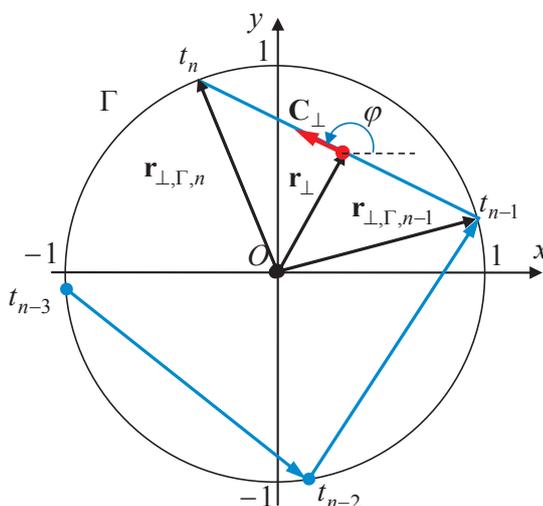
$$Z = A \exp\left(-\frac{C_\perp t}{\gamma K n \sin \theta}\right) - 1, \quad (2.15)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;  $t$  – время движения молекулы вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки  $\mathbf{r}_\perp$  со скоростью  $\mathbf{C}_\perp$ . Значение параметра характеристики в точке  $n$ -го отражения обозначим  $t_n$ :  $t_n > t_{n-1}$ . Следуя [24], рассмотрим функцию (2.15) на интервале  $(t_{n-1}, t_n)$ . В этом случае  $0 \leq t \leq T_n$ . Так как траектории движения представляют собой хорды окружности равных длин (Рис. 2.1), то параметр  $T_n$ , определяющий время движения молекулы со скоростью  $\mathbf{C}_\perp$  от точки  $\mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1}$  до точки  $\mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n}$ , не зависит от выбора номера точки  $n$ :  $T_n = T$ . Заметив, что решением уравнения (2.12) на интервале  $(t_{n-1}, t_n)$  является вектор-функция

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1} + \mathbf{C}_\perp t, \quad (2.16)$$

приходим к следующему уравнению для определения  $T$ :

$$\mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n} = \mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1} + \mathbf{C}_\perp T. \quad (2.17)$$



Р и с у н о к 2.1

Траектории движения молекулы на промежутках  $(t_{n-1}, t_n)$ ,  $(t_{n-2}, t_{n-1})$  и  $(t_{n-3}, t_{n-2})$

В точке отражения  $t = t_n$  функция  $Z(t) \equiv Z(t(x, y, \varphi, \theta))$  испытывает скачок:

$$Z(t_n + 0) = (1 - \alpha)Z(t_n - 0). \quad (2.18)$$

Знак  $+/-$  обозначает предел функции  $Z(t)$  в точке отражения  $t_n$  справа или слева по времени пролета. В момент начала отсчета времени ( $t = 0$ )

$$Z(t_{n-1} + 0) = A - 1. \quad (2.19)$$

Из (2.19) находим постоянную интегрирования  $A$ :

$$A = Z(t_{n-1} + 0) + 1. \quad (2.20)$$

Учитывая, что  $t_n - 0 = t_{n-1} + T$  и выражение (2.20), имеем

$$Z(t_n - 0) = (Z(t_{n-1} + 0) + 1) \exp\left(-\frac{C_\perp T}{\gamma K n \sin \theta}\right) - 1. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.18) в (2.21), получим следующее рекуррентное соотношение для нахождения  $Z(t_n + 0)$ :

$$Z(t_n + 0) = (1 - \alpha) \left( Z(t_{n-1} + 0) \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) + \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right). \quad (2.22)$$

Согласно (2.22) запишем для функции  $Z(t_{n-1} + 0)$  следующее выражение:

$$Z(t_{n-1} + 0) = (1 - \alpha) \left( Z(t_{n-2} + 0) \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) + \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right). \quad (2.23)$$

Подставим (2.23) в (2.22). Затем с помощью соотношения (2.22), выражая  $Z(t_{n-2} + 0)$  через  $Z(t_{n-3} + 0)$  и т. д., получим:

$$\begin{aligned} Z(t_n + 0) = & (1 - \alpha) \left( \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right) + \\ & + (1 - \alpha)^2 \left( \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right) \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) + \\ & + (1 - \alpha)^3 \left( \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right) \exp \left( -\frac{2C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Учитывая, что выражение (2.24) представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $(1 - \alpha) \exp(-C_{\perp} T / (\gamma K n \sin \theta))$ , найдем постоянную  $A$  из равенства (2.20):

$$A = 1 + \frac{(1 - \alpha) \left( \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right) - 1 \right)}{1 - (1 - \alpha) \exp \left( -\frac{C_{\perp} T}{\gamma K n \sin \theta} \right)}. \quad (2.25)$$

Таким образом, для того чтобы соотношения (2.15) и (2.25) полностью определяли функцию  $Z(x, y, \varphi, \theta)$  в случае зеркально-диффузного отражения молекул от внутренней поверхности канала, необходимо получить явный вид параметров  $t$  и  $T$  через  $x, y, \varphi$ .

Для определения параметра  $t$  рассмотрим уравнение (2.16), из которого следует, что

$$r_{\perp, \Gamma, n-1}^2 = r_{\perp}^2 - 2\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} t + C_{\perp}^2 t^2. \quad (2.26)$$

Учитывая, что  $r_{\perp, \Gamma, n-1} = R = 1$  и  $\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1} < 0$ , из уравнения (2.26) найдем  $t$ :

$$\begin{aligned} t = & \frac{\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} t + \sqrt{C_{\perp}^2 (1 - r_{\perp}^2) - (\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp})^2}}{C_{\perp}^2} = \\ = & -\frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{C_{\perp}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Скалярно умножая левую и правую части векторного уравнения (2.16) на  $\mathbf{C}_{\perp}$ , выразим  $t$  из полученного равенства. Сравнение данного выражения для  $t$  с (2.27) позволяет сделать следующий вывод:

$$\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1} = -\sqrt{C_{\perp}^2 (1 - r_{\perp}^2) - (\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp})^2} = -\mathbf{C}_{\perp} \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}. \quad (2.28)$$

Параметр  $T$  найдем из уравнения (2.17), учитывая при этом (2.28):

$$T = -\frac{2\mathbf{C}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp, \Gamma, n-1}}{C_{\perp}^2} = \frac{2\sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{C_{\perp}}. \quad (2.29)$$

Таким образом, при подстановке полученных выражений (2.25), (2.27) и (2.29) в (2.15) функция  $Z(x, y, \varphi, \theta)$  принимает вид:

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = \frac{\alpha \exp\left(-\frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma K n \sin \theta}\right)}{1 - (1 - \alpha) \exp\left(-\frac{2\sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma K n \sin \theta}\right)} - 1. \quad (2.30)$$

Для того чтобы получить выражение для функции (2.30), записанное в цилиндрических системах координат в конфигурационном пространстве и пространстве скоростей, выполним замену переменных в (2.30) по формулам  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ,  $\rho = r_{\perp}$ ;  $C_{\rho} = C_{\perp} \cos \psi$ ,  $C_{\xi} = C_{\perp} \sin \psi$ . Учитывая при этом, что  $\psi = \varphi - \phi$ , запишем:

$$Z(\rho, \psi, \theta) = \frac{\alpha \exp(-\xi_1(\rho, \psi, \theta))}{\exp(\xi_2(\rho, \psi, \theta)) - (1 - \alpha) \exp(-\xi_2(\rho, \psi, \theta))} - 1, \quad (2.31)$$

$$\xi_1(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi}{\gamma K n \sin \theta}, \quad \xi_2(\rho, \psi, \theta) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma K n \sin \theta}. \quad (2.32)$$

Выражение (2.31) совпадает с результатом, полученным в работе [25] при моделировании течения в канале на основании уравнения Вильямса, записанного в цилиндрической системе координат.

### 3. Вычисление потоков тепла и массы газа в канале. Анализ полученных результатов

Построенная функция (2.6) позволяет восстановить безразмерные  $z$ -компоненты вектора потока тепла  $q_z(x, y)$  и массовой скорости газа  $U_z(x, y)$  в канале:

$$q_z(x, y) = \frac{\gamma K n G_T}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \frac{C_z^2}{C} \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)^2 Z(x, y, \varphi, \theta) d^3 \mathbf{C} = -\frac{3G_T \gamma K n}{2\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{3\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} \frac{\exp\left(-\frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma K n \sin \theta}\right)}{1 - (1 - \alpha) \exp\left(-\frac{2\sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma K n \sin \theta}\right)} d\varphi \right), \quad (3.1)$$

$$U_z(x, y) = \frac{\gamma K n G_T}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \frac{C_z^2}{C} \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) Z(x, y, \varphi, \theta) d^3 \mathbf{C} = -\frac{2}{9} q_z(x, y), \quad (3.2)$$

где  $q_z(x, y)$  и  $U_z(x, y)$  в (3.1) и (3.2) связаны с размерными величинами соотношениями [2]:

$$q_z(x, y) = \frac{\beta^{1/2}}{p_0} q'_z(x, y), \quad q'_z(x, y) = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(\mathbf{r})) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}, \quad (3.3)$$

$$U_z(x, y) = \beta^{1/2} u_z(x, y), \quad u_z(x, y) = \frac{1}{n(z)} \int v_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Согласно [1], определим приведенные потоки тепла  $J_Q$  и массы газа  $J_M$  в канале как

$$J_Q = \frac{8}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} q_z(x, y) dx, \quad J_M = \frac{8}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} U_z(x, y) dx. \quad (3.5)$$

В случае полной аккомодации молекул газа стенками канала ( $\alpha = 1$ ) выражение (3.1) примет вид:

$$q_z(x, y) = -\frac{3G_T \gamma Kn}{2\sqrt{\pi}} \times \left( 1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi \exp \left( -\frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma Kn \sin \theta} \right) d\varphi \right). \quad (3.6)$$

В таблице 1 приведены значения величины  $J_{T,M}/G_T$ , вычисленные по формуле (3.5) с использованием системы компьютерной алгебры Maple 18, в сравнении результатами, полученными в [21]–[22] на основе экспериментальных данных массового потока нестационарным методом для  $He$ ,  $Ne$  и  $Ar$ . Относительная погрешность измерений в ходе экспериментов составила 2 %. Анализ результатов, представленных в таблице 1, показал, что при  $Kn = 1/2$  и  $Kn = 1/3$  отличие значений  $J_{T,M}/G_T$ , найденных по формуле (3.5) для  $\alpha = 0.895$ ,  $0.925$  и  $0.927$ , от соответствующих значений массового потока в [22] и [21] для  $He$  и  $Ne$  не превышает 7 %, а для  $Ar$  составляет 6 % [21]. С уменьшением числа Кнудсена различие увеличивается, поскольку при переходе к гидродинамическому пределу уравнение Вильямса приводит к значению числа Прандтля, которое отличается от соответствующего значения для одноатомного газа [26].

Таблица 1: Значения  $J_{T,M}/G_T$  в сравнении с экспериментальными данными [21]–[22]

$Kn^{-1}$	$\alpha = 0.895$ (3.5)	$He$		$\alpha = 0.925$ (3.5)	$Ne$		$\alpha = 0.927$ (3.5)	$Ar$ [22]
		[22]	[21]		[22]	[21]		
2	0.2839	0.282	0.2906	0.2801	0.274	0.2859	0.2798	0.283
3	0.2138	0.227	0.2314	0.2118	0.221	0.2304	0.2117	0.225
4	0.1712	0.191	0.1907	0.1700	0.187	0.1899	0.1698	0.188
5	0.1425	0.164	0.1607	0.1417	0.161	0.1605	0.1416	0.162
6	0.1220	0.143	0.1384	0.1214	0.139	0.1382	0.1214	0.142
7	0.1065	0.125	0.1217	0.1061	0.122	0.1210	0.1061	0.120
8	0.0946	0.111	0.1091	0.0942	0.108	0.1076	0.0942	0.113
9	0.0850	0.0995	0.0982	0.0847	0.0972	0.0969	0.0847	0.101
10	0.0772	0.0908	0.0896	0.0770	0.0889	0.0887	0.0769	0.0913
20	0.0401	0.0486	0.0618	0.0401	0.0471	0.0615	0.0400	0.0497
30	0.0271	0.0328	0.0473	0.0270	0.0317	0.0475	0.0270	0.0336

В таблице 2 для сравнения приведены результаты работы [6] при  $\alpha = 1$ ,  $0.8$  и  $0.6$ , полученные с использованием S-модели методом дискретных ординат. Анализ данных, представленных в таблице 2, показал, что уменьшение коэффициента аккомодации тангенциального импульса приводит к увеличению массового потока в канале. При этом наблюдается уменьшение различий значений  $J_{T,M}/G_T$ , найденных в рамках S-модели и уравнения Вильямса, при  $Kn < 0.5$ . При приближении к свободномолекулярному режиму происходит в целом увеличение различий, которое не превосходит 1 % при  $Kn = 1000$  и 6 % при

$Kn = 100$ . Отличие приведенных значений потока массы газа от [6] не превышает 8 % при  $Kn > 10$ .

