ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 16, № 1

2014

Средневолжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва

Журнал Средневолжского математического общества

Том 16, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Саранск

2014

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 16, № 1

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

Краткие сообщения

От редакции

В настоящем номере публикуются работы ученых, которые являются постоянными участниками международных математических школ-семинаров «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского, конференций «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании», проводимых национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом. Номер выходит к началу XI научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых, которая пройдет в г. Саранске с 14 по 16 июля 2014 года. Конференция проводится при поддержке РФФИ, грант № 14-01-20052 Г. Журнал доступен в сети Internet на сайте elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.938

О существовании магнитных линий соединяющих нулевые точки

© В. З. Гринес[1], Е. В. Жужома[2],В. С. Медведев[3], О.В. Починка[4]

Аннотация. В статье доказывается, что при выполнении определенных условий в слое плазмы существуют магнитные линии соединяющие нулевые точки

Ключевые слова: магнитные поля, плазма, сепаратор, особые точки, шипы и веерные поверхности, диффеоморфизмы Морса-Смейла

1. Введение

Имеется два традиционных подхода изучения плазмы. При первом, плазма рассматривается как совокупность отдельных частиц. При втором – как сплошная среда с высокой проводимостью. Здесь мы рассматриваем второй подход при условии нерелятивистского поля скоростей движения среды и при наличии магнитного поля. Взаимовлияние магнитного поля плазмы и ее движения является важным аспектом магнитной гидродинамики (МГД), которое отражено в одном из основных уравнений МГД

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = rot \ \left[\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{H}}\right] + \eta \nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}},$$

где $\vec{\boldsymbol{H}}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{\boldsymbol{v}}$ – скорость движения плазмы, η – магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса (основные определения и понятия МГД см. в книгах [2], [4], [7] и обзоре [11]). Согласно Альвену [1], [2], движении плазмы силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были "вморожены в плазму". Как следствие, при несложных движениях плазмы топологическая структура магнитного поля не меняется. Однако при достаточно сложных движениях возникают предпосылки к перестройке магнитной конфигурации. Ясно, что под действием задаваемого извне течения плазмы в ней возможны появления таких областей, что их границы в некоторых точках пространства близки, а магнитные поля областей вблизи этих границ имеют различные направления (так называемые x-точки). Согласно закону Ампера $\vec{\boldsymbol{j}} = \nu \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{H}}$, где $\vec{\boldsymbol{j}}$ – плотность электрического тока, вблизи x-точек возникает достаточно высокая плотность тока.

[1] Профессор кафедры ЧиФА ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] Профессор кафедры ТУиДМ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

[3] Научный сотрудник НИИ ПМК, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; medvedev@uic.nnov.ru

[4] Профессор кафедры информационных систем и технологий, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

В такие моменты времени в магнитном поле могут появляться токовые образования различной конфигурации такие, как токовые линии и токовые слои. Токовые образования могут содержать точки, в которых магнитное поле обращается в нуль (нулевые точки). В типичном случае собственные числа λ_1, λ_2 и λ_3 в нулевой точке векторного поля $\vec{\boldsymbol{H}}$ не равны нулю и удовлетворяют соотношению $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, в силу равенства $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{H}}=0$. Отсюда вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка является консервативным седлом с одномерной и двумерной сепаратрисами,[5] см. рис. 1.1 (a).

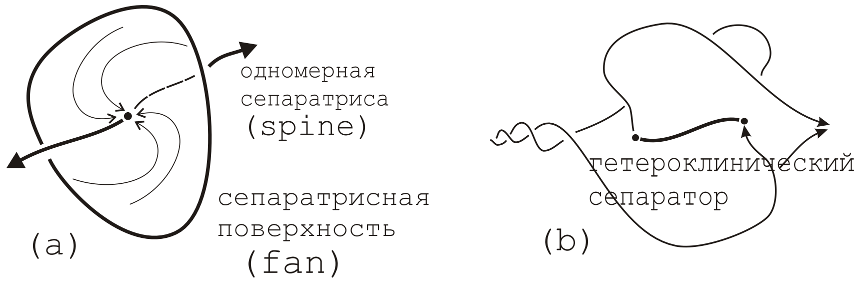


Рисунок **1.1**

Структура нулевой точки (a), и гетероклинический сепаратор (b)

Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот. Следуя [9], [10], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором* (separator). Сепаратор называется *гетероклиническим*, если он является трансверсальным пересечением сепаратрисных поверхностей, см. рис. 1.1 (b).

Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом нулевых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей – гетероклиническими сепараторами. Эксперимент и наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля напоминает релаксационные процессы: сперва достаточно продолжительное время плазма эволюционирует спокойно, а затем быстро развивается перестройка магнитной конфигурации, сопровождаемая процессами перезамыкания [6][6].

Таким образом, представляет интерес решение проблемы существования особых точек и сепараторов, а также количества сепараторов при заданном расположении особенностей магнитного поля. Объединение особенностей, шипов, веерных поверхностей и сепараторов называется иногда *скелетом* магнитного поля, так как их конфигурация определяет топологическую

[5] Иногда одномерную сепаратрису называют шипом (spine), а двумерную – веерной поверхностью (fan) [9], [10]

[6] Иногда вместо термина перезамыкание используют термин пересоединение [9], [10].

структуру поля. Ясно, что указанная проблема сперва должна рассматриваться при движении плазмы, когда число особенностей и сепараторов не меняется (то есть, до пересоединения).

В работе предложен подход к решению данной проблемы, состоящий в том, что в плазме (мысленно) выделяется трехмерное тело специального вида, и рассматривается движение, при котором все граничные компоненты тела сдвигаются внутрь или наружу так, что после окончания движения все граничные компоненты параллельны исходным граничным компонентам (см. ниже точные определения). Поскольку в процессе движения топологическая структура магнитного поля, в силу постановки задачи, не меняется (токовые образования, включая шипы, веерные поверхности и сепараторы, только слегка деформируются), то для простоты естественно предположить, что внутри выделенного тела скелет магнитного поля инвариантен относительно движения плазмы. Отметим, что мы не требуем чтобы все точки скелета были неподвижны, но их движение внутри тела должно оставлять точки скелета на скелете. Мы также предполагаем (и это единственное содержательное ограничение), что нулевые точки являются гиперболическими точками не только поля, но и для движения плазмы. Заметим однако, что согласно теореме Купки-Смейла из теории динамических систем у любого типичного движения все периодические точки, включая неподвижные, являются гиперболическими [8]. Таким образом, можно считать, что мы рассматриваем только класс типичных движений плазмы. Предложенный подход позволяет применить методы и результаты теории динамических систем, поскольку можно доопределить движение плазмы на некоторое трехмерное многообразие так, чтобы в результате получить динамическую систему классического типа. С одной стороны, мы теряем информацию о структуре магнитного поля вне трехмерного тела, но с другой стороны мы получаем инструмент для исследования структуры в некоторой части пространства. Кроме этого, глобальная структура на полученном трехмерном многообразии дает представление о возможных реальных структурах магнитных полей.

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ (гранты 12-01-00672-а, 13-01-12452-офи-м) за финансовую поддержку. Особая благодарность Константину Витальевичу Кирсенко (бизнесмену и музыканту) за финансовую поддержку.

2. Формулировка основных результатов

Пусть M_p^2 – гладко вложенная в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ ориентируемая замкнутая поверхность рода $p \geq 0$. В силу ориентируемости, M_p^2 разбивает $\mathbb{R}^3$ на ограниченную область (внутренность) и неограниченную область (внешность). Объединение внутренности с границей M_p^2 обозначается через M_p^3 и называется *телом рода* $p \geq 0$. Простейшим примером является замкнутый трехмерный шар $M_0^3 \stackrel{\text{def}}{=} D^3$, ограниченный двумерной сферой S^2. Тело $M_1^3 \stackrel{\text{def}}{=} P^3$ является полноторием, то есть множеством $D^2 \times S^1$, гомеоморфным произведению двумерного замкнутого диска D^2 на окружность S^1.

Две гладко вложенные поверхности $M_{p_1}^2$ и $M_{p_2}^2$ называются *параллельными*, если $p_1 = p_2 = p$ и эти поверхности ограничивают в $\mathbb{R}^3$ область гомеоморфную $M_p^2 \times (0;1)$. Как следствие, $M_{p_1}^2 \cap M_{p_2}^2 = \emptyset$.

Пусть тело M_p^3 содержит внутри себя попарно непересекающиеся тела $M_{p_1}^3$, ..., $M_{p_k}^3$. Положим

$$M_p^3 \setminus \left(int\ M_{p_1}^3 \cup \ldots \cup int\ M_{p_k}^3\right) \stackrel{\text{def}}{=} M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3.$$

В частности, $M_{0(0)}^3 = \mathcal{S}$ есть замкнутый шаровой слой, то есть множество $\mathcal{S} = S^2 \times [-1;+1]$, гомеоморфное произведению сферы S^2 на замкнутый промежуток $[-1;+1]$. Ясно, что топологический тип тела $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ зависит от вложения $M_{p_1}^3$, ..., $M_{p_k}^3$ в M_p^3. Один из вариантов $M_{p(p)}^3$ является так называемая толстая поверхность, то есть тело, гомеоморфное произведению двумерной поверхности M_p^2 рода $p \geq 1$ на отрезок $[0;1]$. Тело $M_{p(p00)}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}^3$ есть толстая поверхность с двумя дырами.

В литературе по магнитной гидродинамике магнитное поле часто пишется в виде индукции магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$, которая связана с $\vec{\boldsymbol{H}}$ соотношением $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$, где μ – магнитная проницаемость среды.

Рассмотрим тело $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$, гладко вложенное в пространство $\mathbb{R}^3$. Тело $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ представляет собой часть плазмы некоторого астрофизического объекта с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}$. Обозначим через $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ ограничение поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ на $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$, то есть $\vec{\boldsymbol{B}}_0 = \vec{\boldsymbol{B}}|_{M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3}$, и будем считать, что все нулевые точки $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ являются типичными. Как следствие получаем, что $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ содержит только конечное число нулевых точек. Под сепаратрисой нулевой точки ниже понимается одномерная сепаратриса или двумерная сепаратрисная поверхность. Мы будем предполагать далее, что 1) сепаратрисы нулевых точек пересекаются (если пересекаются) трансверсально; 2) каждая сепаратриса не имеет самопересечений; 3) сепаратрисы пересекаются трансверсально (если пересекаются) с граничными компонентами $M_{p_1}^2$, ..., $M_{p_k}^2$ тела $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$. Отображение

$$f_0 : M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3 \to f_0\left(M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3\right) \subset \mathbb{R}^3$$

называется (a-d)-*движением*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

- a) f_0 является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из неподвижных гиперболических точек, которые совпадают с нулями магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$;

- b) граничные компоненты тела $f_0\left(M^3_{p(p_1\cdots p_k)}\right)$ попарно не пересекаются с граничными компонентами тела $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$;

- c) имеется хотя бы одна граничная компонента $M^2_{p_i}$, которая отображается внутрь $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$, и имеется хотя бы одна граничная компонента $M^2_{p_j}$, которая отображается наружу $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$, то есть

$$f_0(M^2_{p_i}) \subset M^3_{p(p_1\cdots p_k)}, \quad f_0(M^2_{p_j}) \cap M^3_{p(p_1\cdots p_k)} = \emptyset;$$

- d) веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0, а неподвижные точки диффеоморфизма f_0 имеют одинаковый тип с нулями поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$.

Отметим, что мы не требуем трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ с граничными компонентами. Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще говоря, пересекать граничные компоненты тела $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$ по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что мы рассматриваем движение плазмы за промежуток времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая ноль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Толстая поверхность с двумя дырами $\mathcal{M}^3$ имеет четыре граничных компоненты: две 2-сферы S_1, S_2 и две двумерные поверхности T_1, T_2 рода $p \geq 1$. Для движения тела $\mathcal{M}^3$ конкретизируем условие d) следующим образом:

- d) одна сфера, скажем S_1, отображается внутрь тела $\mathcal{M}^3$, а другая S_2 – наружу; одна поверхность, скажем T_1, отображается внутрь $\mathcal{M}^3$, а другая T_2 – наружу. Более того, ограничение $f_0|_{T_i} : T_i \to f_0(T_i)$ гомотопически тривиально для каждого $i = 1, 2$.

Поясним понятие гомотопической тривиальности. В отличие от сферы, для которой с гомотопической точки зрения существует только один класс сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов, для поверхностей ненулевого рода существует счетное семейство таких классов. Поверхности T_i, $f_0(T_i)$ для каждого $i = 1, 2$ параллельны. Поэтому образующие их фундаментальных групп можно считать естественным образом изоморфными. Гомотопическая тривиальность означает, что ограничения $f_0|_{T_i}$ гомотопически тождественны.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $f_0 : \mathcal{M}^3 \to f_0(\mathcal{M}^3) \subset \mathbb{R}^3$ *есть (a-d)-движение толстой поверхности с двумя дырами* $\mathcal{M}^3$*, принадлежащего некоторой области плазмы с магнитным полем* $\vec{\boldsymbol{B}}_0$*. Тогда поле* $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ *в* $\mathcal{M}^3$ *имеет не менее двух нулевых точек таких, что их сепаратрисные поверхности пересекаются. Более того, если нет пересечений по замкнутым кривым, то в* $\mathcal{M}^3$ *имеется хотя бы один гетероклинический сепаратор.*

3. Сепараторы в толстой поверхности с двумя дырами

Ключевой для доказательства теоремы 2.1. является следующая лемма. Напомним, что через S^1 обозначается окружность, а через M_p^2 – двумерная замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geq 1$.

Л е м м а 3.1. *Существует вложение* $\mathcal{M}^3 \subset M_p^2 \times S^1$ *и продолжение* f_0 *до полярного диффеоморфизма* $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ *Морса-Смейла такого, что неблуждающее множество* $NW(f)$ *есть объединение источника, стока и неподвижных точек диффеоморфизма* f_0.

Доказательство. Приклеим к граничным компонентам S_1, S_2 тела $\mathcal{M}^3$ шары B_1^3, B_2^3 соответственно. Тогда мы получим тело $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ и естественное вложение $\mathcal{M}^3 \subset \mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$. В силу условия d), двумерная сфера S_1 отображается внутрь $\mathcal{M}^3$. Поэтому f_0 можно продолжить на шар B_1^3 так, чтобы внутри B_1^3 появился гиперболический источник. Аналогично, f_0 можно продолжить на шар B_2^3 так, чтобы внутри B_2^3 появился гиперболический сток. Тело $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ гомеоморфно прямому произведению $M_p^2 \times [0; 1]$ с граничными компонентами $T_1 = M_p^2 \times \{0\}$, $T_2 = M_p^2 \times \{1\}$, и мы далее будем отождествлять $\mathcal{M}^3 \cup B_1^3 \cup B_2^3$ с $M_p^2 \times [0; 1]$. Известно, что из гомотопической тривиальности ограничений $f_0|_{T_1}$, $f_0|_{T_2}$ вытекает, что каждое из этих ограничений изотопно тождественному отображению. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$ и продолжение f_0 на тело $M_p^2 \times [-\varepsilon; 1 + \varepsilon]$ такое, что ограничения $f_0|_{M_p^2 \times \{-\varepsilon\}}$ и $f_0|_{M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}}$ тождественны по первой координате $M_p^2 \times \{\cdot\}$. Не уменьшая общности, можно рассматривать каждое из $f_0|_{M_p^2 \times \{-\varepsilon\}}$, $f_0|_{M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}}$

как сдвиг вдоль второй координаты $\{\cdot\} \times \{-\varepsilon\} \to \{\cdot\} \times \{-\varepsilon + \delta\}$ и $\{\cdot\} \times \{1+\varepsilon\} \to \{\cdot\} \times \{1+\varepsilon+\delta\}$ соответственно.

Склеим граничные компоненты $M_p^2 \times \{-\varepsilon\}$, $M_p^2 \times \{1+\varepsilon\}$ с помощью тождественного отображения. Тогда из $M_p^2 \times [-\varepsilon; 1+\varepsilon]$ получаем многообразие $M_p^2 \times S^1$. Из предыдущей конструкции следует, что на $M_p^2 \times S^1$ существует требуемое продолжение диффеоморфизма f_0. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.. Учитывая лемму 3.1., требуемое утверждение можно переформулировать следующим образом. Пусть $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ – полярный диффеоморфизм Морса-Смейла 3-мерного многообразия $M_p^2 \times S^1$. Тогда f имеет по крайней мере две седловые неподвижные точки с разным индексом Морса такие, что их двумерные сепаратрисы пересекаются.

Сперва покажем, что f имеет хотя бы одну седловую точку. Предположим противное. Тогда f является диффеоморфизмом типа источник-сток. Согласно [5], несущее многообразие должно быть гомеоморфным трехмерной сфере. Полученное противоречие доказывает, что f имеет хотя бы одну седловую точку.

Перейдя к некоторой итерации диффеоморфизма f, мы можем считать, что f является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом всех сепаратрис седловых неподвижных точек (напомним, что в силу условия a), f сохраняет ориентацию всего несущего многообразия). Согласно условию d) для $f_0 : M_p^2 \times S^1 \to f_0(M_p^2 \times S^1)$, диффеоморфизм f гомотопически тривиален (то есть, индуцирует тождественное отображение фундаментальной группы тора). Поэтому его число Лефшеца равно нулю. Сумма индексов Морса стока и источника равна нулю, $(-1)^0 + (-1)^3 = 0$. Отсюда и формулы Лефшеца вытекает, что наличие одной седловой неподвижной точки влечет существование еще одной седловой неподвижной точки с другим индексом Морса.

В работе [3] показано, что если диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^3 \to M^3$ не имеет гетероклинических кривых, то M^3 есть либо 3-сфера S^3, либо связная сумма ручек $S^2 \times S^1$. Поскольку $M_p^2 \times S^1$ является неприводимым многообразием (это означает, что любая цилиндрически вложенная 2-сфера ограничивает шар), то $M_p^2 \times S^1$ нельзя представить в виде связной суммы ручек $S^2 \times S^1$. Отсюда следует, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M_p^2 \times S^1 \to M_p^2 \times S^1$ имеет гетероклинические кривые. Если замкнутые гетероклинические кривые отсутствуют, то необходимо имеется хотя бы один гетероклинический сепаратор. $\square$

Список литературы

1. Alfven H., “On sunspots and the solar cycle.”, *Arc. f. Mat. Ast. Fys.*, **29A** (1943), 1-17..

2. Альфвен Х., *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.

3. Bonatti Ch., Grines V., V. Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves.”, *Topology and Applications*, **117** (2002), 335-344.

4. Каулинг Т., *Магнитная Гидродинамика*, ИЛ, 1959.

5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В., “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла”, *Труды МИАН им. Стеклова В.А.*, **271** (2010), 1-23.

6. Кадомцев Б.Б., “Перезамыкание магнитных силовых линий”, *Успехи Физ. Наук*, **151**, вып. 1 (1987), 3-29.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика в 10 томах, Т. VIII. Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, М., 2005.

8. Нитецки З., *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.

9. Прист Э.Р., *Солнечная Магнитогидродинамика*, Мир, М., 1985.

10. Прист Э.Р., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, ФМЛ, М., 2005.

11. Сыроватский С.И., “Магнитная гидродинамика”, *Успехи Физ. Наук*, **62**, вып. 3 (1957), 247-303.

On existence of magnetic lines joining zero points

© V. Z. Grines[7], B. S. Medvedev[8], O.V. Pochinka[9],E. V. Zhuzhoma[10]

Abstract. In the paper, one proves that there exist magnetic lines in a layer provided some conditions hold.
Key Words: Magnetic fields, plasma, separator, fun, spine, singular points, Morse-Smale difeomorphisms

[7] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[8] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics at Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; medvedev@unn.ac.ru
[9] Professor, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru
[10] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

УДК 519.624.8

Итеративные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств

© И. П. Рязанцева[1]

Аннотация. Для смешанных вариационных неравенств в гильбертовом пространстве с монотонным оператором и собственным выпуклым полунепрерывным снизу функционалом при приближенном задании данных построены итеративные методы регуляризации первого порядка по оператору и по функционалу, получены достаточные условия их сходимости к нормальному решению исходной задачи.

Ключевые слова: смешанные вариационные неравенства, итеративный метод, монотонный оператор, выпуклый функционал, сходимость, нормальное решение

1. Основные обозначения и постановка задачи.

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \to R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, элемент $f \in H$, (x, y) – скалярное произведение элементов x и y из H. Рассмотрим в H смешанное вариационное неравенство.

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \le 0, \quad x \in H \quad \forall y \in H \tag{1.1}$$

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений N. Выпуклость и замкнутость N отмечена в [1] (см. также [2], с.254). Далее x^* – нормальное решение (1.1). Нас будут интересовать методы решения задачи (1.1). В предположении монотонности A и выпуклости φ установить корректность задачи (1.1) не удается, поэтому следует строить для нее методы регуляризации. В работе [3] для (1.1) построен операторный метод регуляризации вида

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + \varphi(x_\alpha) - \varphi(y) \le 0, \quad x_\alpha \in H \quad \forall y \in H, \tag{1.2}$$

и метод сглаживающего функционала А.Н.Тихонова

$$(Az_\alpha - f, z_\alpha - y) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|z\|^2 \le 0, \quad z_\alpha \in H \quad \forall y \in H, \tag{1.3}$$

и доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор,*

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

$\varphi : H \to R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, удовлетворяющий условию

$$\varphi(x) \geq -c\|x\|^\kappa, \quad c > 0, \quad \kappa \in [0, 2), \quad \|x\| \geq R_0 > 0, \tag{1.4}$$

смешанное вариационное неравенство (1.1) имеет непустое множество решений. Тогда регуляризованные задачи (1.2) и (1.3) имеют единственные решения x_α и z_α соответственно, и $x_\alpha \to x^*$, $z_\alpha \to x^*$ при $\alpha \to 0$, где x^* – нормальное решение (1.1).

