ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 18, № 1

СВМО

2016

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарёва

Журнал Средневолжского математического общества

Том 18, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Саранск

2016

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Издатель: Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Территория распространения: зарубежные страны, Российская Федерация.
Язык: русский.

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректура: Язовцева О.С.
Перевод: Сыромясов А.О.

Адрес учредителя, издателя и редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
Web: http://journal.svmo.ru

С 2004 года статьи журнала «Журнал Средневолжского математического общества» индексируются в реферативной базе данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Адрес доступа: http://zbmath.org

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Подписано в печать 01.06.2016. Дата выхода в свет 29.06.2016. Цена свободная.

Содержание

Прикладная математика и механика

Математическое моделирование и информатика

От редакции

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Рубрики журнала:

– математика;

– прикладная математика и механика;

– математическое моделирование и информатика.

В первом номере 18-го тома публикуются наиболее значимые работы ученых и молодых исследователей, являющихся участниками VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского с международным участием (г. Саранск , 12-17 июля 2016 г.).

Школа-семинар проводится Национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарева и Межрегиональной общественной организацией «Средне-Волжское математическое общество». Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Научной Электронной Библиотеки Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

Математика

УДК 519.612

Решение плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений

© **Л. Б. Болотин,** [1] **Е. Б. Кузнецов** [2]

Аннотация. Работа посвящена поиску численного решения системы линейных алгебраических уравнений, которые имеют плохую обусловленность при определенных значениях параметра задачи, в качестве которого может быть время. Решение такой системы, например, по правилу Крамера или с помощью метода Гаусса невозможно в окрестности сингулярности матрицы системы. Предложен алгоритм, который позволяет успешно проходить как окрестности сингулярности, так и сами особые точки, в которых матрица системы вырождается. Данный алгоритм предполагает применение метода продолжения решения по наилучшему параметру.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, метод продолжения решения по параметру, наилучший параметр продолжения, обыкновенные дифференциальные уравнения, начальная задача, численные методы интегрирования

1. Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) - одна из основных задач вычислительной математики. От умения эффективно решать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Достаточно сказать, что наиболее эффективный на сегодняшний день численный метод решения задач механики сплошной среды – метод конечных элементов, сводится к решению СЛАУ. Значительная часть численных методов решения различных, в частности нелинейных задач включает в себя решение систем линейных уравнений как промежуточный шаг соответствующего алгоритма.

В данной работе рассматривается частный случай решения СЛАУ, а именно систем, матрицы которых становятся сингулярными при некоторых значениях параметра задачи. В окрестности таких точек задачи становятся плохо обусловленными, т.е. малым изменениям элементов матрицы отвечают большие изменения элементов решения. Несмотря на то, что плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике это решение численно получить затруднительно, так как даже незначительные вычислительные ошибки округления, неминуемо накапливаемые при расчете, приводят к большим погрешностям. В данной работе исследуются предельные особые точки, в которых ранг матрицы n-го порядка СЛАУ с n неизвестными принимает значение, равное $n-1$. Такие ситуации возникают при решении задач упруговязкопластичности материалов в механике деформируемого твердого тела.

Здесь предлагается алгоритм, позволяющий преодолеть отмеченные трудности.

[1] Студент кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; yourleo@yandex.ru,

[2] Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$A(t)x = b(t), \tag{2.1}$$

где A - матрица $\|a_{ij}\|_n^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, ..., b_n)^T$, параметр задачи $t \in \mathbb{R}$.

Для решения системы (2.1) используем правило Крамера:

$$x_i(t) = \frac{\Delta_i(t)}{\Delta}, i = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

где $\triangle\ (t) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \triangle_i\ (t) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $(b_{1i}, \dots, b_{ni})^T$ - столбец правой части системы (2.1), стоящий в i-м столбце матрицы A системы.

Рассмотрим решение системы (2.1) с матрицей вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где строка $a_{11} + \varepsilon_1(1-t), \dots, a_{1n} + \varepsilon_n(1-t)$ – k-ая строка, $k = \overline{1,n}$, $\varepsilon_i \ll 1$, $i = \overline{1,n}$.

3. Метод решения задачи

В окрестности значения $t = 1$ решение $x_i(t)$ системы (2.1) будет плохо обусловленным, а при $t = 1$ матрица системы становится вырожденной. Для решения системы применим метод продолжения решения по наилучшему параметру [1].

Продифференцируем систему (2.1) по переменной t:

$$A(t)\dot{x} = \dot{b}(t) - \dot{A}(t)x. \tag{3.1}$$

Здесь точка обозначает производную функции по параметру задачи t.

Решение полученной системы по правилу Крамера примет следующий вид:

$$\dot{x}_i = \frac{\tilde{\Delta}_i(t)}{\Delta_i},$$

и также будем иметь плохую обусловленность в окрестности значения $t = 1$. Преобразуем систему (3.1) к наилучшему параметру λ, который определяется условием

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 + (t')^2 = 1, i = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

где x_i' и t' – производные функций x_i и t по параметру λ.

Тогда система (3.1) запишется в виде

$$A(t)x' = (\dot{b}(t) - \dot{A}(t)x)t', \tag{3.3}$$

где $\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\varepsilon_1 & \cdots & -\varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

В матричном виде ее можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\lambda} \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{b}_1 \\ \vdots \\ \dot{b}_k + \varepsilon_1 x_1 \dot{+} \cdots + \varepsilon_n x_n \\ \vdots \\ \dot{b}_n \end{pmatrix} t'.$$

Запишем решение системы (3.3), вновь воспользовавшись правилом Крамера:

$$x_i' = \frac{\Delta_i(t)}{\Delta} t', \tag{3.4}$$

где $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \dot{b}_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & \dot{b}_k + \varepsilon_1 x_1 & + \cdots + \varepsilon_n x_n \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \dot{b}_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Подставив полученное решение x_i' в уравнение для наилучшего параметра (3.2), имеем:

$$\frac{\Delta_i \Delta_i}{\Delta^2} t'^2 = 1 \Rightarrow t'^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \Delta_i \Delta_i}, i = \overline{1, n}.$$

Тогда с учетом (3.4) приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{d\lambda} = \pm \dfrac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2}} \\ \dfrac{dt}{d\lambda} = \pm \dfrac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2}} \end{cases}, i = \overline{1, n} \tag{3.5}$$

Система (3.5) уже не имеет особенность при $t = 1$. Ее можно успешно проинтегрировать на отрезке $t \in [0, 2]$ любым численным методом решения задачи Коши с начальными условиями

$$\begin{cases} x_i(0) = x_{i0} \\ t(0) = 0 \end{cases}, i = \overline{1, n}, \tag{3.6}$$

где x_{i0} – решение системы (2.1) при $t = 0$ и параметр λ отсчитывается от начальной точки.

4. Пример

В качестве примера рассматривалась система (2.1) с матрицей A третьего порядка вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 + 0.1(1-t) & 1 + 0.2(1-t) & 3 + 0.3(1-t) \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя систему к наилучшему параметру, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\lambda} = \dfrac{13(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dx_2}{d\lambda} = \dfrac{-11(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dx_3}{d\lambda} = \dfrac{-5(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}} \\ \dfrac{dt}{d\lambda} = \dfrac{-2.4(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)}{\sqrt{(-2.4(1-t))^2 + 315(0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3)^2}}, \end{cases},$$

которую следует интегрировать с начальными условиями

$$\begin{cases} x_1(0) = -\frac{9}{2} \\ x_2(0) = \frac{121}{26} \\ x_3(0) = \frac{55}{26} \\ t(0) = 0 \end{cases}.$$

Численное решение этой начальной задачи было получено в вычислительной среде MathCAD 14 несколькими численными методами интегрирования [2]. Применялись следующие методы:

1. Метод Эйлера;

2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Отметим, что достоверное решение непреобразованной задачи этими методами получить не удалось из-за переполнения памяти ЭВМ в окрестности особой точки.

5. Выводы

Таким образом, разработан алгоритм и составлены вычислительные программы решения СЛАУ, матрицы которых могут вырождаться при некотором значении параметра задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00943.

Список литературы

1. В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, М.: Эдиториал УРСС, 1999, 222 с.

   (Монография переведена: Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 236 pp.)

2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, М.: Наука, 1987, 600 с.

Дата поступления 30.04.2016

Solution of ill-conditioned system of linear algebraic equations

© L. B. Bolotin [3], E. B. Kuznetsov [4]

Abstract. The paper deals with the numerical solution for a system of linear algebraic equations which are ill-conditioned for some values of the problem parameter. For example, the parameter may be time. The solution of such system according to Cramer's rule or the Gauss method, for example, is impossible in the vicinity of singularity of the system matrix. An offered algorithm allows to pass successfully the vicinity of the singularity and own singular point, where the system matrix degenerates. This algorithm involves the method of solution continuation with respect to the best parameter.

Key Words: system of linear algebraic equations, method of solution continuation with respect to a parameter, the best continuation parameter, ordinary differential equations, initial value problem, numerical methods of integration

[3] A student of the Department of differential equations, Moscow Aviation Institute, (national research university), Moscow; yourleo@yandex.ru,

[4] A professor of the Department of differential equations, Moscow Aviation Institute, (national research university), Moscow; kuznetsov@mai.ru

УДК 517.956.2

О существовании периодических траекторий для непрерывных потоков Морса-Смейла

© В. З. Гринес[1], Е. В. Жужома[2], В. С. Медведев[3], Н. А. Тарасова[4]

Аннотация. В работе рассматривается класс непрерывных потоков Морса-Смейла, заданных на топологическом замкнутом многообразии M^n, размерность n которого не ниже трех, и таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых состояний равновесия не имеют пересечений. Устанавливается взаимосвязь между существованием у таких потоков замкнутых траекторий и топологией несущего многообразия. А именно, доказано, что если f^t – непрерывный поток Морса-Смейла из рассматриваемого класса обладает μ стоковыми и источниковыми состояниями равновесия и ν седлами коразмерности один, а фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$, то поток f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, периодические траектории, гетероклинические траектории

1. Введение и формулировка основного результата

В настоящей работе рассматриваются непрерывные потоки Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geq 3$ (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], по системам Морса-Смейла см. книгу [3] и обзор [5]). Для формулировки основного результата приведем необходимые определения.

Пусть f^t – непрерывный поток на M^n. Это означает, что для любого $t \in \mathbb{R}$ задан гомеоморфизм $f_t : M^n \to M^n$ так, что $f_0 = id$ есть тождественное отображение и $f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2}$ для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x) = U$ и числа $T > 0$ найдется $t_0 \geq T$ такое, что $U(x) \cap f_{t_0}(U) \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует неблуждающее множество потока, которое обозначается через $NW(f^t)$. Известно, что $NW(f^t)$ состоит из целых траекторий, то есть является инвариантным множеством потока. Если N_1, N_2 – инвариантные множества потоков f_1^t, f_2^t соответственно, то будем говорить, что эти потоки *локально топологически эквивалентны* на N_1, N_2, если существуют окрестности $U(N_1)$, $U(N_2)$ и гомеоморфизм $\varphi : U(N_1) \to U(N_2)$ такой, что $\varphi(N_1) = N_2$ и φ отображает каждую траекторию (или часть траектории), принадлежащую $U(N_1)$, в траекторию (или часть траектории), принадлежащую $U(N_2)$, при этом концевые точки дуг траекторий из $U(N_1)$ должны переходить в концевые точки дуг траекторий из $U(N_2)$.

В связи с открытием в середине прошлого века топологических многообразий, которые не допускают гладкой структуры (см., например [11]), такие проблемы, как существова-

[1] профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

[3] научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; vmedvedev@hse.ru

[4] доцент кафедры ИМД, Институт пищевых технологий и дизайна, Нижний Новгород; tarasova-na-an@rambler.ru

ние периодических траекторий и исследование топологической структуры несущего многообразия, должны рассматриваться не только для гладких потоков на гладких многообразиях, но и для непрерывных потоков на топологических многообразиях. Особый интерес представляют непрерывные потоки, у которых неблуждающие множества аналогичны неблуждающим множествам гладких потоков с гиперболической структурой, поскольку последние обладают определенным типом устойчивости [2]. Простейшими потоками с такими неблуждающими множествами являются потоки Морса-Смейла, введенные Смейлом [13] (см. также [2], [5] с историческими комментариями). Будем называть f^t непрерывным *потоком Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора состояний равновесия и периодических траекторий, причем α- и ω-предельные множества любой траектории лежат в $NW(f^t)$;

2) в окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток локально топологически эквивалентен потоку либо с гиперболической периодической траекторией, либо с гиперболическим состоянием равновесия. Как следствие, для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются (и существуют) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(l)$, $W^u(l)$ соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями;

3) для любых траекторий l_1, $l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ топологически трансверсальны (это означает, что в окрестности любой точки из $W^s(l_1) \cap W^u(l_2)$ пересечение многообразий $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$).

Из конечности числа неблуждающих орбит вытекает, что инвариантные многообразия фиксированной неблуждающей орбиты пересекаются только вдоль самой орбиты.

Состояние равновесия (иногда будем говорить, неподвижная точка) $p \in NW(f^t)$ называется *узлом*, если либо $\dim W^s(p) = n$ (в этом случае p называется *стоком*, либо $\dim W^u(p) = n$ (в этом случае p называется *источником*). Неподвижная точка $\sigma \in NW(f^t)$ называется *седлом*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Напомним, что индексом Морса седловой неподвижной точки называется размерность ее неустойчивого многообразия. Будем говорить, что седловая неподвижная точка является седлом коразмерности один, если ее индекс Морса равен 1 или $n-1$ (это эквивалентно тому, что одно инвариантное многообразие орбиты одномерное, а второе – коразмерности один).

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть f^t – непрерывный поток Морса-Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом топологическом многообразии M^n размерности $n \geq 3$, такой, что*

1) неблуждающее множество $NW(f^t)$ содержит μ узлов и ν седел коразмерности один[5]:

2) инвриантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются:

3) фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Тогда поток f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.

Благодарности. Авторы благодарят О.В. Починку, а также участников семинара «Топологическая динамика», в Национальном исследовательском университете «Высшая

[5] Отметим, что поток f^t может содержать также произвольное количество седел, коразмерность которых отлична от единицы.

школа экономики» за полезные обсуждения. Авторы благодарят РФФИ, грант 15-01-03689-а, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект 98).

2. Доказательство основного результата

Предположим, что поток f^t Морса-Смейла не имеет периодических траекторий. Сперва докажем следующий вспомогательный результат. Пусть σ – седло коразмерности один потока Морса-Смейла f^t на замкнутом ориентируемом топологическом многообразии M^n размерности $n \geq 3$ без гетероклинических пересечений, и предположим для определенности, что $\dim W^s(\sigma) = 1$, $\dim W^u(\sigma) = n-1$. Тогда топологическое замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой S^{n-1}, состоящей из $W^u(\sigma)$ и некоторого стока s_0, $S^{n-1} = W^u(\sigma) \cup s_0$. Более того, существует окрестность U сферы S^{n-1}, гомеоморфная $S^{n-1} \times (-1;+1)$ и такая, что $f_T(clos\ U) \subset U$ для достаточно большого сдвига f_T на время T окрестности U вдоль траекторий потока f^t.

Действительно, из неравенства $n \geq 3$ вытекает, что размерность $\dim W^u(\sigma) = n-1 \geq 2$. Отсюда и из отсутствия гетероклинических пересечений следует, что замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ состоит из неустойчивого многообразия $W^u(\sigma)$ и одного стока, скажем s_0. Поэтому $clos\ W^u(\sigma) = W^u(\sigma) \cup s_0$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой, которую мы обозначим через S^{n-1}. Для $n = 3$ существование требуемой окрестности U сферы S^{n-1} доказано в [7], а для $n \geq 4$ – в [9]. Вспомогательное утверждение доказано. Отметим, что аналогичное утверждение справедливо для седла σ коразмерности один с $\dim W^s(\sigma) = n-1$, $\dim W^u(\sigma) = 1$. В этом случае $clos\ W^s(\sigma)$ состоит из $W^s(\sigma)$ и одного источника, скажем s_0, и топологически вложенная $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1} = W^s(\sigma) \cup s_0$ имеет окрестность U, гомеоморфную $S^{n-1} \times (-1;+1)$ и такую, что $f_{-T}(clos\ U) \subset U$ для достаточно большого $T > 0$.

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольное седло σ коразмерности один, и предположим для определенности, что $\dim W^s(\sigma) = 1$, $\dim W^u(\sigma) = n-1$. По доказанному ранее утверждению, топологическое замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой S^{n-1}, состоящей из $W^u(\sigma)$ и некоторого стока s_0, $S^{n-1} = W^u(\sigma) \cup s_0$, и существует окрестность U сферы S^{n-1}, гомеоморфная $S^{n-1} \times (-1;+1)$, такая, что $f_T(clos\ U) \subset U$. Если удалить из M^n окрестность U, то получим многообразие M_1^n (возможно, несвязное) с двумя граничными компонентами S_1^{n-1}, S_2^{n-1}, гомеоморфными S^{n-1}. Из включения $f_T(clos\ U) \subset U$ вытекает, что к каждой компоненте S_1^{n-1}, S_2^{n-1} можно подклеить шары B_1^n, B_2^n соответственно, и продолжить поток на эти шары так, чтобы внутри каждого B_1^n, B_2^n был ровно один сток. В результате мы получим поток Морса-Смейла f_1^t на M_1^n, у которого по сравнению с f^t на одно седло коразмерности один меньше и на один узел (в данном случае, сток) больше. Будем называть описанную процедуру разрезанием вдоль сепаратрисы коразмерности один.

Проделав ν разрезаний вдоль сепаратрис коразмерности один для всех седел коразмерности один, мы получим поток f_ν^t на M_ν^n Морса-Смейла, у которого в неблуждающем множестве содержатся $\mu + \nu$ узлов и нет седел коразмерности один. Из отсутствия седел коразмерности один следует, что на каждой компоненте связности многообразия M_ν^n имеется ровно один источник и ровно один сток [4]. Отсюда следует, что число компонент связности многообразия M_ν^n равно $k = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$. В частности, число $\mu + \nu$ четное, и на каждой компоненте связности построенный промежуточный поток полярный.

Обозначим через $S^{n-1} \otimes S^1$ тотальное пространство локально тривиального расслоения $(S^{n-1} \otimes S^1, S^1, S^{n-1})$ над окружностью S^1 со слоем, являющимся $(n-1)$-мерной S^{n-1}.

Известно, что любые два, либо сохраняющие, либо обращающие ориентацию, гомеоморфизма $S^{n-1} \to S^{n-1}$ изотопны [6], [8]. Поэтому с точностью до гомеоморфности имеются только два тотальных пространства $S^{n-1} \otimes S^1$, одно из которых является прямым произведением $S^{n-1} \times S^1$, которое соответствует тривиальному расслоению $S^{n-1} \times S^1 \to S^1$.

Восстановление исходного многообразия M^n после разрезаний вдоль сепаратрис коразмерности один из полученных компонент связности дает связную сумму

$$M^n = \left(S^{n-1} \otimes S^1\right) \sharp \cdots \sharp \left(S^{n-1} \otimes S^1\right) \sharp N_1^n \sharp \cdots \sharp N_k^n, \tag{2.1}$$

поскольку каждое разрезание производилось по сфере коразмерности один с последующим приклеиванием n-мерного шара. В этой связной сумме N_1^n, $\ldots$, N_k^n суть компоненты связности многообразия M_ν^n. Число разрезаний исходного многообразия, которое не приводит к увеличению числа компонент связности, равно $g = \nu - \frac{1}{2}(\mu + \nu) + 1 = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$. Каждое такое разрезание означает наличие в связной сумме слагаемого $S^{n-1} \otimes S^1$.

Поскольку многообразие M^n ориентируемое, то все расслоения $S^{n-1} \otimes S^1$ являются тривиальными и, следовательно, связная сумма в (2.1) примет вид

$$M^n = \left(S^{n-1} \times S^1\right) \sharp \cdots \sharp \left(S^{n-1} \times S^1\right) \sharp N_1^n \sharp \cdots \sharp N_k^n.$$

Отсюда и из теоремы Ван-Кампена следует, что $\pi_1(M^n)$ содержит подгруппу изоморфную свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров $\mathbb{Z}$ группы целых чисел $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Список литературы

1. Аносов Д.В., “Исходные понятия. Элементарная теория”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **1** (1985), 156–204.

2. Аносов Д.В., “Грубые системы”, *Труды МИАН СССР*, **169** (1985), 59–93.

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Издательство РХД, Москва-Ижевск, 2011.

4. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В., “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла”, *Труды МИАН*, **271** (2010), 1–20.

5. Жужома Е.В., Медведев В.С., “Глобальная динамика систем Морса-Смейла”, *Труды МИАН*, **261** (2008), 115–139.

6. Келдыш Л.В., “Топологические вложения в евклидово пространство”, *Труды МИАН СССР*, **81** (1966), 1–184.

7. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Appl.*, **117** (2002), 335–344.

8. Daverman R.J., Venema G.A., *Embeddings in Manifolds*, GSM, Amer. Math. Soc., Providence, 2009.

9. Grines V., Gurevich E., Pochinka O., “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81–90.

10. Hirch M., Pugh C., Shub M., *Invariant Manifolds. 583*, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1977.

11. Milnor J., “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Annals of Math.*, **64**:2 (1956), 399–405.

12. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

13. Smale S., “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

14. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:1 (1967), 741–817 (перевод *Успехи мат. наук* 25(1970), 113–185).

Дата поступления 9.05.2016

On the existence of periodic orbits for continuous Morse-Smale flows

© V. Z. Grines[6], E. V. Zhuzhoma[7], V. S. Medvedev[8], N. A. Tarasova[9]

Abstract. We consider the class of continuous Morse-Smale flows defined on a topological closed manifold M^n of dimension n which is not less than three, and such that the stable and unstable manifolds of saddle equilibrium states do not have intersection. We establish a relationship between the existence of such flows and topology of closed trajectories and topology of ambient manifold. Namely, it is proved that if f^t (that is a continuous Morse-Smale flow from considered class) has mu sink and source equilibrium states and ν saddles of codimension one, and the fundamental group $\pi_1(M^n)$ does not contain a subgroup isomorphic to the free product $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ copies of the group of integers $\mathbb{Z}$, then the flow f^t has at least one periodic trajectory.

Key Words: Morse-Smale flows, periodic orbits, heteroclinic orbits

[6] professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[7] professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru

[8] researcher TAPRADESS laboratory, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vmedvedev@hse.ru

[9] associate professor of Department of IMD , Institute of food technology and design, Nizhny Novgorod; tarasova-na-an@rambler.ru

УДК 517.9

Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами просторно расположенными на 2-торах

© В. З. Гринес[1], О. В. Починка[2], А. А. Шиловская[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс G A-диффеоморфизмов f, заданных на замкнутом 3-многообразии M^3 и имеющих неблуждающее множество, расположенное на конечном числе попарно непересекающихся ручно вложенных в M^3 f-инвариантных двумерных торов так, что каждый тор T есть объединение $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$, либо $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, где B_T — одномерное базисное множество, просторно расположенное на T и Σ_T — конечное число периодических точек с одинаковым индексом Морса. Установлено, что объемлющее многообразие, допускающее такие диффеоморфизмы гомеоморфно факторпространству $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_\sim$, где $(z,1) \sim (\widehat{J}(z), 0)$ для некоторого алгебраического автоморфизма тора $\widehat{J}$, заданного матрицей $J \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая есть либо гиперболическая, либо $J = \pm Id$. Показано, что любой диффеоморфизм $f \in G$ полусопряжен локально прямому произведению Аносовского диффеоморфизма и грубого преобразования окружности. Доказано, что структурно устойчивый диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен локально прямому произведению обобщенного DA-диффеоморфизма и грубого преобразования окружности. Для таких диффеоморфизмов найдена полная система топологических инвариантов и в каждом классе топологической сопряженности построен стандартный представитель.

Ключевые слова: A-диффеоморфизм, DA-диффеоморфизм, топологический инвариант, топологическая сопряженность

Пусть f — диффеоморфизм замкнутого гладкого 3-многообразия M^3, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла, согласно которой множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$. Напомним, что замкнутое f-инвариантное множество $\Lambda \subset M^3$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного подрасслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что выполняются оценки: $\|Df^k(v)\| \leq C\lambda^k\|v\|, \quad \|Df^{-k}(w)\| \leq C\lambda^k\|w\|, \quad \forall v \in E^s_\Lambda, \forall w \in E^u_\Lambda, \forall k \in \mathbb{N}$, для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $\lambda < 1$. Гиперболическая структура множества Λ приводит к существованию у каждой точки $x \in \Lambda$ *устойчивого* W^s_x и *неустойчивого* W^u_x многообразий, которые определяются следующим образом: $W^s_x = \{y \in M^3 : \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\}$, $W^u_x = \{y \in M^3 : \lim\limits_{k\to-\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\}$, где d — метрика на Λ, индуцированная римановой метрикой на $T_\Lambda M^3$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [24] неблуждающее множество $NW(f)$ A-диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A, f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $B_1, \dots, B_n$, называемых *базисными*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Назовем *типом базисного множества* B_i пару неотрицательных чисел (a_i, b_i) таких, что $a_i = dim\, W^u_x$, $b_i = dim\, W^s_x$ для любой точки $x \in B_i$, причем $b_i = 3 - a_i$.

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от периодической орбиты (в том числе отлично и от неподвижной точки), и *тривиальным* в противном

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru

[2] Заведующая кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; opochinka@hse.ru

[3] Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г.Нижний Новгород; a.shilovskaia@gmail.com

случае. Заметим, что для любого нетривиального базисного множества B_i выполняется условие $a_i \cdot b_i \neq 0$.

В силу [21] базисное множество является *аттрактором (репеллером)* тогда и только тогда, когда оно содержит неустойчивые (устойчивые) многообразия своих точек. Однако размерность базисного множества, вообще говоря, может не совпадать с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то аттрактор (репеллер) называется *растягивающимся (сжимающимся)*. Базисное множество, не являющееся аттрактором или репеллером, называется *седловым*.

Диффеоморфизмы с базисными множествами, топологическая размерность которых равна трем, были полностью изучены в конце 60-х годов прошлого века, а именно, было доказано, что они являются диффеоморфизмами Аносова, а многообразие M^3 есть трехмерный тор T^3, который и есть единственное базисное множество, являющееся аттрактором и репеллером одновременно. В работах [6], [18] Фрэнкса и Ньюхауса была получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов (перевод работ см. в [19]).

Если базисное множество А-диффеоморфизма трехмерного многообразия является двумерным, то в силу [21] оно является аттрактором или репеллером. А. Брауном в [1] доказано, что если неблуждающее множество А-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ содержит двумерный аттрактор (репеллер), то он является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером), то есть аттрактором, принадлежащим замкнутой (компактной без края) f-инвариантной поверхности, называемой *носителем*.

В работе Гринеса В.З. и Жужомы Е.В. ([11])[4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов $f : M^3 \to M^3$ в предположении, что их неблуждающее множество содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Ими было доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В работе Гринеса В.З., Медведева В.С. и Жужомы Е.В. [13] доказано, что любое поверхностное двумерное базисное множество совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа ручно вложенных в M^3 двумерных торов. Кроме того, ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора[5]. Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть негладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [15]).

В серии работ В.З. Гринеса, Ю.А. Левченко, В.С. Медведева, О.В. Починки [10], [8], [7], [9], начиная с 2012 г., рассматривались A-диффеоморфизмы $f : M^3 \to M^3$ в предположении, что их нетривиальные базисные множества являются двумерными и поверхностными. В работе [9] доказано, что любой такой диффеоморфизм f объемлюще Ω-сопряжен (а если f – структурно устойчивый, то топологически сопряжен) некоторому модельному диффеоморфизму ϕ, являющемуся локально прямым произведением алгебраического

[4] В действительности в работе [11] получены более общие результаты для диффеоморфизма f, заданного на n-мерном многообразии ($n \geq 3$) при условии, что его неблуждающее множество содержит ориентируемый растягивающийся аттрактор. Однако в случае $n = 3$ условие ориентируемости можно опустить [12].

[5] ***Гиперболическим автоморфизмом тора*** $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый целочисленной унимодулярной матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. То есть $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ mod\ 1$

преобразования тора, заданного гиперболической матрицей $C \in GL(2,\mathbb{Z})$, и грубого преобразования окружности. Для модельных диффеоморфизмов установлен алгебраический критерий их принадлежности одному и тому же классу топологической сопряженности. Показано, что объемлющее многообразие, допускающее рассматриваемые диффеоморфизмы, является факторпространством $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_{\sim}$, где $(z,1) \sim (\widehat{J}(z), 0)$ для некоторого алгебраического автоморфизма тора $\widehat{J}$, заданного матрицей $J \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая есть либо гиперболическая, либо $J = \pm Id$.

Из вышесказанного понятно, что наличие базисных множеств размерности 3 и 2 налагает существенные ограничения на динамику диффеоморфизма и топологию его несущего многообразия. Из работ [3], [16], [25] следует, что условие существования нульмерного или одномерного базисного множества A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ не накладывает ограничений на топологию объемлющего многообразия.

Изучению диффеоморфизмов на M^3, неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества, посвящен целый ряд работ [4], [2], [3], [26], [27] Х. Бонатти, Х. Боте, Р. Вильямса, Е. Жужомы, Н. Исаенковой и др. При этом в работах [2], [3], [26], [27] базисные множества являлись одномерными растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами и не лежали на поверхностях, а диффеоморфизмы не были структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивых диффеоморфизмов такого типа (с растягивающимся аттрактором) до сих пор остается открытым.

В работе [4] Х. Бонатти и Н. Гельман был изучен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и одного репеллера, каждый из которых лежит на двумерной поверхности с непустым краем. Подчеркнем, что вопрос о топологической классификации вышеописанных диффеоморфизмов также не рассматривался.

В настоящей работе рассматривается класс G A-диффеоморфизмов f, заданных на замкнутом 3-многообразии M^3 и имеющих неблуждающее множество, расположенное на конечном числе попарно непересекающихся ручно вложенных в M^3 f-инвариантных двумерных торов так, что каждый тор T есть объединение $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$, либо $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, где B_T — одномерное базисное множество, просторно расположенное на T и Σ_T — конечное число периодических точек с одинаковым индексом Морса. Под просторной расположенностью базисного множества B_T мы понимаем следующее. Положим $\hat{W}^s_x = W^s_x \cap T$ и $\hat{W}^u_x = W^u_x \cap T$ для любой точки $x \in B_T$. Следуя [20], множество B_T назовем *просторно расположенным* на T, если для различных точек $x, y \in B_T$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x,y]^s \subset \hat{W}^s_x$ и $[x,y]^u \subset \hat{W}^u_x$ не гомотопна нулю на T. Диффеоморфизм из класса G получается, например, из следующей конструкции.

Рассмотрим алгебраический автоморфизм тора $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, индуцированный гиперболической матрицей $C \in GL(2,\mathbb{Z})$. Пусть p_0 – неподвижная седловая точка диффеоморфизма $\widehat{C}$, соответствующая началу координат в $\mathbb{R}^2$ с собственными значениями λ^u и λ^s. В некоторой окрестности U точки p_0 введем локальные координаты x_1, x_2, в которых матрица линейного отображения $\widehat{C}$ диагональная, то есть $\widehat{C}(x_1,x_2) = (\lambda^u x_1, \lambda^s x_2)$ на U. Выберем значение $r_0 \in (0, \frac{1}{2})$ так, чтобы 2-шар $B_{r_0}(p_0)$ радиуса r_0 с центром в точке p_0 содержался в U. Пусть $\delta(r)$ – функция одной переменной такая, что $0 \le \delta(r) \le 1$ для всех r, $\delta'(r) < 0$ для $r_0/2 < r < r_0$ и $\delta(r) = \begin{cases} 0, & r \ge r_0, \\ 1, & r \le r_0/2. \end{cases}$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_2\delta(\| x \|)$. Пусть η^t – поток этой системы, $\eta^t(x_1,x_2) = (x_1, \eta_2^t(x_1,x_2))$. Тогда $\eta^t = id$ вне шара $B_{r_0}(p_0)$ и $D\eta^t_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$. Положим $f_{\widehat{C},p_0} = \eta^\tau \widehat{C}$ для некоторого $\tau > 0$ такого, что $e^\tau \lambda^s > 1$.

Заметим, что $Df_{\widehat{C},p_0} = \begin{pmatrix} \lambda^u & 0 \\ 0 & e^\tau \lambda^s \end{pmatrix}$, так что p_0 – гиперболический источник. По построению диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма Аносова, и координатные оси $f_{\widehat{C},p_0}$ — инвариантны. Поскольку диффеоморфизмы η^τ и $\widehat{C}$ имеют противоположные направления движения на оси Ox_2, то диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ имеет две симметричные относительно p_0 неподвижные точки q_1, q_2 на оси Ox_2, которые являются гиперболическими седловыми точками (см. рис. 1.1).

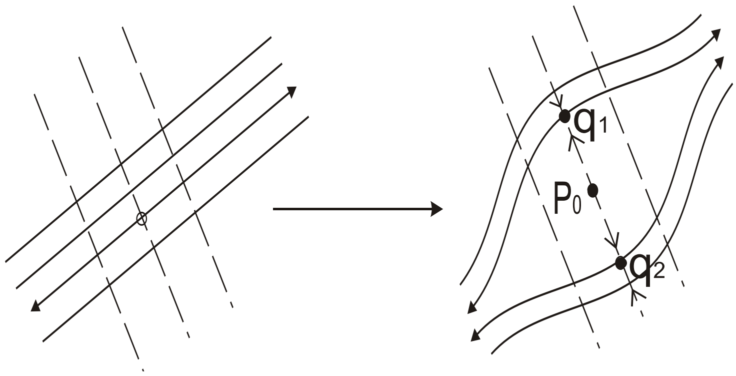


Рисунок **1.1**

Хирургическая операция Смейла

Для диффеоморфизма $f_{\widehat{C},p_0}$ множество $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W^u_{p_0}$ является одномерным аттрактором и спектральное разложение имеет вид $\{p_0, \Lambda\}$ (см. например [23]). Построенный таким образом одномерный аттрактор Λ является растягивающимся, а про диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ говорят, что он получен из гиперболического автоморфизма $\widehat{C}$ *раздутием* неподвижной точки p_0 вдоль неустойчивых многообразий.

Зададим диффеоморфизм φ на $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ формулой $\varphi(x,y) = \left(\frac{4x}{5-3y}, \frac{5y-3}{5-3y}\right)$. По построению φ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из одного источника $\alpha_0 = (0,1)$ и одного стока $\omega_0 = (0,-1)$. Представим $\mathbb{T}^3$ как произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ и зададим на нем диффеоморфизм f формулой $f(z,t) = (f_{\widehat{C},p_0}(z), \varphi(x,y))$, где $z \in \mathbb{T}^2$, $(x,y) \in \mathbb{S}^1$. Тогда тор $A = \mathbb{T}^2 \times \{\omega_0\}$ является аттрактором[6], а тор $R = \mathbb{T}^2 \times \{\alpha_0\}$ является репеллером диффеоморфизма f. Неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одномерного поверхностного аттрактора $B_A = \Lambda \times \{\omega_0\}$ и неподвижной седловой точки $\sigma = \{p_0\} \times \{\omega_0\}$, принадлежащих поверхности A, а также одномерного седлового множества $B_R = \Lambda \times \{\alpha_0\}$ и неподвижного источника $\alpha = \{p_0\} \times \{\alpha_0\}$, лежащих на поверхности B_R (см. рис. 1.2). Таким образом, все базисные множества диффеоморфизма f разделены на две непустые части $\mathcal{B}_A = \{B_A, \sigma\}$ и $\mathcal{B}_R = \{B_R, \alpha\}$ такие, что

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} W^u_B, \quad R = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_R} W^s_B.$$

[6] Компактное множество $A \subset M^3$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f : M^3 \to M^3$, если существует замкнутая окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset int\, U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = A$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f.