Таблица 2: Значения  $J_{T,M}/G_T$  в зависимости от  $\alpha = 1, 0.8$  и  $0.6$

$Kn$	$\alpha$					
	1		0.8		0.6	
	(3.5)	[6]	(3.5)	[6]	(3.5)	[6]
0.0001	0.0001	—	0.0001	—	0.0001	—
0.0010	0.0008	—	0.0008	—	0.0008	—
0.0100	0.0083	—	0.0083	—	0.0083	—
0.1000	0.0765	0.1014	0.0778	0.0962	0.0792	0.0908
0.5000	0.2705	0.3016	0.2965	0.3118	0.3238	0.3230
1.0000	0.3881	0.3959	0.4529	0.4372	0.5264	0.4865
2.0000	0.4977	0.4779	0.6209	0.5648	0.7742	0.6769
5.0000	0.6080	0.5675	0.8165	0.7244	1.1066	0.9435
10.000	0.6632	0.6210	0.9266	0.8297	1.3166	1.1341
100.00	0.7376	0.7243	1.0919	1.0530	1.6687	1.5775
1000.0	0.7502	0.7486	1.1230	1.1166	1.7525	1.7237
10000	0.7520	—	1.1267	—	1.7513	—

Для режима течения, близкого к свободномолекулярному, выражение (3.5) для приведенного потока массы может быть представлено в виде ряда по малому параметру  $Kn^{-1}$ . В этом случае, ограничиваясь членами разложения порядка  $Kn^{-1}$ , получим:

$$\frac{J_{T,M}}{G_T} = \frac{4 \cdot (2 - \alpha)}{3\alpha\sqrt{\pi}} - \frac{2 \cdot (\alpha^2 - 6\alpha + 6)}{5\alpha^2\pi Kn} (\ln 2 + 2 \ln Kn - 2). \quad (3.7)$$

Первое слагаемое в (3.7) определяет приведенный поток массы газа в свободномолекулярном режиме в рамках зеркально-диффузной модели отражения и совпадает с выражением [1]. В случае полной аккомодации молекул газа стенками канала выражение (3.7) становится равным  $J_{T,M} = 4G_T/(3\sqrt{\pi})$ . При  $Kn \geq 100$  значения, полученные на основе асимптотической формулы (3.7), согласуются с результатами, представленными в таблице 2, для каждого из приведенных значений  $\alpha$ . Так, для  $Kn = 100$  и  $\alpha = 0.6, 0.8$  приведенные потоки массы газа согласно (3.7) принимают значения  $J_{T,M} = 1.6781G_T, 1.0994G_T$ , которые превышают аналогичные значения  $J_{T,M} = 1.6687G_T, 1.0919G_T$ , вычисленные по (3.5) не более чем на 0.7 % как и в случае диффузной модели отражения.

Для режимов течения, близких к гидродинамическому, выражение (3.2) приближается к значению  $U_{T,z}(x, y) = G_T\gamma Kn/(3\sqrt{\pi})$ . Приведенный поток массы (3.5) в этом случае имеет предел  $J_{T,M} = 5G_T Kn/6$ . Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому режиму, приведенные потоки тепла и массы не зависят от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

#### 4. Заключение

В работе в рамках кинетического подхода с применением метода характеристик решена задача о переносе тепла и массы газа в цилиндрическом канале под действием постоянного градиента температуры. Получены выражения для приведенных потоков тепла и массы газа как линейные функции от градиента температуры и вычислены значения этих

потоков для режимов течения от свободномолекулярного до гидродинамического. Показано существенное влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа на величину потока массы газа, причем наибольшее отклонение значений массового потока при неполной аккомодации молекул газа на стенках от соответствующих значений для диффузной модели отражения, наблюдалось при приближении к свободномолекулярному режиму. Для других режимов течения значения потока массы также возрастают при уменьшении коэффициента аккомодации тангенциального импульса, но более медленно, достигая асимптотического предела в гидродинамическом режиме течения. Проведен сравнительный анализ с результатами, полученными в рамках S-модели кинетического уравнения Больцмана с постоянной частотой столкновения, а также с экспериментальными данными. Получены простые формулы для определения приведенных потоков в режимах течения, близких к свободномолекулярному. Рассмотренный метод построения решения модельного уравнения Вильямса, удовлетворяющего зеркально-диффузной модели молекул газа стенками канала, может быть также применен к каналам с другой конфигурацией сечения.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-302-00001.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев, *Движение разреженных газов в каналах и микроканалах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008, 230 с.
2. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967, 440 с.
3. С. Cercignani, M. Lampis, “Kinetic models for gas-surface interactions”, *Transport Theory and Statist. Phys.*, **1** (1971), 101–114.
4. С. В. Гулакова, В. Н. Попов, “Аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля с использованием зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа со стенками канала”, *Журнал технической физики*, **85**:4 (2015), 1–6.
5. С. Е. Siewert, “The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.
6. F. Sharipov, “Rarefied gas flow through a long tube at any pressure ratio”, *J. Vac. Sci. Technol. A.*, **12**:5 (1994), 2933–2935.
7. M. Hadj-Nacer, *Tangential momentum accommodation coefficient in microchannels with different surface materials (measurements and simulations)*, these de doctoraten Energetique, Universite d’aix Marseille, 2012, 210 с.
8. M. T. Ho, I. Graur, “Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section”, *Vacuum*, **101** (2014), 328–332.
9. F. M. Sharipov, “Rarefied gas flow through a long rectangular channel”, *J. Vac. Sci. Technol. A: Vacuum, Surfaces, and Films*, **17**:5 (1999), 3062–3066.

10. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:7 (2010), 1285–1302.
11. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, “Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в зависимости от числа Кнудсена”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 85–93.
12. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27**:6 (2008), 810–822.
13. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, “An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube”, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.
14. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels”, *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.
15. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A closed-form solution of a kinetic integral equation for rarefied gas flow in a cylindrical duct”, *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.
16. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:1 (2015), 22–29.
17. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27**:3 (2008), 335–345.
18. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Процесс переноса тепла в эллиптическом канале”, *Математическое моделирование*, **29**:1 (2017), 84–94.
19. S. Pantazis, S. Varoutis, V. Hauer, C. Day, D. Valougeorgis, “Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels”, *Vacuum*, **85**:12 (2011), 1161–1164.
20. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964, 830 с.
21. А. Н. Кулев, *Экспериментальное исследование неизотермического течения газов в капиллярах*, дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Свердловск, 1977, 172 с.
22. В. Т. Porodnov, P. E. Suetin, S. F. Borisov, V. D. Akinshin, “Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels”, *J. Fluid Mech.*, **64**:3 (1974), 417–438.
23. К. Черчиньяни, *Математические методы в кинетической теории газов*, Мир, М., 1973, 245 с.
24. А. Г. Лескис, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, “Магнитное дипольное поглощение инфракрасного излучения мелкой металлической частицей”, *Поверхность*, **11** (1987), 115–121.
25. О. В. Germider, V. N. Popov, “Mathematical simulation of heat and mass transfer in a cylindrical channel versus the tangential momentum accommodation coefficient”, *Technical Physics*, **62**:11 (2017), 1605–1610.

26. А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография*, Издательство МГОУ, М., 2004, 271 с.

Поступила 20.12.2017

MSC2010 35F30

## Mathematical modeling of transport processes in a cylindrical channel

© O. V. Germider<sup>3</sup>, V. N. Popov<sup>4</sup>

**Abstract.** In the framework of the kinetic approach, a solution of heat and mass transfer problems in a long cylindrical channel is found using a mirror-diffuse model of the Maxwell boundary condition. The Williams equation is used as the main equation describing the kinetics of the process, assuming that a constant longitudinal temperature gradient is maintained in the channel. The Williams equation is written in the Cartesian coordinate system. The solution of the linearized problem of nonisothermal flow of the rarefied gas through the channel is obtained using the method of characteristics. It is shown that the type of the boundary condition becomes decisive in the construction of this solution. In a wide range of the Knudsen numbers, the reduced heat and gas mass flows through the cross-section of the channel are calculated depending on the accommodation coefficient of the tangential pulse. Limiting expressions of these flows for the free molecular and hydrodynamic flow regimes are obtained. The comparison with similar results presented in the open press is carried out. The obtained results can be used in the development of new nanotechnology.

**Key Words:** kinetic Boltzmann equation, Williams equation, mirror-diffuse reflection, mirror-diffuse model, Maxwell model, analytic solution, Knudsen number.

## REFERENCES

1. F. M. Sharipov, V. D. Seleznev, *Dvizhenie razrezhennykh gazov v kanalah i mikrokanalah [Rarefied Gas Flows in Channels and Microchannels]*, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., Yekaterinburg, 2008 (In Russ.), 230 p.
2. M. N. Kogan, *Dinamika razrezhennogo gaza Kineticheskaya teoriya [Rarefied Gas Flows in Channels and Microchannels]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 440 p.
3. C. Cercignani, M. Lampis, “Kinetic model for gas-surface interaction”, *Transport theory statist. Phys.*, **1** (1971), 101–114.
4. S. V. Gulakova V. N. Popov, “[An analytic solution of the Williams equation in the problem of Poiseuille flow using a mirror-diffuse model interaction of gas molecules with channel walls]”, *Technical Physics*, **85**:4 (2015), 1–6 (In Russ.).
5. C. E. Siewert, “The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.

<sup>3</sup> Oksana V. Germider, Postgraduate Student, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, o.germider@narfu.ru

<sup>4</sup> Vasily N. Popov, Head of Mathematics Chair, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

6. F. Sharipov, “Rarefied gas flow through a long tube at any pressure ratio”, *J. Vac. Sci. Technol. A.*, **14**:4 (1996), 2627–2635.
7. M. Hadj-Nacer, *Tangential momentum accommodation coefficient in microchannels with different surface materials (measurements and simulations)*, These de doctorat, Universite d’aix Marseille, 2012, 210 p.
8. M. T. Ho, I. Graur, “Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section”, *Vacuum*, **101** (2014), 328–332.
9. F. M. Sharipov, “Rarefied gas flow through a long rectangular channel”, *J. Vac. Sci. Technol. A.*, **17**:5 (1999), 3062–3066.
10. V. A. Titarev, E. M. Shakhov, “[Kinetic analysis of an isothermal flow in a long microchannel with rectangular cross section]”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **50**:7 (2010), 1285–1302 (In Russ.).
11. O. V. Germider, V. N. Popov, “[Mathematical modeling of the heat transfer process in a rectangular channel depending on Knudsen number]”, *Zhurnal SVMO*, **18**:2 (2016), 85–93 (In Russ.).
12. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice”, *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, **27** (2008), 810–822.
13. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, “An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube”, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.
14. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels”, *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.
15. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct”, *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.
16. O. V. Germider, V. N. Popov, A. A. Yushkanov, “[Mathematical modeling of the process heat transfer in a long cylindrical channel]”, *Zhurnal SVMO*, **17**:1 (2015), 22–29 (In Russ.).
17. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27** (2008), 335–345.
18. O. V. Germider, V. N. Popov, A. A. Yushkanov, “[Heat transfer process in an elliptic channel]”, *Matem. Mod.*, **29**:1 (2017), 84–94 (In Russ.).
19. C. Day, V. Hauer, S. Pantazis, S. Varoutis, D. Valougeorgis, “Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels”, *Vacuum*, **85** (2011), 1161–1164.
20. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (In Russ.), 830 p.
21. V. D. Akinshin, B. T. Porodnov, P. E. Suetin, S. F. Borisov, “Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels”, *J. Fluid Mech.*, **64** (1974), 417–437.

22. A. N. Kulev, *Ehksperimentalnoe issledovanie neizotermicheskogo techeniya gazov v kapillyarah* [*Experimental study of nonisothermal gas flow in capillaries*], Diss. kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Sverdlovsk, 1977 (In Russ.), 177 p.
23. C. Cercignani, *Matematicheskie metody v kineticheskoy teorii gazov* [*Mathematical methods in the kinetic theory of gases*], Mir Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 245 p.
24. A. G. Lesskis, A. A. Yushkanov, Yu. I. Yalamov, “[Magnetic dipole absorption of infrared radiation by a fine metal particle]”, *Surface*, **11** (1987), 115–121 (In Russ.).
25. O. V. Germider, V. N. Popov, “Mathematical Simulation of Heat and Mass Transfer in a Cylindrical Channel versus the Tangential Momentum Accommodation Coefficient”, *Technical Physics*, **62**:11 (2017), 1605–1610.
26. A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, *Kineticheskie uravneniya tipa Vilyamsa i ih tochnye resheniya monografiya* [*Kinetic equations of Williams type and their exact solutions: monograph*], MGOU Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 271 p.