Метод (1.2) для смешанного вариационного неравенства (1.1) будем называть методом регуляризации по оператору, а (1.3) – методом регуляризации по функционалу.

Далее считаем, что условия теоремы 1.1. выполнены.

В той же работе [3] получены достаточные условия сильной сходимости следующих непрерывных методов регуляризации первого порядка

$$\begin{aligned}(u'(t), u(t) - y) \;&+\; \gamma(t)[(A(t)u(t)) + \alpha(t)u(t) - f(t), u(t) - y) + \\ &+\; \varphi(t)(u(t)) - \varphi(t)(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad u(t) \in H, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t) - y) \;&+\; \gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t)) - f(t), \tilde{u}(t) - y) + \varphi(t)(\tilde{u}(t)) + \alpha(t)\|\tilde{u}(t)\|^2 - \\ &-\; \varphi(t)(y) - \alpha(t)\|y\|^2] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde{u}(t) \in H, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\tilde{u}(t_0) = u_0 \in H, \tag{1.8}$$

где $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные непрерывные функции, $A(t), \varphi(t)$ и $f(t)$ – приближения A, φ и f соответственно, $t \geq t_0 \geq 0$.

Цель данной работы состоит в построении неявных дискретных вариантов методов (1.5), (1.6) и (1.7), (1.8) и исследование их сходимости.

2. Итеративные методы регуляризации первого порядка

Пусть приближения A, f и φ определяются последовательностями $\{A^n\}$, $\{f^n\}$ и $\{\varphi^n\}$, причем при любом натуральном n выполнены следующие условия:

а) $A^n : H \to H$ – монотонные хеминепрерывные операторы,

$$\|A^n x - Ax\| \leq h_n g(\|x\|) \quad \forall x \in H;$$

b) $f^n \in H,\ \|f^n - f\| \le \delta_n$;
c) $\varphi^n : H \to R^1$ – собственные выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, $|\varphi^n(x) - \varphi(x)| \le \sigma_n q(\|x\|) \quad \forall x \in H$,
где функции $g(s)$ и $q(s)$ ограничены на ограниченных множествах, $\{h_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\sigma_n\}$ – бесконечно малые последовательности неотрицательных чисел.

На базе (1.5), (1.6) построим итерационный процесс следующего вида

$$\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau_n}, u_n - y\right) + \gamma_n[(A^n u_n + \alpha_n u_n - f^n, u_n - y) + \varphi^n(u_n) - \\ - \varphi^n(y)] \le 0 \quad \forall y \in H, \quad u_n \in H, \tag{2.1}$$

где элемент u_0 из H задается произвольно, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\tau_n\}$ – последовательности положительных чисел, причем $\{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность, и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{2.2}$$

$\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – ограниченные последовательности.

Прежде всего отметим, что согласно теореме 1.1., последовательность $\{x^m\}$ решений регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$(Ax^m + \alpha_m x^m - f, x^m - y) + \varphi(x^m) - \varphi(y) \le 0, \quad x^m \in H \quad \forall y \in H \tag{2.3}$$

сходится к нормальному решению (1.1).

В силу наших предположений a) – c) и (1.4) для $x \in H$ установим справедливость неравенства

$$(x + \tilde\gamma_n(A^n x + \alpha_n x - f^n) - u_{n-1}, x - x_0) + \tilde\gamma_n \varphi^n(x) \ge \\ \ge \|x\|[(1 + \tilde\gamma_n\alpha_n)(\|x\| - \|x_0\|) - \varphi_n] - \tilde\gamma_n[\sigma_n q(\|x\|) + c\|x\|^\kappa] - \varphi_n\|x_0\|, \tag{2.4}$$

здесь $\tilde\gamma_n = \gamma_n\tau_n$, $\varphi_n = \tilde\gamma_n(h_n g(\|x_0\|) + \delta_n + \|Ax_0\| + \|f\|) + \|u_{n-1}\|$, $\|x\| \ge R_0$. Пусть имеет место неравество

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{q(t)}{t^2} \le Q, \quad 0 \le Q < \infty, \tag{2.5}$$

тогда из (2.4) делаем вывод об однозначной разрешимости смешанного вариационного неравенства (2.1) (см.[4], с.265, [5], с.186, 187), если $1 + \tilde\gamma_n\alpha_n > \tilde\gamma_n\sigma_n Q$. Последнего можно всегда добиться (по крайней мере при достаточно больших n), поскольку последовательность $\{\tilde\gamma_n\}$ ограничена, а $\{\sigma_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малые.

При каждом натуральном $m \ge 1$ построим вспомогательное смешанное вариационное неравенство

$$\left(\frac{v_n^m - v_{n-1}^m}{\tau_n}, v_n^m - y\right) + \gamma_n[(Av_n^m + \alpha_m v_n^m - f, v_n^m - y) + \varphi(v_n^m) - \\ - \varphi(y)] \le 0 \quad \forall y \in H, \quad v_n^m \in H, \tag{2.6}$$

$$v_0^m = u_0. \tag{2.7}$$

Подобно (2.4) установим неравенство

$$\begin{aligned}(x \ + \ &\tilde{\gamma}_n(Ax + \alpha_m x - f) - v_{n-1}^m, x - x_0) + \tilde{\gamma}_n\varphi(x) \geq \\ \geq \ &\|x\|[(1 + \tilde{\gamma}_n\alpha_m)(\|x\| - \|x_0\|) - \varphi_n^m] - \varphi_n^m\|x_0\| - \tilde{\gamma}_n c\|x\|^\kappa, \end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь $\varphi_n^m = \tilde{\gamma}_n(\|Ax_0\| + \|f\|) + \|v_{n-1}^m\|$, $x_0 \in H$, $\|x\| \geq R_0$.

Таким образом, установлена однозначная разрешимость вспомогательного смешанного вариационного неравенства (2.6) для любой пары натуральных чисел n и m. Пусть в (2.3), умноженном на $\tilde{\gamma}_n$, элемент $y = v_n^m$, а в (2.6) – $y = x^m$. Сложив полученные неравенства, после простых преобразований имеем

$$\|v_n^m - x^m\| \leq (1 - a_n^m)\|v_{n-1}^m - x^m\|, \quad a_n^m = \frac{\tilde{\gamma}_n\alpha_m}{1 + \tilde{\gamma}_n\alpha_m}. \tag{2.9}$$

Следовательно(см. [6] – [8] и (2.7)),

$$\|v_n^m - x^m\| \leq \exp(-\alpha_m \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\tau_k)\|u_0 - x^m\|,$$

откуда при $n = m$ получаем неравенство

$$\|v_m^m - x^m\| \leq \exp(-\alpha_m \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\tau_k)\|u_0 - x^m\|. \tag{2.10}$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\gamma_n\tau_n = +\infty, \tag{2.11}$$

тогда в силу (2.2) тем более $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\tau_n = +\infty$, и по теореме Штольца установим соотношение

$$\alpha_m \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\tau_k \sim \frac{\alpha_m\alpha_{m-1}\gamma_m\tau_m}{\alpha_{m-1} - \alpha_m} \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n\alpha_{n-1}\gamma_n\tau_n} = 0. \tag{2.12}$$

Теперь из (2.10) имеем сходимость последовательности $\{v_m^m - x^m\}$ к нулю. Заметим, что из (2.10) следует ограниченность в совокупности семейства последовательностей $\{v_n^m\}$, а ограниченность $\{u_n\}$ предположим.

Положив в (2.1) $y = v_n^m$, а в (2.6) – $y = u_n$ и сложив результаты, придем к неравенству

$$\|u_n - v_n^m\|^2 + (v_{n-1}^m - u_{n-1}, u_n - v_n^m) + \tilde{\gamma}_n[(A^n u_n - Av_n^m, u_n - v_n^m) +$$
$$+\alpha_n\|u_n - v_n^m\|^2 + (\alpha_m - \alpha_n)(v_n^m, v_n^m - u_n) + (f^n - f, v_n^m - u_n) +$$
$$+\varphi^n(u_n) - \varphi(u_n) + \varphi(v_n^m) - \varphi^n(v_n^m)] \leq 0,$$

откуда, используя условия a) – c), ограниченность $\{u_n\}$, ограниченность в совокупности последовательностей $\{v_n^m\}$ и числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, подобно (3.13) из [3] получим

$$\|u_n - v_n^m\|^2(1 + 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n) \leq \|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + 2\tilde{\gamma}_n\Big\{\big[h_n g(\|v_n^m\|) + |\alpha_n - \alpha_m|\|v_n^m\| +$$
$$+\delta_n\big](\|u_n\| + \|v_n^m\|) + \tilde{\gamma}_n\sigma_n(q(\|u_n\|) + q(\|v_n^m\|))\Big\} \leq \|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 +$$
$$+a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + |\alpha_m - \alpha_n|), \quad a_1 > 0,$$

или

$$\|u_n - v_n^m\|^2 \leq (1 - b^n)\|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + |\alpha_m - \alpha_n|), \quad (2.13)$$

здесь $b^n = 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n/(1 + 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n)$.
Поскольку последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ ограничены, а $\{\alpha_n\}$ убывает, то $\alpha_n \leq \alpha_1$, $\gamma_n \leq \bar{\gamma}$, $\tau_n \leq \bar{\tau}$ при всех натуральных n, здесь $\bar{\gamma} > 0$, $\bar{\tau} > 0$. Значит, для величины b^n имеет место оценка снизу следующего вида

$$b^n \geq \frac{2\alpha_n\tilde{\gamma}_n}{1 + 2\alpha_1\bar{\gamma}\bar{\tau}} = \lambda\alpha_n\tilde{\gamma}_n, \quad \lambda = \frac{2}{1 + 2\alpha_1\bar{\gamma}\bar{\tau}},$$

поэтому от (2.13) при $n \leq m$ приходим к неравенству

$$\|u_n - v_n^m\|^2 \leq (1 - \lambda\alpha_n\tilde{\gamma}_n)\|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + (\alpha_n - \alpha_m)).$$

Учитывая равенство (2.7), отсюда выводим оценку (см. [6] – [8])

$$\|u_m - v_m^m\|^2 \leq a_1\Big[\sum_{k=1}^{m}\tilde{\gamma}_k(\delta_k + h_k + \sigma_k)\exp\left(\lambda\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\tilde{\gamma}_i\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - \alpha_m)\exp\left(\lambda\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\tilde{\gamma}_i\right)\Big]. \quad (2.14)$$

С помощью теоремы Штольца убеждаемся, что сходимость к нулю первой суммы в правой части (2.14) обеспечивает следующее предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n + h_n + \sigma_n}{\alpha_n} = 0. \quad (2.15)$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}{b_n b_{n-1}+b_n-b_{n-1}} = 0, \quad b_n = \gamma_n\alpha_n\tau_n. \tag{2.16}$$

Теперь, применив дважды теорему Штольца и учитывая наши предположения (2.11) и (2.16), установим сходимость к нулю второй суммы в (2.14). Тем самым доказано, что $\|u_m - v_m^m\| \to 0$ при $m\to\infty$. Значит, имеем сходимость последовательности $\{u_n\}$ к x^*.

Исследуем сходимость дискретного варианта непрерывного метода регуляризации (1.7) в следующей форме

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde u_n - \tilde u_{n-1}}{\tau_n}, \tilde u_n - y\right) \ &+ \ \gamma_n[(A^n\tilde u_n - f^n, \tilde u_n - y) + \varphi^n(\tilde u_n) + \alpha_n\|\tilde u_n\|^2 - \\ &- \ \varphi^n(y) - \alpha_n\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y\in H, \quad \tilde u_n \in H. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Вспомогательная последовательность определяется из смешанного вариационного неравенства

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde v_n^m - \tilde v_{n-1}^m}{\tau_n}, \tilde v_n^m - y\right) \ &+ \ \gamma_n[(A\tilde v_n^m - f, \tilde v_n^m - y) + \varphi(\tilde v_n^m) + \alpha_m\|\tilde v_n^m\|^2 - \\ &- \ \varphi(y) - \alpha_m\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y\in H, \quad \tilde v_n^m \in H, \end{aligned} \tag{2.18}$$

причем $\tilde v_0^m = \tilde u_0$ при всех $m \ge 1$. Для величин

$$(x + \tilde\gamma_n(A^n x - f^n) - \tilde u_{n-1}, x - x_0) + \tilde\gamma_n[\varphi^n(x) + \alpha_n\|x\|^2],$$

$$(x + \tilde\gamma_n(Ax - f) - \tilde v_{n-1}^m, x - x_0) + \tilde\gamma_n[\varphi(x) + \alpha_m\|x\|^2]$$

без труда устанавливаются оценки снизу типа (2.4) и (2.8), обеспечивающие разрешимость смешанных вариационных неравенств (2.17) и (2.18) относительно $\tilde u_n$ и $\tilde v_n^m$ соответственно. Единственность этих решений гарантирует сильная выпуклость функционала $\|x\|^2$ на H (см. [3]). Пусть z^m – единственное решение регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$(Az^m - f, z^m - y) + \varphi(z^m) + \alpha_m\|z^m\|^2 - \varphi(y) - \alpha_m\|y\|^2 \le 0, \quad z^m \in H \quad \forall y \in H. \tag{2.19}$$

Полагая в (2.18) $y = \xi\tilde v_n^m + (1-\xi)z^m$, $\xi\in(0,1)$ и учитывая монотонность A и (2.19), выводим оценку (см. (2.9))

$$\|\tilde v_n^m - z^m\| \le (1 - a_n^m)\|\tilde v_{n-1}^m - z^m\|, \tag{2.20}$$

и предположив ограниченность $\{\tilde u_n\}$, из (2.17) и (2.18) подобно (2.20) установим оценку вида (2.14) для $\|\tilde u_m - \tilde v_m^m\|$. Тем самым установлено утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть в условиях теоремы 1.1. возмущенные данные* $\{A^n\}$, $\{f^n\}$ *и* $\{\varphi^n\}$ *задачи (1.1) удовлетворяют условиям a) – c),* $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ *– последовательности положительных чисел, причем* $\{\alpha_n\}$ *убывает, а* $\{\gamma_n\}$ *и* $\{\tau_n\}$ *ограничены, и выполнены условия (2.2), (2.5), (2.11), (2.12), (2.15), (2.16). Тогда смешанные вариационные неравенства (2.1), (2.6), (2.17), (2.18) однозначно разрешимы, и если последовательности* $\{u_n\}$, $\{\tilde{u}_n\}$ *ограничены, то они сходятся по норме пространства* H *к нормальному решению (1.1).*

З а м е ч а н и е 2.1. *Пусть существуют число* $R > 0$ *и элемент* $x_0 \in H$ *такие, что*

$$(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0) > 0 \quad \textit{при} \quad \|x\| \geq R. \tag{2.21}$$

Отметим, что (2.21) есть одно из достаточных условий разрешимости смешанного вариационного неравенства (1.1) (см. [5], с.187). Предположим также, что верно (2.5) и

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t} \leq G, \quad 0 \leq G < \infty. \tag{2.22}$$

В условиях (2.5), (2.21), (2.22) докажем ограниченность последовательности u_n. *Пусть* $\|u_n\| \to \infty$ *при* $n \to +\infty$. *Положив в (2.1)* $y = x_0$ *и используя условия a) – c), имеем*

$$\left(\frac{u_n - x_0 - (u_{n-1} - x_0)}{\tau_n}, u_n - x_0\right) + \gamma_n[(Au_n - f, u_n - x_0) + \varphi(u_n) - \varphi(x_0)] +$$
$$+\gamma_n\alpha_n\Bigg\{\|u_n\|^2 - \|u_n\|\,\|x_0\| - \left(\frac{h_n}{\alpha_n}g(\|u_n\|) + \frac{\delta_n}{\alpha_n}\right)(\|u_n\| + \|x_0\|) -$$
$$-\frac{\sigma_n}{\alpha_n}[q(\|u_n\|) + q(\|x_0\|)]\Bigg\} \leq 0.$$

В силу (2.5), (2.21), (2.22) и (2.15) из последнего неравенства при достаточно больших n *выводим оценку* $\|u_n - x_0\|) \leq \|u_{n-1} - x_0\|$. *Значит, последовательность* $\rho_n = \|u_n - x_0\|$ *не возрастает при достаточно больших* n, *что противоречит предположению о неограниченности* $\|u_n\|$. *Аналогичное утверждение имеет место и для решения задачи (1.7), (1.8).*

Замечания, подобные замечаниям 3.1 – 3.4 из [3], можно сформулировать и в условиях данной работы.

Список литературы

1. Лисковец О.А., “Регуляризация смешанных вариационных неравенств”, *ДАН СССР*, **317**:2 (1991), 300–304.

2. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

3. Рязанцева И.П., “Непрерывные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:1 (2012), 36–44..

4. Лионс Ж.–Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

5. Kluge R., *Nichtlinear Variationsungleihungen und Exrtemalaufgaben*, Dtsch. Verl. Wiss., Berlin, 1974.

6. Апарцин А.С., “К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве”, *Труды по прикладной математике и кибернетике*, 1972, 7 – 14.

7. Васин В.В., Агеев А.Л., *Некорректные задачи с априорной информацией.*, Уральская издательская фирма «Наука», Екатеринбург, 1993.

8. Рязанцева И.П., “Методы итеративной регуляризации второго порядка для выпуклых задач условной минимизации”, *Известия вузов. Математика.*, 2000, № 12, 67–77.

First-order regularized iterative methods for mixed variational inequalities

© I. P. Ryazantseva[2]

Abstract. First-order regularized iterative methods by operator and by functional are constructed for mixed variational inequalities in Hilbert space with monotone operator and property convex functional. Sufficient conditions of convergence to normal solution of initial problem are obtained.

Key Words: mixed variational inequality, iterative method, monotone operator, convex functional, convergence, normal solution.

[2] Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru

УДК 517.9

Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2], Д. В. Хитева [3]

Аннотация. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью и коэффициентом перед квадратом первой производной, который может обращаться в нуль. С применением метода дополнительного аргумента определены условия его локальной разрешимости.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, локальная разрешимость, метод дополнительного аргумента, лиминальность

В диссипативной механике материалов, определяемой взаимодействием дислокаций и точечных дефектов, свойства пластической деформации определяются с помощью скалярной плотности дислокаций [1]. Указанное взаимодействие приводит к переползанию краевых и скручиванию винтовых дислокаций, что во внешних силовых полях вызывает разрушение. При циклическом деформировании; при облучении, закалке; при температуре, составляющей более половины от температуры плавления; вблизи поверхности; при поверхностных химических реакциях и т.д. это взаимодействие проявляется как основное [2].

В полупроводниковых кристаллах аналогичное взаимодействие, кроме механических,вызывает различные электронные эффекты, на основе которых действуют твердотельные приборы в микро и наномасштабах (дислокационная инженерия). С другой стороны в металлах и полупроводниках с большой энергией дефектов упаковки не наблюдались наибольшие упрочнения и зарождения разрушений плоскими скоплениями скользящих дислокаций у барьеров. Модели предельной прочности для скоплений дислокаций также противечивы из-за необходимости рассматривать барьеры с еще большей прочностью [3]. Таким образом, взаимодействие дислокаций с точечными дефектами присутствуют в большом числе явлений и актуально для твердотельных технологий. Это взаимодействие учитывается в кинетической модели скалярной плотности дислокаций путем введения зависимости плотности переползающих и размножающихся дислокаций ν от диффузионной ползучести точечных дефектов [6].

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Студент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru@yandex.ru

Целью данной работы является исследование кинетики и распределения плотности переползающих дислокаций ν для сильно изогнутых пластин.

Известно, что упругий изгиб ζ связан выражением

$$\zeta \approx \frac{1}{2d\nu}, \tag{1.1}$$

с плотностью переползающих дислокаций, т.к. они играют определяющую роль в этом виде напряженного состояния [2]: где d - расстояние между стенками в изогнутом кристалле.

В то же время, упругий изгиб ζ плоской пластины и компоненты смещений при растяжениях: связаны соотношениями [5]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{2(1+\sigma)}{E}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma\sigma_{yy}), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \sigma\sigma_{xx}), \tag{1.4}$$

где E, σ - модули Юнга и Пуассона, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ - компоненты тензора напряжений.

Если задана внешняя сила P, толщина пластины h, то равновесное напряженное состояние при преимущественном растяжении задается уравнениями [5]:

$$-\left[E\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right) + \sigma\sigma_{yy}\right]\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{P_{xx}}{h}, \tag{1.5}$$

$$-\left[E\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right) + \sigma\sigma_{xx}\right]\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{P_{yy}}{h}, \tag{1.6}$$

$$-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = \frac{P_{xy}}{h}, \tag{1.7}$$

где P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} - компоненты внешней силы P, рассматриваемой как тензор.

Примем в данной работе в качестве упрощающих предположений, что

$$\beta\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{1.8}$$

$$\dot{\varepsilon_{xx}} = \sigma_{xx}\frac{Db^3}{d^2kT}, \tag{1.9}$$

где $\dot{\varepsilon_{xx}}$ - скорость диффузионной ползучести точечных дефектов [6], D - коэффициент диффузии, b - модуль вектора Бюргерса, T - температура,

k - постоянная Больцмана, β - постоянная величина. Условия (1.8), (1.9) характеризуют однокомпонентную динамику плоского изгиба пластины.