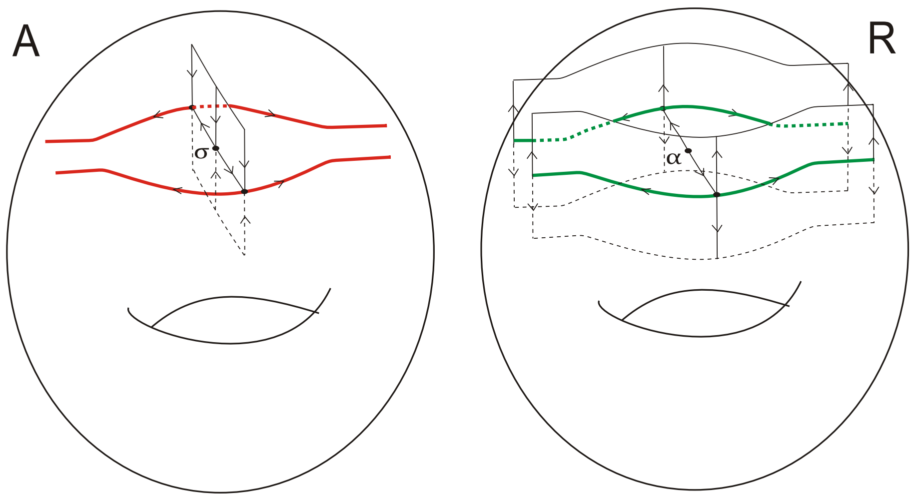


Рисунок **1.2**

Структурно устойчивый диффеоморфизм из класса G

Топология объемлющего многообразия M^3, допускающего диффеоморфизмы класса G уточняется следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть $f \in G$ диффеоморфизм. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где матрица J либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Гиперболический автоморфизм назовем *примарным*, если он не является степенью никакого другого гиперболического диффеоморфизма. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество сохраняющих ориентацию примарных автоморфизмов двумерного тора.

Для описания динамики диффеоморфизмов класса G напомним теорию грубых преобразований окружности $\mathbb{S}^1$.

Пусть $MS(\mathbb{S}^1)$ — класс структурно устойчивых преобразований окружности, который согласно Майеру [17] совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла на $\mathbb{S}^1$. Разобъем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Ниже мы приведем результаты Майера по топологической классификации структурно устойчивых преобразований.

Предложение 1.1.

1. Для любого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых периода k.

2. Для любого диффеоморфизма $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$, периодических орбит, две из которых неподвижны, а остальные периода 2.

Положим $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной точки p_0 по часовой стрелке, тогда $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, где l — целое такое, что при $k = 1$, $l = 0$, в то время как для $k > 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и (k, l) являются взаимно простыми[7]. Заметим, что число l не зависит от выбора точки p_0.

[7] На самом деле, А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *числом вращения*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

Для $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ положим $\nu = -1$; $\nu = 0; \nu = +1$, если его неподвижные точки являются источниками, стоками и источниками или стоками соответственно. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечетное, и $\nu = \pm 1$, если q четное.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l такого, что $k = 1$, $l = 0$, тогда как для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ построим стандартного представителя φ_+ в $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{-1, 0, +1\}$ построим стандартного представителя φ_- in $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами q.

Введем следующие отображения:
$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_{n,k,l} = \psi_{n\cdot k}\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$\tilde{\varphi}_{q,0} = \psi_q \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для нечетного q;
$\tilde{\varphi}_{q,+1} = \psi_q \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_{q,-1} = \tilde{\varphi}_{q,+1}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для четного q.

Пусть $\tilde{\Pi}_+ = \{\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\varphi}_{n,k,l}\}$ и $\tilde{\Pi}_- = \{\tilde{\varphi}_- = \tilde{\varphi}_{q,\nu}\}$. Непосредственно можно проверить, что $\tilde{\varphi}_\sigma(r + \mu) = \tilde{\varphi}_\sigma(r)$ для $\sigma \in \{+, -\}$ и $\mu \in \mathbb{Z}$. Тогда корректно определены диффеоморфизмы $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Положим $\Pi_+ = \{\varphi_+\}$, $\Pi_- = \{\varphi_-\}$ и $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$.

Положим $M_J = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ – группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$ для $J = \pm I\widehat{\xi^\lambda}$, $\xi \in \mathcal{E}$. Обозначим через $p_{_J} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_J$ естественную проекцию, а через $\tilde{\phi}_\sigma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ прямое произведение отображений $\tilde{\varphi}_\sigma \in \tilde{\Pi}_\sigma$ и $C = \widehat{\xi^\mu}$, то есть $\tilde{\phi}_\sigma(z, r) = (C(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$.

Предложение 1.2. *Диффеоморфизм $\tilde{\phi}_\sigma$ проектируется в диффеоморфизм $\phi_\sigma = p_{_J}\tilde{\phi}_\sigma p_{_J}^{-1} : M_J \to M_J$ в следующих случаях:*

- *при любом $\lambda \in \mathbb{Z}$ для $\sigma = +$;*
- *только при $\lambda = 0$ для $\sigma = -$.*

Будем называть диффеоморфизм $\phi_\sigma : M_J \to M_J$ *локально прямым произведением отображений C и φ_σ* и писать $\phi_\sigma = C \otimes \varphi_\sigma$. Обозначим через Φ множество всех таких локально прямых произведений.

Напомним, что отображение $g : M^3 \to M^3$ называется *полусопряженным с отображением $f : M^3 \to M^3$ или фактором отображения f*, если существует сюръективное непрерывное отображение $h : M^3 \to M^3$ такое, что $hf = gh$. Отображение h в этом случае называется *полусопряжением.*

Теорема 1.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует диффеоморфизм $\phi \in \Phi$, являющийся фактором f.*

Диффеоморфизмы класса Φ являются структурно устойчивыми, тогда как в классе G существуют диффеоморфизмы, не являющиеся структурно устойчивыми. Опишем конструкцию диффеоморфизма $f \in G$, не являющегося структурно устойчивым.

Определим диффеоморфизм $\phi : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ формулой $\phi(z, x, y) = (\widehat{C}(z), \varphi(x, y))$, где $\widehat{C}$ диффеоморфизм Аносова на торе $\mathbb{T}^2$ и φ диффеоморфизм «источник-сток», построенные выше. Тогда $\phi \in \Phi$ и неблуждающее множество диффеоморфизма ϕ состоит из одного репеллера $R = \mathbb{T}^2 \times \{(0, 1)\}$ и одного аттрактора $A = \mathbb{T}^2 \times \{(0, -1)\}$.

Обозначим через $l_A \subset \mathbb{S}^1$ замкнутую дугу на окружности, ограниченную точками $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ и $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, и такую, что $(0, 1) \notin l_A$. Положим $K_A = \mathbb{T}^2 \times l_A$. Зададим на множестве K_A диффеоморфизм g_A формулой $g_A(z, (x, y)) = (\eta^{\tau - \frac{5|x|\tau}{3}}(z), (x, y))$, где η^t поток, используемый при раздутии точки p_0 вдоль неустойчивых многообразий. Обозначим через ζ^t аналогичный поток для раздутия точки p_0 вдоль устойчивых многообразий. Обозначим через $l_R \subset \mathbb{S}^1$ замкнутую дугу на окружности, ограниченную точками $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ и $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, и такую, что $(0, -1) \notin l_R$. Положим $K_R = \mathbb{T}^2 \times l_R$. Зададим на множестве K_R диффеоморфизм g_R формулой $g_R(z, (x, y)) = (\zeta^{\tau - \frac{5|x|\tau}{3}}(z), (x, y))$.

Положим $g : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ диффеоморфизм, совпадающий с g_A на K_A, с g_R на K_R и тождественный на $\mathbb{T}^3 \setminus (K_A \cup K_R)$. Тогда искомый диффеоморфизм определяется формулой $f = g\phi$. По построению диффеоморфизм f принадлежит классу G, так как его неблуждающее множество расположено на торах A и R, при этом $\mathcal{B}_A = \{B_A, \sigma_A\}$ и $\mathcal{B}_R = \{B_R, \sigma_R\}$, где B_A — растягивающийся одномерный аттрактор, B_R — сжимающийся одномерный репеллер, а σ_A, σ_R — седловые точки (см. Рис. 1.3). Построенный диффеоморфизм не является структурно устойчивым, поскольку устойчивая сепаратриса седла σ_A совпадает с неустойчивой сепаратрисой седла σ_R.

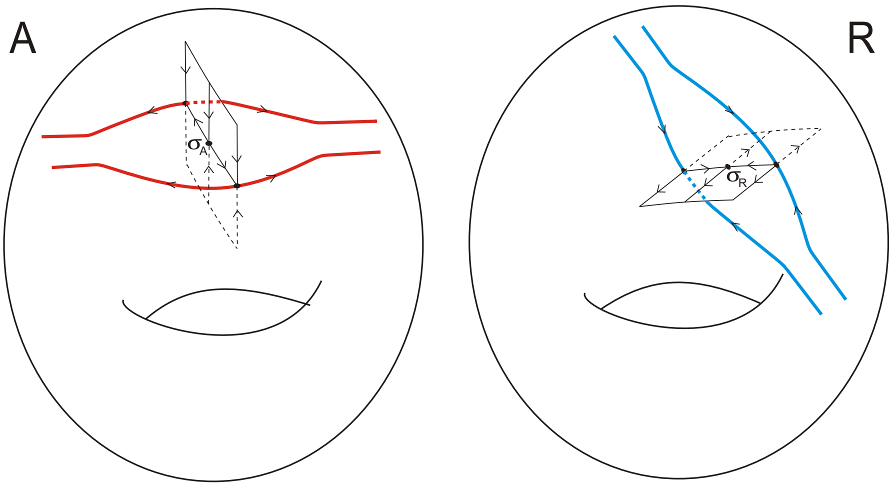


Рисунок **1.3**

Диффеоморфизм из класса G, не являющийся структурно устойчивым

Чтобы описать множество структурно устойчивых диффеоморфизмов в классе G построим ещё один класс Θ модельных диффеоморфизмов. Для этого возьмем примарный автоморфизм $\widehat{\xi}$, $\xi \in \mathcal{E}$ и обозначим через P множество, состоящее из конечного числа периодических орбит диффеоморфизма $\widehat{\xi}$. В окрестности множества P проведем раздутие периодических орбит множества P вдоль устойчивых или неустойчивых многообразий. Обозначим через $\mathcal{D}$ класс построенных DA-диффеоморфизмов $f_{\widehat{\xi},P}$. Аналогично приведенной выше конструкции построим *локально прямое произведение* θ_σ *DA-диффеоморфизма* $C = f^{\mu}_{\widehat{\xi},P}$ *и грубого преобразования окружности* φ_σ на многообразии M_J, где $J = \pm I f^{\lambda}_{\widehat{\xi},P}$. Обозначим через Θ множество таких моделей.

Теорема 1.3. *Любой структурно устойчивый диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму $\theta \in \Theta$.*

Фундаментом для настоящих исследований послужили результаты по топологической классификации А-диффеоморфизмов двумерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, полученные в работах Х. Бонатти, Р. Ланжевена, В. З. Гринеса, А. Ю. Жирова, Х. Х. Калая, Р. В. Плыкина (для ссылок см. [5], [14], [22]).

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике») и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-03689-а).

Список литературы

1. Brown A., "Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds", *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.
2. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods II", *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.
3. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
4. Bonatti H., Guelman N., "Axiom A diffeomorphisms which are derived from Anosov flows", *Journal of Modern Dynamics*, **4**:1 (2010), 1–63.
5. Bonatti Ch., Langevin R., *Diffeomorphismes de Smale des surfaces*, Asterisque. Paris, 2011, 250 pp.
6. Franks J., "Anosov Diffeomorphisms on Tori", *Transactions of the American Mathematical Society*, **145** (1969), 117–124.
7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В., "О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами", *Нелинейная динамика*, **10** (2014), 17–33.
8. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., "On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms", *Regular and Chaotic Dynamics*, **19** (2014), 506–512.
9. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets", *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081–4102.
10. Гринес В. З., Левченко Ю. А., "О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами", *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.
11. Grines V., Zhuzhoma E., "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357** (2005), 617–667.
12. Жужома Е. В., Медведев В. С., "О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях", *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 83–104.
13. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., "О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях", *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.
14. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск, 2011, 424 с.

15. Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J., "The Lapunov dimension of nonwhere diffferntiable attracting torus", *Ergodic theory and Dynam. Systems*, **2** (1984), 261–281.

16. Ma J., Yu B., "Genus two Smale-Williams solenoid attractors in 3-manifolds", *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **20**:6 (2011), 909–926.

17. Майер А. Г., "Грубое преобразование окружности в окружность", *Учен. зап. ГГУ*, **12** (1939), 215–229.

18. Newhouse S. E., "On Codimension One Anosov Diffeomorphisms", *American Journal of Mathematics*, **92**:3 (1970), 761–770.

19. Ньюхаус Ш. Е., "Гладкие динамические системы", *Изд. "Мир"*, **4** (1977), 87–98.

20. Плыкин Р. В., "О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла", *Матем. сб.*, **84(126)** (1971), 301–312.

21. Плыкин Р. В., "Источники и стоки А-диффеоморфизмов на поверхностях", *Мат. сб.*, **23** (1974), 223–253.

22. Плыкин Р. В., "О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов", *УМН*, **35**:3(213) (1980), 94–104.

23. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press., 1999, 506 pp.

24. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

25. Smale S., "Stability and isotopy in discrete dynamical systems", *Dynamical Systems*, 1973, 527–530.

26. Williams R. F., "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473–487.

27. Жужома Е. В., "О классификации одномерных растягивающихся аттракторов", *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.

Дата поступления 9.05.2016

Diffeomorphisms of 3-manifolds with 1-dimensional basic sets exteriorly situated on 2-tori

© V. Z. Grines[8], O.V. Pochinka[9], A.A. Shilovskaya[10]

Abstract. In this paper we consider the class G of A-diffeomorphisms f, defined on a closed 3-manifold M^3. The nonwandering set is located on finite number of pairwise disjoint f-invariant 2-tori embedded in M^3. Each torus T is a union of $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$ or $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, where B_T is 1-dimensional basic set exteriorly situated on T and Σ_T is finite number of periodic points with the same Morse number. We found out that an ambient manifold which allows such diffeomorphisms is homeomorphic to a quotient space $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_\sim$, where $(z,1) \sim (\widehat{J}(z),0)$ for some algebraic torus automorphism $\widehat{J}$, defined by matrix $J \in GL(2,\mathbb{Z})$ which is either hyperbolic or $J = \pm Id$. We showed that each diffeomorphism $f \in G$ is semiconjugate to a local direct product of an Anosov diffeomorphism and a rough circle transformation. We proved that structurally stable diffeomorphism $f \in G$ is topologically conjugate to a local direct product of a generalized DA-diffeomorphism and a rough circle transformation. For these diffeomorphisms we found the complete system of topological invariants; we also constructed a standard representative in each class of topological conjugation.

Key Words: A-diffeomorphism, DA-diffeomorphism, topological invariant, topological conjugation

[8] Professor of Chair of Fundamental Mathematics, HSE, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru
[9] Professor of Chair of Fundamental Mathematics, HSE, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru
[10] PhD student of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; a.shilovskaia@gmail.com

УДК 517.925

О числе линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей

© **М. В. Долов [1], Е. В. Круглов [2]**

Аннотация. В работе рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение $P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$, где P, Q – взаимно простые полиномы степени не менее двух, коэффициенты которых, как и переменные x, y, в общем случае комплексные. Для данного уравнения доказано, что если реализуется ситуация, когда рассматриваемое уравнение имеет бесконечное число линейных частных интегралов, то полиномы P, Q не могут быть взаимно простыми. Основной результат работы содержит точную оценку числа различных линейных частных интегралов; оценку числа линейных интегралов в случае, когда инвариантные множества, соответствующие линейным интегралам, не имеют общих точек; оценку числа линейных интегралов в случае, когда они имеют общую особую точку. Метод доказательства существенно использует исходное предположение о том, что полиномы P, Q являются взаимно простыми. Приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.
Ключевые слова: полиномиальные векторные поля, линейные частные интегралы, дифференциальные уравнения

1. Основная теорема

Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими частными интегралами исследовались многими математиками. При этом значительное внимание уделялось оценке числа и степени алгебраических инвариантных кривых. В частности, большое количество исследований посвящено оценке числа линейных частных интегралов (см. работы [1] - [8]).

В настоящей работе доказана

Т е о р е м а 1.1. *Дифференциальное уравнение*

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0, \tag{1.1}$$

где P, Q – взаимно простые полиномы, коэффициенты которых, как и переменные x, y, в общем случае комплексные, $\max(\deg P, \deg Q) = n$, *при $n \geq 2$ может иметь не более $3n-1$ различных линейных частных интегралов, при этом: 1) данная оценка точная; 2) в инвариантное множество, являющееся объединением инвариантных множеств $ax + by + c_j = 0$, $j = 1, 2, ..., r$, где $|a| + |b| > 0$, величины c_s и c_j различны для $s \neq j$, может входить не более n множеств указанного вида (т.е. $r \leq n$); 3) особая точка уравнения* (1.1) *может принадлежать не более чем $n+1$ различным линейным частным интегралам.*

Условиям и утверждению теоремы 1.1. удовлетворяет вещественное уравнение

$$x(x^{n-1} - 1)dy - y(y^{n-1} - 1)dx = 0,$$

[1] Доктор физико-математических наук, профессор, Почетный работник ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

[2] Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kruglov19@mail.ru.

допускающее $3n-1$ линейных частных интегралов $x=0$, $y=0$, $x=\exp(2\pi ik/(n-1))$, $y=\exp(2\pi ik/(n-1))$, $y=x\exp(2\pi ik/(n-1))$, $k=0,1,2,...,n-2$.

Отметим, что в приведенном примере уравнение допускает линейные частные интегралы с комплексными коэффициентами.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Пункт 1 теоремы 1.1. доказан в работе [1] (см. также [2]). Для доказательства пп. 2 и 3 рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Если при $n\geq 2$ уравнение* (1.1) *имеет бесконечное число различных линейных частных интегралов, то полиномы P, Q в* (1.1) *не могут быть взаимно простыми.*

Доказательство.

I. Пусть уравнение (1.1) допускает бесконечное множество линейных частных интегралов $\Phi_s\equiv ax+by+c_s=0$, где $|a|+|b|>0$, величины c_s и c_j различны для $s\neq j$. Тогда полином $aP+bQ$ степени не более n делится на любой полином Φ_s. Так как делителей Φ_s больше n, то $aP+bQ\equiv 0$. Таким образом, в случае I утверждение теоремы имеет место.

II. Пусть условия случая I не выполняются. Допустим, что полиномы P и Q взаимно просты и при этом уравнение (1.1) допускает бесконечное число различных линейных частных интегралов. Так как P и Q взаимно просты, то уравнение (1.1) имеет конечное число особых точек. Поэтому найдётся хотя бы одна конечная особая точка (x_0,y_0) для (1.1), которая принадлежит бесконечному числу линейных частных интегралов. Без ограничения общности можно считать, что $x_0=y_0=0$. Таким образом, уравнение (1.1) допускает бесконечное множество решений $y=kx$, где k принимает бесконечное множество различных значений.

Функция $y=kx$ является решением для (1.1) тогда и только тогда, когда для всех x выполнено тождество

$$kP(x,kx)\equiv Q(x,kx). \tag{2.1}$$

Так как $\max(\deg P,\deg Q)=n$, то

$$P(x,y)=P_n(x,y)+P_{n-1}(x,y)+...+P_0,\quad Q(x,y)=Q_n(x,y)+Q_{n-1}(x,y)+...+Q_0, \tag{2.2}$$

где P_j, Q_j – однородные полиномы степени j. Из соотношений (2.1) и (2.2) вытекает, что для всех x

$$(kP_n(1,k)-Q_n(1,k))x^n+(kP_{n-1}(1,k)-Q_{n-1}(1,k))x^{n-1}+...+kP_0-Q_0\equiv 0. \tag{2.3}$$

В силу (2.3) для бесконечного множества различных значений k выполнены равенства

$$kP_n(1,k)-Q_n(1,k)=0,\quad kP_{n-1}(1,k)-Q_{n-1}(1,k)=0,\quad \dots,\quad kP_0-Q_0=0. \tag{2.4}$$

Так как $P_j(1,k)$, $Q_j(1,k)$ суть полиномы по k, то в силу (2.4) для любого k

$$Q_n(1,k)\equiv kP_n(1,k),\quad Q_{n-1}(1,k)\equiv kP_{n-1}(1,k),\quad \dots,\quad Q_0\equiv kP_0. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.5), (2.2) для всех значений k имеем $Q(1,k)\equiv kP(1,k)$. Отсюда следует, что тождество (2.1) справедливо при любых x и k. Поэтому $xQ(x,y)\equiv yP(x,y)$ для всех

x и y. Для $n \geq 2$ последнее возможно только в случае, когда полиномы P и Q имеют общий делитель степени не ниже первой.
Доказательство закончено.

Пример уравнения $ydx - xdy = 0$, имеющего решениями $y = kx$ для любого k, показывает, что условие $n \geq 2$ в лемме 2.1. существенно.

Из доказательства леммы 2.1. вытекают следующие факты.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 1.1. дифференциальное уравнение* (1.1) *в инвариантное множество, являющееся объединением инвариантных множеств* $ax + by + c_j = 0$, $j = 1, 2, ..., r$, *где* $|a| + |b| > 0$, *величины* c_s *и* c_j *различны для* $s \neq j$, *может входить не более* n *множеств указанного вида (т.е.* $r \leq n$*).*

Доказательство следствия непосредственно вытекает из случая I доказательства леммы 2.1..

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 1.1. особая точка уравнения* (1.1) *может принадлежать не более чем* $n + 1$ *различным линейным частным интегралам.*

Доказательство. Допустим, что полиномы P и Q взаимно просты. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$ - особая точка уравнения (1.1), через которую проходит конечное число различных линейных частных решений. Следуя в дальнейшем в точности доказательству случая II леммы 2.1, получим уравнения (2.4). Первое из уравнений (2.4) является алгебраическим степени $n + 1$, то есть имеет не более чем $n + 1$ различных значений k, соответствующих проходящим через одну точку линейным частным решениям.

Таким образом, основная теорема 1.1. доказана. Точность оценок следует из приведённого примера.

Авторы выражают благодарность Н.И. Вулпе (N. Vulpe) за то, что он обратил наше внимание на статьи [3] и [4], посвящённые оценке числа линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей. Отметим, что из доказанных в настоящей работе утверждений вытекает, что при рассмотрении двумерных полиномиальных векторных полей теорема 4 работы [3] является следствием теоремы 1.1.

Список литературы

1. Долов М.В., Круглов Е.В., “О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:4 (2015), 553–555.

2. Долов М.В., Круглов Е.В., “О числе линейных частных интегралов алгебраических дифференциальных уравнений”, *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль*, 2014, 58-59.

3. Llibre J., Medrado J.C., “On the invariant hyperpnanes for d-dimensional polynomial vector fields”, *Journal of Phisics A: Mathematical and Theoretical*, **40** (2007), 8385–8391.

4. Artes J. C., Grunbaum B., Llibre J., “On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems”, *Pacific Journal of Mathematics*, **184**:2 (1998), 207-230.

5. Любимова Р.А., “Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми”, *Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сб. Горький, ГГУ*, 1977, 19-22.

6. Долов М.В., Бубнова И.В., “Системы с линейными частными интегралами”, *Известия РАЕНю Дифференциальные уравнения*, 2006, № 11, 79-80.

7. Долов М.В., Чистякова С.А., “О числе линейных частных интегралов кубической системы, вырожденной на бесконечности”, *Труды Средневолжского математического общества*, **9**:2 (2007), 62-67.

8. Долов М.В., Чистякова С.А., “О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III”, *Вестник Нижегородского университета*, 2011, № 2, 123-129.

Дата поступления 9.05.2016

On the number of linear particular integrals of polynomial vector fields

© **M. V. Dolov[3], E. V. Kruglov[4]**

Abstract. In this paper we consider the ordinary differential equation $P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$ where P, Q are relatively prime polynomials of degree, greater than 1. Coefficients of the equations and variables x, y may be complex. We prove that when this equation has an infinite number of linear partial integrals, the polynomials P, Q can not be relatively prime. The main result of the paper contains an accurate estimate of the number of different linear particular integrals; estimate of the number of linear integrals when the invariant sets corresponding to line integrals have no points in common; estimate of the number of line integrals in a case where they have a common singular point. The method of proof essentially uses the initial assumption that the polynomials P, Q are relatively prime. An example is given that implements proven result.

Key Words: polynomial vector fields, linear particular integrals, differential equations

[3] Professor, Honorary worker of Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.

[4] Associated Professor of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.

УДК 517.956.2

О топологии потенциальных магнитных полей

© М. Л. Коломиец[1], А. Н. Сахаров[2], Е. В. Трегубова[3]

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы описания топологии магнитных полей в плазме на языке динамических систем. Для модели потенциального магнитного поля с четырьмя узлами даются примеры топологически не эквивалентных структурно устойчивых конфигураций.

Ключевые слова: особые точки поля, магнитные силовые линии, источники, стоки, сепаратрисы, сепараторы, гетероклинические кривые

1. Введение

Задача описания топологии магнитного поля, взаимодействующего с проводящей движущейся средой, которую для краткости будем называть плазмой, играет существенную роль в магнитной гидродинамике (МГД). Действительно, топология магнитных полей является определяющим фактором при рассмотрении динамики плазмы в короне Солнца [1], в задачах об устойчивости плазмы в термоядерных реакторах [2] и механизмах турбулентного динамо[4] [3], в теории магнитного перезамыкания [4], [5].

Уравнения МГД ([6], гл. 8) определяют два векторных поля на некотором трехмерном многообразии M^3: магнитное поле $\boldsymbol{H}$ и поле скоростей частиц плазмы $\boldsymbol{v}$. Эти поля порождают, соответственно, два потока на M^3, причем траектории первого потока – силовые линии магнитного поля. Топология магнитного поля определяется фазовым портретом этого потока. Естественно выделить среди множества всех возможных фазовых портретов класс структурно устойчивых и рассмотреть для элементов этого класса следующие задачи, важные для приложений:

1. заданы источники поля, требуется найти топологически не эквивалентные конфигурации (фазовые портреты) магнитных силовых линий;

2. найти типичные бифуркации таких конфигураций.

В настоящей работе рассматривается задача 1 для потенциальных магнитных полей на сфере S^3, моделирующих магнитные поля в короне Солнца. При этом предполагается, что источники поля моделируются особыми точками поля типа узел. Это предположение позволяет использовать для описания магнитных полей гладкие градиентно-подобные потоки на S^3, являющиеся структурно устойчивыми потоками, удовлетворяющими условиям:

а) неблуждающее множество потока состоит из конечного числа гиперболических особых точек;

б) устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек имеют трансверсальные пересечения.

[1] Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru

[2] Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru

[3] Доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; t2733792@yandex.ru

[4] Динамо – механизм усиления или поддержания стационарного (либо колебательного) состояния магнитного поля гидродинамическими движениями проводящей среды.

Для таких потоков существует полная топологическая классификация (см. [7]).

Нелокальные бифуркации в магнитных полях связаны с рождением или разрушением так называемых сепараторов, математическими образами которых являются гетероклинические траектории потоков, принадлежащие пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия. Вопрос о существовании таких траекторий для данного потока является нетривиальной задачей. Применительно к системам, описывающим магнитные поля, она рассмотрена в серии работ [9], [10], [8], в которых найдены достаточные условия существования гетероклинических траекторий у градиентно-подобных потоков.

Изучение топологии магнитных полей в плазме в терминах динамических систем началось достаточно давно (в начале 60-х годов прошлого века), о чем свидетельствует внушительное количество публикаций по данной тематике. Большую их часть можно найти в библиографическом списке монографии [5] и обзора [1]. Некоторые более поздние работы приведены списке литературы данной публикации.

2. Геометрия магнитных полей в терминах динамических систем

Пусть $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ обозначает евклидовы координаты точки S^3 в локальной карте. Тогда силовые линии магнитного поля являются интегральными кривыми векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ – вектор магнитной индукции, s – параметр, определяющий положение точки на интегральной кривой относительно начального положения. Уравнение (2.1) определяет поток на S^3, который будем обозначать $\boldsymbol{f}^s_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$.

2.1. Особенности поля

Описание топологии силовых линий магнитного поля начинается с описания конфигурации особенностей поля. Электромагнитное поле имеет особенности в точках, где оно равно нулю (такие точки называтся особыми точками поля), а также в точках, где расположены источники поля: электрические или магнитные заряды. Точечные заряды являются *источниками* поля, то есть силовые линии либо начинаются, либо заканчиваются в этих точках. Магнитные заряды – монополи до сих пор экспериментально не обнаружены, что приводит к тому, что магнитное поле бездивергентно:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.2}$$

а источниками реального магнитного поля являются *диполи* – комбинации двух противоположных по знаку зарядов, равных по абсолютной величине. В рассматриваемых нами моделях магнитных полей диполи заменяются парой точек, являющихся устойчивой и неустойчивой особыми точками типа узел, в которых условие (2.2) нарушается. Физическое обоснование такого подхода носит название *модель топологии магнитного заряда* (пункт 2.3).

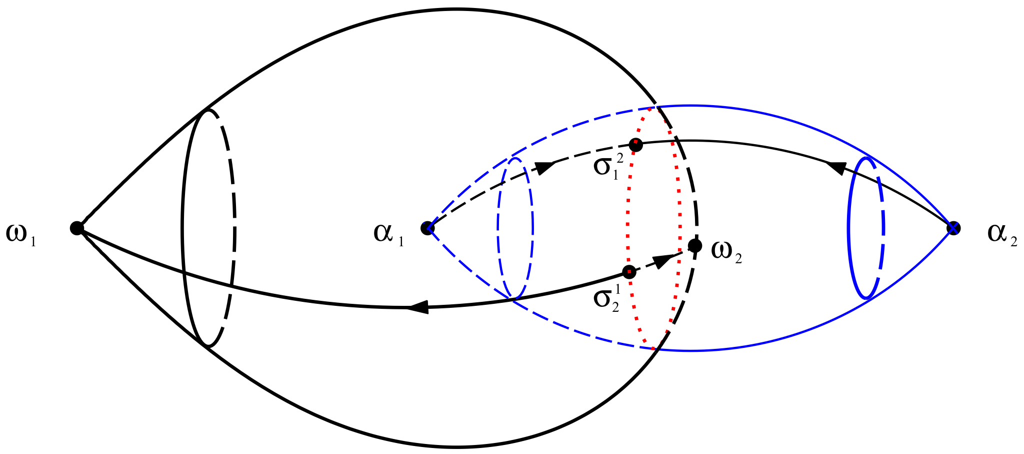


Рисунок **2.1**
Скелет магнитного поля с четырьмя источниками (α_1, α_2 – источники, ω_1, ω_2 – стоки) и двумя седлами (σ_1^1, σ_2^2). Одномерные сепаратрисы седел – кривые со стрелками, точечная кривая – сепараторы.

Нулевые точки поля определяются уравнением

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{2.3}$$

Они являются положениями равновесия (неподвижными точками) потока $\boldsymbol{f}^s_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$. Из условия бездивергентности (2.2) следует, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки удовлетворяют равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{2.4}$$

В типичном случае вещественные части собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки поля $\boldsymbol{B}$ не равны нулю. Тогда из равенства (2.4) следует, что нулевая точка является седлом с двумерной и одномерной сепаратрисами. Так как собственные значения являются корнями вещественного многочлена третьей степени, то они либо все вещественные, либо одно из них вещественно, а два других – комплексно сопряженные.

В литературе по физике магнитных полей одномерную сепаратрису седла называют *шипом* (spine), а двумерную – *веерной поверхностью* (fan). Пересечения веерных поверхностей различных нулевых точек принято называть *сепараторами*. Если эти пересечения трансверсальны, то их называют *гетероклиническими сепараторами*. На языке динамических систем – это гетероклинические траектории. Объединение особенностей поля, шипов, веерных поверхностей и сепараторов определяет топологическую структуру поля и называется *скелетом* или *остовом* магнитного поля[5] (рис. 2.1).

2.2. Уравнения МГД и свойство вмороженности поля

Эволюция во времени магнитного поля описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \nu_m \Delta \boldsymbol{B},$$

[5] При построении изображений скелетов трехмерных векторных полей мы придерживаемся общепринятых обозначений: источники обозначаются буквой α, стоки – ω, седла – σ. Верхний индекс равен размерности неустойчивого многообразия седла.

где коэффициент ν_m – магнитная вязкость, характеризующая проводимость плазмы. Скорость движения частиц плазмы $\boldsymbol{v}$ определяется уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \frac{\mu^2}{4\pi\rho}\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{B}.$$

Здесь ρ – плотность среды, p – давление, η и ζ – коэффициенты вязкости.

В магнитной гидродинамике силовые линии имеют вполне определенный физический смысл: как установил Х. Альфвен[6] [11], в идеально проводящей плазме имеет место свойство *вмороженности магнитного поля*: при движении среды силовые линии следуют за ней, будучи как бы приклеенными к ее частицам. Покажем, что общим критерием вмороженности магнитного поля в плазму является выполнение уравнения индукции при $\nu_m = 0$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{2.5}$$

Т е о р е м а 2.1. *Равенство* (2.5) *эквивалентно равенству нулю коммутатора* $[\boldsymbol{B},\boldsymbol{v}]$ *векторных полей* $\boldsymbol{v}$ *и* $\boldsymbol{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Траектории движения частиц плазмы – это интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t). \tag{2.6}$$

Обозначим решение этого уравнения с начальным значением $\boldsymbol{r}_0$ через $\boldsymbol{f}^t_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}_0)$. Параметризацию силовых линий магнитного поля изменим следующим образом $\dfrac{d\tau}{ds} = \rho(\boldsymbol{r},t)$, после чего уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r},t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t). \tag{2.7}$$

Соответственно, решения этого уравнения обозначим через $\boldsymbol{f}^\tau_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_0)$.

Рассмотрим разность $\Delta(\delta t,\delta\tau,\boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{f}^{\delta t}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}^{\delta\tau}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}_0)) - \boldsymbol{f}^{\delta\tau}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{f}^{\delta t}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}_0))$. Согласно известному результату (см., например, [12], глава 8, §39, лемма 1), предел

$$\lim_{\delta\tau,\,\delta t\to 0}\frac{\Delta(\delta t,\delta\tau,\boldsymbol{r}_0)}{\delta t\delta\tau} = [\boldsymbol{B},\boldsymbol{v}]$$

является коммутатором (скобкой Пуассона) векторных полей $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v}$. С другой стороны, непосредственным вычислением получаем, что

$$\lim_{\delta\tau,\,\delta t\to 0}\frac{\Delta(\delta t,\delta\tau,\boldsymbol{r}_0)}{\delta t\delta\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\frac{\boldsymbol{B}}{\rho} - \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}. \tag{2.8}$$

Уравнение индукции (2.5) с учетом (2.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + (\mathrm{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = 0. \tag{2.9}$$

[6] Ханнес Улоф Йёста Альфвен (швед. Hannes Olof Gosta Alfven; 30 мая 1908, Норрчёпинг – 2 апреля 1995, Юрсхольм) – известный шведский физик, специалист по физике плазмы. Лауреат Нобелевской премии по физике в 1970 г. за работы в области теории магнитогидродинамики.

Правая часть в равенстве (2.8) равна

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho\right)\boldsymbol{B}.$$

Из уравнения непрерывности $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\boldsymbol{v} = 0$ следует, что

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho\right)\boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}(\mathrm{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}.$$

Таким образом, правая часть (2.8) равна левой части уравнения (2.9), деленной на ρ. Следовательно, $[\boldsymbol{B},\boldsymbol{v}] = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется уравнение (2.5). Доказательство закончено.

Известно, что равенство $[\boldsymbol{B},\boldsymbol{v}] = 0$ эквивалентно утверждению: потоки, порождаемые векторными полями $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{v}$, коммутируют:

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}^t \circ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{B}}^s(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{B}}^s \circ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{v}}^t(\boldsymbol{r})$$

([12], гл. 8, § 39, теорема Д). Отсюда получаем очевидное следствие теоремы 2.1:

Следствие 2.1. *Если выполняется уравнение* (2.5)*, то силовые линии магнитного поля при сдвиге по траекториям уравнения* (2.6) *переходят в себя.*

Таким образом, силовые линии магнитного поля двигаются как частицы плазмы[7], в чем и заключается смысл термина «вмороженность» поля.

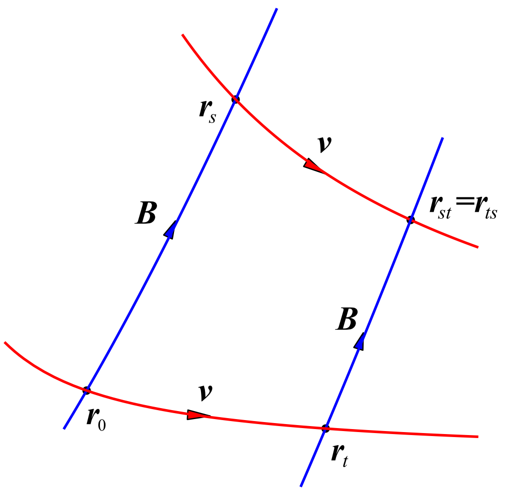


Рисунок **2.2**

Движение магнитных линий в плазме

Свойство вмороженности поля обычно рассматривают как следствие постоянства магнитного потока через поверхность, натянутую на произвольный замкнутый контур, который движется вместе с плазмой (теорема Кельвина о циркуляции для магнитного потока). Из приведенного выше доказательства теоремы 2.1 следует, что это достаточное, но не необходимое свойство.