*Submitted 20.12.2017*

УДК 51.7:532.546

## Кинетическое уравнение для моделирования нестационарных неэквидистантных временных рядов

© Л. В. Клочкова<sup>1</sup>, Ю. Н. Орлов<sup>2</sup>, Р. В. Плешаков<sup>3</sup>

**Аннотация.** Построено кинетическое уравнение для выборочной функции распределения временного ряда, значения которого порождены нестационарным потоком событий. В случае, когда нестационарность обусловлена случайным переключением с одного случайного процесса на другой, что имеет место для многих практически наблюдаемых временных рядов, осуществляется фильтрация вложения, позволяющая выделить стационарную компоненту. Предложена модель для описания эволюции уровня загрязнения мегаполиса, при котором последовательность промежутков времени между случайными событиями (моментами выбросов загрязняющих веществ в атмосферу) образует нестационарный временной ряд. Описан программный комплекс по расчету статистик, определяющих эволюцию выборочного распределения на определенном временном промежутке. Реализовано преобразование данных статистик от объема выборки к промежутку времени и выведено уравнение эволюции их распределений в терминах эмпирического уравнения Лиувилля.

**Ключевые слова:** выборочная функция распределения, неэквидистантный временной ряд, уравнение Лиувилля, нестационарный поток событий.

### 1. Введение

Анализ нестационарных временных рядов, встречающихся на практике, опирается на изучение эволюционных свойств их выборочных функций распределения. Выборка представляет собой последовательность значений временного ряда, номер элемента данной последовательности отождествляется с моментом времени. Основы кинетического подхода к анализу выборочных распределений сформулированы в [1], [2]. В них были выписаны эволюционные уравнения Лиувилля и Фоккера-Планка для выборочной плотности функции распределения наблюдаемого временного ряда с целью поиска подходящей динамической системы, имеющей близкие к данной выборке статистические свойства. В этом случае дискретный аналог такой системы можно было бы рассматривать как модель временного ряда, позволяющей дать его прогноз на некоторый горизонт, определяемый скоростью разбегания близких траекторий.

Задача прогнозирования ряда с определенной точностью на заданный временной горизонт возникает во многих практических приложениях [3]–[8]. В работе [6] кинетические

<sup>1</sup> **Клочкова Людмила Викторовна**, старший научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3973-3909>, [klud@imamod.ru](mailto:klud@imamod.ru)

<sup>2</sup> **Орлов Юрий Николаевич**, заведующий отделом прикладной теоретической физики, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9114-0436>, [ov3159f@yandex.ru](mailto:ov3159f@yandex.ru)

<sup>3</sup> **Плешаков Руслан Владимирович**, аспирант, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5368-4416>, [ruslanplkv@gmail.com](mailto:ruslanplkv@gmail.com)

модели предлагалось использовать для прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. В работе [9] исследовались некоторые статистики на неэквидистантных временных рядах, например, распределение показателя Херста временного ряда для оценки преимущественного сохранения тенденции или, напротив, смены ее на противоположную.

Ограничение изложенной в [3]–[8] теории состоит в том, что на практике промежутки времени между событиями являются случайными, например, промежутки времени между запросами в системе массового обслуживания, между землетрясениями в сейсмически активном регионе, между аварийными сбросами продуктов химического производства и т. п. Разумеется, для подобных рядов также можно изучать распределения, построенные по некоторому объему данных, а не по промежутку реального времени, но многие вопросы оказываются при этом вне рассмотрения. Так, корреляция между моментом загрязнения атмосферы и уровнем заболеваемости населения имеет временной, а не событийный лаг. Поэтому возникают статистические задачи, принципиально формулируемые в терминах текущего времени, а не порядковых номеров элементов ряда.

Дополнительная сложность состоит в том, что как поток событий, так и сами значения временного ряда имеют нестационарные распределения, вследствие чего возникает задача согласованного моделирования двух нестационарных потоков данных.

Использование кинетических моделей для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, является весьма актуальным. Данный подход позволяет корректно задать статистические свойства источника для последующего решения уравнений химической кинетики, описывающих эволюцию примесей, их состав и концентрацию в химически активном газе в определенных температурных и конвективных условиях внешней среды. В силу того, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и нестационарным, кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за неопределенности функции источника.

Генерация ансамбля траекторий неэквидистантного нестационарного временного ряда является, таким образом, важной с практической точки зрения задачей, решение которой позволит моделировать различные функционалы управления наблюдаемым случайным процессом и проводить их оптимизацию. В данной работе представлена методика, позволяющая применить кинетический подход к анализу временных рядов различного типа.

## 2. Метод генерации неэквидистантной траектории

Генерация неэквидистантного нестационарного временного ряда основывается на следующих предположениях относительно структуры потока событий [4].

Во-первых, считаем, что существует некоторый промежуток времени, называемый периодом, внутри которого задана нормированная на единицу функция интенсивности потока. Применительно к экологической обстановке мегаполиса такой период связан с естественной суточной и сезонной периодичностью. Это позволяет задать определенный временной промежуток, на котором анализируется случайный процесс.

Во-вторых, абсолютные значения приростов наблюдаемой случайной величины (например, уровня загрязнения) имеют распределение с «толстым хвостом», причем нестационарность потока присуща наиболее вероятному событию, по сравнению с которым менее вероятные события реализуются в виде стационарного потока событий. Это предположе-

ние позволяет провести фильтрацию данных с целью изучения статистики относительно редких, но значимых событий. В результате случайный процесс представляется в виде вложения двух процессов – стационарного и нестационарного. Именно длина серии из элементов последовательности наиболее вероятных событий образует нестационарный временной ряд, а длительность серии из прочих событий является стационарным случайным процессом.

Сделанные предположения позволяют построить модель временного ряда, обладающего свойствами, близкими к наблюдаемым на практике.

Этап I. Подготовка данных. На этапе подготовки данных для моделирования траектории неэквидистантного временного ряда собираются статистики:

- функции распределения  $F(\theta)$  серий событий по длительности времени  $\theta$  общего движения траектории значения случайной величины (уровня загрязнения) вверх или вниз;
- вероятности  $P^\pm$  положительного и отрицательного прироста случайной величины для наиболее вероятного события,  $P^+ + P^- = 1$  ;
- параметр нестационарного пуассоновского потока событий  $\Lambda(t, \tau)$  на промежутке времени  $\Delta_t(\tau) = [t - \tau; t]$  внутри периода  $T$  (например, за месяц);
- функция распределения  $G(n)$  серий приращений, абсолютная величина которых отличается от наиболее вероятного, в зависимости от числа  $n$  событий;
- совместная плотность распределения  $f(k, k'; K, t)$  длин  $k$  и их приращений  $k'$  для серий наиболее вероятного абсолютного приращения по выборке длины  $K$  событий в момент времени  $t$ .

По собранным статистикам определяется вероятность  $p_k(t - \tau, t)$  числа  $k$  событий на промежутке времени  $\Delta_t(\tau)$  по формуле:

$$p_k(t - \tau, t) = \frac{(\Lambda(t, \tau))^k}{k!} \exp(-\Lambda(t, \tau)), \quad \Lambda(t, \tau) = \tau \mu(t - \tau, t). \quad (2.1)$$

Введенная здесь величина  $\mu(t - \tau, t)$  называется интенсивностью потока на промежутке  $\Delta_t(\tau)$  представляет собой среднее число событий на указанном промежутке:

$$\mu(t - \tau, t) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t - \tau, t). \quad (2.2)$$

Считаем, что события независимы, а поток ординарный. Время агрегирования событий полагаем равным некоторой условной единице  $\tau \equiv 1$  (например, 1 сутки).

После этого задается ожидаемое число  $N$  событий на временном горизонте  $T$  моделирования временного ряда. Оно необходимо для того, чтобы провести нормировку профиля интенсивности  $\Lambda(t, \tau)$  на это число событий.

Этап II. Генерация траектории. На следующем этапе из распределения  $F(\theta)$  генерируется случайный ряд чисел  $\theta_k$  в единицах измерения времени, принятом в параметре потока:

$$\sum_k \theta_k = T. \quad (2.3)$$

Условие (2.3) определяет суммарное количество  $M$  макродвижений вверх и вниз (нарастание уровня загрязнения или очищение и релаксация среды) и их длительность, на каждом промежутке  $\theta_k$  задается вероятность  $P_k^\pm$  положительного и отрицательного приростов.

Затем генерируются случайные целые числа  $n_j$  из распределения (2.1), которые дают числа событий в течение условной временной единицы  $\tau$  на промежутках  $\Delta_\tau(j)$ , где

$j$  есть номер текущего времени в терминах  $\tau$ . Для данной генерации находится число событий:

$$\tilde{N} = \sum_{j=1}^T n_j. \quad (2.4)$$

Это число  $\tilde{N}$  в общем случае отлично от заданного изначально  $N$ , но выборочное среднее число событий за период по ансамблю траекторий сходится к числу  $N$  при увеличении числа траекторий.

Далее генерируется выборка чисел  $\pm 1$  общей длины  $\tilde{N}$  из кусочно-стационарного распределения вероятностей  $P_k^\pm$  в соответствии со случайным числом макродвижений из (2.3). Эта выборка определяет знак приращения значения случайной величины в отдельном событии.

Из плотности функции распределения  $f(k, k'; K, t)$  находятся функции

$$\varphi(k; K, t) = \sum_{k'} f(k, k'; K, t), \quad u(k; K, t)\varphi(k; K, t) = \sum_{k'} k' f(k, k'; K, t), \quad (2.5)$$

которые участвуют в построении уравнения Лиувилля для моделирования эволюции распределения  $\varphi(k; K, t)$  из промежутка времени  $\Delta_\tau(j)$  в промежуток  $\Delta_\tau(j+1)$ :

$$\varphi(k; K, j+1) = \varphi(k; K, j) + \varphi(k-1; K, j)u(k-1; K, j) - \varphi(k; K, j)u(k; K, j). \quad (2.6)$$

Таким образом, из решения разностного уравнения (2.6) становятся известны нестационарные распределения длин серий наиболее вероятных приростов. Функции  $f(k, k'; K, t)$  вычисляются в скользящем окне длины  $K$ , поэтому на их вид влияют и выбранные на предыдущих этапах моделирования параметры потока и промежутки трендов вверх и вниз.

После того как вычисляются функции  $\varphi(k; K, j)$ , из них как из аналогов генеральных совокупностей строятся выборки длин  $k_{1,j}, k_{2,j}, \dots$  в таком количестве, что их сумма равна прогнозируемому числу событий из (2.4):

$$\sum_i k_{i,j} = n_j.$$

Длины серий наиболее вероятных приростов прерываются сериями приростов на другие величины. Данные серии, как было отмечено выше, имеют стационарное распределение  $S(n)$  по длинам, из которого генерируется случайный набор целых чисел  $n_{1,j}, n_{2,j}, \dots$ , равных длинам серий указанного второго типа. Длины серий  $k_{i,j}$  и  $n_{i,j}$  чередуются до тех пор, пока их суммарная длина не станет равной  $n_j$  или не будет превосходить это число за счет последнего слагаемого. После этого начинается аналогичное построение в следующем промежутке времени  $\Delta_\tau(j+1)$ .

Знаки приростов во всех этих событиях определяются последовательностью случайных знаков  $\pm 1$ , которая генерировалась на предыдущих этапах моделирования.

В результате была построена модель неэквидистантной траектории временного ряда на заданном горизонте.

### 3. Уравнение эволюции выборочной плотности распределения

В начальный момент времени  $t$  известна выборочная плотность функции распределения (ВПФР)  $F_N(x, n)$ , построенная по выборке длины  $N$  в момент времени  $t(n)$ , где

$n$  есть номер ближайшего слева события к моменту  $t$ . Эту ВПФР в терминах номера события будем в этой главе обозначать  $F_N(x, n)$ , а ВПФР, построенную по тому количеству событий, которое произошло за промежуток времени  $[t - T; t]$ , если это количество событий отлично от нуля, обозначим  $f_T(x, t)$ .

Предположим, что параметр потока  $\Lambda(t, \tau)$  из (2.1)–(2.2) известен. Тогда можно перейти к построению прогноза ВПФР  $\widehat{F}_{N(k)}(x, n + k)$ . В терминах номера события уравнение эволюции ВПФР имеет вид [1], [4]:

$$\frac{\partial F_N(x, n)}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial x} u(x, n) F_N(x, n) = 0, \quad u(x, n) = \int \dot{x} F_N^{(2)}(x, \dot{x}, n) d\dot{x}, \quad (3.1)$$

где эмпирическая скорость  $u(x, n)$  определяется через совместную ВПФР  $F_N^{(2)}(x, \dot{x}, n)$  значений ряда и его приращений в терминах номера события.

Чтобы построить аналогичное уравнение для ВПФР в терминах времени, надо переписать его через единицы агрегирования, т. е. в нашем случае для шага по времени  $\tau$ , который для удобства считаем единичным.