В силу (1.8) из (1.7) следует

$$-\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\frac{2(1+\sigma)P_{xy}}{hE}. \tag{1.10}$$

Из (1.3) и (1.5) вытекает

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=-\frac{P_{xx}}{\sigma_{xx}h}.$$

Подставив это выражение в (1.10), получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2=\frac{\sigma_{xx}2(1+\sigma)P_{xy}}{\beta E P_{xx}}. \tag{1.11}$$

Равенства (1.4) и (1.6) дают

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=-\frac{P_{yy}}{\sigma_{yy}h}. \tag{1.12}$$

Записывая с учетом (1.8) уравнение (1.7) в виде

$$-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=\frac{P_{xy}}{h},$$

с использование равенства (1.12) приходим к выражению

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2=\frac{\sigma_{yy}2(1+\sigma)P_{xy}\beta}{E P_{yy}}. \tag{1.13}$$

Как указано в [1], скорость пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{xx}$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{xx}=\dot{\nu} b l_x+\nu b V_y, \tag{1.14}$$

где l_x - длина пути скольжения дислокации при растяжении вдоль оси x, V_y - средняя скорость перемещения краевых дислокаций, которая имеет вид [1]:

$$V_y=\frac{-2\pi c_0 D\Omega}{b\ln(L/r_0)kT}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}), \tag{1.15}$$

где c_0 - плотность точечных дефектов, L - длина дислокации, Ω - атомный объем вакансий, r_0 - диаметр ядра дислокации.

Далее, примем в соответствии с [2], что

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=\nu b(l_1+l_2), \tag{1.16}$$

где l_1, l_2 - пути переползания при размножении ν.

Из (1.1) следует

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{-1}{2d\nu^2}\frac{\partial\nu}{\partial x}. \tag{1.17}$$

С учетом (1.16), (1.17) выводим из (1.11):

$$\sigma_{xx} = \frac{\nu b(l_1+l_2)\beta E P_{xx}}{P_{xy}2(1+\sigma)} + \frac{\beta^2 E P_{xx}}{4d^2 P_{xy}2(1+\sigma)}\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.18}$$

Также с учетом (1.16), (1.17) выводим из (1.13):

$$\sigma_{yy} = \frac{\nu b(l_1+l_2)E P_{yy}}{\beta P_{xy}2(1+\sigma)} + \frac{E P_{yy}}{4d^2 P_{xy}2(1+\sigma)}\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.19}$$

В результате из (1.18) - (1.19) следует

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{\beta^2 P_{xx} - P_{yy}}{\beta P_{xy}2(1+\sigma)}Eb(l_1+l_2)\nu + \frac{\beta^2 P_{xx} - P_{yy}}{8d^2 P_{xy}(1+\sigma)}E\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.20}$$

Теперь подставив (1.9),(1.15),(1.18) и (1.20) в (1.14), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} + \frac{\lambda}{\nu^3}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.21}$$

где

$$\lambda = g - \frac{\gamma}{\nu}, \qquad \gamma = \frac{\beta E P_{xx} D b^2}{8 l_x P_{xy}(1+\sigma)d^4 KT}, \qquad A = \frac{\beta E P_{xx} D b^3 (l_1+l_2)}{2 l_x P_{xy}(1+\sigma) d^2 KT},$$

$$g = \frac{\pi c_0 D\Omega E(P_{yy} - \beta^2 P_{xx})}{4 b l_x \ln(L/r_0) KT(1+\sigma)P_{xy}d^2}, \qquad B = \frac{\pi c_0 D\Omega E(P_{yy} - \beta^2 P_{xx})(l_1+l_2)}{l_x \ln(L/r_0) KT\beta(1+\sigma)P_{xy}}.$$

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности переползающих дислокаций (1.21) назовем лиминальным, т.к. для его решений возможны критические значения, кардинально меняющие характер поведения решений. Эти критические значения определяются из условия

$$g - \frac{\gamma}{\nu_{cr}} = 0,$$

откуда следует, что

$$\nu_{cr} = \frac{\gamma}{g} = \frac{\beta b^3 \ln(L/r_0) P_{xx}}{2\pi d^2 (P_{yy} - \beta^2 P_{xx})}.$$

Сделаем ещё одно упрощающее предположение. При изучении поведения решения уравнения (1.21) отдельные исследования необходимы, чтобы определить условия, при которых решения дифференциального уравнения первого порядка не выходят из заданной ограниченной области. В данной работе этого аспекта задачи касаться не будем и примем, что $x \in \mathbb{R}^1$. Так что начальное условие для уравнения (1.21) зададим в виде:

$$\nu(0,x) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.22}$$

Таким образом, задача (1.21)-(1.22) определена в области

$$\Omega_T = \{(t,x) : 0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}.$$

По своему физическому смыслу функция $\nu(t,x)$ является величиной положительной, так что в качестве исходного условия примем, что

$$\varphi(x) \ge C_\varphi > 0.$$

Так же, как в [4], применим для исследования разрешимости задачи (1.21)-(1.22) метод дополнительного аргумента [7]. В соответствии с изложенной в [4] схемой вначале преобразуем задачу (1.21)-(1.22) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.21) по x и введя новую неизвестную функцию $p(t,x) = \partial_x \nu(t,x),$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3q\nu - 4\gamma}{\nu^5} p^3 - 2B\nu p - Ap. \tag{1.23}$$

Из (1.21) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p \frac{\partial \nu}{\partial x} = -B\nu^2 + A\nu + \frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p^2. \tag{1.24}$$

Из (1.22) естественным образом следуют начальное условие для $p(t,x)$:

$$p(0,x) = \varphi'(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.25}$$

Составим для задачи (1.22),(1.23),(1.24),(1.25) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1(s,t,x), \qquad \eta(t,t,x) = x, \tag{1.26}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)} w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.27}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.28}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1^2(s,t,x), \tag{1.29}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.30}$$

Так как в правые части (1.22), (1.27), (1.29) функция η явным образом не входит, то задача (1.26), - (1.30) приводится к системе двух интегральных уравнений от двух неизвестных функций:

$$w_1 = 3g\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4}ds - 4\gamma\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5}ds - 2B\int_0^s w_0w_1ds + A\int_0^s w_1ds+ \tag{1.31}$$

$$+\varphi'\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right),$$

$$w_0 = g\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int_0^s w_0^2ds + A\int_0^s w_0ds+ \tag{1.32}$$

$$+\varphi\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right).$$

Локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.31) - (1.32) доказывается с помощью метода последовательных приближений. При этом промежуток разрешимости $0 < t \leq T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.21) - (1.22). Возможность определения границ области разрешимости рассматриваемой задачи в исходных координатах является одним из преимуществ метода дополнительного аргумента. Функции $p(t,x) = w_1(t,t,x), \nu(t,x) = w_0(t,t,x)$ дадут решение задачи (1.21)-(1.22), а функция $\nu(t,x)$ будет решением задачи (1.21) - (1.22). Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^1)$. *Тогда существует такое число* $\Upsilon > 0$, *что при* $0 < t < \Upsilon$ *задача Коши* (1.21) - (1.22) *имеет решение* $\nu(t,x) \in \overline{\mathbb{C}}^{1,2}([0,\Upsilon] \times \mathbb{R}^1)$, *которое определяется из решения системы интегральных уравнений* (1.31), - (1.32) *в виде* $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$.

Замечание 1.2. *Система интегральных уравнений* (1.31) - (1.32) *может быть использована для нахождения численного решения задачи в исходных координатах.*

Замечание 1.3. *Несмотря на внешне сложный вид, система дифференциальных уравнений* (1.26) - (1.30) *достаточно удобна для вывода априорных оценок и исследования свойств решений. В работе* [7] *исследования соответствующей системы дифференциальных уравнений позволили* *определить условия, при которых уравнение вида* $\partial_t v + v\partial_x v = f(t,x,v)$ *имеет решение на заданном промежутке изменения* t*, а в работе* [8] *определить условия, при которых стационарное уравнение* $(\nabla v)^2 = f(x_1, x_2, v)$ *имеет нелокальное решение в заданной области, определяемой физическими характеристиками задачи. В случае задачи* (1.26) - (1.30) *ситуация осложняется возможностью обращения коэффициента перед квадратом производной по* x *в нуль. Тем не менее, мы планируем в наших последующих статьях указать условия, при которых задача* (1.26) - (1.30) *имеет нелокальное решение.*

Список литературы

1. Косевич Д. М., *Основы механики крислаллической решетки.*, Наука., М., 1972.
2. Фридель Ж., *Дислокации.*, Мир., М, 1967.
3. Бернштеин М. Л., Займовский В. А., *Механические свойства металлов.*, Металлургия., М., 1970.
4. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Алексеенко Н. С., “Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций с квадратичной нелинейностью”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 15 – 21.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука., М., 1987.
6. Кан Р. У., Хаазен П., *Физическое металловедение.*, Металлургия., М., 1987.
7. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.
8. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.
9. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

The liminal dissipative equation of the creeping dislocations density for a one-component bending of flat plate

© S. N. Alekseenko[4], S. N. Nagornykh[5], D. V. Khiteva[6]

Abstract. The differential equation in partial derivatives of the first order with a coefficient in front of the square of the first derivative with respect to the spatial variable, which can be equal to zero, is obtain. Using the method of an additional argument, there are defined conditions of its local solvability.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, nonlocal solvability, liminality, method of an additional argument.

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The student of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru

В Средневолжском математическом обществе

УДК 531.391.5

Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движений управляемых систем

© А. С. Андреев[1], О. А. Перегудова[2]

Аннотация. В работе получены достаточные условия стабилизации систем, моделируемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Доказательство основано на построении вектор-функций Ляпунова и систем сравнения и применении метода предельных уравнений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, стабилизация, вектор-функция Ляпунова

1. Введение

В работе рассматриваются управляемые системы, моделируемые системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t, x, u) \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)' \in \mathbb{R}^n$ – вектор n-мерного линейного действительного пространства $\mathbb{R}^n$, описывающий движение системы, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)'$ – вектор управления, создаваемого приводами или иными воздействиями, $u \in \mathbb{R}^m$ – m-мерному линейному действительному пространству $\mathbb{R}^m$.

В соответствии с различными конструкционными назначениями исследуемых объектов могут быть поставлены различные задачи по отношению к управляемой системе (1.1). Для современных манипуляционных роботов актуальной представляется задача конструирования универсальной модели управления, обеспечивающей реализацию целого спектра программных его движений с заданными свойствами, на основе структуры обратной связи в виде измерительной и информационной подсистем, определяющих текущее состояние системы и задающих необходимое управляющее воздействие [1], [2].

[1] Заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; AndreevAS@ulsu.ru.

[2] Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; peregudovaoa@sv.ulsu.ru.

Одна из постановок такой задачи состоит в определении для программного закона движения $x = x(t)$ системы (1.1) управляющей функции $u = u(t, x)$, обеспечивающей стабилизацию этого движения.

В соответствии с подходами теории устойчивости эти задачи математически удобно сформулировать следующим образом.

Пусть $X(t, 0, 0) = 0$, X – вектор-функция, определенная и непрерывная в области $\mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H,\, H = const > 0$ или $H = +\infty\}$ (выше, здесь и далее $()'$ – операция транспонирования, $\|x\| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\| = (u_1^2 + ... + u_m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Система (1.1) при $u = 0$ имеет решение $x = 0$, которое принимается за невозмущенное движение. Задача о стабилизации этого движения состоит в синтезе управляющего воздействия u, а именно, в построении u на основе мгновенной обратной связи в виде зависимости $u = u(t, x)$, из некоторого класса управлений $U = \{u : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}^m,\, u(t, 0) \equiv 0\}$, при котором движение $x = 0$ системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Более точным и удобным для прикладных задач является следующее определение.

Определение 1.1. *Управляющее воздействие* $u = u^0(t, x)$, $u^0(t, 0) \equiv 0$, *является стабилизирующим, если нулевое положение равновесия системы*

$$\dot{x} = X^0(t, x), \quad X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x)) \tag{1.2}$$

является равномерно асимптотически устойчивым с некоторой областью равномерного притяжения $\tilde{A}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le H_0 < H\}$.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу о стабилизации в классе управляющих воздействий $U = \{u : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}^m\}$ кусочно-непрерывного действия.

Для кусочно-непрерывного управления $u = u^0(t, x)$ правая часть уравнения (1.2), в общем случае, является разрывной. Исследование такого уравнения существенно отличается от непрерывного случая, и, соответственно, качественная теория таких уравнений являлась предметом изучения многочисленных работ [4]–[7], в значительной степени подытоженных в монографии [8].

Пусть для некоторого управляющего воздействия $u = u^0(t, x)$ правая часть (1.2) $X = X^0(t, x)$ при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ является кусочно-непрерывной, $M \subset \tilde{A}$ — множество точек разрыва этой функции.

Для каждой точки $\mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ определяется многозначная функция $F(t,x)$, которая совпадает с $X^0(t,x)$ для каждой точки из $\mathbb{R}^+ \times (\tilde{A} \backslash M)$, и тем или иным образом доопределяется для каждой точки из $\mathbb{R}^+ \times M$.

О п р е д е л е н и е 2.1. [8] *Решением уравнения* (1.2) *с разрывной правой частью называется решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{2.1}$$

в виде абсолютно непрерывной функции $x(t)$, *определенной на некотором отрезке* (α, β), *для которой почти всюду для* $t \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ *выполнено включение* $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Важным является способ доопределения функции $X_0(t,x)$, при котором включение (2.1) пригодно для приближенного описания системы (1.2).

Наиболее адекватным для задачи управления механическими системами является следующее доопределение.

Допустим, что функция $X = X(t, x, u_1, ..., u_r)$ непрерывна, а каждая из функций $u_j^0(t,x)$ разрывна на поверхности $M_j = \{(t,x) \in R \times \tilde{A} : \Psi_j(t,x) = 0 \quad (j = 1, ..., m)\}$, $F(t,x)$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее множество значений функции $F_1(t,x) = X^0(t, x, u_1^0(t,x), ..., u_m^0(t,x))$.

В дальнейших рассуждениях по исследованию задачи об устойчивости для системы (1.2) будем использовать указанное доопределение, автоматически перенося выводы относительно включения (2.1) на систему (1.2).

3. Решение задачи

В силу условия $X^0(t,0,0) \equiv 0$ включение (2.1) имеет нулевое решение, которое будем полагать единственным. Примем, что первая часть (1.1), а с ней (1.2) и (2.1) удовлетворяют следующему условию.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Для каждого* $u^0 \in U$ *и каждого* H_0, $0 < H_0 < H$, *существует* $m(H_0)$, $m = const > 0$, *такое, что*

$$||X^0(t,x)|| \leq m \tag{3.1}$$

При этом предположении согласно [8] имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *При условии* (3.1) *включение* (2.1) *имеет свойства:*

1. *Для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ *существует его решение* $x = x(t)$, *удовлетворяющее условию* $x(t_0) = x_0$, *продолжимое для* $t_0 \leq t \leq \beta$, *при этом если* $\beta < +\infty$, *тогда* $\|x(t)\| \to H$ *при* $t \to \beta$;
2. *Решения* $x = x(t)$ *ограниченные при* $t \leq t_0$ *областью* $\tilde{A}_1 = \{x : \|x\| \leq H_1, 0 < H_1 < H\}$, *равностепенно непрерывны;*
3. *Предел равномерно сходящейся последовательности решений является решением.*

Важным свойством решений дифференциальных уравнений является непрерывная зависимость решений от начальных условий и правой части.

В предположении единственности решения $x = 0$ включения (2.1), из теоремы 3.1. имеет место следующее следствие.

При условии $\|X(t, x, u)\| \leq m(H_1)$ решение $x = 0$ системы (1.2) непрерывно зависит от $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \{\|x\| \leq \delta\}$ и $u \in \{u \in U : \left\|u - u^0\right\| \leq \delta\}$ на отрезке $[t_0, \beta], \beta > t_0$.

Для исследования предельного поведения решений (1.2) при $t \to +\infty$ примем также, что система (1.2) удовлетворяет следующему условию.

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Для любого компакта* $K \subset \tilde{A} \backslash M$ *правая часть* (1.2) *удовлетворяет условию Липшица вида: существует постоянная* $L = L(K)$ *такая, что для всех* $(t, x_1), (t, x_2) \in K$

$$\left\|X^0(t, x_2) - X^0(t, x_1)\right\| \leq \|x_2 - x_1\|. \tag{3.2}$$

При этом предположении решение $x = x(t)$ ($x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \tilde{A} \backslash M$) включения (2.1) является единственным для всех $t \in [t_0, \beta]$ при некотором $\beta \geq t_0$.

Для задач механики принято полагать, что решение (1.2) (и значит (2.1)) для каждой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \tilde{A}$ является единственным [9]. Далее это предположение будем считать принятым.

В случае, когда правая часть системы (1.2) является непрерывной, условие (3.2) оказывается достаточным для построения топологической динамики системы (1.2) с целью выявления следующих предельных при $t \to +\infty$ свойств ее решения [10], [11].

О п р е д е л е н и е 3.1. *Точка* $p \in D_0$ *называется предельной точкой решения* $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *уравнения* (1.2), *определенного для всех* $t \leq t_0$, *если существует последовательность* $t_k \to +\infty$, *такая, что* $x(t_k) \to p$ *при* $k \to \infty$.

Множество всех таких точек p, определяемых в зависимости от выбора последовательностей $t_k \to +\infty$, образует положительное предельное множество $\omega^+(x(t))$.

Очевидно, что $x(t) \to \omega^+(x(t)) \cap \partial D_0$ при $t \to +\infty$. Если же решение $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, ограничено некоторым компактом $K \subset D_0$, то $\omega^+(x(t))$ связно, компактно и обладает следующим свойством, которое, по аналогии со свойством инвариантности для автономного уравнения [10], называется свойством квазиинвариантности [12], [13].

Пусть $G_0 = \{g \in \Phi\}$ есть множество предельных функций для правой части уравнения (1.2), определяемых последовательностями $t_k \to +\infty$ и таким образом

$$g(t,x) = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to \infty} \int_0^t X^0(t_k + \tau, x) d\tau.$$

Введем семейство предельных уравнений

$$\dot{x} = X^*(t,x), \quad X^* \in G_0 \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 3.2. [13] *Пусть $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$ есть решение непрерывной системы* (1.2)*, определенное и ограниченное компактом $K \subset D_0$ при всех $t \geq t_0$. Тогда для каждой предельной точки $p \in \omega^+(x(t))$ существует некоторая предельная система* (3.3) *с решением $x^*(t)$, $x^*(0) = p$, таким, что $\{x^*(t), t \in R\} \subset \omega^+(x(t))$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества решения системы (1.2) с разрывной правой частью на основе приведения этого уравнения к включению (2.1).

Для удобства будем полагать, что в представимости области $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l \cup M$ граница M не зависит от $t \in \mathbb{R}$.

Допустим, что в каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$, правая часть (1.2) удовлетворяет условию вида (3.2). Построим для каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$, совокупность предельных уравнений (3.3) и определим общую совокупность предельных уравнений для области $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l$ согласно следующему определению.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Уравнение* (3.3)*, определенное в области $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup ... \cup \tilde{A}_l$ называется предельным к* (1.2) *для последовательности $t_k \to +\infty$, если оно определяется как предельное к* (1.2) *для этой последовательности в каждой области $\tilde{A}_j \quad (j = \overline{1,l})$.*

Пусть какое-либо уравнение (3.3) является предельным для (1.2) в $\tilde{A}_0$. Доопределим его до предельного включения

$$\dot{x} \in F^*(t, x) \tag{3.4}$$

При этом включим в $F^*(t, x)$ значения $F(t_k + t, x)$, полученные предельным переходом при $t \to +\infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. [14] *Пусть некоторое решение уравнения* (2.1) $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *определено и ограничено компактом* $K \subset D$ *при всех* $t \geq t_0$, *некоторое предельное к* (2.1) *уравнение определяется последовательностью* $t_k \to +\infty$. *Тогда существует подпоследовательность* $t_k \to +\infty$, *такая, что последовательность функций* $x_j(t) = x(t_j + t)$ *сходится при* $t \to +\infty$ *к некоторому решению* $x = x^*(t)$ *уравнения* $\dot{x} = F^*(t, x)$, *при этом сходимость является равномерной по* $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Из теоремы 3.1. имеем следующую теорему о квазиинвариантности положительного предельного множества решения уравнения с разрывной правой частью [14].

Теорема 3.4. [14] *Пусть* $x = x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *есть некоторое решение уравнения* (2.1), *определенное и ограниченное компактом* $K \subset \Gamma$ *при всех* $t \geq t_0$. *Тогда для каждой предельной точки* $p \in \omega^+(x(t))$ *этого решения существует некоторое предельное уравнение* $\dot{x} \in F^*(t, x)$ *и некоторое решение этого уравнения* $x = x^*(t)$, $x^*(0) = p$, *определенное при всех* $t \in \mathbb{R}$, *такое, что* $\{x^*(t), \quad t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x(t))$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Полученные результаты могут быть также развиты на случай зависимости граничного множества от времени, т.е. когда $M = M(t)$. В этом случае построение проводится следующим образом. Из каждой подобласти $\Gamma_j(t)$ $(j = \overline{1, l})$ выделяют ее часть Γ_j, так, что $\bar{\Gamma}_j \subset \Gamma_j(t)$ для всех $t \in R$. В области $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_l$ строится совокупность предельных уравнений $\{\dot{x} = X^*(t, x)\}$. Для каждой последовательности $t_k \to +\infty$, которой определяется соответствующее предельное уравнение $\dot{x} = X^*(t, x)$, находится область $\Gamma_j^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \Gamma(t_k + t), \quad x_k \to x, \quad k \to +\infty\}$, $M_j^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \Gamma(t_k + t), \quad x_k \to x, \quad k \to +\infty\}$ при этом полагаем, что множество $M^*(t)$ имеет меру, равную нулю. Далее, каждое предельное уравнение с областью определения доопределяется до $\Gamma^*(t) = \Gamma_1^*(t) \cup \Gamma_2^*(t) \cup ... \cup \Gamma_l^*(t) \cup M^*(t)$

Более просто это построение проводится в случае, когда граница M областей $\Gamma_j(t)$ задается в виде равенств $\psi_j(t, x) = 0, \quad j = \overline{1, k}$, при этом функции $\psi_j(t, x)$ являются ограниченными, равномерно непрерывными по (t, x).

