

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Tom}}{\text{Vol.}}$  19  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  4

2017



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 19, № 4. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704

Издаётся с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

**Zhurnal Srednevolzhskogo  
Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 19, NO. 4. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управления.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи, опубликованные в нем, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – РИНЦ.

Подписка на журнал осуществляется в любом почтовом отделении связи на всей территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединённом каталоге «Пресс-са России» – 94016.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

**Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**  
**Middle Volga Mathematical Society Journal**  
**Scientific Journal**

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations – RISC.

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

**FOUNDERS:** Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

**PUBLISHER:** Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

**EDITORIAL OFFICE:** Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Петр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, начальник научно-исследовательского отдела Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского авиационного института (Москва, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Логинов Борис Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор политехнического института Югорского государственного университета (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Самарского государственного технического университета (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Anca Veronica Ion** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Петр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор — проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Tishkin Vladimir Fedorovich** — Editor in chief, corresponding member of RAS, full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), deputy director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Kuzmichev Nikolay Dmitrievich** — Deputy editor, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shamaev Pavel Anatolievich** — Executive secretary, Associate Professor, PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Differential equations and Theoretical mechanics of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Andreev Aleksandr Sergeevich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory of the Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Alimov Shavkat Arifdjanovich** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Akhtyamov Azamat Muhtarovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information technologies of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Ayupov Shavkat Abdulaevich** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Boykov Ilya Vladimirovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of «Higher and Applied Mathematics» of the Penza State University (Penza, Russia)

**Velmisov Petr Aleksandrovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Higher Mathematics» of the Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Gorbunov Vladimir Konstantinovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and mathematical methods and information technologies of the Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Grines Vyacheslav Zigmundovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics of the National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Derugin Yuriy Nikolaevich** — senior researcher, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the research Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Zhabko Aleksey Petrovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory of the Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Zhegalov Valentin Ivanovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation of the Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Kalmenov Tynysbek Sharipovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Kamachkin Aleksandr Mikhaylovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics of the Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Kuznetsov Evgeny Borisovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation of the Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Krizskii Vladimir Nikolaevich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation of the Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Loginov Boris Vladimirovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of the Higher Mathematics of the Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk,

Russia)

**Martynov Sergey Ivanovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute of the Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Matus Petr Pavlovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Pochinka Olga Vitalievna** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics of the National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Radchenko Vladimir Pavlovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Applied mathematics and informatics» of the Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Ryazantseva Irina Prokofievna** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical named for R. E. Alekseev of the University (Nizhny Novgorod, Russia)

**Salahitdinov Mahmud Salahitdinovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics of the National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Spivak Semen Izrailevich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Terekhin Mikhail Tikhonovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics of the Ryazan State University named for S. Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca Veronica Ion** — PhD in Mathematics, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Buharest, Romania, Senior Researcher III

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — full professor, Dr. Sci. (Engineering), Vice-rector for Science & Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — PhD (Phys.-Math.), Head of the Department of Algebra and Geometry of the National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — full professor, Dr. Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

### **С. З. Джамалов**

Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в прямоугольнике . . . . . 12

---

### **М. В. Донцова**

Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов . . . . . 23

---

### **Н. И. Жукова**

Слоевые модели для гладких орбифолдов и их применение . . . . . 33

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

### **С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач**

Модель динамики самодвижущейся цепочки частиц в вязкой жидкости . . . . . 45

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

### **А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, О. А. Изосимова**

Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении . . . . . 55

---

### **Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Е. А. Лапшина, Д. А. Шилкин**

Математическое моделирование гармоник напряжения для вольтамперных характеристик с резкими особенностями . . . . . 68

---

<b>А. Н. Тында, Н. Ю. Кудряшова</b>	
Численные методы решения задач в нелинейных макроэкономи- ческих интегральных моделях . . . . .	79

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА ЕВГЕНИЯ ВИКТОРОВИЧА ВОСКРЕ- СЕНСКОГО . . . . .	95
---	----

---

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

<b>S. Z. Dzhamalov</b>	
The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed-type equation of the second kind and of the second order in a rectangle . . . . .	12
<b>M. V. Dontsova</b>	
The nonlocal solvability conditions for a system with absolute terms for the case of positive coefficients . . . . .	23
<b>N. I. Zhukova</b>	
Foliated models for orbifolds and their applications . . . . .	33

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

<b>S. I. Martynov, L. U. Tkach</b>	
Model of dynamics of self-moving chain in a viscous fluid . . . . .	45

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

<b>A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina, O.A. Izosimova</b>	
Modified gauge conditions for Maxwell equations in quasi-stationary magnetic approximation . . . . .	55
<b>N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. A. Lapshina, D. A. Shilkin</b>	
Mathematical modeling of voltage harmonics for current-voltage characteristics with singularities . . . . .	68
<b>A. N. Tynda, N. Yu. Kudryashova</b>	
Numerical methods for the problems of nonlinear macroeconomic integral models . . . . .	79

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

ON THE 80TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR E.V. VOSKRESENSKY'S BIRTHDAY . . . . .	95
---	----

---

## МАТЕМАТИКА

---

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.12-22

УДК 517.956.6

## Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в прямоугольнике

© С. З. Джамалов<sup>1</sup>

**Аннотация.** Доказывается однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространствах Соболева  $W_2^\ell(Q)$ , ( $2 \leq \ell$  - целое число)

**Ключевые слова:** уравнения смешанного типа второго рода второго порядка, нелокальная краевая задача с постоянными коэффициентами, единственность, существование и гладкость обобщенного решения, метод  $\varepsilon$ -регуляризации, метод Галеркина.

### 1. Введение и постановка задачи

В прямоугольнике  $Q = (0, \ell) \times (0, T) = \{(x, t); 0 < x < \ell < +\infty; 0 < t < T < +\infty\}$  рассмотрим уравнения второго порядка

$$Lu = K(t) u_{tt} + \alpha(x, t) u_t - u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t). \quad (1.1)$$

Пусть  $K(0) \leq 0 \leq K(T)$ , предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) – достаточно гладкие функции. Уравнение (1.1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции  $K(t)$  по переменной  $t$  внутри области  $Q$  не налагается никаких ограничений [3], [10].

**Нелокальная краевая задача.** Найти обобщенное решение уравнения (1.1) из пространства Соболева  $W_2^l(Q)$ , ( $2 \leq l$  - целое число), удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\gamma \cdot u(x, 0) = u(x, T), \quad (1.2)$$

$$\eta \cdot D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1, \quad (1.3)$$

где  $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$ ,  $p = 0, 1$ ;  $D_x^0 u = u$ ,  $\gamma$  и  $\eta$  – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже. Различные другие нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода (1.1) изучены в работах [1], [4]-[8], [12], а для уравнения смешанного типа первого рода задача типа (1.2), (1.3) предложена и изучена в работе автора [6].

<sup>1</sup> Джамалов Сирохиддин Зухриддинович, доцент, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики Академии наук Узбекистана (100170, Узбекистан, г. Ташкент, ул. М.Улугбек, д. 81.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3925-5129>; siroj63@mail.ru

В данной работе в случае, когда  $K(0) \leq 0 \leq K(T)$ , для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1.1) впервые изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3) в пространствах Соболева  $W_2^\ell(Q)$ , ( $2 \leq \ell$  – целое число).

## 2. Единственность решения задачи

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того, пусть  $2\alpha - K_t + \lambda K \geq \delta_1 > 0$ ,  $\lambda c - c_t \geq \delta_2 > 0$ , где  $\lambda = \frac{2}{T} \ln \gamma$ , причём  $\gamma \in (1, \infty)$ ,  $\eta \in [1, \infty)$ ,  $c(x, 0) \leq c(x, T)$ . Тогда для любой функции  $f(x, t) \in L_2(Q)$ , если существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) в пространстве  $W_2^2(Q)$ , то оно единственно и для функции  $f(x, t)$  справедливо следующее неравенство

$$\|u\|_1 \leq m \|f\|_0,$$

где  $(\cdot, \cdot)_l$  и  $\|\cdot\|_l$  – соответственно обычное скалярное произведение и норма из пространства Соболева  $W_2^l(Q)$ , ( $2 \leq l$  – целое число), а при  $l = 0$ ,  $W_2^0(Q) = L_2(Q)$  [3], [9]-[11].

Через  $t$  здесь и далее обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства  $W_2^2(Q)$ , тогда для любой функции  $u \in W_2^2(Q)$ , интегрируя по частям и применяя неравенства Коши с  $\sigma$  [11], легко получить следующее тождество

$$\begin{aligned} \int_Q Lu \cdot \exp(-\lambda t - \mu x) \cdot u_t dx dt &\geq \int_Q \exp(-\lambda t - \mu x) \{(2a - K_t + \lambda K) \cdot u_t^2 + \lambda u_x^2 + \\ &+ (\lambda c - c_t) \cdot u^2\} dx dt + \int_{\partial Q} \exp(-\lambda t - \mu x) \{K u_t^2 \nu_t - 2 \cdot u_x u_t \nu_x + u_x^2 \nu_t + c \cdot u^2 \nu_t\} ds - \\ &- \sigma \cdot \|u_x\|_0^2 - \mu^2 \cdot \sigma^{-1} \cdot \|u_t\|_0^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $0 < \lambda = \frac{2}{T} \ln \gamma$ ,  $\gamma \in (1, \infty)$ ,  $0 \leq \mu = \frac{2}{\ell} \ln \eta$ ,  $\eta \in [1, \infty)$ ,  $\nu = (\nu_t = \cos(\nu, t); \nu_x = \cos(\nu, x))$  – единичный вектор внутренней нормали к границе  $\partial Q$ ,  $\sigma$  и  $\sigma^{-1}$  – коэффициенты неравенства Коши с  $\sigma$  [11]. Условия теоремы 2.1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области  $Q$ . Пусть  $u \in W_2^2(Q)$  удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3), учитывая условия теоремы 2.1, получим, что граничные интегралы положительно определены, то есть

$$\begin{aligned} &\int_{\partial Q} \exp(-\lambda t - \mu x) \cdot \{K(t) u_t^2 \nu_t - 2 \cdot u_x u_t \nu_x + u_x^2 \nu_t + c \cdot u^2 \nu_t\} ds = \\ &= \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[K(T) e^{-\lambda T} \gamma^2 - K(0)] \cdot u_t^2(x, 0) + [e^{-\lambda T} \gamma^2 - 1] \cdot u_x^2(x, 0)\} dx + \\ &\quad - 2[\exp(-\mu \ell) \cdot \eta^2 - 1] \int_0^T \exp(-\lambda t) \cdot u_x(0, t) u_t(0, t) dt + \\ &\quad + \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[c(x, T) e^{-\lambda T} \gamma^2 - c(x, 0)] \cdot u^2(x, 0)\} dx \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot [K(T) - K(0)] u_t^2(x, 0) dx + \\
&+ \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[c(x, T)e^{-\lambda T} \gamma^2 - c(x, 0)] \cdot u^2(x, 0) dx \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Учитывая вышесказанное, из неравенства (2.4),(2.5) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
\int_Q Lu \cdot \exp(-\lambda t - \mu x) \cdot u_t dx dt &\geq \int_Q \exp(-\lambda t - \mu x) \{(2\alpha - K_t + \lambda K) \cdot u_t^2 + \lambda u_x^2 + \\
&+ (\lambda c - c_t) \cdot u^2\} dx dt + \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot [K(T)e^{-\lambda T} \gamma^2 - K(0)] u_t^2(x, 0) dx + \\
&+ \int_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[c(x, T)e^{-\lambda T} \gamma^2 - c(x, 0)] \cdot u^2(x, 0) dx - \\
&- \sigma \cdot \|u_x\|_0^2 - \mu^2 \cdot \sigma^{-1} \cdot \|u_t\|_0^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Выбирая коэффициенты  $\lambda - \sigma \geq \lambda_0 > 0$ ,  $\delta_1 - \mu^2 \sigma^{-1} > \delta_0 > 0$  и отбрасывая положительный граничный интеграл из неравенства (2.6) получим необходимую первую оценку

$$\|u\|_1 \leq m \|f\|_0,$$

из которой следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из пространства  $W_2^2(Q)$  [10], [11].

Тем самым доказана теорема 2.1.

### 3. Уравнения составного типа

Для доказательства существования решения задачи (1.1)-(1.3) используем метод  $\varepsilon$ -регуляризации в сочетании с методом Галеркина [3], [5]- [7].

Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения составного типа

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon + L u_\varepsilon = f(x, t), \tag{3.7}$$

$$\gamma \cdot D_t^q u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \tag{3.8}$$

$$\eta \cdot D_x^p u_\varepsilon|_{x=0} = D_x^p u_\varepsilon|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1, \tag{3.9}$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  – оператор Лапласа в плоскости,  $D_t^q u = \frac{\partial^q u}{\partial t^q}$ ,  $q = 0, 1, 2$ ;  $D_t^0 u = u$ ,  $\varepsilon$  – достаточно малое положительное число,  $\eta, \gamma = \text{const} \neq 0$  такие, что  $\gamma \in (1, \infty)$ ;  $\eta \in [1, \infty)$ . Ниже используем уравнение составного типа (3.7) в качестве  $\varepsilon$  – регуляризирующего уравнения для уравнения (1.1) [3], [5]- [7].

В дальнейшим через  $W$  всюду ниже будем обозначать класс функций  $u_\varepsilon(x, t) \in W_2^2(Q)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \in L_2(Q)$ , удовлетворяющих соответствующим условиям (3.8),(3.9).

**Определение 3.1.** Регулярным решением задачи (3.7)-(3.9) будем называть функцию  $u_\varepsilon(x, t) \in W$ , удовлетворяющую уравнению (3.7).

С. З. Джамалов. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными . . .

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того, пусть  $2\alpha - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0$ ,  $\lambda c - c_t \geq \delta_2 > 0$ , где  $\lambda = \frac{2}{T} \ln \gamma$ , причем  $\gamma \in (1, \infty)$ ,  $\eta \in [1, \infty)$ ,  $\alpha(x, 0) = \alpha(x, T)$ ,  $\alpha(0, t) = \alpha(\ell, t)$ ,  $c(x, 0) = c(x, T)$ . Тогда для любой функции  $f, f_t \in L_2(Q)$ , такой что  $\gamma \cdot f(x, 0) = f(x, T)$  существует единственное регулярное решение задачи (3.7)-(3.9) и для него справедливы следующие оценки:

$$1). \quad \varepsilon \cdot (\|u_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon tx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq m \|f\|_0^2,$$

$$2). \quad \varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq m [\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2].$$

**Доказательство.** Пусть  $\phi_j(x, t)$  – собственные функции следующей задачи

$$-\Delta \phi_j = \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} = \mu_j^2 \phi_j; \quad (3.10)$$

$$D_t^p \phi_j|_{t=0} = D_t^p \phi_j|_{t=T}, \quad p = 0, 1; \quad (3.11)$$

$$D_x^p \phi_j|_{x=0} = D_x^p \phi_j|_{x=\ell}. \quad (3.12)$$

Решая задачи (3.10)-(3.12) имеем  $\phi_j(x, t) = T_j(t) \cdot X_j(x)$ , где  $\mu_j^2 = (\nu_j^2 + \tau_j^2)$ ;  $\tau_j = \frac{2\pi j}{T}$ ,  $\nu_j = \frac{2j\pi}{\ell}$ ;  $j \in N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N$  – множество натуральных чисел, собственные функции  $T_j(t) = \{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \tau_j t, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \tau_j t\}$ ,  $X_j(x) = \{\frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \nu_j x, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \nu_j x\}$  являются решениями спектральное задание Штурм-Лиувилля с периодическими условиями. Известно, что система собственных функций  $\{\phi_j(x, t)\}$  фундаментальна в пространстве  $W_2^2(Q)$  и в  $L_2(Q)$  образует ортонормированный базис [2], [11].

Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$\ell \omega_j = e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \phi_j, \quad (3.13)$$

$$\gamma \cdot \omega_j(x, 0) = \omega_j(x, T), \quad (3.14)$$

где  $\gamma = const \neq 0$  такое, что  $\gamma \in (1, \infty)$ . Очевидно, что задача (3.13), (3.14) однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\ell^{-1} \phi_j = \omega_j = e^{\frac{\mu \cdot x}{2}} \cdot \left[ \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda \tau}{2}\right) \phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \phi_j dt \right]. \quad (3.15)$$

Ясно, что функции  $\omega_j(x, t)$  линейно независимы. Действительно, если  $\sum_{j=1}^N c_j \omega_j = 0$  для какого-нибудь последовательности  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  функций, то, действуя на эту сумму оператором  $\ell$ , имеем  $\sum_{j=1}^N c_j \ell \omega_j = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j = 0$ , отсюда следует, что для всех  $j = \overline{1, N}$  коэффициенты  $c_j = 0$ . Отметим, что из построения функции  $\phi_j(x, t)$  вытекают следующие условия на функции  $\omega_j(x, t)$

$$\gamma \cdot D_t^q \omega_j|_{t=0} = D_t^q \omega_j|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \quad (3.16)$$

$$\eta \cdot D_x^p \omega_j|_{x=-1} = D_x^p \omega_j|_{x=1}, \quad p = 0, 1. \quad (3.17)$$

Теперь приближенное решение задачи (3.7)-(3.9) ищем в виде  $w = u_\varepsilon^N = \sum_{j=1}^N c_j \omega_j$ , где коэффициенты  $c_j$  для любого  $j = \overline{1, N}$  определяются как решение линейной алгебраической системы

$$\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \phi_j dxdt = \int_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \phi_j dxdt. \quad (3.18)$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (3.18). Умножая каждое уравнение из (3.18) на коэффициент  $2c_j$  и суммируя по индексу  $j$  от 1 до  $N$ , учитывая задачи (3.13), (3.14) из (3.18), получим следующее тождество

$$\int_Q L_\varepsilon w \cdot e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \cdot w_t dxdt = \int_Q f \cdot e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \cdot w_t dxdt, \quad (3.19)$$

Из которого, в силу условия теоремы 3.1, интегрированием тождества (3.19) получим для приближенного решения задачи (3.7)-(3.9) первой оценки, т.е.

$$\varepsilon \cdot (\|u_{\varepsilon tt}^N\|_0^2 + \|u_{\varepsilon tx}^N\|_0^2) + \|u_\varepsilon^N\|_1^2 \leq m \|f\|_0^2. \quad (3.20)$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (3.18). В частности, из оценки (3.20) получим существование слабого обобщенного решения задачи (3.7)-(3.9) [9]-[11].

Теперь докажем вторую априорную оценку.

Благодаря задаче (3.10)-(3.14), из тождества (3.18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2} \int_Q L_\varepsilon w \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell \omega_j dxdt = -\frac{1}{\mu_j^2} \int_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell \omega_j dxdt, \quad (3.21)$$

где

$$\Delta \ell \omega_j = \exp \left[ \frac{-(\lambda t + \mu x)}{2} \right] \cdot (\Delta \omega_{j t} - \lambda \omega_{j tt} - \mu \omega_{j xx} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{4} \omega_{j t}); \quad \Delta \omega_j = \omega_{j tt} + \omega_{j xx}.$$

Умножая каждое уравнение из (3.21) на  $2\mu_j^2 c_j$  и суммируя по индексу  $j$  от 1 до  $N$ , учитывая условия (3.16), (3.17) из (3.21), получим следующее тождество

$$-2 \int_Q L_\varepsilon w \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell w dxdt = -2 \int_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell w dxdt \quad (3.22)$$

Интегрируя (3.22) с учетом условия теоремы 3.1 и краевых условий (3.16), (3.17), получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} m \cdot [\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2] &\geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \right\|_0^2 + \int_Q e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \{ (2\alpha - |K_t| + \lambda K) w_{tt}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (2\alpha - |K_t| + \lambda K) w_{tx}^2 + \lambda w_{xx}^2 + \lambda w_{tx}^2 \} dxdt + \\ &+ \int_{\partial Q} e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} [(K w_{tt}^2 - 2\alpha w_t w_{tt} + w_{xx}^2 + 2w_{xx} w_{tt} - w_{xt}^2 + K w_{xt}^2 + \\ &+ 2c w (w_{tt} + w_{xx}) \nu_t + (-2K w_{tt} w_{xt} - 2w_{tt} w_{xt} + 2\alpha w_t w_{xt}) \nu_x] ds - \sigma (\|w_{xx}\|_0^2 + \|w_{xt}\|_0^2) - \\ &- \mu^2 \sigma^{-1} \|u_{tt}\|_0^2 - m (\|f\|_0^2) = \sum_{i=1}^2 J_i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $J_1$  – интеграл по области,  $J_2$  – интеграл по границе. Выбирая коэффициенты  $\lambda - \sigma \geq \lambda_0 > 0$ ,  $\delta_1 - \mu^2 \sigma^{-1} > \delta_0 > 0$ , учитывая условие теоремы 3.1 и краевые условия (3.16), (3.17) получим, что  $J_1 > 0$  и  $J_2 \geq 0$ .

Теперь из неравенства (3.23) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon^N \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon^N\|_2^2 \leq m \cdot [\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2]. \quad (3.24)$$

Следовательно, полученные оценки (3.20), (3.24) позволяют выполнить предельный переход по  $N \rightarrow \infty$  и заключить, что некоторая подпоследовательность  $\{u_\varepsilon^{N_k}\}$  сходится в силу единственности (теорема 2.1) в  $L_2(Q)$  вместе с производными первого и второго порядка к исходному регулярному решению  $u_\varepsilon(x, t)$  задачи (3.7)-(3.9), обладающему свойствами, указанными в теореме 3.1 [5]-[7], [9]-[12].

Для  $u_\varepsilon(x, t)$  в силу (3.24) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq m [\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2]. \quad (3.25)$$

Тем самым доказана теорема 3.1.

#### 4. Существования решения задачи

Теперь с помощью метода  $\varepsilon$  – регуляризации докажем разрешимость задачи (1.1)-(1.3).

**Т е о р е м а 4.1.** *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства  $W_2^2(Q)$  существует и единствено.*

Доказательство. Единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из  $W_2^2(Q)$  доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из  $W_2^2(Q)$ . Для этого рассмотрим в области уравнение (3.7) с краевыми условиями (3.8), (3.9) при  $\varepsilon > 0$ . Так как выполнены все условия теоремы 3.1, то существует единственное регулярное решение задачи (3.7)-(3.9) при  $\varepsilon > 0$  и для нее справедливы первая и вторая оценка. Отсюда следует, что из множества функций  $\{u_\varepsilon\}, \varepsilon > 0$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций такую, что  $\{u_{\varepsilon_i}\} \rightarrow u$  при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ . Покажем, что предельная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению  $Lu = f$ .

В самом деле, последовательность  $\{u_{\varepsilon_i}\}$  слабо сходится в  $W_2^2(Q)$  и так как последовательность  $\left\{ \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} \right\}$  равномерно ограничена в  $L_2(Q)$ , а оператор  $L$  – линейный, то имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \quad (4.26)$$

Из равенства (4.26), переходя к пределу при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ , получим единственное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства  $W_2^2(Q)$  [3], [5]-[7].

Таким образом, теорема 4.1 доказана.

#### 5. Гладкость обобщенного решения

Теперь докажем более общий случай, когда  $l \geq 3$ . Всюду ниже для простоты предполагаем, что коэффициенты уравнения (1.1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области  $\bar{Q}$ .

**Т е о р е м а 5.1.** Пусть выполнены условия теоремы 4.1, кроме того, пусть

$$2(\alpha + pK_t) - |K_t| + \lambda K \geq \delta > 0,$$

$D_t^p K|_{t=0} = D_t^p K|_{t=T}$ ,  $D_t^p \alpha|_{t=0} = D_t^p \alpha|_{t=T}$ ;  $D_t^p c|_{t=0} = D_t^p c|_{t=T}$ . Тогда для любой функции  $f(x, t)$ , такой что  $f \in W_2^p(Q)$ ,  $D_t^{p+1} f \in L_2(Q)$ ,  $\gamma D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$ , существует, и при этом единственное, обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства  $W_2^{p+2}(Q)$ , где  $p = 1, 2, 3, \dots$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из гладкости решения задачи (3.10)-(3.14) возникает следующее условие для приближенного решения задачи (3.7)-(3.9)

$$w = u \underset{\varepsilon}{\overset{N}{\in}} C^\infty(Q);$$

$$\gamma \cdot D_t^q w|_{t=0} = D_t^q w|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

$$\eta \cdot D_x^p w|_{x=0} = D_x^p w|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1$$

Учитывая условия теоремы 2 при  $\varepsilon > 0$  и нелокальные условия при  $t = 0$ ,  $t = T$ , из равенства

$$(-\frac{\lambda t}{2} \cdot L_\varepsilon u_\varepsilon)|_{t=0}^{t=T} = (-\varepsilon \cdot e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon + e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot L u_\varepsilon)|_{t=0}^{t=T} = (e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot f(x, t))|_{t=0}^{t=T}$$

получим  $\|\gamma \cdot u_\varepsilon(ttt, x, 0) - u_\varepsilon(ttt, x, T)\|_0 \leq const$ .

Отсюда следует, что функция  $v_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon|_t(x, t)$  принадлежит классу  $W$  и удовлетворяет следующему уравнению

$$P_\varepsilon v_\varepsilon = L_\varepsilon v_\varepsilon = f_t - \alpha_t u_\varepsilon|_t - c_t u_\varepsilon = F_\varepsilon. \quad (5.27)$$

Из теоремы 4.1 следует, что семейство функций  $\{F_\varepsilon\}$  равномерно ограничено в пространстве  $L_2(Q)$ , то есть

$$\|F_\varepsilon\|_0 \leq m [\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2].$$

Далее из условий теоремы 4.1 легко получить, что оператор  $P_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) удовлетворяет условиям теоремы 5.1, отсюда на основании оценки (1),(2) теоремы 3.1 для функции  $\{v_\varepsilon\}$  получим аналогичные оценки

$$\varepsilon \cdot (\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_\varepsilon \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} v_\varepsilon \right\|_0^2) + \|v_\varepsilon\|_1^2 \leq m (\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2), \quad (5.28)$$

$$\varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_\varepsilon \right\|_0^2 + \|v_\varepsilon\|_2^2 \leq m [\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2]. \quad (5.29)$$

Далее, функция  $\{u_\varepsilon\}$  удовлетворяет параболическому уравнению с условиями (1.2),(1.3)

$$Pu_\varepsilon = u_\varepsilon|_t - u_\varepsilon|_{xx} = f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon - K(t) u_\varepsilon|_{tt} - (\alpha - 1) u_\varepsilon|_t - c u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon, \quad (5.30)$$

причем  $\Phi_\varepsilon \in L_2(Q)$ . В силу вышедоказанного, семейство функций  $\{\Phi_\varepsilon\}$  равномерно ограничено в пространстве  $W_2^2(Q)$ , то есть

$$\|\Phi_\varepsilon\|_0^2 \leq m [\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2] \leq m \|f\|_2^2. \quad (5.31)$$

Отсюда на основании априорных оценок для параболических уравнений [11] и неравенства (5.29) получим

$$\|u_\varepsilon\|_3^2 \leq m \|f\|_2^2.$$

Далее аналогично доказываются неравенства [3], [5]- [7], [11]

$$\|u_\varepsilon\|_{p+2}^2 \leq m \|f\|_{p+1}^2,$$

где  $p = 2, 3, \dots$

Тем самым доказана теорема 5.1

## 6. Заключение

В данной работе в случае, когда  $K(0) \leq 0 \leq K(T)$ , для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1.1) доказана однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3) в пространствах Соболева  $W_2^\ell(Q)$ , ( $2 \leq \ell$  – целое число).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. А. Алимов, “О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. В сб. Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения.”, 1983, 237–239.
  2. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965, 798 с.
  3. В. Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, НГУ, Новосибирск., 1983, 84 с.
  4. С. Н. Глазатов, “Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике”, *Сиб. мат. журн.*, **25**:6 (1985), 162–164.
  5. С. З. Джамалов, “Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка”, *Узб.мат.журн.*, 2014, № 1, 5–14.
  6. С. З. Джамалов, “Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения Трикоми”, *Узб.мат.журн.*, 2016, № 2, 51–60.
  7. S.Z. Djamalov, “On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle”, *IJUM journal*, **17**:2 (2016), 95–104.
  8. М. Г. Каратопраклиева, “Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа”, *Дифференциальные уравнения*, **27** (1991), 68–79.
  9. А. И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*, НГУ, Новосибирск., 1990, 130 с.
  10. А. Г. Кузьмин, *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике*, ЛГУ, Ленинград., 1990, 204 с.
- С. З. Джамалов. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными . . .

11. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва., 1973, 407 с.
12. А. Н. Терехов, “Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа. В кн. Неклассические уравнения математической физики”, 1985, 148–158.

*Поступила 18.09.2017*

MSC2010 35M10,35M20

# The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed-type equation of the second kind and of the second order in a rectangle

© S. Z. Dzhamalov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the present work for the second order mixed-type equation of the second kind we study one-valued solvability and smoothness of the generalized solution of nonlocal boundary value problem with constant coefficients in Sobolev spaces.

**Key Words:** second order mixed type equation of the second kind, nonlocal boundary value problem with constant coefficients, uniqueness, existence and smoothness of generalized solution, Sobolev space, Galerkin method, "ε-regularization" method.

## REFERENCES

1. N. A. Alimov, "O nelokalnoe kraevoe zadache dlya odnogo neklassicheskogo uravneniya [On a nonlocal boundary value problem for a non-classical equation]. In book The theory and methods for solving ill-posed problems and their applications]", 1983, 237–239 (In Russ).
2. Yu . M. Berezansky, *[Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators]*, Naukova dumka, M.Kyev, 1965 (In Russ), 798 c.
3. V .N. Vragov, *[Boundary problems for non-classical equations of mathematical physics]*, NGU, Novosibirsk, 1983 (In Russ), 84 c.
4. S.N. Glazatov, "[Nonlocal boundary problems for mixed type equations in a rectangle]", *Siberian Math. Journ.*, **26**:6 (1985), 162–164 (In Russ).
5. S.Z. Dzhamalov, "[About one nonlocal boundary value problem for the equation of the mixed type of the second kind of the second order]", *Uzbek mathematical journal*, 2014, № 1, 5–14 (In Russ).
6. S.Z. Dzhamalov, "[The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the equation of Trikomi]", *Uzbek mathematical journal*, 2016, № 2, 51–60 (In Russ).
7. S.Z. Djamalov, "[On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]", *IIUM journal*, **17**:2 (2016), 95–104 (In Engl).
8. M. G. Karatopraklieva, "[A nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type]", *Differents. Uravneniy*, **27**:1 (1991), 68–79 (In Russ).
9. A. I. Kozhanov, *[Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order]*, NGU, Novosibirsk, 1990 (In Russ), 130 c.

<sup>2</sup> **Sirojiddin. Z. Dzhamalov** Associate Professor, Senior Researcher, Department of Differential Equations of Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences (81 M.Ulugbek str., Academgorodok, Tashkent, 100170, Uzbekistan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3925-5129>; e-mail: siroj63@mail.ru

10. A. G. Kuzmin, *[Non-classical mixed type equations and their applications to the gas dynamics]*, LGU, Leningrad, 1990 (In Russ), 204 c.
11. O. A. Ladyjenskaya, *[Boundary problems of mathematical physics]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ), 407 c.
12. A. N. Terekhov, “[Nonlocal boundary problems for equations of variable type]”, 1985, 148–158 (In Russ).