Поскольку производная по времени выражается через производную по числу событий согласно формуле

$$\frac{\partial F_N(x, n)}{\partial t} = \frac{\partial F_N(x, n)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (3.2)$$

и последнюю следует понимать в агрегированном смысле, т. е.  $dn/dt = n(t + 1) - n(t)$ , то

$$\frac{dn}{dt} = \Lambda(t, \tau). \quad (3.3)$$

Из (3.1)–(3.2) следует, что уравнение Лиувилля можно переписать в виде эволюции по агрегированному моменту времени:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\Lambda(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \nu(x, t) f(x, t), \quad (3.4)$$

$$\nu(x, t) = \Lambda(t, \tau) u(x, t).$$

Прогнозная модель для ВПФР  $f(x, t)$  следует из (3.4) заменой  $u(x, t)$  и  $\Lambda(t, \tau)$  на их прогнозные значения:

$$\widehat{f}(x, t + 1) = f(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \widehat{\Lambda}(t, \tau) \widehat{u}(x, t) f(x, t). \quad (3.5)$$

Таким образом, было построено эволюционное уравнение для ВПФР неэквидистантного нестационарного временного ряда в терминах времени. Для прогноза самого ряда можно, например, принять прогнозное значение равным среднему по прогнозному распределению:

$$\widehat{x}(t(n + k)) = \int \widehat{F}_{N(k)}(x, n + k) dx. \quad (3.6)$$

#### 4. Аппроксимация с помощью нелинейных динамических систем

После того как проведена фильтрация вложения, позволяющая извлечь из потока событий стационарную серию, длина которой прерывается вторым процессом с нестационарным распределением, можно построить хаотическую динамическую систему,

динамически-инвариантная мера которой представляет собой то самое эмпирически найденное стационарное распределение серий по длинам. Такую динамическую систему, которая порождает стационарное эмпирическое распределение, можно построить следующим образом.

Пусть имеется некоторая одномерная хаотическая динамическая система, принимающая значения на  $[0; 1]$ , с заданным законом отображения  $y_{n+1} = g(y_n)$ . Пусть функция  $g$  имеет несколько промежутков монотонности. Для простоты предположим, что таких промежутков два. Возьмем, например, кусочно-линейное отображение:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leq y_n < 1/2; \\ 2 - 2y_n, & 1/2 \leq y_n \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Если требуется построить динамическую систему с законом распределения с эмпирической плотностью  $f(x)$ , то нужное отображение определяется функцией, обратной к интегральной функции распределения  $F(x)$ . Например, для распределений с насыщением характерны зависимости вида  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ , для которых получаем  $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ .

Обратная функция имеет вид  $h(y) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - y)$ . Тогда на каждом из промежутков монотонности функции  $g$  (4.1) искомое отображение задается формулой:

$$x_{n+1} = h(g(h^{-1}(x_n))). \quad (4.2)$$

Соответствующее отображение имеет вид:

$$x_{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} \ln(2e^{-\alpha x_n} - 1), & 0 \leq x_n < \frac{1}{\alpha} \ln 2; \\ -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - 2e^{-\alpha x_n}), & \frac{1}{\alpha} \ln 2 \leq x_n < +\infty. \end{cases} \quad (4.3)$$

Следует заметить, что длины промежутков между сериями выражаются натуральными числами, поэтому элементы ряда таких длин определяются из (4.3) формулой  $l_n = [x_n] + 1$ . По построению, найденная динамическая система не единственная. Вместо (4.1) можно взять другую затравочную систему, например, логистическую.

Важно понимать, что модель (4.1)–(4.3) не предсказывает промежутки между сериями равных длительностей, а всего лишь дает одну из возможных траекторий таких промежутков в соответствии с их вероятностным распределением. Описанная конструкция аналогична методу построения случайной траектории, реализующей значения случайной величины с заданным законом распределения.

Таким образом, уравнение (4.3) определяет динамическую систему, для которой эмпирическое распределение длительностей серий является инвариантной мерой, т. е. не зависит от времени. Для оставшейся от проведенной фильтрации нестационарной выборочной функции распределения следует использовать модельное кинетическое уравнение. Как правило, на практике нестационарность достаточно хорошо моделируется уравнением диффузии со сносом. Так, для одномерной плотности вероятности  $f(x, t)$  регулярного диффузионного процесса применяется уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)f(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda(x, t)f(x, t)), \quad (4.4)$$

где  $u(x, t)$  – скорость сноса вероятности;  $\lambda(x, t)$  – неотрицательный коэффициент диффузии. Величина сноса оценивается из сопоставления двух выборочных распределений,

построенных для встык-выборок, длина которых равна горизонту прогноза, а коэффициент диффузии определяется непосредственно по элементам ряда в предшествующий момент времени. Именно  $\lambda = \frac{d\sigma^2}{dt} - 2\text{cov}_{x,\nu}$ , где  $\sigma^2$  – выборочная дисперсия ряда, а  $\text{cov}_{x,\nu}$  – выборочная ковариация элементов ряда и его первых разностей. Производная по времени понимается в данном случае как разность дисперсий в два последовательных момента времени.

Скорость  $u(i, t)$  изменения выборочной плотности функции распределения в  $i$ -ой ячейке в момент  $t$  определяется по формуле:

$$u(i+1, t)f(i+1, t) = - \sum_{k=1}^i (f(k, t+1) - f(k, t)), \quad (4.5)$$

т. е. выражается через изменение выборочной интегральной функции распределения за один шаг по времени. Динамическая система, порождающая временной ряд значений  $x(t)$ , приближенно находится из (4.5). Обозначая правую часть уравнения (4.5), деленную на  $f(i+1, t)$ , через  $w(i, t)$ , получаем:

$$u(i, t) = w(i-1, t). \quad (4.6)$$

Данная динамическая система, в отличие от (4.3), является неавтономной, и скорость  $u(i, t)$  трактуется как изменение значения самого временного ряда, т. е.  $u(i, t) = x(t+1) - x(t)$ . Эта модель действует на ограниченном промежутке времени — именно на том, в котором оценена скорость (4.6).

## 5. Заключение

Описанная методика позволяет моделировать как нестационарную систему пикового числа событий, когда поток событий и само значение случайной величины являются нестационарными процессами, так и подобные ей нестационарные многомерные потоки случайных событий. Кроме задач экологического характера, объектами моделирования могут быть и собственно системы массового обслуживания, когда поток телефонных вызовов или запросов на посещение сайта и скачивание определенной информации имеет нестационарные характеристики. Для таких систем построенная методика позволяет провести оптимизацию функционала управления: совокупности мероприятий по предотвращению аварий или ликвидации их последствий, профилактики заболеваний, алгоритма работы торговой системы на бирже, блокирования определенных запросов на сайт системы массового обслуживания и т. п. Дальнейшее развитие теории в этом направлении представляется актуальной задачей.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00361.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин, “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, **20**:9 (2008), 23–33.
2. Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин, *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, URSS, М., 2011, 384 с.
3. Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, *Моделирование и статистический анализ функционалов, заданных на выборках из нестационарного временного ряда*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, № 43, Москва, 2014, 26 с.
4. Ю. Н. Орлов, *Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов*, МФТИ, М., 2014, 432 с.
5. Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, *Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания*, МФТИ, М., 2016, 108 с.
6. Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, В. Ф. Тишкин, “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:1 (2012), 8–15.
7. Д. А. Зенюк, Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, “Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 125–133.
8. Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов, С. Л. Федоров, “Моделирование ансамбля нестационарных траекторий с помощью уравнения Фоккера-Планка”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 126–134.
9. Д. С. Кириллов, О. В. Короб, Н. А. Митин, Ю. Н. Орлов, Р. В. Плешаков, *Распределения показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша №11, Москва, 2013, 16 с.

Поступила 25.12.2017

MSC2010 37M10

## Kinetic equation for simulation of non-stationary non-equidistant time-series

© L. V. Klochkova <sup>4</sup>, Yu. N. Orlov <sup>5</sup>, R. V. Pleshakov <sup>6</sup>

**Abstract.** We obtain kinetic equation for the sample distribution function of the time series with values generated by non-stationary flow of events. In many practically observed time series unsteadiness is due to random switching from one random process to another. In these cases the attachments are filtered; it allows to select a stationary component of series. A model is proposed to describe the evolution of pollution levels in the city. In this model a sequence of time intervals between random events, which are the moments of pollutants' emission into the atmosphere, forms a non-stationary time series. Software package for calculating statistics that determine the evolution of the sampling distribution at a certain time interval is described. The conversion of these statistics from sample size to the time interval is implemented. The equation of their distributions' evolution in terms of empirical Liouville equation is obtained.

**Key Words:** sample distribution function, non-equidistant time series, Liouville equation, non-stationary flow of events.

### REFERENCES

1. Yu. N. Orlov, K. P. Osminin, “[Construction of the sample distribution function for non-stationary time-series forecasting]”, *Matematicheskoye modelirovaniye*, **20**:9 (2008), 23–33 (In Russ.).
2. Yu. N. Orlov, K. P. Osminin, *Nestatsionarnyye vremennyye ryady: metody prognozirovaniya s primerami analiza finansovykh i syr'evykh rynkov [Non-stationary time-series: forecasting methods with examples of financial and goods markets analysis]*, Editorial URSS, Moscow, 2011 (In Russ.), 384 c.
3. Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, *Modelirovaniye i statisticheskiy analiz funktsionalov, zadannykh na vyborkakh iz nestatsionarnogo vremennogo ryada [Functional modeling and its statistical analysis over the samples of the non-stationary time-series]*, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics, №43, **43**, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2014 (In Russ.), 26 c.
4. Yu. N. Orlov, *Kineticheskiye metody issledovaniya nestatsionarnykh vremennykh ryadov [Kinetic method of the investigation of non-stationary time-series ]*, MIRT, Moscow, 2014 (In Russ.), 276 c.
5. Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, *Metody chislennogo modelirovaniya protsessov nestatsionarnogo sluchainogo bluzhdaniya [Numerical simulation methods for non-stationary random processes]*, MIPT, Moscow, 2016 (In Russ.), 112 c.

<sup>4</sup> **Ludmila V. Klochkova**, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3973-3909>, klud2015@mail.ru

<sup>5</sup> **Yuriy N. Orlov**, Professor, Head of the Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9114-0436>, ov3159f@yandex.ru

<sup>6</sup> **Ruslan V. Pleshakov**, Postgraduate Student, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5368-4416>, ruslanplkv@gmail.com

6. L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, V. F. Tishkin, “[Mathematical modeling of the correlation between air and epidemiology situation in megapolis]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **14**:1 (2012), 8–15 (In Russ.).
7. D. A. Zenyuk, L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, “[Modeling of non-stationary random processes with help kineticheskii equations with fractional derivatives]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **18**:2 (2016), 125–133 (In Russ.).
8. L. V. Klochkova, Yu. N. Orlov, S. L. Fedorov, “[Modeling of a non-stationary ensemble of trajectories using the Fokker-Planck equation]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, **18**:1 (2016), 126–134 (In Russ.).
9. D. S. Kirillov, O. V. Korob, N. A. Mitin, Yu. N. Orlov, R. V. Pleshakov, *Raspredeleniya pokazatelya Khersta nestatsionarnogo markirovannogo vremennogo ryada [Hurst exponent distributions for non-stationary marked time-series]*, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics, №11, **11**, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2013 (In Russ.), 16 c.

*Submitted 25.12.2017*

УДК 519.67; 538.945

## Численное моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в толстый диск высокотемпературного сверхпроводника на основе алгоритма случайных блужданий

© Н. Д. Кузьмичев<sup>1</sup>, И. В. Бурьянов<sup>2</sup>, М. А. Васютин<sup>3</sup>, А. Ю. Шитов<sup>4</sup>

**Аннотация.** В работе выполнено численное моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в толстый диск высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП) находящегося в критическом состоянии. Задача сведена к нахождению минимума целевой функции, включающей интегральные уравнения 1-го рода. При этом объем диска, занятый экранирующим током (сверхтоком), отделяется криволинейной конической поверхностью, форма которой определяется случайным блужданием в плоскости  $(r, z)$  диска. Приведен результат разработки программы на языке программирования C# для расчета оптимальной конфигурации объема сверхтока в диске ВТСП с использованием алгоритма случайных блужданий. Приведены результаты вычислительного эксперимента, на основе модели Бина, для случаев когда внешнее магнитное поле в плоскости  $z = 0$  проникает в сверхпроводящий диск на глубину 20, 50 и 80 % от радиуса диска. Представлены результаты работы программы для сетки 50x50 в плоскости  $(r, z)$  четверти сечения диска. Обработка и визуализация полученных численных данных выполнялись программными средствами OriginLab и MS Excel.

**Ключевые слова:** сверхпроводник 2-го рода, высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, экранирующий сверхток, модель Бина, интегральные уравнения 1-го рода, целевая функция, алгоритм случайных блужданий.

### 1. Введение

Высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) различной структуры имеют практически важные магнитные свойства и высокие значения критических параметров. Поэтому интерес к ним не угасает и в настоящее время. При использовании ВТСП в электротехнике и в радио- и электроизмерительной технике необходимо точно знать геометрическую

<sup>1</sup> Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

<sup>2</sup> Бурьянов Игорь Валерьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, i.v.buryanov@gmail.com

<sup>3</sup> Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

<sup>4</sup> Шитов Альмир Юрьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, shishkin92@mail.ru

форму объема занятого экранирующим внешние магнитные поля сверхпроводящим током (сверхтоком). Существующие математические модели, описывающие экранирующие свойства ВТСП, плохо описывают карту распределения экранирующего сверхтока и намагниченность ВТСП.