Тогда граница M^* может быть определена равенствами $\psi_j^*(t,x)=0$, где ψ_j^* есть функции, предельные к $\psi_j(t,x)$ в смысле равномерной сходимости.

Основным методом решения задач об устойчивости и стабилизации нелинейных систем является прямой метод Ляпунова [9], [10], а его составной частью является метод векторной функции Ляпунова [15], [16].

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $V(t,x) = (V^1(t,x),...,V^k(t,x))'$, $V : \mathbb{R}^+ \times D_H \to \mathbb{R}^k$. Определим для нее верхнюю производную по времени в силу системы (2.1)

$$\dot{V}^* = (\frac{dV}{dt})^* = (\frac{dV_1^*}{dt},...,\frac{dV_k^*}{dt})' \tag{3.5}$$

где $\frac{dV_i^*}{dt} = \sup_{y\in F(t,x)}(\frac{\partial V_i^*}{\partial t} + \Sigma_{j=1}^n \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j} y_j), \quad i=1,2,...,k$

Допустим, что эта производная удовлетворяет условию

$$\dot{V}^*(t,x) \le Y(t,V(t,x)), \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times$$

где $Y : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ есть непрерывная квазимонотонная вектор-функция: каждая из функций $Y_j(t,y)$ не убывает по переменным $y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_{ll}$, т. к. из условий

$$y_1^1 \le y_1^2, ..., y_{i-1}^1 \le y_i^2, y_{i+1}^1 \le y_{i+1}^2, ..., y_k^1 \le y_k^2$$

следует, что $Y_j(t,y^2) \le Y_j(t,y^1)$.

Пусть K_1 – класс векторных функций $V = (V^1,V^2,...,V^k)', V : \Gamma \to \mathbb{R}^k$ ограниченных, равномерно непрерывных на каждом множестве $\mathbb{R}\times K$, где $K \subset D$ – компакт. Пусть также K_2 и K_3 – аналогичные классы векторных функций и $W : \mathbb{R}^+ \times \Gamma \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, ограниченных и равномерно непрерывных по $(t,y) \in \mathbb{R}\times K_2$ и $(t,x,y) \in \mathbb{R}\times K_1 \times K_2$ для любых компактных множеств $K_1 \subset \Gamma$ и $K_2 \subset \mathbb{R}^k$.

Для каждой функции $V \in K_1$ семейство сдвигов

$$\{V_\tau(t,x) = V(t+\tau,x), \quad \tau \in \mathbb{R}^+\}$$

будет предкомпактно в некотором функциональном метризуемом пространстве F_V непрерывных функций $V :\to R^k$ с открыто-компактной топологией. Отсюда следует, что для любой последовательности $t_l \to +\infty$ найдутся подпоследовательность $t_{l_j} \to +\infty$ и функция $V^* \in F_V$, такие, что последовательность сдвигов $\{V_j(t,x) = V(t_{l_j}+t,x)\}$ будет сходиться к предельной функции $V^*(t,x)$ в пространстве , а именно: сходимость будет равномерной по $(t,x) \in [-\beta,\beta]\times K$ для каждого числа $\beta > 0$ и каждого компактного множества $K \subset \Gamma$. Тем самым, для функции V можно определить семейство предельных функций $\{V^*\}$.

Аналогично, для функций $Y \in K_2$ и $W \in K_3$ можно построить соответственно семейства $\{Y^*\}$ и $\{W^*\}$ предельных функций.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $V \in K_1$, производная которой в силу включения (2.1) представима в виде

$$\dot{V}^*(t,x) = Y(t, V(t,x)) + W(t,x,V(t,x)) \tag{3.6}$$
$$Y(t,0) \equiv 0, \quad W(t,0,V(t,0)) \equiv 0$$

где функция $Y = Y(t,y)$ принадлежит классу K_2, $Y \in K_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $y \in R^k$, $\frac{\partial Y}{\partial y} \in K_2$ функция $W = W(t,x,y)$ принадлежит классу $K_3, W \in K_3$, и имеет место неравенство $W(t,x,y) \leq 0$ для любых $(t,x,y) \in R \times D \times \mathbb{R}^k$.

Из представления (3.6) следует, что функция $V(t,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{y}(t,x) = Y(t,y) \tag{3.7}$$

— системой сравнения.

Если $V = V(t,x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (3.6), при этом $V(t_0,x_0) = V_0$, а $y = y(t,t_0,V_0)$ есть решение (3.7), определенное на интервале $[t_0, t_0+\beta), \quad \beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0+\beta)$ на решении $x = x(t), \quad (x(t_0) = x_0)$, включения (2.1) выполняется неравенство

$$V(t,x(t)) \leq y(t,t_0,V_0).$$

Из условия $Y \in K_2$ следует, что система (3.7) предкомпактна и для нее можно определить семейство предельных систем сравнения

$$\dot{y} = Y^*(t,y), \quad Y^* \in F_y \tag{3.8}$$

Из условий относительно правой части $Y = Y(t,y)$ системы (3.8) следует, что решения этой системы $y = y(t,t_0,y_0)$ непрерывно дифференцируемы по $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k$. Из свойства неубывания зависимости $y = y(t,t_0,y_0)$ по y_0 следует, что матрица

$$\Phi(t,t_0,y_0) = \frac{\partial y(t,t_0,y_0)}{\partial y_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(t,t_{0,}y_0) = I \ (I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица) фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$\dot{z} = H(t,t_{0,}y_0)z, H = \left.\frac{\partial Y(t,y)}{\partial y}\right|_{y=y(t,t_0,y_0)}$$

Предположим, что для любого компакта $K \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K) > 0$, такие, что матрица Φ для любых $(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times K$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi(t, t_0, y_0)\| \leq M(K), \det \Phi(t, t_0, y_0) \geq \alpha(K) \tag{3.9}$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x(t))$ решения включения (2.1).

Теорема 3.5. *Предположим, что:*

1. *существует вектор-функция Ляпунова $V = V(t, x), V \in K_1$, удовлетворяющая дифференциальному равенству* (3.6)*;*
2. *решения системы сравнения* (3.7) *удовлетворяют условию* (3.9)*;*
3. *решение $x(t), x(t_0) = x_0$ включения* (2.1) *ограничено некоторым компактом $K \subset \Gamma$ для всех $t \geq t_0$;*
4. *решение $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ системы сравнения* (3.7)*, где $V_0 = V(t_0, x_0)$, ограничено при всех $t \geq t_0$.*

Тогда для любой предельной точки $p \in \omega^+(x(t))$ найдётся набор предельных функций (F^*, V^*, Y^*, W^*), такой, что решение $x = x^*(t)$ предельного включения (3.4) *с начальным условием $x^*(0) = p$ удовлетворяет соотношениям*

$$x^*(t) \in \omega^+(x(t)), x^*(t) \in \{V^*(t, x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t, x, y^*(t)) = 0\}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, где $y^*(t)$ есть решение предельной системы сравнения (3.4) *с начальным условием $y^*(0) = V^*(0, p)$.*

Теорема 3.5. позволяет вывести новые формы о достаточных условиях существования стабилизирующего управления $u = u^0(t, x)$. Из равномерной асимптотической устойчивости следует важное свойство устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а из предельного поведения движений можно судить о глобальном поведении движений, что очень важно для управляемых систем с периодическими фазовыми координатами.

Теорема 3.6. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова $V = V(t, x), V \in K_1$, такая, что:*

1. *соответствующая скалярная функция $\overline{V}(t, x)$, определяемая в виде*

$$\bar{V}(t, x) = \sum_{i=1}^{k} V^i(t, x) \wedge \bar{V}(t, x) = \max V^i(t, x)$$

является определённо-положительной;

1. *нулевое решение* $y = 0$ *системы сравнения* (3.7) *равномерно устойчиво;*

2. *для любой предельной совокупности* (F^*, V^*, Y^*, W^*) *и каждого ограниченного решения* $y = y^*(t) \neq 0$ *п редельной системы сравнения* (3.8) *множество* $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельного включения* (3.4).

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ *является стабилизирующим для системы* (1.1).

Для применения знакопостоянных вектор-функций Ляпунова в поставленной задаче стабилизации введём следующие определения из [13].

О п р е д е л е н и е 3.3. *Нулевое решение* $x = 0$ *устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* (F^*, V^*, Y^*, W^*), *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что для любого решения* $x = x^*(t)$ *системы* (3.7), *такого, что*

$$x^*(0) = x_0, x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{W^*(0,x,0) = 0\}$$

для всех $t \geq 0$ *выполняется неравенство* $\|x^*(t,x_0)\| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 3.4. *Нулевое решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* (F^*, V^*, Y^*, W^*), *если оно устойчиво, а также существует число* $\Delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $T = T(\varepsilon) > 0$, *такие, что для любого решения* $x = x^*(t)$ *системы* (3.7), *такого, что*

$$x^*(0) = x_0, \quad x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{W^*(0,x,0) = 0\}$$

для всех $t \geq T$ *выполняется неравенство* $\|x^*(t)\| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 3.5. *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$, *если число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *в определении 3.3. не зависит от выбора* (F^*, V^*, Y^*, W^*).

О п р е д е л е н и е 3.6. *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$, *если числа* $\Delta > 0$ *и* $T = T(\varepsilon) > 0$ *в определении 3.4. не зависят от выбора* (F^*, V^*, Y^*, W^*).

Т е о р е м а 3.7. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(t,x) \geq 0, V \in K_1$ *такая, что выполнены условия 1-3 теоремы 3.6., а также условия:*

1. *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$.
2. *Множество* $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельного включения* (3.7). *(Здесь* $y^*(t) \neq 0$ *– произвольное ограниченное решение предельной системы сравнения* (3.8)*).*

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ *является стабилизирующим для системы* (1.1).

В решении конкретных задач представляются важными следующие достаточные условия обеспечения заданного программного движения $x = 0$ системы (1.2).

Пусть управление $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x))'$ является кусочно-непрерывным, при этом функции $u_j(t,x)$ $(j = \overline{1,m})$ терпят разрыв на поверхности $\{\psi_j(t,x) = 0\}$, где $\psi_j : \mathbb{R}^+ \times \tilde{A} \to \mathbb{R}$ $(j = \overline{1,l})$ есть функции ограниченные и равномерно непрерывные по $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times K, \quad K \subset \tilde{A}$.

Т е о р е м а 3.8. *Допустим, что можно найти вектор-функцию Ляпунова* $V = V(t,x) \geq 0, \quad V \in K_1$ *такую, что:* $\bar{V}(t,x) \geq a_1(|\psi(t,x)|)$, *выполнены условия 1-3 теоремы 3.6., а также условия:*

1. *нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\psi^*(t,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(F^*, V^*, Y^*, W^*)\}$.
2. *множество* $\{V^*(t,x) = y^*(t)\} \cap \{W^*(t,x,y^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельного включения* (3.4). *(Здесь* $y^*(t) \neq 0$ *– произвольное ограниченное решение предельной системы сравнения* (3.8)*).*

Тогда управление $u = u^0(t,x)$ *является стабилизирующим для системы* (1.1).

Следствием изложенных результатов являются следующие теоремы об управлении системой с мгновенной обратной связью.

Т е о р е м а 3.9. *Допустим, что для системы* (1.1) *можно найти управляющее воздействие* $u = u^0(t,x)$ *и вектор функцию Ляпунова* $V = V(t,x)$, *такие, что:*

1. $a_1(|\psi(t,x)|) \le \bar{V}(t,x), V_i(t,x) \le a_2(|\psi(t,x)|), i = 1,2,...,k$;
2. *производная вектор-функции Ляпунова в силу* (1.2) *удовлетворяет неравенству*
$$\dot{V}^*(t,x) \le -a_3(|\psi(t,x)|);$$
3. *невозмущенное движение* $x = 0$ *системы* (1.2) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\psi(t,x) = 0\}$.

Тогда управляющее воздействие $u = u^0(t,x)$ *решает поставленную задачу о стабилизации.*

Полученные результаты позволяют обосновать новые подходы к построению нелинейных моделей управления нелинейными механическими системами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-33082мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

Список литературы

1. Вукобратович М. К., Стокич Д. М., *Управление манипуляционными роботами: Теория и применение*, Наука, М., 1985, 384 с.
2. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г., *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*, Наука, М., 1989, 368 с.
3. Андреев А. С., *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, УлГУ, Ульяновск, 2005.
4. Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика*, 1965, № 1.
5. Алимов Ю. И., “О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями”, *Автоматика и телемеханика*, 1961, № 7, 817–830.
6. Айзерман М. А., Пятницкий Е. С., “Основы теории разрывных систем I,II”, *Автоматика и телемеханика*, 1974, № 8, 39–61.
7. Филиппов А. Ф., “Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью”, *Матем. сборник*, **51(93)**:1 (1960), 99–128.

8. Филиппов А. Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 224 с.

9. Малкин И. Г., *Теория устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 530 с.

10. Руш Н., Абетс П., Лалуа М., *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980, 300 с.

11. Андреев А. С., "Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы", *ПММ*, **48**:2 (1984), 225–232.

12. Sell G. R., "Nonautonomous differential equations and topological dynamics", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22** (1967), 254–269.

13. Андреев А. С., Перегудова О. А., "К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости", *Доклады Академии наук*, **400**:5 (2005), 621–624.

14. Андреев А. С., Дмитриева О. Г., Петровичева Ю. В., "Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью", *Научно-технический вестник Поволжья*, 2011, № 1, 15–21.

15. Матросов В. М., "Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова", *Дифференц. уравнения*, **4**:8 (1968), 1374–1386.

16. Васильев С. Н., "Метод сравнения в анализе систем", *Дифференц. уравнения*, **17**:9 (1981), 1562–1573.

Lyapunov vector-functions in the problem of stabilization of motion controlled systems.

© A. S. Andreev[3], O. A. Peregudova[4]

Abstract. In the work we obtain sufficient conditions for the stabilization of systems differential equations with discontinuous right-hand side. The proof is based on the construction of the Lyapunov vector functions and comparison systems and application of method of limiting equations.

Key Words: systems of differential equations with discontinuous right side, stabilization, Lyapunov vector-functions.

[3] Head of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; AndreevAS@ulsu.ru.

[4] Professor of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; peregudovaoa@sv.ulsu.ru.

УДК 517.9

О модифицированных многошаговых методах для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса два

© **О. С. Будникова**[1]

Аннотация. В работе предложены многошаговые методы для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса 2. Проведен анализ предложенных алгоритмов первого порядка точности на модельных примерах. Приведено описание общего вида модифицированных $k-$ шаговых методов.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения, индекс, многошаговые методы.

1. Введение

Математические модели различных развивающихся систем включают в себя взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерра I и II рода [1]. Такие задачи можно записать в виде системы интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, их принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ).

Численное решение таких систем стало набирать популярность относительно недавно, первая статья посвященная данной тематике была опубликована в 1987 году Чистяковым В.Ф. [2], с тех пор было опубликовано несколько работ посвященных численному решению, в основном, полуявных ИАУ (см. [3], [4], [5], [6], [7]). В статье [7] впервые были предложены и обоснованы многошаговые методы для численного решения ИАУ индекса один.

Цель данной работы модифицировать ранее предложенные $k-$ шаговые алгоритмы для численного решения линейных ИАУ индекса 2. Преимущества данных алгоритмов проиллюстрированы на известных тестовых примерах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \ 0 \le s \le t \le 1, \tag{2.1}$$

[1] Ассистент кафедры математики и методики обучения математике, Восточно-Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; osbud@mail.ru.

где $A(t)$ и $K(t,s)$ - $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ n -мерные известная и искомая вектор-функции.

Системы (2.1) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ), если

$$detA(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Всюду в дальнейшем будем подразумевать, что для системы (2.1) выполнено условие (2.2).

Предполагается, что элементы $A(t), K(t,s), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи (2.1) будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$ обращающую (2.1) в тождество.

Характеристикой сложности рассматриваемых задач является понятие индекса.

Определение 2.1. [8]. *Минимальное число l, при котором существует дифференциальный оператор*

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^{l} W_j(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^j,$$

где W_j – $(n \times n)$ матрицы с непрерывными элементами, такой, что

$$\Omega_l \circ (A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds) = \check{A}(t)x(t) + \int\limits_0^t \check{K}(t,s)x(s)ds;$$

здесь $\check{A}(t)$, $\check{K}(t,s)$ - некоторые матрицы с непрерывными элементами, причем

$$det\check{A}(t) \neq 0, \; \forall t \in [0,1]$$

назовем индексом системы (2.1).

Для иллюстрации определения 2.1. приведем пример.

Пример 2.1. [9]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], d \neq 1 - const.$$

При любых $f_1(t) \in C^1$, $f_2(t) \in C^2$ таких, что $f_2(0) = 0, f_1(0) = f_2'(0)$ система имеет единственное решение: $x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - \frac{1}{1-d}(f_1(t) - f_2'(t)) \\ \frac{1}{1-d}(f_1'(t) - f_2''(t)) \end{pmatrix}$.

В качестве оператора Ω_2 *можно взять*

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2.$$

Данный оператор переводит исходное ИАУ в СИУВ II рода

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5(1-d) \\ 1.5 & 0.5(d-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1-0.5d \\ 1 & d(t-s)+1.5d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) + 0.5f_1'(t) - 0.5(f_2'(t) + f_2''(t)) \\ f_2(t) - 0.5f_1'(t) + 1.5f_2'(t) + 0.5f_2''(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

3. Многошаговые методы

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1, 2, \ldots, N,\ h = \frac{1}{N}$ и обозначим $A_i = A(t_i), K_{i,j} = K(t_i, t_j), f_i = f(t_i), x_i \approx x(t_i)$.

Для численного решения ИАУ индекса 1, статье [7] предложены и обоснованы k-шаговые методы основанные на явном методе Адамса (см.,например, [13],[14]) для интегрального слагаемого и на экстраполяционной формуле для вычисления x_{i+1} по заранее вычисленным значениям $x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}$.

Данные методы имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}. \tag{3.1}$$

Приведем таблицу коэффициентов α_j для $k = 1, 2, ..., 5$ (см., [7])и значения коэффициентов $\omega_{i+1,l}$ для $k = 1, 2, 3.$ (см., [13]):

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	-	-	-	-
2	3	-3	1	-	-	-
3	4	-6	4	-1	-	-
4	5	-10	10	-5	1	-
5	6	-15	20	-15	6	-1

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 & & & & & \\ 55 & 5 & 5 & 55 & & & & \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 & & & \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 & & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 33 & -4 & 55 & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & 33 & -4 & 55 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Было доказано[7], что методы (3.1) сходится к точному решению с порядком $k+1$, то есть, справедлива оценка

$$||x_i - x(t_i)|| = O(h^{k+1}),\ i = k, k+1, ..., N-1.$$

4. Модифицированные методы

Интегро-алгебраические уравнения индекса два и выше назовем ИАУ высокого индекса. Для таких задач алгоритмы, разработанные для интегро-алгебраических уравнений индекса 1, могут порождать неустойчивые процессы. Для иллюстрации вышесказанного приведем примеры.

П р и м е р 4.1. [11] *Рассмотрим ИАУ индекса 2*

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1].$$

Здесь $d-$ *числовой параметр,* $d \neq 1$. *Данная система имеет точное решение*

$$z(t) = \frac{g'(t) - f''(t)}{d-1}, y(t) = f'(t) - tz(t).$$

Теперь для примера 4.1., применяя метод (3.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h\sum_{l=0}^{i}\begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность i-ой строки и $(i-1)$-й:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h\begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} - g_i \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - t_i z_i, \quad dz_i - z_{i-1} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h} - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Для второй компоненты получим следующее характеристическое уравнение:

$$d \cdot p - 1 = 0.$$

Таким образом, метод (3.1) при $-1 \le d \le 1$ является неустойчивым.

Из вышеприведенных рассуждений видно, что предлагаемые многошаовые методы могут порождать неустойчивые процессы для ИАУ индекса 2. Но неустойчивости при $-1 \le d \le 1$ можно избежать, если модифицирвать предложенные нами методы следующим образом: будем находить по экстраполяционной формуле не только x_{i+1}, а все первое слагаемое $A_{i+1}x_{i+1}$. Получим:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j A_{i-j} x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \ i = k, k+1, \cdots, N-1. \tag{4.1}$$

Проиллюстрируем эффективность такой модификации.

Для данной задачи 4.1. применим (4.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} - g_i \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - t_i z_i, \quad z_i = \frac{1}{(d-1)} \Big(\frac{g_{i+1} - g_i}{h} - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \Big).$$

Сравнивая полученные рекуррентные соотношения с точным решением, видим, что метод сходится к точному решению с первым порядком точности.

Рассмотрим другое интегро-алгебраическое уравнение индекса 2.

Пример 4.2. [12]

$$\begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & as \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1].$$

Здесь $a-$ *числовой параметр, задача имеет единственное решение* $y(t) = f'(t) - atz(t),\ z(t) = -f''(t)$.

Для начала применим метод (3.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - at_i z_i, \quad (a+1)z_i - az_{i-1} = -\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Для второй компонеты получим следующее характеристическое уравнение:

$$(a+1) \cdot p - a = 0.$$

Таким образом, метод (3.1) при $a < -\frac{1}{2}$ является неустойчивым для данного примера.

Теперь применим модифицирванные методы (4.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & at_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - at_i z_i, \quad z_i = -\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Сравнивая полученные рекуррентные соотношения с точным решением, видим, что предпочтительность данного метода очевидна по сравнению с немодифицированным.