*Submitted 18.09.2017*

УДК 517.9

# Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов

© М. В. Донцова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами для случая положительных коэффициентов. Исследование разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента, который позволяет определить условия разрешимости задачи Коши в исходных координатах без привлечения теоремы об обратной функции. Доказано существование локального решения задачи Коши, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами для случая положительных коэффициентов опирается на оригинальные глобальные оценки.

**Ключевые слова:** метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка.

## 1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a(t)u(t, x) + b(t)v(t, x))\partial_x u(t, x) = f_1(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c(t)u(t, x) + g(t)v(t, x))\partial_x v(t, x) = f_2(t, x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  – неизвестные функции,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $g(t)$  – известные функции,  $a(t) > 0$ ,  $b(t) > 0$ ,  $c(t) > 0$ ,  $g(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$ .

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x). \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Системы вида (1.1) встречаются в самых разных задачах из области естественных наук. Для исследования систем вида (1.1) применялись самые разнообразные подходы. В [1] содержится анализ разрешимости систем типа (1.1) на основе классического метода характеристик и с использованием понятия обобщенного решения.

<sup>1</sup> Донцова Марина Владимировна, старший преподаватель кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО "НГТУ им. Р. Е. Алексеева" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsowa.marina2011@yandex.ru

В рамках классического метода характеристик исследование сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где присутствует суперпозиция неизвестных функций. После нахождения решения в характеристических переменных для получения решения исходной задачи (1.1), (1.2) требуется перейти от характеристических переменных к переменным  $(t, x)$ . Последняя задача во многих случаях трудноразрешима, поэтому принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [1].

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [2-7]. В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  и указаны границы интервала разрешимости. В данной работе определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1) с помощью метода дополнительного аргумента.

## 2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.1), (1.2) расширенную характеристическую систему [2-7]:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x)}{ds} = a(s)w_1(s, t, x) + b(s)w_3(s, t, x), \quad (2.1)$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x)}{ds} = c(s)w_4(s, t, x) + g(s)w_2(s, t, x), \quad (2.2)$$

$$\frac{dw_1(s, t, x)}{ds} = f_1(s, \eta_1), \quad (2.3)$$

$$\frac{dw_2(s, t, x)}{ds} = f_2(s, \eta_2), \quad (2.4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2), \quad (2.5)$$

$$w_1(0, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)), \quad w_2(0, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)). \quad (2.6)$$

Неизвестные функции  $\eta_i$ ,  $w_j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$  зависят не только  $t$  и  $x$ , но еще и от дополнительного аргумента  $s$ . Интегрируя уравнения (2.1)–(2.4) по аргументу  $s$  и учитывая условия (2.5), (2.6), получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$\eta_1(s, t, x) = x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu, \quad (2.7)$$

$$\eta_2(s, t, x) = x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu, \quad (2.8)$$

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)) + \int_0^s f_1(\nu, \eta_1)d\nu, \quad (2.9)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)) + \int_0^s f_2(\nu, \eta_2)d\nu, \quad (2.10)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2). \quad (2.11)$$

Система (2.7)–(2.11) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_1 + b(\tau)w_3)d\tau)d\nu, \quad (2.12)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_4 + g(\tau)w_2)d\tau)d\nu, \quad (2.13)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu), \quad (2.14)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu). \quad (2.15)$$

Обозначим  $\Gamma_T = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$ ,

$$C_\varphi = \max \left\{ \sup_R \left| \varphi_i^{(l)} \right| \mid i = 1, 2, l = \overline{0, 2} \right\}, \quad C_f = \max \left\{ \sup_{\Omega_T} |f_1|, \sup_{\Omega_T} |f_2|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_1|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_2| \right\},$$

$l = \max \{ \sup_{[0, T]} |a|, \sup_{[0, T]} |b|, \sup_{[0, T]} |c|, \sup_{[0, T]} |g| \}$ ,  $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$  – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной  $t$ , дважды дифференцируемых по переменной  $x$ , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на  $\Omega_T$ ,  $\bar{C}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\Omega_*)$  – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка  $\alpha_m$  по  $m$ -му аргументу,  $m = \overline{1, n}$ , на неограниченном подмножестве  $\Omega_* \subset R^n, n = 1, 2, \dots$ ,  $C^2([0, T])$  – пространство функций, определенных, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка на отрезке  $[0, T]$ .

Для произвольной функции  $U$  введем норму  $\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s, t, x)|$  без указания в символе  $\|\cdot\|$  области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1), (1.2), которое имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции.

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $a, b, c, g \in C^2([0, T])$ , где  $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$ , и выполняются условия

$$a(t) > 0, \quad b(t) > 0, \quad c(t) > 0, \quad g(t) > 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\varphi'_1(x) \geq 0, \quad \varphi'_2(x) \geq 0 \text{ на } R, \quad \partial_x f_1 \geq 0, \quad \partial_x f_2 \geq 0, \quad \text{на } \Omega_T.$$

Тогда для любого  $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$  задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).

Теорема следует из выполнения условий трех лемм.

**Л е м м а 2.1.** Если функции  $w_j, j = \overline{1, 4}$ , удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)–(2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими производными, то функции  $u(t, x) = w_1(t, t, x), v(t, x) = w_2(t, t, x)$  будут решением задачи Коши (1.1), (1.2) на  $\Omega_{T_0}$ ,  $T_0 \leq T$ , где  $T_0$  – константа, определяемая через исходные данные.

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [2–7].

**Л е м м а 2.2.** При выполнении условий  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1(t, x), f_2(t, x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $a, b, c, g \in C^2([0, T])$ ,  $a(t) > 0$ ,  $b(t) > 0$ ,  $c(t) > 0$ ,  $g(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$  и

$$T \leq \min\left(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\right) \quad (2.16)$$

система интегральных уравнений (2.12)–(2.15) имеет единственное решение  $w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15) зададим равенствами  $w_{10}(s, t, x) = \varphi_1(x)$ ,  $w_{20}(s, t, x) = \varphi_2(x)$ .

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12)–(2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$w_{1n} = \varphi_1\left(x - \int_0^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu\right) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_{1n} + b(\tau)w_{3n})d\tau)d\nu, \quad (2.17)$$

$$w_{2n} = \varphi_2\left(x - \int_0^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu\right) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_{4n} + g(\tau)w_{2n})d\tau)d\nu, \quad (2.18)$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu), \quad (2.19)$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu). \quad (2.20)$$

Теперь при каждом  $n$  систему (2.17)–(2.20) решаем (доказываем существование решения) с помощью процесса последовательных приближений. Нулевое приближение (при каждом  $n$ ) определим равенствами  $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Для системы уравнений (2.17)–(2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1\left(x - \int_0^t (a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k)d\nu\right) + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t (a(\tau)w_{1n}^k + b(\tau)w_{3n}^k)d\tau)d\nu, \quad (2.21)$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2\left(x - \int_0^t (c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k)d\nu\right) + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t (c(\tau)w_{4n}^k + g(\tau)w_{2n}^k)d\tau)d\nu, \quad (2.22)$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k)d\nu), \quad (2.23)$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k)d\nu). \quad (2.24)$$

Так же, как в [2], устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leq \min\left(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}\right) \quad (2.25)$$

последовательные приближения (2.21)–(2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17)–(2.20), для которого справедливы оценки  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

При выполнении условия (2.25) справедливы оценки

$$\|w_{1nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{2nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{3nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi, \|w_{4nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения  $w_{jnx}^k$ ,  $j = \overline{1,4}$  сходятся при  $k \rightarrow \infty$ , а значит, существуют производные  $w_{jnx}$ ,  $j = \overline{1,4}$  и справедливы оценки

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi, \quad \|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi, \quad \|\partial_x w_{3n}\| \leq 8C_\varphi, \quad \|\partial_x w_{4n}\| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17)–(2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12)–(2.15), для которого справедливы оценки  $\|w_j\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

При выполнении условия (2.16)  $w_{jnx} \rightarrow w_{jx} = \partial_x w_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , где функции  $\partial_x w_j$  являются непрерывными по всем своим аргументам на  $\Gamma_T$ . Справедливы оценки

$$\|\partial_x w_i\| \leq 4C_\varphi, \quad i = 1, 2, \quad \|\partial_x w_3\| \leq 8C_\varphi, \quad \|\partial_x w_4\| \leq 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что  $w_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной  $t$  на  $\Gamma_T$ . Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned} a(t) &> 0, \quad b(t) > 0, \quad c(t) > 0, \quad g(t) > 0, \quad t \in [0, T], \\ \varphi'_1(x) &\geq 0, \quad \varphi'_2(x) \geq 0, \quad x \in R, \quad \partial_x f_1 \geq 0, \quad \partial_x f_2 \geq 0, \quad (t, x) \in \Omega_T, \end{aligned} \quad (2.26)$$

решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

**Л е м м а 2.3.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $a, b, c, g \in C^2([0, T])$ , тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции  $w_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , представляющие собой решение системы уравнений (2.12)–(2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1,4}$  на  $\Gamma_T$ , где  $T \leq \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$ .

Доказательство.

Дважды проинтегрируем последовательные приближения (2.17)–(2.20) по  $x$ . Обозначим  $\omega_j^n = w_{jnx}$ ,  $j = \overline{1,4}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^n(s, t, x) &= -\varphi'_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu) \int_0^t (a(\nu)\omega_1^n + b(\nu)\omega_3^n)d\nu - \\ &- \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (a(\tau)\omega_1^n + b(\tau)\omega_3^n)d\tau d\nu + G_1(s, t, x, w_{1n}, w_{3n}, w_{1nx}, w_{3nx}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^n(s, t, x) &= -\varphi'_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu) \int_0^t (c(\nu)\omega_4^n + g(\nu)\omega_2^n)d\nu - \\ &- \int_0^s \partial_x f_2 \int_\nu^t (c(\tau)\omega_4^n + g(\tau)\omega_2^n)d\tau d\nu + G_2(s, t, x, w_{2n}, w_{4n}, w_{2nx}, w_{4nx}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\omega_3^n(s, t, x) = \omega_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a(\nu)w_{1nx} + b(\nu)w_{3nx})d\nu)^2 - w_{2(n-1)x} \int_s^t (a(\nu)\omega_1^n + b(\nu)\omega_3^n)d\nu, \quad (2.29)$$

$$\omega_4^n(s, t, x) = \omega_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c(\nu)w_{4nx} + g(\nu)w_{2nx})d\nu)^2 - w_{1(n-1)x} \int_s^t (c(\nu)\omega_4^n + g(\nu)\omega_2^n)d\nu, \quad (2.30)$$

где  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ , – известные функции.

При выполнении условия (2.16) с учетом установленных выше оценок  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1,4}$ , получаем  $|\int_s^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu| \leq 0,3$ ,  $|\int_s^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu| \leq 0,3$ .

Зафиксируем точку  $x_0 \in R^1$ . Рассмотрим множество  $\Omega_{x_0} = \{x \mid x_0 - 0.3 \leq x \leq x_0 + 0.3\}$ . Возьмем  $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$ .

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства:  $|\eta_{1n}(s, t, x_1) - \eta_{1n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ ,  $|\eta_{2n}(s, t, x_1) - \eta_{2n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ , где  $\eta_{1n}(s, t, x) = x - \int_s^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu$ ,  $\eta_{2n}(s, t, x) = x - \int_s^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu$ .

Установлена равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  при  $x \in \Omega_{x_0}$ , из которой следует равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  в выбранной, произвольной точке  $x_0$ , т.е. на  $R$ . Равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  используется для доказательства сходимости последовательных приближений  $\omega_j^n$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^n &= -\varphi'_1(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) \int_0^t (a(\nu)\tilde{\omega}_1^n + b(\nu)\tilde{\omega}_3^n)d\nu - \\ &- \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (a(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau d\nu + G_1(s, t, x, w_1, w_3, w_{1x}, w_{3x}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^n &= -\varphi'_2(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) \int_0^t (c(\nu)\tilde{\omega}_4^n + g(\nu)\tilde{\omega}_2^n)d\nu - \\ &- \int_0^s \partial_x f_2 \int_\nu^t (c(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau d\nu + G_2(s, t, x, w_2, w_4, w_{2x}, w_{4x}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a(\nu)w_{1x} + b(\nu)w_{3x})d\nu)^2 - w_{2x} \int_s^t (a(\nu)\tilde{\omega}_1^n + b(\nu)\tilde{\omega}_3^n)d\nu, \quad (2.33)$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c(\nu)w_{4x} + g(\nu)w_{2x})d\nu)^2 - w_{1x} \int_s^t (c(\nu)\tilde{\omega}_4^n + g(\nu)\tilde{\omega}_2^n)d\nu, \quad (2.34)$$

где  $G_i, i = 1, 2$ , – известные функции. Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31)–(2.34) при каждом  $n$  имеет решение, причем  $\tilde{\omega}_j^n \rightarrow \tilde{\omega}_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leq 2C_\varphi, \|\tilde{\omega}_2\| \leq 2C_\varphi, \|\tilde{\omega}_3\| \leq 4C_\varphi, \|\tilde{\omega}_4\| \leq 4C_\varphi.$$

Далее доказывается, что последовательные приближения  $\omega_j^n$  сходятся к функциям  $\tilde{\omega}_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

Получаем, что  $w_{jnxx} \rightarrow w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$ , где функции  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , непрерывны и ограничены на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.16), (2.26).

### 3. Существование нелокального решения

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $a, b, c, g \in C^2([0, T])$  и выполняются условия (2.26). Тогда для любого  $T > 0$  задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (1.1) по  $x$ . Обозначим  $p(t, x) = \partial_x u(t, x)$ ,  $q(t, x) = \partial_x v(t, x)$ , получим

$$\begin{cases} \partial_t p + (a(t)u + b(t)v)\partial_x p = -a(t)p^2 - b(t)pq + \partial_x f_1, \\ \partial_t q + (c(t)u + g(t)v)\partial_x q = -g(t)q^2 - c(t)pq + \partial_x f_2, \\ p(0, x) = \varphi'_1(x), \quad q(0, x) = \varphi'_2(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Добавим к системе уравнений (2.7)–(2.11) два уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a(s)\gamma_1^2(s,t,x) - b(s)\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \partial_x f_1(s,\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g(s)\gamma_2^2(s,t,x) - c(s)\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \partial_x f_2(s,\eta_2), \end{cases} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi'_1(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi'_2(\eta_2). \quad (3.3)$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-a(\nu)\gamma_1^2 - b(\nu)\gamma_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) + \partial_x f_1] d\nu, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [-g(\nu)\gamma_2^2 - c(\nu)\gamma_2\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \partial_x f_2] d\nu. \end{cases} \quad (3.4)$$

Аналогично тому, как это выполнено в [5-7] доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7)–(2.11) следуют оценки

$$\|w_i\| \leq C_\varphi + TC_f, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\|u\| \leq C_\varphi + TC_f, \quad \|v\| \leq C_\varphi + TC_f. \quad (3.5)$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi'_1(\eta_1) \exp\left(-\int_0^s (a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2) d\nu\right) + \\ + \int_0^s \partial_x f_1 \exp\left(-\int_\tau^s (a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2) d\nu\right) d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi'_2(\eta_2) \exp\left(-\int_0^s (c(\nu)\gamma_1 + g(\nu)\gamma_2) d\nu\right) + \\ + \int_0^s \partial_x f_2 \exp\left(-\int_\tau^s (c(\nu)\gamma_1 + g(\nu)\gamma_2) d\nu\right) d\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из (3.6) при выполнении условий  $a(t) > 0, b(t) > 0, c(t) > 0, g(t) > 0, t \in [0, T]$ ,  $\varphi'_1(x) \geq 0, \varphi'_2(x) \geq 0, x \in R, \partial_x f_1 \geq 0, \partial_x f_2 \geq 0, (t, x) \in \Omega_T$  получаем, что  $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ , на  $\Gamma_T$ , значит,  $\|\gamma_i\| \leq C_\varphi + TC_f, i = 1, 2$ . Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leq C_\varphi + TC_f, \quad \|\partial_x v\| \leq C_\varphi + TC_f. \quad (3.7)$$

Далее, так же, как в [5-7], выводится, что при всех  $t$  и  $x$  справедливы оценки

$$|\partial_{x^2}^2 u| \leq E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \quad (3.8)$$

$$|\partial_{x^2}^2 v| \leq E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \quad (3.9)$$

где  $E_{11}, E_{21}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{23}$  – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для  $u, v, \partial_x u, \partial_x v, \partial_{x^2}^2 u, \partial_{x^2}^2 v$  ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Взяв в качестве начальных значений  $u(T_0, x), v(T_0, x)$ , продлим решение на промежуток  $[T_0, T_1]$ , а затем, выбирая начальные значения  $u(T_1, x), v(T_1, x)$ , продлим решение на промежуток  $[T_1, T_2]$ . Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами  $\|\partial_x u\|, \|\partial_x v\|$ , а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением  $C_\varphi + TC_f$  на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения

$$\begin{aligned} u(T_k, x), v(T_k, x) &\in \bar{C}^2(R), |u(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f, |v(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f, \\ |\partial_x u(T_k, x)| &\leq C_\varphi + TC_f, |\partial_x v(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f. \end{aligned}$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8), (3.9), где в качестве  $t$  можно взять  $T$ . В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука,, М., 1968, 592 с.
2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.
3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск*, 2006, № 1, 60–64.
4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.
5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2013, № 3 (177), 190–201.
6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 115–124.
7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2014, № 2, 116–130.

*Поступила 3.10.2017*

MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

## The nonlocal solvability conditions for a system with absolute terms for the case of positive coefficients

© M. V. Dontsova <sup>2</sup>

**Abstract.** The Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with absolute terms for the case of positive coefficients is considered. The study of the Cauchy's problem solvability is based on the method of an additional argument, which allows to determine the solution in the original coordinates without involving the inverse function theorem. The existence of the Cauchy's problem local solution with smoothness not lower than the smoothness of the initial conditions, is proven. Paper determines sufficient conditions for the existence of the Cauchy's problem nonlocal solution continued by a finite number of steps from the local solution. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy's problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with absolute terms for the case of positive coefficients relies on global estimates.

**Key Words:** method of an additional argument, global estimates, Cauchy's problem, first-order partial differential equations.

## REFERENCES

1. B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 592 p.
2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations”, *Doklady Mathematics*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, “Method of an additional argument”, *Vestnik KazNU. Series "Mathematics, mechanics, informatics". Spec. the issue*, 2006, № 1, 60–64 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, “The investigation of a solvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite.”, *Matem. Vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, **14** (2012), 34–41 (In Russ.).
5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations”, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2013, № 3 (177), 190–201 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, “The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis”, *Journal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).

<sup>2</sup> Marina V. Dontsova, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Nizhniy Novgorod State Technical University (24 Minina Str., Nizhniy Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsowa.marina2011@yandex.ru

7. M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides”, *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, 2014, № 2, 116–130 (In Russ.).

*Submitted 3.10.2017*

УДК 514

# Слоеные модели для гладких орбифолдов и их применение

© Н. И. Жукова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Для любого орбифолда построена слоеная модель, представляющая собой слоение, пространство слоев которого совпадает с этим орбифолдом, каноническая проекция на пространство слоев является субмерсией в категории орбифолдов. Доказано, что группа всех диффеоморфизмов орбифолда изоморфна группе базовых автоморфизмов (в категории слоений) построенного модельного слоения. На языке модельных слоений найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы орбифолды были хорошими. В качестве приложения получено, что любой орбифолд, допускающий картанову геометрию нулевой кривизны, является хорошим.

**Ключевые слова:** орбифолд, слоение, связность Эресмана для слоения, картанова геометрия.

## 1. Введение. Основные результаты.

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями. Они введены Сатаки [1] как обобщения многообразий. Термин "орбифолд" предложен Терстоном, который применил классификацию двумерных орбифолдов при получении известных результатов о структуре замкнутых трехмерных многообразий [2].

Орбифолды широко используются в современной теоретической физике: как пространства распространения струн, в конформной теории поля, в теории деформационного квантования, обзор можно найти в [3].

Орбифолд локально является фактор-пространством  $\mathbb{R}^n$  по конечной группе диффеоморфизмов  $\Gamma$ . При этом группа  $\Gamma$  не является фиксированной и может меняться при переходе от одной карты орбифолда к другой. Изоморфизм координатных окрестностей соответствует сопряженным действиям одной и той же группы  $\Gamma$  на  $\mathbb{R}^n$ .

Существуют различные методы исследований орбифолдов. В ряде работ (см., например, [4]) разрабатывается группоидный подход, позволяющий свести проблемы для орбифолда к проблемам для соответствующих группоидов, теория которых в настоящее время активно развивается. Категория орбифолдов эквивалентна также категории псевдогрупп изометрий гладких, вообще говоря, несвязных римановых многообразий, пространство орбит которых хаусдорфовы и стационарные подгруппы конечны. Известны также и другие подходы к определению и изучению орбифолдов.

Цель данной работы — показать, что орбифолды тесно связаны со слоениями, установить эту связь и применить результаты о слоениях к исследованию орбифолдов.

Важную роль при этом играют слоения со связностью Эресмана. Понятие связности Эресмана для слоений введено Блюменталем и Хебдой [6]. Подчеркнем, что связность Эресмана имеет глобальный дифференциально-топологический характер.

<sup>1</sup> Жукова Нина Ивановна, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" ( 603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4553-559X>, nzhukova@hse.ru

Через  $\mathcal{F}ol$  обозначается категория слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого. Через  $Diff(M, F)$  обозначается группа всех автоморфизмов слоения  $(M, F)$  в категории  $\mathcal{F}ol$ . Подчеркнем, что подгруппа  $Diff_L(M, F) := \{f \in Diff(M, F) \mid f(L) = L, L \in F\}$  группы  $Diff(M, F)$ , образованная диффеоморфизмами многообразия  $M$ , относительно которых каждый слой слоения инвариантен, является нормальной подгруппой и называется группой слоевых автоморфизмов.

### Определение 1.1. Фактор-группа

$$Diff_b(M, F) = Diff(M, F)/Diff_L(M, F)$$

группы автоморфизмов слоения  $Diff(M, F)$  по нормальному подгруппе слоевых автоморфизмов  $Diff_L(M, F)$  называется группой базовых автоморфизмов слоения  $(M, F)$ .

Мы напоминаем, что гладкие орбифолды образуют категорию  $\mathfrak{Orb}$  (Раздел 1).

Для любого  $n$ -мерного орбифолда  $\mathcal{N}$  мы стоим слоенную модель, представляющую собой слоение  $(M, F)$  со связностью Эресмана, пространство слоев которого гомеоморфно  $\mathcal{N}$ , а фактор-отображение  $r : M \rightarrow \mathcal{N} \cong M/F$  является субмерсией в категории орбифолдов  $\mathfrak{Orb}$  (Определение 1.2.). При этом слоение  $(M, F)$  называется *модельным* или *ассоциированным*.

Напомним, что слоение называется компактным, если все его слои компактны. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Для любого гладкого  $n$ -мерного орбифолда  $\mathcal{N}$  существует слоения модель  $(M, F)$ . В частности, для любого орбифолда  $\mathcal{N}$  существует компактное модельное слоение  $(M, F)$ .

В зависимости от задачи используется та или иная слоенная модель для орбифолда. Применяя некомпактную модель, мы доказываем следующее утверждение о связи групп автоморфизмов орбифолда и его модельного слоения.

**Теорема 1.2.** Группа  $Diff(\mathcal{N})$  всех автоморфизмов гладкого орбифолда  $\mathcal{N}$  в категории  $\mathfrak{Orb}$  изоморфна группе базовых диффеоморфизмов  $Diff_b(M, F)$  некоторого модельного слоения  $(M, F)$ .

Терстоном [2] введено следующее понятие хороших орбифолдов.

**Определение 1.2.** Орбифолд называется *хорошим*, если его универсальный накрывающий орбифолд является многообразием.

Заметим, что любой хороший орбифолд представим в виде пространства орбит  $M/\Psi$  многообразия  $M$  по некоторой группе диффеоморфизмов  $\Psi$ .

**Определение 1.3.** Слоение  $(M, F)$  называется *слоением, накрытым расслоением*, если существует накрывающее отображение  $k : \widetilde{M} \rightarrow M$  такое, что индуцированное слоение  $f^*F$  образованное слоями некоторой субмерсии  $s : \widetilde{M} \rightarrow N$  со связностью Эресмана.

Следующий критерий переводит термин "хороший орбифолд" на язык модельных слоений.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\mathcal{N}$  —  $n$ -мерный орбиболд и  $(M, F)$  — его модельное слоение. Для того, чтобы орбиболд  $\mathcal{N}$  был хорошим, необходимо и достаточно, чтобы слоение  $(M, F)$  было накрыто расслоением.

Далее мы рассматриваем орбиболды, снабженные картановой геометрией, которые называем картановыми орбиболдами. Для удобства читателя приведены необходимые сведения о картановой геометрии и о картановых слоениях (Раздел 6).

В качестве приложения Теоремы 1.4. к картановым обифолдам, мы получаем следующее достаточное условие для того, чтобы картанов орбиболд был хорошим. При этом существенно используются результаты о картановых слоениях из [10].

**Теорема 1.4.** Пусть  $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega)$  — картанова геометрия на орбиболде  $\mathcal{N}$ . Если кривизна картановой связности  $\omega$  равна нулю, то есть,  $d\omega = 0$ , то орбиболд  $\mathcal{N}$  является хорошим.

**Следствие 1.1.** Римановы и псевдоримановы орбиболды постоянной кривизны являются хорошими.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01041).

## 2. Категория орбиболдов

Точные определения и теоремы из теории орбиболдов можно найти, например, в [3].

Везде в этой работе под гладкостью понимается гладкость класса  $C^\infty$ .

Если  $f: M \rightarrow \mathcal{N}$  — гладкое отображение многообразий, то через  $f_*$  (соответственно  $f^*$ ) мы обозначаем дифференциал (соответственно, кодифференциал) отображения  $f$ .

Напомним определение гладкого орбиболда. Пусть  $\mathcal{N}$  — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой,  $U$  — открытое подмножество в  $\mathcal{N}$ ,  $n$  — фиксированное натуральное число. *Картой* на  $\mathcal{N}$  называется тройка  $(\Omega, \Gamma, p)$ , где  $\Omega$  — связное открытое подмножество в  $n$ -мерном арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma$  — конечная группа диффеоморфизмов  $\Omega$ , а  $p: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  — композиция фактор-отображения  $r: \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$  и некоторого гомеоморфизма  $q: \Omega/\Gamma \rightarrow U$  фактор-пространства  $\Omega/\Gamma$  на  $U$ . Подмножество  $U$  называется *координатной окрестностью* карты  $(\Omega, \Gamma, p)$ . Отметим, что в отличие от Сатаки [1] мы не требуем, чтобы размерность множества неподвижных точек  $\text{Fix}\Gamma$  группы  $\Gamma$  была меньше  $n - 1$ .

*Инъекцией* карты  $(\Omega, \Gamma, p)$  в карту  $(\Omega', \Gamma', p')$ , соответствующей включению координатных окрестностей  $U \subset U'$ , называется вложение  $\phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ , удовлетворяющее равенству  $p' \circ \phi = p$ . Как известно ([4]), любая инъекция  $\phi$  индуцирует (единственный) мономорфизм групп  $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ , для которого  $\phi \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \phi$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$ , при этом, если  $\phi$  — диффеоморфизм, то  $\psi$  — изоморфизм групп  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ .

Две карты  $(\Omega_1, \Gamma_1, p_1)$  и  $(\Omega_2, \Gamma_2, p_2)$  с координатными окрестностями  $U_1$  и  $U_2$  называются *согласованными*, если при  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  для любой точки  $x \in U_1 \cap U_2$  существуют: а) карта  $(\Omega, \Gamma, p)$  с такой координатной окрестностью  $U$ , что  $x \in U \subset U_1 \cap U_2$ , б) инъекции карт  $\phi_1: \Omega \rightarrow \Omega_1$  и  $\phi_2: \Omega \rightarrow \Omega_2$ , соответствующие включениям  $U \subset U_1$  и  $U \subset U_2$ . Множество карт  $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$  называется *атласом*, если семейство  $\{U_i := p_i(\Omega_i) \mid i \in J\}$  — открытое покрытие топологического пространства  $\mathcal{N}$  и любые две карты из  $\mathcal{A}$  согласованы. Атлас  $\mathcal{A}$  называется *максимальным*, если  $\mathcal{A}$  совпадает с любым атласом, его содержащим.

Максимальный атлас называется *гладкой структурой  $n$ -мерного орбифолда* на топологическом пространстве  $\mathcal{N}$ . Пара  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , где  $\mathcal{A}$  — максимальный атлас на  $\mathcal{N}$ , называется *гладким  $n$ -мерным орбифолдом*. Заметим, что любой атлас содержится в единственном максимальном атласе и, следовательно, определяет структуру гладкого орбифолда.

Всюду далее орбифолды  $\mathcal{N}$  предполагаются гладкими, а через  $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$  обозначается максимальный атлас  $\mathcal{N}$ . Инъекцию  $\phi_{ij}$  карты  $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$  в карту  $(\Omega_j, \Gamma_j, p_j)$ , соответствующую включению координатных окрестностей  $U_i \subset U_j$ , мы будем называть *инъекцией карт* и обозначать через  $\phi_{ij}: \Omega_i \rightarrow \Omega_j$ ,  $i, j \in J$ .

На многообразии  $T = \bigcup_{i \in J} \Omega_i$  возникает псевдогруппа локальных диффеоморфизмов  $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ , порожденная инъекциями  $\phi_{ij}$  карт атласа  $\mathcal{A}$  орбифолда  $\mathcal{N}$ . Будем называть  $\mathcal{H}(\mathcal{N})$  *псевдогруппой орбифолда*  $\mathcal{N}$ .

Для карт  $(\Omega, \Gamma, p)$  и  $(\Omega', \Gamma', p')$  из  $\mathcal{A}$  с координатными окрестностями, содержащими  $x \in \mathcal{N}$ , подгруппы изотропии  $\Gamma_y$  и  $\Gamma'_z$  точек  $y \in p^{-1}(x)$  и  $z \in p'^{-1}(x)$ , соответственно, изоморфны. Таким образом, каждой точке  $x$  орбифолда  $\mathcal{N}$  соответствует единственная (с точностью до изоморфизма групп) абстрактная группа  $\Gamma_x$ , называемая *группой орбифолдности* точки  $x$ . Точка  $x$  называется *регулярной*, если ее группа орбифолдности тривиальна. Точка, не являющаяся регулярной, называется *орбифолдной*. Как известно, множество  $\Delta_n$  всех регулярных точек  $n$ -мерного орбифолда  $\mathcal{N}$  с индуцированной топологией является связным открытым  $n$ -мерным многообразием, всюду плотным в  $\mathcal{N}$ .

Для любой точки  $x \in \mathcal{N}$  существует такая карта  $(\Omega, \Gamma, p) \in \mathcal{A}$ , что  $\Omega$  является  $n$ -мерным арифметическим пространством  $\mathbb{R}^n$ ,  $p(0) = x$ ,  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , а  $\Gamma$  — конечной группой ортогональных преобразований  $\mathbb{R}^n$ . Такая карта  $(\mathbb{R}^n, \Gamma, p)$  называется *линеаризованной картой в точке*  $x$ .