[7] Благодаря чему можно говорить о движении силовых линий как о реальном физическом процессе. Кроме того, вдоль магнитных силовых линий движутся так называемые волны Альфвена, экспериментальное подтверждение существования которых недавно получено.

Экспериментальные наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля в плазме демонстрирует характер релаксационных колебаний: в течении значительного промежутка времени структура магнитного поля не изменяется, затем быстро происходит перестройка структуры, которая сопровождается явлением *перезамыкания магнитных силовых линий* [4], [5]. Так как силовые линии поля движутся вместе с частицами плазмы, то линии с разными направлениями[8] могут оказаться достаточно близко. Далее силовые линии могут либо разойтись без изменения топологии, либо перезамкнутся.

Очевидно, возможными моделями явления магнитного перезамыкания являются бифуркации в системе (2.1), приводящие к изменению топологии поля. Свойство вмороженности гарантирует неизменность топологии магнитного поля в следующем смысле.

Определение 2.1. *Два векторных поля на многообразии M называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$, переводящий интегральные кривые первого поля в интегральные кривые второго, сохраняя их ориентации.*

Так как вектор индукции $\boldsymbol{B}$ зависит от времени t, то поля $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_1)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_2)$ определяют, вообще говоря, две различные конфигурации интегральных кривых. Однако, имеет место

Теорема 2.2. ([5], [13]) *Пусть поле $\boldsymbol{B}$ коммутирует с полем скоростей частиц плазмы $\boldsymbol{v}$. Тогда поля $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_1)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_2)$ топологически орбитально эквивалентны для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.*

2.3. Модель топологии магнитного заряда

Точные решения системы уравнений МГД при заданных начальных и краевых условиях известны для ограниченного ряда частных случаев. Численное же решение требует применения суперкомпьютеров [14]. Поэтому при изучении топологии силовых линий магнитных полей используются приближенные модели.

В основе таких моделей лежит ряд предположений физического характера, упрощающих анализ. Совокупность всех этих предположений носит название *модель топологии магнитного заряда* (модель ТМЗ) (см., например, [1]) и сводится к следующему:

1. реальный источник поля представляется в виде пары точечных источников соответствующей полярности;
2. поле потенциально, то есть представимо в виде $\boldsymbol{B} = \nabla\Phi$, где Φ – скалярный потенциал;
3. при моделировании магнитного поля короны Солнца граница фотосферы рассматривается как инвариантная сфера S^2, на которой располагаются все источники поля.

Обычно динамическая система порождается векторным полем, особенностями которого являются только нулевые точки. Так как геометрически силовые линии поля в окрестности источников ведут себя также как в окрестности неустойчивых (устойчивых) нулевых точек поля, то в модели ТМЗ неявно предполагается, что моделируемое поле топологически орбитально эквивалентно полю, у которого источники (стоки) поля являются неустойчивыми (устойчивыми) нулевыми точками (узлами). Хотя дивергенция поля в этих

[8] Направление силовой линии в заданной точке совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{B}$, касающегося линии в этой точке.

точках не равна нулю, именно это предположение позволяет выделить из множества всех потенциальных полей класс структурно устойчивых, что невозможно для бездивергентных полей.

Из предположений модели ТМЗ следует, что число особенностей поля удовлетворяет соотношению
$$n_\alpha - n_\sigma^2 = n_\omega - n_\sigma^1, \tag{2.10}$$
где n_σ^1 – число седел индекса 1, n_σ^2 – число седел индекса 2. Это соотношение следствие равенства нулю суммы индексов особых точек векторного поля на трехмерном замкнутом многообразии [16].

3. Потенциальное поле с четырьмя источниками

В этом разделе рассматриваются модели магнитных полей с четырьмя источниками, порождаемыми гладкими регулярными потенциалами. Для приложений важно знать ответ на следующий вопрос: сколько структурно устойчивых топологически не эквивалентных конфигураций существует у таких полей? Фактически это вопрос о количестве топологически не эквивалентных градиентно-подобных систем на S^3, у которых число особых точек типа узел равно четырем.

Заметим, что потенциальное поле с четырьмя источниками вида:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + \alpha_2 \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2\|^3} + \alpha_3 \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3\|^3} - (1+\alpha_2+\alpha_3) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_4}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_4\|^3} \tag{3.1}$$

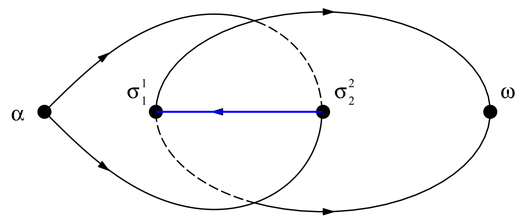


Рисунок **3.1**

Гетероклиническое пересечение двумерных сепаратрис, замыкание которых гомеоморфно диску

часто используется для демонстрации возможностей модели ТМЗ при моделировании магнитных полей в короне Солнца (см., например, [18], [19], [20], [21], [22], [23]). Предполагается, что все источники лежат на инвариантной двумерной сфере (плоскости $z = 0$ в локальных координатах), моделирующей поверхность фотосферы, и поле симметрично относительно этой сферы.

В литературе по магнитным полям в короне Солнца принято делить одномерные сепаратрисы седел на два вида: *вертикальные* (upright), у которых такая сепаратриса трансверсальна к инвариантной сфере, и *горизонтальные* (prone), эта сепаратриса которой лежит на инвариантной сфере. Появление вертикальных сепаратрис можно объяснить следующим образом. Заметим, что двумерная сепаратриса седла уравнения (2.1) гомеоморфна $\mathbb{R}^2$, следовательно, замыкание такой сепаратрисы гомеоморфно либо сфере, либо замкнутому диску. В последнем случае сепаратриса не делит сферу S^3 на две компоненты (рис. 3.1), однако содержит гетероклиническую траекторию. Эта конфигурация[9] возникает после бифуркации «седло-узел» на инвариантной двумерной сфере, в силу которой появляются одномерные вертикальные сепаратрисы в S^3.

Итак, рассмотрим градиентно-подобное векторное поле с четырьмя особыми точками типа узел. Возможные структурно устойчивые конфигурации поля будем искать, используя формулу (2.10).

Пусть $n_\alpha = 1, n_\omega = 3$. Тогда уравнение (2.10) имеет целочисленные решения $n_\sigma^2 = m, n_\sigma^1 = 2 + m \quad m = 0, 1, \ldots$. Две структурно устойчивые конфигурации для $m = 0$ изображены на рис. 3.2 и 3.3. Обращение направления интегральных кривых дает нам все возможные конфигурации для случая $n_\alpha = 3, n_\omega = 1$.

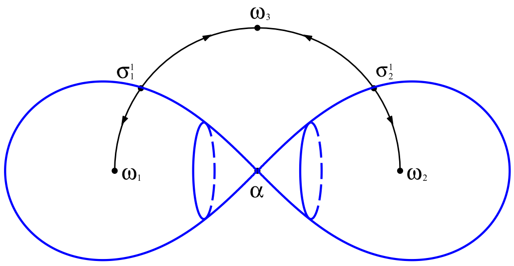


Рисунок **3.2**

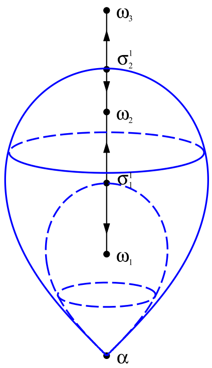


Рисунок **3.3**

Скелеты поля с одним источником и тремя стоками: «separate state» слева, «enclosed state» справа

[9] Называемая в англоязычной литературе *звеном цепи* (chain-link). В русскоязычном математическом фольклоре эту конфигурацию называют «Бабочка».

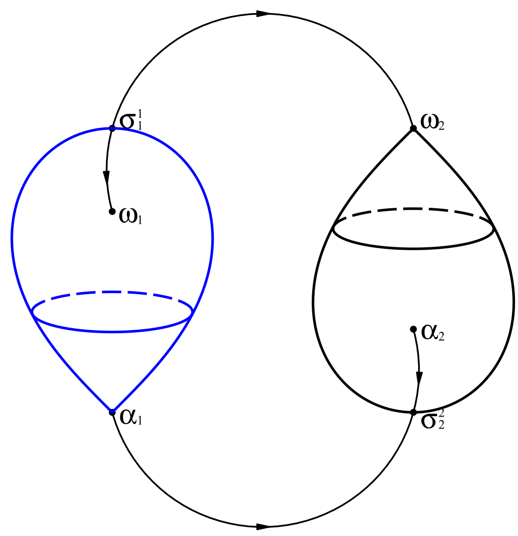


Рисунок **3.4**

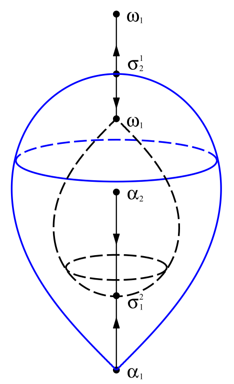


Рисунок **3.5**

Скелеты поля с двумя источниками и двумя стоками: «detached state» слева, «nested state» справа

Предположим теперь, что $n_\alpha = 2, n_\omega = 2$. Имеем решения $n_\sigma^1 = m, n_\sigma^2 = m, \ m = 1, 2, \ldots$. Структурно устойчивые конфигурации при $m = 1$ изображены на рис. 3.4 и 3.5.

Покажем, что каждому $m \in \mathbb{N}$ соответствует структурно устойчивая конфигурация интегральных кривых. При этом конфигурации, изображенные на рис. 2.1, 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 будет считать базовыми, так как они соответствуют минимальным значениям m.

Для различения топологически не эквивалентных конфигураций будем использовать топологический инвариант градиентно-подобных потоков на трехмерных многообразиях, предложенный в работе [7].

Обозначим через W_a^u, W_a^s неустойчивое и устойчивое интегральное многообразие точки a. Объединение A стоков, седел индекса 1 и их неустойчивых сепаратрис является аттрактором[10] потока, порождаемого рассматриваемым векторным полем (соответствен-

[10] Замкнутое множество A называется *аттрактором* потока f^t, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f^t(U_A) \subset \mathrm{int} U_A$ и $A = \bigcap\limits_{t \geq 0} f^t(U_A)$. Множество R называется *репеллером*, если оно – аттрактор потока f^{-t}.

но, объединение R источников, седел индекса 2 и их устойчивых сепаратрис является репеллером потока).

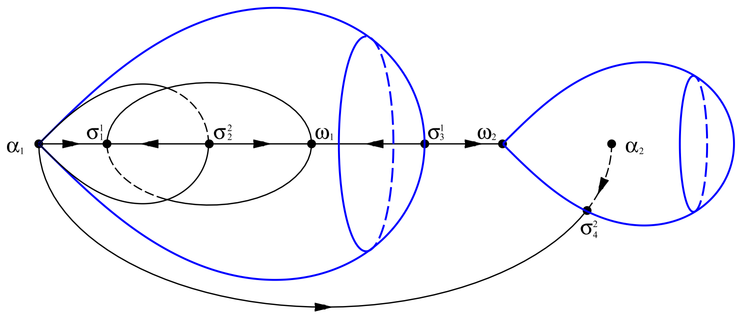
Известно [17], что граница F трубчатой окрестности множества A представляет собой ориентированную поверхность рода $n_\sigma^1 - n_\omega + 1$, которая задает разбиение Хегора[11] сферы S^3. Пересечения

$$\{c_k = W^s_{\sigma_k^1} \cap F,\, k = 1, 2, \ldots, n_\sigma^1\}$$

представляют собой набор непересекающихся простых замкнутых кривых на поверхности F. Еще один набор замкнутых кривых на F дают пересечения

$$\{d_k = W^u_{\sigma_k^2} \cap F,\, k = 1, 2, \ldots, n_\sigma^2\}.$$

По построению число гетероклинических интегральных кривых равно числу пересечений кривых первого набора с кривыми из второго набора (рис. 3.7).



Р и с у н о к **3.6**

Скелет поля с двумя источниками, двумя стоками и четырьмя седлами

Тогда согласно теореме 1 из [7] поверхность F с первым и вторым наборами замкнутых кривых является полным топологическим инвариантом потока, порождаемого векторным полем: две конфигурации интегральных кривых орбитально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : F \to F'$, который переводит первый набор окружностей в первый, а второй – во второй. Алгоритм проверки существования гомеоморфизма h приведен в упомянутой работе [7].

Отсюда следует, что конфигурации, изображенные на рис. 3.2 и 3.3, топологически эквивалентны. Действительно, поверхность F в обоих случаях является сферой S^2, на которой расположены две непересекающиеся замкнутые кривые c_1 и c_2. Аналогичное заключение можно сделать относительно конфигураций на рис. 3.4 и 3.5.

[11] Разбиение Хегора замкнутого трехмерного многообразия – представление его в виде объединения двух трехмерных многообразий с общим краем, каждое из которых является «полным кренделем».

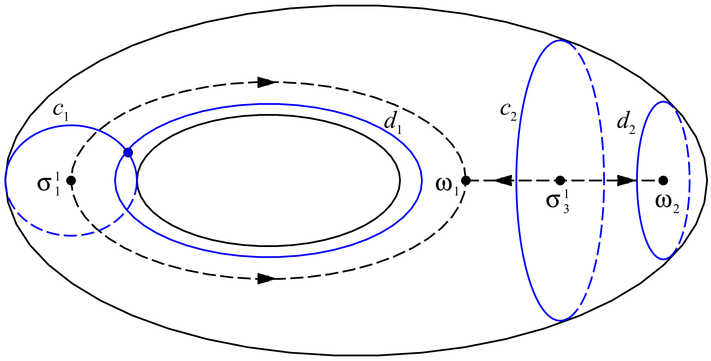


Рисунок **3.7**

Окрестность аттрактора поля с двумя источниками, двумя стоками и четырьмя седлами

Конфигурация на рис. 2.1 соответствует трансверсальному пересечению двумерных устойчивого и неустойчивого многообразий седел σ_1^1 и σ_2^2. Это пересечение дает, как минимум, две некомпактные гетероклинические кривые: поверхность F является сферой S^2, на которой имеются две пересекающиеся закнутые кривые c_1 и d_1. Обращение направления на интегральных кривых дает еще одну структурно устойчивую конфигурацию с гетероклиническими кривыми.

Теперь заметим, что реализовать конфигурацию интегральных кривых, соответствующую произвольному значению $m > 1$, можно вставив в конфигурации, изображенные на рис. 3.2, 3.3 и 3.4, 3.5, конструкцию рис. 3.1 m раз. Например, рис. 3.6 соответствует случаю $m = 1$: $n_\alpha = n_\omega = 2$, $n_\sigma^1 = n_\sigma^2 = 2$, а поверхность F является тором (рис. 3.7).

Итак, каждому значению $m \geq 0$ сопоставлена структурно устойчивая конфигурация силовых линий поля. Кроме того, при фиксированном m могут существовать топологически не эквивалентные конфигурации из-за наличия разного количества гетероклинических траекторий при пересечении двумерных сепаратрис седел.

Таким образом, получаем следующее утверждение: потенциальное поле с четырьмя источниками имеет счетное число структурно устойчивых, топологически не эквивалентных конфигураций силовых линий.

В заключение отметим следующее.

В ряде работ физического характера утверждается, что число не эквивалентных структурно устойчивых конфигураций магнитных полей с шестью особыми точками равно пяти: это конфигурации, изображенные на рис. 2.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5. На самом деле, число их равно трем, так как две конфигурации рис. 3.2, 3.3 топологически эквивалентны, также как и две конфигурации рис. 3.4, 3.5.

При численном исследовании поля вида (3.1) число обнаруживаемых нулевых точек, как правило, не превышает четырех. Это связано, на наш взгляд, с тем, что после регуляризации[12] поля в источниках (где оно не ограничено) получаем поле, близкое к полиномиальному. В ряде работ на основе численных экспериментов сделан вывод: число нулевых точек в таких моделях асимптотически близко к числу источников [24], [25], [26], [27].

Полученные результаты уточняют и, насколько нам известно, впервые строго обосновывают некоторые утверждения о моделях магнитных полей в плазме.

[12] Под эти понимается переход к топологически эквивалентному полю, у которого источники и стоки нулевые точки типа узел. Такую эквивалентность можно построить, если учесть следующий факт: интегральная кривая входит в нулевую точку поля за бесконечное значение «времени», а в источник (сток) поля – за конечное [15].

Автор выражает благодарность В.З. Гринесу, Е.В. Жужоме и Е.Я. Гуревич за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687.

Список литературы

1. D.W. Longcope, "Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields", *Living Rev. Solar Phys.*, **2**:7 (2005), 5–72.

2. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев, "Геометрия магнитного поля", *Вопросы теории плазмы*, **2** (1963), 3–91.

3. В. И. Арнольд, Б. А. Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, Издательство МЦНМО, М., 2007.

4. Б.Б. Кадомцев, "Перезамыкание магнитных силовых линий", *Успехи физических наук*, **151**:1 (1987), 3–29.

5. Прист Э., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.

7. А.О. Пришляк, "Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях", *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 254–260.

8. В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, С.Х. Зинина, "Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы", *Нелинейная динамика*, **10**:4 (2014), 427–438.

9. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка, "О существовании магнитных линий, соединяющих нулевые точки", *Журнал СВМО*, **16**:1 (2014), 8–15.

10. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids", *Physica D*, **294** (2015), 1–5.

11. H. Alfven, "On sunspots and the solar cycle", *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1-17.

12. В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.

13. G. Hornig, K. Schindler, "Magnetic topology and the problem of its invariant definition", *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.

14. Д. П. Костомаров, Е. Ю. Ечкина, И. Н. Иновенков, С. В. Буланов, "Моделирование магнитного перезамыкания в трехмерной геометрии", *Матем. моделирование*, **21**:11 (2009), 3–15.

15. М.Л. Коломиец, А.Н. Сахаров, "Топология магнитных полей и динамические системы", *Журнал СВМО*, **17**:2 (2015), 51–57.

16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.

17. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., “Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сборник*, **194**:7 (2003), 25–56.

18. Молоденский М. М., Сыроватский С. И., “Магнитное поле в активных областях и его нулевые точки”, *Астрономический Журнал*, **54** (1977), 1293–1304.

19. Горбачев В.С., Кельнер С.Р., Сомов Б.В., Шварц А.С., “Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек”, *Астрономический журнал*, **65**:3 (1988), 601–612.

20. C. Beveridge, D.W. Longcope, “On Three-Dinensional Magnetic Sceleton Elements due to Discrete Flux Sources”, *Solar Phisics*, **227**:2 (2005), 193–206.

21. R. Close, C. Parnell, E. Priest, “Domain structure in complex 3D magnetic fields”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **99**:6 (2005), 513–534.

22. C. Beveridge, E.R. Priest, D.S. Brown, “Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions”, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **98**:5 (2004), 429–446.

23. R. Maclean, C. Beveridge, E. Priest, “Coronal Magnetic Topologies in Spherical Geometry – II. Four Balanced Flux Sources”, *Solar Phys.*, **238** (2006), 13–27.

24. D. Pontin, “Theory of magnetic reconnection in solar and astrophysical plasmas”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **370** (2012), 3169–3192.

25. N.A. Murphy, C.E. Parnell, A.L. Haynes, “Bifurcations of magnetic topology by the criation and annihilation of null points”, *Phys. of Plasmas*, **22**:10 (2015), 102117–7.

26. R. Maclean, C. Beveridge, D. Longcope, D. Brown, E. Priest, “A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare”, *Proc. R. Soc. A*, **461**:5 (2005), 2099–2120.

27. R. Close, C. Parnell, E. Priest, “Separators in 3D Quiet-Sun Magnetic Fields”, *Solar Physics*, **225** (2005), 21–46.

Дата поступления 9.05.2016

On the topology of the potential magnetic field

© M.L. Kolomiec[13], A.N. Sakharov[14], E.V. Tregubova[15]

Abstract. The geometry of the magnetic fields in plasma plays an important role in understanding a number of fundamental problems in physics. lt is clear that the magnetic field like any vector field defines a dynamical system on some three-dimensional manifold. This idea is used by physicists for a long time (since the middle of the last century). This work is devoted to the application of methods dynamical systems to description of the patterns of magnetic fields in the solar corona. Such models correspond to a gradient-like dynamical systems for which there is a complete topological classification. It follows that magnetic field with four springs can have countable number of structurally stable configurations of the field geometry.

Key Words: singular points of the field, magnetic field lines, sources, sinks, separatrix, separators, heteroclinic curves

[13] Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

[14] Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru

[15] Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; t2733792@yandex.ru

УДК 517.988.67

О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого

© **А. А. Кяшкин** [1], **Б. В. Логинов** [2], **П. А. Шаманаев** [3]

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления доказано существование и единственность периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого. В статье показано, что периодическое решение имеет полюс в точке $\varepsilon=0$, а при значении $\varepsilon=0$ переходит в $2n$-параметрическое семейство периодических решений. Результат получен с помощью применения теории обобщенных жордановых наборов, сводящий исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система распадается на две неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, которые при $\varepsilon\neq 0$ имеют единственные решения, а при $\varepsilon=0$ – n-параметрические семейства решений, соответственно.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

1. Постановка задачи

В банаховых пространствах E_1, E_2 рассматривается дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt}=(B_0-\varepsilon B_1)\,x-f(t), \tag{1.1}$$

где A и B_0 - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $f(t+\omega)=f(t)$, $\omega>0$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: $D_B\subset D_A$ и A подчинен B_0, т. е. $\|Ax\|\leqslant\|B_0x\|+\|x\|$ на D_{B_0} или $D_A\subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A, т. е. $\|B_0x\|\leqslant\|Ax\|+\|x\|$ на D_A, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [1], [3], [4].

Пусть числа $\pm i\alpha_\sigma$ ($\alpha_\sigma=m_\sigma\alpha$, $\alpha=\frac{2\pi}{\omega}$, $m_\sigma\in\mathbb{N}$, $\sigma=\overline{1,r}$) являются A-собственными значениями оператора B_0, причем каждому числу из пары $\pm i\alpha_\sigma$ отвечает n_σ групп решений уравнения

$$A\frac{dy}{dt}=B_0y. \tag{1.2}$$

Тогда уравнение (1.2) имеет $2n$ ($n=n_1+...+n_r$) ω-периодических решений $\varphi_k^{(1)}$, $\bar{\varphi}_k^{(1)}$ ($k=\overline{1,n}$).

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; andrej_kjashkin@list.ru.

[2] Профессор кафедры "Высшая математика" , Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

[3] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

Ставится задача [1] об отыскании при достаточно малых вещественных ε ω – периодических решений $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1.1), удовлетворяющих условию $x(t,0)=z(t)$, где $z(t)$ — ω – периодические решения уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \tag{1.3}$$

2. Построение разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1.1) в виде

$$\mathcal{B}_0 x = f(t) + \varepsilon B_1 x, \quad \mathcal{B}_0 x \equiv B_0 x(t) - A\frac{dx}{dt}, \tag{2.1}$$

и применим методы теории ветвления построения обобщенных жордановых наборов, приводящие к исследованию разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [2], [5]-[11].

Обозначим $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)=span\{\varphi_k^{(1)},\ \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n$.

О п р е д е л е н и е 2.1. [1] *Будем говорить, что элемент* $\varphi_k^{(1)}$ $(\psi_k^{(1)})$ *имеет* B_1 *-* (B_1^*)*-жорданову цепочку длины* p_k*, если существует* p_k *элементов* $\varphi_k^{(1)},...,\varphi_k^{(p_k)}$ ($\psi_k^{(1)},...,\psi_k^{(p_k)}$)*, удовлетворяющих соотношениям*

$$\mathcal{B}_0\varphi_k^{(1)} = 0,\ \ \mathcal{B}_0\varphi_k^{(j)} = B_1\varphi_k^{(j-1)}, \quad (\mathcal{B}_0^*\psi_k^{(1)} = 0,\ \mathcal{B}_0^*\psi_k^{(j)} = B_1^*\psi_k^{(j-1)}), \quad j=\overline{2,p_k}, \quad k=\overline{1,n},$$

где для $\varphi_k^{(j)}$, $\psi_k^{(j)}$ *выполняются условия биортогональности*

$$\begin{gathered} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \delta_{ks}\delta_{jl}, \ll z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \gg = \delta_{ks}\delta_{jl}, \\ \gamma_s^{(l)} = B_1^*\psi_s^{(p_s+1-l)}, z_k^{(j)} = B_1\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \quad j=\overline{1,p_k},\ \ l=\overline{1,p_s},\ \ k,s=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь,

$$\ll x, h \gg = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \langle x(t), h(t)\rangle dt, \quad \langle x(t), h(t)\rangle = x(t)\cdot \bar{h}(t),$$

$(\cdot)$ – скалярное произведение.

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum\limits_{k=1}^n \ll \cdot, \gamma_k^{(1)} \gg z_k^{(1)} + \sum\limits_{k=1}^n \ll \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)}$, запишем уравнение (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_0 x = \varepsilon B_1 x + \sum\limits_{k=1}^n (\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{z}_k^{(1)}) + f(t), \\ \xi_{sl} = \ll x, \gamma_s^{(l)} \gg,\ \ \bar{\xi}_{sl} = \ll x, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg,\ \ l=\overline{1,p_s},\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) будем искать в виде [3]-[4]

$$x = w + v, \quad v = \xi\cdot\varphi + \bar{\xi}\cdot\bar{\varphi} \in E_1^{2K}, \tag{2.4}$$

где $K = p_1 + ... + p_k$,

$$\varphi = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(p_1)}, \ldots \varphi_n^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(p_n)}), \quad \xi = (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1p_1}, \ldots \xi_{n1}, \ldots, \xi_{np_n}),$$

Подставляя выражение (2.4) в первое уравнение системы (2.3), получим

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 w + \widetilde{\mathcal{B}}_0 v = \varepsilon B_1 w + \varepsilon B_1 v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{z}_k^{(1)}) + f(t).$$

Обозначим $\Gamma_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_0^{-1}$, и учитывая, что $\Gamma_0 z_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}$, $\Gamma_0 \bar{z}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(1)}$, находим

$$[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]w = -[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \Gamma_0 f(t).$$

Пусть для ε выполняется условия $|\varepsilon| \le \rho_0 < ||\Gamma_0 B_1||^{-1}$, тогда оператор $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}$ существует и

$$w = -v + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t). \tag{2.5}$$

Учитывая равенство $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1} = I + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} w = \; & -v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t). \end{aligned}$$

С учетом $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 = \Gamma_0[I - \varepsilon B_1\Gamma_0]^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} w = \; & -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + \Gamma_0[I - \varepsilon B_1\Gamma_0]^{-1} f(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Учитывая равенства $(\Gamma_0 B_1)^j \varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(r_k+1)}$, $(\Gamma_0 B_1)^j \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}$, где r_k – остаток от деления j на p_k, получим

$$\varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)} = \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}}(\varepsilon\varphi_k^{(2)} + \varepsilon^2\varphi_k^{(3)} + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)} + \varepsilon^{p_k}\varphi_k^{(1)}), \tag{2.7}$$

$$\varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)} = \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}}(\varepsilon\bar{\varphi}_k^{(2)} + \varepsilon^2\bar{\varphi}_k^{(3)} + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)} + \varepsilon^{p_k}\bar{\varphi}_k^{(1)}). \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.4) во второе и третье уравнение системы (2.3) и учитывая условия биортогональности (2.2), получим разрешающую систему следующего вида:

$$\begin{cases} -\ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \; l = \overline{1, p_s}, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \; s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\ll w, \gamma_s^{(1)} \gg = 0, \\ -\ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = 0, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Подставляя выражение (2.6) для w в разрешающую систему (2.9), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}\Big[\xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg + \bar{\xi}_{kj} \ll \bar{\varphi}_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg\Big] - \\ & - \sum_{k=1}^{n}\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg - \sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \\ & = \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1} f(t), \gamma_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}\Big[\xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg +\bar{\xi}_{kj} \ll \bar{\varphi}_k^{(j)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg \Big]-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg -\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg=$$
$$=\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t),\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg, \quad l=\overline{1,p_s}, s=\overline{1,n}. \tag{2.11}$$

Учитывая выражения (2.7), (2.8), и условия биортогональности (2.2), вычислим при $l=1$

$$\begin{aligned}&\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)},\gamma_s^{(1)} \gg=\frac{\varepsilon^{p_k}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\\ &\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)},\bar{\gamma}_s^{(1)} \gg=\frac{\varepsilon^{p_k}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\end{aligned} \tag{2.12}$$

при $l=\overline{2,p_s}$

$$\begin{aligned}&\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)},\gamma_s^{(l)} \gg=\frac{\varepsilon^{l}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\\ &\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg=\frac{\varepsilon^{l}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь, $|\varepsilon|\le\rho_1<1$. Аналогично, находим

$$\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)},\gamma_s^{(l)} \gg=0, \quad \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)},\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg=0.$$

С учетом равенств $\Gamma_0^*\gamma_s^{(1)}=\psi_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\bar{\gamma}_s^{(1)}=\bar{\psi}_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\gamma_s^{(l)}=\psi_s^{(p_s+2-l)}$, $\Gamma_0^*\bar{\gamma}_s^{(l)}=\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)}$ $(l=\overline{2,p_s})$, представим правую часть разрешающей системы (2.9) в виде

$$\begin{aligned}&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t),\gamma_s^{(1)} \gg=\ll f(t),[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(1)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t),\gamma_s^{(l)} \gg=\ll f(t),[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t),\bar{\gamma}_s^{(1)} \gg=\ll f(t),[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(1)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t),\bar{\gamma}_s^{(l)} \gg=\ll f(t),[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)} \gg .\end{aligned} \tag{2.14}$$

Учитывая равенства $(\Gamma_0^*B_1^*)^l\psi_s^{(1)}=\psi_s^{(g_s+1)}$, $(\Gamma_0^*B_1^*)^l\bar{\psi}_s^{(1)}=\bar{\psi}_s^{(g_s+1)}$, где g_s – остаток от деления l на p_s, получим

$$\begin{aligned}&h_{s1}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^*B_1^*]^{-1}\psi_s^{(1)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\psi_s^{(1)}+\varepsilon\psi_s^{(2)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\psi_s^{(p_s)}),\\ &h_{sl}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^*B_1^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\psi_s^{(p_s+2-l)}+\varepsilon\psi_s^{(p_s+3-l)}+...\\ &...+\varepsilon^{l-2}\psi_s^{(p_s)}+\varepsilon^{l-1}\psi_s^{(1)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\psi_s^{(p_s+1-l)}), \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}&\bar{h}_{s1}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^*B_1^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(1)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\bar{\psi}_s^{(1)}+\varepsilon\bar{\psi}_s^{(2)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\bar{\psi}_s^{(p_s)}),\\ &\bar{h}_{sl}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^*B_1^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)}+\varepsilon\bar{\psi}_s^{(p_s+3-l)}+...\\ &...+\varepsilon^{l-2}\bar{\psi}_s^{(p_s)}+\varepsilon^{l-1}\bar{\psi}_s^{(1)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\bar{\psi}_s^{(p_s+1-l)}), \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Тогда, с учетом (2.12), (2.13), (2.15) и (2.16), разрешающая система (2.10)-(2.11) примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} = \ll f, h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\bar{\xi}_{s1} = \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \bar{\xi}_{sl} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\bar{\xi}_{s1} = \ll f, \bar{h}_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Выделим вещественные и мнимые части коэффициентов ξ_{sl} и $\bar{\xi}_{sl}$

$$\xi_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} + i\xi_{sl}^{(2)}, \quad \bar{\xi}_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} - i\xi_{sl}^{(2)},$$

и подставим их в систему (2.17). Получим

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} - i\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl}^{(1)} + i\xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} - i\dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} + i\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl}^{(1)} - i\xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} + i\dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, \bar{h}_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.18}$$

При фиксированных s и l сложим первое и третье, второе и четвертое уравнения системы (2.18) соответственно, и возьмем получившиеся уравнения в качестве первой системы. Аналогично, при фиксированных s и l вычтем из первого уравнения третье, а из второго — четвертое уравнение системы (2.18), и возьмем получившиеся уравнения в качестве второй системы. Тогда, учитывая, что $\frac{1}{2}(h_{sl}+\bar{h}_{sl}) = Re\, h_{sl}$, $\frac{1}{2i}(h_{sl}-\bar{h}_{sl}) = Im\, h_{sl}$, система распадется на две системы линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} & = \ \ll f, Re\, h_{s1} \gg, \\ \xi_{sl}^{(1)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} & = \ \ll f, Re\, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \ s=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} & = \ \ll f, Im\, h_{s1} \gg, \\ \xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} & = \ \ll f, Im\, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Системы (2.19) и (2.20) могут быть записаны в матричной форме

$$D\xi^{(1)} = Re\, g, \tag{2.21}$$

$$D\xi^{(2)} = Im\, g, \tag{2.22}$$

здесь $D \equiv [d_{sl,kj}]$ - $(K \times K)$-матрица ($l=\overline{1,p_s}$, $s=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,p_k}$, $k=\overline{1,n}$), $K = p_1+p_2+...+p_n$,

$$\xi^{(1)} = colon(\xi^{(1)}_{11}, \xi^{(1)}_{12}, ..., \xi^{(1)}_{1p_1}, ..., \xi^{(1)}_{n1}, \xi^{(1)}_{n2}, ..., \xi^{(1)}_{np_n}),$$
$$\xi^{(2)} = colon(\xi^{(2)}_{11}, \xi^{(2)}_{12}, ..., \xi^{(2)}_{1p_1}, ..., \xi^{(2)}_{n1}, \xi^{(2)}_{n2}, ..., \xi^{(2)}_{np_n}),$$
$$g = colon(g_{11}, g_{12}, ..., g_{1p_1}, ..., g_{n1}, g_{n2}, ..., g_{np_n}),$$
$$g_{sl} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{1,p_s},\ s=\overline{1,n}.$$

Матрица D имеет блочно-диагональную структуру

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_n \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 0 & ... & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon^{p_s}} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s-1}}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \quad s=\overline{1,n}. \tag{2.23}$$

3. Решения разрешающей системы и ветвление периодических решений

Найдем условия, при которых решения разрешающей системы существуют. При $\varepsilon = 0$ ранг матрицы D равен $K-n$. Тогда для существования решения систем (2.21) и (2.22) необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенных матриц $(D|Re\,g)$ и $(D|Im\,g)$ также был равен $K-n$. Это условие выполняется только в том случае, когда при всех $s=\overline{1,n}$ выполняется условие

$$g_{s1} \equiv \ll f, h_{s1} \gg = 0. \tag{3.1}$$

Покажем справедливость условия (3.1). Так как при $\varepsilon=0$ $h_{s1} = \psi^{(1)}_s$ и $\ll f, \psi^{(1)}_s \gg = 0$ (в силу разрешимости уравнения (1.3)), то условие (3.1) верно при всех $s=\overline{1,n}$.