П р и м е р 4.3. [10]

$$\begin{pmatrix} 1 & -at \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} -b & abs \\ 1 & -1-as \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1],$$

где a, b – числовые параметры. Точное решение $y(t) = (1+at)e^{bt}$, $z(t) = e^{bt}$.

Данный пример имеет индекс один, так как $rankA(t) = deg(det(\lambda A(t) + K(t,t))) = 1 \ \forall t \in [0,1]$. Но при $b \ll 0$ он становится жестким.

Проводя анализ, аналогичный предыдущим случаям, получаем:
для метода (3.1)

$$y_i = (1+at_i)z_i, \quad z_i = \frac{1-ah}{1-ah-bh} z_{i-1};$$

и для (4.1) при $k = 0$

$$y_i = (1+at_i)z_i, \quad z_i = \frac{1}{1-bh} z_{i-1}.$$

Видно, что для устойчивости процесса во втором случае требуется весьма существенное ограничение на шаг, а у модифицированного метода последнее выражение совпадает с неявным методом Эйлера для уравнения Далквиста.

Из-за громоздкости выкладок для случая $k = 1, 2$ приведем только численные расчеты вышерассмотренных примеров.

Обозначения: pog_1, pog_2 – погрешность одно- и двухшагового методов соответственно.

$$pog_k = \max_{0 \le i \le n} ||x(t_i) - x_i||, k = 1, 2.$$

$d = 0$			$d = 0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	$0,038$	10^{-48}	$0,2$	$0,043$	$6 \cdot 10^{-48}$
$0,1$	$0,00836$	0	$0,1$	$0,0084$	0
$0,05$	$0,0021$	0	$0,05$	$0,0021$	0

Таблица 1: результаты расчетов примера 4.1., $g = \frac{t^2}{2}, f = \frac{t^3}{3}$

$a=0$			$a=0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	0.0165	10^{-49}	$0,2$	0.0153	10^{-49}
$0,1$	0.00417	10^{-48}	$0,1$	0.00416	10^{-48}
$0,05$	0.00104	0	$0,05$	0.00104	0

Таблица 2: результаты расчетов примера 4.2., $f(t)=\frac{t^3}{6}$

$a=0,b=0$			$a=0.5,b=0$			$a=0,b=0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	10^{-50}	10^{-50}	$0,2$	10^{-50}	10^{-50}	$0,2$	0.0184	0.0016
$0,1$	0	0	$0,1$	0	0	$0,1$	0.004946	0.00023
$0,05$	0	0	$0,05$	0	0	$0,05$	0.00128	0.000032

Таблица 3: результаты расчетов примера 4.3.

$a=0.5,b=0.5$			$a=0,b=-5$			$a=2,b=-5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	0.0277	0.0024	$0,2$	0.01694	0.00698	$0,2$	0.0508	0.021
$0,1$	0.0074	0.00035	$0,1$	0.00579	0.00436	$0,1$	0.0174	0.013
$0,05$	0.00192	0.000047	$0,05$	0.00109	0.00287	$0,05$	0.0033	0.00086

Таблица 4: результаты расчетов примера 4.3.

Результаты численных расчетов позволяют надеяться на работоспособность модифицирванных $k-$ шаговых алгоритмов для ИАУ индекса 2.

Автор благодарит Булатова М.В. за постановку задачи.

Работа поддержана грантами РФФИ №11-01-00639а, 13-01-93002-Вьет-а и 14-01-31224 мол_а.

Список литературы

1. В. М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., М., 1983, 350 с.

2. Чистяков В.Ф., “О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах”, *Функции Ляпунова и их применения*, 1987, № 9, Новосибирск: Наука, 231–239.

3. Kauthen, J.P., “The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by pollinomial spline collocation methods”, *Math. Comp.*, 2000, № 236, Новосибирск: Наука, 1503–1514.

4. Brunner, H., *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations*, Unversity Press Cambridge, Cambridge, M., 2004, 350 с.

5. M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin, "Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2", *Appl. Numer. Math*, **61**:1 (2011), 131–148.

6. S. Pishbin, F. Ghoreishi , M. Hadizadeh, "The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **245**:1 (2013), 121–132.

7. О. С. Будникова, М. В. Булатов, "Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 829–839.

8. M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov, *The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs*, Memorial University of Newfoundland, 1997, 35 c.

9. Булатов, М. В., "О преобразовании вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра", *Вычислительные технологии*, **5**:4 (2000), 22–30.

10. Kunkel, P., "Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations", *Electr. Trans. Numer. Analys*, **26**:4 (2007), 85–420.

11. Чистяков, В. Ф., *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996, 350 с.

12. K. F. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numercal solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations*, Appl. Math., Philadelphia, 1996, 350 c.

13. Тен Мен Ян, *Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода*, канд. физ. мат. наук,, Иркутск, 1985, 215 с.

14. Linz, P., *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM, Philadelphia, 1985.

On modified multistep methods for numerical solution of linear integral-algebraic equations which have index two.

© O. S. Budnikova[2]

Abstract. In this paper, we propose multistep methods for numerical solution of linear integral-algebraic equations which have index two. The detailed analysis of such schemes of the first order have been studied using modal examples. A description for the general form of modified k-steps methods has been given.

Key Words: integral-algebraic equations, index, multistep methods.

[2] Assistant of chair of mathematics and training technque of mathematics , East Siberian State Academy of Education, Irkutsk; osbud@mail.ru.

УДК 517.9

О трёхмерных отображениях с двумерными экспансивными аттракторами и репеллерами

© В. З. Гринес[1], А. А. Шиловская[2]

Аннотация. В работе рассмотрен класс диффеоморфизмов на трёхмерных замкнутых многообразиях, неблуждающие множества которых являются объединением двумерных аттракторов и репеллеров. Получена топологическая классификация многообразий, допускающих рассматриваемые диффеоморфизмы. Построен класс модельных отображений, являющихся косым произведением псевдоаносовского гомеоморфизма и грубого преобразования окружности. Доказано, что если ограничение диффеоморфизма из рассматриваемого класса на неблуждающее множество является экспансивнным, то этот диффеоморфизм Ω-сопряжен с некоторой моделью.

Ключевые слова: псевдоаносовский гомеоморфизм, Ω-сопряженность, неблуждающее множество

1. Введение и основные понятия

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизиы гладких замкнутых 3-многообразий, неблуждающее множество которых является объединением двумерных поверхностей, на которых ограничение диффеоморфизма является экспансивным.

Напомним, что гомеоморфизм f компактного метрического пространства (X, d) на себя называется *экспансивным*, если существует число $c > 0$ (*константа экспансивности*) такое, что для любых точек $x, y \in X$ существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

На пространства, допускающие экспансивный гомеоморфизм, существуют ограничения, а именно, в [7] доказано, что если f — экспансивный гомеоморфизм компактного метрического пространства X, то размерность X конечна и каждое минимальное множество является нульмерным. В [5] доказано, что не существует экспансивных гомеоморфизмов на окружности S^1 и двумерной сфере S^2. В то же время в работе [9] доказано, что каждая компактная ориентируемая поверхность положительного рода допускает экспансивный гомеоморфизм. При этом, в силу [5], на поверхности рода 1 экспансивный гомеоморфизм сопряжен с *гиперболическим автоморфизмом тора*[3].

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2] Аспирант кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vesnann@mail.ru

[3] *Алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1. То есть $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если

В работах [5] и [3] независимо доказано, что на компактных ориентируемых поверхностях рода $g \geq 2$ экспансивный гомеоморфизм топологически сопряжен *псевдоаносовскому отображению (pA-гомеоморфизму)*, для определения которого (по Нильсену-Терстону [8], [10], см. также [4]) нам понадобятся следующие понятия.

Пусть $\mathcal{S}$ — замкнутое подмножество компактного ориентируемого 2-многообразия M^2 такое, что $M^2 \setminus \mathcal{S}$ является объединением $\bigcup\limits_{j\in J} L_j$ попарно непересекающихся одномерных связных слоев L_j. Будем говорить, что на M^2 задано *слоение* $\mathcal{F} = L_j, j \in J$ *с множеством особенностей* S, если для любой точки $x \in (M^2 \setminus \mathcal{S})$ существует окрестность $U_x \subset M^2$ и диффеоморфизм $\psi : U_x \to \mathbb{R}^2$ такой, что любая компонента связности пересечения $U_x \cap L_j$ (если это пересечение не пусто) отображается ψ в прямую, при этом ограничение ψ на каждую компоненту связности множества $U_x \cap L_j$ является диффеоморфизмом на образ.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k \neq 2$. Слоением W_k на $\mathbb{R}^2$ со стандартной *седловой особенностью* в точке O и k сепаратрисами называется образ горизонтальных прямых $\{Im\ w = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ при отображении $w = z^{k/2}$ в случае нечетного k и при отображении $w^2 = z^k$ в случае четного k.

Слоение $\mathcal{F}$ на M^2 называется *слоением с седловыми особенностями*, если множество $\mathcal{S}$ особенностей слоения $\mathcal{F}$ состоит из конечного числа точек и для любой точки $s \in \mathcal{S}$ имеется окрестность $U_s \subset M^2$, гомеоморфизм $\psi_s : U_s \to \mathbb{R}^2$ и число $k_s \in \mathbb{N}$ такие, что $\psi_s(s) = O$ и $\psi(\mathcal{F} \cap U) = W_{k_s} \setminus O$. Точка s называется *седловой особенностью с* k_s *сепаратрисами.*

Трансверсальной мерой для слоения $\mathcal{F}$ называется функция, ставящая в соответствие каждой дуге (диффеоморфному образу отрезка $I = [0, 1]$) α, трансверсальной $\mathcal{F}$, неотрицательное число $\mu(\alpha)$ со следующим свойством: если α_0, α_1 — две дуги, трансверсальные к $\mathcal{F}$ и связанные такой гомотопией $a : I \times I \to \mathcal{F}$, что $a(I \times \{0\}) = \alpha_0$, $a(I \times \{1\}) = \alpha_1$ и $a(x \times I)$ для любого $x \in I$ содержится в некотором слое $\mathcal{F}$, то $\mu(\alpha_0) = \mu(\alpha_1)$.

Два слоения $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ называются *трансверсальными*, если они имеют общее множество особенностей $\mathcal{S}$ и во всех остальных точках слои трансверсальны.

Гомеоморфизм $h : M^2 \to M^2$ называется *псевдоаносовским отображением (pA-гомеоморфизмом)*, если на поверхности M^2 существует пара h-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ с множеством седловых особенностей $\mathcal{S}$ и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

1) каждая седловая особенность из $\mathcal{S}$ имеет не менее трех сепаратрис;

собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической.*

2) существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ $(\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha))$ для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}^s$ $(\mathcal{F}^u)$.

Слоения $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ называются *устойчивым и неустойчивым* соответсвенно, а число λ – *дилатацией* f.

Следущие определения смотри в [4] и [1].

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *приводимым*, если существует f-инвариантная система непересекающихся между собой простых замкнутых кривых негомотопных нулю и негомотопных друг другу. В противном случае гомеоморфизм называется *неприводимым.*

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *периодическим*, если существует целое $n_0 > 0$ такое, что $f^{n_0} = id$, где id — тождественное преобразование.

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *алгебраически конечного типа*, если на M^2 существует конечное инвариантное семейство вложенных в M^2 непересекающихся между собой цилиндров $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ таких, что ограничение гомеоморфизма f на множество $\Delta = M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} int\ \sigma_i$ является периодическим гомеоморфизмом.

Согласно классификации Я.Нильсена [8] и У.Терстена [10] множество всех гомотопических классов $\{f\}$ гомеоморфизмов f на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $g \geq 2$ представляется в виде объединения четырех непересекающихся подмножеств T_1, T_2, T_3, T_4, выделяемых следующими условиями:

1. если $\{f\} \in T_1$, то $\{f\}$ содержит периодический гомеоморфизм;
2. если $\{f\} \in T_2$, то $\{f\}$ содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
3. если $\{f\} \in T_3$, то $\{f\}$ содержит приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
4. если $\{f\} \in T_4$, то $\{f\}$ содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

У. Терстон [10] (см. также [4]) построил модельный псевдоаносовский гомеоморфизм в каждом гомотопическом классе из T_4, обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех таких гомеморфизмов. Заметим, что певдоаносовский гомеморфизм является диффеоморфизмом всюду вне множества особенностей устойчивых и неустойчивых слоений. Поэтому иногда употребляют термин *псевдоаносовский диффеоморфизм.*

2. Структура объемлющего многообразия

В настоящей работе будем рассматривать класс $\mathcal{G}$, состоящий из диффеоморфизмов f, заданных на гладких замкнутых трехмерных многообразиях M^3, неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит из конечного числа компонент связности $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_m$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{B}_i$ является ручным вложением в M^3 ориентируемой поверхности M^2 положительного рода;

2) существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(\mathcal{B}_i)=\mathcal{B}_i$;

3) $\mathcal{B}_i$ является либо аттрактором, либо репеллером[4] диффеоморфизма f^{k_i}.

Теорема 2.1. *Если многообразие M^3 допускает диффеоморфизм из класса $\mathcal{G}$, то оно является локально-тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным поверхности M^2.*

В случае, когда поверхность M^2 является тором, результат Теоремы 2.1. следует из работы [2].

3. Модельные диффеоморфизмы

В этом разделе мы сконструируем класс модельных отображений, принадлежащих $\mathcal{G}$, которые являются диффеоморфизмами всюду за исключением конечного множества точек, природа которых будет ясна из конструкции. Вначале предъявим грубые модели преобразований окружности $\mathbb{S}^1$. Согласно результатам А.Г. Майера [6] каждому грубому сохраняющему ориентацию диффеоморфизму φ_+ однозначно соответсвует натуральные параметры $n,k\in\mathbb{N}$ и целое l такое, что для $k=1$, $l=0$, тогда как для $k>1$, $l\in\{1,\ldots,k-1\}$ взаимно просто с k; меняющему ориентацию грубому диффеоморфизму φ_- соотвествует натуральный параметр $q\in\mathbb{N}$. Опишем модели, соответствующие этим параметрам.

Представим $\mathbb{S}^1$ как $\mathbb{S}^1=\{e^{i2\pi r}=(cos2\pi r, sin2\pi r)\in\mathbb{R}^2 : r\in\mathbb{R}\}$. Обозначим через $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ естественную проекцию, заданную формулой $\pi(r)=e^{i2\pi r}$. Введём следующие отображения:

$\psi_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ сдвиг на единицу времени потока $\dot r=\sin(2\pi mr)$ для $m\in\mathbb{N}$;

$\chi_{k,l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r)=r-\frac{l}{k}$;

$\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi(r)=-r$;

[4] Инвариантное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма g называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $g(U)\subset int\,U$, $\bigcap\limits_{j\geq 0} g^j(U)=\mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма g^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма g.

$\tilde{\varphi}_+ = \chi_{k,l}\psi_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \chi\psi_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}_+(r+\nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$ и $\tilde{\varphi}_-(r+\nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$ для $\nu \in \mathbb{Z}$. Таким образом для $\sigma \in \{+,-\}$ корректно определён диффеоморфизм $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, который при $\sigma = +$ ($\sigma = -$ сохраняет (меняет) ориентацию окружности и неблуждающее множество которого состоит из $2n$ орбит периода k (из $2q$ периодических орбит, две из которых неподвижны, а остальные имеют период два). Обозначим через V_+ (V_-) множество всех отображений φ_+ (φ_-) для всех наборов параметров n, k, l (q). Пусть $P_+ \in \mathcal{P}$ и $J_+ : M^2 \to M^2$ гомеоморфизм такой, что $P_+J_+ = J_+P_+$. Пусть $P_- \in \mathcal{P}$ и $J_- : M^2 \to M^2$ гомеоморфизм такой, что $P_-J_-^{-1} = J_-P_-$. Положим $M_{J_\sigma} = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma_\sigma$, где $\Gamma_\sigma = \{\gamma_\sigma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней гомеоморфизма $\gamma_\sigma : M^2 \times \mathbb{R} \to M^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma_\sigma(z,r) = (J_\sigma(z), r-1)$. Обозначим через $p_{J_\sigma} : M^2 \times \mathbb{R} \to M_{J_\sigma}$ естественную проекцию. Положим $\tilde{\varphi}_\sigma(z,r) = (P_\sigma(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$.

Определение 3.1. *Будем говорить, что гомеоморфизм* $\varphi_\sigma : M_{J_\sigma} \to M_{J_\sigma}, \sigma \in \{+,-\}$ *является локально прямым произведением* $P_\sigma \in \mathcal{P}$ *и* $\varphi_\sigma \in V_\sigma$, *если* $\varphi_\sigma = p_{J_\sigma}\tilde{\varphi}_\sigma p_{J_\sigma}^{-1}$, *и писать* $\varphi_\sigma = P_\sigma \otimes \varphi_\sigma$.

Обозначим через Φ_+ (Φ_-) множество всех локально прямых произведений φ_+ (φ_-). Положим $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$.

4. Ω-сопряженность с моделью

Обозначим через $\mathcal{G}_*$ подмножество множества $\mathcal{G}$, состоящее из диффеоморфизмов f таких, что ограничение гомеоморфизма f^{k_i} на $\mathcal{B}_i$ является экспансивным гомеоморфизмом.

Теорема 4.1. *Любой диффеоморфизм из класса* $\mathcal{G}_*$ *является* Ω-*сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса* Φ.

Благодарности. Авторы благодарят О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00672-а и № 13-01-12452 офи_м2.

Список литературы

1. Арансон С.Х., Гринес В.З., “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32.

2. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В., “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.

3. K. Hiraide, “Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov”, *Osaka Journal of Mathematics*, **27**:1 (1990), 117–162.

4. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, пер. с англ. А.Ю. Жирова, ред. Д. В. Аносов, М., 1998, XVI+112 с.

5. J. Lewowicz, “Expansive homeomorphisms of surfaces”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.)*, **20**:1 (1989), 113–133.

6. А.Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч.Зап.ГГУ*, 1939, № 12, 215–229.

7. R. Mane, “Expansive homeomorphisms and topological dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252** (1979), 313–319.

8. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Fl?chen”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358.

9. T. O’Brien, W. Reddy, “Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism”, *Pacific Journal of Mathematics*, **35**:3 (1970), 737–741.

10. W.P. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.

Three-dimensional mapping with two-dimensional expansive attractors and repellers.

© V. Z. Grines[5], A. A. Shilovskaya[6]

Abstract. In this paper, we consider a class of three-dimensional mappings whose non-wandering sets are a union of two-dimensional attractors and repellers. A topological classification of ambient manifolds admitting such systems is obtained. A class of model mappings is constructed where maps are skew products of a pA-homeomorphisms and rough circle transforms. We have proved that a map from the considered class is Ω-conjugated with some model

Key Words: pseudo-Anosov diffeomorphism, Ω-conjugacy, non-wandering set.

[5] Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.

[6] Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vesnann@mail.ru.

УДК 51.7:532.546

Построение системы разностных уравнений методом Галеркина с использованием двумерного симплекса

© Е. П. Еремина[1], Д. И. Бояркин[2]

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона. В работе построена система базисных функций для треугольной сетки. Сгенерирована система уравнений, построена разностная схема. Получены оценки для поперечников Колмогорова для треугольной и прямоугольной сеток, и проведен их сравнительный анализ.

Ключевые слова: базисные функции, форма Галеркина, поперечник Колмогорова, слабое решение

1. Аппроксимация многоугольной области

Под многоугольной областью понимается либо некоторая область в форме многоугольника, либо аппроксимация области другой формы. Многоугольник разбивается на треугольники. Рассмотрим линейную форму, приближающую функцию $f(x, y)$ на типичном треугольном элементе с вершинами (x_i, y_i), $(i = 1, 2, 3)$ (Рис.1.1).

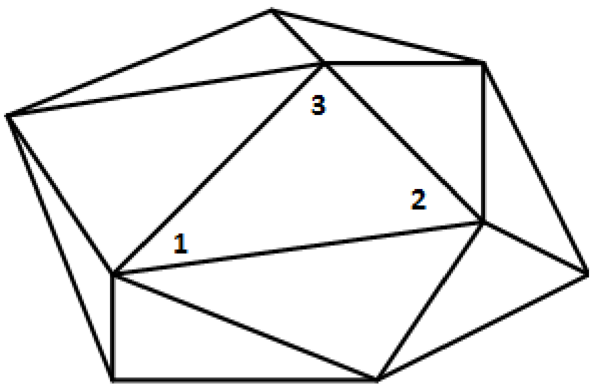


Рисунок **1.1**

Она имеет вид

$$p_1(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y) f_i, \tag{1.1}$$

где $f_i = f(x_i, y_i), (i = 1, 2, 3)$. Коэффициенты $\alpha_i(x, y)(i = 1, 2, 3)$ задаются формулами

[1] Магистрант 2-го года обучения, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; tremasovaep@gmail.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.ru.

$$\alpha_1(x,y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{23} + \eta_{23}x - \xi_{23}y), \tag{1.2}$$

$$\alpha_2(x,y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{31} + \eta_{31}x - \xi_{31}y), \tag{1.3}$$

$$\alpha_3(x,y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{12} + \eta_{12}x - \xi_{12}y), \tag{1.4}$$

где $|C_{123}|$ - удвоенная площадь треугольника, а

$$\tau_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \tag{1.5}$$

$$\xi_{ij} = x_i - x_j, \tag{1.6}$$

$$\eta_{ij} = y_i - y_j \ (i,j = 1,2,3). \tag{1.7}$$

Полная базисная функция относительно некоторой вершины получается суммированием частей, связанных с треугольниками, которые примыкают к вершине.

