ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 16, № 3

СВМО

2014

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарёва

Журнал Средневолжского математического общества

Том 16, № 3

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Главный редактор
В. Ф. Тишкин
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора
М. Т. Терехин
Рязанский государственный
педагогический институт

Ответственный секретарь
П. А. Шаманаев
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев
Ш. А. Алимов
А. М. Ахтямов
Ш. А. Аюпов
И. В. Бойков
П. А. Вельмисов
В. К. Горбунов
В. З. Гринес
Ю. Н. Дерюгин
А. П. Жабко
В. И. Жегалов
Т. Ш. Кальменов
А. М. Камачкин
Е. Б. Кузнецов
В. Н. Кризский
Н. Д. Кузьмичев
Б. В. Логинов
С. И. Мартынов
П. П. Матус
О. В. Починка
В. П. Радченко
И. П. Рязанцева
С. И. Спивак
I. Anca–Veronica

Редакционный совет

С. М. Вдовин
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Л. А. Сухарев
Средне-Волжское
математическое общество

Н. Г. Ярушкина
Ульяновский государственный
технический университет

Саранск
2014

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 16, № 3

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

© Оформление. Средне-Волжское математическое общество, 2014

Содержание

Краткие сообщения

От редакции

В третьем номере 16-го тома публикуются работы ведущих ученых и молодых исследователей, многие из которых являются постоянными участниками международных научных конференций по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, проводимых Средневолжским математическим обществом и ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва» при поддержке РФФИ.

Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Elibrary.ru. Сам журнал входит в объединенный каталог «Пресса России».

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 512.831

Теорема Гамильтона-Кэли для двух вариантов матричных спектральных задач по Э.Шмидту и развертывание характеристического многочлена.

© **А. Н. Кувшинова**[1], **Б. В. Логинов**[2]

Аннотация. В начале прошлого столетия Э.Шмидт ввел для интегральных операторов систему собственных чисел $\{\lambda_k\}$, засчитываемых с их кратностью, и наборы собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, для которых $A\varphi_k = \lambda_k \psi_k,\ A^*\psi_k = \lambda_k \varphi_k$. В работе рассматриваются обобщенные матричные спектральные задачи, полиномиально зависящие от спектрального параметра Шмидта. И.С.Аржаных в 1951 году доказал обобщенную теорему Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц с единичной матрицей при старшей степени спектрального параметра с целью применения в численных методах линейной алгебры. Ниже дано распространение теоремы Гамильтона-Кэли для матричных спектральных задач по Э.Шмидту, полиномиально зависящих от спектрального параметра с единичной матрицей при старшей степени параметра (п.2), а также единичной (обратимой) матрицей при нулевой степени параметра (п.3). В целях дальнейших исследований на основе предложенного [11-13] И.С. Аржаных приема [6, 7] выполнено развертывание соответствующего (1.1) характеристического многочлена по степеням спектрального параметра Шмидта (п.5).

Ключевые слова: спектр Шмидта, собственные числа Шмидта, полиномиальные матрицы по спектральному параметру Шмидта, теорема Гамильтона-Кэли, развертывание характеристического многочлена

1. Введение

В цикле работ начала двадцатого столетия по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [1] Э. Шмидт ввел системы собственных чисел λ_k, засчитываемых с их кратностями в гильбертовом пространстве H, и собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношениям $B\varphi_k = \lambda_k \psi_k,\ B^*\psi_k = \lambda_k \varphi_k$ и позволивших распространить теорию Гильберта-Шмидта на несамосопряженные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H [2], [3]. Под названием s-чисел эта система нашла многие применения в вычислительной математике, теории некорректно поставленных задач. Поскольку никто из применявших s-числа не дает ссылок на Э.Шмидта, для восстановления справедливости в наших работах мы говорим о спектральных задачах по Э. Шмидту.

В работах И.С.Аржаных [4], [5], совместных его статьях с В.И. Гугниной [6], [7] и диссертации В.И. Гугниной [8] доказаны варианты теоремы Гамильтона-Кэли для матриц полиномиально зависящих от спектрального параметра с единичной матрицей при старшей его степени, с целями приложений к вычислительным методам линейной алгебры (распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева для вычисления собственных значений), а также к теории устойчивости решений ОДУ [9], [10].

В статье [11] доказана обобщенная теорема Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц с единичной матрицей при нулевой степени параметра.

[1] Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; erasya7@rambler.ru.

[2] Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; bvllbv@yandex.ru.

В этой работе дано распространение теоремы Гамильтона-Кэли на матричные обобщенные спектральные задачи по Э.Шмидту вида:

$$(A_s + \lambda A_{s-1} + \lambda^2 A_{s-2} + \ldots + \lambda^{s-1} A_1)\varphi = \lambda^s \psi$$
$$(A_s^* + \lambda A_{s-1}^* + \lambda^2 A_{s-2}^* + \ldots + \lambda^{s-1} A_1^*)\psi = \lambda^s \varphi \tag{1.1}$$

и

$$(\lambda^s A_s^* + \lambda^{s-1} A_{s-1}^* + \ldots + \lambda^2 A_2^* + \lambda A_1^*)\varphi = \psi$$
$$(\lambda^s A_s + \lambda^{s-1} A_{s-1} + \ldots + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1)\psi = \varphi. \tag{1.2}$$

В общих случаях обратимых матриц переход к спектральным задачам вида (1.1) и (1.2) выполняется обращением соответствующих матриц. Далее удобно использовать матричные обозначения, т.е. записать обобщенные задачи на собственные значения по Э.Шмидту в виде уравнений

$$\Phi(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \equiv \left[\lambda^s\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} - \lambda^{s-1}\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_1^*\end{pmatrix} - \ldots - \begin{pmatrix}A_s & 0\\ 0 & A_s^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} =$$
$$= \left[\lambda^s \mathfrak{I} - \sum_{1\le k\le s} \lambda^{s-k}\mathfrak{a}_k\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = 0 \tag{1.3}$$
$$\Phi(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \equiv \left[\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}A_1^* & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix} - \ldots - \lambda^s\begin{pmatrix}A_s^* & 0\\ 0 & A_s\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} =$$
$$= \left[\mathfrak{I} - \sum_{1\le k< s} \lambda^{s-k}\mathfrak{b}_k\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} = \mathfrak{I} \tag{1.4}$$

соответственно с матрицей $\mathfrak{I}$ при старшей и младшей степени λ.

При продолжении наших исследований по многопараметрическим матричным спектральным задачам Э.Шмидта [11-13] возникла необходимость развертывания соответствующего характеристического многочлена по степеням спектрального параметра. В данной статье эта задача решается на основе существенного использования эффективного приема, принадлежащего И.С. Аржаных [6, 7].

В диссертации [14] принята другая матричная запись задачи (1.1):

$$\left[\lambda^s\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & A_s\\ A_s^* & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}0 & A_{s-1}\\ A_{s-1}^* & 0\end{pmatrix} - \ldots - \lambda^{s-1}\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1^* & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

Следует заметить, что система (1.2) при переходе к характеристическим числам (делением на λ^s и заменой φ на ψ, а ψ на φ) сводится к системе (1.1).

2. Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли задачи на собственные значения с матрицей $\mathfrak{I}$ при старшей степени λ

Следуя [6] введем символические степени матричных операторов: $\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} = \mathfrak{I}$,

$$\mathfrak{a}^{\cdot(-k)} = 0,\ \mathfrak{a}^{\cdot t} = \sum_{0<m\le t}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\mathfrak{a}_m\left[\mathfrak{a}^{\cdot t-m}\right] + \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\mathfrak{a}_t\mathfrak{a}^{\cdot 0},\ t>0,\ \mathfrak{a}_r^{\cdot t} = \sum_{r\le m\le s}\mathfrak{a}_m\mathfrak{a}^{\cdot t-(m-r)},$$

$0 < r \leq s, t > 0$. Положим также $\varphi_t(\mathfrak{a}^{\cdot}) = \mathfrak{a}^{\cdot t} + \sum\limits_{0<m\leq t} \alpha_t \mathfrak{a}^{\cdot t-m}$, где α_t - коэффициенты характеристического полинома соответствующего $\Phi(\lambda)$, т.е. $\det \Phi(\lambda) = \lambda^{2ns} + \sum\limits_{0<t\leq 2ns} \alpha_t \lambda^{2ns-t}$.

Т е о р е м а 2.1. *(Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли). Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0 < r \leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{a}_1\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_2\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_3\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+2}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns} = 0,\ \mathbb{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Psi(\lambda)$ - матрица, присоединенная к матрице $\Phi(\lambda)$,

$$\Phi(\lambda) \cdot \Psi(\lambda) = \mathbb{I} det \Phi(\lambda), \tag{2.2}$$

где, очевидно, что $\Psi(\lambda)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \left[\lambda^{(2n-1)s}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \lambda^{(2n-1)s-1}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + ...+\right.$

$$\left. + \lambda \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s)} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к следующим трем группам равенств, начиная со старшей степени параметра λ, и заканчивая первой степенью (при нулевой степени λ имеем $\mathfrak{J}^2 = \mathbb{I}$):

<u>I группа</u>($1 < t \leq s$):

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J} + \alpha_1\mathfrak{J}$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \alpha_2\mathfrak{J}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(k)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(k-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(k-2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k-2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k-2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k-2)} \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \alpha_k\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(k-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(k-2)} + ... + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_{k-1}\mathfrak{B}^1 + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_k\mathfrak{J} + \alpha_k\mathfrak{J}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s-2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s-2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s-2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s-2)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^1 + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{J} + \alpha_s\mathfrak{J}$$

II группа ($s < t \leq (2n-1)s$):

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-1)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1}\mathfrak{J}$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2}\mathfrak{J}$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s-r)} + \alpha_{(2n-1)s-r}\mathfrak{J}$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s}$$

III группа ($(2n-1)s + r < t \leq 2ns,\ 0 < r \leq s$):

$$-\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \ldots - \mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} = \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1}$$

$$-\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \ldots - \mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} = \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}$$

....

$$-\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} = \mathbb{I}\alpha_{2ns-1}$$

$$-\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathbb{I}\alpha_{2ns}$$

Первые две группы равенств определяют матрицы $\mathfrak{B}^{(t)}$, $1 < t \leq (2n-1)s$:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J} + \alpha_1\mathfrak{J} = \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_1(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \alpha_2\mathfrak{J} = \{\mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\}^2\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J}\alpha_1 + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\alpha_2 =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot 2} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_2(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(k-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(k-2)} + \ldots + \alpha_k\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot k} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot k-1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_k\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_k(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{(s-1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-2)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-3)} + \ldots + \alpha_{s-1}\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s-2} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-3} + \ldots + \alpha_{s-2}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-2)} + \ldots + \alpha_s\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-2} + \ldots + \alpha_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_s\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_s(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-1)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1}\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s+1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \ldots + \alpha_s\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+1}\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s+1}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2}\mathfrak{J} =$$

$$= \mathfrak{a}^{\cdot s+2} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot s+1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot s} + ... + \alpha_{s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+2} \mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s+2}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + ... + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{J} =$$

$$= \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

Подстановка $\mathfrak{B}^{(1)} = \varphi_1(\mathfrak{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(2)} = \varphi_2(\mathfrak{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(3)} = \varphi_3(\mathfrak{a}^{\cdot}), ..., \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot})$ в третью группу формул дает равенства (2.1), т.е. обобщенную теорему Гамильтона-Кэли. □

Следствие 2.1. *(Явный вид теоремы Гамильтона-Кэли.) Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0 < r \leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0$$
$$\mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0$$

....

$$\mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{2ns-1} = 0$$
$$\mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{2ns} = 0. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Для $0 < r \leq s$ имеем:

$$0 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{a}_1 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \mathfrak{a}_2 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + ... + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ ... + \mathfrak{a}_s \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s} + ... + \alpha_{(2n-2)s} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right] +$$

$$+ \alpha_1 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s}\right] +$$

$$+ \alpha_2 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s-1}\right] + ... +$$

$$+ \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{J} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right] +$$

$$+ \mathfrak{J}\alpha_1 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s}\right] +$$

$$+ ... + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1}$$

$$0 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} =$$

$$= \mathfrak{a}_2 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \mathfrak{a}_3 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + ... + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ ... + \mathfrak{a}_s \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + ... + \alpha_{(2n-2)s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-2)s+2} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} =$$

$$= \left[\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + ... + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+3} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2}\right] +$$

$$+\alpha_1\left[\mathfrak{a}_2\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+\mathfrak{a}_3\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-2}+...+\mathfrak{a}_{s-1}\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+2}+\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+1}\right]+...+$$
$$+\alpha_{(2n-1)s-1}\left[\mathfrak{a}_2\dot{\mathfrak{a}}^{1}+\mathfrak{a}_3\dot{\mathfrak{a}}^{0}\right]+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=$$
$$=\mathfrak{I}\left[\mathfrak{a}_2\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s}+\mathfrak{a}_3\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+...+\mathfrak{a}_{s-1}\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+3}+\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+2}\right]+$$
$$+\mathfrak{I}\alpha_1\left[\mathfrak{a}_2\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+\mathfrak{a}_3\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-2}+...+\mathfrak{a}_{s-1}\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+2}+\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-2)s+1}\right]+$$
$$+...+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s-1}\left[\mathfrak{a}_2\dot{\mathfrak{a}}^{1}+\mathfrak{a}_3\dot{\mathfrak{a}}^{0}\right]+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=$$
$$=\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_2^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}$$

....

$$0=\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s)}+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\mathfrak{a}_s\left[\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}^{1}+\alpha_{(2n-1)s}\dot{\mathfrak{a}}\right]+$$
$$+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s}+\alpha_1\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{1}+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\mathfrak{I}\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s}+\mathfrak{I}\alpha_1\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{(2n-1)s-1}+...+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_s\dot{\mathfrak{a}}^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_s^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}.\ \square$$

Замечание 2.1. *Вместо тождества (2.2) можно использовать тождество*

$$\Psi(\lambda)\Phi(\lambda)=\mathbb{I}det\Phi(\lambda)\tag{2.4}$$

На этом пути возникают символические степени матриц $\dot{\mathfrak{a}}^0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}=\mathfrak{I}$, $\dot{\mathfrak{a}}^{(-t)}=0$, $\dot{\mathfrak{a}}^{(t)}=\sum\limits_{0<m\le t}\dot{\mathfrak{a}}^{(t-m)}\mathfrak{a}_m\mathfrak{I}+\dot{\mathfrak{a}}^0\mathfrak{a}_t\mathfrak{I}$, $t>0$, $\dot{\mathfrak{a}}_r^t=\sum\limits_{r\le m\le s}\dot{\mathfrak{a}}_r^{t-(m-r)}\mathfrak{a}_m$, $0<r\le s$, $t>0$, позволяющие сформулировать аналоги теоремы 2.1. и следствия 2.1.

Теорема 2.2. *Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0<r\le s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\mathfrak{a}_1\varphi_{(2n-1)s}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathfrak{a}_2\varphi_{(2n-1)s-1}(\dot{\mathfrak{a}})+...+\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+1}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1}=0$$
$$\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathfrak{a}_3\varphi_{(2n-1)s-1}(\dot{\mathfrak{a}})+...+\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+2}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=0$$

.... (2.5)

$$\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathbb{I}\alpha_{2ns-1}=0$$
$$\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\dot{\mathfrak{a}})+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=0.$$

Следствие 2.1. *Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0<r\le s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\dot{\mathfrak{a}}_1^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_1^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_1^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_1^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+1}=0$$
$$\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_2^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_2^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=0$$

....

$$\dot{\mathfrak{a}}_{s-1}^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_{s-1}^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_{s-1}^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_{s-1}^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns-1}=0$$
$$\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s}+\alpha_1\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s-1}+\alpha_2\dot{\mathfrak{a}}_s^{(2n-1)s-2}+...+\alpha_{(2n-1)s-1}\dot{\mathfrak{a}}_s^{1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}=0.\tag{2.6}$$

3. Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли задачи на собственные значения с матрицей $\mathfrak{I}$ при младшей степени λ

Подобно п.2 вводя символические степени матричных операторов $\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \mathfrak{b}^{\cdot 0}$, $\mathfrak{b}_t = \begin{pmatrix} A_t^* & 0 \\ 0 & A_t \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b}^{\cdot(-k)} = 0, \mathfrak{b}^{\cdot t} = \sum\limits_{0<m\leq t} \mathfrak{I}\mathfrak{b}_m \mathfrak{b}^{\cdot t-m} + \mathfrak{I}\mathfrak{b}_t\mathfrak{b}^{\cdot 0},\ t>0,\ \mathfrak{b}_r^{\cdot t} = \sum\limits_{r\leq m\leq s} \mathfrak{b}_m\mathfrak{b}^{\cdot t-(m-r)},\ 0<r\leq s,\ t>0$, и матрицу $\Psi(\lambda)$ присоединенную к матрице $\Phi(\lambda)$ при использовании тождества (1.4), доказывается теорема 3.1.

Т е о р е м а 3.1. *Матрицы* $\mathfrak{b}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{b}_1\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_2\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-2)s+1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_3\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-2)s+2}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{b}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns} = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В тождестве (2.2) матрица $\Psi(\lambda)$ и $\det\Phi(\lambda)$ имеют вид:

$$\Psi(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)}\\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)}\end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(2)}\\ \mathfrak{B}_{21}^{(2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(2)}\end{pmatrix} + ... + \right.$$

$$\left. + \lambda^{(2n-1)s-1}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s-1)}\\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s-1)}\end{pmatrix} + \lambda^{(2n-1)s}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s)}\\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s)}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$\det\Phi(\lambda) = 1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + ... + \alpha_{2ns-1}\lambda^{2ns-1} + \alpha_{2ns}\lambda^{2ns}.$$

Метод неопределенных коэффициентов дает три группы равенств соответственно от первой степени до степени $2ns$ параметра λ. При этом матрицы $\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, ..., \mathfrak{B}^{(s)}, \mathfrak{B}^{(s+1)}, ..., \mathfrak{B}^{((2n-1)s)}$ представляются теми же самыми формулами п.2, где $\mathfrak{a}_t$ следует заменить на $\mathfrak{b}_t$. Их подстановка в третью группу формул доказывает теорему 3.1.

С л е д с т в и е 3.1. *(Явный вид теоремы Гамильтона-Кэли.) Матрицы* $\mathfrak{b}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{2ns} = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е 3.1. *При использовании равенства* $\Psi(\lambda)\Phi(\lambda) = \mathbb{I}det\Phi(\lambda)$ *получаем явный вид теоремы Гамильтона-Кэли с символическими степенями вида:* ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} = \mathfrak{I}$, ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(-t)} = 0$, ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(t)} = \sum\limits_{0<m\leq t} {}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(t-m)}\mathfrak{b}_m\mathfrak{I} + {}^{\cdot}\mathfrak{b}^0\mathfrak{b}_t\mathfrak{I}$, $t>0$, ${}^{\cdot}\mathfrak{b}_r^t = \sum\limits_{r\leq m\leq s} {}^{\cdot}\mathfrak{b}_r^{t-(m-r)}\mathfrak{b}_m,\ 0<r\leq s,\ t>0$.

4. Вычисление инвариантных коэффициентов характеристического уравнения при линейной зависимости от спектрального параметра

4.1. Спектральная задача $A-\lambda\mathrm{I}$

Вычисление коэффициентов (инвариантов) i_k относительно замены базиса в n-мерном пространстве E^n характеристического уравнения $det(A-\lambda\mathrm{I})=0$ приводится здесь с целью рассмотрения простейших задач на спектр Шмидта вида: $(\mathfrak{a}-\lambda\mathfrak{I})(\varphi,\psi)^{\mathrm{T}}=0$ и $(\mathfrak{b}-\lambda\mathfrak{I})(\varphi,\psi)^{\mathrm{T}}=0$. При этом существенно используются результаты работы [15], основанные на следующем утверждении.

Л е м м а 4.1. *Для любого матричного многочлена $F(\lambda)$ степени n справедливо равенство*

$$\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=\det F(\lambda)tr\left[F^{-1}(\lambda)F'(\lambda)\right] \tag{4.1}$$

Применяя лемму 4.1. к $F(\lambda)=A-\lambda\mathrm{I}, F'(\lambda)=-\mathrm{I}, \det F(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}i_k\lambda^{n-k}$, можно записать

$$\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=-(\det F(\lambda))tr\left[(A-\lambda\mathrm{I})^{-1}\right]=-(\det F(\lambda))tr\left[(-\lambda)(\mathrm{I}-\lambda^{-1}A)\right]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\det F(\lambda)tr\left[\left(\mathrm{I}-\lambda^{-1}A\right)^{-1}\right].$$

Таким образом

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=(-1)^n n\lambda^n+(-1)^{n-1}(n-1)i_1\lambda^{n-1}+...+(-1)^2 2i_{n-2}\lambda^2-i_{n-1}\lambda=$$

$$=\left[(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}i_1\lambda^{n-1}+...+(-1)^{n-k}i_k\lambda^{n-k}+...+(-1)^2i_{n-2}\lambda^2-i_{n-1}\lambda+i_n\right]\times$$
$$\times\left[n+\lambda^{-1}trA+\lambda^{-2}trA^2+...+\lambda^{-s}trA^s+...\right]. \tag{4.2}$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к следующей группе формул:

$$(-1)^n n=(-1)^n n$$

$$(-1)^{n-1}(n-1)i_1=(-1)^n trA+(-1)^{n-1}i_1 n$$
$$(-1)^{n-2}(n-2)i_2=(-1)^n trA^2+(-1)^{n-1}i_1 trA+(-1)^{n-2}i_2 n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^{n-k}(n-k)i_k=(-1)^n trA^k+(-1)^{n-1}i_1 trA^{k-1}+...+(-1)^{n-k+1}i_{k-1}trA+(-1)^{n-k}i_k n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{4.3}$$
$$(-1)^2 2i_{n-2}=(-1)^n trA^{n-2}+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-3}+...+(-1)^3 i_{n-3}trA+(-1)^2 i_{n-2}n$$
$$-i_{n-1}=(-1)^n trA^{n-1}+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-2}+...+(-1)^2 i_{n-2}trA-i_{n-1}n$$
$$0=(-1)^n trA^n+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-1}+...-i_{n-1}trA+i_n n,$$

из которой определяются инварианты $i_1, i_2, ..., i_8, ...$:

$$i_1=trA$$

$$i_2 = \frac{1}{2!}i_1^2 - \frac{1}{2}trA^2$$

$$i_3 = \frac{1}{3!}i_1^3 - \frac{1}{2}i_1 trA^2 + \frac{1}{3}trA^3$$

$$i_4 = \frac{1}{4!}i_1^4 - \frac{1}{2^2}i_1^2 trA^2 + \frac{1}{3}i_1 trA^3 + \frac{1}{2^3}\left(trA^2\right)^2 - \frac{1}{4}trA^4$$

$$i_5 = \frac{1}{5!}i_1^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^3 trA^2 + \frac{1}{2^3}i_1\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}i_1^2 trA^3 - \frac{1}{2^2}i_1 trA^4 - \frac{1}{2\cdot 3}trA^2 trA^3 + \frac{1}{5}trA^5$$

$$i_6 = \frac{1}{6!}i_1^6 - \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1^4 trA^2 + \frac{1}{2^4}i_1^2\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3^2}i_1^3 trA^3 - \frac{1}{2^3}i_1^2 trA^4 + \frac{1}{5}i_1 trA^5 + \frac{1}{2^3}trA^2 trA^4 -$$
$$-\frac{1}{2\cdot 3}i_1 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^4\cdot 3}\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}trA^6$$

$$i_7 = \frac{1}{7!}i_1^7 - \frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5}i_1^5 trA^2 + \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1^3\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3^2}i_1^4 trA^3 - \frac{1}{2^3\cdot 3}i_1^3 trA^4 + \frac{1}{2\cdot 5}i_1^2 trA^5 +$$
$$+\frac{1}{2^3}i_1 trA^2 trA^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^2 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2\cdot 3^2}i_1\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}i_1 trA^6 -$$
$$-\frac{1}{2\cdot 5}trA^2 trA^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}trA^3 trA^4 + \frac{1}{2^3\cdot 3}\left(trA^2\right)^2 trA^3 - \frac{1}{7}trA^7$$

$$i_8 = \frac{1}{8!}i_1^8 - \frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot 5}i_1^6 trA^2 + \frac{1}{2^6\cdot 3}i_1^4\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}i_1^5 trA^3 - \frac{1}{2^5\cdot 3}i_1^4 trA^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}i_1^3 trA^5$$
$$+\frac{1}{2^4}i_1^2 trA^2 trA^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}i_1^3 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^5\cdot 3}i_1^2\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2^2\cdot 3^2}i_1^2\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^2 trA^6 +$$
$$+\frac{1}{2^3\cdot 3}i_1\left(trA^2\right)^2 trA^3 - \frac{1}{2\cdot 5}i_1 trA^2 trA^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1 trA^3 trA^4 + \frac{1}{7}i_1 trA^7 - \frac{1}{2^5}\left(trA^2\right)^2 trA^4 +$$
$$+\frac{1}{2^7\cdot 3}\left(trA^2\right)^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}trA^2\left(trA^3\right)^2 + \frac{1}{2^2\cdot 3}trA^2 trA^6 + \frac{1}{3\cdot 5}trA^3 trA^5 + \frac{1}{2^5}\left(trA^4\right)^2 - \frac{1}{8}trA^8$$

....

Однако получить формулу общего вида инвариантов на этом пути не удалось. Тем не менее, формулы (4.2) могут служить основой компьютерного моделирования по вычислению коэффициентов $\det F(\lambda)$ - инвариантов i_k.

5. Определение коэффициентов характеристического многочлена

Рассматривается матричная обобщенная спектральная задача по Э. Шмидту (1.1), которую для получения стандартной записи характеристического уравнения удобно записать в матричном виде

$$\lambda^s\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + ... +$$
$$+\lambda^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

В некотором базисе $\{e_k\}_1^n$ n-мерного вещественного (комплексного) пространства $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$, $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k e_k$ и (5.1) записывается в виде системы

$$\begin{cases} \lambda^s c_k = \lambda^{s-1}\sum\limits_{i=1}^{n} \overset{1}{a}_{ik} d_i + ... + \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \overset{s}{a}_{ik} d_i \\ \lambda^s d_k = \lambda^{s-1}\sum\limits_{j=1}^{n} \overset{1}{a}_{kj} c_j + ... + \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{s}{a}_{kj} c_j. \end{cases} \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2}$$

Нашей задачей является представление в явном виде соответсвующего (5.1) характеристического уравнения

$$\det\left[\lambda^s \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} - ... - \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix}\right] \equiv$$
$$\equiv \lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + ... + \alpha_{2sn-1}\lambda + \alpha_{2sn} = 0, \tag{5.3}$$

т.е. вычисление коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-1}, \alpha_{2sn}$.

Следуя [7] составим систему:

$$\begin{aligned} \lambda^{s+1} c_k &= \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{a}_{ik} \lambda^s d_i + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^{n} \overset{2}{a}_{ik} d_i + ... + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \overset{s}{a}_{ik} d_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{a}_{ik} \left[\lambda^{s-1} \sum_{j=1}^{n} \overset{1}{a}_{ij} c_j + ... + \lambda \sum_{j=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{ij} c_j + \sum_{j=1}^{n} \overset{s}{a}_{ij} c_j\right] + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^{n} \overset{2}{a}_{ik} d_i + \\ &+ ... + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \overset{s}{a}_{ik} d_i = \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\overset{1(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{2}{a}_{jk} d_j \right) + ... + \\ &+ \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\overset{s-2(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{s-1}{a}_{jk} d_j \right) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \left(\overset{s-1(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{s}{a}_{jk} d_j \right) + \sum_{j=1}^{n} \overset{s(2)}{a}_{kj} c_j \\ \lambda^{s+1} d_k &= \sum_{j=1}^{n} \overset{1}{a}_{kj} \lambda^s c_j + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^{n} \overset{2}{a}_{kj} c_j + ... + \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} \overset{s}{a}_{kj} c_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overset{1}{a}_{kj} \left[\lambda^{s-1} \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{a}_{ij} d_i + ... + \lambda \sum_{i=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{ij} d_i + \sum_{i=1}^{n} \overset{s}{a}_{ij} d_i\right] + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^{n} \overset{2}{a}_{kj} c_j + \\ &+ ... + \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} \overset{s}{a}_{kj} c_j = \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\overset{1(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{2}{a}_{ki} c_i \right) + ... + \\ &+ \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\overset{s-2(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{s-1}{a}_{ki} c_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\overset{s-1(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{s}{a}_{ki} c_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \overset{s(2)}{a}_{ki} d_i. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Далее, умножая (5.4) на λ и используя (5.2), вычисляем $\lambda^{s+2} c_k$ и $\lambda^{s+2} d_k$, ... , $\lambda^{2sn} c_k$ и $\lambda^{2sn} d_k$.