Непрерывное отображение  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  орбифолда  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$  в орбифолд  $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$  называется *гладким* ([4]), если для любой точки  $x \in \mathcal{N}$  существуют: а) карта  $(\Omega, \Gamma, p) \in \mathcal{A}$  с координатной окрестностью  $U \ni x$ ; б) карта  $(\Omega', \Gamma', p') \in \mathcal{A}'$  с такой координатной окрестностью  $U'$ , что  $f(U) \subset U'$ ; в) гладкое отображение  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \Omega'$  многообразия  $\Omega$  в многообразие  $\Omega'$  такое, что  $p' \circ \tilde{f} = f|_U \circ p$ . При этом гладкое отображение  $\tilde{f}$  называется *локальным лифтом* отображения  $f$ .

Категория, объектами которой являются гладкие орбифолды, морфизмами — гладкие отображения орбифолдов, а композицией морфизмов — композиция гладких отображений орбифолдов, называется *категорией орбифолдов* и обозначается через  $\mathfrak{Orb}$ . Категория гладких многообразий, морфизмами в которой служат гладкие отображения многообразий, является полной подкатегорией категории  $\mathfrak{Orb}$ .

Действие  $\Phi: G \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  группы Ли  $G$  на орбифолде  $\mathcal{N}$  будем называть *гладким*, если  $\Phi$  — гладкое отображение произведения орбифолдов  $G \times \mathcal{N}$  в  $\mathcal{N}$ .

Говорят, что орбифолд  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$  *ориентирован*, если для каждого  $i \in J$  на многообразии  $\Omega_i$  выбрана ориентация, причем любое преобразование  $\gamma \in \Gamma_i$  и любая инъекция  $\phi_{ij}: \Omega_i \rightarrow \Omega_j$ ,  $i, j \in J$ , являются отображениями, сохраняющими ориентацию.

Как показывают примеры ([5], пример 1), в отличие от многообразий и двумерных орбифолдов при  $n \geq 3$  топологические пространства  $n$ -мерных орбифолдов, вообще говоря, не являются локально евклидовыми.

### 3. Построение слоеной модели

#### 3.1. Расслоенные пространства со структурной группой над орбифолдами

Расслоенное пространство над орбифолдом со структурной группой и, в частности, пространство главного расслоения представляет собой орбифолд (см., например, [5]). Через

$\mathcal{P}(\mathcal{N}, H)$  будем обозначать главное  $H$ -расслоение над орбиболдом  $\mathcal{N}$  с пространством расслоения  $\mathcal{P}$ .

### 3.2. Модельное слоение для орбиболда

Обозначим через  $G$  компоненту единицы  $GL_e(n+1, R)$  общей линейной группы  $GL(n+1, R)$ . Тогда  $G$  — группа квадратных  $(n+1)$ -мерных квадратных матриц с положительными определителями. Определим вложение  $J: GL(n, R) \rightarrow G$ , полагая  $J(A) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , если  $\det A > 0$ , и  $J(A) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , когда  $\det A < 0$ . При этом  $J$  — мономорфизм группы  $Gl(n, R)$  в группу  $G$ .

**Теорема 3.1.** Для любого гладкого  $n$ -мерного орбиболда  $\mathcal{N}$  существует главное  $G$ -расслоение  $M(\mathcal{N}, G)$  над  $\mathcal{N}$ , где  $G$  — компонента единицы группы  $GL(n+1, R)$ , обладающее свойствами:

1) пространство расслоения  $M$  является гладким многообразием, а орбиты группы  $G$  образуют гладкое слоение  $(M, F)$  со связностью Эресмана, пространство слоев которого совпадает с орбиболдом  $\mathcal{N}$ , а проекция на пространство слоев  $r: M \rightarrow \mathcal{N} = M/G$  является морфизмом в категории  $\mathfrak{Orb}$ ;

2) группа орбиболдности произвольной точки  $x \in \mathcal{N}$  изоморфна группе голономии слоя  $r^{-1}(x)$ ;

3) расслоение линейных реперов  $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$  над орбиболдом  $\mathcal{N}$  является подрасслоением расслоения  $M(\mathcal{N}, G)$ .

**Доказательство.** Как известно, на гладком орбиобразии  $\mathcal{N}$  всегда существует риманова метрика. Предположим, что риманова метрика на  $\mathcal{N}$  зафиксирована, то есть  $\mathcal{N}$  — риманово орбиболд. В линеаризованной карте  $(\Omega, \Gamma, p)$  с центром в  $x$  каждое преобразование  $\gamma$  из  $\Gamma$  является ортогональным, то есть  $\Gamma \subset O(n) \subset Gl(n, R)$ . Для карты  $(\Omega, \Gamma, p)$  положим  $P_\Omega := \Omega \times G$ , пусть  $\pi_\Omega$  — проекция на первый сомножитель. Будем рассматривать  $P_\Omega$  как пространство главного  $G$ -расслоения.

Зададим антиизоморфизм  $h_\Omega$  по формуле  $h_\Omega(\gamma)(y, A) := (\gamma^{-1}(y), J(\gamma^{-1})A)$ ,  $\forall(y, A) \in \Omega \times G$ . Пусть  $\psi$  — инъекция карты  $(\Omega, \Gamma, p)$  в карту  $(\Omega', \Gamma', p')$ , соответствующая включению  $U \subset U'$  и  $\chi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  — мономорфизм групп, индуцированный  $\psi$ . Определим отображение  $\bar{\psi}$  равенством  $\bar{\psi}(z, B) := (\psi^{-1}(z), J(\psi_*^{-1})B)$ ,  $\forall(z, B) \in P_{\Omega'}|_{\psi(\Omega)} \subset \Omega' \times G$ , где  $\psi_*$  — дифференциал отображения  $\psi$ . Благодаря тому, что  $\mathcal{N}$  — риманов орбиболд, мы имеем  $\psi_* \in O(n)$ , следовательно, отображение  $\bar{\psi}$  определено корректно. Непосредственная проверка показывает, что таким образом определено главное  $G$ -расслоение над орбиболдом  $\mathcal{N}$ .

Поскольку группа  $\Gamma$  действует свободно посредством  $h_\Omega$  на  $P_\Omega$  пространство орбит  $M_\Omega := P_\Omega/\Gamma$  естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия, относительно которой проекция  $\eta_\Omega: M_\Omega \rightarrow P_\Omega$  является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований  $h_\Omega(\Gamma)$ . Так как каждое преобразование из  $h_\Omega(\Gamma)$  является изоморфизмом тривиального слоения  $\bar{F}_\Omega := \{\{y\} \times G, y \in \Omega\}$  на  $P_\Omega$ , то на  $M_\Omega$  индуцируется слоение  $F_\Omega := \eta_\Omega^*\bar{F}_\Omega$ , причем имеет место равенство

$$p \circ \pi_\Omega = r_\Omega \circ \eta_\Omega, \quad (3.1)$$

где отображение  $r_\Omega: M_\Omega \rightarrow U$  переводит орбиту  $(y, A)\Gamma$  в точку  $p(y)$  для любых  $(y, A) \in \Omega \times G$ . Из (3.1) вытекает, что группа голономии  $\Gamma(L, z)$  произвольного слоя  $L := r_\Omega(x)$ ,  $x \in U$ , этого слоения изоморфна стационарной подгруппе  $\Gamma_y$  группы  $\Gamma$  в точке  $y \in p^{-1}(x) \subset \Omega$ , а потому конечна. Пусть  $M_i := M_{\Omega_i}$ , где  $(\Omega_i, p_i, \Gamma_i)$  — карта орбиболда  $\mathcal{N}$ ,  $r_i := r_{\Omega_i}: M_i \rightarrow U_i$ ,  $\eta_i := \eta_{\Omega_i}$ .

Обозначим через  $S := \bigsqcup M_i$  дизъюнктное объединение всех  $M_i$ . Две точки  $z_i \in M_i$  и  $z_j \in M_j$  из  $S$  мы называем  $\sigma$ -эквивалентными, если: 1)  $r_i(z_i) = r_j(z_j) = x \in U_i \cap U_j$ ; 2) существуют такие точки  $\bar{z}_i \in \eta_i^{-1}(z_i)$ ,  $\bar{z}_j \in \eta_j^{-1}(z_j)$  и такая карта  $(\Omega_k, p_k, \Gamma_k)$  с центром в  $x$ , что  $U_k \subset U_i$  и  $U_k \subset U_j$  и  $\bar{z}_j = \bar{\psi}_{kj}^{-1} \circ \bar{\psi}_{ki}(\bar{z}_i)$ , где  $\bar{\psi}_{ki}$ ,  $\bar{\psi}_{kj}$  — изоморфизмы главных  $G$ -расслоений, индуцированные инъекциями  $\psi_{ki}$  и  $\psi_{kj}$ , соответствующими этим включениям. Заметим, что  $\sigma$  действительно является отношением эквивалентности в  $S$ . Обозначим через  $M$  фактор-пространство  $S/\sigma$ , пусть  $\tau: S \rightarrow M$  — фактор-отображение. Так как  $\tau_i := \tau|_{M_i}: M_i \rightarrow M$  — гомеоморфизм, то нетрудно проверить, что на  $M$  индуцируется гладкая структура, относительно которой  $\tau_i$  — гладкое вложение  $M_i$  на открытое подмногообразие в  $M$ . Поскольку отношение эквивалентности  $\sigma$  не разрушает слоения  $(M_i, F_i)$ , где  $F_i := F_{\Omega_i}$ , то на многообразии  $M$  индуцируется такое слоение  $F$ , что  $\tau_i^* F_i = F|_{M_i}$ . Далее мы отождествляем  $\tau_i(M_i)$  с  $M_i$ , при этом  $F|_{M_i}$  отождествляется с  $F_i$ . Полагая  $r|_{M_i} := r_i$  мы определяем проекцию  $r: M \rightarrow \mathcal{N}$ .

Из равенства (3.1) вытекает, что  $r: M \rightarrow \mathcal{N}$  — субмерсия на орбифолд  $\mathcal{N}$ . Слои слоения  $(M, F)$  совпадают со слоями  $r^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathcal{N}$ . Поскольку для  $x \in U_i$  группа голономии слоя  $r^{-1}(x)$  слоения  $(M, F)$  изоморфна группе голономии слоя  $r_i^{-1}(x)$  слоения  $(M_i, F_i)$ , то она изоморфна группе орбифольдности точки  $x \in \mathcal{N}$ .

Так как структурная группа  $G$  расслоения  $M(\mathcal{N}, G)$  собственно разрывно действует на многообразии  $M$ , то это действие собственное. Поэтому, на многообразии  $M$  существует такая риманова метрика  $g$ , что  $G$  становится группой изометрий риманова многообразия  $(M, g)$ . Используя это, нетрудно показать, что  $n$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$ , ортогональное слоению  $(M, F)$ , образованному орбитами этой группы, является связностью Эресмана для  $(M, F)$ . Это завершает доказательство свойств 1) и 2).

Определенный выше мономорфизм групп Ли  $J: GL(n, R) \rightarrow G$  индуцирует вложение расслоения реперов  $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$  над орбифолдом  $\mathcal{N}$  в расслоение  $M(\mathcal{N}, G)$ . Поэтому можно рассматривать  $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$  как подрасслоение расслоения  $M(\mathcal{N}, G)$ . Таким образом, выполняется свойство 3).

**З а м е ч а н и е 3.1.** Если в качестве группы  $G$  взять группу  $SO(n+1, R)$ , а группу  $GL(n, R)$  заменить группой  $O(n)$ , то так же как в Теореме 3.1. строится компактное слоение  $(M, F)$ , ассоциированное с орбифолдом  $\mathcal{N}$ .

**З а м е ч а н и е 3.2.** Фактически в статье А.В. Багаева и автора [5] использовано модельное слоение для ориентированных орбифолов  $\mathcal{N}$ . Исследование неориентируемых римановых орбифолов сведено к ориентированным с помощью двулистного накрытия.

**З а м е ч а н и е 3.3.** Псевдогруппа голономии каждого слоения, ассоциированного с орбифолдом  $\mathcal{N}$ , совпадает с псевдогруппой  $\mathcal{H}(\mathcal{N})$  этого орбифолда.

#### 4. Доказательство Теоремы 1.2.

Пусть  $\mathcal{N}$  — произвольный гладкий  $n$ -мерный орбифолд и  $M(\mathcal{N}, G)$ ,  $G = GL_e(n+1, R)$ , — его модельное слоение, построенное выше при доказательстве Теоремы 1.1.. Обозначим через  $j: S \rightarrow M$  вложение редуцированного расслоения  $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$  в  $M(\mathcal{N}, G)$ . Для простоты изложения, отождествим посредством  $j$  подмножество  $j(S_\Omega)$  с  $S_\Omega$  для любой карты  $(\Omega, \Gamma, p)$  орбифолда  $\mathcal{N}$ . При этом  $S_\Omega$  — редукция  $G$ -расслоения  $M_\Omega$  к подгруппе  $GL(n, R)$  над  $\mathcal{N}$ .

Будем использовать введенные выше обозначения. Возьмем любую точку  $x \in \mathcal{N}$ . Рассмотрим карты  $(\Omega, \Gamma, p)$  и  $(\Omega', \Gamma', p')$  орбифолда  $\mathcal{N}$  в точках  $x$  и  $y = f(x)$ , соответственно. Не нарушая общности, можно считать, что  $f(U) = f'(U')$ , где  $U = \Omega/\Gamma$  и  $U' = \Omega'/\Gamma'$ . Пусть  $\bar{f} : \Omega \rightarrow \Omega'$  — некоторый представитель  $f$ .

Для любой точки  $\bar{z} \in M$  найдется открытое подмножество  $M_\Omega$ , содержащее  $\bar{z}$  такое, что  $r_\Omega(\bar{z}) = x$ .

*Случай 1.* Пусть  $\bar{z} \in S_\Omega$ . Возьмем  $z \in \eta_\Omega^{-1}(\bar{z})$ . Тогда  $z$  — репер в точке  $0 \in \Omega$ . Поэтому  $z' = \bar{f}_{*0}(z)$  — репер в точке  $0 \in \Omega'$  и  $\bar{z}' := \eta_{\Omega'}(z') \in S_{\Omega'}$ .

Положим по определению  $\hat{f} : M_\Omega \rightarrow M'_\Omega : \bar{z} \mapsto \bar{z}'$ . Учитывая, что  $f \in Diff(\mathcal{N})$ , мы видим, что  $\bar{f} : \Omega \rightarrow \Omega'$  сопрягает действия групп  $\Gamma$  на  $\Omega$  и  $\Gamma'$  на  $\Omega'$ . Используя это, нетрудно проверить корректность определения отображения  $\hat{f}$ .

*Случай 2.* Пусть теперь  $\bar{z}$  — любая точка из  $M_\Omega$ . Тогда найдется точка  $\bar{z}_0 \in S_\Omega$ , принадлежащая тому же слою слоения  $(M, F)$ , что и  $\bar{z}$ . Поэтому существует  $a \in G$ , для которого  $\bar{z} = \bar{z}_0 a$ . Положим по определению:  $\hat{f}(\bar{z}) = \hat{f}(\bar{z}_0)a$ .

Покажем, что это определение не зависит от выбора  $a$ . Предположим, что существует другой элемент  $b \in G$ , удовлетворяющий условию  $\bar{z} = \bar{z}_0 b$ . Тогда  $R_{a^{-1}} \circ R_b(\bar{z}_0) = R_{ba^{-1}}(\bar{z}_0) = \bar{z}_0$ , то есть  $ba^{-1} \in G_{\bar{z}_0}$ . Поэтому имеет место цепочка равенств:  $\hat{f}(\bar{z}) = \hat{f}(\bar{z}_0)b = \hat{f}(\bar{z}b) = \hat{f}(\bar{z}_0b(a^{-1}a)) = \hat{f}(\bar{z}_0(ba^{-1})a) = \hat{f}(\bar{z}_0a)$ , что завершает нашу проверку.

В обоих случаях независимость от выбора карт орбифолда  $\mathcal{N}$  в точках  $x$  и  $y = f(x)$  проверяется стандартным образом. Нетрудно видеть, что отображение  $\hat{f} : M \rightarrow M$  дифференцируемое.

Аналогично, диффеоморфизм  $f^{-1} \in Diff(\mathcal{N})$  определят дифференцируемое отображение  $\hat{f}^{-1} : M \rightarrow M$ . Из определения  $\hat{f}$  и  $\hat{f}^{-1}$  следует, что  $\hat{f}$  и  $\hat{f}^{-1}$  дифференцируемы и следовательно, они —диффеоморфизмы многообразия  $M$ , сохраняющие слоение  $(M, F)$ .

Таким образом, для любого гладкого  $n$ -мерного орбифолда  $\mathcal{N}$  построено модельное слоение  $(M, F)$ , где  $G = GL_e(n+1, R)$  и  $M = M(\mathcal{N}, G)$ , для которого определено отображение

$$\Theta : Diff(\mathcal{N}) \rightarrow Diff(M, F) : f \mapsto \hat{f},$$

ставящее в соответствие диффеоморфизму  $f$  орбифолда  $\mathcal{N}$  индуцированный указанным выше способом диффеоморфизм  $\hat{f}$  многообразия  $M$ , причем  $\Theta$  является гомоморфизмом группы  $Diff(\mathcal{N})$  в  $Diff(M)$ .

Отображение

$$\chi : Diff(M, F) \rightarrow Diff(\mathcal{N}),$$

ставящее в соответствие любому диффеоморфизму многообразия  $M$ , сохраняющему слоение, его проекцию на орбифолд, является гомоморфизмом групп. Из доказанного выше вытекает, что для построенного модельного слоения  $(M, F)$  этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Поскольку его ядро совпадает с группой базовых автоморфизмов этого слоения, то есть,  $Ker(\chi) = Diff_L(M, F)$ , то группа  $Diff(\mathcal{N})$  изоморфна группе базовых автоморфизмов  $Diff_b(M, F)$  слоения  $(M, F)$  и Теорема 1.2. доказана.  $\square$

## 5. Доказательство Теоремы 1.3.

Предположим, что для  $n$ -мерного орбифолда  $\mathcal{N}$  существует модельное слоение  $(M, F)$ , накрытое расслоением. Согласно определению, это означает существование накрывающего отображения  $k : \widetilde{M} \rightarrow M$  такого, что индуцированное слоение  $\widetilde{F} = f^*F$  образованное слоями некоторой субмерсии  $s : \widetilde{M} \rightarrow B$  со связностью Эресмана. Благодаря существованию связности Эресмана для этой субмерсии определено локально тривиальное расслоение с проекцией  $s : \widetilde{M} \rightarrow B$ .

Заметим, что  $B = \widetilde{M}/\widetilde{F}$ , причем фактор-отображение на пространство слоев  $s : \widetilde{M} \rightarrow B$  отображает слой  $\widetilde{L} \in \widetilde{F}$  в точку  $[\widetilde{L}] \in \widetilde{M}/\widetilde{F}$ . Определено отображение  $q : B \rightarrow \mathcal{N}$ ,  $q([\widetilde{L}]) := [L]$ , где  $k(\widetilde{L}) = L$  — слой модельного слоения, накрытый слоем  $\widetilde{L}$ , удовлетворяющее равенству

$$q \circ s = r \circ k. \quad (5.1)$$

Из выполнения равенства (5.1) вытекает, что  $q : B \rightarrow \mathcal{N}$  — накрывающее отображение для орбифолда  $\mathcal{N}$ , следовательно,  $\mathcal{N}$  — хороший орбифолд.

Предположим теперь, что  $\mathcal{N}$  — хороший орбифолд. Тогда существуют гладкое многообразие и гладкое накрывающее отображение  $q : P \rightarrow \mathcal{N}$ . Согласно Теореме 1.1. существует модельное слоение  $(M, F)$  для  $\mathcal{N}$ . Пусть, как и выше,  $r : M \rightarrow \mathcal{N}$  — проекция.

Рассмотрим прообраз  $\widehat{M} = r^*P$  накрытия  $q : P \rightarrow \mathcal{N}$  при отображении  $r$ . Тогда  $\widehat{M} := \{(z, v) \in M \times P \mid r(z) = k(v)\}$ . Определим канонические проекции

$$\widehat{r} : \widehat{M} \rightarrow P : (z, v) \mapsto v$$

и

$$\widehat{q} : \widehat{M} \rightarrow M : (z, v) \mapsto z.$$

При этом выполняется равенство  $k \circ \widehat{r} = r \circ \widehat{h}$ . Используя это равенство нетрудно доказать, что  $\widehat{M}$  — гладкое многообразие, а проекция  $\widehat{q} : \widehat{M} \rightarrow M$  — гладкое накрывающее отображение. Кроме того, проекция  $\widehat{r} : \widehat{M} \rightarrow P$  — субмерсия, а ее слои являются слоями индуцированного слоения  $\widehat{F} := \widehat{q}^*F$ .

Согласно определению модельного слоения, существует связность Эресмана  $\mathfrak{M}$  для слоения  $(M, F)$ . Прямая проверка показывает, что индуцированное распределение  $\widehat{\mathfrak{M}} = \widehat{q}^*\mathfrak{M}$  на  $\widehat{M}$  является связностью Эресмана для слоения  $(\widehat{M}, \widehat{F})$ . Как известно [6], связность Эресмана для слоения, образованного слоями субмерсии, является связностью Эресмана для этой субмерсии. Таким образом, индуцированное слоение  $(\widehat{M}, \widehat{F})$  образовано слоями субмерсии со связностью Эресмана. Согласно Определению 1.3. слоение  $(M, F)$  накрыто расслоением и Теорема 1.3. доказана.  $\square$

## 6. Применение к картановым орбифолдам

### 6.1. Картановы геометрии

Подробное изложение картановых геометрий можно найти в монографии Чапа и Словака [7].

Пусть  $p : P \rightarrow N$  — главное расслоенное пространство со структурной группой  $H$ . Будем обозначать это расслоенное пространство через  $P(N, H)$  и называть  $H$ -расслоением. Пусть  $R : P \times H \rightarrow P$  — соответствующее правое свободное действие  $H$  на  $P$ . Обозначим через  $\mathfrak{X}(P)$  модуль гладких векторных полей на многообразии  $P$  над алгеброй гладких функций  $\mathfrak{F}(P)$ . Будем рассматривать  $\mathfrak{X}(P)$  как бесконечномерную алгебру Ли относительно скобки Ли векторных полей. Далее предполагается, что  $H$  — замкнутая подгруппа Ли группы Ли  $G$ , имеющей алгебру Ли  $\mathfrak{g}$ , а  $\mathfrak{h}$  — подалгебра Ли алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , соответствующая подгруппе  $H$ . Пусть задана 1-форма  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  со значениями в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , являющаяся невырожденной, т. е.  $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$  — изоморфизм векторных пространств для любого  $u \in P$ . Тогда определено обратное линейное отображение  $\zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ , где  $\zeta_B(u) := \omega_u^{-1}(B)$ ,  $B \in \mathfrak{g}$ .

Невырожденная 1-форма  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  называется *картановой связностью* в расслоении  $P(T, H)$ , если выполняются следующие условия:

- (s<sub>1</sub>) для любого  $A \in \mathfrak{h}$  имеет место равенство  $\zeta_A = A^*$ , где  $A^*$  — фундаментальное векторное поле на  $P$ , соответствующее элементу  $A$ ;
- (s<sub>2</sub>) форма  $\omega$  является  $H$ -эквивариантной, т. е.  $R_a^*\omega = Ad_G(a^{-1})\omega$  для любого  $a \in H$ , где  $Ad_G$  — присоединенное представление группы Ли  $G$  в ее алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ .

Расслоение с картановой связностью будем обозначать через  $\xi = (P(N, H), \omega)$  и называть картановым расслоением или *картановой геометрией типа*  $(G, H)$ . Многообразие  $N$ , являющееся базой главного  $H$ -расслоения  $p: P \rightarrow N$ , на пространстве которого задана картанова связность  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ , будем называть *картановым многообразием типа*  $(G, H)$ , и обозначать через  $(N, \xi)$ .

$\mathfrak{g}$ -Значная 2-форма  $\Omega := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$  называется *формой кривизны* картановой связности  $\omega$ . В случае, когда  $\Omega = 0$ , говорят, что  $(N, \xi)$  — картаново многообразие *нулевой кривизны*.

Пусть  $\xi = (P(N, H), \omega)$  и  $\xi' = (P'(N', H'), \omega')$  — два картановых расслоения, причем  $H' = H$ . *Изоморфизмом*  $\xi$  и  $\xi'$  называется диффеоморфизм  $\Gamma: P \rightarrow P'$ , удовлетворяющий следующим двум условиям:

- 1)  $\Gamma^*\omega' = \omega$  и
- 2)  $\Gamma \circ R_a = R'_a \circ \Gamma \quad \forall a \in H$ , где  $R_a(u) := u \cdot a \quad \forall u \in P$  и  $R'_a(u') := u' \cdot a \quad \forall u' \in P'$ .

Из определения изоморфизма картановых расслоений  $\Gamma: \xi \rightarrow \xi'$  следует, что определено отображение  $\gamma: N \rightarrow N'$ , удовлетворяющее равенству  $\gamma \circ \pi = \pi' \circ \Gamma$ , которое называется *проекцией* картанова изоморфизма  $\Gamma$ . Из определения вытекает, что проекция  $\gamma$  является диффеоморфизмом баз  $N$  и  $N'$ . Проекция  $\gamma$  называется *изоморфизмом картановых многообразий*  $(N, \xi)$  и  $(N', \xi')$ .

Далее мы предполагаем, что все рассматриваемые картановы геометрии типа  $(G, H)$  являются *эффективными*, то есть, группа Ли  $G$  действует левыми сдвигами на однородном пространстве  $G/H$  эффективно.

## 6.2. Картановы слоения

Подробная информация о картановых слоениях содержится в [8] и [9].

Пусть  $T$  —  $n$ -мерное многообразие, причем связность его топологического пространства не предполагается. Пусть  $\xi = (P(T, H), \omega)$  — картанова геометрия типа  $(G, H)$  с проекцией  $p: P \rightarrow T$ . Для любого открытого подмножества  $V$  в  $T$  индуцируется картанова структура  $\xi_V = (P_V(V, H), \omega_V)$  того же типа, где  $P_V := p^{-1}(V)$ , а  $\omega_V$  — сужение  $\omega$  на  $P_V$ . Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -мерное связное многообразие.  $(T, \xi)$ -*Коциклом* или  $(T, \xi)$ -*атласом* называется семейство  $\{U_i, f_i, \{\Gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\{U_i, i \in J\}$  — открытое покрытие многообразия  $M$ , а  $f_i: U_i \rightarrow T$  — субмерсии со связными слоями;
- 2) если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $i, j \in J$ , то определен изоморфизм  $\gamma_{ij}$  индуцированных картановых геометрий  $(f_j(U_i \cap U_j), \xi_{f_j(U_i \cap U_j)})$  и  $(f_i(U_i \cap U_j), \xi_{f_i(U_i \cap U_j)})$  удовлетворяющий равенству  $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ .

Два  $(T, \xi)$ -атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также является  $(T, \xi)$ -атласом. Класс эквивалентных  $(T, \xi)$ -атласов задает картаново слоение на многообразии следующим образом. Пусть  $\Sigma$  — множество слоев субмерсий  $f_i$  из класса эквивалентности  $[\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}]$ . Нетрудно проверить, что  $\Sigma$  — база некоторой топологии

$\tau$  в  $M$ . Компоненты линейной связности топологического пространства  $(M, \tau)$  образуют разбиение  $F := \{L_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$  многообразия  $M$ , называемое нами *картановым слоением типа  $(G, H)$*  с трансверсальной картановой геометрией  $\xi$ , а  $L_\alpha$  — его слоями.

Говорят, что картаново слоение имеет *нулевую трансверсальную кривизну*, если его трансверсальная картанова геометрия  $\xi$ , имеет нулевую кривизну.

### 6.3. Картановы орбифолды

Пусть  $\mathcal{N}$  — гладкий  $n$ -мерный орбифолд с атласом  $A = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ . Пусть  $G$  — группа Ли,  $H$  — ее замкнутая подгруппа Ли, и  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$  — алгебры Ли групп  $G$  и  $H$ . Предположим, что над орбифолдом  $\mathcal{N}$  задано главное  $H$ -расслоение, причем выполняются следующие условия:

- 1) в каждом главном  $H$ -расслоении  $\pi_i: P_i \rightarrow \Omega_i$  задана картанова связность  $\omega_i$  типа  $(G, H)$ ;
- 2)  $h_i$  является антиизоморфизмом группы  $\Gamma_i$  в группу автоморфизмов картанова расслоения  $\xi_i = (P_i(H, \Omega_i), \omega_i)$ ;
- 3) для инъекции карт  $\psi_{ij}: \Omega_i \rightarrow \Omega_j$  определен изоморфизм соответствующих картановых геометрий  $\bar{\psi}_{ij}: P_j|_{\psi_{ij}(\Omega_i)} \rightarrow P_i$  с проекцией  $\psi_{ij}$ ;
- 4) если  $\Omega_i \subset \Omega_j$  и  $\psi_{ij}: \Omega_i \rightarrow \Omega_j$  — включение, то  $\bar{\psi}_{ij}$  — тождественное отображение.

Из определения картановой структуры на орбифолде и построения модельного слоения вытекает следующее утверждение.

**П р е д л о ж е н и е 6.1.** *Гладкий орбифолд  $\mathcal{N}$  — картанов тогда и только тогда, когда любое его модельное слоение  $(M, F)$  — картаново.*

### 6.4. Доказательство Теоремы 1.4.

Пусть  $(M, F)$  — картаново слоение, заданное  $(N, \xi)$ -коциклом, где  $\xi = (P(N, H), \omega)$  — картанова геометрия типа  $(G, H)$ , причем кривизна картановой связности  $\omega$  равна нулю. Как известно, в этом случае  $(N, \xi)$  локально изоморфно стандартной картановой геометрии  $\xi^0 = (G(G/H, H), \omega_G)$ , где  $\omega_G$  — форма Маурера-Картана на группе Ли  $G$ . Следовательно, слоение  $(M, F)$  является трансверсально однородным или  $(G, G/H)$ -слоением. Кроме того, оно допускает связность Эресмана. Как доказано нами в ([10], Теорема 2), слоение  $(M, F)$  накрыто расслоением. Поэтому, согласно Теореме 1.3., орбифолд  $\mathcal{N}$  — хороший.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Satake, “On a generalization of the notion of manifold”, *Proc. of the Nat. Ac. of Sciences*, **42**:6 (1956), 359–363.
2. W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
3. A. Adem, J. Leida, Y. Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge University Press, New York, 2007.
4. I. Moerdijk, D. Pronk, “Orbifolds, sheaves and groupoids”, *K-Theory*, **12**:12 (1997), 3–21.

5. А. В. Багаев, Н. И. Жукова, “Группы изометрий римановых орбифолдов”, *Сиб. Мат. Журнал*, **48**:4 (2007), 725–741.
6. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.
7. A. Cap, J. Slovák, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, American Mathematical Society: Publishing House, 2009.
8. R. A. Blumenthal, “Cartan submersions and Cartan foliations”, *Illinois J. Math.*, **25**6 (1987), 327–343.
9. Н. И. Жукова, “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, **256** (2012), 115–147.
10. Н. И. Жукова, “Глобальные аттракторы полных конформных слоений”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 79–106.

*Поступила 27.10.2017*

MSC2010 53C12, 54H15, 57R18

## Foliated models for orbifolds and their applications

© N. I. Zhukova<sup>2</sup>

**Abstract.** A foliated model is constructed for every orbifold. Such model is a foliation with the leaf space coinciding with the orbifold. The canonical projection onto the leaf space is a submersion in the category of orbifolds. We prove that the group of all diffeomorphisms of an orbifold is isomorphic to the group of basic automorphisms (in the category of foliations) of the constructed model foliation. In terms of the model foliations necessary and sufficient conditions are found for orbifold to be good. As the application we obtain that every orbifold admitting Cartan geometry of zero curvature is good.