2. Построение системы базисных функций для случая конечного элемента двумерного симплекса

Любую область в двумерном пространстве можно аппроксимировать многоугольниками, которые всегда можно разбить на конечное число треугольников. Полный полином порядка m

$$\prod_{k+l=0}^{m} a_{kl} x^k y^l \tag{2.1}$$

может быть использован для представления функции $U(x,y)$, по значениям, в

$\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ узлах треугольника. Для случая $m=1$ интерполяционный полином имеет вид:

$$\prod_1 (x,y) = \alpha_1 + \alpha_2(x) + \alpha_3 y = \sum_{j=1}^{3} U_j p_j^1(x,y). \tag{2.2}$$

Значения U_j ($j = 1,2,3$) являются значениями искомой функции $U(x,y)$ соответственно в вершинах p_j $(j=1,2,3)$, а p_j имеют следующий вид:

$$p_j^1 = \frac{1}{C_{jkl}}(\tau_{kl} + \eta_{kl}x - \xi_{kl}y) = \frac{D_{kl}}{Cjkl}, \tag{2.3}$$

где τ_{kl}, ξ_{kl}, η_{kl} задаются формулами (1.5)- (1.7),

$$D_{kl} = det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$C_{jkl} = det \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Нетрудно заметить, что

$$p_j^1 = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k \ (1 \leq j, k \leq 3). \end{cases} \tag{2.6}$$

Рассмотрим сетку, изображенную на рисунке 2.1.

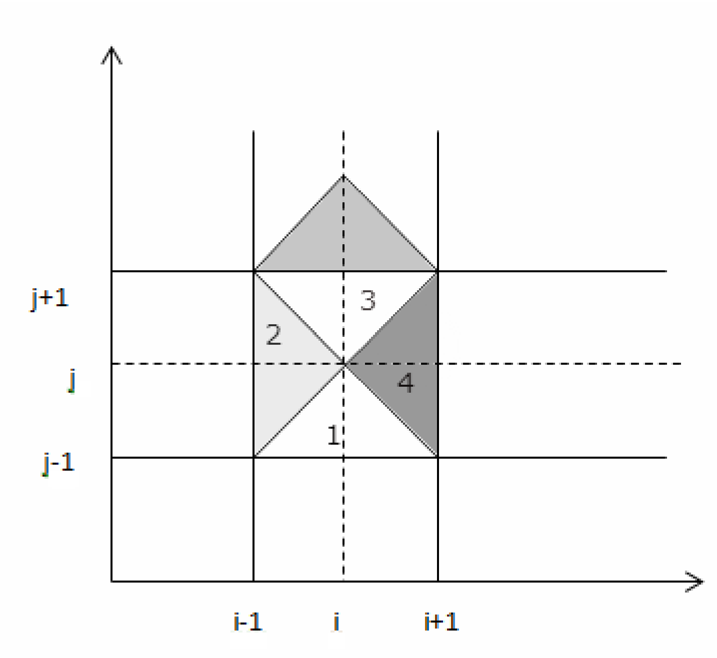


Рисунок **2.1**

Точку (i, j) будем окружать прямоугольными треугольниками с высотой h и основанием $2h$. Зафиксируем вершину (i, j) и рассмотрим треугольник (1). Для треугольника (1) найдем функции $p_{i,j}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j-1}$.

$$p_{i,j} = \frac{D_{k,l}}{C_{p,k,l}} = \frac{2h(y_{j-1} - y)}{-2h^2} = \frac{y - y_{j-1}}{h}, \tag{2.7}$$

$$p_{i+1,j-1} = \frac{(x - x_i) + (y_j - y)}{2h}, \tag{2.8}$$

$$p_{i-1,j-1} = \frac{(x_i - x) + (y_j - y)}{2h}. \tag{2.9}$$

Нетрудно заметить, что для функций $p_{i,j}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j-1}$ выполняется условие (2.6). Найдем аналогичным образом функции $p_{i,j}$, $p_{i-1,j+1}$, $p_{i+1,j-1}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j+1}$. Получим систему функций и их производных.

Базисная функция	Треугольник	Производная $\frac{\partial p}{\partial x}$	Производная $\frac{\partial p}{\partial y}$
$p_{ij} = \dfrac{y - y_{j-1}}{h}$	(1)	0	$\frac{1}{h}$
$p_{ij} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h}$	(2)	$\frac{1}{h}$	0
$p_{ij} = \dfrac{y_{j+1} - y}{h}$	(3)	0	$-\frac{1}{h}$
$p_{ij} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h}$	(4)	$-\frac{1}{h}$	0
$p_{i-1j-1} = \dfrac{(x_i - x) + (y_j - y)}{2h}$	(1),(2)		
$p_{i-1j+1} = \dfrac{(x_i - x) + (y - y_j)}{2h}$	(3),(2)		
$p_{i+1j-1} = \dfrac{(x - x_i) + (y_j - y)}{2h}$	(1),(4)		
$p_{i+1j+1} = \dfrac{(x - x_i) + (y - y_j)}{2h}$	(3),(4)		

Таким образом получим систему базисных функций для $1 \le i, j \le m-1$

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y - y_{j-1}}{h}, & y_{j-1} \le y \le y_j;\ y - y_{j-1} - x_{i-1} \le x \le y - y_{j-1} - x_{i+1}\ ; \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \le x \le x_i;\ x - x_{i-1} + y_{j-1} \le y \le x_{i-1} - x + y_{j+1}\ ; \\ \dfrac{y_{j+1} - y}{h}, & y_j \le y \le y_{j+1};\ y_j - y + x_i \le x \le y - y_j - x_i\ ; \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \le x \le x_{i+1};\ x_i - x + y_j \le y \le x - x_i + y_j\ ; \\ 0, & \text{при других значениях аргумента.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Частные производные базисных функций будут иметь вид для $1 \le i, j \le m-1$

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & x_{i-1}\le x\le x_i;\ x-x_{i-1}+y_{j-1}\le y\le x_{i-1}-x+y_{j+1}\ ;\\ -\dfrac{1}{h}, & x_i\le x\le x_{i+1};\ x_i-x+y_j\le y\le x-x_i+y_j\ ;\\ 0, & \text{при других значениях аргумента.}\end{cases} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & y_{j-1}\le y\le y_j;\ y-y_{j-1}-x_{i-1}\le x\le y-y_{j-1}-x_{i+1}\ ;\\ -\dfrac{1}{h}, & y_j\le y\le y_{j+1};\ y_j-y+x_i\le x\le y-y_j-x_i\ ;\\ 0, & \text{при других значениях аргумента.}\end{cases} \tag{2.12}$$

3. Генерация системы разностных уравнений

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=f(x,y),\quad (x,y)\in D \tag{3.1}$$

$$u(x,y)|_{\partial D}=0. \tag{3.2}$$

Форма Галеркина для задачи Дирихле для задачи (3.1)-(3.2) имеет вид

$$\sum_{k,l=1}^{m-1}\tilde{u}_{k,l}\iint\limits_D\Big(\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+ \\ +\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\Big)\,dxdy+\iint\limits_D f(x,y)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy=0. \tag{3.3}$$

Построим разностную схему на основе выражения для нахождения коэффициентов $\tilde{u}_{k,l}$.
Для нахождения коэффициентов рассмотрим случаи, когда k,l принимают значения $i+1,j+1$, $i-1,j+1$, $i+1,j-1$, $i-1,j-1$, i,j. При других значениях k,l значения интегралов перед коэффициентами $\tilde{u}_{k,l}$ будут равны нулю, так как базисные функции имеют локальный носитель. Рассмотрим случай $k=i+1, l=j+1$

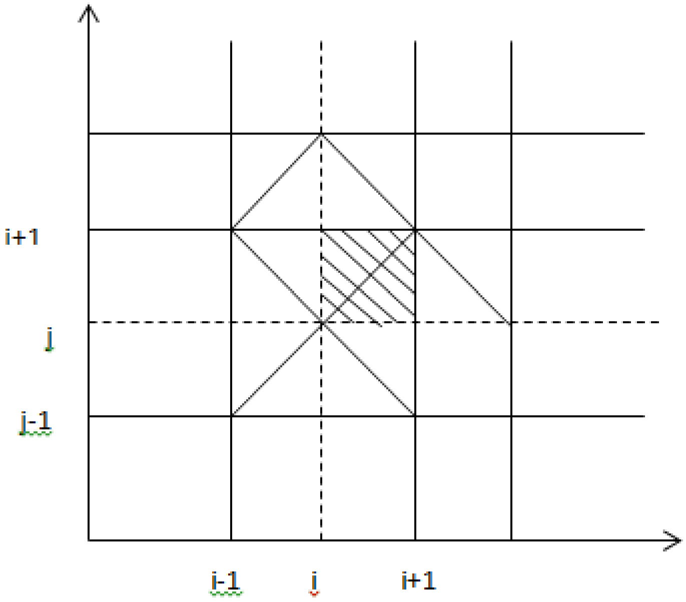


Рисунок **3.1**

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \tag{3.4}$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_j+(x-x_i)} \left(\frac{\partial\varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy+ \tag{3.5}$$

$$+ \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{x_i}^{x_i+(y-y_j)} \left(\frac{\partial\varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \tag{3.6}$$

$$= -\frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Аналогично коэффициенты перед значениями $\tilde{u}_{i-1,j-1}$, $\tilde{u}_{i+1,j-1}$, $\tilde{u}_{i-1,j+1}$ будут равны $-\frac{1}{2}$, а перед значением $\tilde{u}_{i,j}$ равен 2. Таким образом получим разностную схему

$$2\tilde{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1,j-1}-\frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1,j+1}-\frac{1}{2}\tilde{u}_{i+1,j+1}-\frac{1}{2}\tilde{u}_{i+1,j-1} = -\int_0^1\int_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy, \tag{3.8}$$

$1 \leq i,j \leq m-1$.

4. N-мерный колмогоровский поперечник

Введем следующие обозначения:
W - линейное пространство всех непрерывных в области D и на границе ∂D функций, обладающих ограниченными производными первого порядка, которые могут иметь разрывы лишь на конечном множестве прямых.
$\tilde{W}$ - линейное пространство функций, состоящее из тех же функций, что и W, но со скалярным произведение (w,v)

$$(w,v) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4.1}$$

Это скалярное произведение индуцирует норму $\|w\|^2_{\tilde{w}} = (w,w)$ в пространстве $\tilde{W}$.
$\tilde{W}^o$ - подпространство функций $w \subset \tilde{W}$, удовлетворяющих условию $w|_{\partial D} = 0$.
Выбор базисных функций надо по возможности осуществить так, чтобы для каждой функции $v \in U \subset \tilde{W}^o$ нашлась такая функция $w_N \in \tilde{W}^N$, "близкая" к ней, для которой величина

$$\|\tilde{w}_N - u\|^2_W = \min_{w\in\tilde{W}^N} (w-u, w-u). \tag{4.2}$$

Таким образом, наилучшим был бы такой выбор базисных функций, при котором число

$$K_N = K_N(U,\tilde{w}_N) = \sup_{v\in U} \min_{w\in\tilde{W}^N} \|\tilde{w}_N - u\|_{\tilde{W}} \tag{4.3}$$

было бы наименьшим возможным. Обозначим $\kappa(U,\tilde{W}^o)$ число

$$\kappa(U,\tilde{W}^o) = \inf_{w\in\tilde{W}^N} K_N(U,\tilde{w}_N). \tag{4.4}$$

Это число называется N-мерным колмогоровским поперечником класса функций U относительно нормированного пространства $\tilde{W}^o \in W$. Очевидно, что наилучшим выбором базисных функций был бы такой, при котором число (4.3) совпадало бы с поперечником А.Н. Колмогорова.

Теорема 1. Пусть U- множество всех функций, вторые производные которых непрерывны и не превосходят по модулю некоторого числа M, и которые обращаются в нуль на границе ∂D. Пусть для каждого N из некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел осуществлен выбор точек $Q_1^N, Q_2^N, ..., Q_m^N$,где $m = m(N)$, разбиение многоугольника $D_N = Q_1^N Q_2^N ... Q_m^N$ на треугольники, порождающее сетку $P_1^N, P_2^N, ..., P_m^N$. Пусть при этом выполнены условия:

1^0. Длина l любой стороны треугольника разбиения удовлетворяет неравенству

$$l \leq C_1 h, \tag{4.5}$$

$$h = \left[\frac{S_D}{N}\right]^{1/2}, \tag{4.6}$$

S_D- площадь треугольника.
2^0. Площадь S_N области $D \backslash D_N$ удовлетворяет оценке

$$S_N \leq C_{2h}^2, C_2 = const. \tag{4.7}$$

3^0. Каждый угол α любого из треугольников разбиения удовлетворяет оценке

$$\alpha > \alpha_0 = const > 0. \tag{4.8}$$

Тогда при сформулированных условиях для величины

$$K_N(U, \tilde{w}_N) = \sup_{v \in U} \inf_{w \in \tilde{W}^o} \iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial(w-v)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy \tag{4.9}$$

имеет место оценка

$$K_N(U, \tilde{w}_N) \leq C_3 h, \tag{4.10}$$

где C_3- некоторая постоянная.
Нетрудно увидеть выполнение условий теоремы для разбиения полученного в пунктах 2-4.

Для доказательства теоремы интеграл (4.9) можно разбить на сумму интегралов по многоугольнику D_N, вписанному в область D, и по его дополнению $D \setminus D_N$. Заметим,что для прямоугольной области $D \equiv D_N$.

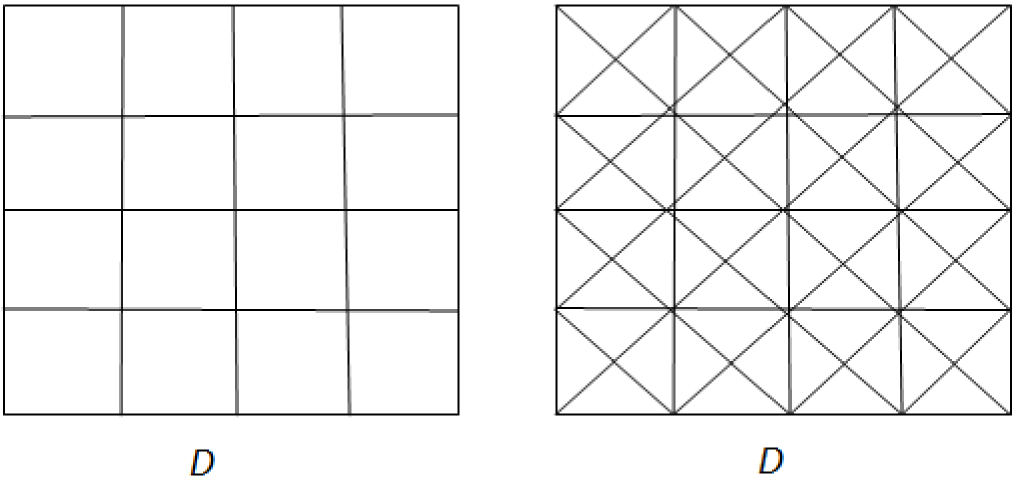


Рисунок **4.1**

Поэтому для прямоугольной области нет существенных различий при вычислении на прямоугольной и треугольной сетках. Рассмотрим случай, когда область D не является прямоугольной, и равенство $D \equiv D_N$ не выполняется. Обратимся к доказательству теоремы 1. В ходе доказательства получена система констант. Для каждого из слагаемых интеграла (4.9) получены оценки

$$\iint\limits_{D_N} \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial x}\right)^2 dxdy \le A_1, \tag{4.11}$$

$$\iint\limits_{D \setminus D_N} \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial y}\right)^2 dxdy \le A_2, \tag{4.12}$$

где

$$A_1 = \frac{8A_3h^2}{sin^2(\alpha_0)}, \tag{4.13}$$

$$A_2 = 2M^2L^2C_2h^2. \tag{4.14}$$

Для случая сетки на основе прямоугольного треугольника и случая прямоугольной сетки $sin^2(\alpha_0) = 1$. Оценим множитель C_2. Для случая прямоугольной сетки константа C_2 будет больше константы C_2 для треугольной сетки, так как треугольниками можно покрыть большую площадь области D, чем прямоугольниками. Поэтому число K_N для треугольной сетки меньше, следовательно использование треугольной сетки предпочтительнее.

Список литературы

1. Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

2. Годунов С. К., Рябенький В. С., *Разностные схемы*, Наука, М., 1977.

3. Митчелл Р.,Уэйт В., *Метод конечных элеменов для уравнений с частными производными*, Мир, М., 1981.

4. Тремасова Е.П.,Бояркин Д.И., “Генераций системы уравнений методом Галеркина для решения задачи об установившихся колебаниях”, *Журнал средневолжского математического общества*, **15**:1. (2013).

5. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина*, Мир, М., 1988.

Building a system of difference equations by the Galerkin method using two-dimensional simplex

© E. P. Eremina[3],D. I. Boyarkin[4]

Abstract. The Dirichlet problem for the Poisson equation is considered. The system of basic functions for the triangular grid is constructed. The system of equations is generated, the difference scheme is constructed. Estimates for the Kolmogorov widths for triangular and rectangular grids are obtained. Comparative analysis was performed.

Key Words: basis functions, Galerkin form, weak solution, Kolmogorov width.

[3] Magister of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; tremasovaep@gmail.ru.

[4] Docent of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; boyarkindi@gmail.ru.

УДК 544.431.8

Численное исследование колебательных реакций с помощью метода Розенброка с действительными коэффициентами

© Р. Д. Икрамов,[1] С. А. Мустафина[2]

Аннотация. В работе рассмотрена колебательная модель модифицированного Орегонатора, представленная жесткой системой дифференциальных уравнений, применен метод неявный Розенброка для ее решения.

Ключевые слова: обыкновенные системы дифференциальных уравнений, метод Розенброка, Орегонатор

1. Введение

Химические превращения, как правило, протекают по многостадийным схемам. Изменения концентраций исходных веществ и промежуточных продуктов во времени далеко не всегда описываются возрастающими или убывающими кривыми - могут наблюдаться участки постоянства или очень малого изменения концентрации того или иного компонента, кривые с перегибом.

Детальное исследование кинетики нелинейных процессов показало, что при наличии обратной связи вдали от точки равновесия возможно возникновение колебательных состояний - периодическое возрастание или убывание концентрации одного из компонентов в течение промежутка времени. При численном исследовании колебательных реакций возникает проблема решения жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которой необходимо использовать специальные методы, основанные на неявных схемах. Целью данного исследования является разработка алгоритма и программы для решения прямой кинетической задачи и исследования многокомпонентных химических систем со сложной нелинейной динамикой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим химический процесс в рамках сосредоточенной модели изотермического реактора постоянного объема, которому соответствует система

[1] Аспирант кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета, г. Стерлитамак; rustam_ikramov@mail.ru.

[2] Заведующий кафедрой математического моделирования,Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета, г. Стерлитамак; mustafina_sa@mail.ru.

обыкновенных дифференциальных уравнений $C' = A^T V$ с заданным начальным условием $C(0) = C_0$, где A^T - стехиометрическая матрица, C, V - соответственно вектор концентраций реагентов и скоростей стадий. Если реакция протекает в изотермическом реакторе постоянного объема с обменов вещества (открытая система, реактор идеального смешения), то система дифференциальных уравнений записывается в виде $C' = A^T V + \frac{1}{\Theta}(C_p - C)$, где C_p - вектор концентраций реагентов на входе, $\Theta = \nu/\lambda$ - время пребывания смеси в реакторе, ν - объем реактора, λ - объемная скорость течения смеси через реактор. В качестве тестового примера используем модель модифицированного Орегонатора [1], дающего сложный предельный цикл и состоящий из 6 стадий. Обозначим концентрации реагентов следующим образом: $c_1 = [BrO_3^-]$, $c_2 = [Br^-]$, $c_3 = [M(n)]$, $c_4 = [HBrO_2]$, $c_5 = [HOBr]$, $c_6 = [BrO_2]$, $c_7 = [M(n+1)]$. В этих обозначениях $M(n)$ - ион металла катализатора, а $M(n+1)$ - окисленная форма этого иона. Тогда система дифференциальных уравнений модели модифицированного Орегонатора примет вид:

$$
\begin{aligned}
c_1' &= -\nu_1 - \nu_3 + \nu_5 + (c_{p1} - c_1)/\Theta,\\
c_2' &= -\nu_1 - \nu_2 + 0.462\nu_6 + (c_{p2} - c_2)/\Theta,\\
c_3' &= -\nu_4 + \nu_6 + (c_{p3} - c_3)/\Theta,\\
c_4' &= \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 + \nu_4 - 2\nu_5 + (c_{p4} - c_4)/\Theta,\\
c_5' &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_5 + (c_{p5} - c_5)/\Theta,\\
c_6' &= 2\nu_3 - \nu_4 + (c_{p6} - c_6)/\Theta,\\
c_7' &= \nu_4 - \nu_5 + (c_{p7} - c_7)/\Theta,
\end{aligned}
$$

где $\nu_1, \nu_2, .., \nu_6$ задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= k_1 c_1 c_2 - k_{-1} c_4 c_5,\\
\nu_2 &= k_2 c_2 c_4 - k_{-2} c_5^2,\\
\nu_3 &= k_3 c_1 c_4 - k_{-3} c_6^2,\\
\nu_4 &= k_4 c_3 c_6 - k_{-4} c_4 c_7,
\end{aligned}
$$

Коэффициенты скоростей реакции принимают следующие значения (моль/с): $k_1 = 0.084$, $k_2 = 4 \cdot 10^8$, $k_3 = 2 \cdot 10^3$, $k_4 = 1.3 \cdot 10^5$, $k_5 = 4 \cdot 10^4$, $k_6 = 0.65$, $k_{-1} = 10^4$, $k_{-2} = 5 \cdot 10^{-5}$, $k_{-3} = 2 \cdot 10^{-7}$, $k_{-4} = 2.4 \cdot 10^7$, $k_{-5} = 4 \cdot 10^{-11}$.