## 2. Постановка задачи и модель расчета

Известно, что магнитное поле проникает в сверхпроводник второго рода, каковыми являются ВТСП, в виде вихревых нитей Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга [1], [2]. В силу изменения магнитного потока, в области его проникновения, возникает электрическое поле, которое создает экранирующий сверхток с плотностью, равной критической  $J_c$ . В общем случае величина  $J_c$ , зависит от внешнего магнитного поля индукцией  $B$ , т.е.  $J_c = J_c(B)$  [3]. Полное магнитное поле (сумма внешнего аксиально-направленного поля и поля созданного экранирующим сверхтоком сверхпроводящего диска) определяется интегральными выражениями, записанными в цилиндрической системе координат. Для экранированной области диска  $D^-$  интегральные выражения для аксиальной  $H_z$  и радиальной  $H_r$  составляющих магнитного поля, созданного экранирующим сверхтоком, примут вид интегральных уравнений 1-го рода относительно критической плотности экранирующего сверхтока  $J(r, z)$  [3]–[9]:

$$\begin{cases} \int_{D^+} G_z(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' = -2\pi \cdot H_0; \\ \int_{D^+} G_r(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $H_0$  – напряженность внешнего аксиально-направленного магнитного поля,  $r, r', z, z'$  – текущие координаты в цилиндрической системе координат ( $r, z \in D^-$ ),  $G_z$  и  $G_r$  – ядра интегральных уравнений выраженные через полные эллиптические интегралы 1-го рода  $K(k)$  и  $E(k)$ :

$$G_z(r, z, r', z') = \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \cdot \left[ K(k) - \frac{r'^2 - r^2 - (z - z')^2}{(r' + r)^2 + (z - z')^2} \cdot E(k) \right];$$

$$G_r(r, z, r', z') = \frac{z - z'}{r \sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \cdot \left[ -K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} \cdot E(k) \right].$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}} d\theta;$$

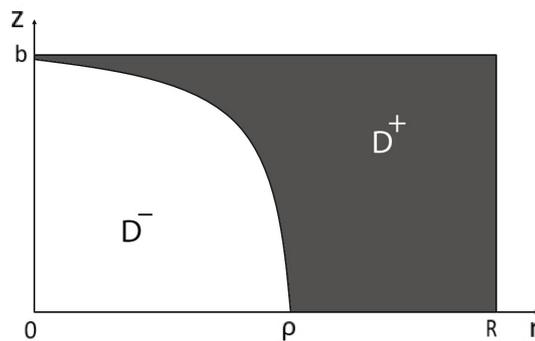
$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta} d\theta,$$

а аргумент эллиптических интегралов равен:

$$k^2(r, z, r', z') = \frac{4 \cdot r' \cdot r}{(r' + r)^2 + (z - z')^2}$$

На Рис. 2.1 представлено сечение четверти диска, в которое проникает сверхток и магнитное поле в виде нитей Абрикосова (область  $D^+$ ). В область  $D^-$  (экранированная область) сверхток и магнитное поле не проникают. Данные области отделены цилиндрически симметричной криволинейной конической поверхностью. Сечение этой поверхности

представляет собой кривую  $L(r, z) = 0$ , уравнение которой необходимо найти численными методами. Для этого на основе уравнения (2.1) для  $H_z$  была построена целевая функция  $F(r, z)$ , минимум которой достигается при равных нулю значениях  $H_z(r, z)$  и  $H_r(r, z)$  в области  $D^-$  и определяет оптимальную кривую  $L(r, z) = 0$  [4].



Р и с у н о к 2.1

Четвертая часть сечения диска, проходящего через ось  $z$ . В области  $D^+$  сверхток есть, а в области  $D^-$  - отсутствует.  $R$  - радиус диска,  $b$  - его полутолщина

Определенная таким образом целевая функция имеет вид:

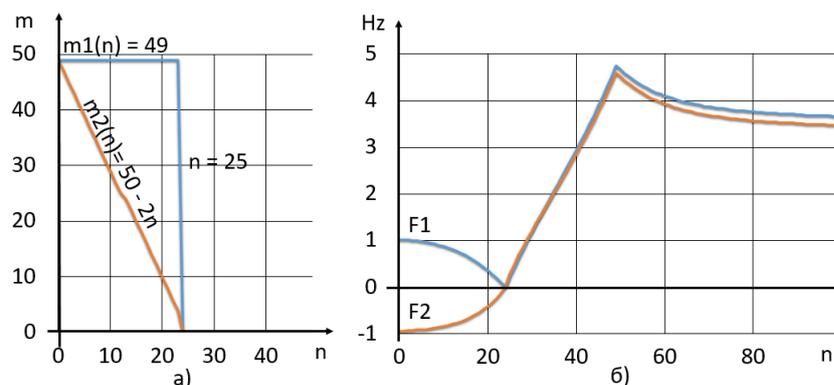
$$F(r, z) = \int_{D^+} G_z(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' + 2\pi \cdot H_0; \quad r, z \in D^-. \quad (2.2)$$

Критерием оптимальности являлось условие  $F(r, z) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малое наперед заданное число ( $\varepsilon/H_0 \ll 1$ ), определяющее точность вычисления.

Для того чтобы получить геометрическую форму объема проникшего сверхтока в диск ВТСП нами был разработан алгоритм случайных блужданий для поиска численного уравнения оптимальной кривой  $L_{opt}(r, z) = 0$ .

### 3. Результаты численного моделирования

В программе задаются значения радиуса  $R$  и полутолщины  $b$  диска. Затем формируется сетка (50x50, при соответствующих шагах  $m$  и  $n$  по  $r$  и  $z$  соответственно:  $h_r = R/50$  и  $h_z = b/50$ ) для четверти сечения диска и определяется область, в которую проник сверхток в ВТСП [6]. Линия отделяющая области  $D^+$  и  $D^-$ , показанных на Рис. 2.1, будет находится между прямой и диагональю (Рис. 3.1), так как производные для этих форм кривых  $L(r, z)$   $(dH_z/dr)|_{z=0}$  имеют разные знаки в области  $D^-$ .

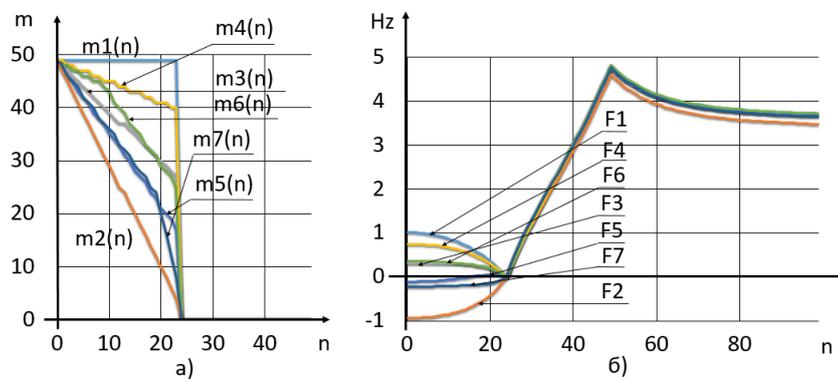


Р и с у н о к 3.1

а) первая область, в которой будет работать алгоритм:  $m1(n) = 49$  – верхняя граница,  $m2(n) = 50 - 2 \cdot n$  – нижняя граница,  $n = 25$  – правая граница, б) соответствующие им значения целевой функции  $F1, F2$  при глубине проникновения внешнего магнитного поля в диск для  $z = 0, \rho/R = 0.5$

Для оптимальной кривой  $L_{opt}(r, z)$  величина  $(dH_z/dr)|_{z=0} = 0$ . В программе координаты  $r, z$  задаются в единицах  $h_r$  и  $h_z$ . Область поиска оптимальной кривой ограничивается уравнениями:  $n = 25, m = 49$  и  $m(n) = 50 - 2n$ . Рассчитываем для областей ограниченных выше указанными линиями напряженность  $H_z$  магнитного поля (Рис. 3.1).

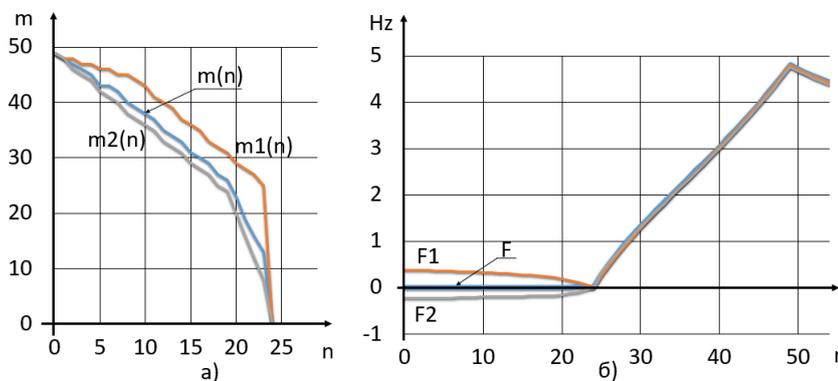
После получения значений, программа ищет оптимальные области, в которых, вероятнее всего, окажется нужная нам кривая, которая даст точную форму объема, занятого экранирующем сверхтоком. В результате получаем линии или кривые, которые соответствуют значению полного магнитного поля около нуля, т.е.  $\sqrt{H_z^2 + H_r^2} - H_0 \approx 0$  и имеют форму вытянутой кривой (Рис. 3.2).



Р и с у н о к 3.2

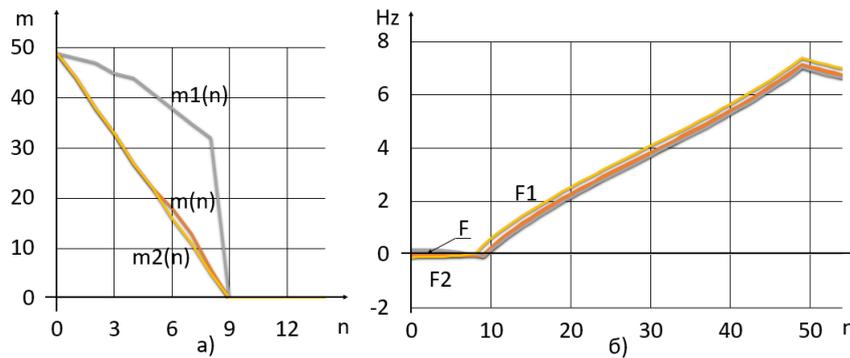
а) рассчитанные программой линии  $m3(n) - m7(n)$  созданные в четверти сечения диска, б) соответствующие им значения целевой функции  $F3 - F7$

Далее запускается алгоритм случайных блужданий, который ищет форму распределения сверхтока, соответствующую оптимальной функции  $F(r, z)$ . Результаты работы алгоритма при различных глубинах проникновения магнитного поля  $\rho/R = 0.5, 0.2$  и  $0.8$  представлены на Рис. 3.3 – 3.5.



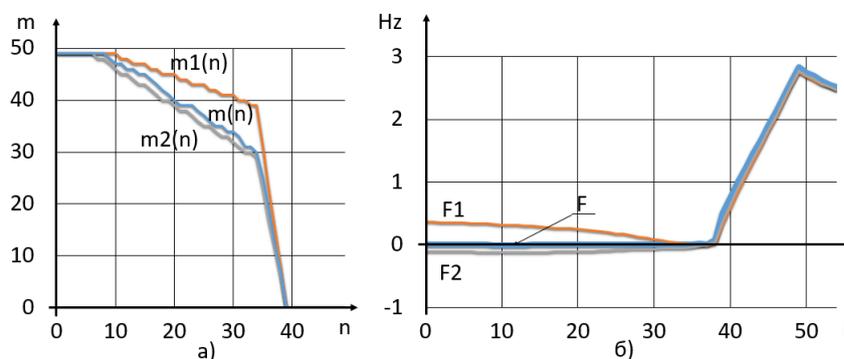
Р и с у н о к 3.3

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при  $\rho/R = 0.5$  (50%)



Р и с у н о к 3.4

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при  $\rho/R = 0.2$  (20%)



Р и с у н о к 3.5

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при  $\rho/R = 0.8$  (80%)

Разработанный алгоритм поиска осуществляется через рекурсивный вызов функции, который перебирает различные варианты форм проникновения магнитного поля в сверхпроводник, вычисляет интеграл для  $F$  по формуле (2.2) и на каждом этапе сравнивает его со средним значением полученных интегралов. По сути алгоритма поиска оптимальной конфигурации объема сверхтока сводится к построению кривых в областях с окончательно установленными верхней  $m1(n)$  и нижней  $m2(n)$  границами. Значение шага случайно, но варьируется в пределах значений данных граничных областей. По мере возрастания значений  $[m1(n) - m2(n)]$  нижняя граница произвольных шагов увеличивается. Как только находится лучший вариант, при котором среднее отклонение  $\leq 3\%$ , данные записываются в файл, после чего данные обрабатываются в MS Excel и OriginPro с целью получения 2D и 3D графиков.