Возьмем первые уравнения из каждой системы, умноженные, соответственно, на $\alpha_{2sn-s}, \alpha_{2sn-s-1}, ..., \alpha_1, 1$, и вычислим сумму $c_1(\lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + ... + \ +\alpha_{2sn-s-1}\lambda^{s+1} + \alpha_{2sn-s}\lambda^s)$, сложив соответсвующие правые части. Справа возникают слагаемые, соответственно, с множителями $c_1, c_2, ..., c_n, d_1, d_2, ..., d_n$, внутри которых выполняется группировка по степеням λ. Для выполнения полученного равенства необходимо приравнять коэффициенты при $c_2, ..., c_n, d_1, d_2, ..., d_n$ к нулю. Из возникающей системы определяются $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-s}$, которые в результате подстановки в коэффициенты при c_1 в правой части дадут, соответственно, $\alpha_{2sn-s+1}$, как коэффициент при λ^{s-1}, $\alpha_{2sn-s+2}$, как коэффициент при λ^{s-2},..., α_{2sn}, как коэффициент при нулевой степени λ.

Изложенный прием позволяет определить все коэффициенты характеристического многочлена. В данном случае коэффициент α_1 также известен: $\alpha_1 = Sp\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} = 0$. В то же время он определяется из системы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-s}$.

Приведем вычисление коэффициентов характеристического уравнения на конкретном примере. Пусть $s = 3, n = 2$. Представим в явном виде следующее уравнение степени $2sn = 12$:

$$\det\left[\lambda^3\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda^2\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 & A_2^* \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_3^* \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \tag{5.5}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого возьмем соответствующую (5.5) систему

$$\begin{cases} \lambda^3 c_1 = \lambda^2 d_1 + \lambda(d_1 + d_2) - d_1 \\ \lambda^3 c_2 = \lambda^2 d_1 + d_2 \\ \lambda^3 d_1 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda c_1 - c_1 \\ \lambda^3 d_2 = \lambda c_1 + c_2 \end{cases} \tag{5.6}$$

и по ней составим

$$\begin{cases} \lambda^4 c_1 = \lambda^2(c_1 + c_2 + d_1 + d_2) + \lambda(c_1 - d_1) - c_1 \\ \lambda^4 c_2 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 + d_2) - c_1 \\ \lambda^4 d_1 = \lambda^2(2d_1 + c_1) + \lambda(-c_1 + d_1 + d_2) + (-d_1 + d_2) \\ \lambda^4 d_2 = \lambda^2 c_1 + \lambda c_2. \end{cases}$$

Продолжая процесс умножения на λ и используя (5.5), выпишем только первые уравнения получающихся систем:

$$\lambda^5 c_1 = \lambda^2(2c_1 + c_2 + d_1) + \lambda(c_1 + d_1 + d_2) + (-c_1 + c_2 - d_1 + d_2)$$

$$\lambda^6 c_1 = \lambda^2(2c_1 + c_2 + 4d_1 + d_2) + \lambda(c_2 + d_1 + 3d_2) + (-c_1 - 2d_1 + d_2)$$

$$\lambda^7 c_1 = \lambda^2(4c_1 + 5c_2 + 4d_1 + 3d_2) + \lambda(4c_1 + 3d_2) + (-4c_1 + c_2 - 2d_1 + d_2)$$

$$\lambda^8 c_1 = \lambda^2(8c_1 + 4c_2 + 9d_1 + 3d_2) + \lambda(3c_1 + c_2 + 2d_1 + 5d_2) + (-4c_1 + 3c_2 - 4d_1 + 5d_2)$$

$$\lambda^9 c_1 = \lambda^2(12c_1 + 10c_2 + 14d_1 + 5d_2) + \lambda(8c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 13d_2) + (-9c_1 + 3c_2 - 8d_1 + 4d_2)$$

$$\lambda^{10} c_1 = \lambda^2(22c_1 + 17c_2 + 26d_1 + 13d_2) + \lambda(10c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 16d_2) +$$
$$+(-14c_1 + 5c_2 - 12d_1 + 10d_2)$$

$$\lambda^{11} c_1 = \lambda^2(36c_1 + 29c_2 + 43d_1 + 16d_2) + \lambda(25c_1 + 5c_2 + 10d_1 + 32d_2)$$
$$+(-26c_1 + 13c_2 - 22d_1 + 17d_2)$$

$$\lambda^{12} c_1 = \lambda^2(68c_1 + 48c_2 + 85d_1 + 32d_2) + \lambda(33c_1 + 13c_2 + 14d_1 + 53d_2)$$
$$+(-43c_1 + 16c_2 - 36d_1 + 29d_2).$$

Умножая полученные равенста на $\alpha_9, \alpha_8, ..., \alpha_1, 1$ и складывая результаты, получим

$$c_1(\lambda^{12} + \alpha_1\lambda^{11} + \alpha_2\lambda^{10} + \alpha_3\lambda^9 + \alpha_4\lambda^8 + \alpha_5\lambda^7 + \alpha_6\lambda^6 + \alpha_7\lambda^5 + \alpha_8\lambda^4 + \alpha_9\lambda^3) =$$

$$= c_1\left[\lambda^2(68 + 36\alpha_1 + 22\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8) +\right.$$
$$+\lambda(33 + 25\alpha_1 + 10\alpha_2 + 8\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_8) +$$
$$\left. + (-43 - 26\alpha_1 - 14\alpha_2 - 9\alpha_3 - 4\alpha_4 - 4\alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8)\right] +$$
$$+c_2\left[\lambda^2(48 + 29\alpha_1 + 17\alpha_2 + 10\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) +\right.$$

$$+\lambda(13+5\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6)+(16+13\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5+\alpha_7)]+$$
$$+d_1\left[\lambda^2(85+43\alpha_1+26\alpha_2+14\alpha_3+9\alpha_4+4\alpha_5+4\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9)+\right.$$
$$+\lambda(14+10\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6+\alpha_7-\alpha_8+\alpha_9)+$$
$$\left.+(-36-22\alpha_1-12\alpha_2-8\alpha_3-4\alpha_4-2\alpha_5-2\alpha_6-\alpha_7-\alpha_9)\right]+$$
$$+d_2\left[\lambda^2(32+16\alpha_1+13\alpha_2+5\alpha_3+3\alpha_4+3\alpha_5+\alpha_6+\alpha_8)+\right.$$
$$+\lambda(53+32\alpha_1+16\alpha_2+13\alpha_3+5\alpha_4+3\alpha_5+3\alpha_6+\alpha_7+\alpha_9)+$$
$$\left.+(29+17\alpha_1+10\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7)\right].$$

Приравняв коэффициенты при c_2, d_1 и d_2 к нулю, получим:

$$\alpha_1=0,\alpha_2=-2,\alpha_3=-2,\alpha_4=0,\alpha_5=2,\alpha_6=-1,\alpha_7=-2,\alpha_8=-1,\alpha_9=4.$$

Подставив полученные значения α в равенство

$$\lambda^{12}+\alpha_1\lambda^{11}+\alpha_2\lambda^{10}+\alpha_3\lambda^9+\alpha_4\lambda^8+\alpha_5\lambda^7+\alpha_6\lambda^6+\alpha_7\lambda^5+\alpha_8\lambda^4+\alpha_9\lambda^3=$$
$$=\lambda^2(68+36\alpha_1+22\alpha_2+12\alpha_3+8\alpha_4+4\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8)+$$
$$+\lambda(33+25\alpha_1+10\alpha_2+8\alpha_3+3\alpha_4+4\alpha_5+\alpha_7+\alpha_8)+$$
$$+(-43-26\alpha_1-14\alpha_2-9\alpha_3-4\alpha_4-4\alpha_5-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8),$$

найдем $\alpha_{10}=-1,\alpha_{11}=-2,\alpha_{12}=1$. Таким образом, характеристическое уравнение (5.5) в явном виде следующее:

$$\lambda^{12}-2\lambda^{10}-2\lambda^9+2\lambda^7-\lambda^6-2\lambda^5-\lambda^4+4\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

Непосредственное вычисление характеристического уравнения подтверждает полученный результат.

З а м е ч а н и е 5.1. *Подобно* [12] *для матричного полинома вида (5.1) также может быть сформулирована и доказана теорема Гамильтона-Кэли.*

Список литературы

1. Schmidt E., “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgeichungen.”, Teilen 1-3, *Math. Ann.*, **63-65** (1905-1908), 370–399.

2. Гурса Э., *Курс математического анализа. Интегральные уравнения.* Т. 3, Ч.2, ОНТИ, М., 1935.

3. Пустыльник Е. И., “Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве Банаха”, *Изв. ВУЗов. Математика*, 1960, № 2 (15), 149–153.

4. Аржаных И. С., “Обобщение теоремы Гамильтона-Кэли”, *Докл. АН Узбекской ССР*, 1951, № 7, 3–5.

5. Аржаных И. С., “Распространение метода А.Н.Крылова на полиномиальные матрицы”, *Докл. АН СССР. Нов. сер.*, 1951, Т.81, № 5, 749–752.

6. Аржаных И. С.,Гугнина В. И., “Распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы”, *Труды Института математики им. В.И.Романовского*, 1962, В.24, Ташкент, 33–67.

7. Аржаных И. С.,Гугнина В. И., “О развертывании характеристического уравнения”, *Труды Института Математики АН Узбекской ССР*, 1962, В.26, 3–12.

8. Гугнина В. И., “Некоторые вопросы теории полиномиальных матриц”, Автореферат кандидатской диссертации, 1967, Ташкент.

9. Аржаных И. С., “О новых неравенствах устойчивости”, *Автоматика и телемеханика*, 1961, Т.22, № 4, 436–442.

10. Аржаных И. С., “Некоторые достаточные условия устойчивости”, *Изв. АН Узбекской ССР. Сер. техн. наук*, 1962, № 4, 30–38.

11. Кувшинова А. Н., “Об одном варианте теоремы Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц”, *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования*, Герценовские чтения - 2012. Материалы научной конференции (16-21 апреля 2012 г.), LXV, БАН, СПб., 2012, 83–87.

12. Кувшинова А. Н., “Теорема Гамильтона-Кэли для матриц полиномиальных по спектральному параметру Шмидта.”, *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования*, Герценовские чтения - 2013. Материалы научной конференции (15-20 апреля 2013 г.), LXVI, БАН, СПб., 2013, 81–86.

13. Kuvshinova A. N., Loginov B. V., *Some consequences of the generalized Hamilton-Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E.Schmidt spectral parameter.*, ROMAI Jornal, 2014.

14. Макеева О. В., “Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения”, Автореферат кандидатской диссертации, 2007.

15. Martins L. S., “An analytical approach to Cayley-Hamilton theorem”, *Atti Acc. Lincei Rend. fis.*, S. VIII, LXXXI, 1987, 279–282.

Cayley-Hamilton theorem for two variants of matrix spectral problems on E.Shmidt and development of characteristic polynomial.

© A. N. Kuvshinova[3], B. V. Loginov[4]

Abstract. At the beginning of previous century E.Schmidt had introduced for integral operators eigenvalue systems $\{\lambda_k\}$, counting with their multiplicities and relevant sets of eigenelements $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, such that $A\varphi_k = \lambda_k\psi_k,\ A^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$. In this article generalized matrix spectral problems polynomially depending on Schmidt's spectral parameter are considered. I.S. Arjanykh (1951) has proved the generalized Hamilton-Cayley theorem for polynomial matrices with identity matrix at the parameter highest degree with the aim of application to numerical methods of linear algebra. Below it is given the extension of Hamilton-Cayley theorem on matrix E.Schmidt spectral problems polynomially depending on spectral parameter with identity matrix at the highest degree of spectral parameter (s.2) and also with identity (invertible) matrix at the parameter zero degree (s.3). With the aimes of further investigations [11-13] on the base of the suggested by I.S.Arzhanykh [6, 7] approach the development of characteristic polynomial on Schmidt spectral parameter degrees is made.

Key Words: E.Schmidt spectrum; E.Shmidt eigenvalues; polynomial matrices on E.Shmidt spectral parameter; Hamilton-Cayley theorem; development of characteristic polynomial.

[3] Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; erasya7@rambler.ru.

[4] Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; bvllbv@yandex.ru.

УДК 550.83

Приближенные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала

© И. В. Бойков[1], В. А. Рязанцев[2]

Аннотация. Построены итерационные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала.
Ключевые слова: логарифмический потенциал, ньютоновский потенциал, обратная задача, одновременное восстановление

1. Введение

Проблема восстановления формы тела по создаваемому им на поверхности Земли полю силы тяжести или полю потенциала силы тяжести, является классической в гравиразведке. Введем декартову систему координат, направив ось Oz вертикально вниз. В случае, если тело простирается в бесконечность по одному из направлений и расположено между поверхностями $z = +H$, $z = +H - \phi(x)$, где $\phi(x)$ – неотрицательная функция с финитным носителем $[a, b]$, эта задача описывается уравнением логарифмического потенциала

$$G \int\limits_a^b \sigma(s) \ln \left[\frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + \big(H - \phi(s)\big)^2} \right] ds = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{1.1}$$

где $\phi(s)$ – форма поверхности тела; H – глубина залегания; $\sigma(s)$ – плотность тела, G – гравитационная постоянная. Линеаризация уравнения (1.1) описывается линейным интегральным уравнением

$$2GH \int\limits_a^b \frac{\sigma(s)\varphi(s)}{(x-s)^2 + H^2} \, ds = f(x). \tag{1.2}$$

Приближенному решению уравнений (1.1)-(1.2) посвящено большое число работ [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] в которых различными методами определяется граница тела при известной его плотности или плотность тела при известной границе. Насколько авторам известно, в настоящее время методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в задаче логарифмического потенциала отсутствуют.

Рассмотрим случай ньютоновского потенциала. Пусть рудное тело залегает на глубине H, причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \phi(x, y)$ с неотрицательной функцией $\phi(x, y)$, удовлетворяющей условию $\max \phi(x, y) < H$. Тогда гравитационное поле над поверхностью

[1] Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru.

Земли описывается уравнением

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^{H}\frac{\sigma(\zeta,\eta,\xi)(\xi-z)}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(\xi-z)^2\right)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta\,d\xi=f(x,y,z),\qquad(1.3)$$

где G – гравитационная постоянная, $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ – плотность гравитирующего тела.

Линеаризация уравнения (1.3) приводит к уравнению

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\zeta,\eta)\left[\frac{H\phi(\zeta,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H^2\right)^{3/2}}\right]d\zeta\,d\eta=f(x,y,0).$$

В работах [10], [11], [12], [8], [9] предложены алгоритмы определения формы тела $\phi(\zeta,\eta)$ при известной плотности и плотности тела при известной форме. Методы одновременного восстановления формы тела и его плотности авторам неизвестны.

Ниже, в разделах 2, 3 предлагается метод одновременного восстановления формы тела и его плотности в задаче логарифмического потенциала и обратной трехмерной задаче ньютоновского потенциала.

2. Логарифмический потенциал

Аппроксимируем уравнение (1.1) более простым нелинейным уравнением

$$G\int_a^b\sigma(s)\frac{2H\varphi(s)-\varphi^2(s)}{(x-s)^2+H^2}\,ds=f(x),\qquad(2.1)$$

которое получается из уравнения (1.1) при учете второй степени u при разложении функции $\ln(1+u)$, $u=\frac{2H\phi-\phi^2}{(x-s)^2+\left(H-\phi(s)\right)^2}$ в ряд Тейлора и аппроксимации функции $\frac{2H\phi(s)-\phi^2(s)}{(x-s)^2+\left(H-\phi(s)\right)^2}$ функцией $\frac{2H\phi(s)-\phi^2(s)}{(x-s)^2+H^2}$.

Предположим, что наряду с измерениями на поверхности Земли, измерения проводятся на высоте $-h$, и результатом этих измерений явяется функция $f_1(x)$. Очевидно, эта функция оказывается связанной с функциями $\phi(s)$ и $\sigma(s)$ уравнением

$$G\int_a^b\sigma(s)\frac{2(H+h)\phi(s)-\phi^2(s)}{(x-s)^2+(H+h)^2}\,ds=f_1(x).\qquad(2.2)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.1)-(2.2). Введем неизвестные функции $u_1(s)=\sigma(s)\phi(s)$ и $u_2(s)=\sigma(s)\phi^2(s)$. В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}G\displaystyle\int_a^b\frac{2Hu_1(s)-u_2(s)}{(x-s)^2+H^2}\,ds=f(x),\\ G\displaystyle\int_a^b\frac{2(H+h)u_1(s)-u_2(s)}{(x-s)^2+(H+h)^2}\,ds=f_1(x),\end{cases}\qquad(2.3)$$

Определив из системы (2.3) неизвестные функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$, находим $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$ и $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$.

Систему (2.3) можно решать различными методами. Прежде всего рассмотрим метод интегральных преобразований. Будем считать, что $f(x)$ и $f_1(x)$ – финитные функции с носителем $[a, b]$. В терминах гравиметрии это означает, что влияние гравитирующего тела распространяется только на этот промежуток. Продолжим функции $f(x)$ и $f_1(x)$ нулем на множество $(-\infty, \infty) \setminus [a, b]$ и полученные в результате функции по-прежнему обозначим через $f(x)$ и $f_1(x)$. Положив $G = 1$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2Hu_1(s) - u_2(s)}{(x-s)^2 + H^2}\, ds = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2(H+h)u_1(s) - u_2(s)}{(x-s)^2 + (H+h)^2}\, ds = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Известно [3], что преобразованием Фурье функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{x^2+H^2}$ является функция $e^{-H|\omega|}$. Применим к системе уравнений (2.4) преобразование Фурье. В результате имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-H|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{H} e^{-H|\omega|} U_2(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega), \\ \sqrt{2\pi} e^{-(H+h)|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{H+h} e^{-(H+h)|\omega|} U_2(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1(\omega), \end{cases} \tag{2.5}$$

где $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $F(\omega)$, $F_1(\omega)$ – преобразования Фурье функций $u_1(s)$, $u_2(s)$, $f(s)$, $f_1(s)$. Система уравнений (2.5) имеет решение в явном виде:

$$\begin{cases} U_1(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} F(\omega) e^{H|\omega|} + \dfrac{1}{2H} U_2(\omega), \\ U_2(\omega) = \dfrac{H(H+h)}{\pi h} \left(e^{(H+h)|\omega|} F_1(\omega) - e^{H|\omega|} F(\omega) \right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Применяя к функциям $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ обратное преобразование Фурье, находим функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$. Для вычисления обратного преобразования Фурье можно применить квадратурные формулы [14].

Задача вычисления обратного преобразования Фурье функций $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ может оказаться некорректной, т. к. из-за вычислительных ошибок произведения $F(\omega)e^{H|\omega|}$ и $F_1(\omega)e^{(H+h)|\omega|}$ могут не стремиться к нулю при $|\omega| \to \infty$. В этом случае к решению системы уравнений (2.6) естественно применить итерационные методы.

Пусть A и B – достаточно большие положительные числа. Введем сетки узлов $s_k = -A + 2k\frac{A}{N_1}$, $k = 0, 1, \ldots, N_1$, $\omega_k = -B + 2k\frac{B}{N_2}$, $k = 0, 1, \ldots, N_2$.

Систему уравнений (2.6) аппроксимируем N_2 системами алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-H|\omega_k|} U_1(\omega_k) - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{H} e^{-H|\omega_k|} U_2(\omega_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega_k), \\ \sqrt{2\pi} e^{-(H+h)|\omega_k|} U_1(\omega_k) - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{H+h} e^{-(H+h)|\omega_k|} U_2(\omega_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1(\omega_k), \end{cases} \quad k = \overline{0, N_2 - 1}$$

которые запишем в операторной форме

$$A(k)Y(k) = F(k), \quad k = \overline{0, N_2 - 1} \tag{2.7}$$

где $Y(k) = \big(U_1(\omega_k), U_2(\omega_k)\big)$, $F(k) = \big(F(\omega_k), F_1(\omega_k)\big)$; построение матрицы $A(k)$ очевидно, а значения $F(\omega_k)$ рассчитываются по квадратурным формулам вычисления прямого преобразования Фурье на сетке s_k.

Для решения систем уравнений (2.7) воспользуемся итерационным методом

$$Y_{m+1}(k) = \alpha Y_m(k) + (1-\alpha)\big(Y_m(k) - \beta_k(A^*(k)A(k)Y_m(k) - A^*(k)F(k))\big), \tag{2.8}$$

где $k = \overline{0, N_2 - 1}$, $m = 0, 1, \ldots$, $\beta_k = \frac{1}{2\|A^*(k)A(k)\|}$ в метрике l_2, $0 < \alpha < 1$. Значения $u_1(s_l)$, $u_2(s_l)$, $l = \overline{0, N_1 - 1}$ вычисляются по квадратурным формулам обратного преобразования Фурье на сетке ω_k.

П р и м е р 2.1. *Найти неизвестные функции $\sigma(s)$, $\phi(s)$ из системы уравнений:*

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(s) \dfrac{10\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + 25}\, ds = \dfrac{\pi}{10} \cdot \dfrac{113x^2 + 5628}{x^4 + 85x^2 + 1764}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma(s) \dfrac{12\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + 36}\, ds = \dfrac{10\pi}{3} \cdot \dfrac{4x^2 + 259}{x^4 + 113x^2 + 3136}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Решением данной системы являются функции

$$\sigma(s) = \frac{s^2 + 4}{s^4 + 2s^2 + 1}, \quad \phi(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}. \tag{2.10}$$

Пара функций $\phi(s)$, $\sigma(s)$ связаны с функциями $u_1(s)$, $u_2(s)$ формулами $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$, $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$. Функции $u_1(s)$, $u_2(s)$ являются прообразами функций $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, которые определяются из системы:

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-5|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\dfrac{\pi}{50}} e^{-5|\omega|} U_2(\omega) = \dfrac{\pi}{20}\big(20e^{-6|\omega|} - e^{-7|\omega|}\big), \\ \sqrt{2\pi} e^{-6|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\dfrac{\pi}{72}} e^{-6|\omega|} U_2(\omega) = \dfrac{\pi}{24}\big(24e^{-7|\omega|} - e^{-8|\omega|}\big). \end{cases}$$

Функции $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$ находим по формулам (2.6):

$$U_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}, \quad U_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-2|\omega|}.$$

Применяя к найденным функциям обратное преобразование Фурье, имеем $u_1(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $u_2(s) = \frac{1}{s^2+4}$, откуда по формулам $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$, $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$ находим решение (2.10) исходной системы (2.9). Система уравнений (2.9) решалась также описанным выше численным методом. Результаты вычислений приведены на рис. 2.1, 2.2.

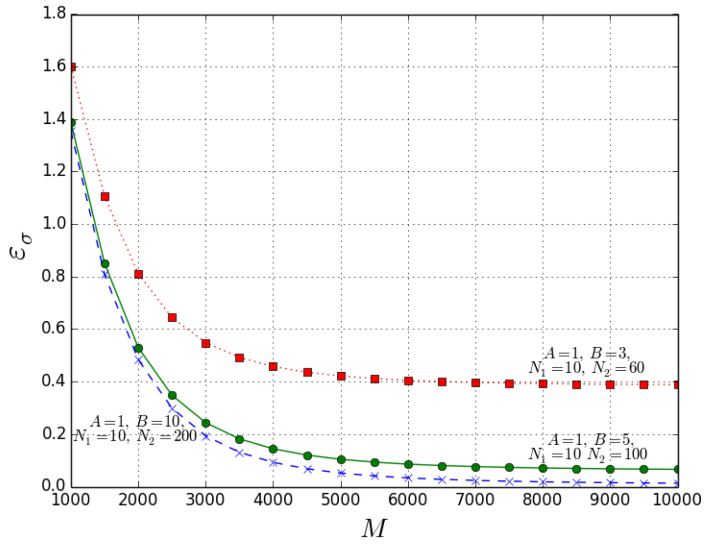


Рисунок **2.1**

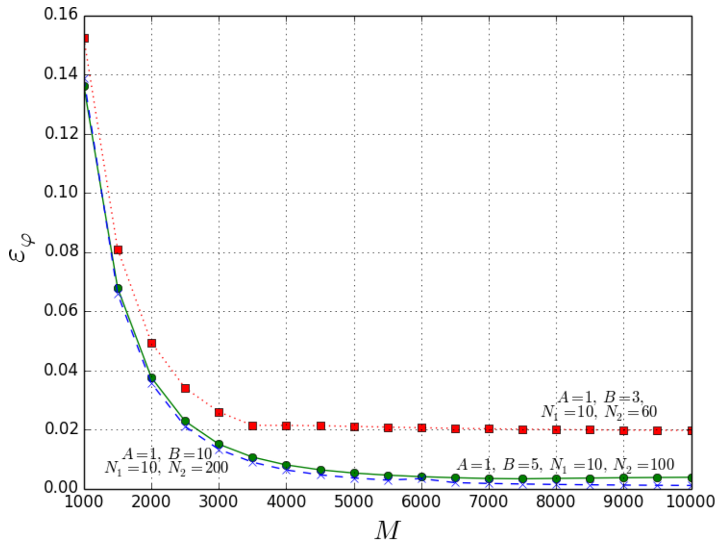


Рисунок **2.2**

Здесь использованы следующие обозначения: $[-A,A]$ *– сегмент, на котором определены функции* $\phi(s)$, $\sigma(s)$, $f(s)$; $[-B,B]$ *– сегмент, на котором вычислены преобразования Фурье функций* $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $F(\omega)$; N_1 *число узлов сетки* $s_j = -A + 2A\frac{j}{N_1}$, $j = 0,1,\ldots,N_1$; N_2 *– число узлов сетки* $\omega_k = -B + 2B\frac{k}{N_2}$, $k = 0,1,\ldots,N_2$; M *– число итераций при реализации метода* (2.8)*. Символом* ϵ_ϕ *(*ϵ_σ*) обозначена абсолютная погрешность восстановления функции* ϕ *(*σ*).*

3. Обратная пространственная задача теории потенциала

Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось Oz вниз. Если рудное тело залегает на глубине H, причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x,y) = H - \phi(x,y)$ с неотрицательной функцией $\phi(x,y)$ и $\max\phi(x,y) < H$, то гравитационное поле над поверхностью Земли описывается уравнением

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^{H}\frac{\sigma(\zeta,\eta,\xi)(\xi-\eta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(\xi-z)^2\right)^{3/2}}=f(x,y,z),\qquad(3.1)$$

где G – гравитационная постоянная; $\sigma(\zeta,\eta,\xi)$ – плотность тела. Предполагается, что, во-первых, плотность $\sigma(\zeta,\eta,\xi)\equiv 0$ вне тела; во-вторых, плотность дифференцируема по ξ; в-третьих, градиент напряженности гравитационного поля известен при $z\le 0$.

На поверхности Земли уравнение (3.1) имеет вид

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^{H}\frac{\sigma(\zeta,\eta,\xi)\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+\xi^2\right)^{3/2}}=f(x,y,0).$$

Вычислив по частям интеграл в левой части предыдущего уравнения, имеем

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta,\xi)\,d\zeta\,d\eta}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H-\phi(\zeta,\eta))^2\right)^{1/2}}-G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta,\xi)\,d\zeta\,d\eta}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\right)^{1/2}}+$$
$$+G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{H-\varphi(\zeta,\eta)}^{H}\frac{\sigma'_\xi(\zeta,\eta,\xi)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+\xi^2\right)^{3/2}}=f(x,y,0).$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что плотность не зависит от ξ. Тогда приходим к уравнению

$$G\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\zeta,\eta)\left[\frac{1}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H-\phi(\zeta,\eta))^2\right)^{1/2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\right)^{1/2}}\right]d\zeta\,d\eta=f(x,y,0).\qquad(3.2)$$

Положим $u=\frac{\phi^2(\zeta,\eta)-2H\phi(\zeta,\eta)}{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2}$. В предположении, что $|u|<1$, функцию $(1+u)^{-1/2}$ разлагаем в ряд

$$\frac{1}{(1+u)^{1/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}u^n.$$

Тогда уравнение (3.2) имеет вид

$$G\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta)\left(\phi^2(\zeta,\eta)-2H\phi(\zeta,\eta)\right)^n d\zeta\,d\eta}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\right)^{n+1/2}}=f(x,y,0).$$

Ограничиваясь первым слагаемым в левой части, приходим к уравнению:

$$-\frac{G}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta)\left(\phi^2(\zeta,\eta)-2H\phi(\zeta,\eta)\right)d\zeta\,d\eta}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\right)^{3/2}}=f(x,y,0).\qquad(3.3)$$

Проведя измерения на высоте h над поверхностью Земли, приходим к уравнению:

$$-\frac{G}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta)\big(\phi^2(\zeta,\eta)-2(H+h)\phi(\zeta,\eta)\big)\,d\zeta\,d\eta}{\big((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H+h)^2\big)^{3/2}}=f(x,y,-h). \tag{3.4}$$

Определим функции $\sigma(\zeta,\eta)$ и $\phi(\zeta,\eta)$ из решения системы (3.3)-(3.4). Введем функции $u_1(\zeta,\eta)=\sigma(\zeta,\eta)\phi(\zeta,\eta)$ и $u_2(\zeta,\eta)=\sigma(\zeta,\eta)\phi^2(\zeta,\eta)$. Тогда система уравнений (3.3)-(3.4) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{G}{2}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2Hu_1(\zeta,\eta)-u_2(\zeta,\eta)}{\big((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\big)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta=f(x,y,0),\\ \dfrac{G}{2}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2(H+h)u_1(\zeta,\eta)-u_2(\zeta,\eta)}{\big((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(H+h)^2\big)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta=f(x,y,-h).\end{cases} \tag{3.5}$$

Применим к уравнениям системы (3.5) преобразование Фурье. Известно [3], что преобразование Фурье функции $\frac{H}{\left(x^2+y^2+H^2\right)^{3/2}}$ равно $e^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$. В результате приходим к системе:

$$\begin{cases}2\pi Ge^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_1(\omega_1,\omega_2)-\dfrac{\pi G}{H}e^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_2(\omega_1,\omega_2)=F(\omega_1,\omega_2,0),\\ 2\pi Ge^{-(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_1(\omega_1,\omega_2)-\dfrac{\pi G}{H+h}e^{-(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_2(\omega_1,\omega_2)=F(\omega_1,\omega_2,-h),\end{cases} \tag{3.6}$$

где $U_1(\omega_1,\omega_2)$, $U_2(\omega_1,\omega_2)$, $F(\omega_1,\omega_2,0)$, $F(\omega_1,\omega_2,-h)$ – преобразования Фурье функций $u_1(\zeta,\eta)$, $u_2(\zeta,\eta)$, $f(x,y,0)$, $f(x,y,-h)$.