3. Численный эксперимент

Для численного исследования модели модифицированного Орегонатора был выбран неявный метод Розенброка третьего порядка точности. Схемы метода Розенброка для перехода на новый временной слой требуют решения линейной системы уравнений с хорошо обусловленной матрицей, что позволяет избежать итераций.

В простейшем случае методы типа Розенброка могут иметь вид: $(E - Ahf_y + Bh^2f_y^2)(y_{n+1} - y_n) = hf(y_n + Chf)$, где y_{n+1} - искомое численное решение на одном шаге интегрирования длины h, A, B, C - коэффициенты, определяющие метод; y и f - n-мерные вектор-функции, f_y - матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, E - единичная матрица. Отметим, что f и f_y без аргументов всюду означают $f(y_n)$ и $f_y(y_n)$ соответственно [2]. Интегрирование велось с шагом 0.001 на интервале $[0, 1000]$.

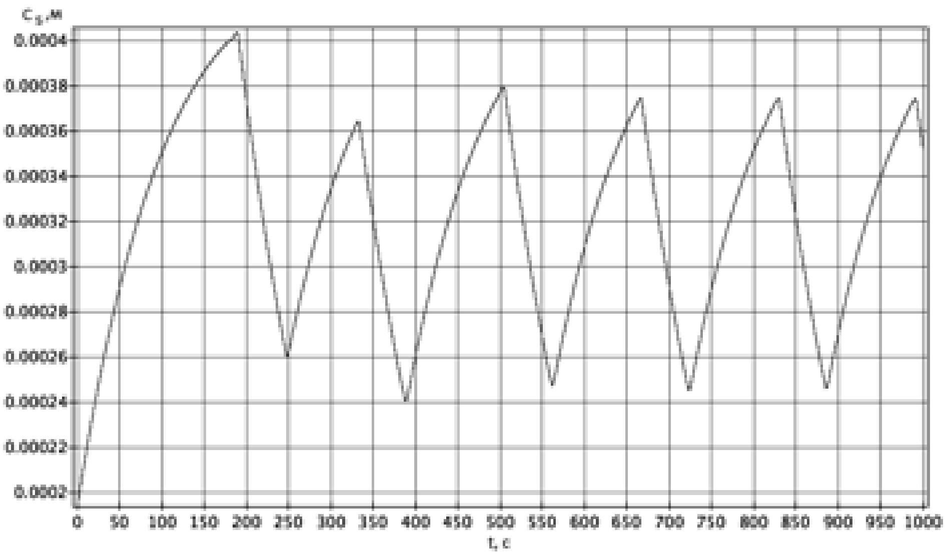


Рисунок **3.1**
Колебания значений концентраций реагента c_4

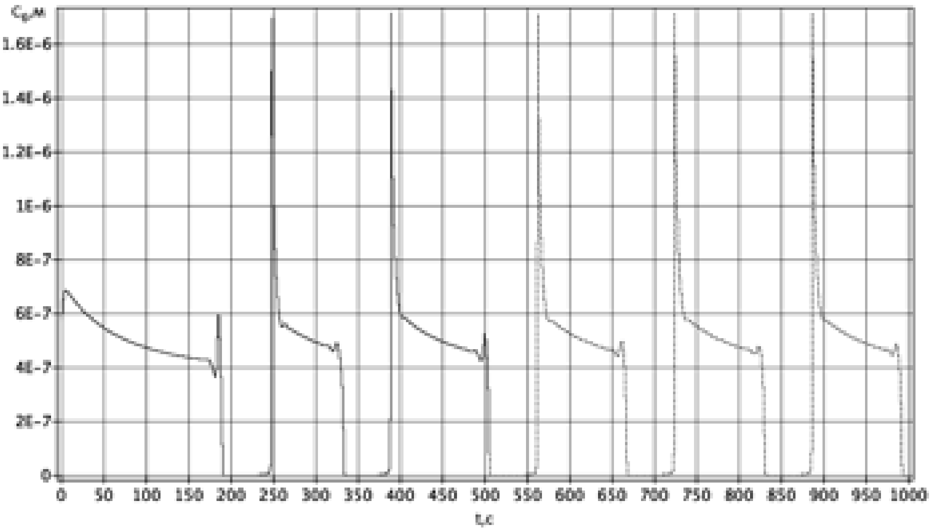


Рисунок **3.2**
Колебания значений концентраций реагента c_5

Результаты интегрирования, представленные на рис. 1 - рис. 2, показывают удовлетворительное согласование с результатами работы [1], полученными (2,1) - методом решения жестких систем, который значительно усложнен нахождением матрицы производных второго порядка и большим числом элементарных операций над матрицами. Такие операции оказывают влияние на скорость алгоритма при высоких размерностях. Созданный авторами алгоритм и программа на основе схемы Розенброка с действительными коэффициентами для решения прямой задачи химической кинетики могут быть адаптированы к другим колебательным реакциям путем замены правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений и начальных условий.

Список литературы

1. Новиков Е. А., "Численное моделирование модифицированного орегонатора (2,1)-методом решения жестких задач", *Вычислительные методы и программирование*, 2010, № 11, 281–288.

2. Филиппов С. С., Тыглиян А. В., "АВС-схемы для численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений", *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, № 4.

Numerical modeling of oscillating reactions based on Rosenbrock method with real coefficients

© R. D. Ikramov [3], S. A. Mustafina [4]

Abstract. In this article we consider a modified model Oregonator describing the behavior of Belousov-Zhabotinsky reaction, given the reaction in the reactor with constant volume metabolism. Described and applied to the model Rosenbrock method with real coefficients for solving stiff systems of differential equations.

Key Words: Oregonator, Rosenbrok method, oscillations

[3] Postgraduate Student, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; rustam_ikramov@mail.ru.

[4] PhD in Physics and mathematics, full prof, Head of Mathematical Modeling Chair, Dean of Physics and mathematics Faculty, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; mustafina_isa@mail.ru.

УДК 517.938.5

О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными множествами

© С. Х. Капкаева[1]

Аннотация. В работе найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на двумерных многообразиях и неблуждающее множество которых принадлежит инвариантному объединению конечного числа непересекающихся простых замкнутых кривых. Исследована взаимосвязь между динамикой таких диффеоморфизмов и топологией объемлющего многообразия. Для содержательного подкласса таких систем получена их топологическая классификация

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологическая сопряженность, аттрактор, репеллер

1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла* на многообразии M^n, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество[2] Ω диффеоморфизма f гиперболично и конечно (то есть состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);

2. для любых различных периодических точек p, q диффеоморфизма f устойчивое многообразие W^s_p и неустойчивое многообразие W^u_q либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Неблуждающее множество Ω диффеоморфизма Морса-Смейла f представим в виде $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Omega_i$, где Ω_i — множество периодических точек диффеоморфизма f, индекс Морса[3] которых равен i $(i = 0, 1, ..., n)$. Периодическая точка, индекс Морса которой равен $0\,(n)$ называется стоковой (источниковой), периодическая точка индекс Морса которой не равен ни 0, ни n называется седловой точкой.

Компоненты связности $W^s_p \setminus p$ $(W^u_p \setminus p)$ седловой точки p называются *устойчивыми (неустойчивыми) сепаратрисами* седла p.

[1] Магистрантка факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

[2] Для диффеоморфизма f точка $x \in X$ называется блуждающей, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для $t \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω.

[3] *Индексом Морса* периодической точки p называется число, равное размерности неустойчивого многообразия W^u_p

Если f — диффеоморфизм Морса-Смейла и p его периодическая точка, то пересечение $W^s_p \cap W^u_p$ состоит в точности из одной точки p. Если для различных седловых периодических точек p, q пересечение $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$, то оно является бесконечным множеством. При этом если $dim\ W^s_p + dim\ W^u_q = n$, то множество $W^s_p \cap W^u_q$ является нульмерным и каждая точка этого множества называется *гетероклинической*, а если $dim\ W^s_p + dim\ W^u_q > n$, то каждая компонента связности $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической компонентой.*

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если он не имеет гетероклинических точек.

Диффеоморфизмы f, $f' : M^n \to M^n$ называются *топологическими сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ такой, что $f' = hfh^{-1}$.

Далее мы рассматриваем градиентно-подобные диффеоморфизмы Морса-Смейла на двумерном многообразии M^2. В этом случае условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ является пустым, для любых различных седловых точек p, q. Неблуждающее множество Ω диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ представляется в следующем виде: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_0, Ω_1, Ω_2 — множества стоковых, седловых, источниковых точек диффеоморфизма f соответственно. Будем предполагать также, что множество $\Omega_1 \neq \emptyset$, в противном случае его неблуждающее множество состоит из одного источника и одного стока. Все диффеоморфизмы "источник-сток" топологически сопряжены и доказательство этого факта приведено, например, в книге [2] (Теорема 2.2.1).

В 1973 году М. Пейшото [7] классифицировал потоки Морса-Смейла без замкнутых траекторий с помощью различающего графа. В 1985-1987 годах В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных была получена топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях (подробное изложение результатов имеется в книге [2]). А. А. Ошемков и В. В. Шарко в работе [6] предложили поставить в соответствие каждому потоку Морса-Смейла без замкнутых траекторий трехцветный граф. Как оказалось, проверка изоморфности трехцветных графов существенно проще проверки изоморфности графов Пейшото.

В работах [3], [4] идеи статьи [6] были применены для топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерных многообразий посредством трехцветных графов, оснащенных автоморфизмами, индуцированными диффеоморфизмами на вершинах графов.

В настоящей работе выделяется класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество каждого из которых принадлежит инвариантному объединению конечного числа непересекающихся простых замкнутых кривых, и показывается, что классификация таких диффеоморфизмов сводится к классификации грубых диффеоморфизмов окружности, полученной А.Г. Майером [5].

Более точно, будем говорить, что градиентно-подобный диффеоморфизм f принадлежит классу G, если Ω_1 представляется в виде объединения $\Omega_1^+\cup\Omega_1^-$ удовлетворяющего следующим условиям:

1. $cl\ W^u_{\Omega_1^+}\cup cl\ W^s_{\Omega_1^-}$ состоит из конечного числа попарно не пересекающихся компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности;

2. $(\Omega_0\cup\Omega_2)\subset(cl\ W^u_{\Omega_1^+}\cup cl\ W^s_{\Omega_1^-})$.

Положим $\mathcal{A}_f=cl\ W^u_{\Omega_1^+}$ и $\mathcal{R}_f=cl\ W^s_{\Omega_1^-}$. Согласно теореме 2.2.2 книги [2] множество $\mathcal{A}_f$ ($\mathcal{R}_f$) является аттрактором[4] (репеллером[5]) диффеоморфизма f.

Используя схему доказательства теоремы 1 работы [1], можно получить следующую классификацию поверхностей, допускающих диффеоморфизмы из класса G.

Теорема 1.1. *Пусть многообразие M^2 допускает диффеоморфизм из класса G. Тогда M^2 диффеоморфно либо тору $\mathbb{T}^2$, либо бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$.*

Обозначим через $\tilde{G}$ подмножество класса G такое, что для диффеоморфизма $f\in\tilde{G}$ выполняются следующие свойства:

1) все компоненты связности множества $\mathcal{A}_f\cup\mathcal{R}_f$ содержат одинаковое число неблуждающих точек;

2) $cl\ (W^s_{\sigma_+^1})\cap cl\ (W^s_{\sigma_+^2})=\emptyset$ для различных седловых точек σ_+^1,σ_+^2, принадлежащих одной и той же компоненте связности аттрактора $\mathcal{A}_f$;

3) $cl\ (W^u_{\sigma_-^1})\cap cl\ (W^u_{\sigma_-^2})=\emptyset$ для различных седловых точек σ_-^1,σ_-^2, принадлежащих одной и той же компоненте связности репеллера $\mathcal{R}_f$.

В разделе 2. вводится класс Φ модельных диффеоморфизмов на многообразиях $\mathbb{T}^2$ и $\mathbb{K}^2$, относительно которого справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Любой диффеоморфизм $f\in\tilde{G}$ топологически сопряжен некоторому модельному из класса Φ.*

[4] Пусть f — гомеоморфизм компактного метрического пространства X. Компактное f-инвариантное множество $A\subset X$ называется аттрактором дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A)\subset int\ U_A$ и $A=\bigcap\limits_{k\geq0}f^k(U_A)$

[5] Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1}.

2. Построение модельного диффеоморфизма

Для описания динамики диффеоморфизмов класса G напомним топологическую классификацию структурно-устойчивых диффеоморфизмов на окружности.

Пусть $MS(\mathbb{S}^1)$ класс структурно устойчивых преобразований окружности, который, в силу результатов А.Г. Майера [5], совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Разобъем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Ниже формулируются результаты Майера о топологической классификации структурно устойчивых преобразований окружности.

П р е д л о ж е н и е 2.1.

1. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $\Omega(\varphi)$ состоит из $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k.

2. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $\Omega(\varphi)$ состоит из $2q$ $(q \in \mathbb{N})$ периодических точек, две из которых неподвижны, а остальные имеют период 2.

Положим $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Занумеруем периодические точки неблуждающего множества $\Omega(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, где l целое число, такое что для $k = 1$ положим $l = 0$, для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и (k, l) взаимно просты[6]. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0.

П р е д л о ж е н и е 2.2.

1. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- $l = l'$ *(при этом, если $l \neq 0$ тогда сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),*
- $l = k' - l'$ *(при этом, сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).*

2. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $q; q'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$.

---

[6] В действительности, А.Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое он называл *порядковым числом*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

Для этого сначала построим модели грубых преобразований окружности S^1, представляя её как факторпространство $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $\pi : \mathbb{R} \to S^1$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ взаимно просто с k, построим стандартного представителя φ_+ в $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- в $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметром q.

Для этого введем следующие отображения:
$\tilde{\psi}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\tilde{\chi}_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\chi}_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\tilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\chi}(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\chi}_{k,l}\tilde{\psi}_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \tilde{\chi}\tilde{\psi}_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Таким образом,
$\tilde{\varphi}_+(r) = \tilde{\psi}_{n\cdot k}(r) - \frac{l}{k}$ и $\tilde{\varphi}_+(r+\nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$;
$\tilde{\varphi}_-(r) = -\tilde{\psi}_q(r)$ и $\tilde{\varphi}_-(r+\nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$.

Следовательно следующие диффеоморфизмы корректно определены: $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \sigma \in \{+,-\}$, $\chi = \pi\tilde{\chi}\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Используя $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \sigma_1, \sigma_2 \in \{+,-\}$ построим модельный диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) на $\mathbb{T}^2$ ($\mathbb{K}^2$).

Для этого определим диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2) = (\varphi_{\sigma_1}(z_1), \varphi_{\sigma_2}(z_2))$, где $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Представим многообразие $\mathbb{K}^2$ как пространство орбит $\mathbb{K}^2 = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (\chi(z), r-1)$. Обозначим через $p_\chi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}^2$ естественную проекцию. Обозначим через $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}(z, r) = (\varphi_{\sigma_1}(z), \tilde{\varphi}_{\sigma_2}(r))$. Так как Γ — циклическая группа с образующей $\gamma(z, r) = (\chi(z), r-1)$, то либо $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}\gamma = \gamma\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}$, либо $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}\gamma^{-1} = \gamma\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}$ является необходимым и достаточным условием, позволяющим задать диффеоморфизм $\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ как $\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2} = p_\chi\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}p_\chi^{-1}$ (см., например, [2]). Из этого следует, что $\varphi_{\sigma_1}\chi = \chi\varphi_{\sigma_1}$, что равносильно тому, что существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tilde{\varphi}_{\sigma_1}(-r) + m = -\tilde{\varphi}_{\sigma_1}(r)$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Если $\sigma_1 = -$, то последнему соотношению удовлетворяет $m = 0$. Если же $\sigma_1 = +$, то приходим к равенству $2l = mk$, откуда, учитывая условие $0 \leq l < k$ и взаимную простоту l и k, получаем либо $m = 0, l = 0, k = 1$, либо $m = 1, l = 1, k = 2$.

Обозначим $\Phi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\Phi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) множество диффеоморфизмов $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$). Положим $\Phi^+ = \Phi^+_{++} \cup \Phi^+_{+-} \cup \Phi^+_{-+} \cup \Phi^+_{--}$ ($\Phi^- = \Phi^-_{++} \cup \Phi^-_{+-} \cup \Phi^-_{-+} \cup \Phi^-_{--}$) и $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Каждый диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) однозначно определяется набором параметров $\zeta^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\zeta^-_{\sigma_1\sigma_2}$) следующих типов:

1. $\zeta^+_{++} = \{n_1, k_1, l_1, n_2, k_2, l_2\}$;
2. $\zeta^+_{+-} = \zeta^+_{-+} = \zeta^-_{-+} = \{n, k, l, q\}$;
3. $\zeta^+_{--} = \zeta^-_{--} = \{q_1, q_2\}$;
4. $\zeta^-_{++} = \{n_1, k_1, n_2, k_2, l_2\}$, где $k_1 = 1$ или $k_1 = 2$;
5. $\zeta^-_{+-} = \{n, k, q\}$, где $k = 1$ или $k = 2$.

Следующий результат обеспечивает алгебраический критерий топологической сопряженности диффеоморфизмов класса Φ.

Лемма 2.1. *Два диффеоморфизма $\varphi, \varphi' \in \Phi$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда наборы их параметров имеют одинаковый тип и для каждого из типов выполняются следующие равенства:*

1. $n_i = n'_i, k_i = k'_i$, $l_i = l'_i$ *или* $l_i = k'_i - l'_i$ *для* $i \in \{1, 2\}$;
2. $n = n', k = k'$, $q = q'$, $l = l'$ *или* $l = k' - l'$;
3. $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$;
4. $n_i = n'_i, k_i = k'_i$ *для* $i \in \{1, 2\}$, $l_2 = l'_2$ *или* $l_2 = k'_2 - l'_2$;
5. $n = n', k = k'$, $q = q'$.

Благодарности. Автор благодарит В.З. Гринеса за поставленную задачу и плодотворные обсуждения, а также О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-12452-офи-м.

Список литературы

1. Гринес В. З., Левченко Ю. А. Починка О. В, "О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами", *Нелинейная динамика*, **1**, 10 (2014), 1-17.

2. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

3. Гринес В. З., Капкаева С. Х., "Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством трехцветного графа", *Журнал СВМО*, **2**, 15 (2013), 12-22.

4. Капкаева С. Х., "О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа", *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34-43.

5. Майер А. О, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.

6. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

7. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

8. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи математических наук*, **1(151)**, XXV (янв-февр 1970), 113-185.

On the topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional invariant sets

© **S. H. Kapkaeva**[7]

Abstract. In the paper we found conditions for the topological conjugacy of gradient-like 2-diffeomorphisms whose nonwandering set belongs to the invariant finite union of disjoint simple closed curves. The interrelation between the dynamics of diffeomorphisms and the topology of the ambient manifold is established. For a meaningful subclass of such systems their topological classification obtained

Key Words: Morse-Smale gradient-like diffeomorphism topological conjugacy, attractor, repeller

[7] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.

УДК 534.11

Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимтотического метода

© **В. Л. Литвинов**[1]

Аннотация. Разработана обобщенная методика использования асимптотического метода для исследования свободных колебаний механических объектов с движущимися границами. Асимптотический метод распространен на более широкий класс краевых задач, которые в случае неподвижных границ могут быть решены методом разделения переменных. В качестве примера исследованы свободные колебания балки переменной длины. Произведено сопоставление с результатами, полученными с помощью метода Канторовича-Галеркина.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, свободные колебания объектов с движущимися границами, законы движения границ

В работе А.А. Лежневой [1] предлагается использовать асимптотический метод для получения решения уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах.

Рассмотрим применение данного метода в случаях, когда колебания описываются более сложными уравнениями.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) + L[V(\xi,\tau)] = 0, \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$Y_{\jmath\imath}[V(\ell_\jmath(\varepsilon\tau),\tau)] = 0; \imath = \overline{1,m}; \jmath = \overline{1,2}, \tag{1.2}$$

где L - линейный однородный дифференциальный оператор по переменной ξ порядка $2m$; $Y_{\jmath\imath}-$ линейные однородные дифференциальные операторы по ξ; $\varepsilon-$ малый параметр.

Запись законов движения границ в виде $\ell_\jmath(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения. Уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) - самосопряженные, и в случае неподвижности границ ($\ell_\jmath(\varepsilon\tau) = \text{const}$) может быть получено точное решение методом разделения переменных. Для решения задачи используем асимптотический метод. Для этого предположим, что длина объекта изменяется незначительно в течение одного периода собственных колебаний, т.е. $\ell_\jmath(\varepsilon\tau)$ является функцией медленного времени. Тогда формы колебаний могут быть выражены через те же функции, что и для объекта

[1] Старший преподаватель кафедры общетеоретических дисциплин, Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, г. Сызрань, vladlitvinov@rambler.ru.