#### 4. Заключение

Разработанный алгоритм случайных блужданий позволяет рассчитывать оптимальную конфигурацию объема диска занятого экранирующим сверхтоком. Алгоритм находит минимум целевой функции что, по сути, решает интегральные уравнения 1-го рода (2.1). Решением является численное уравнение кривой  $L_{opt}(r, z) = 0$ , образующей криволинейный конус, внутри которого поле и сверхток отсутствуют. С помощью программы, разработанной на языке C#, с использованием описанного выше алгоритма, было выполнено математическое моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в

ВТСП-диск. Расчеты были выполнены для случаев, когда внешнее магнитное поле в плоскости  $z = 0$  проникает на глубину 20, 50 и 80 % от радиуса диска. Полученные результаты показали эффективность разработанного алгоритма, что позволяет использовать его для других задач подобных рассмотренной. Например, для расчета распределения плотности критического тока в объеме диска для модели критического состояния типа Кима [2] – [3] сверхпроводников 2-го рода [7]. В статье представлены результаты работы программы для сетки  $50 \times 50$  в плоскости  $(r, z)$  четверти сечения диска.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Р. Bean, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 250 – 251.
2. Y. B. Kim, C. F. Heampstead, A. R. Strnad, “Critical persistent currents in hard superconductors”, *Phys. Rev. Lett.*, **9:7** (1962), 306 – 309.
3. Е.Н. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities”, *Phys. Rev. B.*, **58:10** (1998), 6506 – 6522.
4. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Намагниченность коротких цилиндров жестких сверхпроводников второго рода и карта распределения экранирующего тока в модели Бина”, *ЖТФ*, **82:5** (2012), 1 – 5.
5. Н. Д. Кузьмичев, И. В. Бурьянов, “Математическое моделирование и разработка программы расчета магнитных свойств сверхпроводников 2-го рода в форме цилиндра”, *Материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. «Машиностроение: наука, техника, образование»*, 2017, 270 – 278.
6. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование нелинейного отклика короткого цилиндра из жесткого сверхпроводника”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **19:3** (2011), 110 – 119.
7. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Численное моделирование гармоник намагниченности диска из жесткого сверхпроводника второго рода в приближении экранировки поля в центре образца”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13:1** (2011), 55 – 62.
8. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование процесса намагниченности цилиндрического сверхпроводника в модели Бина”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **21:1** (2012), 139 – 148.
9. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13:4** (2011), 25 – 34.

Поступила 15.01.2018

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

## Numerical modeling of the process of penetration of an external magnetic field into a thick disk-shaped of a high-temperature superconductors on the basis of the random walk algorithm

© N. D. Kuzmichev <sup>5</sup>, I. V. Buryanov <sup>6</sup>, M. A. Vasyutin <sup>7</sup>, A. Yu. Shitov <sup>8</sup>

**Abstract.** In this paper a mathematical modeling of the process of penetration of an external magnetic field into a thick disk-shaped sample of high-temperature superconductor (HTSC) in a critical state is performed. The problem is reduced to finding the minimum of the objective function that includes integral equations of the first kind. At the same time, volume of the disk is occupied by the shielding superconducting current (overcurrent). Disk is separated by a curved conical surface with shape that is determined by a random walk in the disk  $(r, z)$  plane. The result of the development of the program in language C# is given; this program calculates the optimal configuration of the overcurrent volume in HTSC using the random walk algorithm. The results of the computational experiment based on Bean's model for cases when an external magnetic field in the  $z = 0$  plane penetrates in a superconducting disk to the depth of 20, 50 and 80 % of the disk radius, are given. The results of the program's work for the grid of 50x50 in the plane  $(r, z)$  of the quarter of the disk section are presented. Processing and visualization of obtained numerical data were carried out using OriginLab and MS Excel.

**Key Words:** type-II superconductor, high-temperature superconductor, critical state, shielding overcurrent, Bean's model, integral equations of the first kind, objective function, random walk algorithm

## REFERENCES

1. C.P. Bean, "Magnetization of hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 250 – 251.
2. Y.B. Kim, C.F. Heampstead, A.R. Strnad, "Critical persistent currents in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962), 306 – 309.
3. E.H. Brandt, "Superconductor disks and cylinders in axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities", *Phys. Rev. B.*, **58**:10 (1998), 6506 – 6522.
4. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, "[The magnetization in hard type-II superconductors of short cylinders and a map of the distribution of the shielding current in the Bean's model]", *JTF Publ.*, **82**:5 (2012), 1 – 5 (In Russ.).

<sup>5</sup> **Nikolay D. Kuzmichev**, Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

<sup>6</sup> **Igor V. Buryanov**, Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, [i.v.buryanov@gmail.com](mailto:i.v.buryanov@gmail.com)

<sup>7</sup> **Mikhael A. Vasyutin**, Docent of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, [vasyutinm@mail.ru](mailto:vasyutinm@mail.ru)

<sup>8</sup> **Almir Yu. Shitov**, Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, [shishkin92@mail.ru](mailto:shishkin92@mail.ru)

5. N. D. Kuzmichev, I. V. Buryanov, “[Mathematical modeling and development of a program for calculating the magnetic properties in cylinder-shapes of type-II superconductors]”, *Materialy XI Vseros. nauch.-prakt. konf. «Mashinostroyeniye: nauka, tekhnika, obrazovaniye» [Proceeding of the XI All-Russian Scientific Conference of the «Mechanical engineering: science, technology, education»]*, 2017, 270 – 278 (In Russ.).
6. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the nonlinear response of a short cylinder-shape a hard superconductor]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskkiye nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. The Volga region. Physics and mathematics]*, **19**:3 (2011), 110 – 119 (In Russ.).
7. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Numerical simulation of the magnetization harmonics of a disk from a type-II hard superconductor in the field shielding approximation at the center of the sample]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:1 (2011), 55 – 62 (In Russ.).
8. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the magnetization process of a cylindrical superconductor in the Bean’s model]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskkiye nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. The Volga region. Physics and mathematics]*, **21**:1 (2012), 139 – 148 (In Russ.).
9. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the shielding current distribution and hysteresis of the magnetization of short cylinders of type-II hard superconductors in the Bean’s approximation]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:4 (2011), 25 – 34 (In Russ.).

*Submitted 15.01.2018*

УДК 544.431.2, 519.688

## Программная реализация алгоритма определения кинетического уравнения химической реакции

© З. А. Хамидуллина<sup>1</sup>, А. С. Исмагилова<sup>2</sup>, С. И. Спивак<sup>3</sup>

**Аннотация.** Данная работа посвящена изучению сложных химических реакций методами теории графов. Рассмотрен теоретико-графовый алгоритм определения кинетического уравнения механизма химической реакции. Разработано программное обеспечение для исследования механизмов химических реакций, основанное на алгоритмах нахождения базисных маршрутов и записи уравнения стационарной скорости по базисным маршрутам. Выражены кинетические уравнения образования продуктов реакции через кинетические уравнения маршрутов. В основе метода лежит теория квазистационарных реакций Дз. Хориути – М. И. Темкина. В программе реализована теоретико-графовая интерпретация механизмов сложных химических реакций для построения стационарных кинетических моделей каталитических реакций, линейных относительно промежуточных веществ. Полученные в результате работы программы кинетические уравнения по отдельным компонентам применяются при исследовании механизмов химических реакций. Работа программы проиллюстрирована на примере механизма паровой конверсии метана на никелевом катализаторе.

**Ключевые слова:** механизм химической реакции, маршрут, граф Темкина, кинетическое уравнение реакции, константа скорости.

### 1. Введение

Основным в теории сложных стационарных реакций является понятие об их маршрутах. Каждый набор стехиометрических чисел, приводящий к исключению промежуточных веществ, называется маршрутом реакции [1]–[2].

Каждый маршрут можно представить как линейную комбинацию базисных маршрутов. Для небольших схем механизмов сложных химических реакций базис маршрутов нетрудно найти непосредственно. При нахождении базиса маршрутов для систем, содержащих большое количество участников реакции и стадий, более наглядным является использование аппарата теории графов.

В работах [3]–[4] описан теоретико-графовый метод декомпозиции по базисным маршрутам для применения общей теории анализа информативности кинетических параметров. Авторы используют методологию исследования систем дифференциальных уравнений химической кинетики на графах, предложенных А. И. Вольпертом [5].

В [2] приводится методика для построения системы уравнений стационарных реакций, основанная на теоретико-графовой интерпретации химической реакции. В графе вершинами являются промежуточные вещества, а дугами – элементарные стадии, направление

<sup>1</sup> Хамидуллина Зульфия Абударовна, аспирант кафедры математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, shakirova111@mail.ru

<sup>2</sup> Исмагилова Альбина Сабирьяновна, профессор кафедры математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, ismagilovaas@rambler.ru

<sup>3</sup> Спивак Семен Израилевич, зав. кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, semen.spivak@mail.ru

которых указывает на направление реакции. Графы, введенные М. И. Темкиным, удобно применять при исследовании механизмов химических реакций, линейных относительно промежуточных веществ.

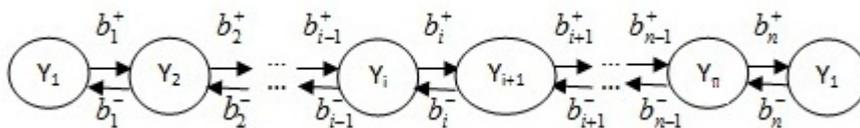
Кинетические уравнения сложных реакций в стационарных режимах могут быть представлены в виде скоростей накопления соответствующих продуктов [2]:

$$W_{A_j} = \sum_p v_j W^{(p)} - \sum_{p'} v'_j W^{(p')},$$

где  $W_{A_j}$  – скорость образования вещества  $A_j$ ,  $W^{(p)}$  и  $W^{(p')}$  – скорости по маршрутам  $p$  и  $p'$  соответственно;  $p$  и  $p'$  – маршруты образования и расходования вещества  $A_j$  соответственно. Уравнения данных маршрутов содержат стехиометрические коэффициенты при этом веществе  $v_j$  и  $v'_j$ .

Таким образом, скорость химического превращения в системе может быть охарактеризована скоростями накопления соответствующих продуктов  $W_{A_j}$  и увязана со скоростями реакции по базисным маршрутам. Скоростью реакции по базисному маршруту называется число пробегов по базисному маршруту в единицу времени в единичном реакционном пространстве при условии, что все пробеги стадий распределены по маршрутам базиса.

Следует отметить, что базисный маршрут реакции представляет собой одномаршрутную реакцию, общий вид графа которой изображен на (Рис. 1.1). Теоретико-графовый метод нахождения скорости реакции по базисному маршруту аналогичен выводу скорости одномаршрутной химической реакции.



Р и с у н о к 1.1

Граф Темкина одномаршрутной сложной каталитической реакции

В работе [6] приводится упрощенная форма записи кинетического уравнения одномаршрутной сложной каталитической реакции, основанная на теоретико-графовом анализе механизма химической реакции:

$$W = \frac{\prod_{i=1}^n b_i^+ - \prod_{i=1}^n b_i^-}{\sum_{i=1}^n B_{pr,i} + \sum_{i=1}^n B_{obr,i} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-2} B_{sm,i}},$$

где  $B_{pr,i}$ ,  $B_{obr,i}$ ,  $B_{sm,i}$  – веса прямых, обратных и смешанных каркасов соответственно,  $b_j^+$ ,  $b_j^-$  – веса дуг, входящих в данный каркас в прямом и обратном направлениях соответственно.

Вес дуги графа, соответствующего механизму реакции, определяется в виде  $b_s = k_s$  или  $b_s = k_s c_j$  в зависимости от того, участвует ли в  $s$ -й реакции наблюдаемое вещество, где  $c_j$  – концентрация  $j$ -го наблюдаемого вещества,  $k_s$  – константа скорости  $s$ -й стадии.

Каркас вершины – незамкнутая последовательность дуг, проходящая через все вершины и входящая в данную вершину. Запишем выражение для веса  $k$ -го каркаса  $i$ -й вершины, полученное устранением из цикла  $k$ -ой стадии:

$$B_{k,i} = \prod_{j=k+1}^{i-1} b_j^+ \cdot \prod_{j=i}^{k-1} b_j^-, \quad k = 1, \dots, n.$$

Прямыми и обратными называются каркасы, составленные из дуг, которые обходятся только в прямом или обратном направлениях соответственно. Смешанные каркасы – каркасы, содержащие дуги, которые обходятся как в прямом, так и в обратном направлении. Выражения для  $B_{pr,i}$ ,  $B_{obr,i}$ ,  $B_{sm,i}$ , полученные в работе [5], структурированы с учетом вершин графа механизма реакции, в которых претерпевают изменения:

$$\begin{aligned}
 k = 1 : B_{pr,1} &= \prod_{j=2}^n b_j^+, & k = 2, \dots, n-1 : B_{pr,k} &= \prod_{j=k+1}^n b_j^+ \cdot \prod_{j=1}^{k-1} b_j^+, & k = n : B_{pr,n} &= \prod_{j=1}^{n-1} b_j^+, \\
 k = 1 : B_{obr,1} &= \prod_{j=1}^{n-1} b_j^-, & k = 2 : B_{obr,2} &= \prod_{j=2}^n b_j^-, & k = 3, \dots, n : B_{obr,k} &= \prod_{j=i}^n b_j^- \cdot \prod_{j=1}^{i-2} b_j^-, \\
 k = 1, \dots, n : B_{sm,k} &= \prod_{j=k+i}^{i-1} b_j^+ \cdot \prod_{j=i}^{k-i} b_j^-, & i \neq k, & i \neq k+1.
 \end{aligned}$$

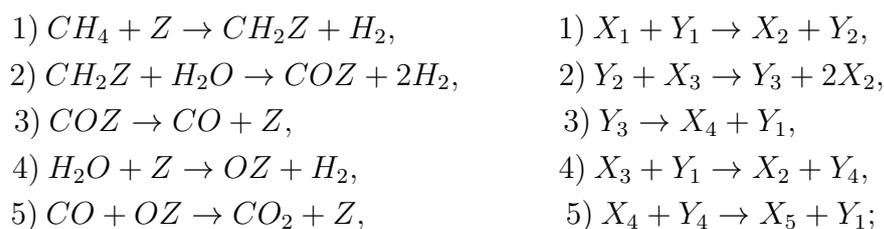
Отличительной чертой скорости реакции по базисному маршруту и кинетического уравнения химической реакции по отдельным компонентам является то, что они могут быть записаны непосредственно из графа реакции, необходимо лишь знать веса дуг и стехиометрические коэффициенты, которые однозначно определяются механизмом реакции.