Тогда из систем (2.21) и (2.22) находим $\xi^{(1)}_{k1} = c^{(1)}_k$, $\xi^{(2)}_{k1} = c^{(2)}_k$, где $c^{(1)}_k$, $c^{(2)}_k$ – произвольные вещественные числа. Учитывая, что при $\varepsilon=0$ уравнения (1.1) и (1.3) совпадают, а следовательно, и их решения также совпадают, находим, что их ω – периодические решения представимы в виде

$$x(t,0) = z(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} [c^{(1)}_k \varphi^{(1)}_k + c^{(2)}_k \bar{\varphi}^{(1)}_k] + \Gamma_0 f(t). \tag{3.2}$$

При $\varepsilon \neq 0$ определитель матрицы D отличен от нуля и, следовательно, каждая из систем (2.21) и (2.22) имеет единственное решение. Учитывая (2.15), из систем (2.19) и

(2.20) соответственно находим

$$
\begin{aligned}
\xi_{k1}^{(1)} &= -\frac{1-\varepsilon^{p_k}}{\varepsilon^{p_k}} \ll f, Re\, h_{k1} \gg = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}}(c_{k1}^{(1)} + c_{k2}^{(1)}\varepsilon + c_{k3}^{(1)}\varepsilon^2 + ... + c_{kj}^{(1)}\varepsilon^{j-1} + ... + c_{k,p_k}^{(1)}\varepsilon^{p_k-1}), \\
\xi_{k1}^{(2)} &= -\frac{1-\varepsilon^{p_k}}{\varepsilon^{p_k}} \ll f, Im\, h_{k1} \gg = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}}(c_{k1}^{(2)} + c_{k2}^{(2)}\varepsilon + c_{k3}^{(2)}\varepsilon^2 + ... + c_{kj}^{(2)}\varepsilon^{j-1} + ... + c_{k,p_k}^{(2)}\varepsilon^{p_k-1}), \\
& c_{kj}^{(1)} = \ll f, Re\, \psi_k^{(j)} \gg, \quad c_{kj}^{(2)} = \ll f, Im\, \psi_k^{(j)} \gg, \quad j = \overline{1, p_k},\ k = \overline{1, n}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Здесь, в силу разрешимости уравнения (1.3), выполняется $\ll f, \psi_s^{(1)} \gg = 0$, и, следовательно,

$$c_{k1}^{(1)} \equiv \ll f, Re\, \psi_k^{(1)} \gg = 0, \quad c_{k1}^{(2)} = \ll f, Im\, \psi_k^{(1)} \gg = 0.$$

Таким образом, учитывая (2.4), (2.6)–(2.8), получим, что ω–периодическое решение уравнения (1.1) представимо в виде

$$
\begin{aligned}
x(t,\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}} \left[\, \xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)} \,\right] + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}} \left[\, \varepsilon\left(\xi_{k1}\varphi_k^{(2)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(2)}\right) + ... + \varepsilon^{p_k-1}\left(\xi_{k1}\varphi_k^{(p_k)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)}\right) \,\right],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где вещественные и мнимые части ξ_{k1} , $\bar{\xi}_{k1}$ вычисляются по формулам (3.3) и справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Пусть существует B_1–жорданов набор из нулей оператора $\mathcal{B}_0$, принадлежащих подпространству $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, и B_1–присоединенных к ним элементов. Тогда при всех $\varepsilon \in O_\varepsilon$, где*

$$O_\varepsilon = \{\varepsilon \ : \ 0 < |\,\varepsilon\,| \le min(\rho_0, \rho_1)\}, \tag{3.5}$$

существует единственное ω–периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, аналитическое по ε, вида (3.4) уравнения (1.1), при этом $x(t,0)$ представляет собой $2n$–параметрическое семейство ω–периодических решений вида (3.2) уравнения (1.3).

Пусть $q_k = \min\{j : c_{kj}^{(1)} \ne 0, c_{kj}^{(2)} \ne 0, j = \overline{2, p_k}\}$ и $q_k = +\infty$, если все $c_{kj}^{(1)} = 0$, $c_{kj}^{(2)} = 0$. Тогда, если существует $q_k < +\infty$, то решение $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1.1) в точке $\varepsilon = 0$ имеет полюс порядка $p = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{p_k - q_k + 1\}$. Если же все $q_k = +\infty$, то уравнение (1.1) в точке $\varepsilon = 0$ имеет также аналитическое по ε ω–периодическое решение $x(t,\varepsilon) = [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1964, 524 с., Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974

2. Треногин В. А., “Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.”, *СОАН СССР*, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.

3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 100-107.

4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), 33-40.

5. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура в теории ветвления”, *"Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными"*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент, 1978, 133-148.

6. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, кандидатская диссертация, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб.ССР. Ташкент, 1979, 126 с.

7. Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней”, *Известия Акад. Наук Узб.ССР, физ-мат.*, 1978, № 2, 15-19.

8. Loginov B. V., Rousak Yu. B., “Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.

9. Loginov B. V., “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.

10. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu.B., “On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative”, *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

11. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., “Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах”, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.

Дата поступления 01.05.2016

The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term

© A. A. Kyashkin[4], B. V. Loginov[5], P. A. Shamanaev[6]

Abstract. In a Banach space existence and uniqueness of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and a disturbance in the form of small linear term proved by branching theory methods. The article shows that the periodic solution has a pole at the point $\varepsilon = 0$, and if $\varepsilon = 0$ the solution goes to $2n$ –parameter set of periodic solutions. The result is obtained by applying the theory of generalized Jordan sets, reducing the original problem to the investigation of the Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace. In this resolution the system is divided into two non-homogeneous systems of linear algebraic equations. These systems have the only solution when $\varepsilon \neq 0$; when $\varepsilon = 0$ they have n-parameter set of solutions, respectively.

Key Words: differential equations in Banach spaces , generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace

[4] Graduate student of Applied Mathematics,, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; andrej_kjashkin@list.ru.

[5] Professor of the Chair "Higher Mathematics" , Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

[6] Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

УДК 519.626

Аппроксимация задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса

© Ф. В. Лубышев[1], А. Р. Манапова*[2], М. Э. Файрузов[3]

Аннотация. В данной работе изучается основной спектр проблем аппроксимации нелинейных задач оптимального управления, описываемых эллиптическими уравнениями конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса. Рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов оптимизационных задач, вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, операторы диффузионного и конвективного переноса, разностный метод решения

1. Введение

При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, то есть конвективный перенос (см. [1]). Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и быть обусловленым движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения сред под действием тех или иных сил. Конвективный-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, важное значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии – эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами. В настоящее время в теории численных методов решения задач УМФ и задач оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. Это относится как к методам, базирующимся на конечно-разностных аппроксимациях состояния, так и к методам на основе конечно-элементных аппроксимаций.

[1] Профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

[2] Доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.,

* Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-4147.2015.1);

[3] Доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

Данная работа посвящена исследованию численных методов решения наиболее важных для теории и практики задач оптимального управления для эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами – задач конвекции-диффузии. Процессы управления описываются полулинейными уравнениями конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса. Выделен класс задач для состояния процесса, который связан с использованием недивергентной формы записи оператора конвективного переноса (хотя возможно также выделить два других основных класса задач, которые связаны с использованием дивергентной, или же так называемой симметричной формы записи операторов конвективного переноса).

Настоящая работа примыкает по тематике к [2]-[4] (см. также цитируемую там литературу) и существенно обобщает результаты работы [5]. В работе изучается основной спектр проблем аппроксимации задач оптимального управления, описываемых уравнениями конвекции-диффузии (рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов оптимизационных задач, вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций).

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi, 0 \le r_2 \le l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$, – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$, будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(r) = u_1(r)$, $r \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(r) = u_2(r)$, $r \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_p(r)$, $p = 1, 2$, удовлетворяют условиям:

1) функции $u_p(r)$, $p = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, $p = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_p, $p = 1, 2$, уравнениям

$$L_p\, u_p = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k_p(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_p^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r), \quad \text{в } \Omega_p,\ p = 1, 2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции $u_p(r)$, $p=1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x)=k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}=k_2(r)\frac{\partial u_2}{\partial r_1}=\theta(r_2)\left(u_2(r)-u_1(r)\right),\quad r\in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(r)=\begin{cases}u_1(r), & r\in\Omega_1;\\ u_2(r), & r\in\Omega_2,\end{cases}\qquad q(\xi)=\begin{cases}q_1(\xi_1), & \xi_1\in\mathbb{R};\\ q_2(\xi_2), & \xi_2\in\mathbb{R},\end{cases} \tag{2.4}$$

$$k(r),d(r),f(r),\vartheta^{(\alpha)}(r)=\begin{cases}k_1(r),q_1(r),f_1(x),\vartheta_1^{(\alpha)}(r), & r\in\Omega_1;\\ k_2(r),q_2(r),f_2(r),\vartheta_2^{(\alpha)}(r), & r\in\Omega_2,\end{cases}\quad \alpha=1,2. \tag{2.5}$$

то задачу (2.1)-(2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r)=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}+d(r)q(u)=f(r),\quad r=(r_1,r_2)\in\Omega_1\cup\Omega_2, \tag{2.6}$$

и условиям

$$\begin{gathered}u(r)=0,\quad r\in\partial\Omega=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2,\\ \left[k(r)\frac{\partial u}{\partial r_1}\right]=0,\quad G(r)=\left(k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right)=\theta(r_2)[u],\quad x\in S.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $[u]=u_2(r)-u_1(r)=u^+(r)-u^-(r)$ – скачок функции $u(r)$ на S, $d(r)$, $f(r)$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S, $\vartheta_2^{(p)}(r)$, $p=1,2$ – заданные функции, определенные в Ω_2, $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha=1,2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha=1,2$, $\theta(r_2)$ – заданная функция на S,

$$g(r)=(g_1(r),g_2(r),g_3(r),g_4(r))=\left(k_1(r),k_2(r),\vartheta_1^{(1)}(r),\vartheta_1^{(2)}(r)\right) \tag{2.8}$$

– управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $d(r)\in L_\infty(\Omega_1)\times L_\infty(\Omega_2)$, $f(r)\in L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_2)$, $\theta(r_2)\in L_\infty(S)$, $\vartheta_2^{(p)}(r)\in L_2(\Omega_2)$, $p=1,2$, $0\le d_0\le$ $\le d(r)\le\overline{d}_0$, $r\in\Omega_1\cup\Omega_2$, $0<\theta_0\le\theta(r_2)\le\overline{\theta}_0$, $r_2\in S$, $\zeta_{p+2}\le\vartheta_2^{(p)}(r)\le\overline{\zeta}_{p+2}$, $p=1,2$, $r\in\Omega_2$, d_0, $\overline{d}_0$, θ_0, $\overline{\theta}_0$, ζ_{p+2}, $\overline{\zeta}_{p+2}$, – константы, функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha=1,2$, определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, причем $q_\alpha(0)=0$, $0\le q_0\le(q_\alpha(\xi_1)-q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1-\xi_2)\le L_q<\infty$ для всех $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$, $\xi_1\ne\xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U=\prod_{k=1}^{4}U_k\subset W_\infty^1(\Omega_1)\times W_\infty^1(\Omega_2)\times L_\infty(\Omega_1)\times L_\infty(\Omega_1)=B, \tag{2.9}$$

состоящее из $g(r)$, определенных в (2.8) таких, что

$$\begin{gathered}g_p(r)\in U_p=\Big\{g_p(r)=k_p(r)\in W_\infty^1(\Omega_p)=B_p:0<\nu_p\le g_p(r)\le\overline{\nu}_p,\\ \left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1}\right|\le R_p^{(1)},\left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2}\right|\le R_p^{(2)}\ \text{п.в. на}\ \Omega_p\Big\},\quad p=1,2,\\ g_3(r)\in U_3=\left\{g_3(r)=\vartheta_1^{(1)}(r)\in L_\infty(\Omega_1)=B_3:\zeta_1\le g_3(r)\le\overline{\zeta}_1,\ \text{п.в. на}\ \Omega_1\right\},\\ g_4(r)\in U_4=\left\{g_4(r)=\vartheta_1^{(2)}(r)\in L_\infty(\Omega_1)=B_4:\zeta_2\le g_4(r)\le\overline{\zeta}_2,\ \text{п.в. на}\ \Omega_1\right\},\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $B_p = W^1_\infty(\Omega_p)$, $p = 1,2$, – пространства управлений $g_p(r) = k_p(r)$, $p = 1,2$, заданных на Ω_1 и Ω_2, соответственно, а $B_p = L_\infty(\Omega_1)$, $p = 3,4$, – пространства управлений $g_{p+2}(r) = \vartheta_1^{(p)}(r)$, $p = 1,2$, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно, ν_p, $\overline{\nu}_p$, $R_1^{(p)}$, $R_2^{(p)}$, ζ_p, $\overline{\zeta}_p$, $p = 1,2$, – заданные числа. Предполагается выполнение следующих условий: $-m_1 \le \zeta_1 \le \overline{\zeta}_1 \le m_1$, $-p_1 \le \zeta_2 \le \overline{\zeta}_2 \le p_1$, $-m_2 \le \zeta_3 \le \overline{\zeta}_3 \le m_2$, $-p_2 \le \zeta_4 \le \overline{\zeta}_4 \le p_2$, $m_\alpha, p_\alpha = const > 0$, $\alpha = 1,2$,

$$\delta_\alpha = \max_{\substack{\epsilon_1,\epsilon_2>0\\ \epsilon_1+\epsilon_2\le\nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\epsilon_1+\epsilon_2)}{C^2_{\Omega_\alpha}} + \lambda - \frac{m_\alpha^2}{4\epsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0,\ \alpha = 1,2,$$
$$C^2_{\Omega_1} = \left(\frac{8}{\xi_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-1},\ C^2_{\Omega_2} = \left(\frac{8}{(l_1-\xi_1)^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-1}; \tag{2.11}$$

здесь λ любая из следующих констант: 1) $\lambda = q_0\, d_0,\quad d_0 \ge 0$; 2) $\lambda = d_0$ - любая константа, когда $q(u) = u$; 3) $\lambda = -L_q\zeta_0$, где $\zeta_0 = \max\left\{|d_0|, |\overline{d}_0|\right\}$.

Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} |u(r_1,r_2;g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1 = I(u(r;g)), \tag{2.12}$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r;g)$ задачи (2.1)-(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g(r) = \left(k_1(r), k_2(r), \vartheta_1^{(1)}(r), \vartheta_1^{(2)}(r)\right) \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.12).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\right\}, \tag{2.13}$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [6]

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{2.14}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_V = \sum_{k=1}^{2} (u_k, v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \qquad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.15}$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2\, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2\, dS, \tag{2.16}$$

где $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ на S. Здесь $u_2(r) = u^+(r)$, $r \in S$ и $u_1(r) = u^-(r)$, $r \in S$ – следы функции $u(r)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(r)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [6]-[10] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^{\pm})$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^{\pm}$. С другой стороны, если элемент $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(r)$ на области Ω_k, $k = 1,2$: $u|_{\Omega_k}$, $k = 1,2$, принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(r)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(r) = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$, $r \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $v(r) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$, является условие склейки: $v(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$; $v_1(r)|_S = v_2(r)|_S$ (см. [10], [11]). Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1,2$, то [12] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k = 1,2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \le C_k^2 \left[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k \right], \; k = 1,2. \tag{2.17}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k = 1,2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(r)$, что для любых функций $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [13],[14]:

$$\|u_k(r)\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \le C^2_{k+2} \|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \; k = 1,2, \tag{2.18}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$, естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку, $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [7]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(r)\, d\Omega_k \le C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1,2, \tag{2.19}$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение нормированное пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\right\}, \tag{2.20}$$

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS. \tag{2.21}$$

Под решением прямой задачи (2.1)-(2.3) при фиксированном управлении $g(r) = = k(r) \in U$ понимается функция $u(r) \equiv u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{gathered} Q(u, v) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \big(k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} v + d(r) q(u) v\right] d\Omega_0 + \\ + \int_S \theta(x)[u][v]\, dS = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(r) v \, d\Omega_0 = l(v). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) в смысле ее определения (2.22) гарантирует

Т е о р е м а 2.1. *При любом $g(r) \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(r) = u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (2.1)-(2.3), *определяемое из интегрального тождества* (2.22), *причем*

$$\|u(r; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C_7 \sum_{k=1}^{2} \|f_k(r)\|_{L_2(\Omega_k)} = \overline{C}_7, , \tag{2.23}$$

где $C_7 = const > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 2.1. опирается на теорию монотонных операторов [8], [9], [12], [15], при этом существенно используются, введенные выше Гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.16)-(2.18).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.12), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи* (2.12), (2.1)-(2.10), *т.е.* $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. *Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче* (2.12), (2.1)-(2.10) *слабо компактно в $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1)$. Любая минимизирующая последовательность $\left\{g^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_*.*

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.12), (2.1)-(2.10) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [16]-[19]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задач оптимизации (2.12), (2.1)-(2.10) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1,2$ и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2: $\hat{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}\}$, $\alpha = 1,2$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$: $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и, исходя из положения точки $x_1 = \xi$, число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной экстремальной задачи (2.12), (2.1)-(2.10) не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$.

Введем сетки узлов: $\bar{\omega}_1^{(1)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, N_{1\xi} h_1 = \xi\}$, $\bar{\omega}_1^{(2)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : i_1 = \overline{N_{1\xi, N_1}}, N_1 h_1 = l_1\}$, $\omega_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \backslash \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \backslash \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\bar{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}) \times \bar{\omega}_2 = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, N_{1/xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\} \times \bar{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \cup \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)+} = \omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2$; $\gamma_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, ..., (N_2 - 1) h_2\} = \{x_1 = \xi, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \backslash \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \bar{\omega}^{(1)} \backslash \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \bar{\omega}^{(k)} \backslash \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}^{(k)}$, $k = 1,2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_k(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1,2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\bar{\omega}^{(k)}} y_k(x) v_k(x) \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}))} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}, \tag{3.1}$$

обозначим через $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k = 1,2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x)$ – средний шаг сеток $\bar{\omega}_1^{(1)}$ и $\bar{\omega}_1^{(2)}$, $\hbar_2 = \hbar_2(x)$ – средний шаг сетки $\bar{\omega}_2$ [11]. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1} v_{k\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2} v_{k\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}, \|\nabla y_k\|^2 = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y^2_{k\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2^+} y^2_{k\bar{x}_2} \hbar_1 h_2, k = 1,2. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение пространство $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \quad \|y_k\|_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \tag{3.3}$$

$V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x)h_1h_2, k = 1, 2. \tag{3.4}$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)v_k(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k(x)v_k(x)h_1h_2, \quad k = 1, 2. \tag{3.5}$$

Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}, \tag{3.7}$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}. \tag{3.8}$$

Задачам оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\bar{\omega}^{(1)}} |y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2\hbar_1\hbar_2 = \|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}, \tag{3.9}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ $(\bar{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемой) для задачи (2.1)-(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ $(\bar{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}
Q_h(y,v) = \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_1}v_{2\bar{x}_1}h_1h_2 + \\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_2}v_{2\bar{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \\
+\sum_{\omega^{(1)}}\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha+2,h}(x)y_{1\overset{\circ}{x}_\alpha}(x)v_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha+2,h}(\xi,x_2)y_{1\overset{\circ}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(2)}}\sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)y_{2\overset{\circ}{x}_\alpha}(x)v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)y_{2\overset{\circ}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2 +
\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$+\left\{\left(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\right)\right\}+$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)[y(\xi,x_2)]\,[v(\xi,x_2)]\,h_2=\left(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\right)+$$
$$+\left(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\right)=l_h(v),$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$U_h=\prod_{k=1}^{4}U_{kh}\subset W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})\times W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})\times L_\infty(\Omega_1)\times L_\infty(\Omega_1)=B_h \tag{3.11}$$

и состоят из четверок

$$\Phi_h(x)=\begin{cases}\Phi_{1h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)};\\ \Phi_{2h}(x), & x\in\bar\omega^{(2)};\\ \Phi_{3h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)};\\ \Phi_{4h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)},\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{ph}(x)\in U_{ph}=\big\{\Phi_{ph}(x)\in W^1_\infty(\bar\omega^{(p)})=B_{ph}:0<\nu_p\le\Phi_{ph}(x)\le\bar\nu_p, x\in\bar\omega^{(p)},\\ |\Phi_{phx_1}(x)|\le R^{(1)}_p, x\in\omega_1^{(p)-}\times\bar\omega_2, |\Phi_{phx_2}(x)|\le R^{(2)}_p, x\in\omega_1^{(p)}\times\bar\omega_2^-\big\},\quad p=1,2,\\ \Phi_{ph}(x)\in U_{ph}=\big\{\Phi_{ph}(x)\in L_\infty(\bar\omega^{(1)})=B_{ph}:\zeta_{p-2}\le\Phi_{ph}(x)\le\bar\zeta_{p-2}, x\in\bar\omega^{(1)},\big\},\quad p=3,4,\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $B_{1h}=W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})$, $B_{2h}=W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})$ – пространства сеточных управлений $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, заданных на сетках $\bar\omega^{(1)}$, $\bar\omega^{(2)}$ с нормами

$$\begin{aligned}\|\Phi_{1h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})}&=\max_{\bar\omega^{(1)}}|\Phi_{1h}(x)|+\max_{\omega_1^{(1)-}\times\bar\omega_2}|\Phi_{1hx_1}(x)|+\max_{\bar\omega_1^{(1)}\times\omega_2^-}|\Phi_{1hx_2}(x)|,\\ \|\Phi_{2h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})}&=\max_{\bar\omega^{(2)}}|\Phi_{2h}(x)|+\max_{\omega_1^{(2)-}\times\bar\omega_2}|\Phi_{2hx_1}(x)|+\max_{\bar\omega_1^{(2)}\times\omega_2^-}|\Phi_{2hx_2}(x)|,\end{aligned} \tag{3.14}$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4},\\ \tilde b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{1h}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)}{2},\\ b^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4},\\ \tilde b^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{2h}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)}{2},\end{aligned} \tag{3.15}$$

$\Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, а $\vartheta^{(\alpha)}_{2h}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u^{(1)}_{0h}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $\vartheta^{(\alpha)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $\theta(r_2)$, $f_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $u^{(1)}_0(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e_2(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(2)};\\
&\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
&d_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&d_{1h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
&d_{2h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
&f_{1h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_1^{(1)},\\
&f_{1h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;\\
&f_{2h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\omega^{(2)},\\
&f_{2h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;\\
&\theta_h(x_2) = \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, x_2\in\omega_2; \quad u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\bar\omega^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [16].

Теорема 3.1. *Задача о нахождении решения разностной схемы* (3.10) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$
\|y(x;\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})} \le M\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}(x)\|_{L_2(\omega^{(k)})\cup\gamma_S} = \hat M, \forall\Phi_h\in U_h, \tag{3.17}
$$

где $M=const>0$.

Выпишем явный вид разностной схемы (3.10) в узлах сетки $\overline\omega=\overline\omega_1\cup\overline\omega_2=\overline\omega^{(1,2)}$. Требуется найти функцию $y=(y_1,y_2)$, определенную на $\overline\omega=\overline\omega_1\cup\overline\omega_2=\overline\omega^{(1,2)}$, $y(x)=y_1(x)$ для $x\in\overline\omega^{(1)}$, $y(x)=y_2(x)$ для $x\in\overline\omega^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) сеточная функция y_1 удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$
\begin{aligned}
&L_{1h}y_1(x) = -\left(b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x))y_{1\bar x_1}\right)_{x_1} - \left(\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x))y_{1\bar x_2}\right)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}(x)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x)+\\
&+d_{1h}(x)q_1(y_1) = f_{1h}(x),\ x\in\omega^{(1)},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

а на границе $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S$ условию $y_1(x) = 0$, $x \in \gamma^{(1)}$;

2) сеточная функция y_2 удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_{2h}y_2(x) = -\left(b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x))y_{2\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \left(\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x))y_{2\bar{x}_2}\right)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x)+ \tag{3.19}$$
$$+d_{2h}(x)q_2(y_2) = f_{2h}(x),\ x \in \omega^{(2)},$$

а на границе $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S$ условию $y_2(x) = 0$, $x \in \gamma^{(2)}$;

3) искомые функции y_1 и y_2 связаны между собой дополнительными условиями на $\gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}$:

$$\tilde{L}_{1h}y_1(x) = \frac{2}{h_1}\left[b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi_1, x_2))y_{1\bar{x}_1}(\xi_1, x_2) + \theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2)\right] + \sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}(\xi, x_2)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi, x_2)-$$
$$-\left(\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2))y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2)\right)_{x_2} + d_{1h}(\xi, x_2)q_1(y_1(\xi, x_2)) = f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2), \tag{3.20}$$

$$\tilde{L}_{2h}y_2(x) = -\frac{2}{h_1}\left[b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi_1 + h_1, x_2))y_{2x_1}(\xi, x_2) - \theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2)\right] + \sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi, x_2)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi, x_2)-$$
$$-\left(\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi, x_2))y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2)\right)_{x_2} + d_{2h}(\xi, x_2)q_2(y_2(\xi, x_2)) = f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2), x \in \gamma_S. \tag{3.21}$$

Теорема 3.2. *Для каждого $h > 0$ существует по крайней мере одно оптимальное управление $\Phi_{h*} \in U_h$ в последовательности сеточных (разностных) экстремальных задач* (3.9)-(3.16), *т.е.* $J_{h*} = \inf\{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty$, $U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset$.

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r, g)$ – решением прямой задачи (2.1)-(2.3) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h))$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.10) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно.

Справедлива следующая теорема о точности аппроксимаций по состоянию.

Теорема 4.1. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r, g)$ и $y(x, \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10):

$$\|y(x, \Phi_h) - u(x; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le C\Bigg\{|h|\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_{q_\alpha}\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}+$$
$$+\|\vartheta_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \|\vartheta_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg]+$$

$$
\begin{gathered}
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\bigg\|b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))-\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2\bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+\\
+\bigg\|\tilde b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))-\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}+\\
+\bigg\|\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}k_1(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+)}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}+\\
+\bigg\|\tilde b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+)}\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_1)}+\\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\bigg\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}+\\
+\bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\bigg\|_{L_\infty(\omega_2)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg\}.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.9)-(3.16) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ эктремальных задач (3.9)-(3.16) и (2.12), (2.1)-(2.10), для любых фиксированных управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$, и любых $h > 0$.

Оценку погрешности функционала $J_h(\Phi_h)$ эктремальной задачи (3.9)-(3.16) устанавливает

Т е о р е м а 5.1. *Для любых управлений* $g \in U$ *и* $\Phi_h \in U_h$ *экстремальных задач* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно и любых* $h > 0$ *для погрешности сеточного функционала* $J_h(\Phi_h)$ *экстремальной задачи* (3.9)-(3.16) *справедлива оценка*

$$
\begin{gathered}
|J(g)-J_h(\Phi_h)|=|I(u(r;g))-I_h(y(x;\Phi_h))|\le\\
\le M\Bigg\{|h|+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2-b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+\\
+\bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}+\\
+\bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\bigg\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}+\\
+\bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\bigg\|_{L_\infty(\omega_2)}\Bigg]+
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

$$+\left\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))\right\|_{L_\infty(\omega_2^+)}+$$
$$+\left\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))\right\|_{L_\infty(\omega_2^+)}\Bigg\}.$$

где $M=const>0$ *, не зависящая от* h *,* y *,* u *,* Φ_h *,* g *.*

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.9)-(3.16), зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\bar\omega=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}=\bar\omega^{(1,2)}\subset\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$ при $|h|\to 0$.

Теорема 5.2. *Пусть* J_* *и* J_{h*} *– нижние грани функционалов* $J(g)$ *и* $J_h(\Phi_h)$ *в задачах* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно. Семейство сеточных задач* (3.9)-(3.16)*, зависящих от шага* $h=(h_1,h_2)$ *сетки* $\bar\omega^{(1,2)}=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}\subset\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$ *при* $|h|\to\to 0$ *аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.12), (2.1)-(2.10) *по функционалу, т.е.* $\lim J_{h*}=J_*$ *при* $|h|\to 0$ *, и справедлива оценка скорости сходимости*

$$|J_{h*}-J_*|\le M|h|. \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что при каждом $h=(h_1,h_2)$ и соответствующей сетке $\bar\omega=\bar\omega_h=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*}+\epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.9)-(3.16) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x)\in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.9)-(3.16) в следующем смысле:

$$J_{h*}\le J_h(\Phi_{h\epsilon_h})\le J_{h*}+\epsilon_h,\quad \Phi_{h\epsilon_h}\in U_h, \tag{5.3}$$

где последовательность $\{\epsilon_h\}$ такова, что $\epsilon_h\ge 0$ и $\epsilon_h\to 0$ при $|h|\to 0$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x)\in U_h$ из (5.3) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.12), (2.1)-(2.10).

Теорема 5.3. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\Phi_{h\epsilon_h}(x)\subset\subset U_h\}$ *определена из условий* (5.3)*. Тогда последовательность управлений* $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}==\left\{\left(F_{1h}\Phi_{1h\epsilon_h}(r),F_{2h}\Phi_{2h\epsilon_h}(r),F_{3h}\Phi_{3h\epsilon_h}(r),F_{4h}\Phi_{4h\epsilon_h}(r)\right)\right\}$ *, где* $F_h:H_h\to H$ *,* $F_{\alpha h}$ *,* $\alpha=1,2$ *, – кусочно-линейные восполнения сеточных управлений* $\Phi_{\alpha h\epsilon_h}(r)$ *,* $\alpha=1,2$ *, а* $F_{\beta h}$ *,* $\beta=3,4$ *, – кусочно-постоянные восполнения сеточных управлений* $\Phi_{\beta h\epsilon_h}(r)$ *,* $\beta=3,4$ *(см. детальное описание в работах* [5], [2]*, соответственно), является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10)*, т.е.* $\lim J(F_h\Phi_{h\epsilon_h})=J_*$ *при* $|h|\to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0\le J(F_h\Phi_{h\epsilon_h})-J_*\le C|h|+\epsilon_h. \tag{5.4}$$

Последовательность $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$ *слабо сходится в* H *к множеству* $U_*\neq\emptyset$ *оптимальных управлений исходной экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10)*.*

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.9)-(3.16). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$

фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0. \tag{5.5}$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.9)-(3.16) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|^2_H$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega(\Phi_h) = \|\Phi_h\|^2_{H_h} = \|\Phi_h\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_1)\times W_2^1(\bar{\omega}_2)\times(L_2(\Omega_1))^2}$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.9)-(3.16): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}(x) \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \tag{5.6}$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$. Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.12), (2.1)-(2.10) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ – полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H, то $U_{**} \neq \emptyset$ [20].

Теорема 5.4. *Пусть последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$ определена из условий* (5.6). *Тогда последовательность управлений $\{F_h\hat{\Phi}_h(r)\} \subset U_h$ (см. определение выше) является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10), *т.е.* $\lim J(F_h\hat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \leq J(F_h\hat{\Phi}_h) - J_* \leq M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]. \tag{5.7}$$

Если, кроме того, параметры ν_h, δ_h, α_h согласованы с $|h|$ так, что $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \to +0$ при $|h| \to 0$ и $(|h|+\nu_h+\delta_h)/\alpha_h \to 0$ при $|h| \to 0$, то последовательность $\{F_h\hat{\Phi}_h\}$ сильно сходится в H к множеству Ω-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений U_{**} задачи (2.12), (2.1)-(2.10).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [20], [21] и опирается на полученные выше результаты.

Список литературы

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

2. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

3. Лубышев Ф. В., “О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52**:8 (2012), 1378–1399.

4. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., Файрузов М. Э., “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **54**:11 (2014), 1767–1792.

5. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:7 (2016), 70–96.

6. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

7. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

9. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

10. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

11. Киндерлелер Д., Стампаккья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

12. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.

13. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

15. Браудер Ф.Е., *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.

16. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.

17. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

18. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

19. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.

20. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

21. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Дата поступления 28.04.2016

Approximation of optimal control problems for semi-linear elliptic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients and states, with controls involved in the coefficients of diffusion and convective transfer

© F. V. Lubyshev[4], A. R. Manapova[5], M. E. Fairuzov[6]

Abstract. In this paper we study main problems of approximation of nonlinear optimal control problems described by elliptic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients and solutions, with controls involved in the coefficients of diffusion and convective transfer. Issues of discrete optimization problems construction, convergence of the approximations with respect to state, functional and control, and regularization of approximations are considered.

Key Words: the problem of optimal control, semi-linear elliptic equations, convective and diffusion transfer, difference method

[4] Full professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; aygulrm@mail.ru.

[5] Associate professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; aygulrm@mail.ru.

[6] Associate professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; fairuzovme@mail.ru.

УДК 519.624

О некотором методе регуляризации монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

© И. П. Рязанцева[1]

Аннотация. В статье изучаются уравнения с монотонными операторами в гильбертовом пространстве с возмущенными данными. Для этой некорректной задачи строится неявный метод итеративной регуляризации на основе непрерывного аналога метода Ньютона. По сравнению с классическим операторным методом регуляризации мы вводим в правую часть регуляризованного уравнения дополнительные слагаемые. С учетом априорной информации об искомом решении выбираем начальное приближение в этом итеративном методе. Получены достаточные условия сильной сходимости предложенного метода.

Ключевые слова: монотонный оператор, возмущённые данные, итеративный метод, регуляризация, сходимость

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ - монотонный хеминепрерывный оператор (см. [1], сс. 22, 23), $D(A) = H$.

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f. \tag{1.1}$$

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений N, которое является выпуклым и замкнутым множеством (см. [2], сс. 29, 31). В наших предположениях установить непрерывную зависимость решения (1.1) от возмущений A и f не удаётся, поэтому задачу (1.1) отнесём к классу некорректных и для её решения применим некоторый метод регуляризации.

Пусть данные задачи (1.1) известны приближённо, а именно, вместо оператора $A : H \to H$ и элемента f известны последовательности $\{A_n\}$ и $\{f_n\}$, при всех $n \geq 1$ обладающие следующими свойствами :

(i) $A_n : H \to H$ - монотонный хеминепрерывный оператор,

$$\|A_n x - Ax\| \leq h_n g(\|x\|) \quad \forall x \in H, \tag{1.2}$$

(ii) $f_n \in H$,

$$\|f_n - f\| \leq \delta_n, \tag{1.3}$$

где $\{\delta_n\}$ и $\{h_n\}$ – бесконечно малые при $n \to \infty$, $g(s)$ - функция, переводящая ограниченное множество в ограниченное, $s \geq 0$.

Базовым методом регуляризации для уравнения (1.1) является операторный метод регуляризации, определяемый уравнением вида

$$A_n \tilde{x}_{\alpha_n} + \alpha_n \tilde{x}_{\alpha_n} = f_n, \tag{1.4}$$

здесь $\{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел, причём

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\alpha_n} = 0, \tag{1.6}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{\alpha_n} = 0. \tag{1.7}$$

В наших условиях

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}_{\alpha_n} - x^*\| = 0, \tag{1.8}$$

где x^* – нормальное решение (1.1), т.е. элемент из N с минимальной нормой ([2], с.118).

В работе [3] для метода Ньютона [4]

$$v_{n+1} = v_n - [A'(v_n)]^{-1}(Av_n - f), \quad v_0 \in H, \tag{1.9}$$

построен непрерывный аналог вида

$$\frac{dv(t)}{dt} = -[A'(v(t))]^{-1}(Av(t) - f), \quad v(t_0) = v_0 \in H. \tag{1.10}$$

В [5] предложен регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона следующего вида

$$(A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t))'_t + \gamma(t)[A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)] = 0, \tag{1.11}$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \tag{1.12}$$

где $A(t)$ и $f(t)$ – некоторые приближения A и f соответственно, $t \geq t_0$, $\alpha(t)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция, существование $(A(t)u)'_t$, $f'_t(t)$ при $t \geq t_0$ предполагается.

На основе метода (1.11), (1.12) можно строить различные итеративные методы регуляризации, заменяя производные некоторыми разделёнными разностями. Заменив в (1.10) только производную $dv(t)/dt$ разделённой разностью $(v_{n+1} - v_n)/\Delta t$ с $\Delta t = 1$ и оставив производную $A'(z)$, придем к методу Ньютона (1.9).

В данной заметке мы производную по t в (1.11) заменим разделённой разностью и придём к неявному итерационному процессу следующего вида:

$$\frac{A_n w_n + \alpha_n w_n - f_n - (A_{n-1}w_{n-1} + \alpha_{n-1}w_{n-1} - f_{n-1})}{\tau_n} + \gamma_n(A_n w_n + \alpha_n w_n - f_n) = 0, \tag{1.13}$$

где $n = 1, 2, \ \dots$, элемент $w_0 \in H$ задаётся произвольно, $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – последовательности положительных чисел, для которых справедливы свойства (1.5) – (1.7).

Установим однозначную разрешимость (1.13) относительно w_n при известном элементе w_{n-1}. Для этого перепишем (1.13) в следующей форме

$$A_n w_n + \alpha_n w_n - f_n = \frac{1}{1 + \gamma_n \tau_n}\left(A_{n-1}w_{n-1} + \alpha_{n-1}w_{n-1} - f_{n-1}\right). \tag{1.14}$$

Теперь, используя результаты [1], [2], [6], делаем вывод об однозначной разрешимости уравнения (1.13). Исследуем поведение последовательности $\{w_n\}$ при $n \to \infty$.

Пусть в (1.1) оператор A невозмущён (т.е. $A_n = A$ и $h_n = 0$ при всех n), а правая часть f возмущена, т.е. вместо (1.13) имеем

$$\frac{Av_n + \alpha_n v_n - f_n - (Av_{n-1} + \alpha_{n-1}v_{n-1} - f_{n-1})}{\tau_n} + \gamma_n(Av_n + \alpha_n v_n - f_n) = 0. \tag{1.15}$$

Введем обозначение

$$u_n = Av_n + \alpha_n v_n - f_n \tag{1.16}$$

и от (1.15) придем к равенству

$$u_n(1+\gamma_n\tau_n) = u_{n-1},$$

т.е.

$$u_n = (1-\beta_n)u_{n-1}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n\tau_n}{1+\gamma_n\tau_n}.$$

Следовательно,

$$\|u_n\| = (1-\beta_n)\|u_{n-1}\| \quad \forall n \geq 1.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|u_n\| \leq \|u_0\| \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right), \tag{1.17}$$

где $u_0 = Av_0 + \alpha_0 v_0 - f_0$.