Система (3.6) имеет решение в аналитической форме:

$$\begin{cases}U_1(\omega_1,\omega_2)=\dfrac{e^{H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}}{2\pi G}F(\omega_1,\omega_2,0)+\dfrac{1}{2H}U_2(\omega_1,\omega_2),\\ U_2(\omega_1,\omega_2)=\dfrac{(H+h)H}{\pi Gh}\left(e^{(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}F(\omega_1,\omega_2,-h)-e^{H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}F(\omega_1,\omega_2,0)\right).\end{cases} \tag{3.7}$$

Применив к функциям $U_1(\omega_1,\omega_2)$ и $U_2(\omega_1,\omega_2)$ обратное преобразование Фурье, находим $u_1(\zeta,\eta)$ и $u_2(\zeta,\eta)$, после чего вычисляем искомые функции $\sigma(\zeta,\eta)$ и $\phi(\zeta,\eta)$:

$$\phi(\zeta,\eta)=\frac{u_2(\zeta,\eta)}{u_1(\zeta,\eta)},\quad \sigma(\zeta,\eta)=\frac{u_1(\zeta,\eta)}{\phi(\zeta,\eta)}. \tag{3.8}$$

П р и м е р 3.1. *Найдем функции $\sigma(\xi,\eta)$, $\phi(\xi,\eta)$ из системы*

$$\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta)\big(6\phi(\zeta,\eta)-\phi^2(\zeta,\eta)\big)}{\big((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+9\big)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta=\frac{16\pi}{\big(x^2+y^2+16\big)^{3/2}}-\frac{5\pi/3}{x^2+y^2+25},\\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(\zeta,\eta)\big(8\phi(\zeta,\eta)-\phi^2(\zeta,\eta)\big)}{\big((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+16\big)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta=\frac{20\pi}{\big(x^2+y^2+25\big)^{3/2}}-\frac{3\pi/2}{\big(x^2+y^2+36\big)^{3/2}}.\end{cases} \tag{3.9}$$

Введя замену неизвестных функций $u_1 = \sigma(\zeta,\eta)\phi(\zeta,\eta)$, $u_2 = \sigma(\zeta,\eta)\phi^2(\zeta,\eta)$, *переходим от системы* (3.9) *к системе*

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{6u_1(\zeta,\eta)-u_2(\zeta,\eta)}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+9\right)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta = \dfrac{16\pi}{\left(x^2+y^2+16\right)^{3/2}} - \dfrac{5\pi/3}{x^2+y^2+25}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{8u_1(\zeta,\eta)-u_2(\zeta,\eta)}{\left((x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+16\right)^{3/2}}\,d\zeta\,d\eta = \dfrac{20\pi}{\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}} - \dfrac{3\pi/2}{\left(x^2+y^2+36\right)^{3/2}}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Применим к системе (3.10) *преобразование Фурье, в результате чего получим следующую систему в спектральной области:*

$$\begin{cases} 4\pi e^{-3\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_1(\omega_1,\omega_2) - \dfrac{2\pi}{3}e^{-3\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_2(\omega_1,\omega_2) = \dfrac{\pi}{3}\left[12e^{-4\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} - e^{-5\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}\right], \\ 4\pi e^{-4\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_1(\omega_1,\omega_2) - \dfrac{\pi}{2}e^{-4\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}U_2(\omega_1,\omega_2) = \dfrac{\pi}{4}\left[16e^{-5\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} - e^{-6\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}\right]. \end{cases}$$

Решение этой системы (при $G = 1$ *):*

$$\begin{cases} U_1(\omega_1,\omega_2) = e^{-\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}, \\ U_2(\omega_1,\omega_2) = \dfrac{1}{2}e^{-2\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Применив к (3.11) *обратное преобразование Фурье, получаем точное решение системы* (3.9)

$$u_1(\zeta,\eta) = \left(x^2+y^2+1\right)^{-3/2}, \quad u_2(\zeta,\eta) = \left(x^2+y^2+4\right)^{-3/2}$$

Используя соотношения (3.8), *выражаем неизвестные функции* $\sigma(\zeta,\eta)$, $\phi(\zeta,\eta)$, *определяющие точное решение исходной системы* (3.9).

$$\sigma(\xi,\eta) = \left(\frac{x^2+y^2+4}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right)^{3/2}, \quad \phi(\xi,\eta) = \left(\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2+4}\right)^{3/2}.$$

Из-за различного рода погрешностей (в частности, вычислительных) произведения $e^{H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}F(\omega_1,\omega_2,0)$ и $e^{(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}F(\omega_1,\omega_2,-h)$ могут не стремиться к нулю при $|\omega_1| \to \infty$, $|\omega_2| \to \infty$. Поэтому к функциям $U_1(\omega_1,\omega_2)$, $U_2(\omega_1,\omega_2)$ может оказаться неприменимым обратное преобразование Фурье. В этом случае для вычисления функций $u_1(\zeta,\eta)$ и $u_2(\zeta,\eta)$ необходимо применить методы регуляризации. В частности, можно ввести регуляризирующие множители, подобные приведенным в одномерном случае в [2].

Более эффективным является итерационный метод. Пусть A и B – достаточно большие положительные числа, так что прямое преобразование Фурье вычисляется в квадрате $[-A,A]^2$, а обратное преобразование Фурье вычисляется в квадрате $[-B,B]^2$. Пусть $\omega_k = -B + 2k\frac{B}{N}$, $k = 0,1,\ldots,N$. Введем сетку узлов $w_{kl} = \{\omega_k,\omega_l\}$, $k,l = 0,1,\ldots,N-1$. Системе уравнений (3.6) поставим в соответствие N^2 систем уравнений

$$\begin{cases} 2\pi G e^{-H\sqrt{\omega_k^2+\omega_l^2}}U_1(\omega_k,\omega_l) - \dfrac{\pi G}{H}e^{-H\sqrt{\omega_k^2+\omega_l^2}}U_2(\omega_k,\omega_l) = F(\omega_k,\omega_l,0), \\ 2\pi G e^{-(H+h)\sqrt{\omega_k^2+\omega_l^2}}U_1(\omega_k,\omega_l) - \dfrac{\pi G}{H+h}e^{-(H+h)\sqrt{\omega_k^2+\omega_l^2}}U_2(\omega_k,\omega_l) = F(\omega_k,\omega_l,-h), \end{cases} \tag{3.12}$$

где $k,l = 0,1,\ldots,N-1$.

Представим системы (3.12) в матричном виде

$$A(k,l)Y(k,l) = F(k,l), \quad k,l = 0,1,\ldots,N-1, \tag{3.13}$$

где $F(k,l) = \big(F(\omega_k,\omega_l,0), F(\omega_k,\omega_l,-h)\big)$, построение матриц $A(k,l)$ очевидно.

Приближенное решение систем уравнений (3.13) ищется итерационным методом:

$$Y_{m+1}(k,l) = \alpha Y_m(k,l) + (1-\alpha)\big(Y_m(k,l) - \beta_{kl}\big(A^*(k,l)A(k,l)Y_m(k,l) - A^*(k,l)F(k,l)\big), \tag{3.14}$$

где $m = 0,1,\ldots,$ $k,l = 0,1,\ldots,2N-1$, $0 < \alpha < 1$.

Параметр β_{kl} выбирается из требования, чтобы $\beta_{kl} = \frac{1}{2\|A^*(k,l)A(k,l)\|}$. Обоснование сходимости последовательности (3.14) в l_2 проводится на основе утверждений работ [13], [15]. Значения функций u_1 и u_2 находятся по кубатурным формулам обратного преобразования Фурье.

Пример 3.2. *Найти решение системы уравнений* (3.9) *итерационным методом* (3.13)-(3.14).

Результаты решения представлены на рисунках 3.1 и 3.2 . Здесь $\Omega_1 = [-A,A]^2$ *– область определения функций* $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, $f(x,y)$; $\Omega_2 = [-B,B]^2$ *– область определения функции* $U_1(\omega_1,\omega_2)$, $U_2(\omega_1,\omega_2)$, $F(\omega_1,\omega_2)$. *Пусть* $\{x_i,x_j\}$ *– узлы построенной в* Ω_1 *равномерной сетки, где* $x_i = -A + 2i\frac{A}{N_1}$, $i = 0,1,\ldots,N_1$. *Пусть* $\{\omega_k,\omega_l\}$ *– узлы построенной в* Ω_2 *равномерной сетки, где* $\omega_k = -B + 2k\frac{B}{N_2}$, $k = 0,1,\ldots,N_2$. *Обозначим через* M *число итераций метода* (3.14), *через* ϵ_φ (ϵ_σ) *– абсолютную погрешность восстановления функции* ϕ (σ).

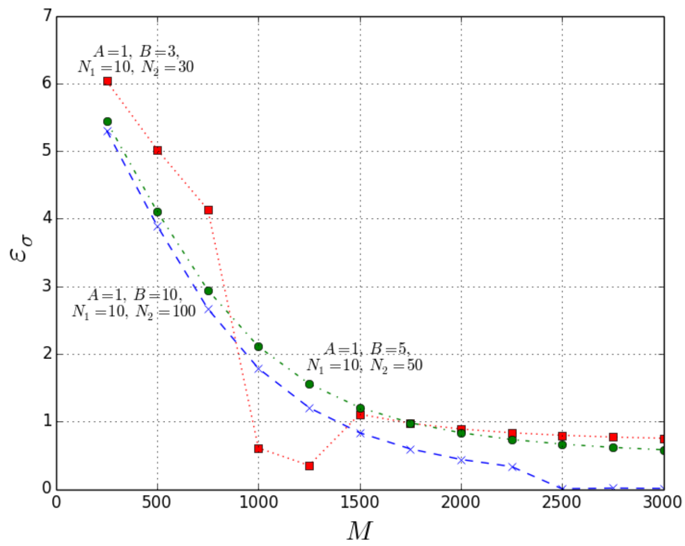


Рисунок ***3.1***

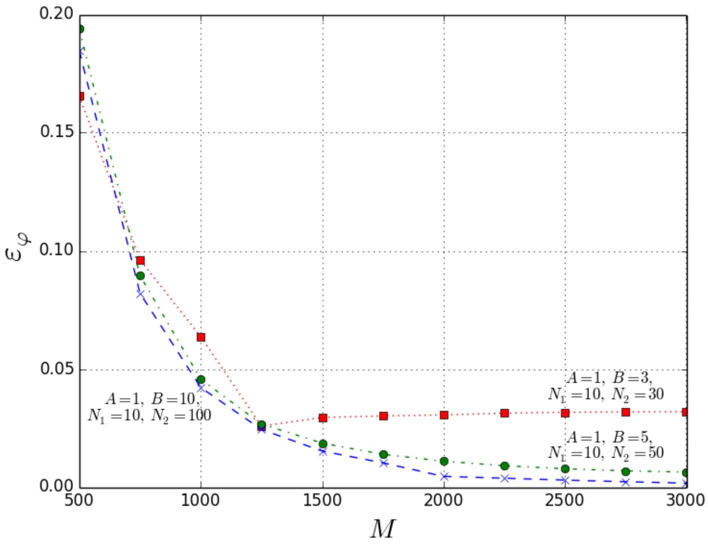


Рисунок *3.2*

Список литературы

1. Гласко В. Б., Остромогильный А. Х., Филатов В. Г., “О восстановлении глубин и формы контактной поверхности на основе регуляризации”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **10**:5 (1970), 1292–1297.

2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974.

3. Мудрецова Е. А., *Гравиразведка*, Недра, М., 1990.

4. Старостенко В. И., *Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии*, Наукова думка, Киев, 1978.

5. Филатов В. Г., “Применение метода Тсубои в обратных задачах гравиразведки”, *Прикладная геофизика*, 1972, № 68, 147–152.

6. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В., “Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. I”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1992, № 6, 48–58.

7. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В., “Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. III”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1993, № 7, 57–66.

8. Бойков И. В., Мойко Н. В., “Об одном итерационном методе решения обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1999, № 2, 52–56.

9. Бойков И. В. Бойкова А. И., “Об одном параллельном методе решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии”, *Известия РАН. Физика Земли*, 2009, № 3, 73–82.

10. Пруткин И. Л., “О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок”, *Известия АН СССР. Физика Земли*, **1** (1983), 53–58.

11. Мартышко П. С., “Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных”, *Известия РАН. Физика Земли*, 2010, № 11, 23–35.

12. Prutkin I., Saleh A., “Gravity and magnetic data inversion for 3D topography of the Mono discontinuity in the northern Red Sea area, Egypt”, *Journal of Geodynamics*, 2009, № 47, 237–245.

13. Бакушинский А. Б., Страхов В. Н., “О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **8**:1 (1968), 181–185.

14. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2008.

15. Обломская Л. Я., “О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **8**:2 (1968), 417–426.

Approximation methods for simultaneous reconstruction of shape and density of the body in the inverse potential problem.

© **I. V. Boikov**[3], **V. A. Ryazantsev**[4]

Abstract. Analytical and approximation methods for simultaneous reconstruction of shape and density of the body in the inverse potential problem are offered

Key Words: logarithmic potential, Newtonian potential, inverse problem, simultaneous recovery.

[3] Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru.

[4] Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; ryazantsevv@mail.ru

В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.9

Построение математической модели процесса дегидрирования метилбутенов в изопрен с учетом дезактивации катализатора

© Д. В. Берзина[1], С. А. Мустафина[2]

Аннотация. Построена математическая квазистационарная неизотермическая модель процесса дегидрирования метилбутенов в изопрен для адиабатического реактора с неподвижным слоем катализатора, которая учитывает изменение числа молей в газовой фазе и дезактивацию катализатора.

Ключевые слова: синтетический каучук, дегидрирование метилбутенов, кинетическая модель, квазистационарная модель, дезактивация

1. Введение

Процесс дегидрирования углеводородов C_5H_{10} состоит в последовательном превращении изопентана в метилбутены и смеси последних – в изопрен в присутствии оксидных железокалиевых катализаторов. При эксплуатации в течение нескольких тысяч часов в промышленном реакторе железокалиевый катализатор постепенно теряет активность и частично разрушается. В промышленной эксплуатации катализатор периодически активируют путем термообработки в среде водяного пара, однако частые регенерации нежелательны, так как приводят к постепенному изменению фазового состава катализатора в цикле: реакция – регенерация [1]. Поэтому актуальным является совершенствование существующих процессов производства изопренов на основе доступного углеводородного сырья, в частности построение новых математических моделей, позволяющих прогнозировать свойства получаемых продуктов.

При обработке экспериментальных данных по исследуемому процессу изомеры пентана объединяли в групповой компонент $i-C_5H_{12}$, метилбутены – в компонент $i-C_5H_{10}$, изомеры изопрена – в компонент $i-C_5H_8$, продукты крекинга – в компонент ПК.

На основе анализа данных эксперимента и литературы [2] была предложена четырехстадийная схема превращений процесса дегидрирования углеводородов C_5. Схема и соответствующие ей кинетические уравнения скоростей имеют следующий вид:

$$i-C_5H_{12} \leftrightarrow i-C_5H_{12}+H_2, \tag{1.1}$$

$$i-C_5H_{10} \leftrightarrow i-C_5H_8+H_2, \tag{1.2}$$

$$i-C_5H_8 \to \nu_1\{KOKC\}+\nu_2H_2+\nu_3, \tag{1.3}$$

[1] Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак.

[2] Заведущий кафедрой математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак.

$$\frac{1}{2}C\{KOKC\} + H_2O \to \frac{1}{2}CO_2 + H_2, \tag{1.4}$$

На свежем катализаторе скорость реакции записывается по известным правилам, основанным на теории стационарных реакций, т.е. в стационарном режиме скорость реакции r^0 равна скорости любой из стадий механизма r_j^0. Тогда для реакций, протекающих по линейным механизмам, скорость реакции, сопровождающаяся дезактивацией, записывается в виде системы уравнений:

$$r = r^0 a(t), \tag{1.5}$$

$$-\frac{da}{dt} = \frac{r^0}{w_j} w_P a + w_R(1-a), \tag{1.6}$$

где w_j – вес выбранной стадии, a – относительная активность, w_P - вес стадии дезактивации, w_R - вес стадии саморегенерации.

2. Построение математической модели

Приняв для реакций системы (1.1)-(1.4) в качестве лимитирующих стадий поверхностные реакции, получим кинетические уравнения скоростей химических реакций на свежем катализаторе в виде системы:

$$r_1^0 = \frac{k_{+1}C_1 - k_{-1}C_2C_4}{(1 + b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)^2}, \tag{2.1}$$

$$r_2^0 = \frac{k_{+2}C_2 - k_{-2}C_3C_4}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2}, \tag{2.2}$$

$$r_3^0 = \frac{k_3C_3}{1 + b_3C_4}, \tag{2.3}$$

$$r_4^0 = \frac{k_4}{1 + b_4C_4}, \tag{2.4}$$

где C_i – концентрации компонентов (моль/л), индексация компонентов по i: 1 – изопентан, 2 – метилбутены, 3 – изопрен, 4 – водород, 5 – продукты скелетных превращений (или продукты крекинга – ПК), 6 – диоксид углерода; r_j^0 – скорости химических реакций в стационарном режиме (кмоль/м^3 ч); k_i – константы скоростей реакций; b_i – коэффициенты адсорбции (м^3/кмоль).

Для представленной схемы (1.1)-(1.4) согласно (1.6) уравнение дезактивации будет иметь вид:

$$-\frac{da}{dt} = \frac{k_3C_3}{1 + b_3C_4} a - k_4(1-a). \tag{2.5}$$

Таким образом, кинетическую модель процесса дегидрирования метилбутенов в изопрен с учетом дезактивации катализатора можно представить системой уравнений:

$$r_1 = \frac{k_{+1}C_1 - k_{-1}C_2C_4}{(1 + b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)^2} a, \tag{2.6}$$

$$r_2 = \frac{k_{+2}C_2 - k_{-2}C_3C_4}{(1 + b_{21}C_2 + b_{22}C_3 + b_{23}C_4)^2} a, \tag{2.7}$$

$$r_3 = \frac{k_3 C_3}{1 + b_3 C_4} a, \tag{2.8}$$

$$r_4 = \frac{k_4}{1 + b_4 C_4} a, \tag{2.9}$$

$$-\frac{da}{dt} = \frac{k_3 C_3}{1 + b_3 C_4} a - k_4 (1 - a). \tag{2.10}$$

Для изучения закономерностей дегидрирования метилбутеновой фракции в реакционной системе газ-твердый катализатор построим математическую модель, которая будет учитывать увеличение числа молей в газовой фазе и дезактивацию катализатора. Математическое описание неизотермического процесса дегидрирования метилбутенов в адиабатическом реакторе с неподвижным слоем катализатора представляется системой уравнений материального и теплового балансов.

Материальный баланс дегидрирования углеводородов C_5 в изотермическом реакторе идеального вытеснения описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\xi} = \frac{F_i - x_i F_N}{\mathbf{N}}, \quad i = \overline{1,6}, \quad F_i = \sum \nu_{ij} \omega_j, \quad j = \overline{1,4}, \tag{2.11}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = F_N = \sum \delta_j \omega_j, \quad j = \overline{1,4}, \quad \delta_j = \sum \nu_{ij}, \quad i = \overline{1,6}, \tag{2.12}$$

с граничными условиями при $\xi = 0 : x_i = x_i^0, N = 1$, где $\xi = \frac{V}{V_P}$ – безразмерный объем реактора, V_P - реакционный объем, м ^{3} , $\mathbf{N} = \frac{N}{N_0}$ – относительное изменение числа молей реакционной среды, $\omega_j = r_j \frac{V_P}{N_0}$.

Тепловой баланс процесса дегидрирования определяется уравнением:

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{1}{C_P} \sum Q_j \omega_j, \tag{2.13}$$

где C_P – мольная плотность реакционной смеси (Дж/моль К), Q_j – тепловые эффекты реакций (кДж/моль).

Обезразмеривая V и $\mathbf{N}$, получим следующие уравнения для кинетических скоростей реакций:

$$-\frac{da}{dt} = \frac{k_3 \tau_k z_3}{1 + b_3 C_0 z_4} a - k_4 (1 - a), \tag{2.14}$$

$$\omega_1 = \frac{k_{+1} \tau_k z_1 - k_{-1} \tau_k z_2 z_4 C_0}{(1 + b_{11} C_0 z_1 + b_{12} C_0 z_3 + b_{13} C_0 z_4)^2} a, \tag{2.15}$$

$$\omega_2 = \frac{k_{+2} \tau_k z_2 - k_{-2} \tau_k z_3 z_4 C_0}{(1 + b_{21} C_0 z_1 + b_{22} C_0 z_3 + b_{23} C_0 z_4)^2} a, \tag{2.16}$$

$$\omega_3 = \frac{k_3 \tau_k z_3}{1 + b_3 C_0 z_4} a, \tag{2.17}$$

$$\omega_4 = \frac{k_4 \tau_k}{1 + b_4 C_0 z_4} a, \tag{2.18}$$

где

$$z_i = x_i \mathbf{N}, \quad (i = \overline{1,4}), \quad \tau_k = \frac{V_P \rho_c 10^3}{\rho_0 U_0 (1 + n \frac{18}{\sum x_i^0 M_i})}, \tag{2.19}$$

где V_P – реакционный объем (м^3), ρ_c – плотность смеси на входе в реактор (кг/м^3), ρ_0 – плотность сырья (кг/м^3), U_0 – скорость подачи сырья (м^3/ч), $1:n$ – соотношение сырья и водяного пара в смеси, M_i – молекулярная масса i-го вещества.

На основании зависимостей (2.11)-(2.14) для изучения закономерностей процесса дегидрирования метилбутенов в адиабатическом реакторе с неподвижным слоем катализатора разработана математическая квазистационарная неизотермическая модель, которая учитывает изменение числа молей в газовой фазе и дезактивацию катализатора за счет реакций (1.1)-(1.4).

Список литературы

1. Аминова Л. З., Баженов Ю. П., *Промышленность СК*, **1**:1 (1998), 3.

2. Ильин В. М., Балаев А. В., Касьянова Л. З., Сайфуллина А. А., “Моделирование процесса дегидрирования бутенов в адиабатическом реакторе в неподвижным слоем железокалиевого катализатора КД-1”, *Катализ в промышленности*, **6**:5 (2006), 42–47.

3. Мустафина С. А., Смирнов Д. Ю., Балаев А. В., Спивак С. И., “Моделирование каталитического процесса дегидрирования метилбутенов”, *Системы управления и информационные технологии*, **5**:1 (2006), 10–14.

4. Островский Н. М., *Дезактивации катализаторов. Математические модели и их применение*, Наука, М., 2001, 334 с.

The mathematical model of the process of dehydrogenation of methylbutanol in isoprene taking into account deactivation of the catalyst.

© D. V. Berzina[3], S. A. Mustafina[4]

Abstract. The mathematical quasistationary not isothermal model of process of dehydrogenation of methylbutenes in an isoprene for the adiabatic reactor with a nekpodvizhny layer of the catalyst which considers change of number of moths in a gas phase and catalyst deactivation is constructed.
Key Words: synthetic rubber, dehydrogenation of methylbutenes, kinetic model, quasistationary model, deactivation.

[3] Senior lecturer of mathematical modeling,Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak.
[4] Head of Mathematical Modelling Chair, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak.

УДК 517.9

О топологической классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях при помощи функции Ляпунова

© Е. Я. Гуревич[1], Е.Д. Куренков[2]

Аннотация. Для потоков Морса-Смейла на поверхностях вводится понятие согласованной эквивалентности ξ-функций Мейера (являющихся функциями Ляпунова) и доказывается, что согласованная эквивалентность ξ-функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности таких потоков. Предлагаемый результат устраняет неточность в доказательстве аналогичного факта К. Мейером.

Ключевые слова: структурно-устойчивые потоки на поверхностях, потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, функция Ляпунова

Введение

А.М. Ляпунов разработал метод исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании локальной функции, убывающей вдоль траекторий потока, и получившей название функции Ляпунова. Обобщением этой функции является *глобальная функция Ляпунова*, определяемая для структурно устойчивого потока f^t, заданного на замкнутом гладком n-многообразии M^n следующим образом.

Определение 1.1. *Непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова потока f^t на M^n, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ *для любой блуждающей точки* $x \in M^n$ *и любого* $t > 0$.
2. $\varphi(f^t(x)) = \varphi(x)$ *для любой неблуждающей точки* $x \in M^n$.

Из работы [2] Ч. Конли следует, что функция Ляпунова существует для любого структурно-устойчивого потока. Из работы[9] В. Вильсона и Дж. Йорке следует, что любой структурно-устойчивый поток обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы. Для потоков Морса-Смейла удается уточнить свойства энергетической функции и использовать ее как топологический инвариант. Для точных формулировок напомним некоторые определения.

Точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* C^2-гладкой функции $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, если $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|_p = 0$ для любого $i \in 1, ..., n$ в локальных координатах $x_1, ..., x_n$ в окрестности точки p.

Обозначим через Δ множество всех критических точек этой функции и через $\Delta_i \subset \Delta$ — множество критических точек функции φ, в которых гессиан функции φ имеет ровно i собственных значений, равных нулю.

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; elena _ gurevich@list.ru.

[2] Студент факультета экономики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; eugene2402@mail.ru.

Из леммы Морса следует, что Δ_0 представляет собой конечное множество точек (называемых *невырожденными*), причем для каждой точки $p \in \Delta_0$ существует окрестность N_p и гомеоморфизм $h_p : N_p \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\varphi \circ h_p^{-1} = \varphi(p) + Q(x),$$

где Q — невырожденная квадратичная форма в координатах $(x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{R}^n$, индекс которой совпадает с индексом матрицы Гессе функции φ в точке p[3].

Функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если $\Delta = \Delta_0$ (то есть все ее критические точки невырождены).

К. Мейер в работе [4] обобщил понятие функции Морса, определив ξ-функцию следующим образом.

Определение 1.2. *Функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ называется ξ-функцией, если φ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$.

2. *Множество Δ_1 является объединением конечного множества замкнутых дуг (гомеоморфных образов окружности), и для любой дуги $\gamma \in \Delta_1$ индексы матрицы Гессе в произвольных точках $p, q \in \gamma$ совпадают.*

3. *Для любой дуги $\gamma \in \Delta_1$ существует окрестность N_γ и диффеоморфизм h_γ из N_γ на локально-тривиальное расслоение над окружностью $\mathbb{S}^1$ со слоем диск $\mathbb{B}^{n-1}$ (если N_γ ориентируема, то $h_\gamma(N_\gamma) = \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$), такие, что $\varphi \circ h_\gamma^{-1} = \varphi(\gamma) + Q(y)$, где $Q(y)$ представляет собой невырожденную квадратичную форму от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ (координаты в $\mathbb{B}^{n-1}$) и периодическую функцию переменной y_m (координата в $\mathbb{S}^1$). Кроме того, в любой точке $\mathbb{S}^1$ индекс квадратичной формы Q совпадает с индексом матрицы Гессе функции φ на множестве γ.*

Напомним, что гладкий поток f^t на многообразии M^n называется *потоком Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком.*

Из работы [7] С. Смейла (Th B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ со следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса.

2. $\varphi(p) = dim\ W_p^u$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

К. Мейер в работе [4] доказал, что для произвольного потока Морса-Смейла f^t на M^n существует C^∞-гладкая энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ следующими свойствами:

---

[3] Индексом квадратичной формы $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^2$ называется число отрицательных элементов из множества коэффициентов $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Индексом матрицы Гессе называется число её отрицательных собственных чисел.