Реальные механизмы сложных реакций часто включают в себя большое количество веществ и реакций между ними. Поэтому возникает вопрос об автоматизации решения задачи, которое ускорит исследование химических реакций и повысит уровень надежности полученных результатов.

Результатом настоящей работы является программная реализация алгоритма определения уравнения стационарной скорости по базисным маршрутам и кинетических уравнений образования продуктов реакции.

## 2. Описание программного обеспечения

Программа разработана авторами в среде Microsoft Visual C++ 2012. Интерфейс программы представляет собой окно с полями и таблицами для ввода входных данных, с вкладками и с кнопками для выполнения расчетов и получения результатов. Рассмотрим механизм паровой конверсии метана на никелевом катализаторе [7] :



где  $X_1 = CH_4$ ,  $X_2 = H_2$ ,  $X_3 = H_2O$ ,  $X_4 = CO$ ,  $X_5 = CO_2$  – исходные вещества и продукты реакции;  $Y_1 = Z$ ,  $Y_2 = CH_2Z$ ,  $Y_3 = COZ$ ,  $Y_4 = OZ$  – промежуточные вещества.

Входными данными программы являются количество стадий в механизме, общее количество участников, количество промежуточных веществ, обозначения участников реакции, матрица стехиометрических коэффициентов, матрица весов (Рис. 2.1).

О программе      Закрыть

Введите название реакции:

Введите количество элементарных стадий:

Введите количество участников реакции:

Введите количество промежуточных веществ:

Заполните стехиометрическую матрицу:

Матрица	X3	X4	X5	Y1	Y2	Y3	Y4
3	0	1	0	1	0	-1	0
4	-1	0	0	-1	0	0	1
5	0	-1	1	1	0	0	-1

Веса стадий:

Веса стадий	1	2	3	4
b+	k1k1	k2k3	k3	k4k3
b-	0	0	0	0
*				

Обозначения веществ:

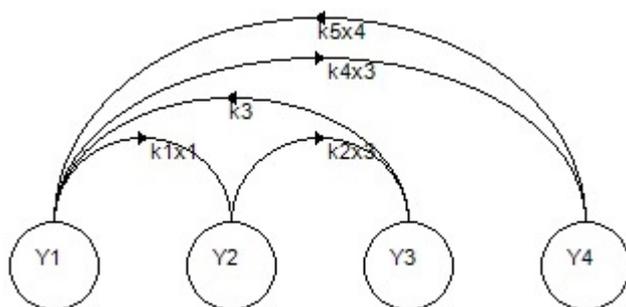
	X1	X2	X3	X4	X5	Y1	Y2
Вещество	CH4	H2	H2O	CO	CO2	Z	CH2Z

Р и с у н о к 2.1  
Окно для ввода данных

Отображение механизма реакции построено на построении стехиометрической матрицы. Строкам матрицы соответствуют элементарные стадии, столбцам – участники реакции. Обратимость стадии учтена в матрице весов: если  $b^- = 0$ , то стадия необратима (знак  $\rightarrow$ ), иначе – обратима (знак  $\rightleftharpoons$ ). Механизм химической реакции отображается также через введенные обозначения.

В программе построение графа Темкина основано на анализе матрицы стехиометрических коэффициентов, содержащей информацию о промежуточных веществах. В центре области геометрического отображения графа изображены вершины графа. Элементарные стадии в прямом направлении изображены дугами в верхней части графа, а в обратном направлении – в нижней. Ребра имеют соответствующие направления и отмечены соответствующими значениями из матрицы весов (Рис. 2.2).

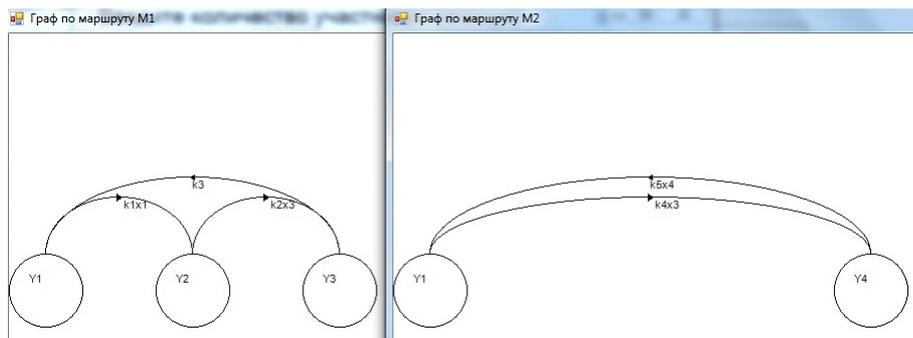
Нахождение базисных маршрутов реализовано в программе инструментами математического аппарата линейной алгебры. Рассматривается часть матрицы стехиометрических коэффициентов, отвечающей промежуточным веществам. Поиск маршрута начинается со столбца с максимальным количеством единиц. Осуществляется переход от 1 к -1 в строке, далее – от -1 к 1 в столбце и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут элемент, с которого началось движение. При переходе к новому столбцу программа «запоминает» участника реакции и номер стадии. Последовательность столбцов и строк определяет базисный маршрут сложной химической реакции.



Р и с у н о к 2.2

Граф Темкина механизма паровой конверсии метана на никелевом катализаторе

Для реакции паровой конверсии метана на никелевом катализаторе программой были найдены два базисных маршрута:  $M_1 = (11100)^T$ ,  $M_2 = (00011)^T$ . Для каждого маршрута программа строит подграф с аналогичным алгоритмом рисования графа исходного механизма (Рис. 2.3).



Р и с у н о к 2.3

Подграфы, соответствующие базисным маршрутам  $M_1$ ,  $M_2$

Основной результат работы программы – уравнение стационарной скорости по базисным маршрутам (Рис. 2.4) и кинетическое уравнение образования продуктов паровой конверсии метана на никелевом катализаторе (Рис. 2.5).

Механизм реакции | Граф | Маршруты | Скорость по маршруту | Кинетические уравнения

W 2 OK

Скорость по маршруту

W	
▶	$(k_1x_1k_2x_3k_3)/(k_2x_3k_3+k_1x_1k_3+k_1x_1k_2x_3)$
*	$(k_4x_3k_5x_4)/(k_4x_3+k_5x_4)$

Скорость реакции по маршруту M1:  
 $W_1 = (k_1x_1k_2x_3k_3)/(k_2x_3k_3+k_1x_1k_3+k_1x_1k_2x_3)$   
 Скорость реакции по маршруту M2:  
 $W_2 = (k_4x_3k_5x_4)/(k_4x_3+k_5x_4)$

Р и с у н о к 2.4

Скорости по маршрутам для механизма паровой конверсии метана на никелевом катализаторе

Механизм реакции | Граф | Маршруты | Скорость по маршруту | Кинетические уравнения

Кинетические уравнения

$$(dX_2/dt) = (k_1x_1k_2x_3k_3)/(k_2x_3k_3+k_1x_1k_3+k_1x_1k_2x_3) + 2*(k_1x_1k_2x_3k_3)/(k_2x_3k_3+k_1x_1k_3+k_1x_1k_2x_3) + (k_4x_3k_5x_4)/(k_4x_3+k_5x_4)$$

$$(dX_4/dt) = (k_1x_1k_2x_3k_3)/(k_2x_3k_3+k_1x_1k_3+k_1x_1k_2x_3) - (k_4x_3k_5x_4)/(k_4x_3+k_5x_4)$$

$$(dX_5/dt) = (k_4x_3k_5x_4)/(k_4x_3+k_5x_4)$$

Р и с у н о к 2.5

Кинетические уравнения образования продуктов паровой конверсии метана на никелевом катализаторе

Программа апробирована на линейных механизмах сложных химических реакций и способна корректно работать с массивами, состоящими из нескольких десятков кинетических параметров.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта № 17-47-020068.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Horiuti, "Stoichiometrische zahlen und die kinetik der chemischen reaktionen", *J. Res. Inst. Catal., Hokkido University*, **5**:1 (1957), 1–26.
2. М. И. Темкин, "Кинетика стационарных сложных реакций", *Механизм и кинетика сложных каталитических реакций*, Наука, М., 1970, 57–72.
3. С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, "Декомпозиция систем дифференциальных уравнений химической кинетики на основе теории графов", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:1 (2013), 23–27.
4. С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, "Декомпозиция сложных механизмов протекания химических реакций по независимым маршрутам", *ДАН*, **455**:5 (2014), 547–549.
5. А. И. Вольперт, "Дифференциальные уравнения на графах", *Математический сборник*, **88**:4 (1972), 578–588.
6. Г. С. Яблонский, В. И. Быков, А. Н. Горбань, *Кинетические модели каталитических реакций*, Наука, Новосибирск, 1983, 255 с.
7. О. В. Крылов, *Гетерогенный катализ*, Академкнига, М., 2004, 679 с.

Поступила 16.12.2017

MSC2010 68R10

## Software implementation of the algorithm for determining the kinetic equation of the chemical reaction

© Z. A. Khamidullina <sup>4</sup>, A. S. Ismagilova <sup>5</sup>, S. I. Spivak <sup>6</sup>

**Abstract.** In the present paper we study complex chemical reactions by methods of graph theory. A graph-theoretic algorithm for determining the kinetic equation of the chemical reaction mechanism is considered. The software for studying the mechanisms of chemical reactions, based on algorithms for finding the basic routes and recording the stationary velocity equation along these routes is developed. Kinetic equations of product formation by kinetic equations of routes were expressed. The method is based on Horiuti-Temkin's theory of quasistationary reactions. The program implements a graph-theoretic interpretation of the mechanisms of complex chemical reactions for the construction of stationary kinetic models of catalytic reactions linear with respect to intermediate substances. The obtained kinetic equations for individual components are used to study the mechanisms of chemical reactions. Program is tested on the example of the mechanism of methane vapor conversion on a nickel catalyst.

**Key Words:** chemical reaction mechanism, route, Temkin's graph, kinetic equation, rate constant.

### REFERENCES

1. J. Horiuti, "Stoichiometrische zahlen und die kinetik der chemischen reaktionen", *J. Res. Inst. Catal., Hokkido University*, **5:1** (1957), 1–26.
2. M. I. Temkin, "[Kinetics of stationary complex reactions]", *Mekhanizm i kinetika slozhnykh kataliticheskikh reaktsiy [Mechanism and kinetics of complex catalytic reactions]*, Nauka Publ., Moscow, 1970, 57–72 (In Russ.).
3. S. I. Spivak, A. S. Ismagilova, "[Decomposition of systems of differential equations of chemical kinetics on the basis of graph theory]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15:1** (2013), 23–27 (In Russ.).
4. S. I. Spivak, A. S. Ismagilova, "[Decomposition of complex mechanisms of chemical reactions through independent routes]", *DAN*, **455:5** (2014), 547–549 (In Russ.).
5. A. I. Volpert, "[Differential equations on graphs]", *Matematicheskii sbornik [Math. USSR-Sb.]*, **88:4** (1972), 578–588 (In Russ.).
6. G. S. Yablonskiy, V. I. Bykov, A. N. Gorban, *Kineticheskiye modeli kataliticheskikh reaktsiy [Kinetic models of catalytic reactions]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1983 (In Russ.), 255 p.
7. O. V. Krylov, *Geterogennyy kataliz [Heterogeneous catalysis]*, Akademkniga Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 679 p.

Submitted 16.12.2017

<sup>4</sup> **Zul'fiya A. Khamidullina**, Postgraduate Student, Department of Mathematical Modeling, Bashkirsky State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7983-9663>, shakirova111@mail.ru

<sup>5</sup> **Albina S. Ismagilova**, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bashkirsky State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8539-5974>, ismagilovaas@rambler.ru

<sup>6</sup> **Semen I. Spivak**, Head of Department of Mathematical Modeling, Bashkirsky State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0911-7446>, semen.spivak@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## ПАМЯТИ ЛОГИНОВА БОРИСА ВЛАДИМИРОВИЧА



Б. В. Логинов  
(14.11.1938–09.01.2018)

9 января 2018 г. на 80-м году жизни, после тяжелой и продолжительной болезни ушел из жизни Логинов Борис Владимирович, заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.