Запишем уравнение (1.4) с точными данными

$$Ax_{\alpha_n} + \alpha_n x_{\alpha_n} = f. \tag{1.18}$$

В силу (1.8)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\alpha_n} - x^*\| = 0. \tag{1.19}$$

На основании (1.16) и (1.18), приняв во внимание монотонность оператора A и условие (1.3), запишем соотношения

$$\alpha_n\|v_n - x_{\alpha_n}\|^2 \leq (Av_n + \alpha_n v_n - Ax_{\alpha_n} - \alpha_n x_{\alpha_n}, v_n - x_{\alpha_n}) =$$

$$= (u_n + f_n - f, v_n - x_{\alpha_n}) \leq (\|u_n\| + \delta_n)\|v_n - x_{\alpha_n}\|.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\|v_n - x_{\alpha_n}\| \leq \frac{\|u_n\|}{\alpha_n} + \frac{\delta_n}{\alpha_n}.$$

Теперь, учитывая установленную оценку (1.17), получаем неравенство вида

$$\|v_n - x_{\alpha_n}\| \leq \|u_0\| \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i)}{\alpha_n} + \frac{\delta_n}{\alpha_n}. \tag{1.20}$$

Следовательно, установлено утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to$ $\to H$ – монотонный хеминепрерывный оператор, $f \in H$, уравнение (1.1) имеет непустое множество решений, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i)}{\alpha_n} = 0, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n\tau_n}{1+\gamma_n\tau_n}. \tag{1.21}$$

Тогда последовательность $\{v_n\}$, определяемая равенством (1.15), при $n \to \infty$ сильно сходится к нормальному решению уравнения (1.1) при любом начальном элементе $v_0 \in$ H.

Пусть теперь и оператор A задан с ошибкой, тогда при

$$\tilde{u}_n = A_n w_n + \alpha_n w_n - f_n$$

с учетом предположения (1.2) и монотонности операторов A_n имеем

$$\alpha_n \|w_n - x_{\alpha_n}\|^2 \leq (A_n w_n + \alpha_n w_n - A_n x_{\alpha_n} - \alpha_n x_{\alpha_n}, w_n - x_{\alpha_n}) =$$

$$= (\tilde{u}_n + f_n - f + A x_{\alpha_n} - A_n x_{\alpha_n}, w_n - x_{\alpha_n}) \leq$$
$$\leq \left[\|\tilde{u}_n\| + \delta_n + h_n g(\|x_{\alpha_n}\|)\right] \|w_n - x_{\alpha_n}\|.$$

Кроме того, оценка вида (1.17) остаётся справедливой и для членов последовательности $\{\tilde{u}_n\}$, т.е.

$$\|\tilde{u}_n\| \leq \|\tilde{u}_0\| \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right), \quad \tilde{u}_0 = A_0 w_0 + \alpha_0 w_0 - f_0. \tag{1.22}$$

Теперь ограниченность $\{x_{\alpha_n}\}$ (см. (1.19)) приводит к оценке

$$\|w_n - x_{\alpha_n}\| \leq a_0 \left(\frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n} \beta_i)}{\alpha_n} + \frac{\delta_n + h_n}{\alpha_n} \right), \ \ a_0 > 0.$$

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1.2. *Если в условиях теоремы 1 оператор A задан приближенно, имеет место предельное равенство (1.7), то $w_n \to x^*$ при $n \to \infty$, где элементы последовательности $\{w_n\}$ определяются из уравнения (1.13), x^* – нормальное решение уравнения (1.1).*

Из равенства (1.14) следует, что ошибка правой части его не накапливается. Если $\gamma_n \geq \gamma$, $\tau_n \geq \tau$ при всех n, то имеем сходимость к нулю невязки регуляризованного уравнения со скоростью геометрической прогрессии, $q = 1/(1+\gamma\tau)$. В общем случае близость невязки к нулю определяется оценкой (1.22). Заметим, что из предельного равенства в (1.21) в силу (1.5) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty.$$

Отметим, что уравнения (1.13) и (1.4) отличаются правыми частями, а именно, по сравнению с (1.4) в уравнении (1.13) в правую часть вводится дополнительное возмущение

$$\frac{1}{1 + \gamma_n \tau_n} (A_{n-1} w_{n-1} + \alpha_{n-1} w_{n-1} - f_{n-1}),$$

что позволяет при задании элемента w_0 учесть априорную информацию об искомом решении уравнения (1.1). Наличие такой информации необходимо для нахождения решения некорректной задачи (1.1) (см. [7], [8]).

Список литературы

1. Вайнберг М.М., *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972.

2. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

3. Гаврурин М.К., “Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов”, *Известия вузов. Математика*, 1958, № 5(6), 18–31.

4. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.

5. Рязанцева И.П., “О некоторых методах непрерывной регуляризации для монотонных уравнений”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **34**:1 (1994), 3–11.

6. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

7. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., *Регуляризованные алгоритмы и априорная информация*, Наука, Москва, 1983.

8. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., *Численные методы решения некорректных задач*, Наука, Москва, 1990.

Дата поступления 29.02.2016

On some method of regularization for monotone equations in Hilbert space

© **I. P. Ryazantseva**[2]

Abstract. We study equations with monotone operators in Hilbert space with perturbed data. We construct for this ill-posed problem implicit iterative regularized method using continuous analogue of Newton method. In comparison with classical operator regularized method we introduce supplementary terms in right-hand side of regularized equation. By using a priori information of desired solution we choose initial approximation in this iterative method. We obtain sufficient conditions of strong convergence for propose method.

Key Words: monotone operator, approximate data, iterative method, regularization, convergence

[2] Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; lryazantseva@applmath.ru

УДК 517.977

К вопросу о теореме Боля – Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП)

© **П. М. Симонов** [1]

Аннотация. В работе рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных – разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных – функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В.Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно – это система функционально-дифференциальных уравнений, второе – это система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля – Перрона об экспоненциальной устойчивости для гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теорема Боля – Перрона, гибридная линейная система фунционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений

1. Введение

Исследованию по устойчивости решений ГЛФДСП к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГЛФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$

$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k$, $x_2(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости [1].

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [2]–[4]. Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [5]–[8] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе, свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно, гибридных линейные функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности, теорема Боля – Перрона.

[1] Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

2. Схема W-метода

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$.

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$, размера n, где каждый столбец лежит в пространстве $\mathbb{R}^n$, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \ldots$, размера n, $g(i) \in \mathbb{R}^n$ для каждого $i = 0, 1, \ldots$.

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int\limits_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$.

Пусть пространство ℓ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ с полунормами $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq 0$. Пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ с полунормами $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}$, $F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}$, $F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}$, $F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}$, $F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\mathrm{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$ (пространство $\mathbf{D} \subset D$, пространство $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$, пространство $\mathbf{B} \subset L$, пространство $\mathbf{M} \subset \ell$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ — банаховые пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например $\sup\limits_{t \geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} + \sup\limits_{k=-1,0,1,\ldots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнений [5]–[8] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами.

Например, $\sup\limits_{t\geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$. Тогда, положив $\mathcal{L}_{11}x \overset{def}{=} \dot{x} + x = z$, принимаем в качестве банахова пространства B банахово пространство L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\geq 0} ||z(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (W_{11}z)(t) + (U_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)} z(s)\, ds + \alpha e^{-t} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup\limits_{t\geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$) и их производная $\dot{x} = -x + z$ принадлежит пространству L_∞. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой

$$||x||_{D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty)} = \operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0} ||\dot{x}(t) + x(t)||_{\mathbb{R}^n} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

которое линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева $W_\infty^{(1)}[0, \infty)$ с нормой

$$||x||_{W_\infty^{(1)}[0,\infty)} = \sup_{t\geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} + \operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0} ||\dot{x}(t)||_{\mathbb{R}^n}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_{L_∞}. При этом $W_{L_\infty} \subset D$, и это вложение непрерывно.

Аналогично для банахова пространства $B \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ с нормой

$$||x||_{D(\mathcal{L}_{11}, B)} = ||\dot{x} + x||_B + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $B \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства B в пространство B, и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B. Это условие эквивалентно тому [5], [8], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству Соболева $W_B^{(1)}[0, \infty)$ с нормой

$$||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to B$ $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчиво, если для каждой правой части $z \in B$ каждое решение $x \in D(\mathcal{L}_{11}, B)$ [5]. $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, B) \to B$, удовлетворяющее условию выше, $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно B-устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$ [5][гл. IV, §4.6], [8].

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}, B), B)$, $(\mathbf{M}_0, B)$, $(D(\mathcal{L}_{11}, B), \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t, s]g[s]$, $t \geq 0$.

Введем пространства: для $1 \le p < +\infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{p0} = \left\{ y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{p0}} = \left(\sum_{k=-1}^{+\infty} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$\ell_p = \left\{ g \in \ell : \ ||g||_{\ell_p} : ||g||_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Для $p = \infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{ y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty \},$$

$$\ell_{\infty} = \{ g \in \ell : \ ||g||_{\ell_\infty} = \sup_{k=0,1,\cdots} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty \}.$$

Банаховы пространства ℓ_{p0} и ℓ_p — это примеры пространств типа $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}$.

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (2.1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$.

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы $\dot{x} = F_{11}^0 x + F_{12}^0 z + z$, $\Delta y = F_{21}^0 z + F_{22}^0 y + u$, где операторы $F_{11}^0 : D \to L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $F_{21}^0 : D \to \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \mathrm{col}\{z, u\}$. Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ — непрерывный вольтерров оператор Коши для системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ — фундаментальная матрица для системы, $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

3. Теоремы Боля – Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [9], [10], отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, B)$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, B_1)$-устойчивость, где B_1 — некоторое подпространство пространства B.

Следуя традиции Пермского семинара [5]–[8], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля – Перрона.* В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $B \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \ge 0$, если $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha \ge \beta$, если, $\alpha - \beta \ge 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \mathrm{col}\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $|| \cdot ||_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $||\alpha||_{\mathbb{R}^n} \le ||\beta||_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha| \le |\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L. А именно $y \geq 0$, если $y(t) \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \geq z$, если $y - z \geq 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $B \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве B согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L$, $y \in B$ и $|z| \leq |y|$, то $z \in B$ и $||z||_B \leq ||y||_B$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [11]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве B обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства B имеет точные грани (B — K*–пространство*); 3) в пространстве B определены*"срезки"* — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0, \infty)$; 4) вложение $B \subset L$ непрерывно.

4. Экспоненциальная устойчивость

Всюду ниже через B_γ обозначим *«весовое пространство»*, элементы которого y связаны с элементами z пространства B соотношением $y = z_\gamma$, где $z_\gamma(t) = e^{-\gamma t} z(t)$, $z \in B$, причем $||y||_{B_\gamma} = ||z||_B$.

Всюду будем предполагать, что для пространства B и модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ выполнены условия: существует число такое $\beta > 0$, что

а) оператор Коши W_{11} модельного уравнения действует из пространства B_β в пространство C_β и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} первого модельного уравнения принадлежат пространству C_β. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_C = \sup\limits_{t \geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n}$, C_β – весовое пространство функций y, представимых в виде $y(t) = u_\beta$, где $u_\beta(t) = e^{-\beta t} u(t)$, $u \in C$, $||y||_{C_\beta} = ||u||_C$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\beta) \subset C_\beta$. Таким образом, в частности, модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $||U_{11}(t)||_{\mathbb{R}^n} \leq N e^{-\beta t}$ при всех $t \geq 0$ для некоторого положительного N.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ [5]–[8].

Т е о р е м а 4.1. *Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)-$ устойчиво, а оператор $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$ действует из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\alpha)$ в пространство B_α при некотором $\alpha \in (0, \beta]$, причем оператор $\mathcal{L}_{11} W_{11} : B_\alpha \to B_\alpha$ регулярен. Тогда существует такое число $\gamma_0 \in (0, \alpha]$, что уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ будет $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_\gamma)-$ устойчивым для всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$.*

Оператор $\mathcal{Q} : B_\alpha \to B_\alpha$ называется регулярным, если равен разности двух положительных операторов.

Введем ℓ_p^γ (ℓ_{p0}^γ) — весовое пространство, элементы которого y связаны с элементами z пространства ℓ_p^γ (ℓ_{p0}^γ) соотношением $y = z_\gamma$, где $z_\gamma(t) = e^{-\gamma t} z(t)$, $z \in \ell_p$ ($z \in \ell_{p0}$), причем $||y||_{\ell_p^\gamma} = ||z||_{\ell_p}$ ($||y||_{\ell_{p0}^\gamma} = ||z||_{\ell_{p0}}$).

Всюду будем предполагать, что для пространства ℓ_p^γ, $1 \leq p \leq +\infty$, и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ выполнены условия: существует число такое $\beta > 0$, что

а) оператор Коши W_{22} модельного уравнения действует из пространства ℓ_p^β в пространство $\ell_{\infty 0}^\beta$ и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} второго модельного уравнения принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^\beta$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_p^\beta) \subset \ell_{\infty 0}^\beta$. Таким образом, в частности, модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $||U_{22}(t)||_{\mathbb{R}^n} \le Me^{-\beta t}$ при всех $t \ge 0$ для некоторого положительного M.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x,y\} = \{f,g\}$.

Т е о р е м а 4.2. *Операторы* $\mathcal{L}_{12} : \ell_{0p} \to B$, $\mathcal{L}_{21} : D(\mathcal{L}^0_{11}, B) \to \ell_p$ *действуют для некоторого* $1 \le p \le +\infty$. *Пусть, далее,* уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ $D(\mathcal{L}^0_{11}, B)-$ *устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22}y = g$ $D(\mathcal{L}^0_{22}, \ell_p)-$ *устойчиво, а операторы* $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ *действуют из пространства* $D(\mathcal{L}^0_{11}, B_\alpha)$ *и* $D(\mathcal{L}^0_{22}, \ell^\alpha_p)$ *в пространства* B_α *и* ℓ^α_p *при некотором* $\alpha \in (0,\beta]$, *причем операторы* $\mathcal{L}_{11}W_{11} : B_\alpha \to B_\alpha$ *и* $\mathcal{L}_{22}W_{22} : \ell^\alpha_p \to \ell^\alpha_p$ *регулярны. Тогда существует такое число* $\gamma_0 \in (0,\alpha]$, *что уравнение* $\mathcal{L}\{x,y\} = \mathrm{col}\{f,g\}$ *будет* $D(\mathcal{L}_0, B_\gamma \times \ell^\gamma_p)-$ *устойчивым для всех* $\gamma \in (0,\gamma_0)$.

Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».

Список литературы

1. В. М. Марченко, Ж. Ж. Луазо, “Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем”, *Дифференц. уравнения*, **45**:5 (2009), 728–740.

2. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП)”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **13**:4 (2013), 34–37.

3. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **14**:5 (2014), 38–45.

4. А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). III”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **15**:3 (2015), 63–69.

5. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными*, Перм. ун-т, Пермь, 2001, 230 с.

6. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. II”, *Дифференц. уравнения*, **27**:4 (1991), 555–562.

7. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. III”, *Дифференц. уравнения*, **27**:10 (1991), 1659–1668.

8. Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. IV”, *Дифференц. уравнения*, **29**:2 (1993), 196–204.

9. Е. А Барбашин, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 224 с.

10. Х. Л Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970, 456 с.

11. Л. В Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ. 4-е изд., испр.*, Невский Диалект, БХВ-Петербург, СПб., 2004, 816 с.

Дата поступления 4.05.2016

On the question of the theorem of Bohl — Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)

© **P. M. Simonov**[2]

Abstract. The abstract hybrid system of functional differential equations is given. One part of the equation for variable functional differential, according to another of the variables is the difference one, the second part of the equation for variable differential, according to another of the variables is functional differential one. There is a system of two equations with two unknowns. Apply W-method N.V. Azbelev's to two equations. Two model equations were studied: one is a system of functional differential equations, and the second is a system of differential equations. We studied the solutions spaces. Received Bohl – Perron theorem's for the exponential stability of the hybrid system of functional differential equations.

Key Words: theorem of Bohl – Perron, hybrid linear system of functional differential equations, stability, model equations' method

[2] Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm; simpm@mail.ru

УДК 517.968

Устойчивость и дифференцируемость по малому параметру смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка

© Т. К. Юлдашев [1]

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы непрерывной зависимости и дифференцируемости по малому параметру обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка, левая часть которого является суперпозицией двух операторов математической физики четвертого порядка. С помощью метода Фурье разделения переменных смешанная задача сведена к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода с малым параметром. Доказана непрерывная зависимость обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи по малому положительному параметру. Также доказана дифференцируемость обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи по малому параметру. При доказательстве существования производной по малому параметру счетной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода использован метод последовательных приближений. Результаты, полученные в данной работе, играют важную роль при построении асимптотических разложений по малому параметру решения смешанной задачи для рассматриваемого нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка.

Ключевые слова: Смешанная задача, уравнение восьмого порядка, суперпозиция дифференциальных операторов, устойчивость решения по малому параметру, дифференцируемость решения по малому параметру.

1. Введение

Теория смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теории струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости.

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [2], [3].

Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого, пятого и шестого порядков изучались во многих работах, в частности [4] – [18]. Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков изучались, в частности, в [19] – [25].

При исследовании реальных объектов зачастую приходится принимать во внимание разнообразные факторы, действующие на данную систему. При рассмотрении различных

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

задач управления движением существенную роль играет теория устойчивости. Под устойчивостью обычно понимают свойство системы, которое сохранится при малых изменениях начальных состояний, внешних воздействий, параметров системы и т.д.

В данной работе рассматриваются вопросы устойчивости и дифференцируемости по малому параметру обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка, левая часть которого является суперпозицией двух операторов математической физики четвертого порядка. Результаты данной работы играют важную роль при построении асимптотических разложений по малому параметру решения смешанной задачи для рассматриваемого нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка.

Используются следующие известные понятия. Рассматривается банахово пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\left\|a(t)\right\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\max_{t\in D_T}|a_n(t)|\Big)^2}.$$

Для произвольной функции $g(x)$, $x\in D_l$ в пространстве $L_2(D_l)$ используется норма

$$\left\|g(x)\right\|_{L_2(D_l)} = \sqrt{\int_0^l |g(y)|^2 dy}.$$

Для числовой последовательности φ_n в пространстве ℓ_2 рассматривается норма

$$\left\|\varphi\right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|^2}.$$

2. Постановка задачи

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)u(t,x) = f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{2.1}$$

со смешанными условиями

$$u(0,x)=\phi_1(x),\ u_t(0,x)=\phi_2(x),\ u_{tt}(0,x)=\phi_3(x),\ x\in D_l, \tag{2.2}$$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=$$

$$=\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,0)=\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,l)=\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,0)=\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,l)=0, \tag{2.3}$$

где $f(t,x,u)\in C(D\times R)$, $\phi_i(x)\in C^9(D_l)$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0;T]$, $D_l\equiv[0;l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\varepsilon$ – малый параметр.

В данной работе обобщенное решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) записывается в виде ряда:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(x), \tag{2.4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$.

Коэффициенты разложения $a_n(t)$ обобщенного решения смешанной задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ) Вольтерра второго рода [26]

$$a_n(t) = \psi_n(t,\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) b_i(y)\right) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon) dy ds, \tag{2.5}$$

где

$$\psi_n(t,\varepsilon) = \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\} + \frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \cos\mu_n(\varepsilon)t +$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} \sin\mu_n(\varepsilon)t,$$

$$G_n(t,s,\varepsilon) = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\} + \mu_n(\varepsilon)\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s) - \cos\mu_n(\varepsilon)(t-s),$$

$$\omega_n(\varepsilon) = \rho_n^2(\varepsilon)\mu_n^2(\varepsilon)(1+\mu_n^2(\varepsilon)),\ \mu_n^2(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^4}{\rho_n(\varepsilon)},\ \rho_n(\varepsilon) = 1 + \lambda_n^2\varepsilon,$$

начальные данные ϕ_{jn} подбирались из (2.2) так, что

$$\phi_{jn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jn} b_n(x), \phi_{jn}(x) \in L_2(D_l),\ j = \overline{1,3}.$$

Отметим, что в работе [26] изучена однозначная разрешимость смешанной задачи (2.1)–(2.3).

3. Устойчивость решения смешанной задачи по малому параметру

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\int\limits_0^T \|f(t,x,\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(t,\varepsilon)b_i(x))\|_{L_2(D_l)}\, dt \le \Delta < \infty$;

2) $f(t,x,u) \in Lip\Big\{L(t,x)_{|u}\Big\}$, *где* $0 < \int\limits_0^t \Big\|L(s,x)\Big\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$;

3) $\Big\|\psi(t,\varepsilon)\Big\|_{B_2(T)} < \infty$;

4) $\Big\|\lambda^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda^{-2}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_1\Big\|_{\ell_2} < \infty$, $\Big\|\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_2\Big\|_{\ell_2} < \infty$;

5) $\Big\|\lambda^{-8}\Big\|_{\ell_2} M_1^2 M_2 \sqrt{l} < \infty$, $\Big\|(\lambda^{-2}+\lambda^{-4}+\lambda^{-6}\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_3\Big\|_{\ell_2} < \infty$;

6) $\left(\Big\|\lambda^{-2}\Big\|_{\ell_2} + \Big\|\lambda^{-4}\Big(1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\lambda^{-2}+(1+T)\lambda^{-4}+\lambda^{-6}T\Big\|_{\ell_2}\right) \times$

$\times M_1^2 M_2 \sqrt{l} \int\limits_0^T \|f(t,x,\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(t,\varepsilon_1)b_i(x))\|_{L_2(D_l)}\, dt < \infty$,

где $M_1 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\omega_n(\varepsilon)\right)^2}}$, $M_2 = \Big\|G(t,s)\Big\|_{B_2(T)}$.

Тогда для произвольных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, \varepsilon]$ *справедлива оценка:*

$$\Big|u(t,x,\varepsilon_1) - u(t,x,\varepsilon_2)\Big| \le A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|,\ 0 < A = const.$$

Доказательство. С учетом (2.5) рассмотрим следующую разность:

$$a_n(t,\varepsilon_1) - a_n(t,\varepsilon_2) = \psi_n(t,\varepsilon_1) - \psi_n(t,\varepsilon_2) +$$

$$+\left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_1)} - \frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\Big)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon_1)dyds +$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^l \left(f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\right) - f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_2)b_i(y)\right)\right)\times\right.$$

$$\times b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon_2)dyds +$$

$$\left.+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\right)b_n(y)\Big(G_n(t,s,\varepsilon_1) - G_n(t,s,\varepsilon_2)\Big)dyds\right], \tag{3.1}$$

где

$$\psi_n(t,\varepsilon_1) - \psi_n(t,\varepsilon_2) = \left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2) + \mu_n^4(\varepsilon_2)}\right]\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\right\} +$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)}\left[\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_1)t\right\} - \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\right\}\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^4(\varepsilon_2)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2) + \mu_n^4(\varepsilon_2)}\right]\cos\mu_n(\varepsilon_2)t +$$

$$+\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)}\left[\cos\mu_n(\varepsilon_1)t - \cos\mu_n(\varepsilon_2)t\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1) + \mu_n^5(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_2))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_2) + \mu_n^5(\varepsilon_2)}\right]\sin\mu_n(\varepsilon_2)t +$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1) + \mu_n^5(\varepsilon_1)}\left[\sin\mu_n(\varepsilon_1)t - \sin\mu_n(\varepsilon_2)t\right]; \tag{3.2}$$

$$G_n(t,s,\varepsilon_1) - G_n(t,s,\varepsilon_2) = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_1)(t-s)\right\} - \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)(t-s)\right\} +$$

$$+\left[\mu_n(\varepsilon_1) - \mu_n(\varepsilon_2)\right]\sin\mu_n(\varepsilon_2)(t-s) + \mu_n(\varepsilon_1)\left[\sin\mu_n(\varepsilon_1)(t-s) - \sin\mu_n(\varepsilon_2)(t-s)\right] -$$

$$-\left[\cos\mu_n(\varepsilon_1)(t-s) - \cos\mu_n(\varepsilon_2)(t-s)\right]. \tag{3.3}$$

Для оценки по норме этой разности (3.1) используем следующие оценки:

$$|\mu_n(\varepsilon)| = \left|\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{1+\lambda_n^2\varepsilon}}\right| \le \lambda_n^2;\ \left|\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right| \le \lambda_n^{-8}; \tag{3.4}$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)}\right| \le \left|\frac{\phi_{1n}}{1+\mu_n^2(\varepsilon)}\right| + \left|\frac{\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)\Big(1+\mu_n^2(\varepsilon)\Big)}\right| \le |\phi_{1n}| + \frac{1+\lambda_n^2}{\lambda_n^4}|\phi_{3n}|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right|\le|\phi_{1n}|+\frac{1+\lambda_n^2}{\lambda_n^4}|\phi_{3n}|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\right|\le|\phi_{1n}|+|\phi_{2n}|+|\phi_{3n}|;$$

$$|\mu_n(\varepsilon_1)-\mu_n(\varepsilon_2)|\le\lambda_n^{-4}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;\ \left|\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_1)}-\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\right|\le\lambda_n^{-2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|; \tag{3.5}$$

$$|\sin\mu_n(\varepsilon_1)t-\sin\mu_n(\varepsilon_2)t|\le\lambda_n^{-4}T|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$
$$|\cos\mu_n(\varepsilon_1)t-\cos\mu_n(\varepsilon_2)t|\le\lambda_n^{-4}T|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$
$$\left|\exp\Big[-\mu_n^2(\varepsilon_1)t\Big]-\exp\Big[-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\Big]\right|\le\lambda_n^{-2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1)+\mu_n^4(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2)+\mu_n^4(\varepsilon_2)}\right|\le\lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1)+\mu_n^4(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^4(\varepsilon_2)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2)+\mu_n^4(\varepsilon_2)}\right|\le\lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1)+\mu_n^5(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon_2))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_2)+\mu_n^5(\varepsilon_2)}\right|\le$$

$$\le\lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+\phi_{2n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|.$$

Тогда для разностей (3.3) и (3.2) получаем оценки

$$|G_n(t,s,\varepsilon_1)-G_n(t,s,\varepsilon_2)|\le\Big(\lambda_n^{-2}+(1+T)\lambda_n^{-4}+\lambda_n^{-6}T\Big)|\varepsilon_1-\varepsilon_2|; \tag{3.6}$$

$$|\psi_n(t,\varepsilon_1)-\psi_n(t,\varepsilon_2)|\le\Big[\lambda_n^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda_n^{-2}\Big)|\phi_{1n}|+\lambda_n^{-4}(1+T)|\phi_{2n}|+$$
$$+(1+T)\Big(1+\lambda_n^{-2}+\lambda_n^{-4}\Big)|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|. \tag{3.7}$$

В силу условий теоремы, с учетом оценок (3.4)–(3.7) из (3.1) имеем

$$\big\|a(t,\varepsilon_1)-a(t,\varepsilon_2)\big\|_{B_2(T)}\le A_0|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+$$

$$+K_0\int_0^t\|L\,(s,x)\|_{L_2(D_l)}\big\|a(s,\varepsilon_1)-a(s,\varepsilon_2)\big\|_{B_2(t)}ds, \tag{3.8}$$

где

$$A_0=\Big\|\lambda^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda^{-2}\Big)\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_1\big\|_{\ell_2}+(1+T)\Big\|\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_2\big\|_{\ell_2}+$$
$$+(1+T)\Big\|1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_3\big\|_{\ell_2}+$$
$$+\Big[\Big\|\lambda^{-2}\Big\|_{\ell_2}+\Big\|\lambda^{-4}\Big(1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\lambda^{-2}+(1+T)\lambda^{-4}+T\lambda^{-6}\Big\|_{\ell_2}\Big]\times$$
$$\times M_1M_2\sqrt{l}\max_{t\in D_T}\int_0^t\left\|f\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon_1)b_i(x)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds, \tag{3.9}$$

$$K_0 = \left\|\lambda^{-8}\right\|_{\ell_2} M_1^2 M_2 \sqrt{l},\ M_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\omega_n(\varepsilon)\right)^2}},\ M_2 = \left\|G(t,s)\right\|_{B_2(T)}. \tag{3.10}$$

Применяя к (3.8) неравенства Гронуолла-Беллмана, получим

$$\left\|a(t,\varepsilon_1) - a(t,\varepsilon_2)\right\|_{B_2(T)} \leq A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \tag{3.11}$$

где $A_1 = A_0 \exp\left\{K_0 \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t \|L(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds\right\}$.

Из (3.11) с учетом (2.4) получаем, что

$$\left|u(t,x,\varepsilon_1) - u(t,x,\varepsilon_2)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n(t,\varepsilon_1) - a_n(t,\varepsilon_2)\right| \cdot \left|b_n(x)\right| \leq M_3 A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|,$$

где $M_3 = \left\|b(x)\right\|_{B_2(l)}$.

Если положим $M_3 A_1 = A$ в последнем неравенстве, то отсюда следует утверждение теоремы.

Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда для* $\varepsilon \in [0;\alpha]$, $\varepsilon + h \in (0;\alpha)$, $0 < \alpha, h = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h) - u(t,x,\varepsilon)}{h}\right| \leq A.$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 3.1. имеем

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h) - u(t,x,\varepsilon)}{h}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n(t,\varepsilon+h) - a_n(t,\varepsilon)}{h}\right| \cdot \left|b_n(x)\right| \leq$$

$$\leq M_3 \left\|\frac{a(t,\varepsilon+h) - a(t,\varepsilon)}{h}\right\|_{B_2(T)} \leq A_1 M_3 \frac{|\varepsilon + h - \varepsilon|}{h} = A.$$

Доказательство закончено.

4. Дифференцируемость решения смешанной задачи по малому параметру

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Если*

$$\int\limits_0^T \left\|\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)} dt < \infty,$$

то решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) дифференцируемо по малому параметру ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\frac{\partial u(t,x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \cdot b_n(x)$, то формально дифференцируем ССНИУ (2.5) по параметру ε

$$\frac{\partial a_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = B_n(t,\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int\limits_0^t \int\limits_0^l \frac{\partial f(s,y,u)}{\partial u} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial a_i(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} b_i(y) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon) dyds, \tag{4.1}$$

где

$$B_n(t,\varepsilon) = \frac{\partial\psi_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} + \left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right)'_{\varepsilon} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon)b_i(y)\right) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon) dyds+$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon)b_i(y)\right) b_n(y) \left(G_n(t,s,\varepsilon)\right)'_{\varepsilon} dyds, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\psi_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right)\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}+$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\left(-\mu_n^2(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon}\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}+\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right)\cos\mu_n(\varepsilon)t-$$

$$-\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\left(\mu_n(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon}\sin\mu_n(\varepsilon)t+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\right)\sin\mu_n(\varepsilon)t+$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\left(\mu_n(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon}\cos\mu_n(\varepsilon)t,$$

$$\left(G_n(t,s,\varepsilon)\right)'_{\varepsilon} = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\}\left(-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon}+$$

$$+\left(\mu_n(\varepsilon)\right)'_{\varepsilon}\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)+\mu_n(\varepsilon)\left(\mu_n(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon}\cos\mu_n(\varepsilon)(t-s)+$$

$$+\left(\mu_n(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon}\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s).$$

В силу условий теоремы из (4.2) имеем

$$\|B(t,\varepsilon)\|_{B_2(T)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|B_n(t,\varepsilon)\|_{C(D_T)} \leq A_0, \tag{4.3}$$

где A_0 определяется из (3.9).

Тогда из (4.1) следует

$$\left\|\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)} \leq \|B(t,\varepsilon)\|_{B_2(T)} + K_0 \int\limits_0^t \left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)} \left\|\frac{\partial a(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)} ds, \tag{4.4}$$

где K_0 определяется из (3.10).

Применяя к (4.4) неравенства Гронуолла-Беллмана, с учетом (4.3) получаем

$$\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\in B_2(T).$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial a_n^0(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=B_n(t,\varepsilon),\ \frac{\partial a_n^{k+1}(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=B_n(t,\varepsilon)+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial f(s,y,u)}{\partial u}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial a_i^k(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}b_i(y)\right)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon)dyds,k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда из справедливости оценок

$$\left\|\frac{\partial a^1(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^0(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a^0(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds\leq K_0\left\|B(t,\varepsilon)\right\|_{B_2(T)}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}ds,$$

$$\left\|\frac{\partial a^{k+1}(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^k(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a^k(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^{k-1}(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds\leq$$

$$\leq(K_0)^{k+1}\left\|B(t,\varepsilon)\right\|_{B_2(T)}\frac{\left[\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}ds\right]^{k+1}}{(k+1)!}$$

следует существование решения счетной системы (4.1) в пространстве $B_2(T)$. Теперь предположим, что система (4.1) имеет два решения $\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$ и $\frac{\partial\vartheta(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\vartheta(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\vartheta(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds. \tag{4.5}$$

Применение к (4.5) неравенства Гронуолла-Беллмана дает единственность этого решения.

Рассмотрим следующее соотношение

$$\frac{a_n(t,\varepsilon+h)-a_n(t,\varepsilon)}{h}=\frac{\psi_n(t,\varepsilon+h)-\psi_n(t,\varepsilon)}{h}+$$

$$+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon+h)}-\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\Big)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon+h)dyds+$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{1}{h}\left(f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\right)-f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon)b_i(y)\right)\right)\times$$
$$\times b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon)dyds+$$
$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\right)b_n(y)\frac{G_n(t,s,\varepsilon+h)-G_n(t,s,\varepsilon)}{h}dyds, \tag{4.6}$$

где

$$\frac{\psi_n(t,\varepsilon+h)-\psi_n(t,\varepsilon)}{h}=$$
$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right]\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}+$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon+h)t\right\}-\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}}{h}+$$
$$+\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^4(\varepsilon+h)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right]\cos\mu_n(\varepsilon)t+$$
$$+\frac{\mu_n^4(\varepsilon+h)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\cos\mu_n(\varepsilon+h)t-\cos\mu_n(\varepsilon)t}{h}+\sin\mu_n(\varepsilon)t\times$$
$$\times\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon+h))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon+h)+\mu_n^5(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\right]+$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon+h))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon+h)+\mu_n^5(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\sin\mu_n(\varepsilon+h)t-\sin\mu_n(\varepsilon)t}{h};$$

$$\frac{G_n(t,s,\varepsilon+h)-G_n(t,s,\varepsilon)}{h}=\frac{\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon+h)(t-s)\right\}-\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\}}{h}+$$
$$+\frac{\mu_n(\varepsilon+h)-\mu_n(\varepsilon)}{h}\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)+\mu_n(\varepsilon+h)\frac{\sin\mu_n(\varepsilon+h)(t-s)-\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)}{h}-$$
$$-\frac{\cos\mu_n(\varepsilon+h)(t-s)-\cos\mu_n(\varepsilon)(t-s)}{h}.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$ в (4.6), получаем (4.1). Следовательно, из того, что

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h)-u(t,x,\varepsilon)}{h}-\frac{\partial u(t,x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|\leq M_3\left\|\frac{a(t,\varepsilon+h)-a(t,\varepsilon)}{h}-\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}$$

следует утверждение теоремы.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Замышляева А. А., “Математические модели соболевского типа высокого порядка”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7**:2 (2014), 5 – 28.

3. Benney D. J., "Interactions of permanent waves of finite amplitude", *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.

4. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., "Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями", *Изв. вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.

5. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., "О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне", *Журн. СВМО*, **12**:3 (2010), 37 – 42.

6. Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А., "Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков", *Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения*, 1989, 24 – 36.

7. Турбин М. В., "Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.

8. Шабров С. А., "Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.

9. Шабров С. А., "Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.

10. Корпусов М. О., *Разрушение в параболических и псевдопараболических уравнениях с двойными нелинейностями*, URSS, М., 2012, 184 с.

11. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М., "О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области", *Мат. Сборник*, **195**:3 (2004), 115 – 142.

12. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением", *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

13. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение", *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14**:2 (2011), 59 – 69.

14. Юлдашев Т. К., "Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе", *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **51**:9 (2011), 1703 – 1711.

15. Юлдашев Т. К., "Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего куб параболического оператора", *Вестник СибГАУ*, **35**:2 (2011), 96 – 100.

16. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка", *Журн. СВМО*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

17. Юлдашев Т. К., “Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Журн. СВМО*, **15**:1 (2013), 134 – 142.

18. Юлдашев Т. К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.