1. Функция φ является ξ-функцией.

2. Множество Δ_0 совпадает с множеством всех неподвижных точек потока f^t, множество Δ_1 совпадает с множеством предельных циклов.

3. Существует константа $\varkappa > 0$ такая, что в любой окрестности N_δ, $\delta \in \Delta$, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}\Big|_x$ по направлению, задаваемому потоком в произвольной точке $x \in N_\delta$, удовлетворяет неравенству
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial l}\Big|_x \geq \varkappa d(x,\delta)^2,$$
где $d(x,\delta)$ — евклидова метрика в локальных координатах.

4. $\varphi(x) = dim\, W^u_x$ для любой точки $x \in \Omega_f$.

Будем называть такую функцию *энергетической* ξ*-функцией* потока Морса-Смейла.

Для привлечения энергетической ξ-функции к решению проблемы топологической классификации потоков Морса-Смейла напомним следующие определения.

Определение 1.3. *Потоки f^t, f'^t на многообразии M^n называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях.*

Определение 1.4. *Две гладкие функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\varphi' H = \chi\,\varphi$.*

В работе [4] (proposition) доказано, что топологически эквивалентные потоки Морса-Смейла имеют топологически эквивалентные энергетические ξ- функции. Для случая $n = 2$ утверждалось, что верно и обратное утверждение. А. А. Ошемков и В. В. Шарко в работе [5] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла на торе, имеющих эквивалентные энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиентно-подобных потоков. А. А. Ошемкову и В. В. Шарко принадлежит завершающий результат по полной топологической классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях. В различных предположениях общности эта проблема решалась А.А. Андроновым, Е.А. Леонтович, А.Г. Майером и М. Пейшото, а также Дж. Флейтасом (см. работы [1], [3], [6], [8]). Во всех перечисленных работах для решения проблемы топологической классификации использовались комбинаторные инварианты, описывающие взаимное расположение особых траекторий (сепаратрис седловых периодических точек и предельных циклов) в фазовом пространстве.

Между тем, в прикладных задачах функция Ляпунова структурно-устойчивого потока часто известна из физических соображений, и тогда её привлечение к решению задачи топологической классификации представляется более естественным, нежели использование комбинаторных инвариантов.

Цель настоящей статьи состоит в уточнении результата Мейера и получении критерия топологической сопряженности потоков Морса-Смейла в терминах энергетических ξ-функций.

2. Формулировка результата

Пусть γ — предельный цикл потока f^t периода τ_γ, $x_0 \in \gamma$ — произвольная точка, $x_1 = f^{t_1}(x_0), x_2 = f^{t_2}(x_0)$, $0 < t_1 < t_2 < \tau_\gamma$. Точки x_0, x_1, x_2 задают ориентацию предельного цикла γ, которую будем называть *ориентацией, индуцированной потоком* f^t. Пусть γ' — предельный цикл потока f'^t, на котором определена ориентация, индуцированная потоком f'^t. Будем говорить, что гомеоморфизм $h : \gamma \to \gamma'$ является сохраняющим ориентацию, если ориентация на предельном цикле γ', определенная точками $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$, совпадает с ориентацией, индуцированной потоком f'^t.

Определение 2.1. *Пусть f^t, f'^t — потоки Морса-Смейла, φ, φ' — энергетические ξ-функции потоков f^t и f'^t соответственно. Функции φ, φ' называются согласованно эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f'H = \chi f$, и для любого предельного цикла $\gamma \in \Delta_1$ ограничение $H|_\gamma$ гомеоморфизма H на γ является сохраняющим ориентацию.*

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы два потока Морса-Смейла f^t и f'^t, заданные на ориентируемом многообразии M^2, были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их энергетические ξ-функции φ и φ' были согласованно эквивалентными.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 13-01-12452-офи-м и 12-01-00672-а.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., "Грубые системы", *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247-250.

2. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).

3. Леонтович Е. А., Майер А.Г., "О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории", *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557 - 560.

4. Meyer K.R., "Energy Functions for Morse-Smale Systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

5. Ошемков А.А., Шарко В.В., "О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях", *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.

6. Peixoto M., "On the classification of flows on two-manifolds", *Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil,- M. Peixoto (ed.) N.Y.London: Acad. press*, 1973, 389 - 419.

7. Smale S., "On Gradient Dynamical Systems", *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.

8. Fleitas G., "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183.

9. Wilson W., Yorke J., “Lyapunov functions and isolating blocks”, *JDE*, **13** (1973), 106–123..

On topological classification of Morse-Smale flows on surfaces by means of Lyapunov function

© **E. Ya. Gurevich[4], E.D. Kurenkov[5].**

Abstract. We introduce the definition of consistent equivalence of Meyer ξ-functions for Morse-Smale flows on surfaces (that are Lyapunov functions) and state that consistent equivalence of ξ-functions is necessary and sufficient condition for such flows.

Key Words: structurally stable flows on surfaces, Morse-Smale flows, Lyapunov function, topological equivalence, topological classification

[4] Associated Professor, National Research University Higher School of Economics, elena _ gurevich@list.ru.
[5] Student, National Research University Higher School of Economics,eugene2402@mail.ru.

УДК 517.4

Анализ математических моделей для расчета геомеханических параметров бурения

© **О. Ю. Забейворота**[1], **И. М. Губайдуллин**[2]

Аннотация. При разработке нефтяных месторождений наиболее точное знание прочности породы необходимо для грамотного определения напряжения на месте залегания, анализа стабильности ствола скважины и других параметров, необходимых при бурении. Добыча, бурение изменяют напряжение в пластах. Если не учитывать эти изменения, то возникает ряд проблем при эксплуатации месторождения. Геомеханические характеристики напряжения позволяют предсказывать осложнения, которые могут возникнуть во время разработки месторождения.

Ключевые слова: напряжение, давление, прочностный расчет, бурение скважин, буровой раствор

1. Введение

Основная цель проведения прочностных расчетов стенок скважины при бурении нефтяных скважин – определение допустимых давлений при прогнозировании и разработке мер предупреждения ряда осложнений [1]. Эти проблемы могут снизить скорость проходки скважин, что приведет к большим затратам по времени и средствам при устранении неполадок. Задачам предупреждения подобных осложнений уделяется особое внимание. Данная проблема актуальна не только в нашей стране, но и за рубежом.

При разработке нефтяных месторождений знание прочности породы необходимо для грамотного определения напряжения на месте залегания, анализа стабильности ствола скважины и других параметров, необходимых при формировании скважины и дальнейшей ее эксплуатации. Вскрытие пласта, добыча, бурение изменяют напряжение.

Основные виды осложнений:

- обвалы, осыпи, пластическое деформирование незакрепленных стенок скважины;
- раскрытие поглощения бурового раствора;
- приток пластовых флюидов.

Нарушение устойчивости ствола скважин, обусловленное наличием в разрезе высококоллоидальных глин, является основополагающей причиной осложнений и аварий как эксплуатационного, так и разведочного бурения [2]. Данная проблема часто усугубляется вскрытием зон тектонической перемятости и большим углом залегания горных пород.

Кроме того, проблема не является решенной в полной мере, так как и по сей день возникают обвалы и осыпи. Необходима разработка методик по прогнозированию возможного возникновения осложнений.

[1] Магистрант первого года обучения, Башкирский государственный университет, г. Уфа; zabeivorota.olga@gmail.com.

[2] Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа, г. Уфа; IrekMars@mail.ru.

2. Анализ некоторых существующих методик

На начальном этапе работы был проведен обзор существующих методов моделирования, расчета основных геомеханических параметров.

В основе существующих методик лежит учет свойств горной породы (неконтролируемые параметры) напряжение, горное и поровое давление, прочность породы. Также учитываются свойства бурового раствора (контролируемые параметры): давление жидкости, состав и свойства раствора, гидродинамический перепад давления. Кроме того, необходимо учитывать изменение физико-механических и физико-химических свойств глинистой породы при взаимодействии с буровым раствором.

Методика, описанная в обзоре В.С. Новикова [3], основывается на теории трещин. Минимально допустимое давление в скважине, при котором обеспечивается устойчивость горных пород, соответствует поровому $(P_c = P_n)$, то есть обоснована нижняя граница устойчивости. Однако, в этом случае компенсируется только поровое давление и не учитывается, в каком состоянии и соотношении с горным давлением находится глинистая порода. В случае равенства гидростатического и порового давлений может быть превышена механическая прочность, что приведет к обрушению горной породы.

Область допустимых значений плотности бурового раствора при бурении в упруго вязких горных породах, склонных к хрупкому разрушению, определяются неравенствами:

$$0,5 \cdot \rho_g \cdot \phi(t) \leq \rho_p \leq \frac{\frac{10^(6) \cdot \sigma_p}{qL} + \rho_g[\phi_1(t) - K(1-\mu_0)]}{1+\mu_0 \cdot K} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\rho_g[\phi_1(t) + \mu_0 - 1]}{1+\mu_0} \leq \rho_p \leq 0,5 \cdot \rho_g \phi(t) \qquad (2.2)$$

$$K \cdot \rho_g(1-\mu_0) - \frac{10^(6) \cdot \sigma_0}{qL} \leq \rho_p \qquad (2.3)$$

$$\frac{K \cdot \rho_g \phi(t) - \frac{10^(6) \cdot \sigma_0}{qL}}{1+K} \leq \rho_p \leq [\phi_1(t) + (\mu - 1)] \cdot \rho_g \qquad (2.4)$$

где ρ_g , ρ_p - плотность горной породы и раствора (г/см3); σ_p - предел прочности на растяжение (МПа); σ_0 - напряжение сжатия, при котором порода переходит в пластическое состояние (МПа); $\tau_n r$ - предел прочности горной породы на сдвиг в пластическом состоянии (МПа); μ_0 - коэффициент, учитывающий снижение осевых напряжений на стенках скважины, выражается через коэффициент Пуассона:

$$\mu_0 = \frac{0,4 \cdot \sqrt{\mu_3}}{1-\mu} \qquad (2.5)$$

μ_3 - коэффициент Пуассона при минимальном значении главных напряжений; $\phi_1(t)$ - временная функция, зависящая от параметров ползучести α и β, модуля упругости E, коэффициента Пуассона μ.

$$K = \frac{\sigma_p + \sigma_0 - \tau_{nr}}{\sigma_0 + \tau_{nr}} \qquad (2.6)$$

Данный метод позволяет рассчитывать кратковременную, длительную устойчивость горных пород. Однако, предложенная методика расчета не позволяет достаточно достоверно выбрать оптимальную плотность раствора. В данной модели не учитываются физико-химические факторы взаимодействия глинистой породы с буровым раствором.

Методика, предложенная А.Н. Поповым [4], основывается на теории прочности Мора-Кулона. Для принятия решения о давлении бурового раствора и выборе его плотности используется четыре значения предельных давлений бурового раствора, в диапазоне которых стенки скважины будут находиться в упругом состоянии:

$$p_{sn} < p_c < p_{sb} \tag{2.7}$$

$$p_{cc} < p_c < p_{gr} \tag{2.8}$$

где p_{sn} - ограничение давления бурового раствора снизу (нижняя граница устойчивости)(МПа); p_s – ограничение давления бурового раствора сверху (верхняя граница устойчивости)(МПа); p_{gr} – давление гидроразрыва (МПа); p_c – давление бурового раствора в скважине(МПа); p_{cc} – статическое давление в скважине (выбирается в зависимости от расчетной глубины скважины).

В данном расчете все значения давления приводятся к статическому безразмерному виду путем деления всех давлений на давление столба воды на рассматриваемой глубине.

При привидении давлений к безразмерному виду необходимо ввести поправку $\pm\Delta p$ на максимальные колебания гидродинамического давления в скважине относительно статического при различных технологических операциях.

Предельные величины для плотности бурового раствора:

$$\rho_{0v} = \frac{(p_{sb} - \Delta p)}{p_{cyrv}} \tag{2.9}$$

$$\rho_{0n} = \frac{(p_{sn} + \Delta p)}{p_{cyrv}} \tag{2.10}$$

$$\rho_{0gr} = \frac{(p_{gr} - \Delta p)}{p_{cyrv}} \tag{2.11}$$

$$\rho_{0c} = \frac{p_{cc}}{p_{cyrv}} \tag{2.12}$$

$$\rho_{0n} < \rho_0 < \rho_{0v} \tag{2.13}$$

$$\rho_{0c} < p_0 < p_{0gr} \tag{2.14}$$

$$\rho = \rho_0 \cdot \rho_v \tag{2.15}$$

где ρ - искомое значение плотности (г/м3).

Данная методика хорошо согласуется с экспериментальными данными, если все компоненты главных нормальных напряжений сжимающие. Однако, ее не рекомендуется применять при наличии растягивающих напряжений.

При выводе расчетных формул рассмотрены случаи полной кольматации и отсутствия кольматации стенок скважины. Наиболее адекватными являются данные для пористых горных пород.

Рассмотренный метод не охватывает всего многообразия случаев, возможных при бурении скважины. Кроме того, методика А.Н. Попова имеет ряд погрешностей при расчете в случае горизонтальной стенки скважины.

3. Заключение

Для начального этапа разработки программы была выбрана методика А.Н.Попова. Использованы следующие программные средства: Visual Studio, объектно-ориентированный язык C#. В дальнейшем планируется применить комбинированные методики расчета, учитывая результаты исследований В.С. Новикова и других обзоров данной области.

Список литературы

1. Спивак А. И., *Механика горных пород (применительно к процессам бурения скважин)*, Недра, Москва., 1967.
2. Попов А. Н., Могучев А. И., Булюкова Ф. З., Крысин Н. И., *Методика расчета упругого смещения стенок скважины после вскрытия горной породы бурением*, УГНТУ, Уфа., 2011.
3. Новиков В. С., Родимов Л. В., Новиков А. С., "Повышение эффективности управления строительством скважин", *Нефтяное хозяйство*, **5** (2010), 108–111.
4. Попов А. Н., Головкина Н. Н., *Прочностные расчеты стенок скважины в пористых горных породах*, УГНТУ, Уфа., 2001.

Analysis of mathematical models for the calculation of geomechanical drilling parameters

© O. Y. Zabeivorota[3], I. M. Gubaidullin[4]

Abstract. In the oil fields developing it is necessary to know the strength of the rock for competent voltage detection in situ, the analysis of wellbore stability and other parameters. Knowing these parameters is required for the formation of the well and further operations such as mining and drilling voltage change in formations. There are several types of complications: landslides, debris, disclosure of drilling mud, fluid inflow. The main reason for such manifestations is the excess pressure in the reservoir relative to the borehole. When opening, a hole space is replaced with a washing liquid, which changes the thermal stress.

Key Words: stress, pressure, strength calculations, drilling, drilling mud

[3] Master student first year, Bashkir State University, Ufa; Zabeivorota.olga@gmail.com.

[4] Senior Research Associate in the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; IrekMars@mail.ru.

УДК 517.929

Новый метод вычисления ранга матрицы

© В. И. Зубов [1], И. В. Зубов [2], А. Ф. Зубова [3]

Аннотация. В работе предлагаются новые методы построения решений и псевдорешений систем линейных алгебраических уравнений с вырожденной матрицей. Эти методы позволяют для совместных и несовместных систем линейных алгебраических уравнений находить решения или псевдорешения этих систем в пределах точности представления чисел в компьютере и свободны от ошибок округления. Предлагается также новый метод вычисления ранга матрицы.

Ключевые слова: вектор, матрица, коэффициент, положение равновесия, подпространство, итерационный процесс, линейная независимость

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = B, \tag{1.1}$$

где матрица A размера $n \times m$ ($m \le n$) и вектор B размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными.

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы A равен m, то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \to C^T C = X^T A^T A X = \|C\|^2 > 0 \to A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица A имеет ранг равный m

$$\dot{X} = -A^T A X + A^T B. \tag{1.2}$$

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Положение равновесия системы* (1.2) *является решением системы* (1.1) *или ее псевдорешением.*

Доказательство. Так как матрица $-A^T A X$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T A C + A^T B = 0 \,\text{или}\, C = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{1.3}$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (1.1) получено.

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор B в виде разложения по подпространствам, одно из которых L_1, является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы A, а второе L_2, является ортогональным дополнением первого, т. е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (1.3) примет вид:

$$-A^T A C - A^T (B_1 + B_2) = -A^T A C + A^T B_1 = 0$$

или

[1] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{1.4}$$

Покажем, что найденная величина C, является псевдорешением уравнения (1.1), т. е. имеет место неравенство

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|,\ X \neq C,$$

где $\| \, \|$ - евклидова норма. Это будет и означать, что квадратичное отклонение $\|AX-B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [1]. Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX,\ U + V = B - AX,$$

тогда

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т. е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того, чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A^{-1}) A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (1.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A) X_k + hA^T B, \tag{1.5}$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (1.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления точности чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (1.5) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (1.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (1.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большего порядка (Рунге - Кутта и т.д.) не является необходимым, т. к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

Рассмотрим теперь случай, когда столбцы матрицы A - линейно зависимы. Для того, чтобы найти решение (псевдорешение) уравнения (1.1) достаточно найти линейно независимые столбцы матрицы A и использовать процедуру предложенную выше.

Для этого обозначим столбцы матрицы A через $A_1, A_2, \dots, A_m$ и рассмотрим двухстолбцовую матрицу (A_1, A_2). Если матрица $(A_1, A_2)^T(A_1, A_2) > 0$, то тогда векторы линейно независимы. В противном случае проверим матрицу $(A_1 A_3)^T(A_1 A_3)$ и т.д.

Допустим столбцы A_1 и A_2 линейно независимы. Далее будем рассматривать матрицу $(A_1, A_2, A_3)^T \ (A_1, A_2, A_3)$ и проверять ее положительную определенность. Действуя таким же образом, в конце концов, найдем все линейно независимые столбцы матрицы $A : A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и для матрицы $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = \bar{A}$ будем искать решение (псевдорешение) уравнения

$$\bar{A}X = B, \tag{1.6}$$

которое и будет одним из решений (псевдорешений) уравнения (1.1).

Теорема 1.2. *Ранг матрицы A размера $n \times m$ равен рангу неотрицательной матрицы $A^T A$, т. е. совпадает с числом ее положительных собственных чисел.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r, тогда согласно формуле Бине - Коши [1] $rank A^T A \leq r$. Нетрудно видеть, что матрица $A^T A$ - неотрицательная, т. к.

$$\forall x \neq 0 \quad AX = C \to C^T C = X^T A^T A X = \|C\|^2 \geq 0 \to A^T A \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что все собственные числа матрицы $A^T A$ - неотрицательные.

Обозначим матрицу, образованную $r-$ линейно независимыми столбцами матрицы A с номерами $i_1, \dots, i_r$, как матрицу B. Тогда, как было показано выше $B^T B > 0$ и, следовательно, ее ранг равен r.

Так как матрица $B^T B$ стоит на пересечении $i_1, \dots, i_r$ строк и $i_1, \dots, i_r$ столбцов матрицы $A^T A$, $rank A^T A \geq rank B^T B = r$. Это означает, что $r = rank A^T A$. Так как матрица $A^T A$ неотрицательна, то r ее собственных чисел положительны, а остальные равны нулю.

Следствие 1.1. *Из теоремы 1.1. вытекает новый вычислительный метод определения ранга матрицы A. Достаточно построить симметричную матрицу $A^T A \geq 0$ и методом Лагранжа и Якоби привести к каноническому виду $Q^T A^T A Q = \Lambda$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. В силу закона инерции квадратичных форм $\Lambda \geq 0$, а ее ранг равен числу положительных диагональных элементов и равен рангу матрицы $A^T A$ и соответственно, матрицы A.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. В.В. Воеводин Ю.А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М, 1984.

2. И.В. Зубов, “Свойства дифференциальных уравнений минимизации функционалов в гильбертовом пространстве”, Математические методы оптимизации и управления в сложных системах (Межвуз. темат. сб. / отв. ред. Ю.А. Абрамов.), 1982, 24-27.

The new method of calculating rank of matrix

© **V. I. Zubov [4], I. V. Zubov [5], A. F. Zubova [6]**

Abstract. In work is supposes the new methods of building the solutions and pseudo solutions of systems linear algebraic equations with born matrix. This methods is allows for joint and unjoint systems linear algebraic equations is finds the solutions or pseudo solutions this systems in limits exactness presentation the numbers in computer and is free from mistakes of districtness. Is supposes also new method of calculating of rank matrix.

Key Words: vector, matrix, coefficient, solution of equilibrium, subspace, iteration process, linear independent

[4] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Способ приведения трехмерной квадратичной системы к одному уравнению второго порядка

© А. Ф. Зубова[1], В. И. Зубов[2], И. В. Зубов[3], С. А. Стрекопытов[4]

Аннотация. В данной статье рассмотрен способ приведения трехмерной системы дифференциальных уравнений к одному уравнению второго порядка. Проведено исследование простых по структуре дифференциальных уравнений, разработана технология построения простых квадратичных систем, обладающих заданными предельными свойствами, важными в задачах управления.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, частный интеграл, управляемые системы

Необходимым математическим аппаратом описания динамических процессов являются системы дифференциальных уравнений. Поэтому задачи современной автоматики, то есть задачи создания новых эффективных систем управления различными технологическими комплексами и техническими объектами, обусловливают развитие методов исследования линейных и нелинейных систем обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования систем автоматического управления. Задачи управления на протяжении последних десятилетий были основными «потребителями» достижений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории нелинейных колебаний. Задача прогнозирования поведения моделируемых систем в количественном плане сводится к численному интегрированию уравнений динамики. В качественном плане - к аналитическому исследованию системы для установления структурных особенностей моделируемой системы - наличия инвариантных множеств, характера предельного поведения решений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + z + xz, \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = \frac{1}{2}x^2 + C$, где $C = const$. В связис этим систему (1.1) можно привести к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = C + (1 + C)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \tag{1.2}$$

Умножим обе части (1.2) на $\dot{x}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. Получим

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = C_1 + Cx + \frac{1}{2}(1 + C)x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \quad (C_1 = const). \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Извлечем квадратный корень и проинтегрируем снова; получим

$$\int \frac{4}{\sqrt{2C_1 + 2Cx + (1+C)x^2 + x^3/3 + x^4/4}} = t + C_2 \quad (C_2 = const). \tag{1.4}$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.4), является гиперэллиптическим [1]. Гиперэллиптические функции, появляющиеся при обращении этого интеграла, когда мы хотим явно выписать решение $x(t)$ системы (1.1), характеризуются наличием нескольких периодов, которые зависят от начальных данных. Рассмотрим еще одну систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= xz + a, \\ \dot{z} &= 4xy + 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = 2x^2 + t + c$, что позволяет привести (1.5) к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = 2x^3 + (t + C)x + a. \tag{1.6}$$

С помощью подстановки $x = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(t+C)$ это уравнение приводится к нормальному виду Пенлеве [2]

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha. \tag{1.7}$$

Пенлеве показал, что решения уравнения (1.7) описываются принципиально новыми трансцендентными функциями, которые не сводятся к ранее изученным функциям и которые стали называть *трансцендентными функциями Пенлеве* [3]. Ученик Пенлеве Ж. Шази (1882-1955) изучал, в частности, уравнение

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2, \tag{1.8}$$

к которому приводится квадратичная система

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = 2xz - 3y^2.$$

Шази установил, что интеграл столь простого по виду уравнения имеет весьма сложные особенности и связан с интегралами гипергеометрического уравнения и функциями Шварца. Приведенные примеры показывают, что решения систем дифференциальных уравнений простой структуры могут иметь чрезвычайно сложную аналитическую природу. "Простота"структуры квадратичных систем, описывающих системы со странными аттракторами, также указывают на это. В практических задачах построения уравнений управляемого движения наиболее важным является требование их аналитической простоты. Это связано с возможностью их инженерной реализации. Поэтому важной представляется разработка технологии построения «простых» (например, квадратичных) систем, обладающих заданными предельными свойствами, важными в задачах управления. Важнейшим таким свойством является наличие автоколебания или совокупности автоколебаний (аттрактора), имеющих заданный или желаемый диаметр. Практически это будет означать, что построенная управляемая система будет иметь предельный режим с заданной геометрической характеристикой, т.е. фазовые переменные будут находиться в желаемых пределах. Как осуществить такое построение? Основным подходом в теории управляемых систем является решение обратной задачи механики, когда по заданным кинематическим элементам движения строятся уравнения динамики системы. Такими кинематическими элементами могут быть заданная траектория или заданная совокупность траекторий (инвариантное множество). Решение обратной задачи механики в полном объеме, по-видимому, впервые было осуществлено И. Ньютоном при открытии закона всемирного тяготения. Н.П. Еругин решил эту задачу в случае заданной интегральной кривой или заданного первого или частного интеграла.

Теорема 1.1. *(Еругин). Для того чтобы система дифференциальных уравнений*

$$\dot{X} = F(X) \tag{1.9}$$

имела частный интеграл $V(X) = 0$*, необходимо и достаточно, чтобы правая часть системы* (1.9) *имела следующий вид:*

$$F = \nabla V \cdot M(V, X) + N(X),$$

где $(\nabla V, N(X)) = 0$*,* $M(0, X) \equiv 0$*. Причем, если поверхноть* $V(X) = 0$ *не имеет точек покоя, то векторная функция* $N(X)$ *не должна обращаться в нуль-вектор на этой поверхности.*

Можно задать желаемое предельное множество в виде замкнутой гладкой компактной поверхности и построить семейство дифференциальных уравнений, имеющих ее в качестве интегральной. Можно построить и такие системы, для которых данная интегральная поверхность будет асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством. Другой вопрос состоит в том, насколько будут просты получаемые уравнения? Ведь даже задавая поверхность в виде эллипсоида, получаем уравнения, не являющиеся простыми. Кроме того, данный класс уравнений ограничен интегрируемым по определению случаем. Поэтому возникает желание использовать и неинтегрируемые системы для построения компактных, простых для инженерной реализации управляемых систем, которые будут иметь заданные геометрические характеристики предельного режима. Хотя аналитическая природа решений такой системы может быть весьма сложной. Пусть $V(X)$, $W(X)$ - положительно определенные функции, обладающие свойствами

$$V(X_1) = 0, \quad W(X_2) = 0, \quad V, W \to \infty$$

при $\|X\| \to \infty$. Пусть на решениях некоторой гипотетической системы дифференциальных уравнений, имеющей продолжаемые решения, а также нулевое решение

$$\dot{X} = F(X), \tag{1.10}$$

выполнено соотношение

$$\dot{V} = -W. \tag{1.11}$$

Тогда из теоремы Ляпунова об устойчивости следует, что система (1.10) имеет асимптотически устойчивое в целом положение равновесия $X = 0$. Пусть V, W суть заданные функции с вышеупомянутыми свойствами. Рассмотрим уравнение

$$\nabla V \cdot F = W. \tag{1.12}$$

Это уравнение определяет класс систем (1.10), на решениях которых выполнено соотношение (1.11). Часть решений этого уравнения определяют системы с продолжаемыми решениями. Именно эти решения и являются интересными в практическом, инженерном смысле. Выбирая из этих решений системы в некотором смысле "простого"вида, мы получаем множество интересующих нас систем. Рассмотрим теперь, следующее уравнение, выполненное на решениях гипотетической системы (1.10):

$$\dot{V} = -W + C \quad (C = const). \tag{1.13}$$

Поскольку все решения (1.10) продолжаемы, то необходимо, чтобы выполнялось условие $C \geq 0$. Система (1.10) будет в этом случае равномерно диссипативной и будет иметь компактный предельный режим - автоколебание или совокупность автоколебаний (аттрактор). По уравнению (1.13) при заданных функциях V, W и контакте C можно построить все дифференциальные системы, на решениях которых выполняется это соотношение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,z), \\ \dot{y} &= g(x,y,z), \\ \dot{z} &= h(x,y,z). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Предположим, что у системы (1.14) существует стационарный интеграл:

$$v(x,y,z) = c, \tag{1.15}$$

где $c = const$. Функция (1.15) удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$v_x f + v_y g + v_z h = 0.$$

Иными словами, вектор $grad(v) = (v_x, v_y, v_z) = \nabla v$ ортогонален вектору (f, g, h). Следовательно, вектор ∇v лежит в подпространстве, ортогональном вектору $f = (f, g, h)$. В качестве базиса этого подпространства можно взять, например, такие векторы:

$$g_1 = (g - h, h - f, f - g),$$

$$g_2 = (g(f-g) - h(h-f), h(g-h) - f(f-g), f(h-f) - g(g-h)).$$

Имеем

$$(f, g_1) = 0,\ (f, g_2) = 0,\ (g_1, g_2) = 0,\ g_2 = f \times g_1.$$

По нашему предположению имеем

$$\nabla v = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2,$$

где μ_1, μ_2 - скалярные функции независимых переменных x, y, z. Если функция v представима в виде $v = v_1 + v_2$, так что выполнено соотношение $\nabla v = \nabla v_1 + \nabla v_2$, а векторы ∇v_1, ∇v_2 коллинеарны соответственно векторам g_1, g_2, то справедливы последующие рассуждения. По нашему предположению функция (1.15) существует, следовательно, хотя бы при одном $i = 1, 2$ имеет нетривиальное решение система уравнений

$$\nabla v_i = \mu g_i, \tag{1.16}$$

где $\mu = \mu(x,y,z)$ - некоторая скалярная функция. Выпишем условия интегрируемости уравнений (1.16) для $i = 1$:

$$\mu_y(g-h) + \mu(g_y - h_y) = \mu_x(h-f) + \mu(h_x - f_x),$$

$$\mu_z(g-h) + \mu(g_z - h_z) = \mu_x(f-g) + \mu(f_x - g_x),$$

$$\mu_z(h-f) + \mu(h_z - f_z) = \mu_y(f-g) + \mu(f_y - g_y).$$

Последнюю систему можно записать в матрично-векторной форме:

$$A_1 \nabla \mu = \mu F_1. \tag{1.17}$$

Матрица A_1 и вектор F_1 в выражениях (1.17) определены вполне:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(h-f) & g-h & 0 \\ -(f-g) & 0 & g-h \\ 0 & -(f-g) & h-f \end{pmatrix}, \; F_1 = \begin{pmatrix} h_x - f_x - (g_y - h_y) \\ f_x - g_x - (g_z - h_z) \\ f_y - g_y - (h_z - f_z) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A_1 в силу своей структуры является вырожденной при любых f, g, h. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнения (1.17) возможно лишь тогда, когда вектор F лежит в подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A:

$$rank(A) = rank(A, F).$$

Нетривиальным решением для нас будет также ситуация, когда $F_1 = 0$, при этом получается $\mu(x, y, z) = const$. При $i = 2$ получаем следующие значения для матрицы A и вектора F:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -h(g-h) + f(f-g) & g(f-g) - h(h-f) & 0 \\ -f(h-f) + g(g-h) & 0 & g(f-g) - h(h-f) \\ 0 & -f(h-f) + g(g-h) & g(f-g) - f(f-g) \end{pmatrix},$$

$$F_2[1] = f_x(g-3f) - f_y(g+h) + g_x(h+f) - g_y(f-2g) + h_x(g-2h) + h_y(2h-f),$$

$$F_2[2] = f_x(h-2f) - f_z(g+h) + g_x(h-2g) + g_z(2g-f) + h_x(f+g) + h_z(2h-f),$$

$$F_3[3] = f_z(2f-g) + f_y(h-2f) - g_z(h+f) - g_y(2g-2h) + h_z(2h-g) + h_y(f+g).$$

Матрица A_2 также вырожденная, и решение возможно тоже не всегда. Таким образом, в невырожденных случаях система дифференциальных уравнений для функций μ_1, μ_2 выглядит следующим образом:

$$A_1 \nabla \mu_1 + A_2 \nabla \mu_2 = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2. \tag{1.18}$$

Это - система трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций. Для ее исследования заметим сначала, что, поскольку матрицы A_1, A_2 вырожденные, уравнения (1.18) не могут быть разрешены относительно всех трех производных μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} или μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, но в общем случае система (1.18) может быть разрешена относительно двух производных, например, по x, y:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \mu_1}{\partial x} &= a(x,y,z)\mu_1 + A(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}), \\ \tfrac{\partial \mu_1}{\partial y} &= b(x,y,z)\mu_1 + B(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь A, B - линейные функции по μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}. Дифференцируя первое уравнение по y, а второе по x, получаем

$$(a_y - b_x)\mu_1 = L[\mu_2], \tag{1.20}$$

где

$$L[\mu_2] = -(aB - bA + \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy})$$

- дифференциальный оператор второго порядка. Р. Курант [5] показал, что в аналитическом случае условие

$$a_y = b_x \tag{1.21}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости системы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Необходимым условием существования стационарного интеграла для системы* (1.18) *является выполнение условий* (1.21).