Борис Владимирович родился в 1938 г. в г. Термез Узбекской ССР. Его отец, Логинов Владимир Георгиевич, работал инженером–диспетчером МинВодХоза. Мать Бориса Владимировича — Горбатенко Анна Онуфриевна, окончила фармацевтический институт и до войны работала по специальности, а после войны — бухгалтером.

В 1956 г. Борис Владимирович окончил с золотой медалью школу № 32 г. Ташкента и поступил на физическое отделение физико-математического факультета Среднеазиатского государственного университета им. В. И. Ленина, созданного в 1924 г. и впоследствии

переименованного в Ташкентский государственный университет. В 1959 г. факультет был разделен на физический и механико-математический, и Борис Владимирович продолжил обучение на механико-математическом факультете. Он стал одним из лучших студентов на курсе благодаря высокому интеллекту, независимому мышлению, огромному трудолюбию и работоспособности.

В 1961 г. Борис Владимирович с отличием окончил механико-математический факультет Ташкентского государственного университета и был приглашен в аспирантуру. В 1965 г. под руководством профессора И. С. Аржаных Б. В. Логинов защитил кандидатскую диссертацию в специализированном совете по физ.-мат. наукам АН Узбекской ССР.

После окончания аспирантуры (в ноябре 1964 г.) Борис Владимирович Логинов два года работал ассистентом кафедры математического анализа ТашГУ, а в 1966 г. был переведен на должность старшего научного сотрудника в Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекской ССР в отдел «Дифференциальные уравнения», возглавляемый чл.-корр. АН УзССР М. С. Салахитдиновым.

В 1982 г. Б. В. Логинов защитил докторскую диссертацию на тему «Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности» в специализированном совете под председательством академика А. Н. Тихонова на факультете ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

В 1985 г. Борис Владимирович был назначен заведующим отделом «Прикладная математика» Института Математики им. В. И. Романовского АН Узбекской ССР. За время работы в Институте Математики им. В. И. Романовского АН Узбекской ССР Б. В. Логинов подготовил 10 кандидатов наук.

В январе 1992 г. Б. В. Логинову было присвоено ученое звание профессора по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения.

С декабря 1993 г. Б. В. Логинов работал в Ульяновском государственном техническом университете профессором кафедры «Высшая математика». За 20 лет работы в г. Ульяновске под его руководством было защищено еще 8 кандидатских диссертаций.

С 1994 г. Б. В. Логинов становится постоянным участником, а затем и членом программных комитетов международных научных конференций по дифференциальным уравнениям и молодежных научных школ-семинаров по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ, проводимых в Мордовском государственном университете. Начинается его тесное сотрудничество с математической школой Мордовского государственного университета и Средне-Волжским математическим обществом, возглавляемыми профессором Е. В. Воскресенским. Он становится научным руководителем курсовых и дипломных работ студентов, специализирующихся на кафедре прикладной математики МГУ им. Н. П. Огарева, членом диссертационного совета (под председательством Е. В. Воскресенского), членом редколлегии научного рецензируемого журнала «Труды Средневолжского математического общества» (с 2009 г. — «Журнал Средневолжского математического общества»).

Борис Владимирович внес неоценимый вклад в развитие журнала. Так в 2004 г. он представил журнал в реферативную базу данных Zentralblatt MATH (Германия), благодаря чему с 2015 г. журнал входит в перечень ВАК.

Б. В. Логинов вел активную научную деятельность в области теории ветвления решений нелинейных уравнений со студентами, аспирантами и сотрудниками кафедры прикладной математики МГУ им. Н. П. Огарёва, являлся научным консультантом по докторским диссертациям. Под его руководством было защищено большое количество курсовых и дипломных работ, а также две кандидатских диссертации.

Он многократно выступал в роли пленарного докладчика и организатора секций и мини-симпозиумов на международных конференциях и конгрессах различного ранга;

участвовал во многих всесоюзных, всероссийских и международных математических конференциях и симпозиумах, проходивших в Болгарии, Венгрии, Германии, Канаде, Польше, Румынии, России, Чехословакии и других странах.

Он являлся руководителем и исполнителем научных грантов и федеральных целевых программ правительства РФ, неоднократно выигрывал гранты оргкомитетов международных конференций.

Профессор Б. В. Логинов являлся членом ряда отечественных и зарубежных научных сообществ: Академия Естествознания, Академия Нелинейных Наук, СВМО (Средне-Волжское математическое общество), AMS (Американское математическое общество, США), IFNA (Международная федерация нелинейного анализа, США), GAMM (Общество прикладной математики и механики, Германия), ROMAI (Румынское общество прикладной и индустриальной математики); членом редколлегий научных журналов, в том числе ROMAI Journal (Румыния), «Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», «Вестник УлГТУ», трудов УлГТУ и УлГПУ; референтом журналов по математике: РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», «Zentralblatt für Mathematik»; постоянным рецензентом нескольких центральных научных журналов, в т. ч. всероссийского журнала «Дифференциальные уравнения». Б. В. Логинов являлся членом многих диссертационных советов ведущих университетов России и неоднократно выступал в качестве официального оппонента.

Борис Владимирович являлся одним из основателей нового направления в области нелинейных явлений — теории ветвления решений нелинейных уравнений, в т. ч. в условиях групповой симметрии, методов регуляризации, метода ложных возмущений, получившего международное признание и нашедшего широкое применение в естественнонаучных дисциплинах (поверхностные волны, физика фазовых переходов, гидро- и аэроупругость, нелинейная оптика, математическая биология). Результаты его трудов в данных научных направлениях оказали значительное и плодотворное влияние на эволюцию математики, в настоящее время они используются во многих приложениях к механике и физике, вычислительной математике.

Многолетний цикл исследований Б. В. Логинова в области нелинейных явлений, нелинейного анализа и спектральной теории линейных операторов отражен в 485 научных работах (из них 270 статей в республиканских, центральных и зарубежных журналах) сборниках трудов конференций различного ранга, 4-х монографиях. Многие из этих работ получили международное признание, цитируются в математической литературе.

В 1987 г. Б. В. Логинов был награжден орденом «Знак Почета» за высокие научные достижения, имел отраслевые награды, неоднократно поощрялся руководством Института Математики АН УзССР и УлГТУ. С 1998 г. имеет звание «Ветеран труда»; 1 февраля 2007 г. ему присвоено звание «Заслуженный деятель науки РФ». Широта научной деятельности, прикладная направленность исследований, творческая активность, научные связи в России, СНГ и дальнем зарубежье, предоставление ему зарубежных грантов для участия в международных научных мероприятиях (Германия, Канада, Испания, Польша, Румыния, Турция, Финляндия, Швеция и др.) характеризуют Б.В. Логинова как профессора международного уровня.

Борис Владимирович обладал замечательным даром — умением видеть и формулировать новые проблемы. Его увлеченность наукой, а также лидерские качества и высочайший профессиональный авторитет, всегда привлекали большое количество учеников. Борис Владимирович предъявлял высокие требования к качеству как своих научных результатов, так и работ аспирантов. Однако его требовательность сочеталась с отзывчивостью, желанием и умением прийти на помощь, поддержать своих учеников, коллег и сотрудников. Не жалея собственного времени и здоровья, он был готов не только консуль-

тировать своих учеников, но и тщательно проверять их расчеты.

Борис Владимирович до последних дней сохранял научную активность. Многие поколения коллег и учеников будут благодарны ему – замечательному ученому и человеку.

Светлая память о Борисе Владимировиче Логинове будет жить в наших сердцах долгие годы.

*А. С. Андреев, А. Н. Андронов, Т. Е. Бадюкина,  
Д. И. Бояркин, И. В. Бойков, П. А. Вельмисов,  
В. З. Гринес, С. А. Гришина, В. К. Горбунов,  
Ю. Н. Дерюгин, А. П. Жабко, Р. В. Жалнин,  
И. В. Коноплева, Л. Р. Ким-Тян, В. Н. Кризский,  
Т. Ф. Мамедова, С. М. Мурюмин, О. В. Починка,  
И. П. Рязанцева, Н. В. Савинов, А. Р. Сибирева,  
Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин, Е. В. Фолиадова,  
И. И. Чуцаев, П. А. Шаманаев, Н. Г. Ярушкина*

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

— введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Внимание! Новые правила.** С этого номера в статью включается список литературы на английском языке. Список литературы имеет заголовок *References* и располагается после ключевых слов на английском языке.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX.**

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**

### **Статьи в журналах на русском языке:**

Р. А. Шамаев, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

Р. А. Шамаев, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Материалы конференций на русском языке:**

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem* [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], *Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam"* [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

### **Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, *Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Lyapunov transformations and stability of motion], *Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

# Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой `\input` в файл-преамбулу). Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Эти команды имеют следующие аргументы:

```
{УДК или MSC 2010} {название статьи} {автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя
Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.},
Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации,
ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}
```

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`,

`\textit`. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $D_i$  в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{D}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

- а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где `степень_сжатия` число от 0 до 1.

- б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

- в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

- г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник}`,

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}`.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

## Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

### Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the
form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with
a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.
```

### Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

### Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with
nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Статьи в сборниках на русском языке:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\serial 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

```

\Bibitem{shamanaevBib6}
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
\publaddr Moscow
\publ Nauka Publ.
\yr 1966
\totalpages 576
\lang In Russ.

```

**Материалы конференций на русском языке:**

```

\Bibitem{shamanaevBib7}
\by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev
\inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]
\proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation]
\procinfo Saransk, 12-15 July 2016
\publ SVMO Publ.
\pages 105–107
\lang In Russ.

```

```

\Bibitem{shamanaevBib8}
\by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov
\inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]
\proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]
\procinfo Suzdal, 8-12 July 2016
\pages 231–233
\lang In Russ.

```

**Диссертации на русском языке:**

```
\Bibitem{shamanaevBib9}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations  
and stability of motion]
```

```
\thesisinfo Diss. ...kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]
```

```
\publaddr Saransk
```

```
\yr 1997
```

```
\totalpages 145
```

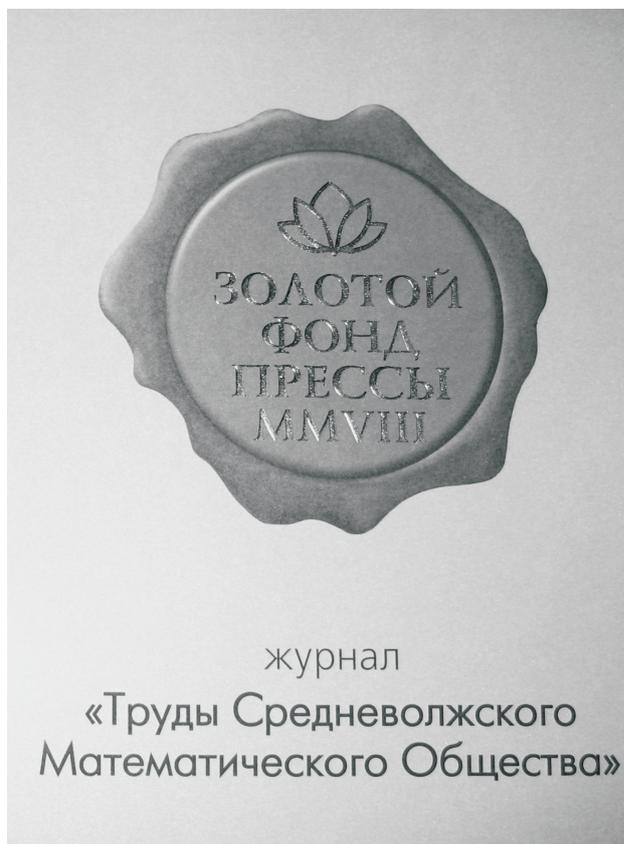
```
\lang In Russ.
```

## Алфавитный указатель

Бубнова О. Ю.	39	Ноздринова Е. В.	30
Бурьянов И. В.	88	Орлов Ю. Н.	78
Васютин М. А.	88	Плешаков Р. В.	78
Гермидер О. В.	64	Починка О. В.	30
Жабко А. П.	13	Попов В. Н.	64
Жужома Е. В.	23	Рязанцева И. П.	39
Исаенкова Н. В.	23	Сидоров Д. Н.	55
Исмагилова А. С.	96	Спивак С. И.	96
Клочкова Л. В.	78	Талецкий Д. С.	46
Кузьмичев Н. Д.	88	Тихомиров О. Г.	13
Логинов Б. В.	103	Тында А. Н.	55
Медведев В. С.	23	Хамидуллина З. А.	96
Муфтахов И. Р.	55	Чижова О. Н.	13

Шитов А. Ю. 88

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Компьютерная верстка:* Атряхин В. А.  
*Корректурa:* Пудовкина Л. А., Язовцева О. С.  
*Перевод:* Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 29.03.2018. Цена свободная.

Подписано в печать 01.03.2018. Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 10,5 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 398.

Типография Издательства Мордовского университета  
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

## Для заметок

## Для заметок