19. Кошелев А. И., Челкак С. И., “О регулярности решений систем высших порядков”, *Докл. АН СССР*, **272**:2 (1983), 297 – 300.

20. Похожаев С. И., “О квазилинейных эллиптических уравнениях высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **17**:1 (1981), 115 – 128.

21. Скрыпник И. В., *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, Наукова думка, Киев, 1973, 219 с.

22. Тодоров Т. Г., “О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка”, *Вестник ЛГУ*, **19** (1975), 56 – 63.

23. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени”, *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **52**:1 (2012), 112 – 123.

24. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 277 – 295.

25. Юлдашев Т. К., *Нелинейные уравнения в частных производных высоких порядков*, СибГАУ, Красноярск, 2014, 187 с.

26. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **19**:1 (2015), 136 – 154.

Дата поступления 16.04.2016

Stability and differentiability with respect to small parameter of mixed value problem for a nonlinear partial differential equation of eighth order

© **T. K. Yuldashev**[2]

Abstract. Paper deals with continuous dependence and differentiability with respect to small parameter of generalized solution of mixed value problem for nonlinear partial differential equation of the eighth order, left-hand side of which is superposition of two operators of fourth order. By the aid of Fourier method the mixed problem is reduced to the study of countable system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind with small parameter. We proved the continuous dependence of generalized solution of considered mixed value problem with respect to small positive parameter. Also we proved the differentiability of the solution with respect to small positive parameter. While proofing the existence of derivative of countable system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind the method of successive approximations is used. The results obtained in this paper play important role in construction of the asymptotic expansions with respect to small parameter of solution of mixed value problem for considered nonlinear partial differential equation of the eighth order.

Key Words: mixed value problem, equation of eighth order, superposition of differential operators, stability of solution with respect to small parameter, differentiability of solution with respect to small parameter

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

Прикладная математика и механика

УДК 533.6.013.42

Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала

© А. В. Анкилов[1], П. А. Вельмисов[2], Ю. А. Тамарова[3]

Аннотация. Исследуется динамика и устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в канале дозвукового потока газа или жидкости. Аналитическое исследование устойчивости основано на построении положительно определенного функционала, при этом получены достаточные условия устойчивости. Численное исследование динамики и устойчивости проведено на основе метода конечных разностей с последующей реализацией численного эксперимента на C++.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, динамика, устойчивость, проточный канал, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток

1. Введение

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок, аппаратов различного назначения, взаимодействующих с потоком газа, возникает проблема обеспечения надежности их функционирования и увеличения сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений, проточных каналов различного назначения (например, сопел реактивных двигателей, трубопроводных систем) и т.д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком газа, имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к ее потере. В качестве примеров потери динамической устойчивости можно указать: флаттер крыла самолета, панельный флаттер пластин и оболочек, обтекаемых потоком, например флаттер панели обшивки самолета или ракеты; срывной флаттер лопаток турбин и винтов; колебания проводов, дымовых труб, висячих мостов и т.д.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, являются устройства, используемые для интенсификации технологических процессов. Например, устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, установки для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см. [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций, приборов и т.д., находящихся во взаимодействии с потоком газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием

[1] Доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

[2] Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[3] Инженер-программист, Ульяновское конструкторское бюро приборостроения, г. Ульяновск; kazakovaua@mail.ru.

устойчивости, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость-тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С.М., Скрипача Б.К., Табачникова В.Г., Григолюка Э.И., Болотина В.В., Вольмира А.С., Лампера Р.Е., Шандарова Л.Г., Новичкова Ю.Н., Бисплингхоффа Р.Л., Эшли Х., Халфмана Р.Л., Фына Я.Ц., Фершинга Г., Доуэлла Е.Х., Горшкова А.Г., Ильюшина А.А., Кийко И.А., Алгазина С.Д., Мовчана А.А., Дж. Майлса, Пановко Я.Г., Губанова И.И., Ильгамова М.А., Кудрявцева Б.Ю., Минасяна Д.М., Морозова В.И., Овчинникова В.В., Могилевича Л.И., Вельмисова П.А. и др. Среди последних исследований по динамике и устойчивости трубопроводов и их элементов, при протекании внутри них потока жидкости или газа, следует отметить исследования Могилевича Л.И., Поповой А.А., Мокеева В.В., Ершова Б.А., Барметова Ю.П., Дободейча И.А., Звягина А.В., Соколова В.Г., Березнева А.В., Paidoussis M.P. [2]–[8] и многих других отечественных и зарубежных ученых. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, отметим монографии и статьи [9]–[26].

В данной работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока газа или жидкости (в модели идеальной сжимаемой среды). Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного потока и малым деформациям (прогибам) упругого элемента стенки канала. Представлено два метода исследования. Первый (аналитический) основан на построении функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций: прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости жидкости (газа), при этом получены достаточные условия устойчивости решений этой системы в аналитической форме. Второй метод (численный) исследования динамики упругого элемента основан на методе конечных разностей [27].

Разработанный метод можно использовать для решения задачи о динамике и устойчивости произвольного количества произвольно закрепленных и произвольно расположенных на обеих стенках канала упругих элементов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале $J = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox. Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b,c]$ (Рис. 2.1). Введем обозначения: $w(x,t)$ - функция деформации упругого элемента (упругой пластины) стенки канала; $\phi(x,y,t)$ - потенциал скорости возмущенного потока.

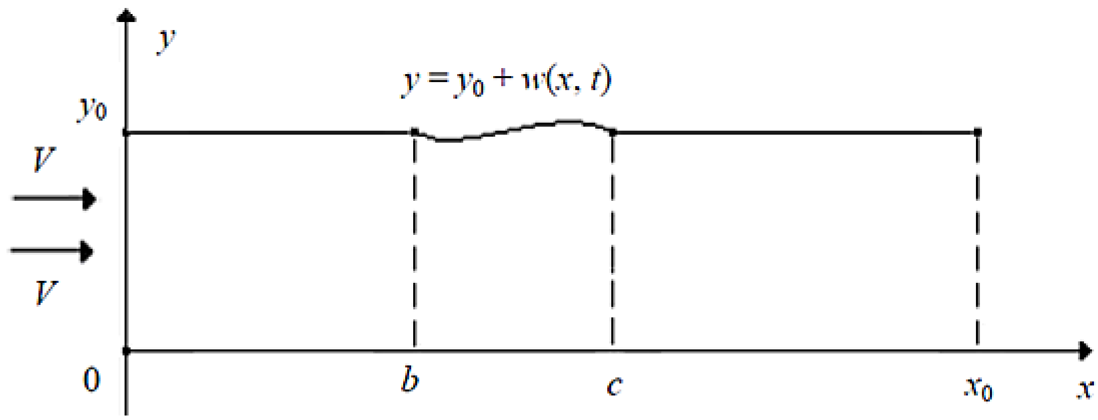


Рисунок **2.1**

Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\phi_{tt} + 2V\phi_{xt} + V^2\phi_{xx} = a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$\phi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0], \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$

$$\phi(0, y, t) = 0, \quad \phi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

$$L(w) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

$$L(w) \equiv Dw''''(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \tag{2.7}$$

$$w(b, t) = w''(b, t) = w(c, t) = w''(c, t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad x \in (b, c), \tag{2.9}$$

$$\dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (b, c), \tag{2.10}$$

$$\phi(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad (x, y) \in J, \tag{2.11}$$

$$\phi_t(x, y, 0) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in J. \tag{2.12}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t; штрих и точка - частные производные по x и t соответственно; ρ - плотность жидкости или газа в однородном невозмущенном потоке; D, M - изгибная жесткость и погонная масса пластины; N - сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 - коэффициент жесткости основания; a -скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($a > V$).

Уравнение (2.1) описывает динамику идеального газа (жидкости) в модели сжимаемой среды, (2.2)-(2.4) - условия непротекания стенок канала, (2.5) - условия отсутствия возмущений в граничных сечениях канала, уравнение (2.6), (2.7) описывает динамику упругого элемента стенки канала, (2.8) - условия шарнирного закрепления концов упругого элемента, (2.9)-(2.12) - начальные условия.

3. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость нулевого решения краевой задачи (2.1)-(2.8) $\phi(x,y,t) \equiv 0$, $w(x,t) \equiv 0$ по отношению к возмущениям начальных условий (2.9)-(2.12), т.е. устойчивость по Ляпунову. Введем функционал:

$$\Phi(t) = \iint\limits_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2)\phi_x^2 + a^2\phi_y^2)\,dxdy - 2a^2V\int\limits_b^c \phi(x,y_0,t)w'(x,t)\,dx + \\ + \frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c (M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2)\,dx. \tag{3.1}$$

Для функций $\phi(x,y,t)$ и $w(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1) и (2.6), (2.7), производная от Φ по t примет вид:

$$\dot{\Phi}(t) = 2\iint\limits_J \big(\phi_t(-2V\phi_{xt} - V^2\phi_{xx} + a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy})) + (a^2 - V^2)\phi_x\phi_{xt} + a^2\phi_y\phi_{yt}\big)\,dxdy - \\ -2a^2V\int\limits_b^c (\phi_t(x,y_0,t)w'(x,t) + \phi(x,y_0,t)\dot{w}'(x,t))\,dx + \frac{2a^2}{\rho}\int\limits_b^c (\dot{w}[-\rho(\phi_t(x,y_0,t) + \\ +V\phi_x(x,y_0,y)) - Dw'''' - \beta_2\dot{w}'''' - Nw'' - \beta_1\dot{w} - \beta_0 w] + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta_0 w\dot{w})\,dx. \tag{3.2}$$

Произведя интегрирование с учетом условий (2.2)-(2.5), (2.8), получим:

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho}\int\limits_b^c (\beta_2\dot{w}''^2 + \beta_1\dot{w}^2)\,dx. \tag{3.3}$$

Пусть выполняются условия:

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \tag{3.4}$$

тогда имеют место неравенства:

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \tag{3.5}$$

Для оценки функционала для функции $w(x,t)$ запишем неравенства Рэлея [28]:

$$\int\limits_b^c w''^2(x,t)\,dx \geq \lambda_1\int\limits_b^c w'^2(x,t)\,dx, \int\limits_b^c w''^2(x,t)\,dx \geq \mu_1\int\limits_b^c w^2(x,t)\,dx. \tag{3.6}$$

$$\int\limits_0^{x_0} \phi_x^2\,dx \geq \eta_1\int\limits_0^{x_0} \phi^2\,dx, \tag{3.7}$$

где λ_1, μ_1 - наименьшие собственные значения краевых задач $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$, $x \in (b,c)$ с граничными условиями (2.8); $\eta_1 = \dfrac{\pi^2}{x_0^2}$ - наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'' = -\eta\psi$, $x \in (0,x_0)$ с краевыми условиями $\psi(0) = 0$,

$\psi(x_0) = 0$, которые соответствуют (2.5). Интегрируя неравенство (3.7) от 0 до y_0 по переменной y, получим

$$\iint_J \phi_x^2(x,y,t)\,dxdy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2}\iint_J \phi^2(x,y,t)\,dxdy. \tag{3.8}$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим неравенства:

$$\begin{gathered}\left(\int_b^x w'(x,t)\,dx\right)^2 \leq \int_b^x 1^2\,dx\int_b^x w'^2(x,t)\,dx \leq \int_b^c 1^2\,dx\int_b^c w'^2(x,t)\,dx,\\ \left(w(x,t)|_b^x\right)^2 \leq \left(x|_b^c\right)\int_b^c w'^2\,dx, \quad w^2(x,t) \leq (c-b)\int_b^c w'^2(x,t)\,dx.\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\iint_J \phi_y^2\,dxdy \geq \frac{2}{y_0^2}\iint_J (\phi(x,y_0,t)-\phi(x,y,t))^2\,dxdy. \tag{3.10}$$

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (3.6) и очевидное неравенство $-2ab \leq \leq a^2+b^2$:

$$\begin{gathered}\Phi(0) \leq \iint_J \left(\phi_{t0}^2 + \left(a^2-V^2\right)\phi_{x0}^2 + a^2\phi_{y0}^2\right)\,dxdy + a^2\int_b^c \phi^2(x,y_0,0)\,dx+\\ +\frac{a^2}{\rho}\int_b^c\left(M\dot{w}_0^2 + \left(D+\frac{|N|+\rho V^2}{\lambda_1}+\frac{\beta_0}{\mu_1}\right){w''}_0^2\right)dx.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Здесь введены обозначения: $\phi_{t0} = \phi_t(x,y,0)$, $\phi_{x,0} = \phi_x(x,y,0)$, $\phi_{y0} = \phi_y(x,y,0)$, $\dot{w}_0 = = \dot{w}(x,0)$, $w_0 = w(x,0)$, $w_0' = w'(x,0)$, $w_0'' = w''(x,0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу, применяя (3.6), (3.8), (3.10) для (3.1):

$$\begin{gathered}\Phi(t) \geq \iint_J \left(\phi_t^2 + \left(a^2-V^2\right)\frac{\pi^2}{x_0^2}\phi^2 + \frac{a^2}{y_0^2}(\phi(x,y_0,t)-\phi(x,y,t))^2\right)dxdy-\\ -2a^2V\int_b^c \phi(x,y_0,t)w'(x,t)\,dx + \frac{a^2}{\rho}\int_b^c(\lambda_1 D - N)\,w'^2\,dx.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Введем обозначение:

$$f(x,t) = \begin{cases} 0, x\in(0,b],\\ w'(x,t), x\in(b,c),\\ 0, x\in[c,x_0),\end{cases}$$

тогда из (3.12) получим неравенство:

$$\begin{gathered}\Phi(t) \geq \iint_J \left[\phi_t^2(x,y,t) + \left((a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\phi^2(x,y,t) + \frac{a^2}{y_0^2}\right)\phi^2(x,y,t)-\right.\\ -\frac{4a^2}{y_0^2}\phi(x,y_0,t)\phi(x,y,t) + \frac{2a^2}{y_0^2}\phi^2(x,y_0,t) - \frac{2a^2V}{y_0}\phi(x,y_0,t)f(x,t)+\\ \left.+\frac{a^2(\lambda_1 D-N)}{\rho y_0}f^2(x,t)\right]dxdy.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма относительно $\phi(x,y,t)$, $\phi(x,y_0,t)$, $f(x,t)$ в (3.13) будет положительно определенной, если выполняются условия:

$$\lambda_1 D - N > 0. \tag{3.14}$$

$$\frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0} \cdot \frac{2(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} - V^2\left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}\right) > 0. \tag{3.15}$$

Преобразуем неравенство (3.15):

$$N < \lambda_1 D - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2-V^2)\pi^2}\left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}\right). \tag{3.16}$$

Оценивая квадратичную форму в (3.13) относительно $w(x,t)$ с учетом (3.9), получим:

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2(c-b)} w^2(x,t), \tag{3.17}$$

где $\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$, $\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0$, $d_{11} = \dfrac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \dfrac{2a^2}{y_0^2}$, $d_{22} = d_{12} = \dfrac{2a^2}{y_0^2}$, $d_{23} = \dfrac{V}{y_0^2}$, $d_{33} = \dfrac{a^2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0}$.

Учитывая (3.5), (3.11), (3.17), получим неравенство:

$$w^2(x,t) \leq \frac{\Delta_2(c-b)}{\Delta_3 y_0} \iint\limits_J (\phi_{t0}^2 + (a^2-V^2)\phi_{x0}^2 + a^2\phi_{y0}^2)\,dxdy +$$
$$+a^2 \int\limits_b^c \phi^2(x,y_0,0)\,dx + \frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c \left(M\dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N|+\rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1}\right){w''}_0^2\right)dx,$$

из которого следует

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются условия (3.4), (3.14), (3.16). Тогда решение $w(x,t)$ задачи (2.1)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных ϕ_{t0}, ϕ_{x0}, ϕ_{y0}, $\phi(x,y_0,0)$, $\dot{w}_0$, w''_0.*

4. Метод конечных разностей

Разобьем: отрезок $[0,x_0]$ на n частей точками $x_i = h_x i$, $i = 0,1,\ldots,n$, где $h_x = \dfrac{x_0}{n}$; отрезок $[0,y_0]$ - на m частей точками $y_j = h_y j$, $j = 0,1,\ldots,m$, где $h_y = \dfrac{y_0}{m}$; отрезок $[0;T]$ - на K частей точками $t_k = h_t k$, $k = 0,1,\ldots,K$, где $h_t = \dfrac{T}{K}$.

Введем обозначения $\phi(x_i,y_j,t_k) = \phi_{ijk}$, $w(x_i,t_k) = w_{ik}$.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (2.1)-(2.12) имеет вид

$$\frac{\phi_{ijk+1} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ijk-1}}{h_t^2} + 2V\frac{\phi_{i+1jk} - \phi_{ijk} - \phi_{i+1jk-1} + \phi_{ijk-1}}{h_x h_t} + V^2\frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} =$$
$$= a^2\left(\frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} + \frac{\phi_{ij+1k} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ij-1k}}{h_y^2}\right); \tag{4.1}$$

$$\frac{\phi_{imk+1} - \phi_{im-1k+1}}{h_y} = \frac{w_{ik+1} - w_{ik}}{h_t} + V\frac{w_{i+1k} - w_{ik}}{h_x}, \quad i \in (i_b, i_c); \tag{4.2}$$

$$\frac{\phi_{imk+1} - \phi_{im-1k+1}}{h_y} = 0, \quad i \in (0, i_b] \cup [i_c, n); \tag{4.3}$$

$$\phi_{i0k} = \phi_{i1k}; \tag{4.4}$$

$$\phi_{0jk} = 0; \tag{4.5}$$

$$\phi_{njk} = 0; \tag{4.6}$$

$$-\rho\left(\frac{\phi_{imk} - \phi_{imk-1}}{h_t} + V\frac{\phi_{i+1mk} - \phi_{imk}}{h_x}\right) = \frac{D}{h_x^4}(w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k}) +$$
$$+\frac{\beta_2}{h_x^4 h_t}(w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k} - w_{i+2k-1} + 4w_{i+1k-1} - 6w_{ik-1} + 4w_{i-1k-1} -$$
$$-w_{i-2k-1}) + \frac{M}{h_t^2}(w_{ik+1} - 2w_{ik} + w_{ik-1}) + \frac{N}{h_x^2}(w_{i+1k} - 2w_{ik} + w_{i-1k}) + \frac{\beta_1}{h_t}(w_{ik} - w_{ik-1}) + \beta_0 w_{ik},$$
$$i \in (i_b, i_c); \tag{4.7}$$

$$w_{i_b k+1} = 0, \quad w_{i_c k+1} = 0; \tag{4.8}$$

$$w_{i_b+1k+1} = \frac{1}{2}w_{i_b+2k+1}; \quad w_{i_c-1k+1} = \frac{1}{2}w_{i_c-2k+1}; \tag{4.9}$$

$$w_{i0} = f_1(x_i), \quad i \in (i_b, i_c)\,; \tag{4.10}$$

$$\frac{w_{i1} - w_{i0}}{h_t} = f_2(x_i), \quad i \in (i_b, i_c)\,; \tag{4.11}$$

$$\phi_{ij0} = \psi_1(x_i, y_j); \tag{4.12}$$

$$\frac{\phi_{ij1} - \phi_{ij0}}{h_t} = \psi_2(x_i, y_j) \Rightarrow \phi_{ij1} = \psi_1(x_i, y_j) + h_t\psi_2(x_i, y_j). \tag{4.13}$$

5. Согласование начальных данных

Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ должны удовлетворять условиям (2.8):

$$f_1(b) = f''_1(b) = f_1(c) = f''_1(c) = 0 \tag{5.1}$$

$$f_2(b) = f''_2(b) = f_2(c) = f''_2(c) = 0 \tag{5.2}$$

Функции $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ должны удовлетворять условиям (2.4)-(2.5):

$$\psi_{1y}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, x_0), \tag{5.3}$$

$$\psi_{2y}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, x_0), \tag{5.4}$$

$$\psi_1(0, y) = 0, \quad \psi_1(x_0, y) = 0, \quad y \in (0, y_0), \tag{5.5}$$

$$\psi_2(0, y) = 0, \quad \psi_2(x_0, y) = 0, \quad y \in (0, y_0). \tag{5.6}$$

Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ должны быть согласованы в соответствии с условием (2.2)-(2.3) и уравнением (2.6),(2.7). Из уравнения (2.6),(2.7) получим:

$$\begin{aligned}&-\rho(\phi_t(x, y_0, 0) + V\phi_x(x, y_0, 0)) = Dw''''(x, 0) + \beta_2\dot{w}''''(x, 0) + M\ddot{w}(x, 0) + Nw''(x, 0) +\\ &+\beta_1\dot{w}(x, 0) + \beta_0 w(x, 0).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Согласно условию (2.2)-(2.3), начальное ускорение стенки

$$\ddot{w}(x,0) = \phi_{yt}(x,y_0,0) - V\dot{w}'(x,0) \tag{5.8}$$

Подставляя (5.8) в (5.7), получим

$$\begin{aligned}&-\rho(\phi_t(x,y_0,0) + V\phi_x(x,y_0,0)) - M\phi_{yt}(x,y_0,0) = Dw''''(x,0) + \beta_2\dot{w}''''(x,0) - \\ &-MV\dot{w}'(x,0) + Nw''(x,0) + \beta_1\dot{w}(x,0) + \beta_0 w(x,0)\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}&-\rho(\psi_2(x,y_0) + V\psi_{1x}(x,y_0)) - M\psi_{2y}(x,y_0) = Df_1''''(x) + \beta_2 f_2''''(x) - \\ &-MVf_2'(x) + Nf_1''(x) + \beta_1 f_2(x) + \beta_0 f_1(x)\end{aligned} \tag{5.9}$$

Согласно (2.2)-(2.3), должно выполняться равенство

$$\psi_{1y}(x,y_0) = f_2(x) + Vf_1'(x), \quad x \in (b,c) \tag{5.10}$$

$$\psi_{1y}(x,y_0) = 0, \quad x \in (0,b] \cup [c,x_0). \tag{5.11}$$

6. Программная реализация

1) Задаем начальные условия
$w_{i0} = f_1(x_i)\,,\ w_{i1} = f_1(x_i) + h_t f_2(x_i)\,,\ i = 0,1,\ldots,n\,,$
$\phi_{ij0} = \psi_1(x_i,y_j)\,,\ \phi_{ij1} = \psi_1(x_i,y_j) + h_t\psi_2(x_i,y_j)\,,\ i = 0,1,\ldots,n\,,\ j = 0,1,\ldots,m\,;$
2) Из уравнения (4.1) находим значения потенциала

$$\begin{aligned}&\phi_{ijk+1} = 2\phi_{ijk} - \phi_{ijk-1} + h_t^2 a^2\left(\frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2} + \frac{\phi_{ij+1k} - 2\phi_{ijk} + \phi_{ij-1k}}{h_y^2}\right) - \\ &-2h_t^2 V\frac{\phi_{i+1jk} - \phi_{ijk} - \phi_{i+1jk-1} + \phi_{ijk-1}}{h_x h_t} - V^2 h_t^2\frac{\phi_{i+1jk} - 2\phi_{ijk} + \phi_{i-1jk}}{h_x^2}\end{aligned}$$

$i = 1,\ldots,n-1\,,\ j = 1,\ldots,m-1\,;$
3) Из условий (4.4)-(4.6) находим значения потенциала в граничных точках
$\phi_{i0k+1} = \phi_{i1k+1}\,,\ \phi_{0jk+1} = 0\,,\ \phi_{njk+1} = 0\,,\ i = 1,\ldots,n-1\,,\ j = 0,\ldots,m-1\,;$
4) Из уравнения (4.7) находим значения функции прогиба

$$\begin{aligned}&w_{ik+1} = \frac{h_t^2}{M}\left[-\rho\left(\frac{\phi_{imk} - \phi_{imk-1}}{h_t} + V\frac{\phi_{i+1mk} - \phi_{imk}}{h_x}\right) - \frac{D}{h_x^4}(w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - \right. \\ &-4w_{i-1k} + w_{i-2k}) + \frac{\beta^2}{h_x^4 h_t}(w_{i+2k} - 4w_{i+1k} + 6w_{ik} - 4w_{i-1k} + w_{i-2k} - w_{i+2k-1} + 4w_{i+1k-1} - \\ &-6w_{ik-1} + 4w_{i-1k-1} - w_{i-2k-1}) - \frac{M}{h_t^2}(w_{ik-1} - 2w_{ik}) - \frac{N}{h_x^2}(w_{i+1k} - 2w_{ik} + w_{i-1k}) - \\ &\left.-\frac{\beta_1}{h_t}(w_{ik} - w_{ik-1}) - \beta_0 w_{ik}\right], \quad i = i_b + 2,\ldots,i_c - 2;\end{aligned}$$

5) Используя граничные условия (4.8)-(4.9), находим значения функции прогиба в граничных точках отрезка $[b,c]$
$w_{i_b k+1} = 0\,,\ w_{i_c k+1} = 0\,,\ w_{i_b+1k+1} = \frac{1}{2}w_{i_b+2k+1}\,,\ w_{i_c-1k+1} = \frac{1}{2}w_{i_c-2k+1}\,;$
6) Из условий (4.2)-(4.3) находим
$\phi_{imk+1} = \phi_{im-1k+1} + h_y\frac{w_{ik+1} - w_{ik}}{h_t} + Vh_y\frac{w_{i+1k} - w_{ik}}{h_x}\,,\ i \in [i_b,i_c]\,,$
$\phi_{imk+1} = \phi_{im-1k+1}\,,\ i \in (0,i_b) \cup (i_c,n)\,.$
Цикл повторяется с пункта 2 по 6 для $k = 1,2,\ldots,K-1$.

7. Численный эксперимент

Введем функции, удовлетворяющие условиям (5.1)-(5.2), например:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin\frac{\pi(x-b)}{b-c}.$$

Согласно условиям (5.10), (5.11), функция $\psi_{1y}(x, y_0)$ примет вид:

$$\psi_{1y}(x, y_0) = \begin{cases} 0, \quad x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \sin\dfrac{\pi(x-b)}{b-c}, \quad x \in [b, c]. \end{cases} \tag{7.1}$$

С учетом условий (7.1), (5.3), (5.5) функцию $\psi_1(x, y)$ можно взять в виде

$$\psi_1(x, y) = \begin{cases} 0, \quad x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \dfrac{y^2}{2y_0}\sin\dfrac{\pi(x-b)}{b-c}, \quad x \in [b, c]. \end{cases}$$

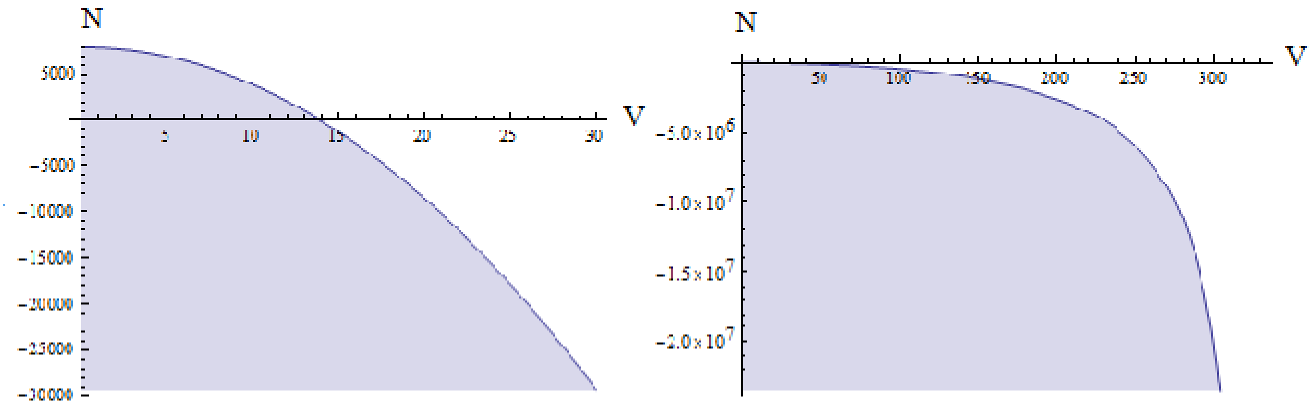
Условия (7.1), (5.3), (5.5) выполняются. Учитывая (5.9), зададим $\psi_2(x, y)$ в виде

$$\psi_2(x, y) = \begin{cases} -\cos\dfrac{\pi y}{y_0}\dfrac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)}\sin\dfrac{\pi x}{2b}, \quad x \in (0, b), \\ -\dfrac{1}{\rho}\cos\dfrac{\pi y}{y_0}\left[\dfrac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)}\cos\dfrac{\pi(x-b)}{(b-c)} - \left(\beta_1 + \dfrac{\beta_2\pi^4}{(b-c)^4}\right)\sin\dfrac{\pi(x-b)}{b-c}\right], \quad x \in [b, c], \\ -\cos\dfrac{\pi y}{y_0}\dfrac{(M-\rho)\pi V}{\rho(b-c)}\sin\dfrac{\pi(x-x_0)}{2(c-x_0)}, \quad x \in (c, x_0) \end{cases}$$

Условия (5.4), (5.6) выполняются.

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда - воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{\text{пл}} = 8480$). Выберем параметры механической системы: $x_0 = 20$, $b = 10$, $c = 11$, $y_0 = 1$, $h = 0{,}005$, $M = \rho_{\text{пл}} h = 42{,}4$, $\nu = 0{,}31$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $V = 5$, $a = 331$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0{,}4$, $\beta_2 = 0{,}4$. Все значения приведены в системе СИ.

Согласно неравенству (3.16) для шарнирного закрепления ($\lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{(c-b)^2} = \pi^2$) построены области устойчивости (обозначена на рис. 7.1 серым цветом) на плоскости «усилие N - скорость потока V » (рис. 7.1). На рисунке 7.1а: $V \in [0, 30]$, на рисунке 7.1б: $V \in [0, a]$, где a - скорость звука.



а) б)

Рисунок **7.1**

Область устойчивости на плоскости (V, N).

С использованием описанного алгоритма, с помощью программы, разработанной на языке C++, получены для шарнирного закрепления графики функции $w(x,t)$ при $x \in \in [b;c]$, $t = t_0$ и при $x^* = (b+c)/2$, $t \in [0; 2,5]$ при разных значениях N. При реализации численного эксперимента было введено разбиение $n = 400$, $m = 100$, $K = 100000$.

1) $N = -10000$

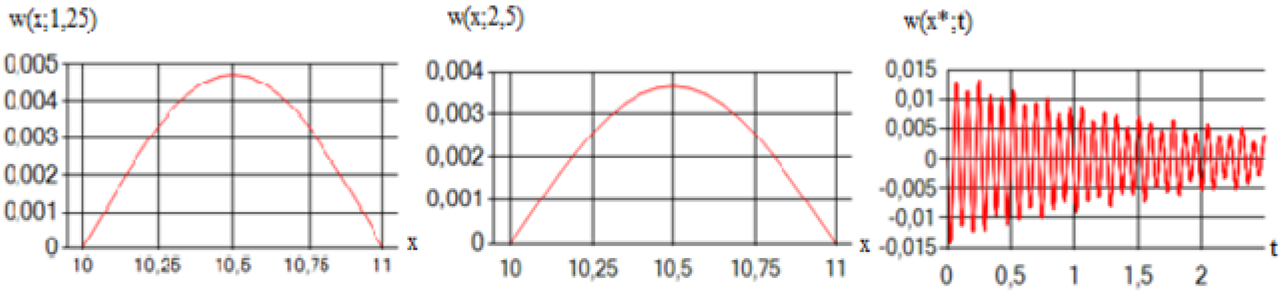


Рисунок **7.2**

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке x^*.

2) $N = 6000$

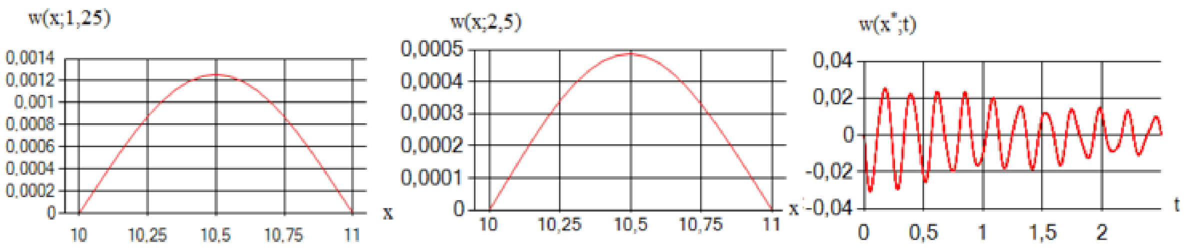


Рисунок **7.3**

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке x^*.

3) $N = 9790$

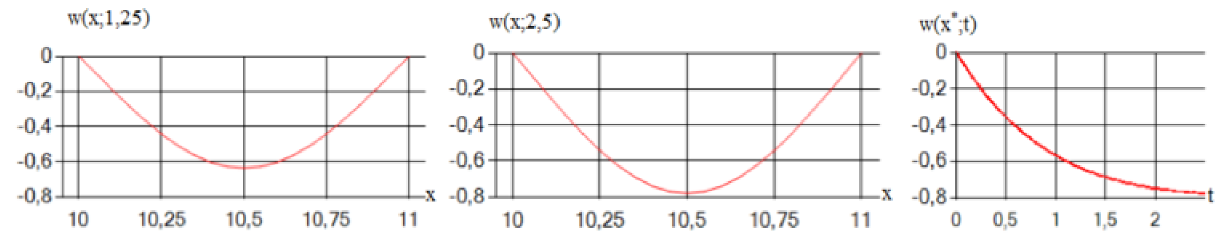


Рисунок **7.4**

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке x^*.

Рисунки 7.2, 7.3 соответствуют устойчивости, а рисунок 7.4 - неустойчивости колебаний упругого элемента. Результаты численного эксперимента согласуются с неравенством (3.16).

Аналогично построена конечно-разностная схема и реализован численный эксперимент для случая жесткого закрепления концов упругого элемента (в этом случае $\lambda_1 = \dfrac{4\pi^2}{(c-b)^2} = 4\pi^2$). В качестве примера на рисунке 7.5 построены графики функции $w(x,t)$ при $x \in [b;c]$, $t = t_0$ и при $x^* = (b+c)/2$, $t \in [0;2,5]$ при $N = 9790$.

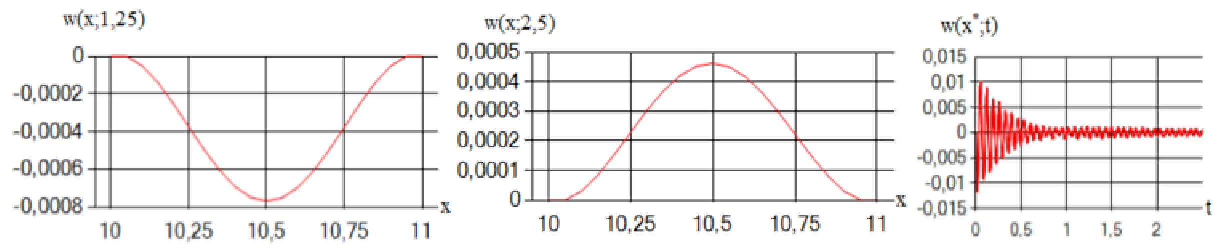


Рисунок **7.5**

Деформация упругого элемента в различные моменты времени и в точке x^*.

Из сравнения рисунков 7.4, 7.5 видно, что при $N = 9790$ в случае жесткого закрепления наблюдается устойчивость колебаний упругого элемента, в то же время для шарнирного закрепления имеет место неустойчивость.

Таким образом, на основе аналитического исследования получены достаточные условия динамической устойчивости упругого элемента канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной жидкости (газа). Условия накладывают ограничения на скорость однородного потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Разработанная программа численного исследования позволяет моделировать колебания упругого элемента проточного канала при различных значениях параметров механической системы.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ №15-01-08599.

Список литературы

1. Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 B 06 B 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П.А., Горшков Г.М., Рябов Г.К.; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92 ; опубл. 27.06.96, Бюл. № 18.

2. Ю. П. Барметов , И. А. Дободейч, “К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе”, *Известия вузов. Авиационная техника.*, 2006, № 1, 18–21.

3. Б. А. Ершов , Г. А. Кутеева, “Колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с упругой вставкой на стенке. Учет внутреннего трения в материале вставки”, *Вестник СПбУ*, **1**:2 (2005), 86–94.

4. А. В. Звягин, “Движение вязкой жидкости в канале с упругими границами”, *Вестник МГУ*, **1**:1 (2005), 50–54.

5. Л. И. Могилевич, А. А. Попова, “Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту”, *Наука и техн. транс.*, 2007, № 2, 69–72.