В самом общем случае, приведем систему (1.9) к следующему виду: члены, содержащие величины μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, перенесем в правую часть, содержащие величины μ_1, μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} - в левую. Введем новые неизвестные величины $\alpha_1(x,y,z)$, $\alpha_2(x,y,z)$, $\alpha_3(x,y,z)$. Получим соотношения

$$\begin{array}{l} A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 = \alpha_1, \\ A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 = \alpha_2, \\ A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 = \alpha_3, \\ A_2[1,1]\mu_{2_x} + A_2[1,2]\mu_{2_y} + F_2[1]\mu_2 = \alpha_1, \\ A_2[2,1]\mu_{2_x} + A_2[2,3]\mu_{2_z} + F_2[2]\mu_2 = \alpha_2, \\ A_2[3,2]\mu_{2_y} + A_1[3,3]\mu_{2_z} + F_1[3]\mu_2 = \alpha_3. \end{array} \tag{1.22}$$

Мы получили две группы уравнений, первую из которых - для неизвестной функции μ_1, вторую - от μ_2. В теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка такие уравнения называются *общими линейными* [4] или *линейными неоднородными* [3]. Не ограничивая общности, рассмотрим первые три уравнения (1.22):

$$\begin{array}{l} X_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 - \alpha_1 = 0, \\ X_2(\mu_1) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 - \alpha_2 = 0, \\ X_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 - \alpha_3 = 0. \end{array} \tag{1.23}$$

Введем обозначения

$$\bar{X}_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y},$$

$$\bar{X}_2(\mu_2) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z},$$

$$\bar{X}_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z}.$$

Поскольку матрица A_1 вырожденная, из системы (1.23) невозможно найти величины μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z}. Приведем систему (1.23) к замкнутой форме. В общем случае можно взять два линейно независимых по μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} уравнения, например, X_1, X_2, и составить скобку Якоби:

$$[X_1, X_2] = A_1[1,1](\frac{\partial X_2}{\partial x} + \mu_{1_x}F_1[2]) - A_1[2,1](\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mu_1 F_1[1]) +$$

$$+ A_1[1,2](\frac{\partial X_2}{\partial y} + \mu_{1_y}F_1[2]) - A_1[2,3](\frac{\partial X_1}{\partial z} + \mu_{1_z}F_1[2]).$$

Известно [1, 2], что $[X_1, X_2] = \bar{X}_1(X_2(\mu_1)) - \bar{X}_2(X_1(\mu_1))$. Может оказаться так, что получившиеся уравнение линейно независимо с уравнениями X_1, X_2, тогда получившуюся системк можно разрешить относительно μ_1.

2. Заключение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае неосуществимо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. М.Б. Авдеева, С.В. Зубов, И.С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 9-12.

2. А.В. Зубов, К.А. Пешехонов, С.А. Стрекопытов, М.В. Стрекопытова, “Трехмерные квадратичные системы”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 13-16.

3. В.И. Зубов, И.В. Зубов, А.Ф. Зубова, А.И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 17-20.

4. А.В. Зубов, С.В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ "Мобильность-плюс", СПб., 2012, 357 с.

5. А.В. Зубов, О.А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

The method of bring third measures quadrate systems from one equation of second order

© A. F. Zubova[5], V. I. Zubov[6], I. V. Zubov[7], S. A. Strecopitov[8]

Abstract. In giving article is looks the way of bring third quadrate system of differential equations ti one equation of second order. Is bring investigation simple on structure differential equations, is works technology of building simple quadrate systems, is possesses giving limiting measures, important in the tasks of controlling.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, partial integral, controlled system

[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Professor chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Docent chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.9

Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных каскадов на поверхностях

© В. Е. Круглов[1], О. В. Починка[2]

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются динамические системы с дискретным временем, порожденные итерациями градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности, неблуждающее множество которого состоит из неподвижных точек положительного типа ориентации. Доказывается, что класс топологической сопряженности такой системы полностью определяется классом эквивалентности ее энергетической функции Морса.

Ключевые слова: энергетическая функция, градиентно-подобный диффеоморфизм

1. Введение

В 1978 К. Конли [1] доказал существование функции Ляпунова для любого потока (каскада), заданного на гладком замкнутом ориентируемом n-многообразии M, то есть непрерывной функции, которая строго убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и постоянна на компонентах этого множества. Для диффеоморфизмов Морса-Смейла[3] цепно рекуррентное множество совпадает с множеством периодических орбит, так что в этом случае представляется естественным искать функцию Ляпунова в классе функций Морса. В 1977 году Д. Пикстон [4] определил функцию Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f как функцию Морса $\varphi : M \to \mathbb{R}$ такую, что $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если x — блуждающая точка, и $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$, если x — периодическая точка. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к потоку, являющемуся надстройкой над заданным диффеоморфизмом Морса-Смейла и дальнейшим применением результатов работы К. Мейера [3].

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M \to M$, то любая периодическая точка p является максимумом ограничения φ на неустойчивое многообразие W^u_p и минимумом ограничения φ на устойчивое многообразие W^s_p. Если эти экстремумы являются невырожденными, то инвариантные многообразия точки p трансверсальны всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности U_p точки p. Функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M \to M$ называется *функцией Морса-Ляпунова*, если любая периодическая точка p является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения φ на неустойчивое (устойчивое) многообразие W^u_p (W^s_p). Из работы В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О.В. Починки [2] следует, что среди функций Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f функции Морса-Ляпунова образуют открытое всюду плотное в C^∞-топологии множество.

Если p — критическая точка функции Морса $\varphi : M \to \mathbb{R}$, то, согласно лемме Морса (см., например, [8]), в некоторой окрестности $V(p)$ точки p существует локальная система координат $x_1, \dots, x_n$, называемая *координатами Морса*, такая, что $x_j(p) = 0$ для каждого

[1] Студент Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, Национального исследовательского университета Высшая школа экономики

[3] Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из конечного числа гиперболических периодических точек ($NW(f) = Per(f)$), инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально.

$j = \overline{1,n}$ и φ имеет вид $\varphi(x) = \varphi(p) - x_1^2 - \dots - x_b^2 + x_{b+1}^2 + \dots + x_n^2$, где $b = ind(p)$ — индекс[4] точки p.

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f, то, в силу [4], любая периодическая точка диффеоморфизма f является критической точкой функции φ и $ind(p) = dim\ W_p^u$. Обратное, вообще говоря, неверно: функция Ляпунова может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками для f. Д. Пикстон [4] определил *энергетическую функцию* для диффеоморфизма Морса-Смейла f как функцию Морса-Ляпунова φ, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек диффеморфизма f. Он доказал, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на поверхности (замкнутом двумерном многообразии), обладает энергетической функцией, однако существует пример диффеоморфизма Морса-Смейла на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, не имеющего энергетической функции.

Следующее определение выделяет для градиентно-подобных диффеоморфизмов[5] класс функций Морса-Ляпунова с дополнительными свойствами, аналогичными свойствам функций, введенных С. Смейлом [5] для градиентно-подобных векторных полей.

Функция Морса-Ляпунова φ называется *самоиндексирующейся энергетической функцией*, если выполняются следующие условия:

1) множество критических точек функции φ совпадает с множеством $Per(f)$ периодических точек диффеоморфизма f;

2) $\varphi(p) = dim\ W_p^u$ для любой точки $p \in Per(f)$.

Р. Том [6] в 1962 году ввел понятие топологической эквивалентности функций. Функции $\varphi, \varphi' : M \to \mathbb{R}$ называются *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы $\psi : M \to M$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ \psi \downarrow\uparrow \psi^{-1} & & g^{-1} \downarrow\uparrow g \\ M & \xrightarrow[\varphi']{} & \mathbb{R} \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что гомеоморфизм ψ переводит множество уровня $\varphi^{-1}(c)$ в множество уровня $\varphi'^{-1}(g(c))$. Кроме того, если φ, φ' — самоиндексирующиеся функции, то гомеоморфизм g можно считать тождественным и топологическая эквивалентность таких функций определяется существованием гомеоморфизма $\psi : M \to M$ такого, что

$$\varphi = \varphi'\psi \quad \text{и} \quad \varphi' = \varphi\psi^{-1}.$$

Пусть S замкнутая ориентируемая поверхность. Диффеоморфизм Морса-Смейла $f : S \to S$ называется *градиентно-подобным*, если инвариантные многообразия его различных седловых точек не пересекаются. Обозначим через G класс градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек положительного типа ориентации[6]. Существование самоиндексирующейся энергетической функции у любого диффеоморфизма из класса G следует из работы [4].

Основным результатом работы является следующая теорема.

[4] *Индексом критической точки* p называется число отрицательных собственных значений матрицы $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(p)$.

[5] Диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M \to M$ называется *градиентно-подобным*, если для любой пары периодических точек p, q $(p \neq q)$ из условия $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$ следует, что $\dim W_p^s < \dim W_q^s$.

[6] Говорят, что неподвижная точка p диффеоморфизма Морса-Смейла f имеет *положительный тип ориентации*, если отображение $f|_{W_p^u}$ сохраняет ориентацию. В противном случае, тип ориентации точки p называют *отрицательным*.

Теорема 1.1. *Диффеоморфизмы класса G топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их самоиндексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентны.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 13-01-12452-офи-м, 12-01-00672-а.

2. Доказательство теоремы

Пусть $f \in G$ и $\varphi : S \to [0,2]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция Морса-Ляпунова для f. Тогда $\Omega^0_f = \varphi^{-1}(0)$, $\Omega^1_f = \varphi^{-1}(1)$, $\Omega^2_f = \varphi^{-1}(2)$ — множество всех стоков, седел, источников, соответственно, диффеоморфизма f. Покажем, что диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда функции φ, φ' топологически эквивалентны.

Для каждого стока ω (ω') диффеоморфизма f (f') обозначим через L_ω ($L'_{\omega'}$) множество неустойчивых сепаратрис ℓ (ℓ') седловых точек σ (σ') гомеоморфизма f (f') таких, что $cl(\ell) = \ell \cup \sigma \cup \omega$ ($cl(\ell') = \ell' \cup \sigma' \cup \omega'$). Обозначим поток, порождённый векторным полем $grad\ \varphi$ ($grad\ \varphi'$) через X (X'). Исходя из того, что под энергетической функцией φ (φ') мы понимаем функцию Морса-Ляпунова, для любой седловой точки σ (σ') существует окрестность V_σ ($V_{\sigma'}$) такая, что внутри V_σ ($V_{\sigma'}$) инвариантные многообразия точки σ как неподвижной точки диффеоморфизма f (f') и потока X (X') совпадают. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что линия уровня $\varphi^{-1}(1-\varepsilon)$ ($\varphi'^{-1}(1-\varepsilon)$) пересекает каждую неустойчивую сепаратрису каждой седловой точки σ (σ') в окрестности V_σ ($V_{\sigma'}$). Положим $\Gamma = \varphi^{-1}(1-\varepsilon)$ ($\Gamma' = \varphi'^{-1}(1-\varepsilon)$) и $B = \varphi^{-1}([0, 1-\varepsilon])$ ($B' = \varphi'^{-1}([0, 1-\varepsilon])$).

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h : S \to S$. Отсюда для любого стока ω, седловой точки σ и множества L_ω диффеоморфизма f существуют единственные соответствующие объекты диффеоморфизма f', а именно $\omega' = h(\omega)$, $\sigma' = h(\sigma)$ и $L'_{\omega'} = h(L_\omega)$. Воспользовавшись леммой 3.2.1. из работы [7], для каждого стока ω выберем диск $D_\omega \subset int\ B$, содержащий ω так, что любая сепаратриса $\ell \in L_\omega$ пересекает ∂D_ω в единственной точке и $D'_{\omega'} = h(D_\omega) \subset int\ B'$. Также для любого ω (ω') существует компонента связности B_ω ($B'_{\omega'}$) множества B (B'), лежащая в W^s_ω ($W^s_{\omega'}$). Положим $H_\omega = cl\ (B_\omega \setminus D_\omega)$ ($H'_{\omega'} = cl\ (B'_{\omega'} \setminus D'_{\omega'})$) и связности $\Gamma_\omega = \partial B_\omega$ ($\Gamma'_{\omega'} = \partial B'_{\omega'}$).

По условию f и f' топологически сопряжены, следовательно гомеоморфизм h переводит неустойчивые сепаратрисы f в неустойчивые сепаратрисы f'. Исходя из этого, зададим гомеоморфизм $h_{\Gamma_\omega} : \Gamma_\omega \to \Gamma'_{\omega'}$ следующим образом: ∂D_ω посредством h гомеоморфно $\partial D'_{\omega'}$, также гомеоморфны между собой посредством h неустойчивые сепаратрисы L_ω и $L'_{\omega'}$. Тогда существует гомеоморфизм $\psi_{L_\omega \cap H_\omega} : L_\omega \cap H_\omega \to h(L_\omega) \cap H'_{\omega'}$ такой, что $\ell \cap H_\omega \mapsto h(\ell) \cap H'_{\omega'}$ и $\psi_{L_\omega \cap H_\omega}|_{(L_\omega \cap \partial D_\omega)} = h|_{(L_\omega \cap \partial D_\omega)}$. С его помощью мы отобразили в том числе точки $L_\omega \cap \Gamma_\omega$ в точки $L'_{\omega'} \cap \Gamma'_\omega$. Построим гомеоморфизм $\psi_{\Gamma_\omega} : \Gamma_\omega \to \Gamma'_{\omega'}$, продолжая отображение $\psi_{L_\omega \cap H_\omega}$ с точек $L_\omega \cap \Gamma_\omega$ на дуги между ними так, что положительное направление обхода[7] на кривой $\Gamma_\omega = \partial B_\omega$ и гомеоморфизм ψ_{Γ_ω} индуцируют на кривой $\Gamma'_{\omega'} = \partial B'_{\omega'}$ такое же (положительное или отрицательное) направление обхода, какое индуцирует на кривой $\partial D'_{\omega'}$ положительное направление обхода на кривой ∂D_ω и гомеоморфизм h. Обозначим через $\psi_\Gamma : \Gamma \to \Gamma'$ гомеоморфизм, составленный из отображений $\psi_{\Gamma_\omega}, \omega \in \Omega^0_f$.

[7] Пусть d некоторый двумерный диск. Направление обхода его границы $c = \partial d$ *положительным (отрицательным)*, если при движении вдоль c в этом направлении диск d остается слева (справа).

Таким образом, мы построили гомеоморфизм, переводящий линию уровня Γ диффеоморфизма f в линию уровня Γ' диффеоморфизма f'.

Обозначим через g_x $({g'}_{x'})$ траекторию потока X (X'), проходящую через $x \in \Gamma$ $(x' \in \Gamma')$. Положим $Q = \bigcup\limits_{x \in \Gamma} g_x$, $Q' = \bigcup\limits_{x' \in \Gamma'} {g'}_{x'}$. Определим гомеоморфизм $\psi_Q : Q \to Q'$ по формуле: для $y \in g_x$ положим $\psi_Q(y) = y'$, где $y' \in g'_{\psi_\Gamma(x)}$ и $\varphi(y) = \varphi'(y')$. По построению линии уровня, которым принадлежат y и y', связаны гомеоморфизмом ψ_Q. Так как W^s_σ $(W^s_{\sigma'})$, как устойчивое многообразие седловой точки σ (σ') потока X (X'), трансверсально линиям уровня φ (φ') для любой седловой точки σ (σ'), то гомеоморфизм ψ_Q продолжается до искомого гомеоморфизма $\psi : S \to S$ по непрерывности. Таким образом, мы преобразовали сопрягающий гомеоморфизм h в гомеоморфизм ψ такой, что выполняются соотношения $\varphi = \varphi'\psi$ и $\varphi' = \varphi\psi^{-1}$, это означает, что функции φ и φ' топологически эквиваленты.

Достаточность. Пусть функции φ и φ' топологически эквивалентны, т.е. $\varphi = \varphi'\psi$ и $\varphi' = \varphi\psi^{-1}$ для некоторого гомеоморфизма $\psi : S \to S$. Положим $C = \varphi^{-1}(1)$ $(C' = \varphi'^{-1}(1))$. Заметим, что каждая компонента связности B содержит в точности один сток диффеоморфизма f. Так как φ — функция Ляпунова, то $f(B) \subset intB$. Положим $K = B \setminus int\ f(B)$ $(K' = B' \setminus int\ f'(B'))$. Обозначим через g_x $(g'_{x'})$ траекторию потока X (X'), проходящую через точку $x \in C$ $(x' \in C')$. Заметим, что $\psi(C) = C'$, что следует из топологической эквивалентности φ и φ'. Определим гомеоморфизм $h_{\Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f}} : \Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f} \to \Gamma'\setminus W^u_{\Omega^1_{f'}}$ по формуле: для $y = g_x \cap \Gamma$ положим $h_{\Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f}}(y) = y'$, где $y' = g'_{\psi(x)} \cap \Gamma'$, который продолжается по непрерывности до $h_\Gamma : \Gamma \to \Gamma'$ так, что для любой седловой сепаратрисы l потока X выполняется равенство $h_\Gamma(l \cap \Gamma) = \psi(l) \cap \Gamma'$.

Положим $h_{f(\Gamma)} = f' h_\Gamma f^{-1} : f(\Gamma) \to f'(\Gamma')$. Тогда существует гомеоморфизм $h_K : K \to K'$ такой, что $h_K|_\Gamma = h_\Gamma$, $h_K|_{f(\Gamma)} = h_{f(\Gamma)}$ и $h_K(W^u_{\Omega^1_f} \cap K) = W^u_{\Omega^1_{f'}} \cap K'$. Определим гомеоморфизм $h_0 : W^s_{\Omega^0_f} \setminus \Omega^0_f \to W^s_{\Omega^0_{f'}} \setminus \Omega^0_{f'}$ формулой $h_0(x) = f'^{-k}(h_K(f^k(x)))$, где $f^k(x) \in K$ (т.е. данный гомеоморфизм отображает бассейны стоков диффеоморфизма f в бассейны стоков диффеоморфизма f'). По непрерывности этот гомеоморфизм продолжается на Ω^0_f. Осталось его продолжить на $cl\ (W^s_{\Omega^1_f})$.

Пусть $\sigma \in \Omega^1_f$ и σ' — седло из $\Omega^1_{f'}$ такое, что $h_0(W^u_\sigma \setminus \sigma) = W^u_{\sigma'} \setminus \sigma'$.

В силу теоремы 1.1.2 из [7], существует окрестность U_σ точки σ диффеоморфизма f и гомеоморфизм $F_\sigma : U_\sigma \to U$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $b|_U$, где $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x_1x_2| \le 1\}$ и $b(x_1, x_2) = (2x_1, \frac{x_2}{2})$. Также существует окрестность $U_{\sigma'}$ точки σ' такая, что $h_0(U_\sigma \setminus W^s_\sigma) \subset U_{\sigma'}$ диффеоморфизма f' и гомеоморфизм $F'_{\sigma'} : U_{\sigma'} \to U$, сопрягающий диффеоморфизм $f'|_{U'_{\sigma'}}$ с диффеоморфизмом $b|_U$. Положим $U'_{\sigma'} = h_0(U_\sigma \setminus W^s_\sigma) \cup W^s_{\sigma'}$, $U' = F'_{\sigma'}(U'_{\sigma'})$, $L = \partial U$ и $L' = \partial U'$.

Положим $U^t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x_1x_2| \le t\}$ для $t \in (0, 1)$ и $L^t = \partial U^t$. Зафиксируем значение $\tau \in (0, 1)$ так, что $F'^{-1}_{\sigma'}(U^\tau) \subset U'_{\sigma'}$. Мы установили гомеоморфность посредством отображения $\tilde{h}_0 = F'_{\sigma'} h_0 F^{-1}_\sigma$ областей U и U'. Положим $Q = U \setminus U^\tau$ и $Q' = U' \setminus U^\tau$. По построению каждая компонента связности множеств Q, Q' гомеоморфна полосе $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Не уменьшая общности можно считать, что, если Y_1, Y_2 — компоненты связности границы компоненты связности множества Q, то $\tilde{h}_0(Y_1), Y_2$ — компоненты связности границы компоненты связности множества Q' (в противном случае гомеоморфизм F_σ нужно заменить на гомеоморфизм jF_σ, $j(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$). Обозначим через $\hat{Q} = Q/b, \hat{Q}' = Q'/b$ пространства орбит действия диффеоморфизма b на Q, Q', соответственно, и через $p : Q \to \hat{Q}, p' : Q' \to \hat{Q}'$ естественную проекцию. Тогда каждая компонента связности множеств $\hat{Q}, \hat{Q}'$ гомеоморфна кольцу $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$. Поскольку

$\hat{L}^\tau = L^\tau/b$ общая граница колец $\hat{Q}$ и $\hat{Q}'$, то существует гомеоморфизм $\hat{h}_{\hat{Q}} : \hat{Q} \to \hat{Q}'$, являющийся тождественным на одной компоненте связности границы каждого кольца из $\hat{Q}$ и совпадающий с гомеоморфизмом $p'\tilde{h}_0 p^{-1}$ на другой.

Обозначим через $\tilde{h}_Q : Q \to Q'$ поднятие гомеоморфизма $\hat{h}_{\hat{Q}}$. Из полученного строим гомеоморфизм $\tilde{h}_U : U \to U'$, тождественный на U^τ и совпадающий с $\tilde{h}_Q$ на Q. Получаем, что U_σ гомеоморфно $U'_{\sigma'}$ посредством $h_{U_\sigma} = F'^{-1}_{\sigma'}\tilde{h}_U F_\sigma$ и выполнено $h_{U_\sigma}(W^s_\sigma) = W^s_{\sigma'}$. Положим $U_{\Omega^1_f} = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} U_\sigma$, $U_{\Omega^1_{f'}} = \bigcup\limits_{\sigma'\in\Omega^1_{f'}} U_{\sigma'}$ и обозначим через $h_1 : U_{\Omega^1_f} \to U_{\Omega^1_{f'}}$ гомеоморфизм, составленный из $h_{U_\sigma}, \sigma \in \Omega^1_f$. Поскольку $h_0|_{\partial U_{\Omega^1_f}} = h_1|_{\partial U_{\Omega^1_f}}$, то отображение $h_2 : S \setminus \Omega^2_f \to S \setminus \Omega^2_{f'}$, определенное формулой $h_2(x) = \begin{cases} h_1(x), \text{ если } x \in U_{\Omega^1_f}; \\ h_0(x), \text{ иначе;} \end{cases}$

Гомеоморфизм h_2 единственным образом продолжается на множество Ω^2_f до искомого гомеоморфизма $h : S \to S$ так, что $h(\alpha) = \alpha'$, где $h_2(W^u_\alpha \setminus \alpha) = W^u_{\alpha'} \setminus \alpha'$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. C. Conley, “CBMS Regional Conference Series in Math”, 1978.
2. V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, “Self-indexing energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Moscow Math. Journal*, **9**:4 (2009).
3. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, 1968, № 90, 1031–1040.
4. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
5. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199–206.
6. R. Thom, “La stabilite topologique des applications polynomiales”, *L'Enseignement Mathematique*, 1962, № 8, 24–33.
7. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
8. Дж. Милнор, *Теория Морса*, «Платон», М., 1969, 184 с.

Energy function as a complete topological invariant for gradient-like cascades on surfaces

© **V. E. Kruglov**[8], **O. V. Pochinka**[9]

Abstract. In this paper we consider dynamical systems with discrete time generated by iterations of a gradient-like diffeomorphism of a surface whose non-wandering set consists of fixed points of positive type orientation. We prove that the class of topological conjugacy of such a system is completely determined by equivalence class of its energy Morse function.

Key Words: energy function, gradient-like diffeomorphism

[8] Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod
[9] Professor of the department of fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod

УДК 517.9

Обобщение модели отбора поведения в социально-экономических системах

© О. А. Кузенков[1], Е. А. Рябова[2]

Аннотация. В статье рассматривается ряд обобщений модели выбора поведения в социально-экономической системе, предложенной И.Г. Поспеловым. В отличие от модели И.Г. Поспелова рассматривается процесс в непрерывном времени. Предложенные модели описываются системами с наследованием. Проведено их исследование на основе математической теории отбора. Предложен алгоритм поведения, обеспечивающий при любых начальных условиях отбор стратегии с наилучшими характеристиками.

Ключевые слова: социально-экономические системы, самовоспроизводящиеся системы, отбор стратегии

Введение

Проблема изучения мотивации поведения людей является важнейшей не только в социологических исследованиях. Изучение поведения человека как субъекта экономических отношений – одна из основных проблем экономической теории [1]–[3].

Динамику поведения в больших однородных социальных группах описывают модели адаптивно-подражательного поведения [4], [5]. В последние десятилетия исследованием таких моделей занимается эволюционная теория игр [6], [7], которая изучает выбор стратегии поведения субъектами социальной группы в типичных, многократно повторяющихся конфликтных ситуациях и пытается предсказать, какого поведения следует ожидать. При этом функция выигрыша характеризует успех отдельных стратегий, а не отдельных участников взаимодействия.