**Key Words:** orbifold, foliation, Ehresmann connection for a foliation, Cartan geometry.

## REFERENCES

1. I. Satake, “On a generalization of the notion of manifold”, *Proc. of the Nat. Ac. of Sciences*, **42**:6 (1956), 359–363.
2. W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
3. A. Adem, J. Leida, Y. Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge University Press, New York, 2007.
4. I. Moerdijk, D. Pronk “Orbifolds, sheaves and groupoids”, *K-Theory*, **12**:12 (1997), 3–21.
5. A. V. Bagaev, N. I. Zhukova, “The isometry groups of Riemannian orbifolds”, *Siberian Mathematical Journal*, **48**:4 (2007), 579–592.
6. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.
7. A. Cap, J. Slovák, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, American Mathematical Society: Publishing House, 2009.
8. R. A. Blumenthal “Cartan submersions and Cartan foliations”, *Illinois J. Math.*, **25**6 (1987), 327–343.
9. N. I. Zhukova “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **256** (2007), 105–135.
10. N. I. Zhukova “Global attractors of complete conformal foliations”, *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–406.

Submitted 27.10.2017

---

<sup>2</sup> N.I. Zhukova, professor of department of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, (25/12 Bolshaya Pecherskay Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), D.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4553-559X>, nzhukova@hse.com

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.45-54

УДК 532.529:541.182

## Модель динамики самодвижущейся цепочки частиц в вязкой жидкости

© С. И. Мартынов<sup>1</sup>, Л. Ю. Ткач<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается модель цепочки, состоящей из сферических частиц, шарнирно соединенных между собой стержнями, перемещающейся в вязкой жидкости за счет формирования вокруг себя такого вихревого течения вязкой жидкости, которое создает гидродинамическую силу,двигающую цепочку в заданном направлении. Вихревое течение жидкости образуется вращением частиц цепочки в результате действия моментов внутренних сил, сумма которых равна нулю. Для расчета динамики цепочки совместно решается система уравнений течения вязкой жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса с граничными условиями и динамики частиц. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц в цепочке. Считается, что стержни с жидкостью не взаимодействуют, а их роль сводится к удержанию соединенным стержнем частиц на одном и том же расстоянии. Проведено компьютерное моделирование динамики трех цепочек, которые отличаются размерами частиц. Рассчитаны усилия в стержнях и скорость перемещения для каждой модельной цепочки. Найдено, что одна из рассмотренных моделей перемещается быстрее. На основе предложенного подхода можно создавать модели самодвижущихся цепочек частиц разной длины.

**Ключевые слова:** численное моделирование, вязкая жидкость, самодвижущиеся цепочки частиц, гидродинамическое взаимодействие, внутренние силы взаимодействия.

### 1. Введение

Моделирование динамики миниатюрных самодвижущихся устройств, основанное на применении в их работе принципов движения живых организмов в природе, активно развивается в последние годы. Это связано с конструированием новых типов гидродинамических движителей и гидродинамических насосов, микроаппаратов для обследования судов и органов человека и т.п., основанным на использовании природных аналогов. При этом и сама проблема моделирования динамики плавания различных живых организмов также является актуальной задачей как для применения в различных прикладных разработках, так и для создания новых теоретических моделей, позволяющих создавать различные миниатюрные устройства.

Имеющиеся обзоры по результатам моделирования плавания макро- и микроорганизмов [1]-[3] содержат, главным образом, модели движения тела на основе его деформаций,

<sup>1</sup> Мартынов Сергей Иванович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

<sup>2</sup> Ткач Леонилла Юрьевна, старший преподаватель кафедры строительных и транспортных комплексов, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет" (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

имитирующих реальные движения природного организма, которые в результате дают перемещение тела в заданном направлении. Однако проблема такого моделирования заключается в различии свойств материалов модели и живых организмов. Это сводит задачу моделирования на основе аналоговых деформаций к трудноразрешимой проблеме. Авторами предложен подход, основанный на анализе течений в окружающей жидкости, которое создает плавающий организм, и моделировании подобного течения более простыми способами, чем деформации, имитирующие реальный плавающий организм. На основе этого подхода, авторами были предложены [4, 5] две модели самодвижущихся агрегатов частиц, в которых движение тела происходит за счет вращения частиц, создающих вихревое течение в окружающей жидкости, подобное тому, что у живых организмов (рис. 1) при их плавании. Такого рода вихревые течения формируются при плавании различных организмов в результате движения каких-либо их частей, что следует из анализа материалов, приведенных в работе [1, 6].



Рис. 1: Вихревые течения, возникающие вокруг плывущего в жидкости пингвина

Одна модель самодвижущегося агрегата с двумя и более вращающимися частицами и механизм их вращения внешним магнитным полем рассмотрена в [5]. Модель самодвижущейся цепочки частиц, как пример моделирования динамики взаимодействующих частиц предложенным методом, приведена в [4]. При этом вопрос оптимизации вращений частиц и их размеров, приводящих к более быстрому перемещению цепочки в заданном направлении, остался нерассмотренным.

В настоящей работе анализируются модели трех цепочек с различными размерами частиц с целью оптимизации их вращений для получения наибольшей скорости перемещения.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается модель агрегата, состоящего из 3 твердых сферических частиц, помещенных в несжимаемую жидкость плотности  $\rho$  и вязкости  $\eta$ . Частицы могут быть разного радиуса, разной плотности, находиться вблизи или вдали от плоской стенки, вдоль которой может задаваться течение с заданным профилем скорости. Предполагается, что частицы связаны между собой тонкими нерастяжимыми стержнями, взаимодействием которых с жидкостью можно пренебречь, позволяющими частицам совершать поступательное и вращательное движение или движение без вращения. Фактически роль этих стержней сводится к сохранению неизменным расстояния между соединенными этим стержнем частицами. Приведенное число частиц является наименьшим, позволяющим рассматривать их как цепочку и моделировать ее динамику в результате вращений частиц за счет

внутренних моментов.

Считаем, что к частицам приложены моменты сил, сумма которых равна нулю, как и следует из общих свойств моментов внутренних сил системы. Под действием моментов внутренних сил частицы вращаются с угловыми скоростями, что создает вихревое течение в окружающей жидкости, заставляющее цепочку частиц изгибаться. Меняя направление приложенных моментов и их величину, можно изменять вихревое течение жидкости вокруг цепочки частиц и тем самым добиваться таких ее деформаций в виде изгибаний, что в итоге получаем перемещение всей цепочки в направлении первоначальной ее ориентации. Другими словами, полученные деформации цепочки должны быть похожими на те, что у змеи при ее движении в воде.

Для расчета течения жидкости вокруг рассматриваемой структуры записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции стержневых связей. Система уравнений для скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  в жидкости в случае малых чисел Рейнольдса имеет вид

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Условия для скорости на поверхности частицы с номером  $k$ :

$$u_i = V_i^k + \Gamma_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a. \quad (2.3)$$

Здесь  $V_i^k$  – компоненты абсолютной линейной скорости,  $\Gamma_{ij}^k$  – тензор угловой скорости,  $\mathbf{X}^k$  – радиус-вектор положения произвольной точки жидкости относительно центра частицы с номером  $k$ .

Условия затухания возмущений скорости и давления далеко от частиц:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

где  $p_0$  – невозмущенное давление в жидкости.

Динамика цепочки моделируется как динамика системы частиц со связями. В безынерционном приближении записываются уравнения поступательного и вращательного движения каждой частицы с учетом действующих на нее сил реакции стержней, сил гидродинамического взаимодействия, а также их моментов:

$$\mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = 0, \quad \mathbf{T}_k^i + \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = 0. \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{F}_k^h$  – силы,  $\mathbf{T}_k^h$  – моменты сил со стороны жидкости,  $\mathbf{F}_k^i$ ,  $\mathbf{T}_k^i$  – внутренние,  $\mathbf{F}_k^e$ ,  $\mathbf{T}_k^e$  – внешние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером  $k$ .

Процедура решения задачи аналогична процедуре из работы [4]. Из решения системы уравнений динамики жидкости (2.1)-(2.4) находится распределение скорости и давления в жидкости вокруг цепочки, а затем силы  $\mathbf{F}_k^h$  и моменты сил  $\mathbf{T}_k^h$ , действующие со стороны жидкости на частицы в цепочке. Поступательная и угловая скорость частиц цепочки определяются из уравнений (2.5). В том числе, условие равенства нулю составляющей относительной скорости двух частиц вдоль соединяющего их стержня позволяет найти усилие в нем. Так как число частиц в цепочке, вообще говоря, может быть большим и выражения для сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости, имеют сложные выражения, то нахождение аналитического решения рассматриваемой системы уравнений представляет собой сложную задачу. Поэтому система уравнений решалась численно.

Для этого использовался специальный программный комплекс, разработанный для персонального компьютера, который в качестве исходных данных получает только желаемую точность вычислений, координаты и радиусы частиц, вязкость и скорость жидкости, а также приложенные к частицам внешние силы и моменты. При этом применялся метод подобия, аналогичный работе [4]. Это связано с тем, что для реальных систем размеры частиц достаточно малы, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов. При компьютерном моделировании динамики цепочек задаются размеры частиц  $\hat{a}$ , вязкость несущей жидкости  $\hat{\eta}$ , величина и направление внешней силы  $\vec{\hat{F}}_k$ , действующей на каждую частицу, а также скорость внешнего модельного потока. Поскольку плотность жидкости явным образом не входит в уравнения (2.1), то она считается одинаковой для модельной и реальной жидкостей.

Связь между реальными и модельными параметрами задается соотношениями [4]

$$V = \frac{\hat{F}\hat{a}\hat{\eta}\hat{V}}{\hat{F}\hat{\eta}a}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\eta}^2 = \eta^2 \frac{\hat{F}}{F}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) выражение (2.6) записывается в виде

$$V = \frac{\hat{a}\eta\hat{V}}{\hat{\eta}a}. \quad (2.8)$$

Другими словами, зная реальные значения параметров, при моделировании можно задавать значения двух параметров, а значение третьего находится из условия подобия. Можно рассмотреть и обратную задачу. Задавая значения всех трех модельных параметров, можно найти один из трех реальных параметров, зная значения двух из них.

Для моделирования динамики цепочки в программе используется такой параметр, как промежуток времени. Поэтому необходимо найти связь между такими параметрами в реальном процессе движения  $t = a/V$  и при моделировании  $\hat{t} = \hat{a}/\hat{V}$ . Используя соотношения (2.8), получим связь между этими параметрами:

$$t = \frac{a^2\hat{\eta}\hat{t}}{\hat{a}^2\eta}. \quad (2.9)$$

Такой параметр задачи, как сила реакция стержней  $S$  для реальной цепочки определяется масштабированием модельного значения сил реакций  $\hat{S}$  по формуле

$$S = \hat{S} \frac{F}{\hat{F}}. \quad (2.10)$$

Угловая скорость частиц  $\Omega$  определяется из условия подобия модельного и реального течения. Получаем соотношение:

$$\Omega = \frac{\hat{\Omega}\hat{a}^2\eta}{a^2\hat{\eta}}.$$

В случае, когда изучается динамика цепочки частиц в потоке в отсутствии внешних сил, то соотношение между модельной и реальной скоростью находится из подобия течений и имеет вид

$$u = \frac{\hat{u}\hat{a}\eta}{a\hat{\eta}}$$

Здесь  $u$  – скорость частицы в агрегате. Реакция стержней в этом случае находится также из соотношения (2.10) в котором под силой  $F$  понимается гидродинамическая сила, действующая на частицу в агрегате с учетом ее взаимодействия с другими частицами в агрегате. Модельное значение  $\hat{F}$  находится из решения системы (2.1) так же, как и значение  $\hat{S}$ .

### 3. Результаты моделирования

Рассмотрим варианты цепочки из трех сферических частиц  $A$ ,  $B$  и  $C$ , соединенных между собой стержнями. Система частиц помещена в вязкую жидкость. К частицам приложены моменты  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_C$ , под действием которых частицы врачаются и создают вихревое течение в окружающей жидкости. Течение жидкости создает силы, действующие на частицы со стороны жидкости и приводящие к деформации цепочки в виде ее изгиба. Через определенные промежутки времени величина и направление моментов изменяются так, чтобы изгиб цепочки был подобен деформациям тела плывущей в воде змеи.

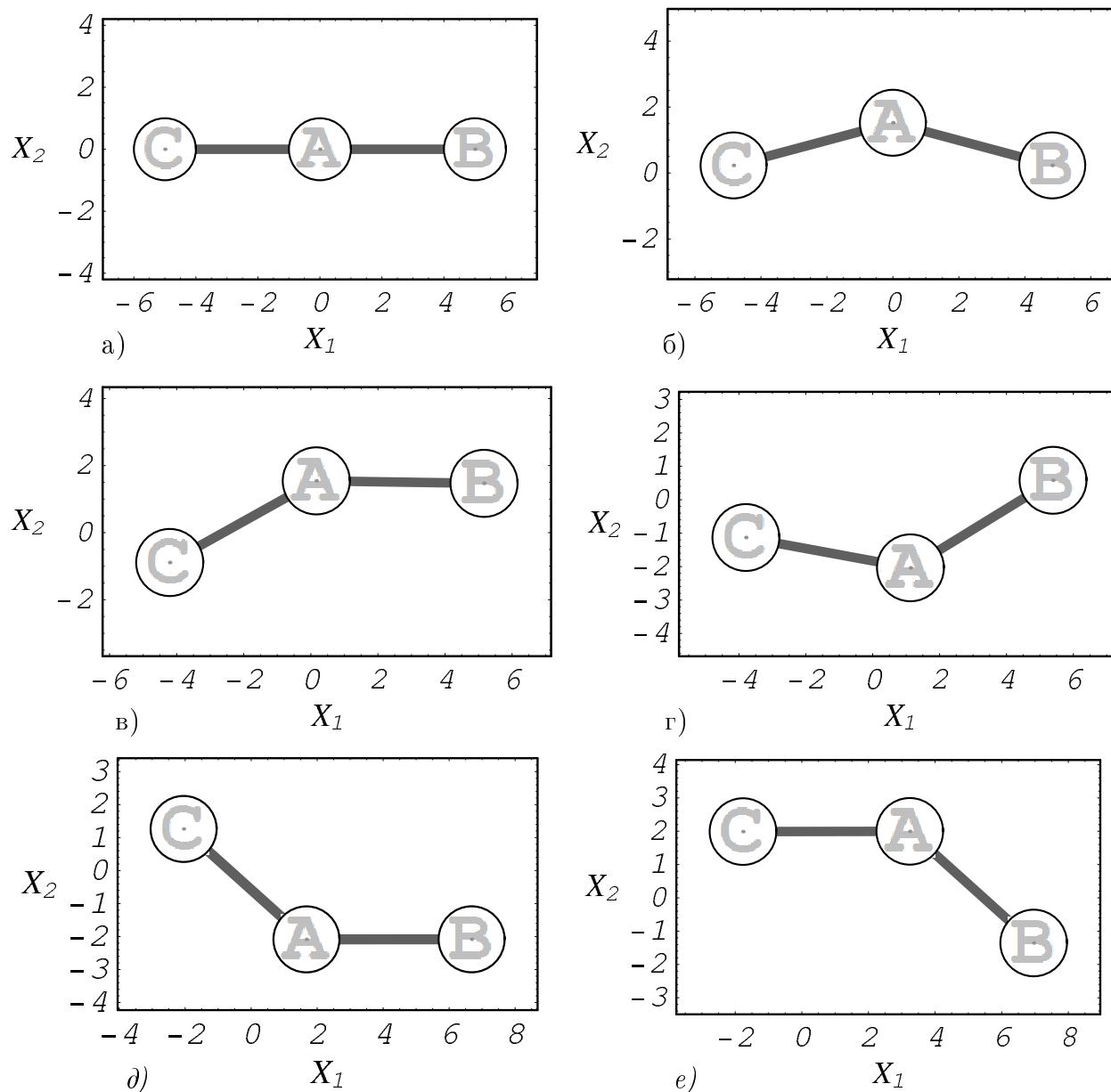


Рисунок 3.1

Динамика первой модели цепочки с частицами одного размера

На рис. 3.1а - 3.1б приведены результаты численного моделирования динамики первой цепочки за промежуток времени  $\hat{t} = 20$  при следующих значениях параметров: значения радиусов всех частиц  $\hat{a} = 1$ ; моменты внутренних сил  $\hat{T}_B = -5$ ,  $\hat{T}_A = 0$ ,  $\hat{T}_C = 5$ ; модельная вязкость жидкости считалась равной  $\hat{\eta} = 1$ . В последней конфигурации направление и значения внутренних моментов, действующих на частицы, меняется  $\hat{T}_B = -5$ ,  $\hat{T}_A = 10$ ,  $\hat{T}_C = -5$  и вновь рассчитывается динамика цепочки. За промежуток времени  $\hat{t} = 18,5$  цепочка принимает конфигурацию рис. 2в. В последней конфигурации цепочки направление и величина моментов вновь меняются на  $\hat{T}_B = 5$ ,  $\hat{T}_A = 0$ ,  $\hat{T}_C = -5$  и за промежуток времени  $\hat{t} = 49$  она перемещается в положение рис. 2г. В этом положении вновь меняется направление и величина внутренних моментов,  $\hat{T}_B = 5$ ,  $\hat{T}_A = -10$ ,  $\hat{T}_C = 5$ , и за промежуток времени  $\hat{t} = 47$  цепочка перемещается и принимает конфигурацию рис. 2д. И вновь процедура изменения направления и значений моментов внутренних сил повторяется для последней конфигурации и возвращаемся к первоначальной ситуации:  $\hat{T}_B = -5$ ,  $\hat{T}_A = 0$ ,  $\hat{T}_C = 5$ . За промежуток времени  $\hat{t} = 60$  цепочка принимает положение рис. 2е. Далее цикл вычислений повторяется.

Аналогичные вычисления были проделаны для еще двух цепочек. На рис. 3.2 представлены результаты моделирования для цепочки у которой радиус частицы  $A$  увеличен до  $\hat{a} = 1,5$ , остальные частицы имеют единичный радиус.

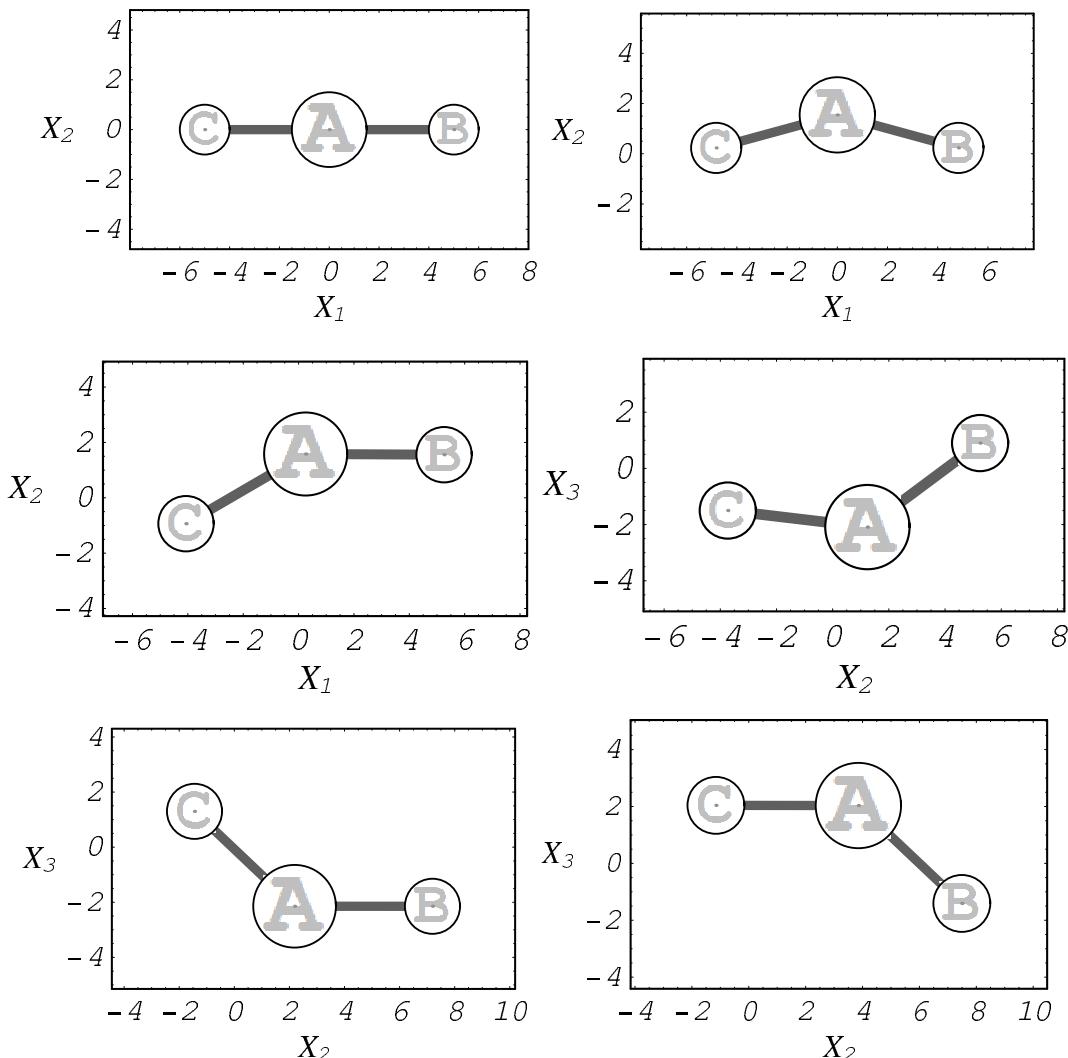


Рисунок 3.2

Динамика второй модели цепочки с большой центральной частицей

Промежутки времени, через которые моменты внутренних сил меняли значения и направления, выбирались таким образом, чтобы в результате их действия цепочка принимала конфигурацию, подобную первой цепочке. Поэтому имеем следующие значения: на первом промежутке  $\hat{t} = 20$ , на втором –  $\hat{t} = 20$ , на третьем –  $\hat{t} = 50$ , на четвертом –  $\hat{t} = 52,5$ , на пятом –  $\hat{t} = 60$ .

Результаты моделирования динамики цепочки у которой радиус частиц  $B$  и  $C$  увеличен до  $\hat{a} = 1,5$ , а частица  $A$  имеет единичный радиус, представлены на рис. 3.3. Аналогично предыдущему случаю выбирались промежутки времени, через которые моменты внутренних сил меняли значения и направления: на первом промежутке  $\hat{t} = 20$ , на втором –  $\hat{t} = 19$ , на третьем –  $\hat{t} = 57,8$ , на четвертом –  $\hat{t} = 49,3$ , на пятом –  $\hat{t} = 75,6$ .

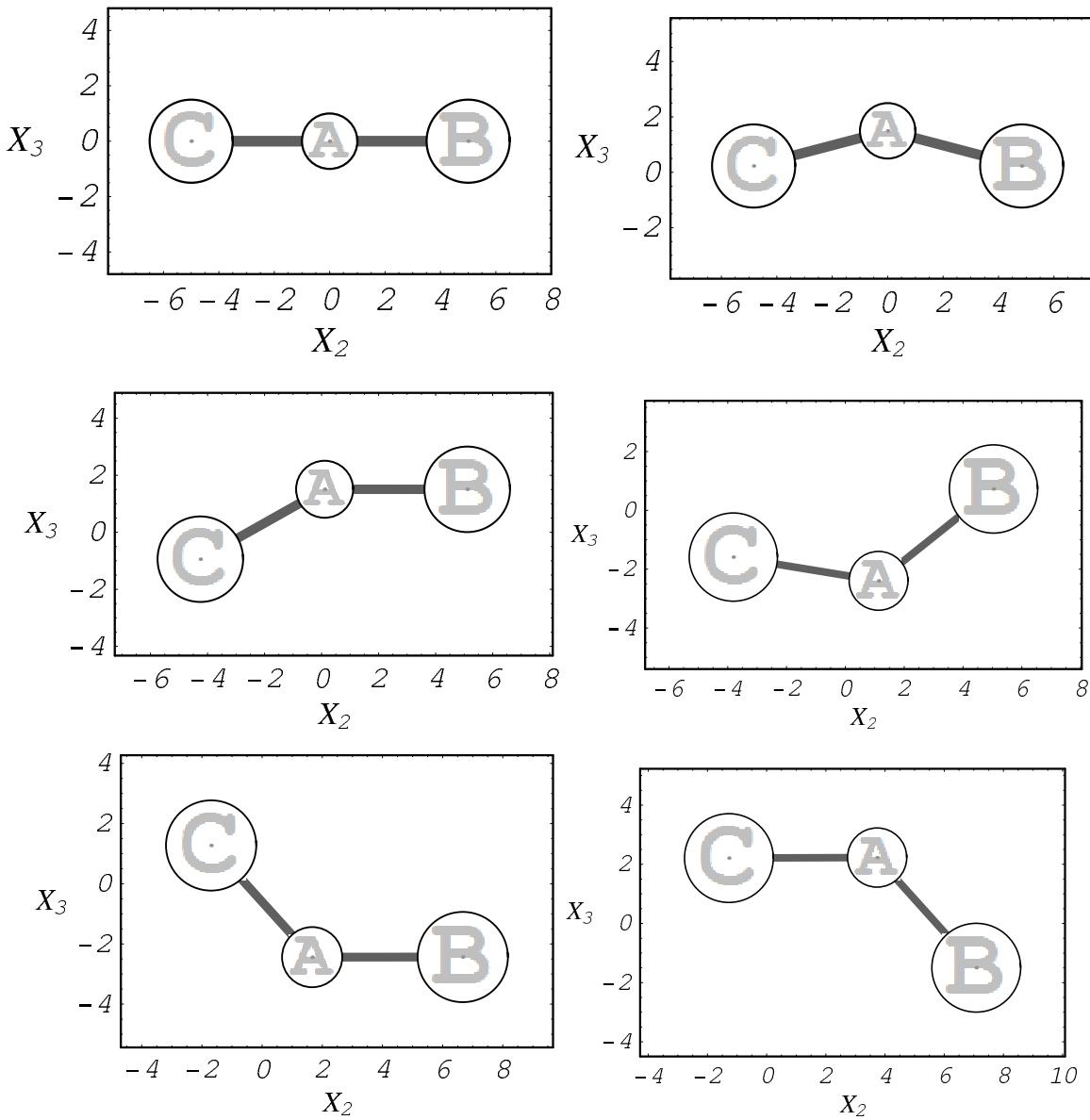


Рисунок 3.3

Динамика третьей модели цепочки с крайними частицами большого размера

Численные результаты моделирования движения цепочек представлены в табл. 1. Как видно из таблицы, быстрее перемещается вторая цепочка, а первая цепочка – самая медленная из трех. Объяснение такой динамики цепочек лежит в гидродинамике течения, образуемого вокруг каждой цепочки вращением их частиц и создаваемой этим течением гидродинамической силы, перемещающей цепочку.

Таблица 1: Результаты моделирования динамики цепочки частиц

Параметры моделирования	Первая цепочка	Вторая цепочка	Третья цепочка
Время движения $\hat{t}$	194,5	202,5	221,7
Перемещение центральной частицы $X_1$	3,24	3,85	3,724
Скорость центральной частицы $\hat{V}_1$	0,016658	0,01901	0,016797

Также проведенные расчеты позволяют определить усилия в стержнях в результате деформации цепочки частиц в потоке вязкой жидкости.

Предложенный выше подход позволяет конструировать цепочки частиц различной длины, самодвижущиеся в вязкой жидкости.

#### 4. Заключение

Рассмотрены модели цепочек частиц, плавающих за счет моментов внутренних сил, которые формируют вихревую структуру течения в окружающей жидкости. Такое течение создает гидродинамическую силу, действующую на цепочку и приводящая к его перемещению. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, из которых состоит цепочка. Для компьютерного моделирования перемещений такого рода агрегатов в вязкой жидкости использован специальный программный комплекс, разработанный ранее. Проведен численный расчет динамики 3 модельных структур, образованных, из 3 частиц разного размера. Результаты численного моделирования показывают, что одна из моделей плавающих цепочек частиц перемещается с большей скоростью, чем две другие. Найдены усилия реакций стержневых связей, наложенных на частицы цепочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. J. Lighthill, *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM, Philadelphia, 1975, 281 с.
2. P. R. Bandyopadhyay, D. N. Beal, A. Menozzi, “Biorobotic insights into how animals swim”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 206–214.
3. D. Lopez, E. Lauga, “Dynamics of swimming bacteria at complex interfaces”, *Phys. of fluids.*, **26** (2014), 071902.
4. С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач, “Динамика цепочечных агрегатов частиц в потоке вязкой жидкости”, *Журнал вычислительной математики и математической физики.*, **56:5** (2016), 133–148.
5. С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач, “Об одной модели динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости”, *Нелинейная динамика.*, **12:4** (2016), 605–618.

6. D. Lentink, F. T. Muijres, F. J. Donker-Duyvis, J. L. Leeuwen, “Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 267–273.

*Поступила 19.10.2017*

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

## Model of dynamics of a self-moving chain of particles in a viscous fluid

© S. I. Martynov<sup>3</sup>, L. U. Tkach<sup>4</sup>

**Abstract.** We consider a model of a chain consisting of spherical particles interconnected by rods. This chain moves in a viscous fluid by forming around itself such a vortex flow that creates a hydrodynamic force that propels the chain in a given direction. The vortex flow of a fluid is formed by the rotation of chain particles under the action of moments of internal forces; their sum is zero. To calculate the dynamics of the chain, the system of equations is solved that includes equations of creeping flow, boundary conditions and equations of particle dynamics. The hydrodynamic interaction of all particles is taken into account. It is assumed that the rods don't interact with the fluid, and their role is to keep the connected particles at the same distance. Computer simulation of the dynamics of three chains is carried out. These chains differ in the particle size. The forces in the rods and the movement speed for each chain are calculated. It is found that one of the models considered moves faster. Basing on the proposed approach, it is possible to create models of self-propelled chains of different length.

**Key Words:** numerical modeling, viscous fluid, self-propelled chains of particles, hydrodynamic interaction, internal forces of interaction.

## REFERENCES

1. M. J. Lighthill, *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM, Philadelphia, 1975 (In Eng.), 281 p.
2. P. R. Bandyopadhyay, D. N. Beal, A. Menozzi, “Biorobotic insights into how animals swim”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 206–214 (In Eng.).
3. D. Lopez, E. Lauga, “Dynamics of swimming bacteria at complex interfaces”, *Phys. of fluids.*, **26** (2014), 071902 (In Eng.).
4. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Dynamics of Chain Particle Aggregates in Viscous Flow”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:5 (2016), 826–840 (In Eng.).
5. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “On one model of the dynamics of self-propelled aggregates of particles in a viscous fluid”, *Nonlinear Dynamics.*, **12**:4 (2016), 605—618 (In Russ.).
6. D. Lentink, F. T. Muijres, F. J. Donker-Duyvis, J. L. Leeuwen, “Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight”, *J. Exp. Biol.*, **211** (2008), 267–273 (In Eng.).