6. В. В. Мокеев, “Конечно-элементное решение задачи гидроупругости для вязкоупругой жидкости”, *Пробл. машиностр. и надеж. машин*, 2005, № 2, 9–86.

7. В. Г. Соколов, А. В. Березнев, “Уравнения движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости”, *Изв. вузов. Нефть и газ.*, 2004, № 6, 76–80.

8. Paidoussis Michael P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, 2008, № 3(310), 462–492.

9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2000, 115 с.

10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.

11. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.

12. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. Е. Колмановский, “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1966–1981.

13. П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. А. Решетников, “Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления»”, *Датчики и системы*, 2003, № 6(49), 12–15.

14. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета. Серия: естественнонаучная*, 2008, № 8/1 (67), 331–344.

15. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2009, № 1 (37), вып. 1, 7–16.

16. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова, “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2009, № 2 (38), вып. 1, 7–17.

17. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2011, № 1 (22), 179–185.

18. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семёнова, “О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2011, № 2 (23), 266–271.

19. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2011, № 3 (57), вып. 1, 59–67.

20. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2013, № 2 (31), 120–126.

21. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Математическая модель вибрационного устройства”, *Автоматизация процессов управления*, 2014, № 3 (37), 58–67.

22. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Динамическая устойчивость упругого элемента проточного канала”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2014, № 3 (31), 40–55.

23. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций*, УлГТУ, Ульяновск, 2015, 146 с.

24. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1994, 176 с.

25. П. А. Вельмисов, А. А. Молгачев, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2012, 184 с.

26. П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов, *Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем*, УлГТУ, Ульяновск, 2014, 204 с.

27. Л. И. Турчак, *Основы численных методов*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1987, 320 с.

28. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

Дата поступления 12.05.2016

Research on dynamics and stability of an elastic element of the flow channel

© A. V. Ankilov[4], P. A. Velmisov[5], Ju. A. Tamarova[6]

Abstract. Dynamics and stability of an elastic element of a wall of a flow channel with a subsonic stream of gas or liquid in it is investigated. Analytical research on stability is conducted on the basis of creation of positive-definite functional. The sufficient stability conditions are obtained. Numerical research of dynamics and stability is conducted on the basis of finite difference method with subsequent realization of numeral experiment on C++.

Key Words: aerohydroelasticity, dynamics, stability, flow channel, elastic plate, deformation, subsonic flow

[4] Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

[5] Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[6] Software Engineer, Ulyanovsk Instrument Manufacturing Design Bureau, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovaua@mail.ru

УДК 517.958:544.034:615.011

Решение обратной задачи одномерной диффузии лекарственного вещества из хитозановой пленки

© **А. О. Сыромясов**[1]

Аннотация. В одномерном приближении рассматривается диффузия лекарственного вещества из хитозановой пленки (пластыря) в окружающую воду. Решается задача об определении диффузионных характеристик пленки по набору измеренных в различные моменты времени средних концентраций вещества в пластыре. Предлагаемый метод основан на использовании аналитического решения прямой задачи диффузии и методе наименьших квадратов. Поведение вещества на границе раздела "хитозановая пленка – вода" может быть описано граничными условиями первого и третьего рода. Рассмотрены случаи постоянного и переменного (с течением времени убывающего до нуля) коэффициента диффузии. Показано, что использование условий первого рода в сочетании с гипотезой о переменном коэффициенте диффузии дает наилучшее согласование с экспериментальными данными.

Ключевые слова: диффузия, хитозановая пленка, одномерная задача, обратная задача, аналитическое решение, экспериментальные данные, метод наименьших квадратов

1. Введение

Перспективным направлением в медицине является заживление ран с помощью органических пленок (пластырей), пропитанных лекарственным веществом (ЛВ). Для эффективного применения пленок следует знать такие их характеристики, как коэффициент диффузии, что позволит оценивать скорость впитывания ЛВ из пленки в кожу пациента.

Исходными данными для определения указанной характеристики служат результаты экспериментов: пленку пропитывают неким веществом, помещают в изначально чистую воду и измеряют изменение концентрации лекарства в воде с течением времени. На основании полученной информации делают выводы о средней концентрации лекарственного вещества внутри пластыря. В свою очередь, эта величина должна зависеть от искомого коэффициента диффузии.

Соответственно, обратная задача диффузии будет заключаться в том, чтобы по известным геометрическим параметрам пленки (длина, ширина, толщина) и опытным данным о зависимости средней концентрации ЛВ внутри нее от времени найти неизвестный коэффициент диффузии.

Информация о таких экспериментах приводится, например, в работах [1, 2, 3]. В них описываются опыты с пленками на основе хитозана, пропитанными амикацином или соединениями цефазолина. Пленки имели длину и ширину 0.5 см и толщину 0.1 мм и помещались в пробирку объемом 10 мл, заполненную водой, которую постоянно перемешивали.

В настоящей статье рассматривается математическая модель диффузии лекарственного вещества и предлагается метод нахождения неизвестных параметров пленки, основанный на использовании аналитического решения прямой задачи диффузии. Исходный материал для расчетов взят из указанных выше работ.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск, syal1@yandex.ru

2. Принятые допущения и математическая постановка задачи

Будем считать, что пленка имеет толщину $2l$ и занимает область пространства $-l \leq \leq x \leq l$ (рис. 2.1). Длина и ширина пленки в экспериментах [1, 2, 3] многократно больше ее толщины, поэтому далее предполагается, что эти два параметра бесконечны.

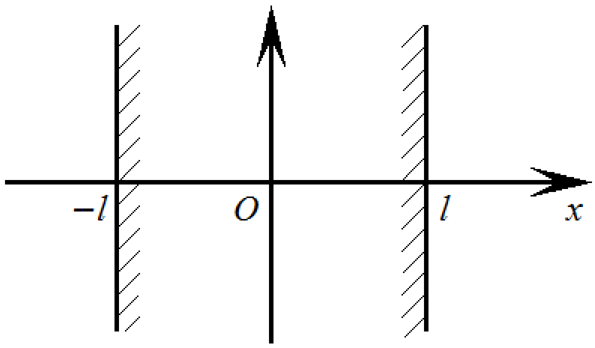


Рисунок **2.1**

Положим $l = 1/2$, тогда координата x будет обезразмерена на толщину пластыря.

Сделанные выше предположения позволяют использовать для описания процесса выделения вещества из пластыря одномерное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right), \tag{2.1}$$

где D – искомый коэффициент диффузии, t – время, x – пространственная координата, $c = c(t, x)$ – концентрация лекарственного вещества. Далее рассматриваются два варианта: коэффициент D постоянен или представляет собой функцию времени t.

Начальным условием для (2.1) служит соотношение

$$c(0, x) = c_0,\ -l < x < l. \tag{2.2}$$

Константа c_0 есть начальная концентрация вещества в пластыре.

Объем пленки на несколько порядков меньше объема воды, в которую она помещена. Поэтому даже в случае выхода 99% лекарства в воду средняя концентрация вещества в пленке во много раз превысит среднюю концентрацию вне ее. Тот факт, что в обсуждаемых экспериментах вода в пробирке регулярно перемешивается, позволяет исключить гипотезу о «застаивании» выделившегося лекарственного вещества вблизи поверхности пластыря. Следовательно, концентрацию ЛВ вне пластыря можно считать равной нулю.

Вышесказанное позволяет рассмотреть два варианта граничных условий на поверхности пленки. Либо концентрация ЛВ поддерживается равной нулю:

$$c(t, \pm l) = 0,\ t > 0, \tag{2.3}$$

либо поток ЛВ пропорционален концентрации вещества внутри пленки:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \mp kc,\ x = \pm l, t > 0. \tag{2.4}$$

В любом из них выделение ЛВ в окружающую воду через левую и правую границу пластыря идет с одинаковой интенсивностью, а значит, $c(t, x)$ есть четная функция x.

Постоянный коэффициент k в (2.4) также подлежит определению.

Отметим, что при $k \to \infty$ условие (2.4) переходит в (2.3). Поэтому и решение задачи (2.1), (2.2), (2.4) при больших k должно переходить в решение задачи (2.1)–(2.3).

Уже упомянутая средняя по толщине пленки концентрация определяется равенством

$$\langle c\rangle(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} c(t,x)dx. \tag{2.5}$$

Считается, что значения $\langle c\rangle(t)$ в некоторые моменты времени t известны.

В работе вычисления выполнены для трех наборов данных, предоставленных группой химиков-экспериментаторов. Опыты проводились над пленками, содержавшими 0.01 моль цефазолина на 1 моль хитозана и подвергнутыми предварительной термообработке в течение 30 минут (A), 60 минут (B) и 120 минут (C). В табл. 1 приведены данные о средней концентрации вещества в пленках в зависимости от времени.

Время от начала опыта, ч	$\langle c\rangle$, пленка A	$\langle c\rangle$, пленка B	$\langle c\rangle$, пленка C
0.00	1.0000	1.0000	1.0000
0.17	0.7533	0.7333	0.7333
0.33	0.6467	0.6667	0.7067
0.50	0.5933	0.6000	0.3867
1.00	0.3333	0.4333	0.3733
1.50	0.1933	0.4333	0.3600
2.00	0.1800	0.3667	0.3467
3.00	0.1667	0.3333	0.3000
4.00	0.1533	0.1400	0.2333
5.00	0.1467	0.1267	0.1800
24.0	0.1333	0.1133	0.1667
72.0	0.1000	0.1000	0.1533
144	0.0467	0.0800	0.1133
168	0.0333	0.0667	0.1000
192	0.0333	0.0667	0.1000

Таблица 1: Зависимость средней концентрации ЛВ в пленке от времени

Как видно, перечисленные концентрации обезразмерены на величину c_0, принятую за 1. При дальнейших вычислениях время t также будет обезразмериваться на продолжительность эксперимента $t_{\max} = 192$ ч.

3. Метод решения

Для решения обратной задачи диффузии требуется вначале решить прямую задачу (2.1)–(2.3) или (2.1), (2.2), (2.4) и найти зависимость $\langle c\rangle$ от времени t. После этого следует подобрать искомые параметры D и k так, чтобы расчетные значения $\langle c\rangle$ согласовывались с опытными данными. Критерием согласования служит минимальность величины Q^2 – суммы квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных.

Как при постоянном D, так и при специальных видах зависимости D от времени, прямая задача диффузии допускает аналитическое решение, которое может быть получено путем разделения переменных [4]. Это позволяет затем без особенных трудностей реализовать метод наименьших квадратов в системе Wolfram Mathematica [5].

3.1. Случай постоянного коэффициента диффузии

Решение задачи (2.1)–(2.3) при $D = \mathrm{const}$ имеет вид:

$$c(t,x) = \frac{2c_0}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \exp\Big(- D\lambda_n^2 t\Big) \cos \lambda_n x, \tag{3.1}$$

где собственные числа

$$\lambda_n = \frac{1}{l}\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big). \tag{3.2}$$

Среднее значение концентрации, вычисленное из (3.1)–(3.2) согласно (2.5), равно

$$\langle c\rangle(t) = \frac{2c_0}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp\Big(- D\lambda_n^2 t\Big). \tag{3.3}$$

Для подбора D методом наименьших квадратов в системе Mathematica суммирование в (3.1) и приводимых далее аналогичных формулах обрывалось при $n = 50$.

С целью повысить качество приближения и уменьшить значение Q^2 вместо условий первого рода (2.3) можно рассмотреть условия третьего рода (2.4). В этом случае

$$c(t,x) = 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n \xi_n^2} \exp\Big(- D\lambda_n^2 t\Big) \cos \lambda_n x, \tag{3.4}$$

где введено обозначение

$$\xi_n^2 = l + \frac{k}{k^2 + \lambda_n^2}, \tag{3.5}$$

а собственные значения λ_n суть последовательные положительные корни уравнения

$$\mathrm{ctg}\lambda l = \frac{\lambda}{k}. \tag{3.6}$$

При фиксированном l и $k \to \infty$ уравнение (3.6) переходит в

$$\mathrm{ctg}\lambda l = 0,$$

а его корни – в числа (3.2) соответственно. Выражение (3.5) при фиксированном λ_n и неограниченно возрастающих k стремится к l. Подстановка этих значений в (3.4) дает формулу (3.1), что подтверждает предельный переход от решения краевой задачи с условиями третьего рода к решению задачи с условиями первого рода.

Из (3.4)–(3.6) следует, что при условиях (2.4) средняя концентрация ЛВ есть

$$\langle c\rangle(t) = \frac{2c_0 k^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k + l(k^2 + \lambda_n^2))} \exp\Big(- D\lambda_n^2 t\Big). \tag{3.7}$$

Решение обратной задачи становится более трудоемким. Теперь неизвестных параметров два (D и k), а зависимость $\langle c\rangle$ от k носит сложный характер: по k определяется спектр (3.6), и лишь затем λ_n подставляются в (3.7). В связи с этими обстоятельствами для отыскания пары оптимальных значений D, k предлагается приближенный алгоритм, ориентированный на то, что величина Q^2 имеет единственный минимум.

Сначала задается отрезок $[k_{\min}; k_{\max}]$, внутри которого отыскивается k, а также точность ε. Далее выполняется следующая цепочка шагов.

1. Отрезок $[k_{\min}; k_{\max}]$ делится на N_K частей длины $\Delta = (k_{\max} - k_{\min})/N_K$ каждая.
2. Для каждого из значений $k_j = k_{\min} + j\Delta$, $j = \overline{0, N_K}$ отыскивается оптимальное значение D, равное D_j, и вычисляется значение критерия Q^2 для пары D_j, k_j.
3. Определяется новый, более короткий отрезок, содержащий искомое k: если минимальная величина Q^2 достигается при $k = k_j$, то этот отрезок есть $[k_{j-1}; k_{j+1}]$.
4. С новым отрезком проделываются те же действия, что и со старым. Когда длина отрезка становится меньше 2ε, в качестве оптимального k выбирается его середина.

Поскольку нахождение собственных чисел λ_n из (3.6) довольно трудоемко, изложенная выше последовательность действий была оптимизирована по числу разбиений N_K.

Пусть после d разбиений первоначальный отрезок, на котором отыскивается k, приобрел длину 2ε и сократился в $A = (k_{\max} - k_{\min})/(2\varepsilon)$ раз. Если искомый минимум Q^2 не смещен сильно к одному из концов $[k_{\min}; k_{\max}]$, то за каждое разбиение длина отрезка сокращается в $N_K/2 = p$ раз, а значит, $p^d = A$. Каждый "проход" по отрезку, ведущий к его сокращению, сводится к нахождению Q^2 в $N_K + 1$ точке (если не запоминать результаты предыдущих вычислений). Таким образом, всего будет вычислено

$$(N_K + 1)d = (N_K + 1)\log_p A = \ln A \cdot \frac{N_K + 1}{\ln(N_K/2)}$$

значений Q^2. Так как N_K – целое, то минимум $(N_K + 1)d$ достигается при $N_K = 6$.

Запоминание величины Q^2 на концах отрезка приводит к тому, что на каждом из d шагов производится $N_K - 1$ вычислений, а оптимальным становится $N_K = 4$.

Начальные границы $k_{\min}$ и $k_{\max}$ определяются так. Проинтегрировав обе части исходного уравнения (2.1) по x в пределах от $-l$ до l и использовав (2.4), (2.5), получим

$$\frac{d\langle c\rangle}{dt} = -\frac{kD}{l}c(t,l).$$

В частности, пусть c'_0 – скорость изменения средней концентрации при $t = 0$; эта величина может быть приближенно найдена из данных табл. 1 как разделенная разность [6]. Тогда

$$c'_0 = -\frac{kD}{l}c_0. \tag{3.8}$$

В качестве начального приближения $D^{(0)}$ для коэффициента диффузии можно брать значение, найденное при решении задачи с граничными условиями первого рода (2.3). После этого начальное приближение $k^{(0)}$ для k находится подстановкой $D^{(0)}$ в (3.8), а в качестве $k_{\min}$ и $k_{\max}$ берутся величины $10^{-2}k^{(0)}$ и $10^2k^{(0)}$ соответственно.

Несмотря на соотношение (3.8), величины D и k не зависят друг от друга. Указанное равенство использовалось лишь для оценки границ отрезка, в котором заключено искомое k, и нигде более не применялось. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, найти из экспериментальных данных значение c'_0 можно лишь приближенно (и с довольно высокой погрешностью). Во-вторых, *a priori* предполагается, что увеличение количества параметров модели должно вести к лучшему согласованию расчетных и экспериментальных результатов. Применение (3.8) для того, чтобы выразить D через k, ведет к снижению числа параметров и может нивелировать возможный эффект "выравнивания" данных.

3.2. Случай переменного коэффициента диффузии

Общей чертой выражений (3.3) и (3.7) служит стремление средней концентрации к нулю при $t \to \infty$. Это противоречит результатам опытов (см. табл. 1), согласно которым величина $\langle c \rangle$ со временем стабилизируется, достигая ненулевого равновесного значения:

$$\lim_{t \to \infty} \langle c \rangle (t) = c_\infty > 0.$$

Дабы привести модель в большее соответствие с реальными данными, положим, что коэффициент диффузии зависит от времени и при $t \to \infty$ убывает до нуля: способность пленки отдавать вещество уменьшается, что ведет к застаиванию ЛВ внутри нее. Эта гипотеза по-прежнему позволяет решать уравнение (2.1), разделяя переменные.

Общее выражение для ограниченной при $t \to \infty$ и четной по координате x функции $c(t, x)$, являющейся решением (2.1), таково:

$$c(t, x) = \sum_n C_n \exp\Big(- \lambda_n^2 \int_0^t D(\tau) d\tau \Big) \cos \lambda_n x, \tag{3.9}$$

где C_n – постоянные коэффициенты, λ_n – собственные значения.

Величины C_n определяются из начального условия (2.2), но при подстановке $t = 0$ в (3.9) вид функции $D(t)$ не играет роли. Поэтому решения уравнения (2.1) будут отличаться от (3.1), (3.4) лишь заменой множителей $\exp(-D\lambda_n^2 t)$ на более сложные.

В настоящей работе принята следующая зависимость D от времени:

$$D(t) = D_0 e^{-t/t_0}, \tag{3.10}$$

где начальное значение D_0 и время релаксации t_0 являются неизвестными константами.

С учетом (3.10) функция $c(t, x)$, удовлетворяющая (2.1)–(2.3), имеет вид

$$c(t, x) = \frac{2c_0}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \exp\Big(- \lambda_n^2 D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0}) \Big) \cos \lambda_n x, \tag{3.11}$$

а соответствующее среднее значение концентрации оказывается равным

$$\langle c \rangle (t) = \frac{2c_0}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp\Big(- \lambda_n^2 D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0}) \Big). \tag{3.12}$$

При этом спектр $\{\lambda_n\}$ не зависит от нестационарных слагаемых в исходном дифференциальном уравнении и вычисляется по формуле (3.2).

Из (3.12) легко видеть, что равновесное значение средней концентрации равно

$$c_\infty = \frac{2c_0}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp\Big(- \lambda_n^2 D_0 t_0 \Big). \tag{3.13}$$

Отсюда вытекает следующий алгоритм поиска параметров D_0 и t_0.

1. В качестве c_∞ берется повторяющееся (см. табл. 1) значение $\langle c \rangle$ при больших значениях t. Равновесная концентрация определяется гораздо точнее, чем c_0'.

2. Уравнение (3.13) приближенно решается относительно переменной $K_0 = D_0 t_0$.

3. В формуле (3.12) переменная t_0 заменяется на K_0/D_0, а для поиска оставшегося неизвестным параметра D_0 применяется метод наименьших квадратов.

Таким же образом зависимость (3.10) учитывается в задаче с граничными условиями (2.4). Выражение (3.4) заменяется на

$$c(t,x) = 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n \xi_n^2} \exp\Big(- D\lambda_n^2 D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0})\Big) \cos \lambda_n x,$$

причем спектр находится из (3.6). Тогда средняя концентрация вычисляется по формуле

$$\langle c \rangle (t) = \frac{2c_0 k^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k + l(k^2 + \lambda_n^2))} \exp\Big(- D\lambda_n^2 D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0})\Big),$$

а для равновесного значения $\langle c \rangle$ справедливо выражение, аналогичное (3.13):

$$c_\infty = \frac{2c_0 k^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k + l(k^2 + \lambda_n^2))} \exp\Big(- D\lambda_n^2 D_0 t_0 \Big). \tag{3.14}$$

С его помощью производится переход от задачи с тремя неизвестными D_0, t_0, k к задаче с двумя неизвестными D_0, k. Для этого уравнение (3.14) решается относительно переменной $K_0 = D_0 t_0$. В свою очередь, алгоритм нахождения пары D_0, k описан ранее.

4. Результаты и их обсуждение

При постоянном коэффициенте диффузии и использовании граничных условий первого рода были получены следующие результаты (табл. 2).

Результат	Пленка A	Пленка B	Пленка C
D	14.0524	8.4239	9.5997
Q^2	0.0759	0.0748	0.2114

Таблица 2: Результаты вычислений при $D = \mathrm{const}$

Ни для одной из трех пленок использование условий (2.4) вместо (2.3) при $D = \mathrm{const}$ не привело к уменьшению Q^2. Для проверки гипотезы о предпочтительности условий первого рода был проведен численный эксперимент, в котором значения k брались равными 10^m, $m = \overline{1, 10}$. Для всех пленок при увеличении m значение Q^2 снижалось, приближаясь к тому, что было получено при использовании граничных условий (2.3).

Применение гипотезы об экспоненциальной зависимости коэффициента диффузии от времени вместе с условиями первого рода дает следующие результаты (табл. 3).

Результат	Пленка A	Пленка B	Пленка C
D_0	17.0795	10.9500	14.4662
t_0	0.0189	0.0231	0.0147
Q^2	0.0378	0.0251	0.0715

Таблица 3: Результаты вычислений при $D = D(t)$

Как видно, значения Q^2 при $D = D(t)$ в 2–3 раза меньше, чем при $D = \mathrm{const}$.

Обращают на себя внимание малые величины t_0, что говорит о быстром (по сравнению с продолжительностью эксперимента) изменении диффузионных свойств пленки.

Решение задачи с переменным коэффициентом диффузии и условиями третьего рода приводит к тому, что значения D_0 и t_0 для пленки А меняются на 24.1702 и 0.0168. При этом оптимальное значение $k = 18.4565$, а величина Q^2 уменьшается весьма незначительно и составляет 0.0353 (против 0.0378). Для пленок В и С применение условий (2.4), аналогично случаю $D = \text{const}$, не приводит к уменьшению суммы Q^2.

На рис. 4.1 приведены графики $\langle c\rangle(t)$ для пленки А. Значения параметров D, D_0 и t_0 взяты из табл. 2 и 3.

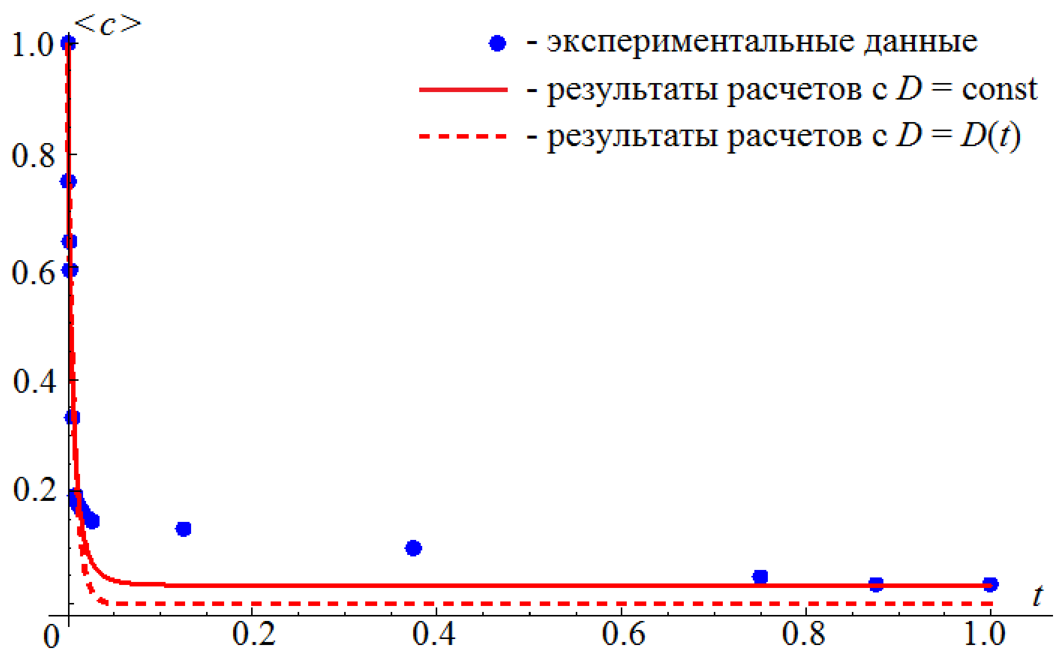


Рисунок **4.1**

Как видно, обе формулы (3.3) и (3.12) служат хорошим приближением для результатов экспериментов при малых временах t. При больших t качество аппроксимации $\langle c\rangle$ выражением с $D = \text{const}$ заметно падает, а с $D = D(t)$ – остается достаточно высоким. Тем самым, применение гипотезы о переменном коэффициенте диффузии более предпочтительно, хотя использование более сложных, нежели (3.10), видов зависимости D от t могло бы улучшить качество приближения в средней части диапазона изменения t.

Укажем размерные значения параметров D, D_0, t_0 в системе СИ (табл. 4).

Результат	Пленка А	Пленка В	Пленка С
D	$2.0330 \cdot 10^{-13}$ м^2/с	$1.2187 \cdot 10^{-13}$ м^2/с	$1.3889 \cdot 10^{-13}$ м^2/с
D_0	$2.4780 \cdot 10^{-13}$ м^2/с	$1.5842 \cdot 10^{-13}$ м^2/с	$2.0929 \cdot 10^{-13}$ м^2/с
t_0	13063.7 с (3.63 ч)	15966.7 с (4.44 ч)	10160.6 с (2.82 ч)

Таблица 4: Размерные результаты вычислений

Здесь найденные ранее безразмерные значения времени релаксации умножены на $t_{\max} = 6.912 \cdot 10^5$ с, что соответствует указанному ранее значению в 192 ч.

Коэффициент диффузии в системе СИ имеет размерность м^2/с, а в качестве характерного масштаба длины ранее была взята толщина пластыря $2l = 10^{-4}$ м. Поэтому вычисленные ранее значения $D = \text{const}$ и D_0 умножаются на $(2l)^2/t_{\max}$.

Найденные размерные величины t_0 могут рассматриваться как ориентировочное время, в течение которого та или иная пленка все еще пригодна в медицинских целях. При $t > t_0$ ее коэффициент диффузии резко уменьшается, а выход ЛВ замедляется.

Отметим, что обратная задача диффузии для тех же исходных данных (табл. 1) решалась в [7]. В указанной статье были рассмотрены условия первого рода при $D = \mathrm{const}$, краевая задача решалась численно, а для поиска коэффициента диффузии применялся генетический алгоритм. Изначально все данные обезразмеривались, а по окончании решения производился переход к размерным переменным. К сожалению, в качестве масштаба для координаты x была выбрана длина пленки (5 мм), а не ее толщина (0.1 мм), в результате чего итоговые значения D оказались завышены. С учетом более корректного масштабирования значения коэффициента диффузии для пленок A, B и C, вычисленные в [7], оказываются равными $2.1972 \cdot 10^{-13}$, $1.2726 \cdot 10^{-13}$ и $1.2876 \cdot 10^{-13}$ м^2/с, соответственно, что хорошо согласуется с табл. 4.

Чтобы проверить правильность вычисления размерного коэффициента $D = \mathrm{const}$ в упомянутой выше статье и в настоящей работе, были произведены расчеты в пакете ANSYS [8], лицензией на использование которого обладает МГУ им. Н. П. Огарёва. При этом была использована полная математическая аналогия между уравнениями диффузии (2.1) и теплопроводности. Вместо коэффициента D в уравнении теплопроводности фигурирует отношение $\kappa/(\alpha\rho)$, где κ, α, ρ – соответственно, теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность среды, а роль концентрации c в расчетах выполнила температура T. В память ANSYS были введены значения κ, численно равные размерным значениям коэффициента диффузии, параметры α и ρ были положены равными 1. Предполагалось, что T изменяется в диапазоне от $0°$C до $1°$C.

В ходе расчетов было найдено распределение температуры в те моменты времени, когда в натурном эксперименте производилось измерение концентрации ЛВ в пленке, а также вычислены соответствующие средние температуры. Функция $\langle T\rangle(t)$ продемонстрировала поведение, полностью аналогичное поведению $\langle c\rangle(t)$ для $D = \mathrm{const}$ на рис. 4.1. Суммарное отклонение вычисленных $\langle T\rangle$ (или $\langle c\rangle$, что то же самое) от экспериментальных во всех расчетах оказалось весьма близким к соответствующим величинам Q^2 (см. табл. 2), превышая их на десятые доли процента. Это говорит о корректности результатов в табл. 4, а также (с учетом корректировки масштаба длины) о правильности расчетов в [7].

5. Заключение

Предложенный в статье способ определения коэффициента диффузии по известным экспериментальным данным основан на решении одномерного уравнения диффузии методом разделения переменных и подборе наилучшего приближения для искомых параметров методом наименьших квадратов. Указанный подход не требует больших вычислительных ресурсов и может быть реализован на любом персональном компьютере.

Метод был опробован на трех конкретных наборах опытных данных. При этом рассматривались два вида граничных условий (первого и третьего рода), описывающие выделение ЛВ из пленки, и две гипотезы относительно коэффициента диффузии: искомая величина постоянна или экспоненциально убывает со временем. Был изучен предельный переход от граничных условий третьего рода к более простым условиям первого рода.

Расчеты показали, что гипотеза о переменном коэффициенте диффузии D дает лучшее согласование результатов расчета с экспериментом, при этом D относительно быстро убывает с течением времени. Выяснилось также, что применение граничных условий первого рода предпочтительнее, так как сумма квадратов отклонений расчетных данных от опытных в этом случае меньше.

Результаты вычислений в размерных переменных были проверены в пакете ANSYS.

Дальнейшее улучшение результатов работы метода возможно путем выдвижения более сложных гипотез о характере зависимости коэффициента диффузии от времени.

Список литературы

1. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности сорбции паров воды хитозановыми лекарственными пленками”, *Журнал прикладной химии*, **86**:10 (2013), 1583–1590.

2. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности транспортных свойств лекарственных хитозановых пленок”, *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, **56**:3 (2014), 282–288.

3. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Транспортные свойства пленок хитозан – амикацин”, *Химическая физика*, **33**:8 (2014), 76–84.

4. Владимиров В. С., Жаринов В. В., *Уравнения математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004, 400 с.

5. Дьяконов В. П., *Mathematica 5/6/7. Полное руководство*, ДМК Пресс, М., 2010, 624 с.

6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2008, 640 с.

7. Карамутдинова Г. Р., Губайдуллин И. М., Коледина К. Ф., Кулиш Е. И., Ильчибаева А. К., “Математическое описание процесса диффузии в пленке хитозана”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:4 (2015), 87–95.

8. *ANSYS Customer Portal*, https://support.ansys.com/AnsysCustomerPortal/en_us.

Дата поступления 01.05.2016

Solution for inverse problem of medicine's one-dimensional diffusion out of chitosan film

© **A. O. Syromyasov** [2]

Abstract. The paper deals with one-dimensional model of medicine's diffusion out from the chitosan film (plaster) in surrounding water. The film's diffusion characteristics are determined using the set of measured average medicine concentrations in the film. The method is based on using of analytical solution of direct diffusion problem. Medicine's behaviour on the boundary of film and water may be described by the conditions of the first or of the third kind. The cases of constant and time-dependent (tending to zero as time increases) diffusion coefficient are discussed. The paper shows that using first-kind boundary conditions with the hypothesis about time-dependent diffusion coefficient leads to the best matching with experimental data.

Key Words: diffusion, chitosan film, one-dimensional problem, inverse problem, analytical solution, experimental data

[2] Associate professor, Department of Applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk, syal1@yandex.ru

Математическое моделирование и информатика

УДК 517.9

Нелокальная разрешимость лиминального уравнения плотности переползающих дислокаций и топологический инвариант линейного термодеформирования оболочки

© С. Н. Алексеенко[1], С. Н. Нагорных[2], Д. В. Хитева[3]

Аннотация. При описании деформирования оболочки, которому посвящена данная работа, введен коэффициент, связывающий градиент изгиба в двух направлениях, что значительно упростило задачу. Напряжение оболочки положено пропорциональным деформации и квадрату градиента изгиба. Соответствующее уравнение для скалярной плотности дислокаций названо лиминальным. Дислокационная структура рассматриваемой задачи характеризуется своеобразным топологическим инвариантом для краевых дислокаций. Значение одного из коэффициентов лиминального уравнения тесно связано с характеристиками этого топологического инварианта. Выбранные в этой работе характеристики позволили доказать существование нелокального решения, описывающего процесс, при котором плотность дислокаций стремится к нулю. Но так как из физический соображений и математических особенностей лиминального уравнения плотность дислокаций не может равняться нулю, то время существования решения определено из условия, что плотность дислокаций уменьшается до некоторой величины, характеризуемой малым безразмерным коэффициентом δ. При таком предположении получены новые глобальные оценки, на основе которых локальное решение, существование которого было доказано в предыдущих работах, продлено за конечное число шагов на весь интервал, на котором плотность дислокаций не меньше определенной величины, характеризуемой коэффициентом δ. Для оценки длины интервала существования решения в рамках сделанных предположений и условий получена явная формула. Математическая часть исследования рассматриваемой проблемы выполнена на основе метода дополнительного аргумента.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента, лиминальность, глобальные оценки, топологический инвариант

При описании деформирования оболочки [1] был введен коэффициент β, связывающий градиент изгиба ζ в двух направлениях y, x, что упростило задачу до задачи изгиба оболочки. Напряжение оболочки было положено пропорциональным деформации и квадрату градиента изгиба ζ [2]. Соответствующее уравнение для скалярной плотности дислокаций ν названо лиминальным потоконелинейного типа. Для плотностей вида [3] и [4]

$$\nu = \frac{1}{2d\zeta}, \qquad \nu = \frac{1-\cos(\alpha/2)}{b\zeta\cos\chi} \tag{1.1}$$

оно имеет вид

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Магистрант кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \left(g - \frac{\gamma}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^3}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^3 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.2}$$

где b - модуль вектора Бюргерса, χ - угол между плоскостью скольжения и поверхностью оболочки, α - угол изгиба оболочки, γ, g, B - положительные коэффициенты.

Известно, что при изгибе пластины возникают пары краевых дислокаций противоположного знака, параллельных оси изгиба [4]. Под действием напряжения дислокации одного знака выталкиваются из пластины, а другого знака движутся вглубь с меньшим напряжением. Взаимное отталкивание и температура приводят к возникновению дислокационных стенок перепендикулярно линиям скольжения.

Коэффициент A в (1.2) имеет вид:

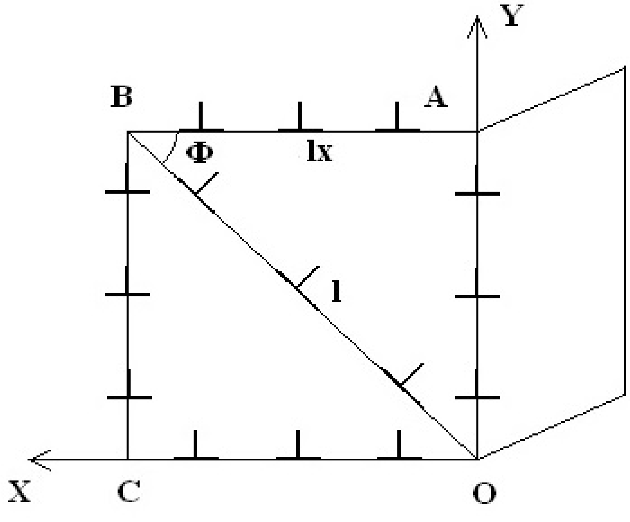
$$A = \frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{Db^3}{KT} \cdot \frac{\beta l}{2l_x d^2} \cdot \frac{P_{xx}}{P_{xy}}, \tag{1.3}$$

где первый множитель характеризует упругие свойства, второй - диффузию дислокаций и точечных дефектов, третий - траектории движения скалярной плотности дислокаций, четвертый - силовую нагрузку оболочки.

Из третьего множителя A получим

$$\frac{\beta l}{2l_x d^2} = \frac{\beta}{2d^2\cos(\Phi)},$$

где $\cos(\Phi) = l_x/l$, l_x - участок размножения краевых дислокаций, l - участок скольжения.