Этот подход можно применить и к моделированию экономических процессов, поскольку любое конкретное решение о производстве, потреблении и распределении принимается отдельными субъектами (индивидуумами или организациями), обладающими ограниченной информацией о состоянии и будущем развитии всей системы. Такие центры принятия решений в экономике называют ролями [2]. Типичными ролями являются, например, роль управляющего предприятием, принимающего решения, что, когда и как производить, роль потребителя, решающего, какие товары приобретать, роль рабочего на рынке труда, решающего, где и на каких условиях работать и т. п. Исполняя роль, субъект может изобрести какие-то новые виды и способы действия в этой роли. При этом средства и система ролей перестраиваются, адаптируясь к новым возможностям.

Но система ролей не может быть произвольной, она обязана, по крайней мере, удовлетворять условию соответствия ролей и интересов (мотивов). В моделях экономики такое согласование обычно принимается как очевидное: производитель максимизирует прибыль (или стремится выполнить план), потребитель максимизирует полезность своего потребления и т. п.. Механизмом, поддерживающим определенное согласование интересов, является, например, наказание за «неправильное поведение», включающее административные взыскания, финансовое разорение, моральные санкции. Субъект, подпадающий под

[1] Доцент кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kuzenkov_o@mail.ru

[2] Старший преподаватель кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; riabova-ea@rambler.ru

их действие, вынужден прекратить исполнять данную роль или изменить свой способ действий. В работе [2] И.Г. Поспелова предложена абстрактная дискретная модель, позволяющая изучить вопрос об эффективности таких механизмов регулирования (отбора) поведения и описать результат их действия на языке мотивации субъекта. Механизмы регулирования поведения в модели характеризует набор постоянных «частот неудач».

Целью данной работы является, во-первых, обобщение дискретной модели, предложенной в [2], на непрерывный случай, что позволяет применить к исследованию методы математической теории отбора [8]–[10]. Во-вторых, модификация модели с учетом изменяющихся «частот неудач», характеризующих внешнее воздействие на систему, в случае, когда субъект при выборе стратегии руководствуется исключительно ее популярностью (т. е. просто подражает другим субъектам). При этом нас будет интересовать возможность отбора одной объективно ценной стратегии при исполнении субъектами своей роли [11], [12].

1. Базовая модель отбора стратегии поведения

Пусть $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ – конечное множество стратегий, которые субъект может использовать при исполнении своей роли; S – конечное множество субъектов, параллельно исполняющих одну и ту же роль, используя различные стратегии, мощность этого множества равна $|S|$; $s_i(t)$ – число субъектов, использующих стратегию v_i в момент времени t, $v_i \in M$. Распределение субъектов по стратегиям

$$s(t) = \{(s_1(t), \dots, s_n(t)) : s_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} s_i(t) \equiv |S|\} \tag{1.1}$$

характеризует состояние рассматриваемой системы.

Пусть $x_i(t) = s_i(t)/|S|$ – удельная доля числа субъектов, осуществляющих выбор стратегии v_i в момент времени t, – так называемая популярность или частота использования стратегии $v_i \in M$. Очевидно, что в каждый момент времени t вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ принадлежит стандартному n-мерному симплексу

$$S_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \tag{1.2}$$

Предполагается, что в течение малого промежутка времени $(t, t + \Delta t)$ субъект, использующий стратегию v_i, независимо от предыстории и действий других субъектов с вероятностью $\omega_i \Delta t + o(\Delta t)$ подпадает под действие механизма отбора поведения и оказывается вынужденным сменить свою стратегию. Набор постоянных $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, называемых «частоты неудач», характеризует в модели среду, в которой субъекты исполняют свою роль. Эта гипотеза означает, что с точностью до бесконечно малой $o(\Delta t)$ вероятность изменения стратегии v_i пропорциональна времени Δt ее использования (чем дольше используется определенная стратегия, тем выше вероятность перехода к другим вариантам поведения). Предполагается, что субъекты не осознают связь между стратегией и частотой неудачи или игнорируют ее. Субъект, изменяющий свою стратегию v_i, выбирает новую стратегию $v_j \in M$ с вероятностью $p_j(t)$ ($p_j(t) \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t) \equiv 1$). Этот выбор может зависеть от состояния $s(t)$, но не зависит от предыстории процесса. Можно также, считать, что субъект, потерпевший неудачу, «выбывает из игры», и его место занимает новый, выбирающий стратегию v_i с вероятностью $p_i(t)$.

С учетом этих предположений примем следующие гипотезы.

1. Субъект в момент времени t реализует только одну стратегию.

2. Если в некоторый момент времени t субъект реализует стратегию v_i, то вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ он перейдет к реализации другой стратегии v_j, равна $p_j(t)(\omega_i \Delta t + o(\Delta t))$ $(j \neq i)$. Кроме того, даже попав под действие механизма отбора поведения, субъект может продолжить реализацию стратегии v_i с вероятностью
$$1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j(t)\omega_i \Delta t + o(\Delta t).$$

3. Вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ субъект осуществляет более одного изменения стратегии поведения, имеет порядок малости более высокий, чем Δt.

Эти гипотезы определяют динамику использования стратегии как случаный процесс. При этом матрица переходов, описывающая вероятность изменения стратегии, имеет вид:
$$\Pi(t,\Delta t) = \begin{pmatrix} 1 - \sum\limits_{j=2}^{n} p_j(t)\omega_1 \Delta t + o(\Delta t) & \dots & p_n(t)\omega_1 \Delta t + o(\Delta t) \\ p_1(t)\omega_2 \Delta t + o(\Delta t) & \ddots & p_n(t)\omega_2 \Delta t + o(\Delta t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(t)\omega_n \Delta t + o(\Delta t) & \cdots & 1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} p_j(t)\omega_n \Delta t + o(\Delta t) \end{pmatrix}.$$
Векторы $x(t)$ и $x(t+\Delta t)$ связаны соотношением $x(t+\Delta t) = x(t)\Pi(t,\Delta t)$. В частности,
$$\Delta x_i = x_i(t+\Delta t) - x_i(t) = x_i(t)\left(1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j(t)\omega_i \Delta t\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j p_i(t)\omega_j \Delta t + o(\Delta t),\ \ i = \overline{1,n}.$$
Отсюда нетрудно вывести дифференциальное уравнение изменения частоты использования i-й стратегии:
$$\dot{x}_i = -\omega_i x_i + p_i(t)\sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$
Нетрудно видеть, что сумма правых частей данных уравнений равна нулю, следовательно, система (1.3) является системой на стандартном симплексе [9].

2. Сравнение стратегий

На множестве M различных стратегий можно ввести отношение порядка аналогично тому, как это было сделано в работах [13], [14].

Определение 2.1. *Будем говорить, что стратегия v_i лучше стратегии v_j, и обозначать это $v_i \succ v_j$, если предел отношения частоты использования j-й стратегии к частоте использования i-й стратегии стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности:* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_j}{x_i} = 0$.

Таким образом, на множестве M различных вариантов поведения устанавливается порядок предпочтительности. При этом субъекты с i-м вариантом поведения вытесняют субъектов, реализующих стратегию v_j. Поскольку справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i(t) = |S|$, где $|S|$ – постоянное количество субъектов, и $v_i \succ v_j$, то количество субъектов, осуществляющих j-й вариант поведения стремится к нулю с течением времени. Действительно, так как $s_j = \dfrac{s_i s_j}{s_i} \leq |S|\dfrac{s_j}{s_i} = |S|\dfrac{x_j}{x_i}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} s_j = 0$. Следовательно, стратегия v_j постепенно перестает использоваться. Неограничено долго может использоваться только та стратегия, которой подчинены все остальные варианты поведения относительно введенного порядка.

Целесообразно выразить введенный порядок предпочтительности через сравнение величин, характеризующих частоту использования той или иной стратегии.

Пусть $F_i(x,t)$ есть скорость изменения частоты использования стратегии v_i:

$$\dot{x}_i = F_i(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

тогда функция $F_i(x,t)/x_i$ называется относительной скоростью изменения частоты использования стратегии v_i или коэффициентом воспроизводства стратегии v_i. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Стратегия v_i лучше стратегии v_j $(v_i \succ v_j)$ тогда и только тогда, когда имеет место предельное равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left(\frac{F_i}{x_i} - \frac{F_j}{x_j}\right) dt = +\infty. \tag{2.2}$$

Для того чтобы стратегия v_i была наилучшей из возможных, т. е. $v_i \succ v_j$ для всех $v_j \in M \setminus \{v_i\}$, необходимо и достаточно одновременного выполнения предельных равенств (2.2) *для всех $j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.*

Определение 2.2. *Пусть $\xi(t)$ – непрерывная функция. Если предел $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \xi(\tau)d\tau$ существует, то величина $\langle\xi\rangle = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \xi(\tau)d\tau$ называется временным средним значением функции $\xi(t)$.*

Замечание 2.1. *Если непрерывная функция $\xi(t)$ имеет предел при $t \to \infty$, то ее временное среднее значение равно этому пределу.*

Действительно, $\langle\xi\rangle = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\int\limits_{t_0}^{t} \xi(\tau)d\tau}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \xi(t)$, как следует из правила Лопиталя.

Следствие 2.1. *Пусть существуют различные временные средние значения $\langle F_i/x_i\rangle$, $\langle F_j/x_j\rangle$ коэффициентов воспроизводства стратегий v_i и v_j $(\langle F_i/x_i\rangle \neq \langle F_j/x_j\rangle)$. Для справедливости соотношения $v_i \succ v_j$ необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\langle F_i/x_i\rangle > \langle F_j/x_j\rangle. \tag{2.3}$$

Для того чтобы стратегия v_i была наилучшей из возможных, необходимо и достаточно одновременного выполнения неравенств (2.3) *для всех $j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.*

Скорость изменения частоты использования стратегии v_i может задаваться уравнением

$$\dot{x_i} = \Phi_i(x,t) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x,t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Это, так называемое, репликаторное уравнение, лежащее в основе эволюционной динамики [15]–[19]. Стандартный симплекс (1.2) является инвариантным относительно дифференциального преобразования, задаваемого репликаторным уравнением (2.4): начинающаяся на стандартном симплексе траектория, соответствующая решению репликаторного уравнения, никогда его не покинет.

Следствие 2.2. *Пусть существуют временные средние* $\langle \Phi_i/x_i \rangle$, $\langle F_i/x_i \rangle$ *и*

$$\langle \Phi_i/x_i \rangle \neq \langle \Phi_j/x_j \rangle . \tag{2.5}$$

Стратегия v_i *лучше стратегии* v_j *тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Phi_i/x_i \rangle > \langle \Phi_j/x_j \rangle . \tag{2.6}$$

Стратегия v_i *будет наилучшей из возможных тогда и только тогда, когда соотношения* (2.5), (2.6) *выполняются для всех* $j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.

3. Исследование базовой модели отбора стратегии

3.1. Неизменяемость априорных представлений о стратегии

Пусть субъекты имеют о стратегии v_i априорные представления θ_i. Если в процессе использования стратегии субъекты не извлекают опыта из осуществления данного варианта поведения, то каждый раз вероятность выбора той или иной стратегии обусловлена лишь априорными представлениями о ней, которые не изменяются с течением времени. Таким образом, вероятность $p_i(t)$ выбора новой стратегии v_i является постоянной величиной: $p_i(t) \equiv \theta_i$. В этом случае система (1.3) является линейной и частота использования стратегии v_i есть величина постоянная:

$$x_i(t) = \frac{\theta_i/\omega_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j/\omega_j},$$

обусловленная набором постоянных «частот неудач» ω и не изменяющимися априорными представлениями о стратегиях $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Таким образом, выработки определенного поведения в системе не происходит.

3.2. Корректировка априорных представлений

Предположим, что при выборе стратегии v_i субъект руководствуется с вероятностью ε^* $(0 \leq \varepsilon^* < 1)$ своими априорными представлениями θ_i о ней, а с вероятностью $1 - \varepsilon^*$ – популярностью данной стратегии среди других субъектов (подражает другим субъектам):

$$p_i(t) = \varepsilon^* \theta_i + (1 - \varepsilon^*) x_i(t). \tag{3.1}$$

При малом фиксированном ε^* система (1.3), (3.1) является близкой к системе отбора [9], т. е. выработки определенного поведения в системе не происходит, но стратегия с наименьшей «частотой неудач» становится заметно популярнее других. Результаты численного решения системы (1.3), (3.1) при $n = 3$ приведены на рис. 3.1.

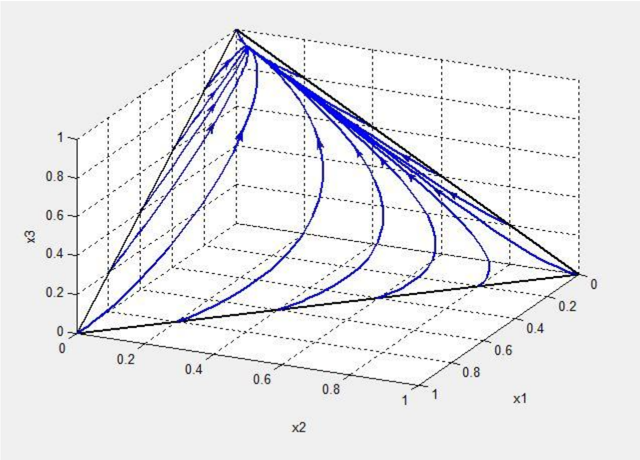


Рисунок **3.1**
Фазовый портрет системы (1.3), (3.1)

3.3. Подражание при отсутствии априорных представлений

Если при выборе стратегии v_i субъект руководствуется исключительно популярностью стратегии среди других субъектов, т. е. просто подражает другим субъектам, то $\varepsilon^* = 0$ в формуле (3.1) и $p_i(t) = x_i(t)$. В этом случае система (1.3) имеет вид

$$\dot{x}_i = -\omega_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} (-\omega_j x_j),\ i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Такие системы вида (2.4) подробно изучались в работе [9]. Было доказано, например, что если $\omega_1 < \min\limits_{j=\overline{2,n}} \omega_j$, то независимо от начальных условий, принадлежащих стандартному симплексу (1.2), $x_1(t) \to 1$ при $t \to \infty$, в то время, как $x_j \to 0$, $j = \overline{2,n}$. Таким образом, вне зависимости от начальных условий со временем субъекты используют только стратегию v_1, соответствующую минимальной «частоте неудачи» ω_1, т. е. в системе происходит выработка определенного поведения при исполнении роли в данных условиях.

4. Модификация базовой модели

4.1. Вариация «частот неудач»

Модифицируем модель (1.3). Рассмотрим случай пункта 3.3., но в предположении, что «частоты неудач» ω_i являются функциями времени, $i = \overline{1,n}$. Обозначим $a_i(t) = -\omega_i$ в системе (1.3), $i = \overline{1,n}$. Тогда функция $a_i(t)$ будет иметь смысл «частоты удачи» и выражать субъективную оценку эффективности i-го варианта поведения, меняющуюся с течением времени. Система (3.2) при этом прмиет вид

$$\dot{x}_i = a_i(t) x_i - x_i \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x_j,\ i = \overline{1,n}. \tag{4.1}$$

Пусть объективная ценность i-го варианта поведения выражается константой b_i, тогда разность $b_i - a_i$ имеет смысл резерва неучтенной информации при изучении субъектами варианта поведения $v_i \in M$. Положим, что с течением времени по мере накопления информации о варианте поведения его субъективная оценка эффективности приближается к объективной ценности, причем скорость изменения оценки эффективности пропорциональна удельной доле субъектов, использующих эту стратегию, с коэффициентом пропорциональности, равном резерву неучтенной информации. В этом случае функции $a_i(t)$ подчиняются следующей системе уравнений:

$$\dot{a}_i = (b_i - a_i)x_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{4.2}$$

Кроме этого, на изменение субъективной оценки эффективности i-й стратегии поведения может влиять косвенное приобретение информации о ней при изучении других вариантов поведения. Тогда функции $a_i(t)$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\dot{a}_i = (b_i - a_i)(x_i + \varepsilon^*), \ i = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

где малая положительная константа ε^* отражает косвенное приобретение информации о стратегии v_i за счет изучения других вариантов поведения.

Теорема 4.1. *Если динамика использования стратегий из множества M описывается системой (4.1), (4.3) и $b_1 > \max\limits_{j=\overline{2,n}} b_j$, то стратегия v_1 является наилучшей из возможных вне зависимости от начальных условий.*

Доказательство. Докажем сначала равенство $\langle a_i \rangle = b_i$. Нетрудно видеть, что уравнение (4.3) равносильно следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d(a_i - b_i)}{a_i - b_i} = -(x_i + \varepsilon^*)\, dt.$$

Тогда $a_i - b_i = (a_i(t_0) - b_i) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} (x_i + \varepsilon^*)\, dt\right)$, где $\int\limits_{t_0}^{t} (x_i + \varepsilon^*)\, dt \geq \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^*\, dt \to +\infty$ при $t \to \infty$, и $\lim\limits_{t\to\infty} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} (x_i + \varepsilon^*)\, dt\right) = 0.$ Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} a_i = b_i,$ что означает стремление с течением времени субъективной оценки эффективности i-го варианта поведения к объективной ценности этой стратегии. Согласно замечанию 2.1. справедливо равенство $\langle a_i \rangle = b_i$. Поскольку по условию теоремы $\langle a_1 \rangle > \langle a_j \rangle$ для всех $j = \overline{2,n}$, то в силу следствия 2.2. стратегия v_1 является наилучшей из возможных, что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Теорема 4.2. *Если динамика использования стратегий из множества M описывается системой (4.1), (4.2) и $b_1 > \max\limits_{j=\overline{2,n}} b_j$, то вариант выработанного поведения при исполнении роли зависит от начальных условий.*

Доказательство. Рассмотрим модель (4.1), (4.2) при $n = 2$. С учетом того, что $x_2 = 1 - x_1$, получим систему

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1(1 - x_1)(a_1 - a_2), \\ \dot{a}_1 & = & x_1(b_1 - a_1), \\ \dot{a}_2 & = & (1 - x_1)(b_2 - a_2), \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Данная система имеет инвариантную плоскость $a_2 = b_2$. Действительно, в этом случае последнее уравнение в системе (4.4) обращается в тождество. На инвариантной плоскости $a_2 = b_2$ система (4.4) сводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1-x_1)(a_1-b_2), \\ \dot{a_1} = x_1(b_1-a_1). \end{cases} \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что точки с координатой $x_1 = 0$, и точка с координатами $x_1 = 1$, $a_1 = b_1$ являются состояниями равновесия системы (4.5). Состояния равновесия на прямой $x_1 = 0$ устойчивы при $a_1 < b_2$ и не устойчивы при $a_1 > b_2$. Фазовые траектории на инвариантной плоскости могут быть построены с помощью метода изоклин (рис. 4.1).

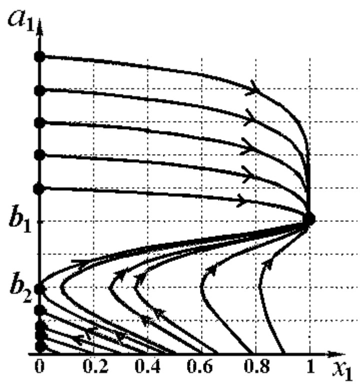


Рисунок **4.1**

Фазовые траектории системы (4.4) на инвариантной плоскости $a_2 = b_2$

Как видно из рис. 4.1, в результате такого процесса при любых начальных условиях в системе обязательно происходит выработка (отбор) определенного поведения. Тем не менее, результат этого отбора зависит от исходного состояния. Какая из стратегий будет наилучшей зависит от начальных условий. Несмотря на то, что объективная ценность стратегии v_1 выше стратегии v_2 $(b_1 > b_2)$, при определенных начальных условиях $x_1(t_0)$ стратегия v_1 перестает использоваться, все субъекты с течением времени принимают стратегию v_2. Это происходит из-за того, что в начальный момент времени большее количество субъектов использует стратегию v_2 и субъектам не хватает времени для достаточного изучения вариантов поведения.

Доказательство закончено.

4.2. Замедление процесса смены стратегии

В базовой модели предполагалось, что в течение промежутка времени $(t, t+\Delta t)$ субъект, использующий стратегию v_i, независимо от предыстории и действий других субъектов с вероятностью $\omega_i \Delta t + o(\Delta t)$ подпадает под действие механизма отбора поведения и оказывается вынужденным сменить свою стратегию. Замедлим этот процесс, считая, что смена стратегии по независящим от субъектов причинам происходит с вероятностью $\frac{\omega_i}{t}\Delta t + o(\Delta t)$, $t > 1$. При этом, так же как и в предыдущем случае, будем варьировать $\omega_i = -a_i(t)$ по закону (4.2). В этом случае модель (1.3) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{a_i}{t} x_i - x_i \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_j}{t} x_j, i = \overline{1,n} \\ \dot{a}_i = x_i(b_i - a_i),\ i = \overline{1,n},\ t \geq t_0 = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Если динамика использования стратегий из множества* M *описывается системой* (4.6)*, где* $b_1 > \max\limits_{j=\overline{2,n}} b_j$ *, и найдется число* $\varepsilon \in (0,1)$ *такое, что имеют место следующие неравенства* $|a_1^0 - a_j^0| < 1-\varepsilon$ *,* $|b_1 - b_j| < 1-\varepsilon$ *,* $|a_1^0 - b_j| < 1-\varepsilon$ *,* $|a_j^0 - b_1| < 1-\varepsilon$ *, то стратегия* v_1 *является наилучшей из возможных вне зависимости от начальных условий.*

Заключение

В статье рассмотрены модели социо-экономического поведения. Проведено их исследование на основе математической теории отбора. Предложен алгоритм поведения, обеспечивающий при любых начальных условиях устойчивый отбор стратегии с наилучшими характеристиками.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12452 офи_м2.

Список литературы

1. И.Г. Поспелов, *Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов*, М.: ВЦ РАН, 2003, 200 с.

2. И.Г. Поспелов, “Модель отбора поведения в социально-экономических системах”, *Труды конференции*, Моделирование социального поведения., М.: МГУ, 2001, 37-42.

3. Д.С. Петросян, “Концептуальные и математические модели поведения человека как экономического агента”, *Аудит и финансовый анализ*, 2009, № 1, 9.3.

4. А.А. Васин, А.В. Богданов, “Модели адаптивно-подражательного поведения: I. Связь с равновесиями Нэша и решениями по доминированию”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2002, № 1, 102-111.

5. А.А. Васин, А.В. Богданов, “Модели адаптивно-подражательного поведения: II. Устойчивость смешанных равновесий”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2002, № 2, 97-103.

6. P. Taylor, L. Jonker, “Evolutionary stable strategies and game dynamics”, *Mathematical Biosciences*, **40** (1978), 145-156.

7. J. Hofbauer, K. Sigmund, “Evolutionary game dynamics”, *Bull. (New Series) American Math. Soc.*, **40**:4 (2003), 479-519.

8. A.N. Gorban, “Selection Theorem for Systems with Inheritance”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **2**:4 (2007), 1-45.

9. О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пособие*, Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007, 324 с.

10. G.P. Karev, “On mathematical theory of selection: continuous time population dynamics”, *J. Math. Biol.*, **60**:1 (2010), 107-129.

11. О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, “Некоторые аспекты оптимизации самовоспроизводящихся систем”, *Журнал СВМО*, **15**:3 (2013), 89-99.

12. О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, “Критерий оптимальности управления в системах авторепродукции”, *Труды ВСПУ-2014*, М.: ИПУ РАН, 2014, 725-733.

13. О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, “Порядок предпочтительности в системе измеримых множеств, вводимый с помощью уравнения динамики меры”, *Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, **5**:2 (2012), 126-132.

14. О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, “Отношение порядка в системах авторепродукции”, *Журнал СВМО*, **16**:2 (2014), 69-75.

15. I.M. Bomze, “Lotka-Volterra equations and replicator dynamics: a two dimentional classification”, *Biol. Cybernetics*, 1983, 48, 201-211.

16. A.S. Bratus, V.P. Posvyanskii, A.S. Novozhilov, “A note on the replicator equation with explicit space and global regulation”, *Mathematical Biosciences and Engineering (MBE)*, **8**:3 (2011), 659-676.

17. R. Cressman, *Evolutionary Dynamics and Existence Form Games*, MIT Press, Cambridge, 2003.

18. M. Eigen, “Self-Organization of Matter and the Evolution of Biological Macromolecules”, *Naturwissenschaften*, **58** (1971), 465-523.

19. G.P. Karev, “Replicator Equations and Models of Biological Populations and Communities”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **9**:3 (2014), 68-95.

Generalization of the behavior selection model in socio-economic systems

© O. A. Kuzenkov[3], E. A. Ryabova[4]

Abstract. In this article row of generalizations of behavior selection model in socio-economic system suggested by I.G. Pospelov is considered. In contrast to I.G. Pospelov's model process is considered in continuous time. Proposed models are described by systems with inheritance. They are analyzed basing on the mathematical theory of selection. Algorithm of behavior, which provides strategy selection with the best characteristics for any initial conditions, is proposed.

Key Words: Socio-economic systems, replicating system, strategy selection.

[3] Associate Professor of numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru

[4] Senior teacher of chair numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; riabova-ea@rambler.ru

УДК 517.9

Синтез стабилизирующего управления в дискретных системах без выходов

© Е. А. Кудашова[1]

Аннотация. В работе предлагается решение задачи стабилизации класса нестационарных нелинейных дискретных систем без выходов. Решение задачи стабилизации продемонстрировано на системах второго и третьего порядков.

Ключевые слова: стабилизация, дискретные системы, синтез управления, функции Ляпунова.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются вопросы численного конструирования стабилизирующего управления на основе теорем об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы.[1]

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу глобальной стабилизации неавтономных нелинейных системы без выходов вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + g(n, x(n))u(n), \tag{2.1}$$

Причем рассматриваемая система будет системой без потерь с положительно определенной функцией Ляпунова $V(n,x): \quad \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ и обратной связью $\alpha(n, x(n)):$ $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, такой что выходное отображение $y = y(n, x(n), u(n)): \ \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ является линейным по $u = u(n)$.

Определим

$$\widehat{\Omega}_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \ V(n_0 + i + 1, f^{i+1}_{\alpha_{n_0}}(x)) - V(n_0 + i, f^i_{\alpha_{n_0}}(x)) = 0 \ \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \ \left. \frac{\partial V(n_0 = i+1, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = f^{i+1}_{\alpha_{n0}}(x)} g(n_0 + i, f^i_{\alpha_{n_0}}(x)) = 0 \ \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

где $f_a(n,x) = f(n,x) + g(n,x)\alpha(n,x)$.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что для системы* (2.1) *существует закон обратной связи* $\alpha(n,x)$, $\alpha(n,0) \equiv 0$, *дважды непрерывно дифференцируемая положительно определенная, допускающая бесконечно малый верхний предел функция Ляпунова такая, что* $V(n+1, f_\alpha(n,x)) - V(n,x) \le 0$, *выполнены условия:*

[1] Аспирантка кафедры информациооной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; katherine.kudashova@yandex.ru

1) $V(n+1, f(n,x)+g(n,x)u)$ квадратична по u

2) $V(n,x)$ выпукла и $\left.\frac{\partial^2 V(n+1,\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=f_\alpha(n,x)} \geq 0$

3) $S_\alpha \cap \widehat{\Omega}_\alpha = \{0\}$ для исходных и предельных функций

то система (3.1) глобально стабилизируема посредством обратной связи:

$$u(n) = \alpha(n,x(n)) - \left(I + \tfrac{1}{2} g^T(n,x(n)) \left.\tfrac{\partial^2 V(n+1,\beta)}{\partial\beta^2}\right|_{\beta=f_\alpha(n,x(n))} g(n,x(n))\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\left.\tfrac{\partial V(n+1,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=f_\alpha(n,x(n))} g(n,x(n))\right)^T$$

Следствие 2.1. *Рассмотрим систему вида*

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n,x(n))u(n) \tag{2.2}$$

Предположим, что существует положительно определенная ограниченная матрица $P(n) \in \mathbb{R}^{m\times m}$: $A^T(n)P(n+1)A(n) - P(n) \leq 0$. Пусть S_A и Ω_A обозначают множества:

$$S_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \; x^T \left(\prod_{n=n_0}^{n_0+i+1} A(n)\right)^T P(n_0+i+1) g\left(n_0+i, \prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x\right) = 0 \quad \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$\Omega_A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^m : \; \left(\textstyle\prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x\right)^T (A^T(n_0+i)P(n_0+i+1)A(n_0+i) -$$
$$- P(n_0+i)) \textstyle\prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x = 0 \; \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \Big\}$$

Если $S_A \cap \Omega_A = \{0\}$ для исходных и предельных матриц, то система (2.2) глобально стабилизируема посредством обратной связи

$$u(n) = -\left(I + \frac{1}{2} g^T(n,x(n))P(n+1)g(n,x(n))\right)^{-1} g^T(n,x(n))P(n+1)A(n)x(n) \tag{2.3}$$

3. Применение методики на примерах

Пример 3.1. *Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_2(n) + 2(\sqrt{1+x_1^2(n)} - 1)u(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n) \end{cases} \tag{3.1}$$

Очевидно, матрицы линейного приближения имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ничего нельзя сказать из линейного приближения, так как здесь проблема стабилизации является критической. Более того, можно заметить, что к этой системе не может быть применен принцип сжимающих отображений.