Submitted 19.10.2017

<sup>3</sup> Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

<sup>4</sup> Senior Lecturer of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, Leonilla7777@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.55-67

УДК 517.95

## Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении

© А. В. Калинин<sup>1</sup> А. А. Тюхтина<sup>2</sup> О. А. Изосимова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Изучается начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении при краевом условии магнитного типа. Рассматривается случай неоднородных сред, содержащих проводящие и непроводящие включения. Приводится постановка задачи в терминах векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов. Используются специальные калибровочные соотношения (модифицированные калибровочные соотношения Кулона и Лоренца), позволяющие сформулировать задачи независимого определения векторного магнитного потенциала. Доказывается корректность поставленных задач при общих условиях на коэффициенты. Возможность применения при этом теоремы Лионса обосновывается с помощью оценок для скалярных произведений векторных полей. Изучается соотношение между решениями задач при разных калибровочных соотношениях. Рассматривается связь между постановками задач для векторного магнитного потенциала и исходной задачей для векторного магнитного потенциала и скалярного электрического потенциала.

**Ключевые слова:** система уравнений Максвелла, квазистационарное магнитное приближение, неоднородные среды, векторный потенциал, калибровочные соотношения.

### 1. Введение

Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении находит применение при решении различных практических задач [1]. Основные задачи для этой системы допускают разнообразные формулировки в терминах полей ( $\vec{H}$  и  $\vec{E}$ -формулировки [2], [3]) и в терминах потенциалов ( $\vec{A}$  –  $\phi$ -формулировки при различных калибровочных соотношениях [4], [5],  $\vec{T}$  –  $\psi$ -формулировки [6]).

<sup>1</sup> Калинин Алексей Вячеславович, доцент кафедры математической физики и оптимального управления, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8558-0451>, avk@mm.unn.ru

<sup>2</sup> Тюхтина Алла Александровна, доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Институт экономики и предпринимательства, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5723-9256>, kalinmm@yandex.ru

<sup>3</sup> Изосимова Ольга Алексеевна, аспирант, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3865-8281>, izosimova93@yandex.ru

При исследовании задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в реальных физически неоднородных средах типичной является ситуация, когда рассматриваемая пространственная область содержит проводящие и непроводящие включения [1-3]. В этом случае сформулированные начально-краевые задачи относятся к эллиптико-параболическому типу [3]. Рассмотрение таких задач требует изучения свойств функциональных пространств, в которых ищется решение. В частности, важную роль играют неравенства, позволяющие при доказательстве корректности обобщенных постановок обосновывать коэрцитивность соответствующих билинейных форм.

В настоящей работе рассматриваются формулировки задач для квазистационарной системы Максвелла в терминах потенциалов (векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$  и скалярного электрического потенциала  $\phi$ ) для неоднородных областей, содержащих проводящие и непроводящие включения. При этом используются модифицированные калибровочные соотношения Кулона и Лоренца, приводящие к обобщенным постановкам задач независимого определения векторного магнитного потенциала. Для периодических по времени решений квазистационарных задач модифицированные калибровочные соотношения Лоренца обсуждались, в частности, в работах [5], [7]. В работах [8], [9] исследовались прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении с использованием модифицированных калибровочных соотношений Кулона и Лоренца в проводящих областях.

Целью настоящей статьи является распространение результатов работ [7]–[9] на случай ограниченных областей, содержащих проводящие и непроводящие включения.

Все получаемые в работе результаты справедливы при достаточно общих условиях на коэффициенты системы и опираются на оценки скалярных произведений векторных полей, доказанные в [10], [11].

## 2. Постановка задач и основные результаты

В терминах векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$  и скалярного электрического потенциала  $\phi$  система уравнений Маквелла в квазистационарном магнитном приближении [12] сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{A}(x, t) + \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}(x, t) = -\sigma \operatorname{grad} \phi(x, t) + \vec{J}^{\text{ct}}(x, t), \quad (2.1)$$

где  $(x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $T > 0$ .

В работе предполагается, что  $\Omega$  – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей  $\Gamma$ ,  $\vec{\nu}(x)$  – единичный вектор внешней нормали в точке  $x \in \Gamma$ . Для функций  $\vec{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  через  $\vec{u}_\nu$ ,  $\vec{u}_\tau$  обозначаются нормальная и касательная компоненты функции на границе области. Через  $\|\cdot\|_{2,\Omega}$  и  $(\cdot, \cdot)_{2,\Omega}$  обозначаются норма и скалярное произведение в  $\{L_2(\Omega)\}^3$ .

Уравнение (2.1) дополняется граничным условием, соответствующим однородному условию магнитного типа [1]

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A})_\tau(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \quad (2.2)$$

и начальным условием

$$\vec{A}(x, 0) = \vec{a}(x), \quad x \in \Omega_C, \quad (2.3)$$

где  $\vec{a} \in \{L_2(\Omega_C)\}^3$  – заданная функция.

Рассматриваемая область состоит из проводника, занимающего подобласть  $\Omega_C$  и окруженного диэлектриком (непроводящим слоем)  $\Omega_I = \Omega \setminus \bar{\Omega}_C$ . Предполагается,  $\Omega_C$  – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с лишицевой границей  $\Gamma_C$ ,  $\bar{\Omega}_C \subset \Omega$ , так что  $\partial\Omega_I = \Gamma \cup \Gamma_C$ . Через  $\vec{\nu}_C(x)$ ,  $\vec{\nu}_I(x)$  обозначаются единичные вектора внешней нормали в точке  $\vec{x} \in \Gamma_C$  к областям  $\Omega_C$  и  $\Omega_I$  соответственно,  $\vec{\nu}_C + \vec{\nu}_I = 0$ . Для функций  $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  через  $\vec{u}_C$ ,  $u_C$  обозначаются их сужения на область  $\Omega_C$ , через  $\vec{u}_I$ ,  $u_I$  – сужения на  $\Omega_I$ .

Предполагается, что  $\mu$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$  – симметричные  $(3 \times 3)$  матрицы измеримых на  $\Omega$  функций, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon_1|\xi|^2 \leq (\epsilon(x)\xi, \xi) \leq \epsilon_2|\xi|^2, \quad \mu_1|\xi|^2 \leq (\mu(x)\xi, \xi) \leq \mu_2|\xi|^2$$

при почти всех  $x \in \Omega$  и всех  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\sigma_{ij}(x) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{при почти всех } x \in \Omega_I,$$

$$\sigma_1|\xi|^2 \leq (\sigma(x)\xi, \xi) \leq \sigma_2|\xi|^2 \quad \text{при почти всех } x \in \Omega_C \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^3,$$

где  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\epsilon_i$ , ( $i = 1, 2$ ) – заданные положительные числа.

$\vec{J}^{\text{ct}} : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  – заданная суммируемая с квадратом функция,

$$\operatorname{div} \vec{J}^{\text{ct}}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_I \times (0, T), \quad (\vec{J}^{\text{ct}})_\nu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T). \quad (2.4)$$

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [13], [14]:

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{div}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v}) dx,$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{rot}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx.$$

Через  $H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$  обозначается замыкание множества пробных вектор-функций  $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$  в  $H(\operatorname{rot}; \Omega)$  и  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  соответственно,  $K_0(\operatorname{div}; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ .

Решением задачи (2.1)–(2.3) называются функции  $\vec{A} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega))$ ,  $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  такие, что  $\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \in L_2(0, T, H_0(\operatorname{rot}; \Omega))$  и справедливы равенства (2.1) и (2.3).

Предположим, в решении задачи (2.1)–(2.3)  $\vec{A} \in C^1(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega))$ . Тогда из (2.1) получаем, что для всех  $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx = - \int_{\Omega_C} (\sigma \operatorname{grad} \phi \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) dx. \quad (2.5)$$

Для обеспечения единственности решения задач в терминах потенциалов  $\vec{A}$ ,  $\phi$  уравнение (2.1) традиционно дополняется калибровочными соотношениями (например, соотношением Кулона  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  или Лоренца  $\operatorname{div} \vec{A} + \partial \phi / \partial t = 0$ ). В этом случае для  $\vec{A}$  и  $\phi$  приходится решать связную систему уравнений [3], [4].

В работе предлагается использовать модифицированные калибровочные соотношения

$$\operatorname{div} \sigma \vec{A}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_C \times (0, T), \quad (\sigma \vec{A})_{\nu_C}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_I \times (0, T), \quad \vec{A}_{\nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T).$$

и

$$\varphi(x, t) = -\varkappa \operatorname{div} \sigma \vec{A}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_C \times (0, T), \quad (\sigma \vec{A})_{\nu_C}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_I \times (0, T), \quad \vec{A}_{\nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T),$$

которые, как будет показано далее, приводят к возможности независимого определения векторного магнитного потенциала. Подобные подходы для гармонических задач обсуждались в работе [5].

Введем в  $\{L_2(\Omega_C)\}^3$  скалярное произведение соотношением  $(\vec{u}, \vec{v})_{\sigma} = \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{u} \cdot \vec{v}) dx$ . Получившееся гильбертово пространство обозначается  $\{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3$ . Для постановки начально-краевой задачи в виде интегрального тождества определяются также следующие гильбертовы пространства

$$H_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C) = \{\vec{u} \in \{L(\sigma; \Omega_C)\}^3 : \sigma \vec{u} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega_C)\},$$

$$K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C) = \{\vec{u} \in H_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C) : \operatorname{div} \sigma \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{H(\operatorname{div} \sigma; \Omega)} = (\vec{u}, \vec{v})_{\sigma} + (\operatorname{div} \sigma \vec{u}, \operatorname{div} \sigma \vec{v})_{2, \Omega_C},$$

$$W(\sigma; \Omega_C) = H(\operatorname{rot}; \Omega_C) \cap H_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C), \quad V(\sigma; \Omega_C) = H(\operatorname{rot}; \Omega_C) \cap K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C),$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{W(\sigma; \Omega_C)} = \int_{\Omega_C} (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega_C} (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx + \int_{\Omega_C} \operatorname{div} \sigma \vec{u} \operatorname{div} \sigma \vec{v} dx,$$

$$W = \{\vec{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega) : \vec{u}_C \in H_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C), \operatorname{div} \vec{u}_I = 0, (u_I)_{\nu}(x) = 0, x \in \Gamma\},$$

$$V = \{\vec{u} \in W : \operatorname{div} \sigma \vec{u}_C = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_W = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx + \int_{\Omega_C} (\operatorname{div} \sigma \vec{u} \operatorname{div} \sigma \vec{v}) dx.$$

Пространство  $W(\sigma; \Omega_C)$  непрерывно и плотно вложено в  $\{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3$ , пространство  $V(\sigma; \Omega_C)$  непрерывно и плотно вложено в  $K(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$  [8].

Задача (2.1)–(2.3), (2.6) сводится к определению такой функции  $\vec{A} \in L_2(0, T, V)$ , удовлетворяющей начальному условию (2.3), что для всех  $\vec{v} \in V$  справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{ct} \cdot \vec{v}) dx. \quad (2.8)$$

Задача при использовании калибровочных соотношений (2.7) сводится к определению такой функции  $\vec{A} \in L_2(0, T, W)$ , удовлетворяющей начальному условию (2.3), что для всех  $\vec{v} \in W$  справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} \operatorname{div} \sigma \vec{A} \operatorname{div} \sigma \vec{v} dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{ct} \cdot \vec{v}) dx. \quad (2.9)$$

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

**Т е о р е м а 2.1.** Для любых  $\vec{a} \in K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$  и  $\vec{J}^{ct} \in \{L_2(Q)\}^3$ , удовлетворяющей (2.4), существует единственное решение  $\vec{A} \in L_2(0, T, V)$  задачи (2.8), (2.3). При этом  $\vec{A}_C \in C(0, T, K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C))$ . Если  $\vec{a} \in V(\sigma; \Omega_C)$ , то  $\vec{A}'_C \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C))$ .

**Т е о р е м а 2.2.** Для любых  $\vec{a} \in \{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3$  и  $\vec{J}^{cm} \in \{L_2(Q)\}^3$ , удовлетворяющей (2.4), существует единственное решение  $\vec{A} \in L_2(0, T, W)$  задачи (2.9), (2.3). При этом  $\vec{A}_C \in C(0, T, \{L(\sigma; \Omega_C)\}^3)$ . Если  $\vec{a} \in W(\sigma; \Omega_C)$ , то  $\vec{A}'_C \in L_2(0, T, \{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3)$ .

**Т е о р е м а 2.3.** Пусть  $\vec{A}$  – решение задачи (2.8), (2.3),  $\vec{A}_\varkappa$  – решение задачи (2.9) с начальным условием  $\vec{A}_{\varkappa C}(0) = \vec{a} + \vec{q}$ , где  $\vec{q} \in K(\text{rot}; \Omega_C)$ . Тогда  $\text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}_\varkappa$ . При  $\varkappa \rightarrow \infty$   $\vec{A}_\varkappa \rightarrow \vec{A}$  в  $L_2(0, T, W)$ . Если  $\vec{q} = 0$ ,  $(\vec{A}_\varkappa)_C \rightarrow \vec{A}_C$  в  $C(0, T, \{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3)$ .

**Т е о р е м а 2.4.** Пусть  $\vec{A} \in L_2(0, T, V)$  – решение задачи (2.8), (2.3), где  $\vec{a} \in V(\sigma; \Omega_C)$ . Тогда найдется функция  $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  такая, что  $\vec{A}$ ,  $\phi$  – решение задачи (2.1)–(2.3).

**Т е о р е м а 2.5.** Пусть  $\vec{A} \in L_2(0, T, W)$  – решение задачи (2.7), (2.3), где  $\vec{a} \in W(\sigma; \Omega_C)$ . Тогда найдется функция  $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  такая, что  $\vec{A}$ ,  $\phi$  – решение задачи (2.1)–(2.3), причём  $\phi_C = -\varkappa \text{div} \sigma \vec{A}_C$ .

### 3. Предварительные утверждения

Результаты работы опираются на следующие оценки, установленные в [11].

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^3$  – открытое ограниченное множество с липшицевой границей, гомеоморфное шару. Существует постоянная  $C(G) > 0$ , зависящая только от области  $G$  такая, что неравенство

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| \leq C(G) (\|\vec{u}\|_{2,G} \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G} \|\text{rot} \vec{u}\|_{2,G} + \|\text{rot} \vec{u}\|_{2,G} \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G}) \quad (3.10)$$

выполняется для любых  $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; G)$ ,  $\vec{v} \in H(\text{div}; G)$ , а также для любых  $\vec{u} \in H(\text{rot}; G)$ ,  $\vec{v} \in H_0(\text{div}; G)$ .

Далее в этой главе считаем, что область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  удовлетворяет условиям, сформулированным при постановке начально-краевых задач.

**Л е м м а 3.1.** Пусть  $K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) = \{\vec{w} \in K(\text{div}; \Omega_I) : \langle \vec{w}_\nu, 1 \rangle_{\Gamma_C} = 0\}$ . Существует линейный непрерывный оператор продолжения  $E_{\text{div}} : K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) \rightarrow K(\text{div}; \Omega)$ . Если при этом  $\vec{w}_\nu(x) = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , то  $E_{\text{div}} \vec{w} \in K_0(\text{div}; \Omega)$ .

Доказательство леммы приводится, например, в [11].

**Л е м м а 3.2.** Найдётся такая положительная постоянная  $C(\Omega_C, \Omega)$ , что для всех  $\vec{u} \in W$  справедливо неравенство

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega_C, \Omega) (\|\text{rot} \vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\text{div} \sigma \vec{u}\|_{2,\Omega_C}). \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть  $\vec{u} \in W$ . Применяя неравенство (3.10) к функциям  $\vec{u}_C \in H(\text{rot}; \Omega_C)$ ,  $\sigma \vec{u}_C \in K_0(\text{div}; \Omega_C)$ , получаем

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega_C} \leq C_1 (\|\text{rot} \vec{u}\|_{2,\Omega_C} + \|\text{div} \sigma \vec{u}\|_{2,\Omega_C}),$$

где  $C_1 = \sigma_1^{-1} (C(\Omega_C) \max\{1, \sigma_2\} + 1/4)$ .

Согласно лемме 3.1., найдётся функция  $\vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$  такая, что  $\vec{v}_I = \vec{u}_I$ ,  $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C\|\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I}$ , где постоянная  $C > 0$  зависит только от области  $\Omega_C$ .

Применяя (3.10) к функциям  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , получаем

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega}| \leq C(\Omega)\|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\text{rot } \vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)C\|\vec{u}\|_{2,\Omega_I}\|\text{rot } \vec{u}\|_{2,\Omega}.$$

Так как  $(\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} = \|\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I}^2 + (\vec{u}_C, \vec{v})_{2,\Omega_C}$ ,

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega_I} \leq C\|\vec{u}\|_{2,\Omega_C} + C(\Omega)C\|\text{rot } \vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(C(\Omega) + C_1)\|\text{rot } \vec{u}\|_{2,\Omega} + C_1C\|\text{div } \sigma \vec{u}\|_{2,\Omega_C}.$$

Таким образом, справедлива оценка (3.11), где  $C(\Omega_C, \Omega) = (C_1^2 + C^2(C(\Omega) + C_1)^2)^{1/2}$ .  
Доказательство закончено.

Введём в пространстве  $W$  замкнутые подпространства

$$W_0 = \{\vec{u} \in W : \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \vec{u}_I = 0, (\mu^{-1} \text{rot } \vec{u})_\tau(x) = 0, x \in \Gamma\}, \quad W_1 = \{\vec{u} \in W : \vec{u}_C = 0\}.$$

Обозначим  $V_0 = W_0 \cap V$ . Пусть

$$H_I = \{\xi \in H^1(\Omega_I) : \xi(x) = 0, x \in \Gamma\}, \quad H_C = \{\xi \in H^1(\Omega_C) : \xi(x) = 0, x \in \Gamma_C\}.$$

**Л е м м а 3.3.** Для любого элемента  $\vec{w} \in W$  однозначно определяются элементы  $\vec{w}_0 \in W_0$ ,  $\vec{w}_1 \in W_1$  такие, что  $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1$ .

Доказательство. Для  $\vec{u} \in W_1$  неравенство (3.11) принимает вид  $\|\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I} \leq C(\Omega_C, \Omega)\|\text{rot } \vec{u}_I\|_{2,\Omega_I}$ . Из леммы Лакса-Мильграма следует, что найдётся единственная функция  $\vec{w}_1 \in W_1$  такая, что при всех  $\vec{v} \in W_1$

$$\int_{\Omega_I} (\mu^{-1} \text{rot } \vec{w}_1 \cdot \text{rot } \vec{v}) dx = \int_{\Omega_I} (\mu^{-1} \text{rot } \vec{w} \cdot \text{rot } \vec{v}) dx.$$

Положим  $\vec{w}_0 = \vec{w} - \vec{w}_1$ .

Пусть  $\vec{\psi} \in H_C^3$ . Согласно неравенству Фридрихса [15], найдётся единственная функция  $p \in H_C$  такая, что для всех  $\xi \in H_C$

$$\int_{\Omega_I} (\text{grad } p \cdot \text{grad } \xi) dx = \int_{\Omega_I} (\vec{\psi} \cdot \text{grad } \xi) dx.$$

Продолжим функции  $\vec{\psi}$ ,  $p$  нулём в  $\Omega_C$  и положим  $\vec{v} = \vec{\psi} - \text{grad } p$ . Тогда  $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$ ,  $\vec{v}_C = 0$ ,  $\text{div } \vec{v}_I = 0$  и  $\vec{v}_\nu = 0$ . Таким образом,  $\vec{v} \in W_1$ ,  $\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{\psi}$ , поэтому  $\int_{\Omega_I} (\mu^{-1} \text{rot } \vec{w}_0 \cdot \text{rot } \vec{\psi}) dx = 0$ . Следовательно,  $\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \vec{w}_0 = 0$ ,  $(\mu^{-1} \text{rot } \vec{w}_0)_\tau(x) = 0$ ,  $x \in \Gamma$ , то есть  $\vec{w}_0 \in W_0$ .

Для всех  $\vec{u} \in W_0$ ,  $\vec{v} \in W_1$   $\int_{\Omega_I} (\mu^{-1} \text{rot } \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}) dx = 0$ . Следовательно, ввиду оценки (3.11),  $W_0 \cap W_1 = \{0\}$ . Отсюда вытекает единственность представления.

Доказательство закончено.

**Л е м м а 3.4.** Для любой функции  $\vec{v} \in W(\sigma; \Omega_C)$  найдётся единственная функция  $\vec{w} \in W_0$  такая, что  $\vec{w}_C = \vec{v}$ . При этом  $\|\vec{w}\|_W \leq C\|\vec{v}\|_{W(\sigma; \Omega_C)}$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $\vec{v}$ .

**Доказательство.** Из неравенства Фридрихса вытекает, что найдётся единственная функция  $p \in H_I$ , при всех  $\xi \in H_I$  удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega_I} (\mu \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} \xi) dx = -\langle (\operatorname{rot} \vec{v})_{\nu_C}, \xi \rangle_{\Gamma_C},$$

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} p = 0, (\mu \operatorname{grad} p)_{\nu_I}(x) = -(\operatorname{rot} \vec{v})_{\nu_C}(x), x \in \Gamma_C, \|\operatorname{grad} p\|_{2,\Omega_I} \leq C_1 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C}.$$

Определим функцию  $\vec{F} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$ :  $\vec{F}_C = \operatorname{rot} \vec{v}$ ,  $\vec{F}_I = \mu \operatorname{grad} p$ . По построению,

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \vec{F}_I = 0, (\mu^{-1} \vec{F})_{\tau}(x) = 0, x \in \Gamma, \|\vec{F}\|_{2,\Omega} \leq C_2 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C},$$

где  $C_2 = (\mu_2^2 C_1^2 + 1)^{1/2}$ .

Найдётся единственная функция  $\vec{u} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega)$  такая, что  $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{F}$ . Тогда  $\vec{v} - \vec{u}_C = \operatorname{grad} q$ ,  $q \in H^1(\Omega_C)$ ,  $\int_{\Omega_C} q dx = 0$ .

Пусть  $q_1 \in H^1(\Omega_I)$  – решение задачи

$$\Delta q_1 = 0, q_1(x) = q(x), x \in \Gamma_C, q_1(x) = 0, x \in \Gamma,$$

функция  $q_2 \in H_C$  удовлетворяет при всех  $\xi \in H_C$  равенству

$$\int_{\Omega_I} (\operatorname{grad} q_2 \cdot \operatorname{grad} \xi) dx = -\langle (\operatorname{grad} q_1)_{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma}.$$

Определим функцию  $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  соотношениями

$$\vec{w}_C = \vec{u}_C + \operatorname{grad} q = \vec{v}, \vec{w}_I = \vec{u}_I + \operatorname{grad}(q_1 + q_2).$$

По построению,  $\vec{w} \in W_0$ ,

$$\|\vec{w}\|_W \leq C(\Omega_C, \Omega) \left( \|\vec{F}\|_{2,\Omega} + \|\operatorname{div} \sigma \vec{v}\|_{,\Omega_C} \right) \leq C \|\vec{v}\|_{W(\sigma; \Omega_C)},$$

где можно взять  $C = C(\Omega_C, \Omega)(C_2 + 1)$ .

Предположим, найдутся функции  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_0$  такие, что  $\vec{w}_{iC} = \vec{v}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1 \in W_0 \cap W_1$ , и единственность продолжения доказана.

**Доказательство закончено.**

**Лемма 3.5.** Для любой функции  $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  найдётся единственная функция  $\vec{v} \in V$  такая, что  $\vec{w} - \vec{v} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $\|\vec{v}\|_{\operatorname{rot}, \Omega} + \|\vec{w} - \vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C \|\vec{w}\|_{\operatorname{rot}, \Omega}$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $\vec{w}$ . При этом, если  $\vec{w} \in W$ ,  $\vec{w} - \vec{v} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W$ .

**Доказательство.** Пусть  $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ . Тогда [10]  $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{g}$ , где  $\vec{w}_1 \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$ ,  $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $(\vec{w}_1)_C = \vec{v}^c + \operatorname{grad} p$ , где  $\sigma \vec{v}^c \in K_0(\operatorname{div}; \Omega_C)$ ,  $p \in H^1(\Omega_C)$ ,  $\int_{\Omega_C} p dx = 0$ ,

$$\|\vec{w}\|_{2,\Omega}^2 = \|\vec{w}_1\|_{2,\Omega}^2 + \|\vec{g}\|_{2,\Omega}^2, \|\vec{w}_1\|_{\sigma}^2 = \|\vec{v}^c\|_{\sigma}^2 + \|\vec{g}\|_{\sigma}^2.$$

Пусть  $p_1 \in H^1(\Omega_I)$  – решение задачи

$$\Delta p_1 = 0, p_1(x) = p(x), x \in \Gamma_1, p_1(x) = 0, x \in \Gamma.$$

Обозначим  $f = -(\operatorname{grad} p_1)_{\nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . Пусть функция  $p_2 \in H_C$  удовлетворяет при всех  $q \in H_C$  равенству

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} p_2 \cdot \operatorname{grad} q) dx = \langle f, q \rangle_{\Gamma}.$$

Определим функцию  $\psi \in H^1(\Omega)$ :  $\psi_C = p$ ,  $\psi_I = p_1 + p_2$ . Положим  $\vec{v} = \vec{w}_1 - \operatorname{grad} \psi = \vec{w} - \vec{g} - \operatorname{grad} \psi$ . По построению,  $\vec{v}_C = \vec{w}_1 - \operatorname{grad} p = \vec{v}^c \in K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$ ,  $\vec{v}_{\nu} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{v}_I = \operatorname{div} \vec{w}_I = 0$ . Единственность представления вытекает из оценки (3.11).

**Доказательство закончено.**

#### 4. Доказательство основных результатов

Доказательство теорем 2.1., 2.2.

Для почти всех  $t \in (0, T)$  найдётся единственная функция  $\vec{A}_1(t) \in W_1$ , при всех  $\vec{v} \in W_1$  удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega_I} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_1(t) \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx = \int_{\Omega_I} (\vec{J}^{\text{ct}}(t) \cdot \vec{v}) dx.$$

Из оценки (3.11) следует, что  $\|\operatorname{rot} \vec{A}_1(t)\|_{2,\Omega_I} \leq \mu_2 C(\Omega_C; \Omega) \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}$ , то есть  $\vec{A}_1 \in L_2(0, T, W_1)$ .

Решение задачи (2.9), (2.3) будем искать в виде  $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1$ , где функция  $\vec{A}_0 \in L_2(0, T, W_0)$  при всех  $\vec{v} \in W_0$  удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A}_0 \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} \operatorname{div} \sigma \vec{A}_0 \operatorname{div} \sigma \vec{v} dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) dx. \quad (4.1)$$

Пусть  $F : W(\sigma; \Omega_C) \rightarrow W_0$  – оператор продолжения, определённый в лемме 3.4.. Оператор  $G : W(\sigma; \Omega_C) \rightarrow W^*(\sigma; \Omega_C)$  ставит в соответствие  $\vec{u} \in W(\sigma; \Omega_C)$  элемент пространства  $W^*(\sigma; \Omega_C)$  такой, что для всех  $\vec{v} \in W(\sigma; \Omega_C)$

$$\langle G\vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} F \vec{u} \cdot \operatorname{rot} F \vec{v}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} \operatorname{div} \sigma \vec{u} \operatorname{div} \sigma \vec{v} dx.$$

Билинейная форма  $\langle G\vec{u}, \vec{v} \rangle$ , очевидно, симметрична, непрерывна и коэрцитивна на  $W(\sigma; \Omega_C)$  и  $G\vec{u} \in L_2(0, T, W^*(\sigma; \Omega_C))$  для  $\vec{u} \in L_2(0, T, W(\sigma; \Omega_C))$ .

Определим элемент  $l \in L_2(0, T, W^*(\sigma; \Omega_C))$  такой, что для  $\vec{v} \in W(\sigma; \Omega_C)$   $\langle l, \vec{v} \rangle = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}}(t) \cdot F \vec{v}) dx$ . Таким образом, для  $\vec{v} \in W(\sigma; \Omega_C)$  из (4.1) следует равенство

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{A}_{0C}, \vec{v} \rangle + \langle G\vec{A}_{0C}, \vec{v} \rangle = l(\vec{v}). \quad (4.2)$$

Из теоремы Лионса [15] вытекает, что существует единственная функция  $\vec{A}_{0C} \in L_2(0, T, W(\sigma; \Omega_C))$ , удовлетворяющая равенству (4.2) при всех  $\vec{v} \in W(\sigma; \Omega_C)$  и начальному условию  $\vec{A}_{0C}(0) = \vec{a}$ . При этом  $\vec{A}_{0C} \in C(0, T, \{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3)$ , и если  $\vec{a} \in W(\sigma; \Omega_C)$ , то  $\vec{A}'_{0C} \in L_2(0, T, \{L_2(\sigma; \Omega_C)\}^3)$ .

Полагаем  $\vec{A}_0 = F\vec{A}_{0C}$ ,  $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_C = \vec{A}_{0C}$ .

Пусть  $\vec{A}$  – разность двух решений задачи (2.9), (2.3),  $\vec{A}_C(0) = 0$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{A}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} (\operatorname{div} \sigma \vec{A})^2 dx = 0,$$

откуда следует, что  $\vec{A} = 0$ , то есть решение единственное.

Теорема 2.1. доказывается аналогично.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть  $\vec{A} \in L_2(0, T, V)$  – решение задачи (2.8), (2.3),  $\vec{A}_\varkappa \in L_2(0, T, W)$  – решение задачи (2.9),  $\vec{A}_{\varkappa C}(0) = \vec{A}_C(0) + \vec{q}$ ,  $\vec{q} \in K(\operatorname{rot}; \Omega_C)$ . Положим  $\vec{u} = \vec{A}_\varkappa - \vec{A}$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ , где  $\vec{u}_1 \in L_2(0, T, V)$ ,  $\vec{u}_2 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W)$ . При этом  $\operatorname{div} \sigma \vec{u}_C = \operatorname{div}(\sigma \vec{u}_2)_C = \operatorname{div}(\sigma \vec{A}_\varkappa)_C$  и для всех  $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W$   $(\sigma \vec{u}_C, \vec{g}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma \vec{u}_2)_C, \vec{g}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma \vec{A}_\varkappa)_C, \vec{g}_C)_{2,\Omega_C}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{u}_1$  и  $(\sigma \vec{u}_C, \vec{v}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma \vec{u}_1)_C, \vec{v}_C)_{2,\Omega_C}$  для всех  $\vec{v} \in V$ ,  $\vec{u}_1(0) = 0$ .

Из (2.8), (2.9) вытекает, что для всех  $\vec{v} \in V$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{u}_1 \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{u}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dx = 0,$$

$\vec{u} = \vec{u}_2 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W)$ , то есть  $\operatorname{rot} \vec{A}_{\varkappa} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

Для всех  $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{u} \cdot \vec{g}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} \operatorname{div} \sigma \vec{u} \operatorname{div} \sigma \vec{g} dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g}) dx.$$

Получаем [15], что  $\vec{u}_C \in C(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega_C))$  и

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{u} \cdot \vec{u}) dx + \varkappa \int_{\Omega_C} (\operatorname{div} \sigma \vec{u})^2 dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{u}) dx.$$

Интегрируя от 0 до  $t \leq T$  и применяя оценку (3.11), получаем

$$\|\vec{u}(t)\|_{\sigma}^2 + \varkappa \|\operatorname{div} \sigma \vec{u}\|_{2, \Omega_C \times (0, t)}^2 \leq C^2(\Omega_C, \Omega) \varkappa^{-1} \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2, Q}^2 + \|\vec{q}\|_{\sigma}^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\vec{A}_{\varkappa} - \vec{A}\|_W &\leq (C^2(\Omega_C; \Omega) + 1)^{1/2} \|\operatorname{div} \sigma \vec{u}\|_{2, Q} \leq \\ &\leq (C^2(\Omega_C; \Omega) + 1)^{1/2} \varkappa^{-1/2} (C^2(\Omega_C, \Omega) \varkappa^{-1} \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2, Q}^2 + \|\vec{q}\|_{\sigma}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Если  $\vec{q} = 0$ , для  $t \in (0, T)$

$$\|\vec{A}_{\varkappa}(t) - \vec{A}(t)\|_{\sigma} \leq C(\Omega_C, \Omega) \varkappa^{-1/2} \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2, Q}.$$

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.4.