Топологический инвариант

Обозначим

$$\aleph = \frac{1}{cos(\Phi)}, \tag{1.4}$$

и назовем $\aleph$ топологическим инвариантом типа точки разбиения.

Из (1.4) следует, что траектория переползания OA, зарождения AB, скольжения OB заменяется через участок скольжения OB в сторону OABO и в противоположную сторону OCBO. Эта коллективная структура есть аналог пары дислокаций противоположного знака. При $\cos(\Phi) = 0, \pm 1$ данная структура разрушается. При $l_x = l$ исчезает отрезок разбиения OB и траектория переползания OA замыкается с соседней BC при движении в одну сторону OABCO. Участок зарождения AB экранируется участком скольжения OB. При $l_x = 0$ коэффициент (1.3) не имеет смысла, что соответствует точечному источнику Франка-Рида. Термодеформированием оболочки назовем такое деформирование, в котором присутствует третий множитель (1.3). Дислокационная структура характеризуется топологическим инвариантом $\aleph$ на примере краевых дислокаций.

Из (1.3) - (1.4) вытекает, что при

$$\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \pi \tag{1.5}$$

выполняется неравенство

$$A \leq 0. \tag{1.6}$$

Как будет показано в дальнейшем, это условие приводит к тому, что плотность дисолокаций стремится к нулю.

Начальное условие для уравнения (1.2) зададим в виде:

$$\nu(0,x) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.7}$$

Таким образом, задача (1.2), (1.7) определена в области

$$\Omega_T = \{(t,x) : 0 \leq t \leq T_s, -\infty < x < \infty\}.$$

Для исследования разрешимости задачи (1.2), (1.7) применяется метод дополнительного аргумента. В соответствии с данным методом задача (1.2), (1.7) сводится к расширенной характеристической системе:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1(s,t,x), \tag{1.8}$$

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{1.9}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)} w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.10}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.11}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1^2(s,t,x), \tag{1.12}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.13}$$

В результате мы приходим к системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} w_1 = 3g\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4} ds - 4\gamma \int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5} ds - 2B\int_0^s w_0 w_1 ds + A\int_0^s w_1 ds + \\ +\varphi'\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4} ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3} ds\right), \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$w_0 = g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int\limits_0^s w_0^2 ds + A\int\limits_0^s w_0 ds +$$
$$+\varphi\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.15}$$

Решение этой системы при $s = t$ дает решение исходной задачи. Подробный вывод системы (1.8) - (1.13) представлен в работе [1].

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14) - (1.15). Соответствующая теорема приведена в работе [1].

Также, применяя метод дополнительного аргумента [5], мы получили дополнительные уравнения

$$\frac{dw_2}{ds} = -2\frac{gw_0-\gamma}{w_0^4}w_2^2 + \left[5\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 + A - 2Bw_0\right]w_2 + 4\frac{5\gamma-3gw_0}{w_0^6}w_1^4 - 2Bw_1^2, \tag{1.16}$$

$$w_2(0,t,x) = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right), \tag{1.17}$$

$$w_2 = 6g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - 8\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}ds + 20\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^6}ds - 12g\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^5}ds - 2B\int\limits_0^s w_1^2 ds +$$
$$+9g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}w_2 ds - 12\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}w_2 ds - 2g\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^3}ds + \gamma\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^4}ds - 2B\int\limits_0^s w_2 w_0 ds +$$
$$+A\int\limits_0^s w_2 ds + \varphi''\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.18}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование трижды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14), (1.15), (1.18). Соответствующая теорема приведена в работе [5].

Определим условия, при выполнении которых задача (1.2), (1.7) будет иметь решение на всем промежутке $[0, T_s]$.

Для этого нам нужно получить глобальные оценки для функций w_1, w_0, w_2.

Из (1.10) с учетом (1.6) получим

$$\frac{dw_1}{ds} = \left(\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 - 2Bw_0 + A\right)w_1,$$

$$Q = \frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 - 2Bw_0 + A < 0,$$

$$w_1 = \varphi' exp\left(-\int\limits_0^s Q d\nu\right) > 0. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует первая глобальная оценка

$$|w_1| \leq N_\varphi, \tag{1.20}$$

$$N_\varphi = max|sup|\varphi(x)|, sup|\varphi'(x)|, sup|\varphi''(x)||.$$

Приступим к выводу оценок для функции w_0.

Из уравнения (1.12) получим, что:

$$w_0 = \varphi_0 exp\left[\int\limits_0^s (A - Bw_0)d\nu - \int\limits_0^s \left(\frac{\gamma - gw_0}{w_0^5} w_1^2\right) d\nu\right]. \tag{1.21}$$

В силу того, что все подынтегральные выражения отрицательны, функция w_0 будет стремиться к нулю. Т.е. значение выражения (1.21) станет убывать относительно своего начального значения. Тогда получим оценку для w_0:

$$|w_0| \leq \varphi. \tag{1.22}$$

Но по смыслу рассматриваемой задачи плотность дислокаций не может быть равной нулю. Чтобы решать физическую задачу при ненулевой плотности дислокаций, введем условие

$$|w_0| \geq \delta C_\varphi^*, \tag{1.23}$$

где δ - малый безразмерный коэффициент.

Из (1.12) получим неравенство

$$\frac{dw_0}{ds} \geq Aw_0 - Bw_0^2 - \frac{\gamma w_1^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}. \tag{1.24}$$

Правая часть в (1.24) представляет собой квадратный трехчлен относительно w_0. Найдем его корни:

$$w_{01} = -\frac{1}{2B}\left[-A + \sqrt{A^2 - \frac{4B\gamma w_1^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}\right], \qquad w_{02} = -\frac{1}{2B}\left[-A - \sqrt{A^2 - \frac{4B\gamma w_1^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}\right]$$

В качестве условия глобальной разрешимости примем, что

$$A^2 - \frac{4B\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4} \geq 0 \tag{1.25}$$

при выполнении (1.20).

Из (1.25) получаем

$$\delta C_\varphi^* \geq \sqrt{-\frac{2N_\varphi}{A}\sqrt{B\gamma}}. \tag{1.26}$$

Исходя из (1.23), найдем время существования физической модели. Примем, что

$$C_\varphi^* \leq \varphi \leq C_\varphi. \tag{1.27}$$

Из (1.23) и (1.24) с учетом (1.27) получим

$$s \leq \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}.$$

Обозначим

$$T_s = \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}}. \tag{1.28}$$

Неравенство (1.28) определяет время существования физической модели.

Теперь получим глобальную оценку для w_2. В работе [6] для уравнения, подобному (1.16), были получены глобальные оценки. Аналогично Лемме «Max2» из [6] сформулируем следующую лемму.

Л е м м а 1.1. *Если*

$$\varphi'' > max[K_2], \tag{1.29}$$

то на всем интервале существования решения задачи (1.8) - (1.13), (1.16), (1.17) *справедлива оценка*

$$|w_2| < K, \tag{1.30}$$

где K *является решением следующего уравнения*

$$\frac{dK}{ds} = C(K - K_1)(K - K_2),$$

в котором K_1, K_2 *- корни правой части уравнения* (1.16)*:*

$$K_1 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4CZ}}{2C},$$

$$K_2 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4CZ}}{2C},$$

$$D = 5\frac{3g\varphi - 4\gamma}{(\delta C_\varphi^*)^5}(N_\varphi)^2 + A - 2B\varphi,$$

$$C = -2\frac{g\varphi - \gamma}{(\delta C_\varphi^*)^4},$$

$$Z = 4\frac{5\gamma - 3g\varphi}{(\delta C_\varphi^*)^6}(N_\varphi)^4 - 2B(N_\varphi)^2.$$

В работах [1], [5] было доказано, что $w_1(s,t,x)$ является первой производной для функции $\nu(t,x)$, а $w_2(s,t,x)$ является второй производной для функции $\nu(t,x)$ при $s = t$. Соответственно, оценки (1.20), (1.22), (1.23), (1.30) примут вид

$$|\nu(t,x)| \leq \varphi, \qquad |\nu(t,x)| \geq \delta C_\varphi^*, \qquad |\partial_x \nu(t,x)| \leq N_\varphi, \qquad |\partial_{xx}\nu(t,x)| < K. \tag{1.31}$$

Полученные оценки (1.31) дают возможность продлить решение на весь интервал $[0, T_s]$.

Беря в качестве начального значения $\nu(T_s^0, x)$, продлим решение на некоторый интервал $[T_s^0, T_s^1]$, а затем беря в качестве начального значения $\nu(T_s^1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_s^1, T_s^2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется глобальными оценками (1.31), справедливыми на любом промежутке разрешимости.

В частности, начальные значения

$$\nu(T_s^k, x) \in \bar{C}^2(R^1), \qquad |\nu(T_s^k, x)| \le \varphi, \qquad |\nu(T_s^k, x)| \ge \delta C_\varphi^*,$$

$$|\partial_x \nu(T_s^k, x)| \le N_\varphi, \qquad |\partial_{xx} \nu(T_s^k, x)| < K$$

для всех $k = 1, 2, ..., n$, $x \in R^1$.

В результате решение за конечное число шагов может быть продлено на весь заданный промежуток $[0, T_s]$.

Общий итог исследования представим в виде теоремы.

В ее формулировке воспользуемся обозначением множества
$\Delta_T = \{(s,t) : 0 \le s \le t \le T_s\}$.

Теорема 1.1. *Пусть $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$ и выполнены условия*

$$A \le 0,$$

$$A^2 - \frac{4B\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4} \ge 0.$$

Тогда задача Коши (1.2), (1.4) *на всем промежутке* $[0, T_s]$, *где*

$$T_s = \frac{(1-\delta)C_\varphi^*}{BC_\varphi^2 + |A|C_\varphi + \frac{\gamma(N_\varphi)^2}{(\delta C_\varphi^*)^4}} -$$

время существования физической модели, имеет единственное решение $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}$ $([0, T_s] \times R^1)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (1.14) - (1.15) *в виде* $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$. *При этом* $\partial_x \nu(t,x) = w_1(t,t,x)$, *а* $\partial_{xx}\nu(t,x) = w_2(t,t,x)$, *где функция* $w_2(s,t,x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.16) *и начальному условию* (1.17). *Гладкость функций* w_0, w_1, w_2 *определяется соотношениями* $w_0 \in \bar{C}^{1,1,3}(\Delta_T \times R^1)$, $w_1 \in \bar{C}^{1,1,2}(\Delta_T \times R^1)$, $w_2 \in \bar{C}^{1,1,1}(\Delta_T \times R^1)$.

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Хитева Д. В., “Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 24 – 31.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости.*, Наука, М., 1987.

3. Козлов Э. В., Попова Н. А., Конева Н. А., “Скалярная плотность дислокаций во фрагментах с разными типами субструктур”, *Письма о материалах*, **1** (2011), 15 – 18.

4. Фридель Ж., *Дислокации.*, Мир, М, 1967.

5. Алексеенко С. Н., Хитева Д. В., "О дифференцируемости решений лиминального диссипативного уравнения", *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:3 (2015), 7 – 11.

6. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., "Применение метода допоплнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнений первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени", *Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева*, **2**:27 (2011), 320 – 329.

Дата поступления 29.04.2016

Nonlocal solvability of the liminal equation of the creeping dislocations density and the topological invariant of the linear thermal deformation of the shell

© S. N. Alekseenko[4], S. N. Nagornykh[5], D. V. Khiteva[6]

Abstract. In the description of a deformation of a shell a coefficient introduced that links the gradient of bending in two directions. That greatly simplified the task. The stress in the shell is proportional to the expected shell deformation and to the square of the gradient of the curvature. The corresponding equation for the scalar density of dislocations is referred to as liminal. A dislocation structure of the considered problem is characterized by a kind of topological invariant for edge dislocations. The value of one of coefficients in liminal equation is closely related to the characteristics of this topological invariant. Characteristics selected in this work allowed us to prove the existence of nonlocal solutions describing the process by which the dislocation density tends to zero. But because of physical grounds and mathematical features of the liminal equations the dislocation density cannot be zero, and then the time of existence of the solution is determined from the condition that the dislocation density decreases to a certain value, characterized by a small dimensionless coefficient δ. Under this assumption, the new global estimates are obtained, based on which the local solution, the existence of which was proved in previous works, extended over a finite number of steps for the whole interval in which the dislocation density is not less than a certain value, characterized by the coefficient δ. An explicit formula to estimate the length of the existence interval of the solution under the made assumptions and conditions is obtained. The mathematical part of the study of the considered problem is made on the basis of the method of an additional argument.

Key Words: dislocations density, nonlinear first-order partial differential equation, liminality, method of an additional argument, global estimates, topological invariant

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The undergraduate of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru

УДК 51.7:532.546

Моделирование ансамбля нестационарных траекторий с помощью уравнения Фоккера-Планка

© Л. В. Клочкова[1], Ю. Н. Орлов[2], С. А. Федоров[3]

Аннотация. Рассматривается кинетическое уравнение Фоккера-Планка для выборочной плотности функции распределения случайных величин, наблюдаемых на практике в виде временных рядов. Вместо изучения одной из возможных реализаций временного ряда предлагается рассмотреть ансамбль случайных траекторий, порождаемых эмпирической функцией распределения. Предлагается модель для описания изменения во времени функционалов, заданных на случайных траекториях и имеющих практическое значение. Это, например, индикатор уровня загрязнения мегаполиса в виде средней концентрации вредных веществ за определенный период времени, индикатор изменения эпидемиологической обстановки в регионе, функционал эффективности управления загрязнением в виде снижения уровня загрязнения в результате определенных действий и т.п. Формулируется метод тестирования управляющего функционала на нестационарном ансамбле траекторий.
Ключевые слова: выборочная функция распределения, уравнение Фоккера-Планка, ансамбль нестационарных траекторий, тестирование управляющего функционала.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования по моделированию и прогнозированию временных рядов с помощью кинетических уравнений типа Лиувилля и Фоккера-Планка, примененных к выборочным функциям распределения [1, 2]. В указанных работах был построен метод прогнозирования функции распределения случайной величины с нестационарным поведением на заданный горизонт вперед. Естественным развитием кинетического подхода применительно к временному ряду является генерация ансамбля возможных траекторий, которые отвечают выявленным тенденциям в изменении выборочных функций распределения в силу того или иного кинетического уравнения.

В работах [3, 4] была построена методика построения кинетических уравнений применительно к практической задаче прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, а также распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. В них были построены статистики, которые требуется вычислить по данным временного ряда, чтобы определить параметры кинетического уравнения для выборочной функции распределения этого ряда. Здесь мы описываем, как можно было бы не только прогнозировать коридор возможного изменения случайной величины, но и тестировать эффективность того или иного управляющего воздействия, заданного в виде функционала на фрагменте случайной траектории. В результате модели для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, приобретают дополнительную актуальность.

Практическая трудность использования детерминистических, а не стохастических уравнений для моделирования концентрации загрязнения мегаполисов в зависимости от

[1] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[2] Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

[3] Аспирант Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

случайных условий водно-воздушной среды состоит в том, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и притом нестационарным. В результате, кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за неопределенности функции источника. Возможность описать эту неопределенность кинетическим уравнением того же типа, что и среду, в которой осуществляется перенос изучаемого фактора, позволяет построить унифицированную кинетическую модель процесса в целом. Построенное численное решение относительно прогнозной функции распределения можно использовать для создания алгоритма генерации пучка нестационарных траекторий.

Необходимость тестирования функционала управления, заданного на траектории нестационарного случайного процесса, часто возникает при построении алгоритма распознавания, к которой сводятся многие задачи прикладного статистического анализа [5]. Часто оказывается, что когда изучаемая система, представляемая в виде временного ряда, находится в том или ином состоянии, измеряемые значения случайной величины, через которые и проявляется это состояние, имеют характерные именно для этого состояния функции распределения. Тогда идентификация состояния формулируется как задача распознавания выборочной функции распределения. Задача распознавания выборки как принадлежащей определенной генеральной совокупности решается в статистике либо путем оценивания значений параметров распределения известного функционального вида, либо в рамках непараметрического подхода, когда используется критерий Колмогорова-Смирнова. Однако применение классических критериев корректно только в стационарном случае, когда есть оценки скорости сходимости выборочных распределений к генеральной совокупности. Если функция распределения нестационарна, то обучение алгоритма распознавания на данных за прошлый период часто оказывается несостоятельным. В таком случае для более надежного распознавания надо тестировать решающую функцию на нестационарных временных рядах. Но фактически для тестирования существует только одна траектория, которая в силу нестационарности не позволяет использовать достаточно большой объем выборки. В результате возникает необходимость тестирования тех или иных индикаторов локального поведения временного ряда с целью оценки вероятности их правильного срабатывания.

Индикаторы представляют собой определенные функционалы, заданные на фрагментах траектории случайного процесса. Чтобы оценить эмпирическую условную вероятность того, что определенный интервал значений индикатора отвечает ожидаемому поведению ряда в настоящем или будущем, нужно иметь много реализаций изучаемого процесса. Для этого требуется сгенерировать пучок возможных траекторий временного ряда, выборочная функция распределения которого эволюционирует определенным образом, и проверить на нем устойчивость срабатывания индикатора.

В настоящей работе в качестве модельного уравнения для описания эволюции нестационарных распределений используется уравнение Фоккера-Планка относительно выборочной плотности функции распределения (далее ВПФР) временного ряда. Подход к моделированию нестационарных траекторий на основе решения кинетического уравнения относительно ВПФР был предложен в [6], где в качестве такого уравнения использовалось уравнение Лиувилля. В работе [7] было обосновано уравнение Фоккера-Планка для ВПФР нестационарного временного ряда. Тем самым стало возможным корректное моделирование ансамбля траекторий временного ряда с помощью уравнения типа диффузии со сносом.

2. Метод генерации нестационарных траекторий

Будем для удобства нормировки считать, что изучаемая случайная величина равномерно ограничена по времени, так что все ее значения принадлежат отрезку $[0;1]$.

Пусть $x(t)$ есть значение случайной величины в дискретный момент времени t, где шаг по времени считается единичным, а $f_T(x,t)$ есть ВПФР выборки длины T с окончанием в момент времени t, т.е. выборки фрагмента ряда $\{x(t-T+1),\ldots,x(t)\}$. Выборочная плотность строится по равномерному разбиению гистограммы в соответствии с методикой, описанной в [8], при котором статистическая неопределенность в частотах равна точности, с которой значения ряда различаются одно от другого, т.е. $1/n$, где есть число классовых интервалов.

Число классовых интервалов n в зависимости от длины выборки T и конкретной получающейся формы распределения определяется численно как решение уравнения

$$\frac{\sqrt{T}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{f_T(i)(1-f_T(i))}} = nt_{1-1/(2n)}, \tag{2.1}$$

где $t_{1-1/(2n)}$ есть квантиль распределения Стьюдента порядка $1-1/(2n)$ с $T-1$ степенью свободы. По кусочно-непрерывной гистограмме ВПФР $f_T(x,t)$ можно построить непрерывную функцию распределения $F_T(x,t)$:

$$F_T(x,t) = \int\limits_0^1 f_T(y,t)dy.$$

Поскольку гистограмма ВПФР имеет вид

$$f(x) = f_j, \quad x\in[(j-1)/n; j/n], \quad j = 1\div n, \tag{2.2}$$

то соответствующая ВФР определяется формулой

$$F(x) = (nx-j)\cdot f_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} f(k), \quad x\in[(j-1)/n; j/n], \quad j = 1\div n. \tag{2.3}$$

Чтобы имитировать процесс, близкий к реальным наблюдениям, предлагается следующая схема действий. На первом этапе по имеющимся историческим данным строятся выборочные распределения значений $x(t)$ изучаемого случайного параметра за тот промежуток времени T, который представляет интерес. Таким образом, в каждый момент времени t определена ВПФР $f_T(x,t)$ (2.2) и соответствующая ей $F_T(x,t)$ согласно (2.3). Затем генерируется стационарный равномерно распределенный на $[0;1]$ ряд чисел $\{y_k\}$ длиной T. Пусть t_0 есть начальный момент времени, в который ВПФР $f_T(x,t_0)$ известна. Тогда в последующие моменты времени одна из возможных траекторий случайного процесса, для которого ВПФР меняется от $f_T(x,t_0)$ до $f_T(x,t_0+T)$, строится по формуле обращения, соответствующей локальной по времени функции распределения, движущейся в скользящем окне длины T:

$$y_k = F_T(x_k, t_0+k). \tag{2.4}$$

Подчеркнем, что, согласно (2.4), в каждый момент времени t из распределения $F_T(x,t)$ генерируется только одно значение ряда. Сама же $F_T(x,t)$ выступает в этот момент времени как генеральная совокупность. Тем самым имитируется процесс наблюдения за динамикой нестационарного временного ряда.

Задавая различные равномерно распределенные ряды $\{y_k\}_j, j = 1, \cdot, N$, можно получить пучок из N траекторий, ассоциированных с двумя ВПФР: $f_T(x,t)$ и $f_T(x,t+T)$, согласно наблюдаемой эволюции этих распределений. Каждая j-ая траектория из набора траекторий построенного пучка порождает на отрезке $[t_0+1; t_0+T]$ ВПФР $\tilde{f}_T(y_j; x, t_0+T)$, отличную от наблюдаемой $f_T(x, t_0+T)$. Однако по построению все эти выборочные траектории являются реализациями одного и того же нестационарного распределения вероятностей.

По совокупности сгенерированных траекторий можно оценить, насколько значимы отклонения модельного и фактического распределений. Используем для этого расстояние между функциями распределения в норме C

$$\rho = \|\tilde{F}_T(\{y\}; x, t_0+T) - F_T(x, t_0+T)\|. \tag{2.5}$$

Рассмотрим также все попарные расстояния между ВПФР для сгенерированных траекторий

$$\rho = \|\tilde{F}_T(\{y\}; x, t_0+T) - \tilde{F}_T(\{y'\}; x, t_0+T)\|. \tag{2.6}$$

Если бы распределения $F_T(x,t)$ были стационарны, то расстояния (2.6) подчинялись бы статистике Колмогорова–Смирнова: $P\{\rho\sqrt{T/2} < z\} \to K(z), T \to \infty$, где $K(z)$ — функция Колмогорова. В нашем случае этот критерий неприменим из-за нестационарности процесса, и для оценки близости между распределениями предлагается ввести специальный индикатор, называемый согласованным уровнем стационарности. Для его построения проанализируем статистику расстояний между так называемыми встык-выборками, т.е. между ВФР $F_T(x,t)$ и $F_T(x,t+T)$, сдвинутыми одна относительно другой на величину окна выборки:

$$\rho(T;t) = \|F_T(x,t) - F_T(x,t+T)\|. \tag{2.7}$$

По имеющимся историческим данным построим функцию распределения $G(\rho;T)$ расстояний (2.7), которая представляет эмпирическую вероятность того, что расстояние между распределениями не больше ρ. Определим далее согласованный уровень стационарности (СУС) $\rho^*(T)$ так, что соответствующее расстояние равно значимости критерия, т.е. является решением уравнения

$$G(\rho;T) = 1 - \rho. \tag{2.8}$$

В стационарном случае уравнение (2.8) переходит в уравнение

$$K\left(\varepsilon\sqrt{T/2}\right) = 1 - \varepsilon, \tag{2.9}$$

которое определяет функцию $\varepsilon(T)$, обладающую тем свойством, что при проведении бесконечно большого числа экспериментов по вычислению расстояний между двумя выборочными распределениями длины T в доле случаев ε будет наблюдаться превышение расстояния, равного ε. Если оказалось, что для некоторой длины выборки T отношение ρ^*/ε больше единицы, то ряд нестационарный. Величина

$$J(T) = \frac{\rho^*(T)}{\varepsilon(T)} \tag{2.10}$$

называется индексом нестационарности ряда [9]. Если же на некоторых длинах выборки величина $J(T) \leq 1$, то ряд стационарный, и тогда можно считать, что его выборочные распределения не эволюционируют. Для реального применения кинетического уравнения к описанию эволюции ВПФР следует определить такие длины, на которых $J(T) > 1$.

В результате моделирования по формуле (2.4) получается ансамбль траекторий временного ряда, который обладает следующими свойствами. Во-первых, СУС расстояний (2.5) приближенно равен СУС расстояний (2.6), т.е. характерное расстояние между виртуальными выборками равно характерному расстоянию между виртуальной и фактической траекториями. Во-вторых, если сравнить сгенерированные выборки в окне $[t_0+1; t_0+T]$ с исходной ВФР $F_T(x,t_0)$, то соответствующий СУС будет приблизительно равным $\rho^*(T)$ в соответствии с (2.8).

Описанный подход позволяет построить численный алгоритм моделирования нестационарного временного ряда с определенными непараметрическими свойствами его ВПФР, эволюционирующей в соответствии с уравнением Фоккера-Планка (или иным модельным уравнением, которое описывает эволюцию ВПФР рассматриваемого ряда).

3. Модель эволюции выборочной плотности функции распределения

Считаем, что анализ индекса нестационарности позволил определить длину T выборки, по которой строится ВПФР $f_T(x,t)$, так что далее эта длина фиксирована. Далее для краткости соответствующий индекс функций распределения опускаем. В том же окне длины T строим совместную плотность распределений $\Phi(x,v,t)$ значений временного ряда $x(t)$ и его приращений $v(t)=x(t+1)-x(t)$. При этом справедлива формула

$$f(x,t)=\int_{-1}^{1}\Phi(x,v,t)dv, \tag{3.1}$$

где в пределах интегрирования учтено, что $x\in[0;1]$, так что $v\in[-1;1]$. В качестве модельного уравнения эволюции используем уравнение Фоккера-Планка относительно ВПФР $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uf)-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \tag{3.2}$$

где параметры сноса (средняя скорость $u(x,t)$) и диффузии $\lambda(t)$ в соответствии с [7] определяются формулами:

$$\begin{aligned} &u(x,t)f(x,t)=\int v\Phi(x,v,t)dv;\\ &\lambda(t)=\frac{d\sigma^2}{dt}-2\mathrm{cov}_{x,u}(t),\quad \sigma^2(t)=\int_0^1(x-\bar{x})^2 f(x,t)dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В [7] доказано утверждение о том, что оценка величины λ по выборке длины T в соответствии с дискретными аналогами дисперсии и ковариации имеет вид

$$\lambda(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=t-T+1}^{t}(x(k)-x(k+1))^2-\frac{1}{T^2}(x(t+1)-x(t-T+1))^2 \tag{3.4}$$

и при $T>1$ строго положительна. Параметр сноса $u(x,t)$ определяется согласно (3.3). В численной схеме указанные параметры берутся с предыдущего шага по времени. Тогда дискретная форма записи уравнения Фоккера-Планка (3.2) с явной разностной схемой для эволюции по времени с единичным шагом и шаблоном левой разностной производной по пространству с шагом $h = 1/(100n)$, где n определяется в (2.1), имеет вид

$$f_T(x,t+1) = f_T(x,t) + \frac{f_T(x,t)u(x,t-1) - f_T(x+1,t)u(x+1,t-1)}{h} + \\ + \frac{\lambda(t-1)}{2h^2}\left(f_T(x+2,t) - 2f_T(x+1,t) + f_T(x,t)\right). \tag{3.5}$$

Здесь, однако, следует учесть, что явные схемы при решении уравнений диффузионного типа неустойчивы, в связи с чем они имеют сравнительно малый горизонт прогнозирования. Для повышения устойчивости далее мы использовали схему, в которой, во-первых, каждый классовый интервал разбит еще на 100 ячеек (с учетом равномерности в них, по построению, выборочной плотности), и, во-вторых, аппроксимация второй производной делается в лево-разностном шаблоне, в котором значение функции в ячейке x берется со следующего шага по времени. Описанная процедура приводит к разностному уравнению (для краткости нижний индекс T опущен):

$$f_T(x,t+1) = f_T(x,t) + \frac{f_T(x,t-1)u(x,t-1) - f_T(x+1,t)u(x+1,t-1)}{h} + \\ + \frac{\lambda(t-1)}{2h^2}\left(2f(x-1,t) - f(x,t+1) - f(x-2,t)\right).$$

Разрешая его относительно $f(x,t+1)$, получаем схему расчета:

$$f(x,t+1) = f_T(x,t)\frac{f_T(x,t)}{1+\lambda(t-1)/2h^2} + \\ + \frac{f_T(x,t)u(x,t-1) - f_T(x+1,t)u(x+1,t-1)}{h+\lambda(t-1)/2h} + \\ + \frac{\lambda(t-1)}{\lambda(t-1)+2h^2}\left(2f(x-1,t) - f(x,t+1) - f(x-2,t)\right). \tag{3.6}$$

Одновременно с пошаговым решением уравнения (3.2) по схеме (3.6), когда величины λ и $u(x,t)$ пересчитываются на каждом шаге по времени по формулам (3.3), строится и ансамбль соответствующих траекторий согласно методике п. 2.

4. Тестирование управляющего функционала

Рассмотрим некоторый функционал, заданный на случайной траектории. Его статистические свойства такие, как среднее, дисперсия, чувствительность по отношению к тем или иным параметрам, на практике могут быть изучены всего лишь по единственной реализации в виде конкретного временного ряда. С учетом нестационарности поведения ряда этого явно недостаточно, поскольку использование выборок большой длины может привести к ошибочным выводам, ибо анализ будет проводиться по не актуальным данным. Альтернативой является генерация набора траекторий, отвечающих текущим тенденциям анализируемой случайной величины. Статистический анализ управляющего функционала на таком ансамбле состоит в следующем [10].

Пусть на выборке длины T задан некоторый функционал $\psi\{x(t-T+1),\ldots,x(t)\}$. Это может быть, например, статистика в виде скользящей средней, а может быть и некоторая сложная конструкция в виде управления другой случайной траекторией. Последняя задача может быть востребована при анализе эффективности проведения мероприятий по улучшению экологической или эпидемиологической обстановки в регионе.

При тестировании функционала ψ требуется определить, во-первых, его статистические свойства на выборках, отвечающих данной модели эволюции ВПФР, и, во-вторых, изучить устойчивость функционала при изменении параметров уравнения эволюции.

Первая задача решается следующим образом. Пусть выбран интересующий нас фрагмент временного ряда и на нем построен пучок виртуальных траекторий числом N. Обозначим ψ_j значение функционала на j-ой траектории. Его статистические свойства полностью определяются выборочным распределением, которое строится по имеющимся N значениям на траекториях. В частности, можно определить среднее, дисперсию и относительное отклонение:

$$\bar{\psi}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\psi_j,\quad \sigma_\psi^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\psi_j-\bar{\psi}\right)^2,\quad S_\psi=\frac{\bar{\psi}}{\sigma_\psi}. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) дает корректный ответ на вопрос, какова, например, средняя скорость восстановления нормальных экологических параметров системы на определенном промежутке времени.

Вторая задача решается посредством вариации параметров уравнения Фоккера-Планка, в результате которой тренд $u(x,t)$ и диффузия $\lambda(t)$ меняются определенным образом. Вычисляя статистику (4.1) функционала управления на новых траекториях, полученных в результате модификации указанных параметров, можно определить допустимые пределы, внутри которых управление устойчиво. Чувствительность функционала определяется как его логарифмическая производная по параметру, например:

$$\Lambda_\psi=\frac{\partial\ln\bar{\psi}}{\partial\ln\lambda}. \tag{4.2}$$

Задавая допустимые границы вариации (4.2), можно в численном эксперименте получить допустимые границы вариации параметров уравнения Фоккера-Планка, т.е. выяснить, предположим, при каком предельном коэффициенте диффузии эффективность управления (4.1) имеет положительное математическое ожидание.

Описанный метод позволяет тестировать индикаторы-предикторы изменения какого-либо свойства временного ряда и функционалы распознавания состояний ряда в широком диапазоне изменения его выборочных статистик. К его достоинствам следует отнести то, что он позволяет провести стресс-тест на работоспособность индикатора в пределах, контролируемых исследователем. Исторический же ряд данных не предоставляет таких возможностей. Кроме того, для квалифицированного тестирования ряд данных за прошлый период требует предварительного выявления интересных ситуаций, кластеризации их, определения ошибок при кластеризации, что весьма трудоемко и не дает полного представления об имеющихся локальных паттернах ряда. Таким образом, численный код, генерирующий по фрагменту траектории нестационарного ряда ансамбль его нестационарных же реализаций, представляет практическую важность.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14–01–00145.

Список литературы

1. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, 2008, № 9, 23–33.

2. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, Эдиториал УРСС/Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2011, 384 с.

3. Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н., Тишкин В. Ф., “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **7** (2012), 34–43.

4. Зенюк Д. А.,Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н., “Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:1 (2016).

5. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., *Теория распознавания образов*, Наука, М., 1974, 416 с.

6. Босов А. Д., Кальметьев Р. Ш., Орлов Ю. Н., “Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения”, *Математическое моделирование*, 2014, № 3, 97–107.

7. Босов А. Д., Орлов Ю. Н., *Эмпирическое уравнение Фоккера-Планка для прогнозирования нестационарных временных рядов.*, Препринт № 3 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

8. Орлов Ю. Н., *Оптимальное разбиение гистограммы для оценивания выборочной плотности распределения нестационарного временного ряда.*, Препринт № 14 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

9. Орлов Ю. Н., *Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов*, МФТИ, Москва, 2014, 276 с.

10. Орлов Ю. Н., Федоров С. Л., *Моделирование и статистический анализ функционалов, заданных на выборках из нестационарного временного ряда.*, Препринт № 43 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2014.

Дата поступления 25.04.2016

Modeling of a non-stationary trajectories ensemble using Fokker-Planck equation

© L. V Klochkova[4], J. H. Orlov[5], S. L. Fedorov[6]

Abstract. There is Discusses the kinetic Fokker-Planck equation for sample density distribution functions of random variables seen in practice in the form of the time number. Instead of studying one of the possible realizations of the time series it is proposed to consider an ensemble of random trajectories generated by the empirical distribution function. A model is proposed to describe the time variation functional defined on random trajectories and practical importance. This, for example, the indicator of level of pollution of the metropolis in the form of average pollutant concentration over a certain period of time, a similar indicator of the changing epidemiology in the region, the functional efficiency in the management of pollution in the form of lower pollution levels as a result of certain actions, etc. There is formulated a method of testing the control functions for the non-stationary trajectories ensemble.

Key Words: random distribution function, the Fokker-Planck equation, the ensemble of non-stationary trajectories, the testing control functions

[4] Senior Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

[5] Senior, Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

[6] Aspirant of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — http://www.miktex.org.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

— коды УДК;

— название статьи;

— информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);

— аннотация;

— ключевые слова;

— текст статьи;

— список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам необходимо придерживаться следующей структуры статей:

– введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.

– материалы и методы решения задачи и принятые допущения.

– результаты – основное содержание статьи.

– обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.

– заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex содержатся на сайте журнала по адресу http://journal.svmo.ru/page/rules.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TeX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

\input{voskresensky.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

\sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **R**, **Rn**, **C**, **Z**, **N** и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды **phi**, **epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **textrm**, **textit**. Например, для вставок формул Γ_i, $Д_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

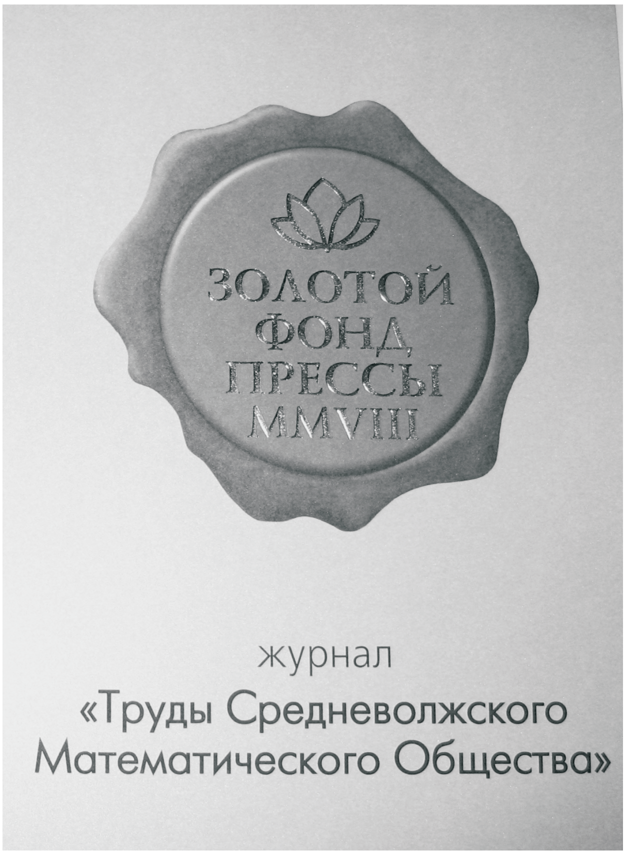
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **cite** или **pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTEX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.