С другой стороны, рассматривая функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$, *где* $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ *- положительно определенная, ограниченная матрица, для которой выполняется* $A^T(n)P(n+1)A(n) - P(n) \leq 0$.

Можно видеть, что

$$V(Ax) = V(x)\,,\ V(Ax) = \ = \tfrac{1}{2}(Ax)^T P(Ax) = \tfrac{1}{2}x^T A^T PAx\,.$$

Найдем множество S_A *, состоящее из* x *таких, что* $x^T A(n)^T P(n+1)g\,(n, A(n)x) = 0$ *и* x *таких, что* $x^T(A(n+1))^T P(n+1)g\,(n, A(n)x) = 0$

Проведем непосредственные вычисления. Согласно следствию 2.2 получим:

$$(Ax)^T Pg(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{1+x_1^2} - 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 - \sqrt{2}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot 2\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = \left(-x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = ,$$
$$= -\frac{2x_1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = 0$$

что влечет $x_1 = 0$ *и*

$$0 = (A^2x)^T Pg(Ax) \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 2\left(\sqrt{1+x_2^2} - 1\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1 + \sqrt{2}x_2 & x_2 - \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 2\left(\sqrt{1+x_2^2} - 1\right) ,$$

что влечет $x_2 = 0$.

Следовательно множество $S_A = \{0\}$. *По следствию 2.2 система* (3.1) *глобально равномерно стабилизируема посредством управления вида* (2.3) *с неполной обратной связью, без включения в управление компоненты* $x_2(n)$ *фазового вектора:*

$$u(n) = \frac{\sqrt{2}x_1(n)\left(\sqrt{1+x_2^2(n)} - 1\right)}{5 + 2x_1^2(n) - 4\sqrt{1+x_1^2(n)}}\,.$$

Пример 3.2. *Рассмотрим нелинейную дискретную систему третьего порядка с векторным управлением*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n)x_3(n) + \frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)x_3(n)u_1(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n)\sin x_2(n) - x_3^2(n) + u_2, \\ x_3(n+1) = -x_3(n)\sin x_1(n). \end{cases} \tag{3.2}$$

Согласно теореме 2.1 выберем закон обратной связи, исключающий компоненту x_3 *в первых двух уравнениях*

$$\alpha(n,x) = \begin{pmatrix} -x_1(n)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \\ x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(n,0) \equiv 0,$$

Тогда управление в исходной системе можно представить как

$$u(n,x) = \alpha(n,x) + \tilde{u}(n,x)$$

А сама система примед вид

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)} + x_3(n)\tilde{u}_1(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n)\sin x_2(n) + \tilde{u}_2, \\ x_3(n+1) = -x_3(n)\sin x_1(n). \end{cases}$$

В этом случае, преобразованная система (3.2) *будет иметь вид:*

$$x(n+1) = f_\alpha(x(n)) + g(x(n))\tilde{u}(n),$$

Где $f_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2} \\ x_1\sin x_2 \\ -x_3\sin x_1 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Из теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению следует, что система (3.2) *локально стабилизируема. Покажем, что система* (3.2) *может быть не только локально, но и глобально стабилизируема.*

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. *Полагая* $V(f_\alpha(x)) = V(x)$, *имеем*

$$\frac{x_2^2}{1+x_1^2} + x_1^2\sin^2 x_2 + x_3^2\sin^2 x_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

1)$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ *или*

2)$x_1 = 0 \Rightarrow (x_3 = 0 \;$ *и* $\; x_2 \in \mathbb{R})$.

В первом случае все очевидно. Рассмотрим подробнее второй случай. Заметим, что в этом случае $\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big|_{\theta=f_\alpha} g(x) = 0$ *имеет вид*

$(\frac{x_2^2}{1+x_1^2} + x_1^2\sin^2 x_2 + x_3^2\sin^2 x_1)\begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$ *что влечет* $\begin{cases} \frac{x_2x_3}{1+x_1^2} = 0, \\ x_1\sin x_2 = 0 \end{cases}$

Что дает те же самые решения $x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$. *Непосредственные вычисления показывают, что*

$$f_\alpha^2(x) = f_\alpha(f_\alpha(x)) = \begin{pmatrix} \frac{x_1\sin x_2}{1+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2}} \\ \frac{x_2}{1+x_1^2}\sin(x_1\sin x_2) \\ x_3\sin x_1\sin\frac{x_2}{1+x_1^2} \end{pmatrix}, g(f_\alpha(x)) = \begin{pmatrix} -x_3\sin x_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0\ \ 0 & \end{pmatrix}$$

$$x_1^2\cos^2 x_2 + x_3^2\cos^2 x_1 + x_2^2(\frac{1}{1+x_1^2}) = 0$$

Используя соотношение $V(f_\alpha^2(x)) = V(f_\alpha(x)) = V(x)$, *получаем*
или

$$x_2^2\left(1 - \frac{\sin^2(x_1\sin x_2)}{(1+x_1^2)^2}\right) = 0.$$

Так как $x_1 = 0\ x_3 = 0,$ *то это влечет* $x_2 = 0$. *Следовательно, в любом случае имеем* $S_\alpha \cap \widehat{\Omega}_\alpha = \{0\}$. *Итак, система* (3.2) *может быть глобально стабилизируема (решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво) посредством следующего непрерывно дифференцируемого по переменным состояния векторного управления с обратной связью:*

$$u(n,x(n)) = \alpha(n,x(n)) - \left(I + \tfrac{1}{2}g^T(n,x(n))g(n,x(n))\right)^{-1} g^T(n,x(n)) f_\alpha(n,x(n)) =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1(n)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{2x_2(n)x_3(n)}{(x_3^2(n)+2)(x_1^2(n)+1)} \\ x_3^2(n) - \frac{2}{3}x_1(n)\sin x_2(n) \end{pmatrix}$$

4. Заключение

Развитие методики для автономных систем в непрерывном времени дано в статье [2]. Представленные результаты для дискретныч нестационарныч нелинейныч систем непосредственно примыкают к результатам работ [1],[2]. Однако, перспективным предметом исследования является получение аналогичных результатов для непрерывных систем.

Список литературы

1. Богданов А. Ю., Кудашова Е. А., “Численные методы синтеза управления в нестационарных дискретных системах”, *Ученые записки УлГУ. Математика и информационные технологии*, 2010, № 1(3), 9–18.

2. Byrnes C. I., Lin W., “Losslessness, feedback equivalence and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems”, *IEEE Trans. on Aut. Control.*, 1994, № 39(1), 83–98.

On stabilization of discrete systems without outputs

© **E. A. Kudashova**[2]

Abstract. This paper focuses on a question of stabilization of nonstationary nonlinear discrete systems without outputs. The application of stabilization technique is demonstrated on the second and third orders systems.

Key Words: stabilization, discrete systems, Lyapounov direct method.

[2] PhD-student of Information Security and Control Theory department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk;katherine.kudashova@yandex.ru

УДК 517.9

Доказательство регулярной локальной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины

© **Л. Е. Платонова**[1]

Аннотация. Рассмотрено квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка с начальными условиями, заданными в декартовых координатах. Доказана теорема, в которой сформулированы условия локальной разрешимости и показано, что решение имеет ту же гладкость, что и начальная функция.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$\partial_{x_2} u + u\partial_{x_1} u = -U(x_1, x_2, u)u, \tag{1.1}$$

где $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, 2, \quad U(x_1, x_2, u) \in \overline{C}^{2,1,2}$. Решение ищется в окрестности некоторой линии L, которая задается уравнением $x_2 = \phi(x_1), \quad -\infty < x_1 < +\infty$. Соответственно, задача Коши ставится следующим образом:

$$u(x_1, x_2)|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty). \tag{1.2}$$

Функции $\phi(x_1)$, $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$, где $\overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $N_\gamma = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$. В общих чертах схема применения метода дополнительного аргумента (далее МДА) к задаче Коши вида (1.1), (1.2) была намечена в [3].

В рамках данной работы рассмотрен случай, когда линия L и область определения неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ содержится во множестве

$$\Omega_\beta = \left\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty;+\infty)}(\phi(x_1) - \beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max_{(-\infty;+\infty)}(\phi(x_1) + \beta_0)\right\}, \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Принципиальная особенность изучаемой задачи состоит в том, что наряду с поиском неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ ищется и область определения решения. Соответственно, постоянная β_0 должна быть достаточно велика, чтобы искомая область определения $u(x_1, x_2)$ входила в Ω_β. Обозначим эту заранее неизвестную область определения решения задачи (1.1), (1.2) через $Q = \{(x_1, x_2, u) : (x_1, x_2) \in \Omega_\beta, |u| \leqslant 10N_\gamma\}$. Так как в данной статье речь идет о локальной разрешимости, то область Q представляет собой некоторую окрестность кривой L.

[1] Старший преподаватель кафедры математики и математического образования, Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, г. Н.Новгород; fluff13@yandex.ru

В работах [1], [2] с помощью метода дополнительного аргумента были установлены условия локальной разрешимости в исходных координатах "одноосной"задачи Коши:

$$a(x,y,z)\partial_1 z + b(x,y,z)\partial_2 z = f(x,y,z),$$
$$z|_{x=0} = \phi(y), \quad y \in (-\infty;+\infty), \quad x \in [0;X]$$

без использования предположений о поведении характеристик. В [4], [5] был рассмотрен случай, когда линия L, несущая данные Коши, задается параметрическими уравнениями $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, в связи с чем задача Коши ставилась следующим образом: $z|_L = \gamma(t)$. В работах [9], [10] рассмотрена задача:

$$a_1(x_1,x_2,z)\partial_1 z + a_2(x_1,x_2,z)\partial_2 z = f(x_1,x_2,z),$$
$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty;+\infty).$$

В некоторых из статей [1] — [10] при доказательстве локальной разрешимости задачи Коши не удается достичь того, чтобы гладкость полученного решения была не ниже, чем гладкость начальной функции. При исследовании задачи (1.1) – (1.2) такая гладкость была получена. Будем называть локальную разрешимость задачи Коши, в которой полученное решение имеет гладкость не ниже, чем гладкость начальной функции регулярной локальной разрешимостью задачи Коши.

Продифференцируем уравнение (1.1) по x_1:

$$\partial^2_{x_1x_2}u + u\partial^2_{x_1x_1}u + (\partial_{x_1}u)^2 = -U(x_1,x_2,u)\partial_{x_1}u - \partial_{x_1}U(x_1,x_2,u)\cdot u - \partial_u U(x_1,x_2,u)\cdot u\cdot\partial_{x_1}u.$$

Введем обозначения:

$$q = \partial_{x_1}u,\; U_1 = \partial_{x_1}U,\; U_2 = \partial_u U. \tag{1.3}$$

Тогда предыдущее уравнение перепишется в виде:

$$\partial_{x_2}q + u\partial_{x_1}q = -q^2 - U(x_1,x_2,u)q - U_1(x_1,x_2,u)\cdot u - U_2(x_1,x_2,u)\cdot u\cdot q, \tag{1.4}$$

С учетом (1.3) зададим начальное условие для функции $q(x_1,x_2)$:

$$q(x_1,x_2)|_L = \gamma'(x_1). \tag{1.5}$$

Введем обозначение:

$$A\left(x_1,x_2,\right) = U\left(x_1,x_2,u\right) + U_2\left(x_1,x_2,u\right)\cdot u.$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид:

$$\partial_{x_2}q + u\partial_{x_1}q = -q^2 - A(x_1,x_2,u)q - U_1(x_1,x_2,u)\cdot u. \tag{1.6}$$

В рамках метода дополнительного аргумента [3] запишем для задачи (1.1),(1.2),(1.5),(1.6) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta_1}{ds} = V, \tag{1.7}$$

$$\frac{d\eta_2}{ds} = 1, \tag{1.8}$$

$$\frac{dV}{ds} = -U\left(\eta_1,\eta_2,V\right)\cdot V \tag{1.9}$$

$$\frac{dW}{ds} = -W^2 - A(\eta_1, \eta_2, V) \cdot W - U_1(\eta_1, \eta_2, V) \cdot V \tag{1.10}$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2, V|_L = \gamma(\eta_1(0, x_1, x_2)), W|_L = \gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2)). \tag{1.11}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2)$, $\eta_1(s, x_1, x_2)$, $\eta_2(s, x_1, x_2)$, $V(s, x_1, x_2)$, $W(s, x_1, x_2)$ — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным, s – дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Значение ω на кривой, заданной уравнением $x_2 = \phi(x_1)$ полагаем равной нулю, то есть $\omega(x_1, \phi(x_1)) = 0$.

Для получения решения в исходных координатах решения уравнений (1.7), (1.8) должны иметь возможность быть представленными в виде:

$$\begin{gathered}\eta_1 = x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \\ \eta_2 = x_2 - \omega(x_1, x_2) + s.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Представление (1.12) оправдано, если можно определить новую заранее неизвестную функцию $\theta(x_1, x_2)$, для которой в некоторой области изменения ее аргументов были бы справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}\theta\left(x_1, x_2\right) = x_1 - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \\ \varphi\left(\theta\left(x_1, x_2\right)\right) = x_2 - \omega\left(x_1, x_2\right).\end{gathered} \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.9)–(1.11) при допустимости (1.12):

$$V(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s U(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), V(\delta, x_1, x_2)) V(\delta, x_1, x_2) d\delta. \tag{1.14}$$

А из соотношений (1.10)–(1.11) при допустимости (1.12):

$$W(s, x_1, x_2) = \gamma'(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s \Big(W^2 + A(\eta_1, \eta_2, V) \cdot W + U_1(\eta_1, \eta_2, V) \cdot V\Big)\, d\delta. \tag{1.15}$$

Лемма 1.1. *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (1.12), (1.14), (1.15), (1.11) *дает решение задачи Коши* (1.1)–(1.2).

Аналогичная лемма доказывается в работе [4]. В ней было выведено основное условие разрешимости. Получим такое условие для нашей задачи. Для вывода этого условия проведем следующие выкладки: продифференцируем первое и второе уравнение (1.13) по x_1 и x_2. Получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 1 - V(\omega, x_1, x_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \frac{\partial V}{\partial x_1} d\delta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -V(\omega, x_1, x_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \frac{\partial V}{\partial x_2} d\delta.\end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\phi'\frac{\partial\theta}{\partial x_1}&=-\frac{\partial\omega}{\partial x_1},\\ \phi'\frac{\partial\theta}{\partial x_2}&=1-\frac{\partial\omega}{\partial x_2}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Умножим первое уравнение системы (1.16) на $u(x_1,x_2)=V(\omega,x_1,x_2)$ и сложим со вторым. Будем иметь:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+u\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=u-V(\omega,x_1,x_2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+u\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}+u\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)d\delta.\tag{1.18}$$

Умножим первое уравнение системы (1.17) на $u(x_1,x_2)=V(\omega,x_1,x_2)$ и сложим со вторым. Получим:

$$\phi'\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+u\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)=1-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+u\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right).\tag{1.19}$$

Обозначим

$$\underline{\zeta}=\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}.$$

Мы получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\underline{\theta}+u\left(\underline{\omega}-1\right)&=-\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\underline{V}d\delta,\\ \phi'\underline{\theta}+(\underline{\omega}-1)&=0.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Система (1.20) разрешима, когда

$$J=\begin{vmatrix}1 & u\\ \phi' & 1\end{vmatrix}\neq 0.\tag{1.21}$$

Доказано, что решение задачи (1.1)–(1.2) дает решение системы уравнений (1.14)–(1.15) и наоборот, что непрерывно дифференцируемое решение задачи (1.14)–(1.15) при $s=$ $=\omega(x_1,x_2)$ будет решением задачи (1.1)–(1.2).

Лемма 1.2. *Пусть* $\gamma\in\overline{C}^2(\mathbb{R}^1)$, $U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\overline{C}^{0,2,2}(R(\Omega_\beta K))$, *причем* $|\omega|$ *и* K *подобраны таким образом, что выполняется неравенство*

$$N_\gamma+|\omega|M(K)\leqslant K.$$

Тогда при $0\leqslant|\omega|\leqslant\omega^*$, *где* $\omega^*=\min\{l(K)l_1;l(K)M_4(K)\}$ *система уравнений* (1.14) – (1.15) *имеет единственное решение* $V(s,x_1,x_2)$, $W(s,x_1,x_2)\in C(Q)$.

Наметим основные этапы доказательства. Чтобы доказать существование решения системы (1.14)–(1.15), воспользуемся методом последовательных приближений. За начальные условия приняты функции $\mu_1^0(s,x_1,x_2)=0$, $\mu_2^0(s,x_1,x_2)=0$, $V^0(s,x_1,x_2)=\gamma(x_1)$, $W^0(s,x_1,x_2)=\gamma'(x_1)$, а остальные определены из рекуррентной системы:

$$\begin{aligned}&V^n(s,x_1,x_2)=\gamma(\theta^n(x_1,x_2))-\\ &\quad-\int\limits_0^s U(x_1-\mu_1^{n-1}(\delta,x_1,x_2),x_2-\mu_2^{n-1}(\delta,x_1,x_2),V^{n-1}(\delta,x_1,x_2))V^{n-1}(\delta,x_1,x_2)d\delta,\end{aligned}\tag{1.22}$$

$$W^n(s,x_1,x_2)=\gamma'(\theta^n(x_1,x_2))-\int\limits_0^s\Big((W^{n-1})^2+A(x_1-\mu_1^{n-1},x_2-\mu_2^{n-1},V^{n-1})\cdot W^{n-1}+$$
$$+U_1(x_1-\mu_1^{n-1},x_2-\mu_2^{n-1},V^{n-1})\cdot V^{n-1}\Big)d\delta,\quad (1.23)$$

$$\theta^n\left(x_1,x_2\right)=x_1-\int\limits_0^{x_2-\varphi(\theta^n(x_1,x_2))}V^{n-1}(\delta,x_1,x_2)d\delta,\quad (1.24)$$

$$\omega^n(x_1,x_2)=x_2-\varphi(\theta^n(x_1,x_2)),\quad (1.25)$$

$$\mu_1^n(s,x_1,x_2)=\int\limits_s^{\omega^n(x_1,x_2)}V^{n-1}(\delta,x_1,x_2)d\delta,\quad (1.26)$$

$$\mu_2^n(s,x_1,x_2)=\omega^n(x_1,x_2)-s,\quad (1.27)$$

где $\mu_1^n=x_1-\eta_1^n$, $\mu_2^n=x_2-\eta_2^n$.
Доказана ограниченность последовательных приближений (1.22). Чтобы доказать сходимость последовательных приближений (1.22), рассмотрим разности $n+1$–го и n–го приближений. Так как в правой части уравнения (1.22) в аргументе функции γ содержится функция θ^n, а в аргументе функции U содержаться функции μ_1^{n-1}, μ_2^{n-1}, нам придется так же рассмотреть разности $n+1$–го и n–го приближений для функций θ^n, μ_1^n, μ_2^n.
Оценив полученные выражения, сложив их и введя обозначения:

$$\tilde V^n=colon\big(\mu_1^n,\mu_2^n,V^n\big),\ \left\|\tilde V^{n+1}-\tilde V^n\right\|=\left\|\mu_1^{n+1}-\mu_1^n\right\|+\left\|\mu_2^{n+1}-\mu_2^n\right\|+\left\|V^{n+1}-V^n\right\|,$$
$$l_1=\max\left\{M_1(K),\ M_2(K),\ \frac{M_3(K)(1-N_\phi K)+N_\gamma+N_\phi+1}{1-N_\phi K}\right\},\ l(K)=\frac{K-N_\gamma}{M(K)}$$

будем иметь:

$$\left\|\tilde V^{n+1}-\tilde V^n\right\|\leqslant l(K)l_1\left\|\tilde V^n-\tilde V^{n-1}\right\|,\quad (1.28)$$

где $l(K)l_1<1$, а $M(K)$, $M_1(K)$, $M_2(K)$, $M_3(K)$, N_ϕ, N_γ – положительные константы.
Введем обозначения: $I_1=\|(\mu_1^0,\mu_2^0,V^0)\|$, $I_2=\|(\mu_1^1,\mu_2^1,V^1)\|$, тогда

$$\left\|\tilde V^0\right\|\leqslant I_1,\ldots,\left\|\tilde V^i-\tilde V^{i-1}\right\|\leqslant\left(l(K)l_1\right)^{i-1}I_2,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Имеем для ряда $\tilde V^0+\tilde V^1-\tilde V^0+\tilde V^2-\tilde V^1+\ldots+\tilde V^n-\tilde V^{n-1}+\ldots$ оценку его частичной суммы:

$$\left\|\tilde V^n\right\|\leqslant\left\|\tilde V^0\right\|+\left\|\tilde V^1-\tilde V^0\right\|+\left\|\tilde V^2-\tilde V^1\right\|+...+\left\|\tilde V^n-\tilde V^{n-1}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant I_1+I_2\left(1+l(K)l_1+\left(l(K)l_1\right)^2+\ldots+\left(l(K)l_1\right)^{n-1}\right),$$
$$\left\|\tilde V^n\right\|\leqslant I_1+\frac{I_2}{1-l(K)l_1}.$$

Это значит, частичная сумма $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\tilde V^i$ сходится к функции $\psi_1\in C(Q)$ по норме этого пространства.
Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (1.22), получим, что функция $V(s,x_1,x_2)$

будет удовлетворять уравнению (1.14). Единственность следует из того факта, что для разности двух возможных решений V_I и V_{II} будет выполняться неравенство вида (1.28), то есть $\|V_{II}-V_I\| \leqslant l(K)l_1\|V_{II}-V_I\|$, где $l(K)l_1<1$.
Аналогично доказывается существование уравнения (1.15).

Лемма 1.3. *При выполнении условий леммы 2* $V(s,x_1,x_2) \in \overline{C}^{1,2,1}(Q)$, $W(s,x_1,x_2)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q)$.

Наметим основные этапы доказательства. Чтобы доказать существование, непрерывность и ограниченность частной производной по x_2 у функции $V(s,x_1,x_2)$, продифференцируем по x_2 соотношение (1.22), определяющее последовательные приближения для $V(s,x_1,x_2)$. Так как в аргументах функций, содержащихся в правой части уравнения (1.22), присутствуют функции $\theta^n(x_1,x_2)$, μ_1^{n-1}, μ_2^{n-1}, продифференцируем так же по x_2 соотношения (1.24), (1.26), (1.27) с учетом (1.25). Оценив выражения для $\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, сложив их и введя обозначения:

$$\hat{\hat{V}}^n=\left\|\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}\right\|+\left\|1-\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}\right\|+\left\|\frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right\|,\ N_1=\frac{K(N_\gamma+N_\varphi+1)}{1-N_\varphi K},$$

будем иметь: $\hat{\hat{V}}^n\leqslant N_1+l(K)l_1\hat{\hat{V}}^{n-1}$.
В силу того, что $\frac{\partial\mu_1^0}{\partial x_2}=0,\ 1-\frac{\partial\mu_2^0}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial V^0}{\partial x_2}=0$, то $\hat{\hat{V}}^0=1$, поэтому

$$\hat{\hat{V}}^1\leqslant N_1+l(K)l_1,$$
$$\dots$$
$$\hat{\hat{V}}^n\leqslant N_1\left(1+l(K)l_1+(l(K)l_1)^2+\ldots+(l(K)l_1)^{n-1}\right)+(l(K)l_1)^n.$$

Из последнего неравенства будем иметь: $\hat{\hat{V}}^n\leqslant\dfrac{N_1}{1-l(K)l_1}+(l(K)l_1)^n$.

Так как $l(K)l_1<1$, то и $(l(K)l_1)^n<1$. Этим мы получили, что $\hat{\hat{V}}^n$ – ограничена, а, следовательно, ограничены и $\left\|\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}\right\|$, $\left\|1-\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}\right\|$, $\left\|\frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right\|$.
Чтобы доказать сходимость $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$ к $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, рассмотрим линейные интегральные уравнения относительно неизвестных функций $E_1(s,x_1,x_2)$, $E_2(s,x_1,x_2)$, $E_3(s,x_1,x_2)$, $E_4(x_1,x_2)$:

$$E_1(s,x_1,x_2)=\gamma'(\theta)\cdot E_4-\int\limits_0^s\big(\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_1\cdot E_2+$$
$$+\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_2\cdot E_3+\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_3\cdot E_1\big)d\delta, \tag{1.29}$$

$$E_4(x_1,x_2)=-V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)\cdot(1-\varphi'(\theta)\cdot E_4)-\int\limits_0^{x_2-\varphi(\theta)}E_1d\delta, \tag{1.30}$$

$$E_3(s,x_1,x_2)=\varphi'(\theta)\cdot E_4, \tag{1.31}$$

$$E_2(s,x_1,x_2)=-V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)\cdot(1-\varphi'(\theta)\cdot E_4)-\int\limits_s^{x_2-\varphi(\theta)}E_1d\delta. \tag{1.32}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается, что уравнение (1.29), а, следовательно и уравнения (1.30)–(1.32) имеет решение, принадлежащее пространству

$C(Q)$. Оценив разности $E_1 - \frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $E_2 - (-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2})$, $E_1 - (1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2})$, $E_4 - \frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$ и, подставив выражение для $E_4 - \frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$ в $E_1 - \frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $E_2 - (-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2})$, $E_1 - (1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2})$, сложим оставшиеся выражения и введем обозначения: $\nu = colon\,(E_2,\, E_3,\, E_1)$, $\nu^n = colon\left(\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2},\, 1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2},\, \frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right)$, будем иметь:

$$\|\nu - \nu^n\| \leqslant l(K)l_1 \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + E_n.$$

В силу ограниченности $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2}$, $1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2}$, сходимости $V^n \to V,\ \theta^n \to \theta,\ \mu_1^n \to \mu_1$, $\mu_2^n \to \mu_2$ при всех n $\forall \epsilon > 0$ $\exists N$ такое, что $\forall n \geqslant N$ $\|E_n\| < \epsilon$.
Предыдущее неравенство примет вид:

$$\|\nu - \nu^n\| \leqslant l(K)l_1 \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + \epsilon.$$

Так как $l(K)l_1 < 1$, то для любого $p > 0$ будем иметь:

$$\left\|\nu - \nu^{n+p}\right\| \leqslant (l(K)l_1)^{p+1} \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + \frac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}.$$

Переходя к пределу, будем иметь: $\|\nu - \nu^{n+p}\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}$. В силу того, что $l(K)l_1 < 1$ $\forall \sigma > 0\ \exists \widetilde{N}\ \forall p > \widetilde{N}$ будет $\|\nu - \nu^{n+p}\| \leqslant \sigma$, где $\sigma = \dfrac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}$.
Этим мы доказали, что $\frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to E_1$ при $n \to \infty$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial V^n}{\partial x_1}$ сходится к некоторой функции $e_1 \in C(Q)$.
В результате для последовательности V^n установлены следующие свойства:

$$V^n \to V,\ \frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to E_1,\ \frac{\partial V^n}{\partial x_1} \to e_1 \,\text{при}\, n \to \infty.$$

Имеем, что $V^n \in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходятся по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что $V \in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладает частными производными по s, x_1, x_2, причем $\frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial V}{\partial x_2} \equiv E_1$, $\frac{\partial V^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial V}{\partial x_1} \equiv e_1$.
Также мы доказали, что $\mu_1^n,\, \mu_2^n \in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходятся по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что $\mu_1,\, \mu_2 \in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладают частными производными по s, x_1, x_2, причем $-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2} \to -\frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \equiv E_2$, $1 - \frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_1} \to$ $\to 1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} \equiv e_2$, $1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2} \to 1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} \equiv E_3$, $-\frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_1} \to -\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} \equiv e_3$.
Аналогичные рассуждения проводятся при доказательстве существования, непрерывности, ограниченности частных производных сначала по x_2, а потом и по x_1 для функции $W(s, x_1, x_2)$. В ходе доказательства установлена сходимость $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}$ к $\frac{\partial W}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial W^n}{\partial x_1}$ к $\frac{\partial W}{\partial x_1}$. Функции $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial W^n}{\partial x_1}$ получены дифференцированием (1.15) по x_2 и по x_1. Чтобы несколько облегчить доказательство сходимости, рассматриваются линейные интегральные уравнения:

$$G(s, x_1, x_2) = \gamma''(\theta(x_1, x_2)) \cdot E_4 - \int\limits_0^s \Big(2W \cdot G + \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_1 \cdot E_2 +$$
$$+ \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_2 \cdot E_3 + \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_3 \cdot E_1 +$$
$$+ A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot G + \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_1 \cdot E_2 +$$
$$+ \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_2 \cdot E_3 + \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_3 \cdot E_1\Big) d\delta,$$

$$g(s,x_1,x_2)=\gamma''(\theta(x_1,x_2))\cdot e_4-\int_0^s\Big(2W\cdot g+\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_1\cdot e_2+ \\ +\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_2\cdot e_3+\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_3\cdot e_1+ \\ +A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot g+\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_1\cdot e_2+ \\ +\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_2\cdot e_3+\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_3\cdot e_1\Big)d\delta.$$

Для последовательности $\{W^n\}$ установлены следующие свойства:

$$W^n\to W,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_2}\to G,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_1}\to g\,\text{при}\,n\to\infty.$$

Доказано, что $W^n\in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходится по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что $W\in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладает частными производными по s,x_1,x_2, причем $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}\to\frac{\partial W}{\partial x_2}\equiv G,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_1}\to\frac{\partial W}{\partial x_1}\equiv g$.
Таким образом для всех $0\leqslant s\leqslant\omega\leqslant\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty$:

$$|V(s,x_1,x_2)|\leqslant K,\ |W(s,x_1,x_2)|\leqslant K,\ \left|\frac{\partial V(s,x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant N_V^{x_2},\ \left|\frac{\partial V(s,x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant N_V^{x_1}, \\ \left|\frac{\partial W(s,x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant\frac{N_2}{1-l(K)M_4(K)},\ \left|\frac{\partial W(s,x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{N_4}{1-l(K)M_4(K)}.$$

Функция $u(x_1,x_2)=V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)$ будет искомым решением задачи Коши (1.1)–(1.2), а функция $q(x_1,x_2)=W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)$ будет удовлетворять задаче Коши (1.4)–(1.5) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (1.6)–(1.5). А также

$$|u(x_1,x_2)|=|V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)|=|V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)|\leqslant K, \\ |q(x_1,x_2)|=|W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)|=|W(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)|\leqslant K, \\ \left|\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|=\left|\frac{\partial V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant N_V^{x_2},\ \left|\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|=\left|\frac{\partial V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant N_V^{x_1}, \\ \left|\frac{\partial q(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|=\left|\frac{\partial W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant\frac{N_2}{1-l(K)M_4(K)}, \\ \left|\frac{\partial q(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|=\left|\frac{\partial W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{N_4}{1-l(K)M_4(K)}$$

для всех $(x_1,x_2)\in\Omega_0$ где $\Omega_0=\{(x_1,x_2):0\leqslant\omega\leqslant\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty\}$. Учитывая, что $\omega=x_2-\varphi(\theta)$, будем иметь: $\Omega_0=\{(x_1,x_2):\varphi(\theta)\leqslant x_2\leqslant\varphi(\theta)+\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty\}$, где $\omega^*=\min\{l(K)l_1;l(K)M_4(K)\}$.
Таким образом, мы получили, что $u\in\overline{C}^{1,1}(\Omega_0),\ q\in\overline{C}^{1,1}(\Omega_0)$. Следующим этапом является доказательство что существуют $\partial^2_{x_1x_1}u$ и $\partial^2_{x_1x_2}u$, но на $\gamma(x_1)$ не используется больше, чем $\gamma\in\overline{C}^2(\mathbb{R})$.Доказательство основано на методе последовательных приближений. Доказана ограниченность $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2},\ \dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}$. Установлено, что $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2}$ сходится к некоторой функции Y_1, а $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}$ к y_1. В результате, получено, $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2}\to\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1^2}\equiv Y_1,\ \dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}\to\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1x_2}\equiv y_1$ и $\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2},\ \dfrac{\partial^2V}{\partial x_1x_2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1x_2}$.