Пусть  $\vec{A} \in L_2(0, T, V)$  – решение задачи (2.8), (2.3), где  $\vec{a} \in V(\sigma; \Omega_C)$ ,  $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  – произвольная функция. Согласно лемме 3.5.,  $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$ , где  $\vec{v} \in V$ ,  $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ . Из (2.8) вытекает, что для почти всех  $t \in (0, T)$

$$\int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}) dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{w}) dx - \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{w}) dx.$$

Положим, в соответствии с леммой 3.1.,  $\vec{J}_1 = E_{\operatorname{div}} \vec{J}_I^{\text{ct}} \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{div}; \Omega))$ ,  $\vec{J}_2 = \vec{J}^{\text{ct}} - \vec{J}_1$ . Тогда  $\vec{J}_{2I} = 0$ ,

$$\int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g}) dx = \int_{\Omega_C} (\vec{J}_2 \cdot \vec{g}) dx.$$

Получаем  $\sigma^{-1} \vec{J}_{2C} = \vec{v}_1 + \operatorname{grad} \phi_0$ , где  $\vec{v}_1 \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C))$ ,  $\phi_0 \in L_2(0, T, H^1(\Omega_C))$ ,  $\int_{\Omega_C} \phi_0 dx = 0$ . Таким образом,

$$\int_{\Omega_C} (\vec{J}_2 \cdot \vec{g}) dx = \int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{v}_1 + \operatorname{grad} \phi_0) \cdot \vec{g}) dx = \int_{\Omega_C} (\sigma \operatorname{grad} \phi_0 \cdot \vec{g}) dx,$$

$$\int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}) dx = \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{w}) dx - \int_{\Omega_C} (\sigma \operatorname{grad} \phi_0 \cdot \vec{w}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{w}) dx.$$

Продолжим функции  $\sigma \operatorname{grad} \phi_0$ ,  $\sigma \partial \vec{A} / \partial t$  нулём в  $\Omega_I$ . Тогда  $\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ , то есть выполнено условие (2.2), причём

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_C = \vec{J}_C^{\text{ct}} - \sigma \operatorname{grad} \phi_0 - \frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{A}_C, \quad \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_I = \vec{J}_I^{\text{ct}}.$$

Пусть при почти всех  $t \in (0, T)$  функция  $\phi_1(t) \in H^1(\Omega_I)$  – решение задачи

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} \phi_1(t) = 0, \quad \phi_1(t)|_{\Gamma_C} = \phi_0(t)|_{\Gamma_C}, \quad \phi_1(t)|_{\Gamma} = 0.$$

Тогда  $\phi_1 \in L_2(0, T, H^1(\Omega_I))$ . Определим функцию  $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  соотношениями  $\phi_C = \phi_0$ ,  $\phi_I = \phi_1$ . По построению, справедливо равенство (2.1), то есть  $\vec{A}$ ,  $\phi$  – решение задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.5.

Пусть  $\vec{A} \in L_2(0, T, W)$  – решение задачи (2.9), (2.3). Ввиду теоремы 2.3., из доказательства теоремы 2.4. вытекает, что

$$\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega), \quad \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_I = \vec{J}_I^{\text{ct}}.$$

Определим функцию  $\phi_0 \in L_2(0, T, L_2(\Omega_C))$  соотношением

$$\phi_0 = -\varkappa \operatorname{div} \sigma \vec{A}_C.$$

Пусть  $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega_C)\}^3$ . Тогда  $\sigma^{-1} \vec{\psi} = \vec{v} + \vec{g}$ , где  $\vec{v} \in K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$ ,  $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega_C)$ . Так как  $\operatorname{div} \vec{\psi} = \operatorname{div} \sigma \vec{g}$ ,  $\vec{g} \in K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$ , то есть  $\vec{g} \in W(\sigma; \Omega_C)$ .

Пусть  $F : W(\sigma; \Omega_C) \rightarrow W$  – оператор продолжения, определённый леммой 3.3. Тогда  $F\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W$  и из равенства (2.9) получаем

$$\int_{\Omega_C} \phi_0 \operatorname{div} \vec{\psi} dx = \int_{\Omega_C} \phi_0 \operatorname{div} \sigma \vec{g} dx = - \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot F\vec{g}) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{g}) dx.$$

Для всех  $\vec{v} \in V(\sigma; \Omega_C)$  из (2.9) получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{v}) dx = \int_{\Omega_C} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) dx - \int_{\Omega_C} (\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{v}) dx.$$

Пусть, как при доказательстве теоремы 2.4.,  $\vec{J}^{\text{ct}} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ , где  $\vec{J}_1 \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{div}; \Omega))$  и  $\vec{J}_{2I} = 0$ . Ввиду плотности  $V(\sigma; \Omega_C)$  в  $K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \phi_0 \operatorname{div} \vec{\psi} dx &= - \int_{\Omega_C} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g}) dx - \int_{\Omega_I} (\vec{J}_1 \cdot F\vec{g}) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\vec{A} \cdot \vec{g}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{A} \cdot \vec{v}) dx = \\ &= - \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} (\vec{A} \cdot \vec{v}) dx + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{v}) dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} \phi_0 = \sigma^{-1} \vec{J}_C^{\text{ct}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_C - \sigma^{-1} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}_C.$$

Продолжая  $\phi_0$  до функции  $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$  так же, как при доказательстве теоремы 2.4., получаем утверждение теоремы.

Доказательство закончено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010, 347 p.
2. S. Meddahi, V. Selgas, “An  $H$ -based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem”, *App. Num. Math.*, **58** (2008), 1061–1083.
3. L. Arnold, B. Harrach, “A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **72** (2012), 558–576.
4. O. Biro, A. Valli, “The Coulomb gauged vector potential formulation for the eddy-current problem in general geometry: Well-posedness and numerical approximation”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 890–904.
5. A. Bossavit, “On the Lorenz gauge”, *COMPEL*, **18** (1999), 323–336.
6. T. Chen, T. Kang, G. Lu, L. Wu, “A  $(T, \psi) - \psi_e$  decoupled scheme for a time-dependent multiply-connected eddy current problem”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37** (2014), 343–359.
7. A. V. Kalinin, A. A. Tiukhtina, S. R. Lavrova, “Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, **158** (2016), 012046.
8. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, “Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла”, *Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2003, № 1, 21–38.
9. A. V. Kalinin, M. I. Sumin, A. A. Tyukhtina, “On the inverse problems of final observation for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation and stable sequential Lagrange principles of its solution”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:2 (2017), 18–40.
10. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, “Лр-оценки векторных полей”, *Известия Вузов. Математика*, 2004, № 3, 26–35.
11. А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, “Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями”, *Журнал СВМО*, **18**:4 (2016), 119–133.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8: Электродинамика сплошных сред*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1982, 621 с.
13. V. Girault, P. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1986, 374 p.
14. M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, Singapore, 1996, 396 p.
15. R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technoogy. V. 5: Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 739 p.

*Поступила 8.09.2017*

MSC2010 35Q61

## Modified gauge conditions for Maxwell equations in quasi-stationary magnetic approximation

© A. B. Kalinin<sup>4</sup>, A. A. Tyukhtina<sup>5</sup>, O. A. Izosimova<sup>6</sup>

**Abstract.** The initial-boundary value problem for the Maxwell equations in the quasi-stationary magnetic approximation with magnetic boundary conditions is studied. The case of heterogeneous media containing conductive and non-conductive inclusions is considered. The problem is formulated in terms of vector magnetic and scalar electric potentials. The special gauge conditions (modified Coulomb and Lorenz gauges) that allow to formulate problems of independent determination of vector magnetic potential are proposed. The correctness of the problem statement under general conditions on coefficients is proved. The possibility of Lions' theorem application is proved using estimates for scalar products of vector fields. The relation between solutions of the problems with different gauges is studied. The correspondence between the problem formulation for magnetic vector potential and the initial problem formulation for the vector magnetic potential and scalar electric potential is considered.

**Key Words:** Maxwell equations, quasi-stationary magnetic approximation, heterogeneous media, vector potential, gauge conditions

## REFERENCES

1. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010, 347 p.
2. S. Meddahi, V. Selgas, “An  $H$ -based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem”, *App. Num. Math.*, **58** (2008), 1061–1083.
3. L. Arnold, B. Harrach, “A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **72** (2012), 558–576.
4. O. Biro, A. Valli, “The Coulomb gauged vector potential formulation for the eddy-current problem in general geometry: Well-posedness and numerical approximation”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 890–904.
5. A. Bossavit, “On the Lorenz gauge”, *COMPEL*, **18** (1999), 323–336.
6. T. Chen, T. Kang, G. Lu, L. Wu, “A  $(T, \psi) - \psi_e$  decoupled scheme for a time-dependent multiply-connected eddy current problem”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37** (2014), 343–359.
7. A. V. Kalinin, A. A. Tiukhtina, S. R. Lavrova, “Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, **158** (2016), 012046.

<sup>4</sup> **Aleksey V. Kalinin**, Associate Professor of the Chair of Mathematical Physics and Optimal Control, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8558-0451>, avk@mm.unn.ru

<sup>5</sup> **Alla A. Tyukhtina**, Associate Professor of the Chair of Mathematical Modelling of Economical Processes, Institute of Economics and Entrepreneurship, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5723-9256>, kalinmm@yandex.ru

<sup>6</sup> **Olga A. Izosimova**, Graduate student, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3865-8281>, izosimova93@yandex.ru

8. A. V. Kalinin, A. A. Kalinkina, “[Quasistationary initial-boundary value problems for the system of Maxwell equations]”, *Vestnik Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upravl.*, **1** (2003), 21–38 (In Russ.).
9. A. V. Kalinin, M. I. Sumin, A. A. Tyukhtina, “On the inverse problems of final observation for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation and stable sequential Lagrange principles of its solution”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:2 (2017), 18–40.
10. A. V. Kalinin, A. A. Kalinkina, “Lp-estimates for vector fields”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, **3** (2004), 26–35 (In Russ.).
11. A. V. Kalinin, A. A. Tyukhtina, “[Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media with non-conductive and low conductive inclusions]”, *Journal SVMO*, **18**:4 (2016), 119–133 (In Russ.).
12. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics]*. V. 8: *Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamics of continuous media]*, Nauka, Moscow, 1982 (In Russ.), 621 p.
13. V. Girault, P. Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1986, 374 p.
14. M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, Singapore, 1996, 396 p.
15. R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technoogy*. V. 5: *Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 739 p.

Submitted 8.09.2017

УДК 519.65:538.945

## Математическое моделирование гармоник напряжения для вольтамперных характеристик с резкими особенностями

© Н. Д. Кузьмичев<sup>1</sup>, М. А. Васютин<sup>2</sup>, Е. А. Лапшина<sup>3</sup>, Д. А. Шилкин<sup>4</sup>

**Аннотация.** В работе выполнено математическое моделирование гармоник напряжения, возникающих в сверхпроводниках, которые находятся в резистивном состоянии при пропускании через них переменного гармонического тока. В резистивном состоянии вольтамперные характеристики сверхпроводника являются нелинейными и часто имеют резкие особенности, вызванные неустойчивостью. В связи с этим вольтамперные характеристики сверхпроводников, полученные на переменном и постоянном токах, сильно отличаются. Получены аналитические выражения амплитуды напряжения первой гармоники для широких пленок сверхпроводников второго рода с резкими особенностями типа скачка и излома в токовой зависимости вольтамперных характеристик. Численно рассчитаны зависимости амплитуд 1, 2, 3 и 5-й гармоник напряжения от величины постоянного и амплитуды переменного тока. Показано, что положения особенностей на токовых зависимостях амплитуд гармоник напряжения определяют важные характеристики сверхпроводника. Рассмотрена экспериментальная ВАХ первой гармоники монокристалла YBCO. На основании выполненного математического моделирования показано, что при токах выше критического из-за плохого теплообмена происходит перегрев монокристалла. Сопротивление монокристалла зависит от температуры, растет пропорционально току и вольтамперная характеристика имеет параболическую зависимость.

**Ключевые слова:** вольтамперная характеристика (ВАХ) сверхпроводника, резкие особенности ВАХ, амплитуды напряжения гармоник, ВАХ гармоник напряжения, критический ток.

### 1. Введение

Хорошо известно, что исследование физических свойств каких-либо материалов при переменном воздействии является эффективнее, чем при статическом воздействии [1 – 5]. Это связано с тем, что переменные сигналы легче усиливать и аппаратура для их измерения является чувствительнее. Кроме того, если зависимость изучаемой характеристики материала имеет такие особенности, как скачок, излом или другие резкие изменения функциональных свойств, то данные, полученные при статическом и переменном воздействии, сильно отличаются. Примерами могут служить вольтамперные характеристики (ВАХ)

<sup>1</sup> Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru.

<sup>2</sup> Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru.

<sup>3</sup> Лапшина Елена Анатольевна, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8828-273X>, e.lapshina2010@yandex.ru.

<sup>4</sup> Шилкин Дмитрий Алексеевич, инженер кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com.

сверхпроводников, полученные на переменном и постоянном токе [6 – 8]. Если через среду, имеющую нелинейную проводимость пропустить гармонический электрический ток, то напряжение, возникающее в среде, будет негармоническим (в его составе будут высшие гармоники). Зависимости напряжений высших гармоник от амплитуды переменного тока (ВАХ гармоник) содержат информацию об особенностях ВАХ на постоянном токе, что позволяет определять важные характеристики материала, такие как критический ток, ток перегрева и т. д. [1 – 8]. Переход сверхпроводника из сверхпроводящего в нормальное состояние является фазовым переходом второго рода и сопровождается скачком в ряде физических характеристик. Например, ВАХ сверхпроводника испытывает скачок при пропускании тока, равного критическому току  $I_c$ , и при токах  $|I|$ , выше критического, является линейной в идеальном случае. В действительности же у «подножия» и «вершины» скачка ВАХ имеется нелинейность, обусловленная вихрями Абрикосова, флуктуациями и др.[1, 6, 7, 9, 10]. В эксперименте и практических приложениях используются сверхпроводящие материалы в виде тонких пленок. В пленках переход осуществляется через широкое резистивное состояние и часто является нелинейным и неустойчивым, что приводит к скачкам, изломам и нелинейным зависимостям ВАХ [9, 10]. Ниже рассматриваются два простых случая: 1 – скачкообразная ВАХ и 2 – ВАХ с изломом.

## 2. Скачкообразная ВАХ

Переход сверхпроводника в нормальное состояние, как было указано во введении, сопровождается скачком в ВАХ. В этом простом случае ВАХ имеет следующий вид (2.1):

$$V(I) = \begin{cases} 0, & |I| \leq I_c; \\ R \cdot I, & |I| > I_c. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $R$  сопротивление нормального состояния,  $I_c$  – критический ток.

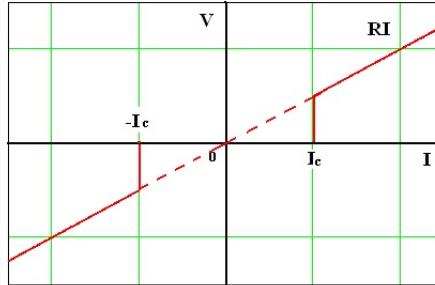


Рисунок 2.1

Скачкообразная ВАХ сверхпроводника

При пропускании через образец сверхпроводника переменного гармонического тока амплитудой  $i$ , превышающей величину  $I_c$  (т. е.  $i \cdot \cos(t)$ , где  $t = \omega \tau$ ,  $\omega$  – частота и  $\tau$  – время), напряжение, возникающее на образце, становится негармоническим и в своем составе будет иметь первую и высшие гармоники. Напряжения гармоник зависят от амплитуды тока  $i$  нелинейно. На рисунках (2.2) и (2.3) приведены ВАХ первой  $V_1$ , третьей  $V_3$  и пятой  $V_5$  гармоник. Зависимости  $V_1$ ,  $V_3$  и  $V_5$  определялись численно с помощью программного комплекса Mathcad по формуле

$$V_n(i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(i, t) \cos(nt) dt. \quad (2.2)$$

Здесь  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Напряжения четных гармоник в силу нечетной симметрии ВАХ отсутствовали. Аналитически найденная первая гармоника напряжения для ВАХ (2.1) имеет вид

$$V1(i) = \begin{cases} 0, & i \leq I_c; \\ \frac{R \cdot i}{\pi} [(\pi + t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2) \cdot \sin(t_1 - t_2)], & i > I_c. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь  $t_1 = \arccos\left(\frac{I_c}{i}\right)$ ,  $t_2 = \arccos\left(-\frac{I_c}{i}\right)$ .

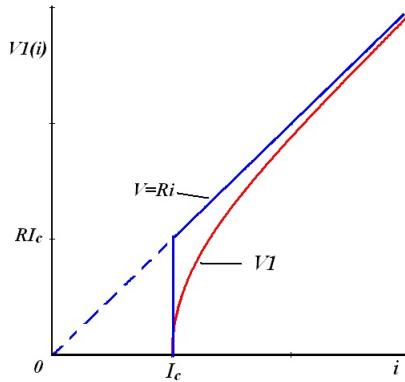


Рисунок 2.2

ВАХ первой гармоники  $V1(i)$ , вычисленная по формулам (2.2) и (2.3). На графике, кроме зависимости  $V1(i)$ , приведена ВАХ на постоянном токе  $V(i) = Ri$

Из рисунка (2.2) видно, что  $V1(i)$  начинается с нуля при  $i = I_c$  и асимптотически стремится к  $V(i)$ . Как видно из формулы (2.3) зависимость  $V1(i)$  является суммой линейного и нелинейного членов. Нелинейный член при  $i \rightarrow \infty$  стремится к нулю, т. е.  $V1(i) \rightarrow Ri$ . Зависимости  $V3(i)$  и  $V5(i)$  (2.3) являются сильно нелинейными и отличны от нуля при  $i > I_c$ , вблизи  $I_c$  имеют максимум и стремятся к нулю при возрастании  $i$ . Кроме того, при  $i \approx 0.27 I_c$  фаза  $V5(i)$  скачкообразно изменяется на величину  $\pi$ ,  $V5(i)$  становится отрицательной и проходит через минимум. Более высокие гармоники около  $I_c$  имеют узкие максимумы, поэтому положение максимумов высших гармоник может служить критерием определения значения  $I_c$ .

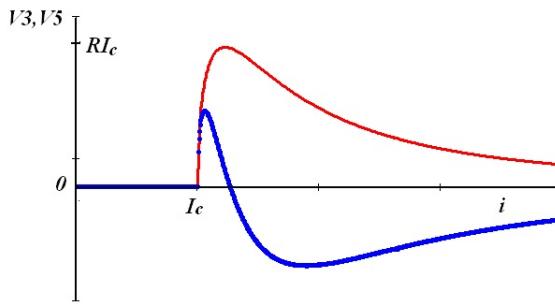


Рисунок 2.3

ВАХ 3-ей и 5-ой гармоник

Если через образец сверхпроводника пропустить одновременно постоянный ток  $I$  и переменный ток амплитудой  $i$  (т. е.  $J = I + i \cdot \cos(t)$ ), то амплитуды гармоник будут функциями двух переменных  $I$  и  $i$  т. е.  $Vn = Vn(I, i)$ . Для практики большое значение имеют функции  $Vn(I, i = const)$  при малых значениях  $i$ , так как  $Vn(I)$  качественно

подобны производным вольтамперных характеристик  $d^n V(I)/dI^n$ . Рассмотрим зависимость  $V1(I)$  при амплитуде модуляции  $i = 0.125I_c$  (2.4).

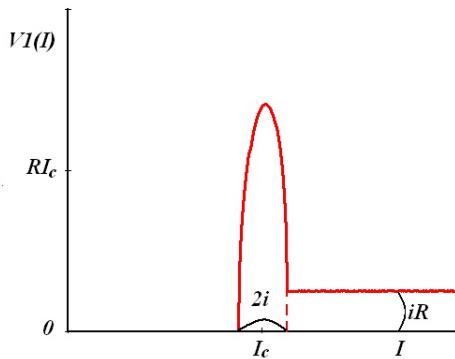


Рисунок 2.4

Зависимость амплитуды 1-ой гармоники  $V1(I)$  от величины постоянного тока при амплитуде модуляции тока  $i = (1/8)I_c$

Зависимость  $V1(I)$  получена численно. Видно, что  $V1(I)$  вблизи  $I_c$  имеет колоконообразный вид с шириной у основания, равной  $2i$ . Положение максимума совпадает со значением  $I_c$  и будет определять критерий его нахождения. При стремлении  $i$  к нулю ширина максимума стремится к нулю, а высота к бесконечности. Таким образом, функция  $V1(I)$  при  $i \rightarrow 0$  стремится к дельта-функции  $\delta(I)$ , т. е. к обобщенной производной ступенчатой функции (2.4).

На рисунке (2.5) приведены численно определенные зависимости трех гармоник напряжения от постоянного тока  $I$ : 1, 2 и 3-ей. Первая гармоника приведена для сравнения. Четные гармоники, в частности 2-ая, появляются при  $I \neq 0$  вследствие нарушения нечетной симметрии ВАХ при ее смещении заданным током  $I$ . Из рисунка видно, что зависимость  $V2(I)$  похожа на вторую производную  $d^2V(I)/dI^2$ , а  $V3(I)$  качественно совпадает с третьей производной  $d^3V(I)/dI^3$ . При уменьшении амплитуды модуляции функции  $Vn(I)$  стремятся к  $d^nV(I)/dI^n$  [4,5,11 – 13].

Таким образом, экспериментальное изучение зависимостей высших гармоник от величин постоянного и переменного токов позволяет качественно определять и рассчитывать ВАХ и находить значение  $I_c$ .

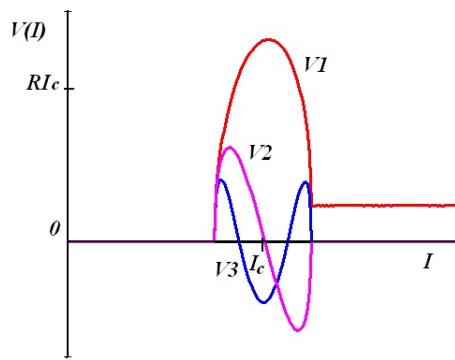


Рисунок 2.5

Зависимости амплитуд 1-ой, 2-ой и 3-ей гармоник  $V1(I)$  от величины постоянного тока при амплитуде модуляции тока  $i = (1/8)I_c$

### 3. ВАХ с изломом

Как было отмечено во введении, важное практическое значение имеют сверхпроводящие пленки. Переход в нормальное состояние в пленках происходит через широкое так называемое резистивное состояние. Сопротивление пленки в резистивном состоянии отлично от нуля, но меньше сопротивления нормального состояния. При достижении током критического значения  $I_c$  у краев сверхпроводящей пленки зарождаются цепочки вихрей Абрикосова противоположной полярности, которые двигаются поперек пленки навстречу друг другу и взаимно уничтожаются посреди пленки. Движение вихрей является вязким и приводит к падению напряжения  $V$  на пленке, которое в общем случае нелинейно зависит от тока. Линейная плотность тока  $j = I/b$  описывается в этом случае обобщенным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением Лондонов [9]:

$$8\pi \frac{\lambda_{eff}}{b} \frac{dj}{dx} + 2 \int_{-1}^{+1} \frac{j(x')dx'}{x' - x} = \left( \frac{\eta E}{j\phi_0} \right) sign(x). \quad (3.1)$$

Здесь  $b$  – ширина пленки,  $\lambda_{eff}$  – эффективная глубина проникновения магнитного поля,  $x$  – координата, отсчитываемая от середины пленки в единицах  $b$ ,  $\eta$  – коэффициент вязкого движения вихрей,  $\phi_0$  – квант магнитного потока и  $E$  ( $V \sim E$ ) – напряженность электрического поля.

Когда  $I - I_c \ll I_c$ , то с учетом малости градиентного члена в уравнении (3.1) и упрощения уравнения при  $x = \pm 1$  путем замены  $1 - x^2 \sim \lambda_{eff}/b$  получим линейную ВАХ с изломом вида  $E \sim I - I_c$ . Для дальнейшего использования в расчетах гармоник напряжения нечетно симметричную ВАХ для данного случая выразим формулой [9,10]:

$$V(I) = \begin{cases} 0, |I| \leq I_c; \\ R \cdot [I - I_c \cdot sign(I)], |I| > I_c. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь  $R$  является сопротивлением вязкого течения вихрей. График ВАХ для этого случая изображен на рисунке (3.1). Видно, что ВАХ при  $I = I_c$  имеет излом.

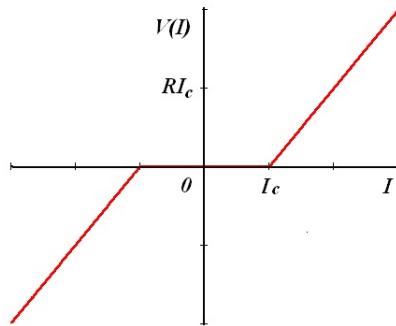


Рисунок 3.1

ВАХ для случая вязкого движения вихрей Абрикосова, порожденных транспортным током, протекающим вдоль пленки (3.2)

Напряжение первой гармоники, полученное аналитически из формулы (2.2), имеет вид

$$V1(i) = \begin{cases} 0, i \leq I_c; \\ \frac{R \cdot i}{\pi} [(\pi + t_1 - t_2) + \frac{1}{2} (\sin(2t_1) - \sin(2t_2))] - \frac{2RI_c}{\pi} [\sin(2t_1) + \sin(2t_2)], i > I_c. \end{cases} \quad (3.3)$$

На рисунке (3.2) приведен график зависимости  $V1(i)$ , найденный численно (2.2) и аналитически (3.3). Кроме того, для сравнения на данном рисунке приведена ВАХ пленки на постоянном токе (3.2). Из рисунка видно, что зависимость  $V1(i)$  около  $I_c$  является нелинейной и асимптотически не стремится к  $V(I)$ , становясь линейной.

ВАХ 3-ей и 5-ой гармоник приведены на рисунке (3.3). Видно, что  $V3(i)$  и  $V5(i)$  отличны от нуля при  $i > I_c$  и являются нелинейными. При  $i \rightarrow \infty$  величины  $V3$  и  $V5$  стремятся к постоянным значениям, отличным от нуля.

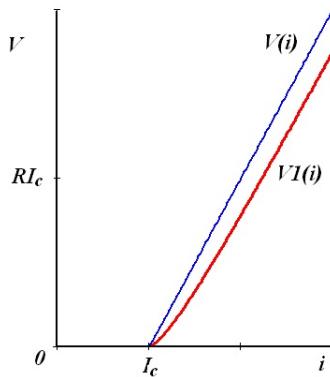


Рисунок 3.2

ВАХ первой гармоники  $V1(i)$ . Для сравнения на рисунке приведена ВАХ на постоянном токе.

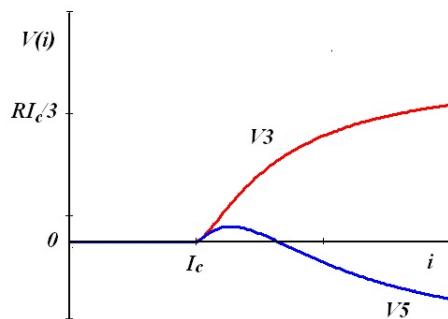


Рисунок 3.3

ВАХ 3-ей и 5-ой гармоник для случая вязкого движения вихрей

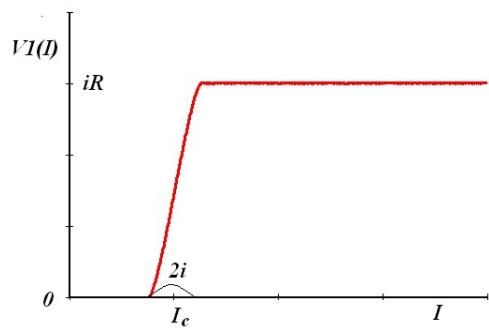


Рисунок 3.4

Зависимость  $V1(I)$  для ВАХ (3.1) при фиксированной амплитуде модуляции  $i$

На рисунках (3.4) и (3.5) приведены зависимости амплитуд напряжений 1, 2 и 3-ей гармоник от постоянного тока  $I$ , определенные численно для вольтамперной характеристики (3.2) при фиксированной амплитуде модуляции. Видно, что, как и в случае ВАХ (2.1), при  $i \rightarrow 0$  гармоники напряжения определяют соответствующие им производные ВАХ (3.2) на постоянном токе.

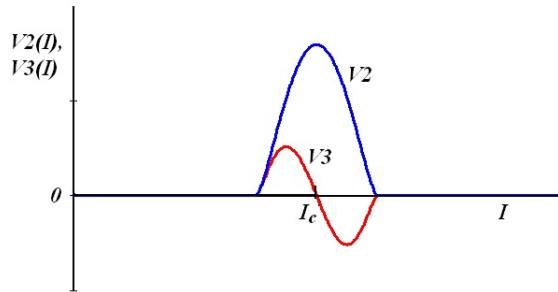


Рисунок 3.5

Зависимости  $V2(I)$  и  $V3(I)$  для ВАХ (3.1) при  $i = const$

#### 4. Экспериментальная ВАХ

Рассмотрим экспериментальную ВАХ первой гармоники монокристалла  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$  (YBCO) в магнитном поле приведенную на рисунке (4.1). Из рисунка видно, что данная зависимость качественно совпадает с  $V1(I)$  приведенной на рисунке (3.4), за исключением области, расположенной справа от скачка, обусловленного превышением суммарного тока (величины постоянного и амплитуды переменного тока) значения  $I_c = 0.24A$  и переходом в нормальное состояние. В этой области ВАХ первой гармоники изменяется от  $I$  практически линейно. Это означает, что ВАХ на постоянном токе  $V(I)$  имеет квадратичную зависимость т. е.  $V \sim I^2$ .

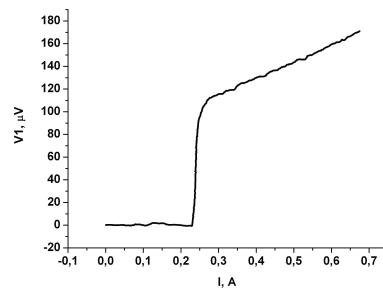


Рисунок 4.1

Экспериментальная ВАХ первой гармоники монокристалла  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$  в магнитном поле напряженностью 323 Ое при температуре 84 К. Амплитуда модуляции тока составляла

$$i = 18.3mA, \text{ частота} - 1Hz$$

Зависимости подобного рода наблюдаются в случае перегрева образца. Т. е. в образце выделяется джоулево тепло, приводящее к нагреву образца. Сопротивление образца зависит от температуры и растет пропорционально току. В итоге ВАХ будет иметь парabolicескую зависимость.