Докажем, что $\partial_{x_2} u = q$.Для этого продифференцируем уравнение (1.1) по x_1 :

$$\partial^2_{x_1x_2} u + (\partial_{x_1} u)^2 + u\partial^2_{x_1x_1} u = -\partial_{x_1} U(x_1, x_2, u) \cdot u - \partial_u U(x_1, x_2, u) \cdot \partial_{x_1} u \cdot u - U(x_1, x_2, u)\partial_{x_1} u. \tag{1.33}$$

Взяв разность (1.33) и (1.4) и обозначив $\partial_{x_1} u = c$, $c - q = z$, $H = -c - q - U(x_1, x_2, u) - -u \cdot U_2(x_1, x_2, u)$ для функции z получим систему:

$$\begin{cases} \partial_{x_2} z + u\partial_{x_1} z = Hz, \\ z|_L = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы найдем, что функция $z = c - q \equiv 0$, а, следовательно, $c = q$. Таким образом, доказано, что $\partial_{x_1} u = q$. Так как $c = q$, $\partial_{x_1} c = \partial_{x_1} q$, то $\partial^2_{x_1x_1} u = \partial_{x_1} q$. Доказана теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty, +\infty)$, $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \overline{C}^{2,1,2}(R(\Omega_\beta K))$, *где* $R(\Omega_\beta K) = \Omega_\beta \times [K; K]$, $K = 10N_\gamma$ *- произвольно зафиксированное положительное число;* L *— однонаправлено регулярная кривая* $x_2 = \phi(x_1)$ *; выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$ *, где* $J = 1 - \phi' u$ *.Тогда при* $0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega^*$ *, где*
$\omega^* = \min\{l(K)l_1; l(K)M_4(K); l(K)l_3\}$ *, где*

$$l_1 = \max\left\{M_1(K), M_2(K), \frac{1 + M_3(K)(1 - N_\varphi K) + N_\phi + N_\gamma}{(1 - N_\phi K)}\right\},$$
$$l_3 = \max\left\{P_1(K),\ P_2(K),\ \frac{N_\gamma + N_\varphi + 1 + P_3(K)(1 - N_\phi K)}{1 - N_\phi K}\right\},$$

задача Коши (1.1) — (1.2) *имеет единственное решение* $u(x_1, x_2) \in \overline{C}^{2,1}(Q)$ *, которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $V(s, x_1, x_2)$ *, определяемой из системы* (1.12), (1.14), (1.15), (1.11).

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной"задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

2. Алексеенко С. Н., “Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в "одноосной"задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2010, № 12, 51–57.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “Условия целесообразности применения метода дополнительного аргумента к квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка в частных производных общего вида”, *Асимптотические топологические и компьютерные методы в математике*, Труды межд. научн. конф. посвящ. 70-летию академика М. И. Иманалиева (Бишкек, КГНУ), Сер.3. Естеств. и техн. науки, Матем. науки. Информ. и инф. технологии, Вестник КГНУ, 2001, 6–7.

4. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

5. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Доказательство локальной разрешимости резольвентной системы интегральных уравнений, соответствующей квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных.”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2012, № 14, 41–51.

6. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. АН*, **329**:5 (1993), 543–546.

7. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

8. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

9. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.

10. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 27–37.

Proof of regular local solvability of the Cauchy problem for differential equations in partial derivatives of the first order with initial data in Cartesian coordinates on line infinite length

© **L. E. Platonova**[2]

Abstract. The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation is studied in case when initial data is given on an infinite length smooth line with non-vertical gradient. A system of integral equations, a solution of which gives a solution of the considered Cauchy problem in original coordinates and the solution has the same smoothness that the initial function, is constructed. Local solvability conditions, which do not include in itself assumptions about behavior of the characteristic lines, are presented in a theorem which proved here.

Key Words: quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument

[2] The senior lecturer of the mathematics and mathematical education chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; fluff13@yandex.ru

УДК 517.95

Обратная задача для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

© Т. К. Юлдашев [1] А. Г. Лоскутова[2]

Аннотация. В данной работе изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Модифицируется метод вырожденного ядра, разработанного для интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Используется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, уравнение эллиптического типа, интегро-дифференциальное уравнение, интегральное преобразование, метод последовательных приближений

1. Постановка задачи

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \int\limits_0^T K(t,s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds = f(t,x,\sigma(t)) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \phi_1(x),\ u_t(0,x) = \phi_2(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = \phi_1(0) + \phi_2(0)t - N_1\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{1.3}$$

$$u_x(t,0) = \phi_1'(0) + \phi_2'(0)t - N_2\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f_x(s,0,\sigma(s))ds \tag{1.4}$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x_0) = \psi(t),\ t \in \Omega_T,\ x_0 \neq 0, \tag{1.5}$$

$$\sigma(0) = \sigma_0 = const \neq 0, \tag{1.6}$$

где $f(t,x,\sigma(t)) \in C^{0,2,0}(\Omega \times \Omega_T)$, $\phi_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $K(t,s) = a(t)b(s)$, $a(t), b(s) \in C(\Omega_T)$, $\sigma(t)$ – восстанавливаемая функция, N_i – заданные постоянные, $i = 1,2$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbb{R} \equiv (-\infty,\infty)$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений эллиптического типа посвящено много работ. Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений эллиптического

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru;

[2] Студентка факультета машиноведения и мехатроники, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

типа посвящено сравнительно меньше. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [1], [2]. Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти, например в [3] - [5].

В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\sigma(t)$ нелинейно входит в уравнение. Задание условия (1.6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t=0$.

Определение 1.1. *Решением обратной задачи (1.1)-(1.6) называется пара функций* $\left\{u(t,x)\in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t)\in C(\Omega_T)\right\}$, *удовлетворяющая уравнению (1.1) и условиям (1.2)-(1.6).*

2. Начальная задача (1.1)-(1.4)

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром [6]. При помощи обозначения

$$c(x)=\int\limits_0^T b(s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds \tag{2.1}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1.1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+a(t)c(x)=f(t,x,\sigma(t)).$$

С учетом условия (1.2) двукратное интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t,x)=\phi_1(x)+\phi_2(x)t-c(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f(s,x,\sigma(s))ds. \tag{2.2}$$

Дифференцируем (2.2) два раза по x:

$$u_x(t,x)=\phi_1'(x)+\phi_2'(x)t-c'(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f_x(s,x,\sigma(s))ds, \tag{2.3}$$

$$u_{xx}(t,x)=\phi_1''(x)+\phi_2''(x)t-c''(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f_{xx}(s,x,\sigma(s))ds. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.1), имеем

$$c(x)=\int\limits_0^T b(s)\Big[\phi_1''(x)+\phi_2''(x)s-c''(x)\int\limits_0^s (s-\theta)a(\theta)d\theta+\int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta\Big]ds. \tag{2.5}$$

Пусть

$$A=\int\limits_0^T b(s)q(s)ds>0, \tag{2.6}$$

где $q(t)=\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds$.

Тогда для определения $c(x)$ в (2.1) получаем из (2.5) следующее дифференциальное уравнение

$$c''(x)+Bc(x)=F(x), \tag{2.7}$$

где $B=A^{-1}$, $F(x)=BF_0(x)$,

$F_0(x)=\int\limits_0^T b(s)\Big[\phi_1''(x)+\phi_2''(x)s\Big]ds+\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta ds$.

Решая дифференциальное уравнение (2.7) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c(x)=D_1\cos\nu x+D_2\sin\nu x+\frac{1}{\nu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy, \tag{2.8}$$

где $Q(x,y)=\sin\nu(x-y)$, $\nu=\sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i=1,2$.

Из (2.8) имеем

$$c(0)=D_1,\ c'(0)=\nu D_2. \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) из (2.2) и (2.3) получаем, что

$$u(t,0)=\phi_1(0)+\phi_2(0)t-D_1\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{2.10}$$

$$u_x(t,0)=\phi_1'(0)+\phi_2'(0)t-\nu D_2\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds. \tag{2.11}$$

Сравнение соотношений (2.10) и (2.11) с заданными условиями (1.3) и (1.4) дает $D_1=N_1$, $D_2=\frac{N_2}{\nu}$.

Тогда (2.8) принимает вид

$$c(x)=N_1\cos\nu x+\frac{N_2}{\nu}\sin\nu x+\frac{1}{\nu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy. \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в (2.2) дает

$$u(t,x)=\phi_1(x)+\phi_2(x)t+\int\limits_0^t (t-s)f(s,x,\sigma(s))ds-$$

$$-q(t)\Big\{N_1\cos\nu x+\frac{N_2}{\nu}\sin\nu x+\nu\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^x Q(x,y)\Big[\phi_1''(y)+\phi_2''(y)s\Big]dsdy+$$

$$+\nu\int\limits_0^x Q(x,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta dsdy\Big\}. \tag{2.13}$$

3. Восстанавливаемая функция

В силу условия (1.5), из (2.13) получаем

$$\int\limits_0^t (t-s) f(s, x_0, \sigma(s)) ds = g(t) -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0, y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta, y, \sigma(\theta)) d\theta ds dy, \tag{3.1}$$

где

$$g(t) = \psi(t) + \phi_1(x_0) + \phi_2(x_0) t + q(t) \Big[N_1 \cos \nu x_0 + \frac{N_2}{\nu} \sin \nu x_0 +$$

$$+ \nu \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0, y) \Big(\phi_1''(y) + \phi_2''(y) s \Big) ds dy \Big].$$

Нелинейное интегральное уравнение первого рода (3.1) при начальном условии (1.6)эквивалентно следующему интегральному уравнению второго рода (см., напр. [7] - [9]) :

$$\sigma(t) \equiv \Theta(t; \sigma(t)) = \Big[\sigma(t) + \int\limits_0^t G(s) \sigma(s) ds - \int\limits_0^t (t-s) f(s, x_0, \sigma(s)) ds -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0, y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta, y, \sigma(\theta)) d\theta ds dy + g(t) \Big] e^{-\mu(t)} +$$

$$+ \int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} \Big[\sigma(t) - \sigma(s) + \int\limits_0^t G(s) \sigma(s) ds - \int\limits_0^s G(\theta) \sigma(\theta) d\theta -$$

$$- \int\limits_0^t (t-s) f(s, x_0, \sigma(s)) ds + \int\limits_0^s (s-\theta) f(\theta, x_0, \sigma(\theta)) d\theta -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0, y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta, y, \sigma(\theta)) d\theta ds dy +$$

$$+\nu q(s) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0, y) \int\limits_0^T b(\theta) \int\limits_0^\theta (\theta-\xi) f_{yy}(\xi, y, \sigma(\xi)) d\xi d\theta dy + g(t) - g(s) \Big] ds, \tag{3.2}$$

где $\mu(t) = \int\limits_0^t G(s) ds > 0$ такая, что

$$e^{-\mu(t)} \ll 1; \; 2 \int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} ds \ll 1.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\max\Big\{|g(t)| : t \in \Omega_T\Big\} \le \delta < \infty$ *;*
2. $\max\Big\{|f(t,x,\sigma(t))|;\ |f_{xx}(t,x,\sigma(t))|\Big\} \le \Delta < \infty$ *;*
3. $f(t,x,\sigma) \in Lip\{L_{1|\sigma}\}$ *,* $0 < L_1 = const < \infty$ *;*
4. $f_{xx}(t,x,\sigma) \in Lip\{L_{2|\sigma}\}$ *,* $0 < L_2 = const < \infty$ *;*
5. $\rho = \Big[1 + \mu_0 + L_1\frac{T^2}{2} + \nu q_0 L_2 \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} \frac{s^2}{2} b(s) ds dy\Big] P(T) < 1$ *, где*

$$\mu_0 = \max\Big\{\mu(t) : t \in \Omega_T\Big\},\ q_0 = \max\Big\{|q(t)| : t \in \Omega_T\Big\}, P(t) = e^{-\mu(t)} + 2\int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} ds.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение на отрезке Ω_T *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\sigma_0(t) = 0,\ \sigma_1(t) = \Big[-\int\limits_0^t (t-s) f(s,x_0,0) ds -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} b(s) \int\limits_0^{s} (s-\theta) f_{yy}(\theta,y,0) d\theta ds dy + g(t)\Big] e^{-\mu(t)} +$$

$$+\int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} \Big[\int\limits_0^t (t-s) f(s,x_0,0) ds - \int\limits_0^s (s-\theta) f(\theta,x_0,0) d\theta -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} b(s) \int\limits_0^{s} (s-\theta) f_{yy}(\theta,y,0) d\theta ds dy +$$

$$+\nu q(s) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} b(\theta) \int\limits_0^{\theta} (\theta-\xi) f_{yy}(\xi,y,0) d\xi d\theta dy + g(t) - g(s)\Big] ds, \tag{3.3}$$

$$\sigma_k(t) = \Theta(t; \sigma_{k-1}),\ k = 2,3,4,\ \ldots\ . \tag{3.4}$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (3.3) и (3.4) получаем

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)\| \le \Big[\Delta\frac{T^2}{2} + \nu q_0 \Delta \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} \frac{s^2}{2} b(s) ds dy + \delta\Big] P(T); \tag{3.5}$$

$$\|\sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t)\| \le \Big[1 + \mu_0 + L_1\frac{T^2}{2} + \nu q_0 L_2 \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^{T} \frac{s^2}{2} b(s) ds dy\Big] \times$$

$$\times P(T) \|\sigma_{k-1}(t) - \sigma_{k-1}(t)\|. \tag{3.6}$$

Из оценок (3.5) и (3.6) следует, что оператор в правой части (3.2) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение на отрезке Ω_T .
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Разрешимость обратной задачи (1.1) – (1.6)

Т е о р е м а 4.1. *Пусть:*
1. *Выполняются (2.6) и условия теоремы 3.1.;*
2. $\max\left\{|\phi_i(x)|\right\} < \infty,\ i = 1, 2\,;$
3. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y)\Big(\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y)s\Big)dy\right| < \infty\,;$
4. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y)f_{yy}(t,y,\sigma(t))dy\right| < \infty\,.$
Тогда в области Ω *существует единственное решение начальной задачи (1.1)-(1.4).*

Доказательство теоремы 4.1. следует из того, что подставляя в (2.13) решение интегрального уравнения (3.2), получаем искомую функцию $u(t,x)$.

Из справедливости приведенных выше двух теорем следует, что справедлива

Т е о р е м а 4.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 4.1. Тогда существует единственная пара решений* $\left\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\right\}$ *обратной задачи (1.1)-(1.6).*

Список литературы

1. Быков Я. В., *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*, Изд-во Кирг.ГУ, Фрунзе, 1957, 328 с.

2. Иманалиев М., *Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Илим, Фрунзе, 1974, 352 с.

3. Денисов А. М., *Введение в теорию обратных задач*, МГУ, М., 1994, 285 с.

4. Романов В. Г., *Обратные задачи для математической физики*, Наука, М., 1984, 264 с.

5. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я., *Линейные операторы и некорректные задачи*, Наука, М., 1991, 331 с.

6. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-диференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **15**:3 (2013), 158–163.

7. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **28**:3 (2012), 17–29.

8. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5**:1 (2013), 69–75.

9. Юлдашев Т. К., Середкина А. И., “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **32**:3 (2013), 46–55.

Inverse problem for elliptic Fredholm integro-differential equation

© T. K. Yuldashev[3] A. G. Loskutova[4]

Abstract. It is studied the one value solvability of the nonlinear inverse problem for an elliptic Fredholm integro-differential equation. It is modified the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations of the second kind. It is obtained nonlinear integral equation of the first kind, which with the aid of special non-classical integral transformation is reduced to a nonlinear integral equation of the second kind. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps.

Key Words: nonlinear inverse problem, equation of elliptic type, integro-differential equation, integral transformation, method of successive approximation

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

[4] Student of Faculty of Mechanical Engineering and Mechatronics, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Краткие сообщения

УДК 517.929

Методы построения выпуклых множеств коэффициентов устойчивого полинома

© А. В. Зубов [1], А. Ф. Зубова [2], М. В. Стрекопытова [3]

Аннотация. В теории робастной устойчивости важное место занимает разработка критериев существования и поиск методов построения выпуклых множеств коэффициентов устойчивых полиномов [1, 2]. Не менее важной проблемой является решение этой же задачи и для неустойчивых полиномов. В данной работе предложены критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов, принадлежащих одному определенному классу неустойчивости. Эти критерии позволяют путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов.

Ключевые слова: полином, степень, вещественный коэффициент, корень, класс эквивалентности, прямоугольник, радиус - вектор, комплексная плоскость, параллельная ось, часовая стрелка, вещественная и мнимая части, аргумент, коллинеарность, скалярное произведение

Определение 1.1. *[4] Будем говорить, что полиномы степени n с вещественными коэффициентами*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней, а число корней лежащих в правой полуплоскости, учитывая их кратности, у всех полиномов одинаково и равно k $(0 \leq k \leq n)$.

Очевидно, из определения следует, что $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.
Справедливы теоремы.

Теорема 1.1. *Семейство полиномов*

$$\sum_{m=1}^{p} \alpha_m f_m(z), \quad \sum_{m=1}^{p} \alpha_m = 1, \quad \alpha_m \geq 0 \tag{1.1}$$

принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, тогда и только тогда, когда этому классу принадлежат все полиномы вида:

$$\alpha f_1(z) + (1-\alpha) f_j(z), \quad \alpha \in [0,1], \quad l.j = 1, 2, \ldots, p. \tag{1.2}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть все полиномы семейства (1.1) принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. Тогда, полагая в формуле (1.1) $\alpha_l = \alpha$, $\alpha_j = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0,1]$, получим,

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

что любой полином семейства (1.2) является полиномом семейства (1.1), т. е. принадлежат классу (n,k) - эквивалентности.

Достаточность. Будем далее рассматривать радиус - векторы, соответствующие точкам $f_m(i\omega) = g_m(\omega)+ih_m(\omega)$, $m=\overline{1,p}$ комплексной плоскости, образованными полиномами $f_m(z)$ при подстановке в них $z=i\omega$, т. е. концы этих радиус - векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова [3] этих полиномов.

Пусть все полиномы семейства (1.2) принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. Это означает, что для любых $l,j=\overline{1,p}$ радиус - векторы $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не могут быть противоположно направлены.

Действительно, если для некоторого числа $\omega_0 \in [0,+\infty)$ этот факт имеет место, то существует число $\alpha \in [0,1]$, и пара радиус - векторов с номерами l,j таких, что $\alpha f_l(i\omega_0)+(1-\alpha)f_j(i\omega_0)=0$, а это означает, что полином $\alpha f_l(z)+(1-\alpha)f_j(z)$ имеет мнимый корень $i\omega_0$, что противоречит его принадлежности классу (n,k) - эквивалентности.

Итак, мы показали, что угол между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π. Заметим также, что эти радиус - векторы не являются нулевыми, т. к. порождены полиномами, не имеющими мнимых корней. Отсюда и из геометрических соображений (правила параллелограмма) вытекает, что радиус - вектор $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m f_m(i\omega)$ при $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m=1$, $\alpha_m\geq 0$ не обращается в ноль при $\omega\in[0,+\infty)$. Для этого достаточно заметить, что суммирование ненулевых радиус - векторов $f_m(i\omega)$ с неотрицательными коэффициентами α_m, угол между которыми меньше π, и, по крайней мере, один из этих коэффициентов больше нуля дает в результате ненулевой вектор.

Так как радиус - векторы $f_m(i\omega)$ образованы полиномами $f_m(z)$, принадлежащими классу (n,k) - эквивалентности, то, согласно принципу аргумента, все они поворачиваются против хода часовой стрелки при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, т. е. выполняются соотношения

$$Arg\, f_m(i\omega) \to \frac{\pi}{2}(n-2k) \quad \text{при} \quad \omega\to+\infty,\, m=\overline{1,p}.$$

Отсюда следует, что все радиус - векторы $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m f_m(i\omega)$ при $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m=1$, $\alpha_m\geq 0$ не обращаясь в ноль, также поворячиваются против хода часовой стрелки, при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$. Так как концы этих радиус - векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова этих полиномов, то из принципа аргумента вытекает, что семейство полиномов (1.2) принадлежит классу (n,k) - эквивалентности.
Доказательство закончено.

Теорема 1.2. *Семейство полиномов* (1.1) ((1.2)) *принадлежит классу* (n,k) *- эквивалентности в том и только в том случае, когда полиномы* $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ *принадлежат классу* (n,k) *- эквивалентности и для всех вещественных корней уравнения*

$$h_j(w)g_l(w)-h_l(w)g_j(w)=0, \quad l\neq j, \quad j=\overline{1,p},\, l=\overline{1,p}. \tag{1.3}$$

справедливо неравенство

$$g_l(w)g_j(w)+h_l(w)h_j(w)>0, \quad l\neq j,\, j=\overline{1,p},\, l=\overline{1,p}, \tag{1.4}$$

где $g_m(w)$ *и* $h_m(w)$ *соответственно вещественная и мнимая часть годографа Михайлова полинома* $f_m(z)$, $m=1,2,\ldots,p$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, и для них выполняются условия (1.3) и (1.4). Тогда радиус - векторы $f_l(i\omega)$

и $f_j(i\omega)$, отвечающие этим полиномам, не обращаясь в нуль при изменении ω от 0 до $+\infty$ и, согласно принципу аргумента, поворачиваются против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$.

Очевидно, что выполнение условий (1.3) означает коллинеарность этих радиус-векторов, а выполнение условий (1.4) означает, что угол между этими векторами находится в промежутке $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, т. к. их скалярное произведение положительно. Отсюда вытекает, что при одновременном выполнении условий (1.3) и (1.4) эти радиус-векторы не могут быть противоположно направлены при любом $\omega \in [0, +\infty)$. Это означает, что радиус - векторы $\alpha f_l(i\omega) + (1-\alpha) f_j(i\omega)$ при $\alpha \in [0,1]$ не принимают нулевых значений при изменении ω от 0 до $+\infty$ и, согласно принципу аргумента, как радиус - векторы, лежащие между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, поворачиваются вместе с ними против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$. Таким образом, полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1,p}$ принадлежат семейству (1.2), а по теореме 1 и семейству (1.1).

Необходимость. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1,p}$ принадлежат семейству (1.2). Тогда, как было показано при доказательстве достаточности в теореме 1 угол между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π, т. е. они не могу быть противоположно направлены, а это и означает, что при их коллинеарности (выполнении условий (1.3)) их скалярное произведение может быть только положительно (выполнение условий (1.4)).
Доказательство закончено.

Замечание 1.1. *Теорема 2 дает необходимые и достаточные условия того, что семейство полиномов* (1.1) *представляет собой выпуклое множество однородных неустойчивых полиномов, принадлежащих классу* (n,k) *- эквивалентности, причем полиномы* $f_m(z)$, *являются угловыми точками этого множества.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. $\aleph 10-8-00624$**.)**

Список литературы

1. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов -”, **17 (1)** (2005).
2. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.
3. А.В. Михайлов, “Методы гармонического анализа в теории регулирования”, Автоматика и Телемеханика, **3** (1938), 27-81.
4. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, *Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости*, Изд. ВЦ РАН, М, 2007, 234 с.
5. С.В. Зубов, *Исследование устойчивости расчетных движений*, Мобильность плюс, СПб, 2007, 158 с.
6. А.В. Зубов Н.В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.

The methods of building convex multitudes of coefficients stability polynom

© A. V. Zubov [4], A. F. Zubova [5], M. V. Strecopitova [6]

Abstract. In theory robust stability important place is employs working of criterias of existing and researches of methods to building convex multitudes coefficients stability polynomials [1,2]. Isn't important problem appears the solution this task and for instability polynomials. In giving work is supposes criterias of existing convex multitudes instability polynomials is belongs to one definite class of instability. This criteries is allows of way checking limit number of conditions, imposing on polynomials, organizes this family, is installs measures of all this family polynomial.

Key Words: polynomial, degree, material coefficient, root, class of equivalent, rectangle, radius - vector, integrated plane, parallel axis, hands of a clock, material and mystics parts, argument,collinearity secularity production

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

\input{voskresensky.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

\sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул $\textrm{Г}_i$, $\textit{Д}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_ри-сунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

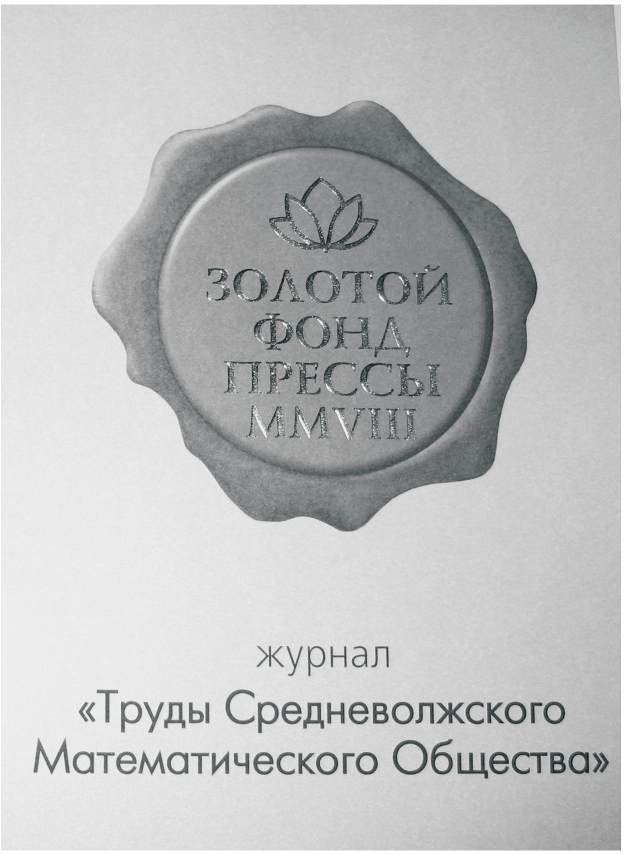
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок

Для заметок