## 5. Заключение

Таким образом, математическое моделирование амплитуд напряжений первой и высших гармоник для вольтамперных характеристик сверхпроводников со скачком и изломом показало, что положения особенностей на зависимостях амплитуд гармоник напряжения определяют важные характеристики сверхпроводника. Кроме того, по виду зависимостей гармоник напряжения можно определять ВАХ сверхпроводника.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Солимар, "Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение", М.: Изд-во Мир, 1974.
2. Н. Д. Кузьмичев, "Поведение намагниченности поликристаллических образцов  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  в слабых магнитных полях", *Письма в ЖТФ*, **17** (1991), 56.
3. Н. Д. Кузьмичев, "Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников", *ЖТФ*, **64** (1994), 63.
4. Н. Д. Кузьмичев, "Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции", *Письма в ЖТФ*, **20** (1994), 39.
5. Н. Д. Кузьмичев, "Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости", *Журнал СВМО*, **13** (2011), 70.
6. М. А. Васютин, А. И. Головашкин, Н. Д. Кузьмичев, "Нелинейность вольтамперных характеристик монокристаллов  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  и переход Березинского-Костерлица-Таулеса", *ФТТ*, **48** (2006), 2128.
7. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, A. I. Golovashkin, "YBCO single crystals I-V characteristics nonlinearity and Nelson-Kosterlitz jump", *Physica C*, **849** (2007), 460-462.
8. М. А. Васютин, Н. Д. Кузьмичев, "Нелинейность ВАХ ВТСП  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ , определенная с помощью модуляционной методики", *Письма в ЖТФ*, **18** (1992), 5.
9. Л. Г. Асламазов, С. В. Лемпицкий, "Влияние магнитного поля на резистивное состояние широкой сверхпроводящей пленки", *ЖЭТФ*, **84** (1983), 2216.
10. Б. Ю. Блок, С. В. Лемпицкий, *ФТТ*, **26** (1984), 457.
11. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Е. А. Лапшина, Д. А. Шилкин, "Математическое моделирование температурной зависимости второго критического поля тонких плёнок нитрида ниобия", *Журнал СВМО*, **18** (2016), 134.
12. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Д. А. Шилкин, "Верхнее критическое поле тонких плёнок нитрида ниобия", *ФТТ*, **58** (2016), 231.

13. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Д. А. Шилкин, “Экспериментальное определение производной вольт-амперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа”, *ФТП*, **50** (2016), 830.

*Поступила 19.10.2017*

MSC2010 82D55

# Mathematical modeling of voltage harmonics for current-voltage characteristics with singularities

© N. D. Kuzmichev<sup>5</sup>, M. A. Vasyutin<sup>6</sup>, E. A. Lapshina<sup>7</sup>, D. A. Shilkin<sup>8</sup>

**Abstract.** In the paper mathematical modeling of the voltage harmonics occurring in superconductor is performed. It is assumed that the superconductor is in the resistive state when an alternating harmonic current passes through them. In such the I-V characteristics of a superconductor are nonlinear and often have singularities caused by instability. For this reason, the I-V characteristics of superconductors obtained for alternating and direct currents are very different. Analytical expressions for the voltage amplitude of the first harmonic for wide films of type-II superconductors with singularities of jump-type and break-type in the current dependence of the I-V characteristics are obtained. The dependences of the amplitudes of the 1st, 2nd, 3rd and the 5th voltage harmonics on the value of the constant current and on the amplitude of the alternating current are calculated numerically. It is shown that the positions of the current dependencies' singularities determine important characteristics of the superconductor. The experimental I-V characteristic of the first harmonic of YBCO single crystal is considered. Basing on the mathematical modeling performed, it is shown that at currents above the critical one, the single crystal overheats because of poor heat transfer. The resistance of a single crystal depends on the temperature and increases in proportion to the current; the I-V characteristic has a parabolic relationship.

**Key Words:** current-voltage characteristic of superconductors, singularities of the current-voltage characteristic, amplitude voltage of harmonic, current-voltage characteristic of the voltage harmonics, critical current.

## REFERENCES

1. L. Solimar, *Superconducting Tunneling and Application*, Izd. Mir., Moscow, 1974 (In Russ.).
2. N. D. Kuzmichev, "The behavior of the magnetization of polycrystalline  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  samples in weak magnetic fields", *Technical Physics Letters*, **17** (1991), 56 (In Russ.).
3. N. D. Kuzmichev, "Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: analysis of the magnetization harmonic spectrum by the example of high-temperature superconductors", *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, **64** (1994), 63 (In Russ.).

<sup>5</sup> Nikolay D. Kuzmichev, Professor of Department of Computer Science and CAD-technology Ruzaevsky engineering Institute (branch) National Research Mordovia State University (68 Bolshevikskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru.

<sup>6</sup> Mikhail A. Vasyutin, Docent of Department of Computer Science and CAD-technology Ruzaevsky engineering Institute (branch) National Research Mordovia State University (68 Bolshevikskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru.

<sup>7</sup> Elena A. Lapshina, Docent of Department of Computer Science and CAD-technology Ruzaevsky engineering Institute (branch) National Research Mordovia State University (68 Bolshevikskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8828-273X>, e.lapshina2010@yandex.ru.

<sup>8</sup> Dmitri A. Shilkin, Engineer of Department of Computer Science and CAD-technology Ruzaevsky engineering Institute (branch) National Research Mordovia State University (68 Bolshevikskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com.

4. N. D. Kuzmichev, "The modulation technique for reconstructing the original dependencies and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes", *Technical Physics Letters*, **20** (1994), 39 (In Russ.).
5. N. D. Kuzmichev, "Application of the Taylor-Fourier series for numerical and experimental calculation of investigation dependance derivatives", *SVMO*, **13** (2011), 70 (In Russ.).
6. M. A. Vasyutin, A. I. Golovashkin, N. D. Kuzmichev, "Nonlinearity of the current-voltage characteristics for  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  single crystals and the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition", *Physics of the Solid State*, **48** (2006), 2128 (In Russ.).
7. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, A. I. Golovashkin, "YBCO single crystals I-V characteristics nonlinearity and Nelson-Kosterlitz jump", *Physica C*, **849** (2007), 460-462 (In Russ.).
8. M. A. Vasyutin, N. D. Kuzmichev, "Nonlinearity of the current-voltage characteristics of high-temperature superconductivity  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ , determined by the modulation technique", *Technical Physics Letters*, **18** (1992), 5 (In Russ.).
9. L. G. Aslamazov, S. V. Lempickiy, "Resistive state in broad superconducting films", *JETP*, **84** (1983), 2216.
10. B. Yu. Blok, S. V. Lempickiy, *Physics of the Solid State*, **26** (1984), 457 (In Russ.).
11. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. A. Lapshina, D. A. Shilkin, "Mathematical modeling of temperature dependence of the second critical field of thin films of niobium nitride", *SVMO*, **18** (2016), 134 (In Russ.).
12. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, "Upper critical field of niobium nitride thin films", *Physics of the Solid State*, **58** (2016), 231 (In Russ.).
13. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, "Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure using modulation Fourier analysis", *Semiconductors*, **50** (2016), 830 (In Russ.).

Submitted 19.10.2017

УДК 517.9

## Численные методы решения задач в нелинейных макроэкономических интегральных моделях

© А. Н. Тында<sup>1</sup>, Н. Ю. Кудряшова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе предлагается ряд методов численного исследования интегральных динамических систем, описываемых нелинейными интегральными уравнениями специального вида. Первая группа задач связана с решением системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в нижних пределах интегрирования. Предложено два эффективных численных метода — прямой и итерационный, основанный на линеаризации интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Вторая группа рассмотренных задач связана с построением оптимальных траекторий в макроэкономических моделях класса VCM. Предложено два оригинальных подхода решения таких задач оптимального управления, позволяющих численно определить экстремали в первом приближении. Предложенная методика построения численных решений позволяет получать и более точные приближения при использовании соответствующих аппроксимаций. В заключении приведены результаты решения ряда модельных задач, позволяющие судить об эффективности предложенных подходов.

**Ключевые слова:** системы нелинейных интегральных уравнений, модели VCM, метод Ньютона-Канторовича, нелинейные задержки, экстремали функционала, аппроксимация интегралов.

### 1. Введение

При моделировании макроэкономических и производственных процессов, таких как задачи определения оптимального срока службы производственного оборудования и его замены в производстве, применяются интегральные динамические системы. Также они используются в теории восстановления и математической экологии [1]–[4].

Такие системы описываются линейными и нелинейными интегральными уравнениями Вольтерра и их системами специального вида. При этом наиболее полные модели такого класса содержат разного вида временные задержки. В отличии от хорошо изученных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с задержками, модели, основанные на интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях с задержками, остаются недостаточно разработанными. Например, в теории автоматического управления мало исследована интегральная модель нелинейной динамической системы с неизвестными величинами задержки. В работе [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек.

В последнее время также возрос интерес к одному из применений такого рода моделей, а именно к моделированию оптимального срока службы основного оборудования, как

<sup>1</sup> Тында Александр Николаевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

<sup>2</sup> Кудряшова Наталья Юрьевна, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0789-4559>, math.kudryashova@yandex.ru

правило, с учетом технологических изменений. В экономической теории такие модели известны как Vintage Capital Models (VCM) [4]. Математически модели VCM описываются с помощью нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в пределах интегрирования. Такие модели играют важную роль при изучении экономико-технологических процессов. Несмотря на большой практический интерес к моделям VCM, их оптимальная динамика полностью не изучена [4],[6] и [7].

## 2. Системы нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} x(t) = \int_{y(t)}^t H(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \\ \int_{y(t)}^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad t_0 < T \leq \infty, \\ c(t) = \int_{y(t)}^t L(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (2.1)$$

относительно неизвестных функций  $x(t), y(t)$  и  $c(t)$  с заданными начальными условиями

$$y(t_0) = Y_0 < t_0, \quad x(\tau) \equiv \varphi_0(\tau), \quad \tau \in (-\infty, t_0],$$

где  $f(t)$  – прирост производительности в единицу времени новых рабочих мест, создаваемых в момент  $t$ ;  $x(t)$  – количество новых рабочих мест, создаваемых за единицу времени в момент  $t$ ;  $y(t)$  – временные границы ликвидации устаревших рабочих мест;  $c(t)$  – объем выпуска предметов потребления за единицу времени в момент  $t$ . Также здесь предполагается, что заданные функции  $H(t, \tau, x), K(t, \tau, x), L(t, \tau, x), f(t), \varphi_0(t)$  непрерывны, неотрицательны при  $\tau \in (-\infty, T)$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in [0, \infty)$  и удовлетворяют уравнениям системы (2.1) в точке  $t = t_0$ .

В работе Ю. П. Яценко [8] приведена и доказана теорема о существовании и единственности решения системы (2.1).

### 2.1. Итерационный метод

Благодаря тому, что неизвестная функция  $c(t)$  не содержится в первых двух уравнениях системы (2.1), целесообразно решать подсистему вида

$$\begin{cases} x(t) = \int_{y(t)}^t H(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \\ \int_{y(t)}^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T], \quad t_0 < T \leq \infty. \quad (2.2)$$

После получения значений  $(x(t), y(t))$ , подставив их в третье уравнение системы (2.1), находим значение  $c(t)$ .

Построим приближенный метод решения системы (2.2) на отрезке  $[t_0, T]$ . Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} P_1(x(t), y(t)) \equiv x(t) - \int_{y(t)}^t H(t, \tau, x(\tau)) d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) \equiv f(t) - \int_{y(t)}^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau = 0, \end{cases} \quad 0 < t_0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

или в операторной форме

$$P(X) = (P_1(X), P_2(X)) = 0, \quad X = (x(t), y(t)). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) будем решать модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Предложенный ниже алгоритм является обобщением итерационно-проекционного метода, построенного в [9] и [10], на случай нелинейности по переменной  $x$  ядер  $H(t, \tau, x)$  и  $K(t, \tau, x)$  интегральных уравнений системы (2.1).

Итерационный процесс примет вид

$$X_{m+1} = X_m - [P'(X_0)]^{-1}(P(X_m)), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

где  $X_0 = (x_0(t), y_0(t))$  — начальное приближение.

Нетрудно показать, что производная  $P'(X_0)$  нелинейного оператора  $P(X)$  в точке  $X_0$  определяется матрицей из частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система относительно поправки на первой итерации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial x(t)} \Big|_{(x_0, y_0)} (\Delta x(t)) + \frac{\partial P_1}{\partial y(t)} \Big|_{(x_0, y_0)} (\Delta y(t)) = -P_1(x_0(t), y_0(t)), \\ \frac{\partial P_2}{\partial x(t)} \Big|_{(x_0, y_0)} (\Delta x(t)) + \frac{\partial P_2}{\partial y(t)} \Big|_{(x_0, y_0)} (\Delta y(t)) = -P_2(x_0(t), y_0(t)), \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $\Delta x(t) = x_1(t) - x_0(t)$ ,  $\Delta y(t) = y_1(t) - y_0(t)$ ;

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_1(x_0 + sx, y_0) - P_1(x_0, y_0)}{s} = x(t) - \int_{y_0(t)}^t H_3(t, \tau, x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = H(t, y_0(t), x_0(y_0(t)))y(t); \quad \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = - \int_{y_0(t)}^t K_3(t, \tau, x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = K(t, y_0(t), x_0(y_0(t)))y(t);$$

$$H_3(t, \tau, x_0) = \frac{\partial H(t, \tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}, \quad K_3(t, \tau, x_0) = \frac{\partial K(t, \tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}.$$

Предполагается, что ядра  $H$  и  $K$  дифференцируемы по переменной  $x$  в точке  $x_0$ . Таким образом, система (2.6) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta x(t) - \int_{y_0(t)}^t H_3(t, \tau, x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + H(t, y_0(t), x_0(y_0(t)))\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad\qquad = \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau, x_0(\tau))d\tau - x_0(t), \\ - \int_{y_0(t)}^t K_3(t, \tau, x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + K(t, y_0(t), x_0(y_0(t)))\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad\qquad = \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau, x_0(\tau))d\tau - f(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Система интегральных уравнений (2.7) — линейна, решая ее относительно  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$ , находим  $(x_1(t), y_1(t))$ . Подставляя полученные значения  $(x_1(t), y_1(t))$  в третье уравнение системы (2.1), находим значение  $c_1(t)$ . Продолжив этот процесс, получим последовательность приближенных решений  $(x_m(t), y_m(t), c_m(t))$ , определяемых из систем

$$\begin{cases} \Delta x_m(t) - \int_{y_0(t)}^t H_3(t, \tau, x_0(\tau)) \Delta x_m(\tau) d\tau + H(t, y_0(t), x_0(y_0(t))) \Delta y_m(t) = \\ \quad = \int_{y_{m-1}(t)}^t H(t, \tau, x_{m-1}(\tau)) d\tau - x_{m-1}(t), \\ - \int_{y_0(t)}^t K_3(t, \tau, x_0(\tau)) \Delta x_m(\tau) d\tau + K(t, y_0(t), x_0(y_0(t))) \Delta y_m(t) = \\ \quad = \int_{y_{m-1}(t)}^t K(t, \tau, x_{m-1}(\tau)) d\tau - f(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t)$ ,  $\Delta y_m(t) = y_m(t) - y_{m-1}(t)$ ,  $m = 2, 3, \dots$ .

Таким образом, для нахождения каждого следующего приближения требуется решение системы двух линейных интегральных уравнений Вольтерра. При этом ядра уравнений в левых частях на каждом шагу остаются неизменными.

## 2.2. Уравнения Вольтерра с переменной задержкой

На каждом шаге итерационного процесса (2.8) возникает необходимость решения линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода следующего вида

$$x(t) - \int_{y(t)}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau = F(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.9)$$

где  $y(t) < t$  — неубывающая функция,  $y(t_0) = Y_0 < t_0$ ,  $x(t) = \varphi_0(t)$  при  $t \leq t_0$ .

Для решения уравнения (2.9) воспользуемся методом последовательных приближений:

$$x_{n+1}(t) = F(t) + \int_{y(t)}^t h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \quad x_0(t) = F(t). \quad (2.10)$$

Введем на отрезке  $[t_0, T]$  равномерную сетку  $(w)$ , состоящую из точек  $t_i = t_0 + (T - t_0) \frac{i}{N}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Каждый из интервалов  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = \overline{1, N}$ , разобьем в свою очередь точками

$$t_k^j = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} + \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \xi_j, \quad t_k^0 = t_{k-1}, \quad j = \overline{1, r-2}, \quad k = \overline{1, N},$$

где  $\xi_j$  — нули многочлена Лежандра степени  $(r-2)$ , а параметр  $r$  зависит от гладкости входящих в интегральное уравнение (2.9) функций.

Значения очередного приближения в точках  $t_k^j$  будем определять из равенств

$$x_{n+1}(t_k^j) = F(t_k^j) + \int_{y(t_k^j)}^{t_k^j} h(t_k^j, \tau) x_n(\tau) d\tau, \quad j = \overline{0, r-2}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.11)$$

Приближенное решение на каждой итерации представляет собой непрерывный полиномиальный сплайн  $\tilde{x}_n(t)$ , составленный из  $N$  интерполяционных полиномов степени  $(r-1)$ , построенных по узлам  $t_k^j$  и  $t_k$ ,  $j = \overline{0, r-2}$ , для каждого интервала  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Введем на сетке  $(w)$  целочисленную функцию

$$V_w(t) = \begin{cases} l, & \text{при } t \in (t_{l-1}, t_l], l = \overline{1, N}, \\ 0, & \text{при } t \notin (t_0, T], \end{cases}$$

и обозначим  $V_{k,j} = V_w(y(t_k^j))$ . Тогда равенства (2.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t_k^j) &= F(t_k^j) + \int_{y(t_k^j)}^{t_{V_{k,j}}} h(t_k^j, \tau) \varphi_0(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{i=V_{k,j}+1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} h(t_k^j, \tau) x_n(\tau) d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t_k^j} h(t_k^j, \tau) \tilde{x}_n(\tau) d\tau, \quad j = \overline{0, r-2}, k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Первый интеграл по отрезку  $[y(t_k^j), t_{V_{k,j}}]$  в формуле (2.12) вычисляем по квадратурной формуле Гаусса с  $(r-2)$  узлами, а в случае если  $t_{V_{k,j}} - y(t_k^j) > \frac{T-t_0}{N}$  — по составной формуле Гаусса с шагом, не большим  $\frac{T-t_0}{N}$ . Для вычисления остальных интегралов в (2.12) также используется формула Гаусса с  $(r-2)$  узлами, при этом в качестве промежуточных значений приближения  $x_n(t)$  при аппроксимации последнего интеграла используются значения сплайна  $\tilde{x}_n(t)$ .

### 2.3. Прямой метод

Систему (2.2) также можно решить, обобщая прямой численный метод первого порядка точности, предложенный в [11]. Это связано с тем, что при применении итерационных методов важную роль играет выбор достаточно хорошего начального приближения, обеспечивающего сходимость процесса.

Основная сложность построения численного метода для системы (2.2) лежит в аппроксимации интегралов квадратурными суммами. Так как одна из неизвестных функций содержится в пределе интегрирования, длина интервала интегрирования остается неизвестной, даже при фиксированных значениях  $t = t_k$ .

Опишем численный метод решения системы (2.2), основанный на кусочно-постоянной аппроксимации точного решения  $(x(t), y(t))$  с точностью  $O(\frac{1}{N})$ .

Разделим интервал планирования  $[t_0, T]$  на  $N$  частей узлами

$$t_k = t_0 + (T - t_0) \frac{k}{N}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Решения  $x(t)$  и  $y(t)$  будем аппроксимировать кусочно-постоянными функциями  $x_N(t)$  и  $y_N(t)$ , построенными на значениях  $x(t_k)$  и  $y(t_k)$ ,  $k = \overline{0, N}$ .

Потребуем, чтобы в точках  $t = t_k$  уравнения системы (2.1) обращались в равенства

$$\begin{cases} x(t_k) = \int_{y(t_k)}^{t_k} H(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau, \\ \int_{y(t_k)}^{t_k} K(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t_k), \end{cases} \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.13)$$

Заметим, что значения функций  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $0 < t \leq t_0$  считаются известными (заданная предыстория).

Обозначим через  $v_k$  номер сегмента, на который попадает значение  $y_k = y(t_k)$ , т.е.  $y_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$ .

Далее представим систему (2.13) в виде

$$\begin{cases} x_0 = \int_{Y_0}^{t_0} H(t_0, \tau, \phi_0(\tau)) d\tau, \\ y_0 = Y_0, \\ x_k = \int_{y_k}^{t_{v_k}} H(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau, \\ f_k = \int_{y_k}^{t_{v_k}} K(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau, x(\tau)) d\tau, \\ k = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $x_k = x(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$ ,  $f_k = f(t_k)$ ,  $k = \overline{0, N}$ .

Возможны два случая для каждого  $k$

**Случай I.**  $v_k = k$ .

Используя на малых участках для интегралов квадратурную формулу прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_k - y_k)H(t_k, t_k, x_k), \\ f_k = (t_k - y_k)K(t_k, t_k, x_k), \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_k K(t_k, t_k, x_k) = f_k (t_k - y_k) H(t_k, t_k, x_k), \\ y_k = t_k - \frac{f_k}{K(t_k, t_k, x_k)} \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Используя соответствующие квадратичные аппроксимации для  $H$  и  $K$ , получаем

$$\begin{cases} \left[ K(t_k, t_k, x_{k-1}) + K'_x(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + K''_{xx}(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2 \right] x_k = \\ = f_k \left[ H(t_k, t_k, x_{k-1}) + H'_x(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + H''_{xx}(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2 \right], \\ y_k = t_k - \frac{f_k}{K(t_k, t_k, x_k)} \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Из первого уравнения системы (2.17) определим  $x_k$ . Затем неизвестная  $y_k$  может быть найдена из решения второго уравнения этой системы. Соответствующее решение выбирается из условия  $y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

**Случай II.**  $v_k < k$ .

Применяя к интегралам в (2.14) формулу средних прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_{v_k} - y_k)H(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + \\ + (t_k - t_{k-1})H(t_k, t_{k-0.5}, x_k) + S_H(v_k), \\ f_k = (t_{v_k} - y_k)K(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + \\ + (t_k - t_{k-1})K(t_k, t_{k-0.5}, x_k) + S_K(v_k), \end{cases} \quad (2.18)$$

где

$$S_H(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} H(t_k, t_{j+0.5}, x_{j+1}),$$

$$S_K(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} K(t_k, t_{j+0.5}, x_{j+1}),$$

$$t_{k-0.5} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \quad t_{k+0.5} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_k = (t_{v_k} - y_k)H(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + S_H(v_k) + \\ + (t_k - t_{k-1}) \left[ H(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) + H'_x(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right. \\ \left. + H''_{xx}(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} \right], \\ f_k = (t_{v_k} - y_k)K(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + S_K(v_k) + \\ + (t_k - t_{k-1}) \left[ K(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) + K'_x(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right. \\ \left. + K''_{xx}(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} \right]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Таким образом, при знании номеров  $v_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , приближенные значения  $x_k$  и  $y_k$  искомых функций в точках сетки могут быть найдены по формулам (2.18), (2.19).

Идея определения номеров  $v_k$  состоит в последовательном для каждого номера узла  $k = 1, 2, \dots, N$ , переборе возможных значений  $v_k$ :  $v_k = 1, v_k = 2, \dots, v_k = k$ , и нахождении соответствующих значений  $x_k$  и  $y_k$  по формулам (2.15), (2.17). Перебор прекращается в случае выполнения условия  $y_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$ , подтверждающего предположение о принадлежности  $y_k$  указанному интервалу.

### 3. Оптимизационные задачи

Рассмотрим, следуя работам [4], [6], [7] и [12], следующую оптимизационную задачу, состоящую в нахождении функций  $a(t)$  и  $m(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $T < \infty$ , которые максимизируют функционал

$$I(a(t), m(t)) = \int_{t_0}^t \rho(\tau) \left[ \int_{a(t)}^t \beta(\tau, t)m(\tau)d\tau - \lambda(t)m(t) \right] dt \longrightarrow \max_{a, m} \quad (3.1)$$

при условиях

$$P(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau)d\tau, \quad (3.2)$$

$$m_{\min}(t) \leq m(t) \leq M(t), \quad (3.3)$$

где  $m_{\min}(t) = \max \{0, P'(t)\}$ ,

$$a(t_0) = a_0 \leq t_0, \quad m(\tau) = m_0(\tau), \quad \tau \in [a_0, t_0]. \quad (3.4)$$

Оптимизационная задача (3.1)–(3.4) описывает максимизацию чистого дохода экономической системы в этой модели. Тогда  $a(t)$  — дата списывания устаревшего капитала (время, прошедшее с момента ввода в эксплуатацию старейшего оборудования),  $m(t)$  — новый капитал,  $\beta(\tau, t)$  — удельная производительность,  $\lambda(t)$  — удельная стоимость нового оборудования,  $P(t)$  — рабочий ресурс,  $\rho(t)$  — коэффициент дисконтирования,  $0 < \rho(t) \leq 1$ ,  $\rho'(t) \leq 0$ . Производительность  $\beta(\tau, t)$  возрастает по переменной  $\tau$ , т.к. учитывается научно-технический прогресс. Также зависимость  $\beta(\tau, t)$  от текущего времени  $t$  позволяет учитывать износ капитала, автономный прогресс и колебания внешних рыночных цен.

### 3.1. Эквивалентное уравнение

Как известно [13], от оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) мы можем перейти к эквивалентной задаче:

$$I'(t) = \int_t^{b(t)} \rho(\tau)[\beta(t, \tau) - \beta(a(\tau), \tau)]d\tau - \lambda(t)\rho(t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.5)$$

где  $I'(t)$  — градиент функционала (3.1),

$$b(t) = \begin{cases} a^{-1}(t), & t \in [t_0, a(T)], \\ T, & t \in (a(t), T). \end{cases}$$

Для того, чтобы  $m^*(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  была решением оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) необходимо и достаточно [6], чтобы

$$\begin{aligned} I'(a^*; t) &< 0, \quad m^*(t) = m_{min}(t), \\ I'(a^*; t) &> 0, \quad m^*(t) = M(t), \\ I'(a^*; t) &\equiv 0, \quad m_{min}(t) \leq m^*(t) \leq M(t), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, приходим к необходимости решения нелинейного интегрального уравнения специального вида относительно неизвестной функции  $a(t)$ )

$$\int_t^{b(t)} \rho(\tau)[\beta(t, \tau) - \beta(a(\tau), \tau)]d\tau = \lambda(t)\rho(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.7)$$

При этом с учетом экономического контекста модели, полагаем, что  $a(t) < t$  — неубывающая функция, отвечающая за управление заменой оборудования и списанные мощности никогда не используются вновь.

### 3.2. Решение уравнения (3.7)

Перепишем уравнение (3.7) в обобщенном виде

$$\int_t^{b(t)} H(t, s, a(s))ds = f(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.8)$$

Следует отметить, что уравнение (3.8) содержит функцию, обратную к неизвестной функции  $a(t)$ , в верхнем пределе интегрирования. Это вызывает значительные математические трудности при построении любого численного алгоритма, связанного с аппроксимацией интегралов.

В связи с этим представляется разумным выделять классы функций, аппроксимирующих решение уравнения  $a(t)$  с учетом его специфики ( $a(t) < t$ ,  $a'(t) > 0$  и т. д.) А именно, решение будем искать в виде

$$\tilde{a}_n(t) = \Phi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (3.9)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — параметры, подлежащие определению ( $n$  — некоторое натуральное число), а функция  $\Phi$  такова, что допускает аналитическое построение обратной функции  $\Phi^{-1}$ .

Приближенное уравнение принимает в этом случае вид

$$\int_t^{\tilde{b}_n(t)} H(t, s, \tilde{a}_n(s)) ds = f(t), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{b}_n(t) = \begin{cases} \Phi^{-1}(t), & t \in [t_0, \tilde{a}_n(T)], \\ T, & t \in (\tilde{a}_n(t), T]. \end{cases}$$

Пусть ядро  $H(t, s, \tilde{a}_n(s))$  уравнения (3.10) имеет первообразную по переменной  $s$ , выражающуюся в элементарных или классических специальных функциях. Для аналитического вычисления интеграла в (3.10) в этом случае можно применить один из современных пакетов символьной математики. В результате приходим к нелинейной функциональной зависимости параметров  $C_1, C_2, \dots, C_n$  следующего вида:

$$\Psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) = f(t). \quad (3.11)$$

Для определения констант  $C_1, C_2, \dots, C_n$  потребуем выполнения равенства (3.11) в точках  $t_k = t_0 + \frac{(T-t_0)k}{n}$ ,  $k = \overline{1, n}$ :

$$\Psi(t_k, C_1, C_2, \dots, C_n) = f(t_k), \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Система нелинейных уравнений (3.12) может иметь весьма сложный вид, т. к. верхний предел интегрирования в (3.10) являлся функцией, заданной кусочно. Однако при небольших  $n$  система может быть решена численно с помощью встроенных средств пакетов символьной математики.

Дальнейшее развитие предложенного подхода может состоять, в частности, в спецификации вида функции  $H$  с учетом ее роли в моделях ВСМ. В этом случае можно будет строить специальные методы решения нелинейной системы (3.12), учитывающие ее особенности.

### 3.3. Непосредственная аппроксимация

В данном параграфе предложим приближенный метод решения оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) в исходной форме. Метод основан на аппроксимации искомых функций отрезками рядов по линейно независимым полным системам базисных функций. С учетом сложности функционала (3.1) в качестве базисных функций разумно использовать систему степенных функций  $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ .

Приближенное решение  $\tilde{a}(t)$  и  $\tilde{m}(t)$  задачи (3.1)–(3.4) будем искать в следующем виде:

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=0}^{N_a} A_i t^i, \quad (3.13)$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=0}^{N_m} M_i t^i, \quad (3.14)$$

где  $A_i$  и  $M_i$  — коэффициенты, подлежащие определению. Условие (3.2), таким образом, аппроксимируется следующим условием

$$P(t) = \int_{\tilde{a}(t)}^t \tilde{m}(\tau) d(\tau). \quad (3.15)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в условие (3.15), получим уравнение связи:

$$\sum_{i=0}^{N_m} \frac{M_i}{i+1} \left( t^{i+1} - \left( \sum_{k=0}^{N_a} A_k t^k \right)^i \right) = P(t). \quad (3.16)$$

Таким образом, приближение  $\tilde{I}$  исходного функционала (3.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \int_{t_0}^t \rho(t) \left[ \int_{\sum_{i=0}^{N_a} A_i t^i}^t \left( \beta(\tau, t) \sum_{i=0}^{N_m} M_i t^i d\tau \right) - \lambda(t) \sum_{k=0}^{N_m} M_k t^k \right] dt = \\ &= \Phi(A_0, A_1, \dots, A_{N_a}, M_0, M_1, \dots, M_{N_m}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для нахождения экстремалей функционала (3.17) с условием связи (3.16) воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L(A_0, A_1, \dots, A_{N_a}, M_0, M_1, \dots, M_{N_m}) = \Phi + \lambda \Psi, \quad (3.18)$$

где

$$\Psi(A_0, \dots, A_{N_a}, M_0, \dots, M_{N_m}) = \sum_{i=0}^{N_m} \frac{M_i}{i+1} \left( t^{i+1} - \left( \sum_{k=0}^{N_a} A_k t^k \right)^i \right) - P(t).$$

При этом отметим, что поскольку специфика модели подразумевает возможность использования для функций  $\rho(t)$ ,  $\lambda(t)$  и  $\beta(\tau, t)$  степенных и показательных представлений, то при формировании функции  $\Phi$  интегрирование можно выполнять аналитически.

Таким образом, приходим к решению нелинейной системы  $((N_a + 1) \times (N_m + 1) + 1)$  уравнений, определяющей необходимые условия существования экстремума функционала (3.17)

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_i} = 0, & i = \overline{0, N_a}, \\ \frac{\partial(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_k} = 0, & k = \overline{0, N_m}, \\ \Psi(A_0, A_1, \dots, A_{N_a}, M_0, M_1, \dots, M_{N_m}) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Система нелинейных уравнений (3.19) может иметь весьма сложный вид. Однако, по крайней мере при небольших величинах  $N_a$  и  $N_m$ , может быть решена численно с помощью встроенных средств пакетов символьной математики.

Решая систему (3.19), определим стационарные точки, в каждой из которых проверим отрицательную определенность матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0^2} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0 \partial A_1} & \dots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0 \partial M_{N_m}} \\ \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1 \partial A_0} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1^2} & \dots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1 \partial M_{N_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m} \partial M_0} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m} \partial M_1} & \dots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m}^2} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Для этого воспользуемся критерием Сильвестра, который в данном случае формулируется следующим образом: для того, чтобы матрица (3.20) была отрицательно определена необходимо и достаточно, чтобы знаки ее угловых миноров чередовались, начиная с «—».

Таким образом, определив набор коэффициентов  $\{A_0, A_1, \dots, A_{N_a}, M_0, M_1, \dots, M_{N_m}\}$ , удовлетворяющий критериям экстремальности, получим приближенное решение оптимизационной задачи (3.1)-(3.4) в форме (3.13)-(3.14).

Дальнейшее развитие предложенного подхода может состоять, в частности, в спецификации вида функций  $\rho(t)$ ,  $\lambda(t)$  и  $\beta(\tau, t)$  с учетом их роли в моделях VCM. В этом случае можно будет строить специальные методы решения нелинейной системы (3.19), учитывающие вид ее уравнений.

## 4. Численные результаты

### 4.1. Итерационный метод

Для реализации численных методов решения системы (2.2) было создано приложение с использованием среды разработки Embarcadero C++ Builder XE5 и языка программирования C++. Для представления графического интерфейса пользователя (GUI) была использована библиотека быстрого прототипирования приложений с GUI Visual Component Library (VCL), которая входит в поставку используемой среды разработки.

Работу предложенного итерационного метода проиллюстрируем на следующих модельных задачах.

**Модельная задача 1:**

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t t\tau x^2(\tau)d\tau = 0, \\ \int_{y(t)}^t \tau \sqrt{x(\tau)}d\tau = \frac{2}{5}(t^{5/2} - (t^4 - 4)^{5/8}), \quad t \in [3, 5]. \\ c(t) = \int_{y(t)}^t t^2(\tau - x^3(\tau))d\tau, \end{cases} \quad (4.1)$$

Точное решение системы (4.1) имеет вид

$$x^*(t) = t, \quad y^*(t) = t, \quad c^*(t) = \frac{t^2}{2}(t^2 - \sqrt{t^4 - 4} + 2).$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:  $\mathbf{N}$  — число узлов разбиения,  $\mathbf{m}$  — число итераций;  $\varepsilon_x = \max_i |X_m^N(t_i) - x^*(t_i)|$ ,  $\varepsilon_y = \max_i |Y_m^N(t_i) - y^*(t_i)|$ ,  $\varepsilon_c = \max_i |C_m^N(t_i) - c^*(t_i)|$  — погрешность в узлах сетки.

Результаты решения системы (4.1) представлены в таблице 2.

Таблица 2: Точность решения системы (4.1)

N	m	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_c$
100	1	$6.1 \cdot 10^{-5}$	0.55	0.37
100	2	$3.21 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-3}$	$2.44 \cdot 10^{-2}$
100	3	$7.91 \cdot 10^{-11}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
100	5	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$	$3.17 \cdot 10^{-6}$
100	10	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$6.19 \cdot 10^{-11}$	$9.1 \cdot 10^{-11}$
100	20	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$6.17 \cdot 10^{-11}$	$7.21 \cdot 10^{-11}$

**Модельная задача 2:**

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t e^{t\tau} x^3(\tau) d\tau = 0, \\ \int_{y(t)}^t \sqrt{x(\tau)} d\tau = e^t - \left( e^{2t} [e^{t^2+6t} - t - 6] \right)^{\frac{1}{t+6}}, \quad t \in [3, 4]. \\ c(t) = \int_{y(t)}^t \frac{1}{tx(\tau)} d\tau, \end{cases} \quad (4.2)$$

Отметим, что первое уравнение системы (4.2) имеет вырожденное быстрорастущее ядро.

Точным решением системы (4.2) являются следующие функции

$$x^*(t) = e^{2t}, \quad y^*(t) = \frac{\ln(e^{t^2+6t} - e^{2t}t - 6e^{2t})}{t+6}, \quad c^*(t) = \frac{\left[ e^{2t}(e^{t^2+4t} - t - 6) \right]^{-\frac{2}{t+6}} - e^{-2t}}{2}.$$

В качестве начального приближения использовались функции  $x_0(t) = 10t$ ,  $y_0(t) = 0.8t$ .

В таблице 3 показаны результаты для задачи (4.2).

Таблица 3: Точность решения системы (4.2)

N	m	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_c$
100	1	0.049	0.00015	0.0025
100	2	0.0092	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-4}$
100	3	0.0014	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$
100	5	0.0012	$9.07 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-9}$
100	10	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.76 \cdot 10^{-10}$	$7.16 \cdot 10^{-10}$
200	10	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-10}$	$8.43 \cdot 10^{-10}$
500	10	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$7.92 \cdot 10^{-11}$	$2.21 \cdot 10^{-10}$
1000	10	$5.72 \cdot 10^{-7}$	$9.18 \cdot 10^{-13}$	$8.02 \cdot 10^{-12}$

**4.2. Прямой метод**

Проиллюстрируем работу прямого численного метода на следующей модельной задаче.

**Модельная задача 3:**

$$\begin{cases} x(t) - \int_{y(t)}^t te^{x(\tau)} d\tau = 0, \\ \frac{25}{2}t^2 - \ln(e^{5t} - 25t) = \int_{y(t)}^t \frac{x^2(\tau)}{\tau} d\tau, \quad t \in [3, 4]. \\ c(t) = \int_{y(t)}^t (3\tau x(\tau))^3 d\tau, \end{cases} \quad (4.3)$$

Точное решение системы (4.3) имеет вид

$$x^*(t) = 5t, \quad y^*(t) = \frac{\ln(e^{5t} - 25t)}{5}, \quad c^*(t) = \frac{27}{20}t^3 \left( 625t^4 - 4\ln(e^{5t} - 25t) \right).$$

Результаты решения системы (4.3) представлены в таблице 4.

Таблица 4: Точность решения системы (4.3)

N	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_c$
10	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$7.37 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$
20	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-9}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$
50	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-10}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$
100	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-11}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
300	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$3.96 \cdot 10^{-12}$	$7.72 \cdot 10^{-6}$
500	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$4.46 \cdot 10^{-12}$	$7.24 \cdot 10^{-6}$

### 4.3. Результаты решения уравнения (3.7)

Предложенный в параграфе 3.2. метод был реализован в среде Maple. Проиллюстрируем его работу на следующем модельном уравнении

$$\int_t^{b(t)} (t+s)^2 a(s) ds = \begin{cases} -\frac{31}{30}t^5 + \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3}t^{\frac{7}{2}}, & t \in [0.2, 0.81], \\ -\frac{31}{30}t^5 + \frac{59049}{500000} + \frac{6561}{20000}t + \frac{243}{1000}t^2, & t \in (0.81, 0.9], \end{cases} \quad (4.4)$$

точным решением которого является функция  $a(t) = t^2$ ,  $t \in [0.2, 0.9]$ .

Если приближенное решение искать в виде  $\tilde{a}_2(t) = C_1 t^{C_2}$ , то программа выдает результат  $C_1 = 1,000000000$ ,  $C_2 = 2,000000000$ , т.е. параметры решения определяются с точностью, определяемой числом значащих цифр после запятой при выполнении арифметических действий (в данном случае 10 цифр).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_t^{b(t)} (t+s)^2 a(s) ds = f(t), \quad t \in [0.2, 1], \quad (4.5)$$

в котором правая часть  $f(t)$  подобрана таким образом, чтобы точным решением была функция  $a(t) = \sin(0,9t)$ . В этом случае имеем следующий результат  $C_1 = 0,8007050861$ ,  $C_2 = 0,9273393370$ . При этом абсолютная погрешность аппроксимации составляет  $\varepsilon = 0,0173781765$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Наука, Москва, 1983, 352 с.

2. D. Sidorov, *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*. In: L. O. Chua ed. *World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 300 c.
3. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.
4. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models”, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **1**:4 (2005), 415-432.
5. I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov, “Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119-128.
6. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay”, *Jour. Appl. Math.*, **5** (2004), 433-445.
7. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **127** (2005), 109-127.
8. Yu. Yatsenko, “Volterra integral equations with unknown delay time”, *Methods and Applications of Analysis*, **2**:4 (1995), 408-419.
9. А. Н. Тында, “Решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной задержкой”, *Труды СВМО*, **9**:1 (2007), 253-259.
10. A.N. Tynda, “Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay”, *PAMM*, **9**:1 (2009), 591-592.
11. A.N. Tynda, “On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays”, *PAMM*, **8**:1 (2008), 10857 - 10858.
12. А. Н. Тында, Е. С. Карпухина, “Приближенное решение одной задачи оптимизации в нелинейных интегральных моделях экономики”, Сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. "Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем". Пенза. Изд-во ПГУ, 2015, 99-103.
13. Ю. П. Яценко, *Интегральные модели систем с управляемой памятью*, Наукова думка, Киев, 1991, 217 с.

Поступила 4.10.2017

MSC2010 65R20, 37N40

## Numerical methods for the problems of nonlinear macroeconomic integral models

© A. N. Tynda<sup>3</sup>, N. Yu. Kudryashova<sup>4</sup>

**Abstract.** In this paper we suggest several methods for numerical treatment of integral dynamical systems described by nonlinear integral equations of the special form. The first group of problems is connected with solution of nonlinear integral Volterra-type equations' system with unknown function placed at the lower limits of integration. Two effective methods for solution of such systems are suggested. The first method is direct. The second method is iterative; it is based on the linearization of the integral operators using modified Newton-Kantorovich scheme. The second group of problems is connected with the optimal control problems in macroeconomical VCM models. We suggest two original approaches to these problems' solution; these approaches allow to determine the extremals of functionals in the first approximation. Proposed algorithms also allow to obtain more accurate approximations. In the conclusion several numerical results for model problems are stated. These results allow to judge the effectiveness of the proposed approaches.

**Key Words:** Systems of nonlinear integral equations, VCM models, Newton-Kantorovich method, nonlinear delays, extremal of functional, approximation of integrals.

## REFERENCES

1. V. M. Glushkov, V. V. Ivanov, V. M. Yanenko, *Modelirovaniye razvivajuschihsja sistem [Modelling of developing systems]*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 352 p.
2. D. Sidorov, *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In: L. O. Chua ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 300 p.
3. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.
4. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models", *Journal of Industrial and Management Optimization*, **1**:4 (2005), 415-432.
5. I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov, "Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119-128.
6. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay", *Jour. Appl. Math.*, **5** (2004), 433-445.
7. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **127** (2005), 109-127.

<sup>3</sup> Aleksandr N. Tynda, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

<sup>4</sup> Natalia Yu. Kudryashova, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0789-4559>, math.kudryashova@yandex.ru

8. Yu. Yatsenko, "Volterra integral equations with unknown delay time", *Methods and Applications of Analysis*, **2**:4 (1995), 408-419.
9. A. N. Tynda, "Reshenie sistem nelineynykh integralnykh uravneniy Volterra s neizvestnoy zaderzhskoy [Solution of the systems of nonlinear Volterra integral equations with unknown delay]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **9**:1 (2007), 253-259 (In Russ.).
10. A. N. Tynda, "Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay", *PAMM*, **9**:1 (2009), 591-592.
11. A. N. Tynda, "On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays", *PAMM*, **8**:1 (2008), 10857 - 10858.
12. A. N. Tynda, E. S. Karpukhina, "Priblizhennoe reshenie odnoy zadachi optimizatsii v nelineynykh integralnykh modeljakh ekonomiki [Approximate solution of the optimization problem in nonlinear integral models of economics]", *Sbornik statei X Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i socialnykh problem". Penza. Izdatelstvo PGU*, 2015, 99-103 (In Russ.).
13. Yu. P. Yatsenko, *Integralnye modeli sistem s upravljаемой pamjatju [Integral models of the systems with controllable memory]*, Naukova dumka, Kiev, 1991 (In Russ.), 217 p.

Submitted 4.10.2017

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА  
ЕВГЕНИЯ ВИКТОРОВИЧА ВОСКРЕСЕНСКОГО

Евгений Викторович Воскресенский  
(29.11.1937 - 31.07.2008)

29 ноября 2017 года исполнилось 80 лет со дня рождения заслуженного деятеля науки Республики Мордовия, известного учёного и талантливого организатора доктора физико-математических наук профессора Евгения Викторовича Воскресенского.

Евгений Викторович родился 29 ноября 1937 года в с. Пушкино Рузаевского района МАССР. Его отец Виктор Николаевич после окончания пединститута в г. Саранске преподавал математику и был директором школы, его первое образование – семинария в Подмосковье. Мать Евгения Викторовича – Екатерина Михайловна была учителем начальных классов. Ещё в школе будущий учёный проявлял способности к точным наукам, поэтому после окончания средней школы в 1954 году Е.В. Воскресенский поступил

*К 80-летию со дня рождения профессора Евгения Викторовича Воскресенского*

на физико-математический факультет Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва. После окончания университета в 1959 году его направили по распределению в Белозерский район Курганской области, где он год проработал заведующим учебной частью Зерносовхозской средней школы. Позже, в 1960-1962 гг. его назначили завучем и преподавателем математики Куракинской средней школы Ардатовского района МАССР. Жена Евгения Викторовича – Вера Владимировна тоже была учителем математики. Две его дочери, Елена и Екатерина, окончили Мордовский государственный университет.

С 1962 года он работал ассистентом, старшим преподавателем, с 1970 года по 1989 год Е.В. Воскресенский заведовал кафедрой вычислительной математики.

С самого начала своей преподавательской деятельности Евгений Викторович активно занимался наукой. Первоначальная тематика научных исследований была тесно связана с исследованиями ленинградских математиков В.И. Зубова, Н.Е. Кирина и других. Стали издаваться совместные сборники научных трудов. Например, регулярно выходила серия «Управление, надежность, навигация».

В 1970 году Е.В. Воскресенский окончил аспирантуру Ленинградского университета под руководством член-корреспондента АН СССР В.И. Зубова. В 1972 году в Куйбышевском педагогическом институте Евгений Викторович защитил кандидатскую диссертацию «Локальная топологическая структура обыкновенных дифференциальных уравнений». В 1973 году ему присвоено ученое звание доцента.

В 1970-80-е годы кафедра вычислительной математики проходила период становления. Е.В. Воскресенский стал широко применять в своих исследованиях новые качественные методы исследования уравнений управляемого движения. Именно этой тематике была посвящена серия научных сборников «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теория управления движением». Кафедра стала проводить коллоквиумы и семинары по данным направлениям, на которых с докладами выступали многие известные математики страны: Н.Ф. Отроков, Б.П. Демидович, И.П. Макаров, Л.Э. Рейзинь, Н.М. Матвеев, М.В. Долов и многие другие. В это же время были установлены тесные контакты с Пензенским научно-исследовательским институтом математических машин. Выполнялись совместные научные исследования. Позднее на базе этого института в университете был организован математический отдел, который занимался разработкой программного обеспечения. Руководил этим подразделением доцент В.И. Сафонкин.

С 1989 года кафедра меняет свое название. Теперь это кафедра прикладной математики. Заведующим кафедрой вновь выбран Е.В. Воскресенский. Благодаря его усилиям, и при поддержке академиков А.Н. Тихонова и Н.С. Бахвалова на математическом факультете открывается новая специальность — «Прикладная математика», ставшая, без преувеличения, одним из брендов Мордовского государственного университета. Сегодня это направление подготовки «Прикладная математика и информатика». С этого момента начинается новый период в развитии кафедры. Она становится выпускающей по новой специальности со специализацией «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин». Позднее к ней добавляются специализации «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности» и «Математические методы и программное обеспечение защиты информации».

Евгений Викторович уделял большое внимание учебно-методической работе. Им разработаны планы специализаций «Вычислительная математика», «Вычислительная математика и математическое обеспечение АСУ», «Прикладная математика», специальные курсы – «Моделирование и математическая теория управляемых процессов», «Вычислительные методы линейной алгебры», «Качественная теория управляемых движений». Студентам специальности «Прикладная математика и информатика» Евгений Викторович читал фундаментальные курсы «Методы оптимизации» и «Оптимальное управление».

Начинает качественно меняться состав кафедры. Е.В. Воскресенским уделяется большое внимание подготовке научно-педагогических кадров. Под его руководством подготовлено 17 кандидатов физико-математических наук: С.М. Мурюмин (г. Ленинград, ЛГУ, 1981); Дж. Болтаев (г. Алма-Ата, 1982); Е.Н. Артемьева (г. Горький, ГГУ, 1984); В.А. Белоглазов (г. Нижний Новгород, ННГУ, 1988); Е.А. Черноиванова (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 1990); Т.Ф. Мамедова (г. Нижний Новгород, ННГУ, 1993); З.Я. Якупов (г. Нижний Новгород, ННГУ, 1994); А.Ю. Павлов (С.-Петербург, СПбГУ, 1995); И.П. Никитин (г. С.-Петербург, СПбГУ, 1996); П.А. Шаманаев (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 1997); Т.А. Кокина (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 1998); Д.В. Пашуткин (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 1998); С.А. Карпушкина (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 1999), М.А. Борисов (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2000); В.А. Святков (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2000); Л.А. Сухарев (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2003); Д.К. Егорова (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2005).

Двоих учеников Е.В. Воскресенского — О.Е. Каледин (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2011 г.) и Е.В. Десяев (г. Саранск, МГУ им. Н.П. Огарёва, 2012 г.) защитили кандидатские диссертации на соискание ученой степени физико-математических наук под руководством Т.Ф. Мамедовой.

Еще со времен работы в школе его неистощимая энергия воодушевляла молодежь, его беседы о математике и её истории приобщали студентов к математическим исследованиям. Вокруг него постоянно концентрировалась молодежь. Через связь научных идей с идеями В.И. Зубова, Н.П. Еругина, В.И. Смирнова и Н.М. Гюнтера истоки математической школы Е.В. Воскресенского восходят к П.Л. Чебышеву, М.В. Остроградскому, Н.И. Фуссу и Леонарду Эйлеру.

К основным направлениям научной деятельности Е.В. Воскресенского относятся качественные, асимптотические и численные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, теория устойчивости и теория управления, математическое моделирование в экономике, биологии и экологии, теоретической механике.

В 1992 г. в Санкт-Петербургском государственном университете Евгений Викторович успешно защитил докторскую диссертацию на тему “Методы сравнения в нелинейном анализе”, в качестве диссертации была представлена монография с одноименным названием. В 1993 году Е.В. Воскресенский получил звание профессора.

Е.В. Воскресенский – автор более двухсот научных и научно-методических работ, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах и трудах конференций, посвященных многим аспектам теории и приложений дифференциальных уравнений, прикладной и вычислительной математики. Им опубликованы четыре монографии, научные идеи, представленные в них, в особенности в двух последних, «Методы сравнения в нелинейном анализе» (1990) и «Асимптотические методы: теория и приложения» (2002), получили свое развитие в работах его учеников.

С 1995 года он возглавлял диссертационный Совет по защите кандидатских, а с 2007 года – по защите кандидатских и докторских диссертаций по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» при Мордовском государственном университете. Также Евгений Викторович являлся членом Диссертационного совета при Самарском государственном университете по специальности «Дифференциальные уравнения» и членом учёного совета МГУ им. Н.П. Огарёва.

Кафедра начинает активно сотрудничать со следующими ведущими научно-исследовательскими институтами и вузами РФ: Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН (г. Москва), Институт теоретической и математической физики РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров), Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск). Для чтения специальных и практических курсов, руководством дипломными,

магистерскими и кандидатскими диссертациями приглашаются высококвалифицированные ученые различных вузов России: д.ф.-м.н., профессор, В.Ф. Тишкун (с 2016 года член-корреспондент РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва), д.ф.-м.н., старший научный сотрудник института теоретической и математической физики Ю.Н. Дерюгин (РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров), д.ф.-м.н., профессор Б.В. Логинов (Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск).

В 1998 г. он организовал и возглавил НИИ математики при Мордовском государственном университете, что способствовало укреплению научных связей с предприятиями г. Саранска.

Е.В. Воскресенский был не только известным учёным, но и талантливым организатором. Он являлся основателем и идеальным вдохновителем Средне-Волжского математического общества (1997 год), научного журнала «Труды Средневолжского математического общества» (1997 год), международных научных конференций (проводятся с 1994 года) и молодежных школ-семинаров (проводятся с 2003 года).

Создание Средне-Волжского математического общества стало важным инструментом в организационной деятельности по координации и объединению усилий, направленных на развитие исследований в области математики и информатики, математического образования и просвещения в Республике Мордовия, объединения ведущих ученых городов Приволжского федерального округа (гг. Н. Новгород, Казань, Самара, Саров, Ульяновск, Уфа, Пенза), поддержания тесных научных контактов с учеными других городов России (гг. Москва, Рязань, Санкт-Петербург, Иркутск, Волгоград, Астрахань, Архангельск) и установления международного научного сотрудничества с учеными дальнего и ближнего зарубежья (Румыния, Беларусь, Казахстан, Узбекистан).

Международные научные конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, организованные Е.В. Воскресенским, стали проводиться в Мордовском государственном университете им. Н.П. Огарёва регулярно, начиная с 1994 года. С 1998 года конференции проводятся под эгидой Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва, Института математического моделирования РАН (с 2011 года Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) и Средне-Волжского математического общества. С 2009 года председателем конференций является член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкун (заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», г. Саранск).

Для привлечения более широких кругов молодёжи к научной деятельности, начиная с 2003 года, Е.В. Воскресенский организовал международные научные молодёжные школы-семинары по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ. Они стали проводится раз в два года, чередуясь с научными конференциями. Первые школы-семинары, проводились в заповедном лесистом месте Республики Мордовия – турбазе “Сура” – на живописном берегу одноименной реки.

Во время научных конференций и в особенности школ-семинаров проводятся аprobации и представления к защите кандидатских и докторских диссертаций, защищаемых в российских диссертационных советах. Практически все научные школы-семинары и конференции постоянно получают поддержку Российского фонда фундаментальных исследований.

География участников научных конференций и молодёжных школ-семинаров достаточно обширна, в ней представлены научные математические школы России из таких городов, как Воронеж, Иркутск, Казань, Красноярск, Москва, Нефтекамск, Н. Новгород, Пенза, Пермь, Рязань, Санкт-Петербург, Самара, Саранск, Саров, Стерлитамак, Сызрань,

Ульяновск, Уфа, а так же стран ближнего и дальнего зарубежья (Азейрбаджан, Болгария, Ирак, Казахстан, Польша, Румыния, Узбекистан, Швейцария).

С 1998 года стал выходить научный журнал «Труды Средневолжского математического общества», основателем и главным редактором которого являлся Е.В. Воскресенский. С 2004 года журнал индексируются в международной реферативной базе данных Zentralblatt MATH (zbMATH). В 2008 году на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал получил Знак отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «НАУКА, ТЕХНИКА, НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ ПРЕССА». С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества», главный редактор журнала – член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкун. С декабря 2015 года журнал входит в Перечень ВАК.

Тематика журнала охватывает не только дифференциальные уравнения в самом широком смысле, но и различные области математического моделирования, вычислительной и прикладной математики.

Профессор Е.В. Воскресенский являлся членом редколлегии журналов «Вестник Мордовского университета» (г. Саранск) и «Дифференциальные уравнения» (г. Рязань).

Общественная деятельность Евгения Викторовича широко известна среди ученых Поволжья, России и за рубежом и отмечена государственными наградами. Он был награжден медалями «За освоение целинных и залежных земель» (1957 г.), «За трудовую доблесть» (1992 г.), почетной грамотой Правительства РМ (1997 г.). В 1997 году ему присвоено звание Соросовского профессора. Е.В. Воскресенский является действительным членом Международной академии информатизации (1996).

За большой вклад в создание энциклопедии “Мордовия”, развитие Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва, подготовку высококвалифицированных специалистов для народного хозяйства и достижения в науке он получил почетные звания лауреата Государственной премии Мордовии (2006 год) и заслуженного деятеля науки Республики Мордовия (1994 год).

Интересы Евгения Викторовича не ограничивались математикой, до последних дней он не прекращал занятий любительским спортом, общеизвестно его увлечение классической музыкой, российской и мировой историей, в частности историей науки.

Неистощимая энергия профессора Воскресенского вдохновляла нас всех. До последних дней он не прекращал занятий спортом. Беседы о математике и истории науки, наставления своим ученикам никого не оставляли равнодушными.

Скоропостижный уход из жизни Е.В. Воскресенского стало невосполнимой потерей не только для математической школы Мордовского государственного университета, но и для математической общественности Поволжья и других регионов России.

Всю свою жизнь Евгений Викторович посвятил работе на благо Российской науки и образования, его имя сохранится в истории математики. Светлая память о Евгении Викторовиче будет жить в наших сердцах долгие годы.

*Е.Н. Артемьев, И.В. Бойков, М.А. Борисов, Д.И. Бояркин, П.А. Вельмисов,  
В.К. Горбунов, Т.А. Горшунова В.З. Гринес, Ю.Н. Дерюгин, Е.В. Десяев,  
Д.К. Егорова, Р.В. Жалнин, О.Е. Каледин, В.Н. Кризский, Е.Б. Кузнецов,  
Б.В. Логинов, Т.Ф. Мамедова, С.И. Мартынов, Н.Д. Морозкин, С.М. Мурюмин,  
И.П. Никитин, О.В. Починка, Д.В. Пашуткин, А.Ю. Павлов, Е.Е. Пескова,  
И.П. Рязанцева, В.И. Сафонкин, Г.А. Смолкин, С.И. Спивак, Л.А. Сухарев,  
А.О. Сыромясов, М.Т. Терехин, В.Ф. Тишкун, С.А. Фирсова, Е.А. Черноиванова,  
И.И. Чучаев, П.А. Шаманаев, О.С. Язовцева, З.Я. Якупов*

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО – полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах – Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Внимание! Новые правила.** С этого номера в статью включается список литературы на английском языке. Список литературы имеет заголовок **References** и располагается после ключевых слов на английском языке.

#### Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

##### Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

##### Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 р.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmobib.sty*.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагаться за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References.***

### **Статьи в журналах на русском языке:**

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-cikличeskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Материалы конференций на русском языке:**

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm" imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P.A. Shamanaev, A.A. Kyashkin, B.V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], Tezisy dokladov “Mezhdunarodnoy konferentsii po differential’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam” [Proceeding of the “International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems”] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

### **Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ.), 145 p.

# Правила верстки рукописей в системе LaTex

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой \input в файл-преамбулу). Например, \input{shamanaev.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды \headerRus и \headerEn, соответственно.

Эти команды имеют следующие аргументы:

{УДК или MSC 2010} {название статьи} {автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром: \sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды \R, \Rn, \C, \Z, \N и т. д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды \phi, \epsilon соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами \px{i} и \pxtog{u}{i}.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды \textrm,

\textit. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\Delta_i$  в текст статьи необходимо набрать команды \textrm{\Gamma}\_i, \textit{\Delta}\_i.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды \label{метка} и \eqref{метка}, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить \label{ivanov14}, теорему 5 из этой статьи — \label{ivanovt5} и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду \ref{метка}).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя\_файла.eps}{степень\_сжатия}

где степень\_сжатия число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя\_файла.eps}{подпись\_под\_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя\_файла.eps}{степень\_сжатия} {подпись}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя\_файла.eps}{степень\_сжатия} {подпись\_под\_рис}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения \thebibliography и \thebibliographyEn, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду \cite или \pgcite (параметры см. в файле-пreamble). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела  
*References* с помощью команд из стилевого пакета *svmobib.sty***

**Статьи в журналах на русском языке:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.
```

**Статьи в журналах на английском языке:**

```
\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

**Статьи в электронном журнале на русском языке:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UlGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \serial 10  
 \pages 4–13  
 \lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
 \by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
 \book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
 \publaddr Moscow  
 \publ Nauka Publ.  
 \yr 1966  
 \totalpages 576  
 \lang In Russ.

**Материалы конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib7}  
 \by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev  
 \inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]  
 \proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovaniye, chislennye metody i kompleksy programm" imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation]  
 \procinfo Saransk, 12-15 July 2016  
 \publ SVMO Publ.  
 \pages 105–107  
 \lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}  
 \by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov  
 \inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]  
 \proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentials'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]  
 \procinfo Suzdal, 8-12 July 2016  
 \pages 231–233  
 \lang In Russ.

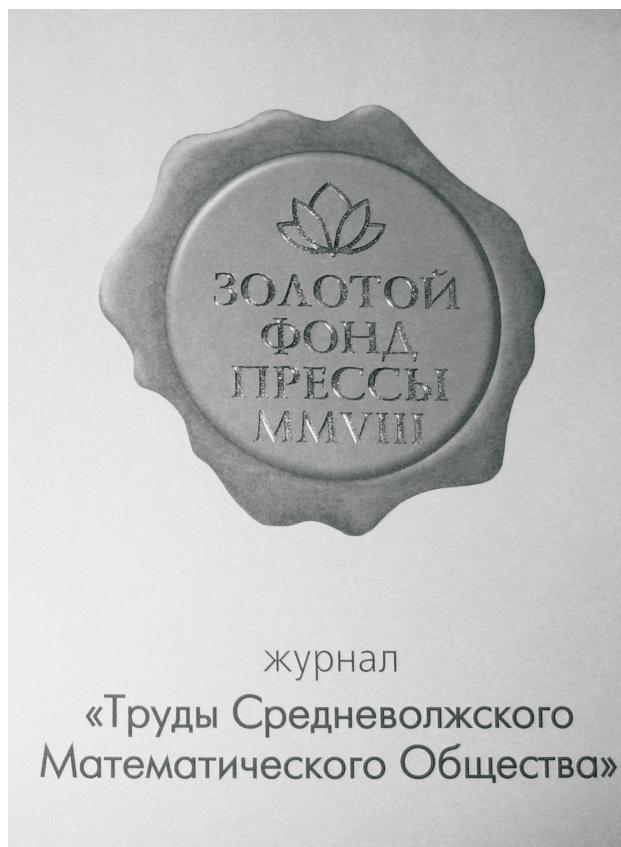
**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## Алфавитный указатель

Васютин М. А.	68	Кузьмичев Н. Д.	68
Джамалов С. З.	12	Лапшина Е. А.	68
Донцова М. В.	23	Мартынов С. И.	45
Жукова Н. И.	33	Ткач Л. Ю.	45
Изосимова О. А.	55	Тында А. Н.	79
Калинин А. В.	55	Тюхтина А. А.	55
Кудряшова Н. Ю.	79	Шилкин Д. А.	68

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Компьютерная верстка:* Атряхин В. А.

*Корректура:* Язовцева О. С.

*Перевод:* Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 29.12.2017. Цена свободная.

Подписано в печать 01.12.2017. Формат 70x108 1/16. Объем 9,8 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1786.

Типография Издательства Мордовского университета  
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

## Для заметок