постоянной длины. Решение в первом приближении будем искать в виде ряда по этим собственным функциям:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi,\varepsilon\tau)\alpha_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \tag{1.3}$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ - собственные функции следующей краевой задачи:

$$L[X_n(\xi,\varepsilon\tau)]=\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau); \tag{1.4}$$

$$Y_{\jmath\imath}[X_n(\ell_\jmath(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau)]=0, \tag{1.5}$$

а функции $\alpha_n(\varepsilon\tau), w_n(\tau)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{d\alpha_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}=\varepsilon A_n(\alpha,w,\tau);\\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau}=\omega_{0n}(\varepsilon\tau)+\varepsilon B_n(\alpha,w,\tau).\end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)-$ собственные частоты задачи. Оператор L не содержит производной по τ, поэтому величина $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Введем новую функцию

$$\mu_n(\tau)=\alpha_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \tag{1.7}$$

подставим (1.3) в исходное уравнение (1.1), а затем полученное уравнение умножим на $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и проинтегрируем от $\ell_1(\varepsilon\tau)$ до $\ell_2(\varepsilon\tau)$

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\{[\mu_n(\tau)X_n(\xi,\tau)]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\mu_n(\tau)\}X_m(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d(\xi)=0, \tag{1.8}$$

где $m=1,2,3\ldots.$

Решение системы (1.8) затруднительно. При резонансных явлениях, амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому, в каждом уравнении системы, членами, не содержащими $X_m(\xi,\varepsilon\tau)$ в связи с их малостью, пренебрегают. В этом случае система (1.8) становится расщепленной и уравнение для нахождения $\mu_n(\tau)$ принимает вид:

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\{[\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\mu_n(\tau)\}X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi=0. \tag{1.9}$$

Введем обозначения:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi; \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi;$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)q(\xi)d\xi.$$

Тогда уравнение (1.9) примет вид:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n^{\cdot\cdot}(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n^{\cdot}(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = 0. \tag{1.10}$$

В большинстве практических задач границы движутся в медленном режиме и параметр ξ мал, поэтому в дальнейшем величины порядка ε^2 учитываться не будут. Учитывая равенство (1.7), приравнивая в уравнении (1.10) нулю коэффициенты при ε в первой степени и получающемся при этом уравнении коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений для определения функций A_n, B_n :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n}{\partial w} = 2\alpha_n(\varepsilon\tau)B_n; \\ \frac{\partial B_n}{\partial w} = -\frac{2}{\alpha_n(\varepsilon\tau)}A_n - \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}\frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} - 2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}. \end{cases}$$

Частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} B_n = 0; \\ A_n = -\frac{\alpha_n(\varepsilon\tau)}{2}[\frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}\frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} + 2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}]. \end{cases}$$

Подставляя найденные решения в уравнения (1.6), получим

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{\alpha_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \cdot \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau}; \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau). \end{cases}$$

Решая систему, имеем

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau); \alpha_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}. \tag{1.11}$$

В качестве примера рассмотрим свободные поперечные колебания балки переменной длины, концы которой закреплены. Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$U_{\tau\tau}(x,t) + \alpha^2 U_{xxxx}(x,t) = 0; \tag{1.12}$$
$$U(0,t) = 0; U_x(0,t) = 0;$$

$$U(\ell_0(t),t)=0;U_x(\ell_0(t),t)=0,$$

где $\alpha^2 = EI/\rho$, E – модуль упругости материала балки, I – осевой момент инерции сечения балки, ρ – линейная плотность массы балки; $U(x,t)$ – поперечное смещение точки с координатой x балки в момент времени t; $\ell_0(t) = L_0 - v_0t$ – закон движения правой границы, L_0 – начальная длина балки, v_0 – скорость движения границы.

Введем безразмерные переменные

$$\xi=\frac{x}{L_0};\tau=\frac{\alpha}{L_0^2}t;V(\xi,\tau)=U(x,t)/L_0. \tag{1.13}$$

Исходная задача примет вид:

$$V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+V_{\tau\tau}(\xi,\tau)=0 \tag{1.14}$$

$$V(0,\tau)=0;V_\xi(0,\tau)=0;$$

$$V(\ell(\varepsilon\tau),\tau)=0;V_\xi(\ell(\varepsilon\tau),\tau)=0,$$

где

$$\ell(\varepsilon\tau)=1+\varepsilon\tau;\varepsilon=-v_0L_0/\alpha.$$

Применим к задаче асимптотический метод. Величины $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ являются соответственно собственными функциями и собственными частотами следующей краевой задачи:

$$X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau)-\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)=0.$$

Решая данное уравнение, получим [2]:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau)=0,62\{C_n(\varepsilon\tau)[\cos(r_n(\varepsilon\tau)\xi)-ch(r_n(\varepsilon\tau)\xi)]+\sin(r_n(\varepsilon\tau)\xi)-sh(r_n(\varepsilon\tau)\xi)\},$$

где

$$C_n(\varepsilon\tau)=\frac{\cos(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))-ch(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))}{\sin(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))+sh(r_n(\varepsilon\tau)\ell(\varepsilon\tau))};r_n(\varepsilon\tau)=\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau)=k_n^2/\ell^2(\varepsilon\tau);k_n\sim\pi n+\pi/2.$$

В данном случае динамические моды X_n определяются с точностью до постоянного множителя и выбраны таким образом, что $max[X_n(\xi,\varepsilon\tau)]=1$

Уравнения (1.11) имеют вид

$$\alpha_n(\varepsilon\tau)=\ell(\varepsilon\tau)/k_n;w_n(\tau)=-k_n^2/(\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)). \tag{1.15}$$

Тогда общее решение уравнения (1.14) выглядит следующим образом

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \cdot \frac{\ell(\varepsilon\tau)}{k_n} \cdot C_n \cdot \cos(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)} + \alpha_n), \tag{1.16}$$

где постоянные C_n, α_n определяются из начальных условий.

Решение уравнения (1.14) методом Канторовича – Галеркина имеет аналогичный вид [3]:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \cdot A_{0n}(\varepsilon\tau) \cdot \frac{\ell(\varepsilon\tau)}{k_n} \cdot (D_n \cos(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)}) + E_n \sin(\frac{k_n^2}{\varepsilon\ell(\varepsilon\tau)})),$$

где $A_{0n}(\varepsilon\tau) \sim 1,62/\sqrt{\ell(\varepsilon\tau)}; D_n, E_n$ -константы.

Решение асимптотическим методом в более высоком приближении не повысит точности, но вскроет новую качественную сторону явления – слабую зависимость между отдельными тонами колебания, появляющуюся вследствие изменения длины объекта [1], [4].

Список литературы

1. Лежнева А.А., “Свободные изгибные колебания балки переменной длины”, *Ученые записки. – Пермь*, 1966, № 156, 143-150.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.-М.: Физматлит*, Физматлит, М, 1971, 576 с.

3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., “Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "физико-математические науки"*, **1**:18 (2009), 149-158.

4. Митропольский Ю.А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Наука, М, 1964, 432 с.

Study free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using asymptotical method

© V. L. Litvinov[2]

Abstract. The generalized method of using the asymptotical method for the study of free oscillations of mechanical objects with moving boundaries is developed. Asymptotical method is extended to a wider class of boundary value problems, which in the case of fixed boundaries can be solved by separation of variables. As an example free vibrations of a beam of variable length are studied. The comparison with the results obtained using the Kantorovich-Galerkin are produced.

Key Words: differential equations in partial derivatives, the free vibrations of objects with moving boundaries, the laws of motion of the boundaries

[2] Senior lecturer of dept. of general – theoretical disciplines, Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, vladlitvinov@rambler.ru.

УДК 519.63

О некоторых итерационных процессах решения эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями с конструктивными оценками скорости сходимости итераций

© **Ф. В. Лубышев[1], М. Э. Файрузов[2]**

Аннотация. В работе изучается приближенное решение контактных граничных задач для уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением, когда на контактирующих внутренних границах многослойных сред задаются условия сопряжения типа неидеального контакта. Разработан и обоснован итерационный метод решения указанных классов задач с разрывными коэффициентами и решениями для УМФ эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса. Причем установлены конструктивные оценки скорости сходимости итераций (с вычисляемыми константами).

Ключевые слова: итерационный метод, математическое моделирование, эллиптическое уравнение, задачи для УМФ с разрывными коэффициентами и решениями, оператор

1. Введение

В работе изучается приближенное решение контактных граничных задач для уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением, когда на контактирующих внутренних границах многослойных сред задаются условия сопряжения типа неидеального контакта. Подобные задачи возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др., при исследовании обратных задач, задач оптимального управления для уравнений математической физики (УМФ) в многослойных средах. В таких задачах, в силу характера исследуемых физических процессов, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ, описывающих состояния управляемых процессов, допускают разрывы [1]-[4]. Разработка методов решения контактных задач для УМФ с разрывными коэффициентами и решениями является актуальной проблемой. Системы управления, состояния в которых описываются подобными УМФ наименее изучены, хотя развитие теории и методов решения таких систем вызвано потребностями математического моделирования оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач. Проблема приближенного решения задач данного класса для УМФ с разрывными коэффици-

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

ентами и решениями приводит к необходимости разработки эффективных, экономичных, высокоточных приближенных методов их решения. В частности, возникает проблема разработки эффективных сходящихся итерационных методов решения указанного класса задач для УМФ, а также проблемы разработки и реализации конечномерных аппроксимаций (см., например, [1], [5]-[9]) итерационных задач на каждом итерационном шаге.

В настоящей работе разработан и обоснован итерационный метод решения уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса. Причем установлены конструктивные оценки скорости сходимости итераций (с вычисляемыми константами). В результате численное решение задач данного класса УМФ можно эффективно осуществлять на основе применения разработанного итерационного метода (с итерациями на внутренней границе разрыва решения и коэффициентов) в сочетании, например, с разностными методами решения некоторых уже традиционных "самостоятельных"краевых задач, возникающих при этом в каждой из контактирующих подобластей составной области интегрирования.

2. Постановка задачи и ее корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \le r_2 \le l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты u_k, $k = 1,2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1,2$, уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + q_k(x)u_k = f_k(x), \quad \text{в}\ \Omega_k,\ k = 1,2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1,2; \tag{2.2}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k_\alpha(x), q(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), q_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), q_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу $(2.1) - (2.3)$ можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

условиям

$$\begin{gathered} u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = 0, \quad G(x) = \left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; а $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\theta(x_2)$, $\alpha = 1,2$ – известные функции. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $q(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(x_2) \in L_\infty(S)$; $0 < \nu_1 \le k_\alpha^{(1)}(x) \le \overline{\nu}_1$, $0 < \nu_2 \le k_\alpha^{(2)}(x) \le \overline{\nu}_2$, $\alpha = 1,2$, $q(x) \ge 0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $0 < \theta_0 \le \theta(x_2) \le \theta_1$, $x \in S$, $\nu_\alpha, \overline{\nu}_\alpha, \theta_0, \theta_1$ – заданные константы.

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\right\}, \tag{2.8}$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [10] – [14]

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{2.9}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, \vartheta)_V = \sum_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.10}$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_{S} [u]^2 \, dS, \tag{2.11}$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $U(x)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространство $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с Липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [10] – [14] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^{\pm}$. С другой стороны, если элемент $u \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(x)$ на области Ω_k, $k=1,2$: принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(x)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(x)=u_2(x)-u_1(x)=u^+(x)-u^-(x)$, $x\in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $\vartheta(x)\in W_2^1(\Omega)=W_2^1(\Omega_1\cup\Omega_2\cup S)$ является условие склейки: $\vartheta_k(x)\in W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$; $\vartheta_1(x)|_S=\vartheta_2(x)|_S$ (см., например, [14], [15]).

Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k=1,2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k>0$, $k=1,2$, то [16] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k=1,2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(x)\in W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \le C_k^2\left[\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k+\int\limits_{\Gamma_k}u_k^2 d\Gamma_k\right],\ k=1,2. \tag{2.12}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k=1,2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$ в пространство $L_2(\partial\Omega_k)$, $k=1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(x)$, что для любых функций $u_k(x)\in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [11], [12]:

$$\|u_k\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \le C_{k+2}^2\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},\ k=1,2, \tag{2.13}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset\partial\Omega_k$, $k=1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k=1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\emptyset$; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)=\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\partial\Omega_k$.

Заметим, что для элементов $u_k(x)\in W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ справедливо неравенство [11]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(x) d\Omega_k \leq C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.14}$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k)$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k)$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k) > 0$.

Под обобщенным решением краевой задачи (2.1) – (2.3) понимается пара функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ таких, что $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k; \Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + q_1(x) u_1 v_1\right] d\Omega_1 - \int\limits_S \theta(x)[u] v_1\, dS = \\ = \int\limits_{\Omega_1} f_1(x) v_1\, d\Omega_1, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1), \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + q_2(x) u_2 v_2\right] d\Omega_2 - \int\limits_S \theta(x)[u] v_2\, dS = \\ = \int\limits_{\Omega_2} f_2(x) v_2\, d\Omega_2, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2). \end{gathered} \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\right\} \tag{2.17}$$

с нормой:

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2\, dS. \tag{2.18}$$

Тогда обобщенное решение задачи (2.1) – (2.3) можно сформулировать в более компактном виде, а именно, под решением задачи (2.1) – (2.3) понимается функция $u(x) \equiv u(x; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех

$\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right] d\Omega_0 + \int\limits_{S} \theta(x)[u][\vartheta]dS =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta). \tag{2.19}$$

Из (2.19) при $v^+(x) = v_2(x) = 0$ следует (2.15), а при $v^-(x) = v_1(x) = 0$ следует соотношение (2.16).

Разрешимость задачи $(2.1) - (2.3)$ в смысле ее определения (2.19) гарантируется следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи $(2.1) - (2.3)$, определяемое из интегрального тождества (2.19). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.19) эквивалентна решению операторного уравнения $Au = F$, где оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется билинейной формой $Q(u,\vartheta)$ с помощью равенства $(A\,u,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,\vartheta)$, $\forall u,\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка*

$$\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)},$$

где $C = Const > 0$.

Доказательство теоремы 2.1. опирается на лемму Лакса-Мильграма [16], при этом существенно используются введенные выше гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства $(2.12) - (2.14)$.

3. Итерационный процесс для задачи о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением с итерациями на внутренней границе решения и его сходимость

Задаче $(2.1) - (2.3)$ поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней границе S:

$$L_1 u_1^n = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\right) + q_1(x)u_1^n = f_1(x), \qquad x\in\Omega_1, \tag{3.1}$$

$$u_1^n(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \tag{3.2}$$

$$k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + \theta(x_2)u_1^n = \theta(x_2)u_2^{n-1}, \qquad x \in S; \tag{3.3}$$

$$L_2 u_2^n = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\right) + q_2(x)u_2^n = f_2(x), \qquad x \in \Omega_2, \tag{3.4}$$

$$u_2^n(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \tag{3.5}$$

$$-k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + \theta(x_2)u_2^n = \theta(x_2)u_1^n, \qquad x \in S; \tag{3.6}$$

где $n = 1, 2, \ldots;$ $u_2^0(x)$ – начальное приближение.

Таким образом, итерационный процесс $(3.1) - (3.6)$ сводит решение исходной граничной задачи $(2.1) - (2.3)$ с разрывными коэффициентами и решением к решению на каждой итерации n двух граничных задач $(3.1) - (3.3)$ и $(3.4) - (3.6)$ в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ состоит в отыскании последовательности пар функций $\{u^n(x)\} = \big\{(u_1^n(x), u_2^n(x))\big\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $u_k^n(x) \in W_2^1(\Omega_k; \Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)} \frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + q_1(x)u_1^n v_1\right] d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x)u_1^n v_1\, dS =$$
$$= \int\limits_S \theta(x)u_2^{n-1}v_1 dS + \int\limits_{\Omega_1} f_1(x)v_1 d\Omega_1, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1), \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)} \frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + q_2(x)u_2^n v_2\right] d\Omega_2 + \int\limits_S \theta(x)u_2^n v_2\, dS =$$
$$= \int\limits_S \theta(x)u_1^n v_2 dS + \int\limits_{\Omega_2} f_2(x)v_2 d\Omega_2, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2); \tag{3.8}$$

$n = 1, 2, \ldots;$ $u_2^0(x)$ – начальное приближение.

Используя лемму Лакса-Мильграма [16] нетрудно убедиться в однозначной разрешимости задач (3.7) и (3.8) относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ в классах $W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1)$ и $W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)$ (при каждом фиксированном номере n) соответсвенно.

Докажем сходимость итрерационного процесса $(3.1) - (3.6)$ (в обобщенной постановке сходимость итерационного процесса (3.7) и (3.8)).

Справедлива следующая теорема о сходимости итерационного процесса $(3.1) - (3.6)$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено условие:*

$$q = q_1 q_2 < 1$$

где

$$q_1^2 = \frac{1}{\nu_1}\|\theta(x_2)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{l_1-\xi_1}{4} + \frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right], \quad q_2^2 = \frac{1}{\nu_2}\|\theta(x_2)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{\xi_1}{4} + \frac{M_1^2}{2\xi_1}\right],$$

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}.$$

Тогда итерационный процесс $(3.1)-(3.6)$ *сходится в норме*

$$\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [v]^2\, dS,$$

(а значит и в норме $\|v\|_{V(\Omega^{(1,2)})}$*, в силу их эквивалентности) к единственному решению задачи* $(2.1)-(2.3)$ *при любом начальном приближении* $u_2^{(0)} \in W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)$ *и справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\begin{cases} |z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 |z_2^{(n-1)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_2 |z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)}, \quad n=1,2,...; \\ |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_1 q_2 |z_2^{(n-1)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|z_1^{(n)}\|_{L_2(\Omega_1)} \le M_1 q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_2^{(n)}|_{L_2(\Omega_2)} \le M_2 q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|z_1^{(n)}\|_{L_2(S)} \le \left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right]^{1/2} q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|z_2^{(n)}\|_{L_2(S)} \le \left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right]^{1/2} q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|[z^{(n)}]\|^2_{L_2(S)} \le 2\left\{\left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right](q_1 q^{n-1})^2 + \left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2 + l_1-\xi_1\right](q^n)^2\right\} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \\ n=1,2,...; \end{cases}$$

где

$$|v_k|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \qquad k=1,2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интегральное тождество (2.19), определяющее обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи $(2.1)-(2.3)$.

Это тождество можно переписать также в виде:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_{\alpha}^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)u_kv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)u_kv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(u_2v_1+u_1v_2\big)dS+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}f_k(x)v_kd\Omega_k,\qquad \forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\tag{3.9}$$

Далее, интегральные тождества (3.7), (3.8) относительно определения последовательности $u^n(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_{\alpha}^{(k)}(x)\frac{\partial u_k^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)u_k^nv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)u_k^nv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(u_2^{n-1}v_1+u_1^nv_2\big)dS+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}f_k(x)v_kd\Omega_k,\qquad \forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\tag{3.10}$$

Из (3.10) при $v_1=0$ следует (3.7), а при $v_2=0$ следует (3.8).

Для оценки скорости сходимости метода итераций при $n\to\infty$ введем в рассмотрение величины:

$$z^n(x)=\begin{cases} z_1^n(x)=u_1^n(x)-u_1(x), & x\in\Omega_1;\\ z_2^n(x)=u_2^n(x)-u_2(x), & x\in\Omega_2,\end{cases}\tag{3.11}$$

Из (3.9), (3.10) следует

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_{\alpha}^{(k)}(x)\frac{\partial z_k^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)z_k^nv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)z_k^nv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(z_2^{n-1}v_1+z_1^nv_2\big)dS,\qquad \forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\tag{3.12}$$

Полагая в (3.12) $v=z^n$, получим

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_{\alpha}^{(k)}(x)\left(\frac{\partial z_k^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_k(x)(z_k^n)^2\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)(z_k^n)^2\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(z_1^nz_2^{n-1}+z_1^nz_2^n\big)dS.\tag{3.13}$$

Из (3.7), (3.8) и (2.15), (2.16) вытекают также следующие соотношения:

$$\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + q_1(x) z_1^n v_1 \right] d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x) z_1^n v_1 \, dS =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) z_2^{(n-1)} v_1 \, dS, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1), \tag{3.14}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + q_2(x) z_2^n v_2 \right] d\Omega_2 + \int\limits_S \theta(x) z_2^n v_2 \, dS =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) z_1^n v_2 \, dS, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2). \tag{3.15}$$

При $v_1 = z_1^n$, $v_2 = z_2^n$ из (3.14), (3.15) получаем соотношения:

$$\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x) \left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha} \right)^2 + q_1(x) (z_1^n)^2 \right] d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x) (z_1^n)^2 \, dS =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) z_2^{n-1} z_1^n dS, \tag{3.16}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}(x) \left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha} \right)^2 + q_2(x) (z_2^n)^2 \right] d\Omega_2 + \int\limits_S \theta(x) (z_2^n)^2 \, dS =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) z_1^n z_2^n dS. \tag{3.17}$$

Оценим правую часть в соотношении (3.16). Имеем

$$\int\limits_S \theta(x) z_2^{n-1} z_1^n \, dS = \int\limits_S \theta^{1/2}(x) z_2^{n-1} \theta^{1/2}(x) z_1^n \, dS \le \left(\int\limits_S \theta(x) (z_2^{n-1})^2 \, dS \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_S \theta(x) (z_1^n)^2 \, dS \right)^{1/2} \le \varepsilon \int\limits_S \theta(x) (z_1^n)^2 \, dS + \frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_S \theta(x) (z_2^{n-1})^2 \, dS, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.18}$$

Поэтому из соотношения (3.16) получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(1)}(x)\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_1(x)(z_1^n)^2\right]d\Omega_1+\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS\le$$

$$\le\varepsilon\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS+\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS. \quad (3.19)$$

Откуда

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(1)}(x)\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_1(x)(z_1^n)^2\right]d\Omega_1+(1-\varepsilon)\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS,\qquad\forall\varepsilon>0. \quad (3.20)$$

Аналогично из (3.17) можно установить неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(2)}(x)\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_2(x)(z_2^n)^2\right]d\Omega_2+(1-\varepsilon)\int\limits_S\theta(x)(z_2^n)^2\,dS\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS,\qquad\forall\varepsilon>0. \quad (3.21)$$

Соотношения (3.20) и (3.21) будем называть основными неравенствами. Принимая во внимание ограничения

$$k_\alpha^{(1)}(x)\ge\nu_1>0,\quad k_\alpha^{(2)}(x)\ge\nu_2>0,\quad q_1(x)\ge0,\quad q_2(x)\ge0,\quad x\in\Omega_1\cup\Omega_2, \quad (3.22)$$

установим оценки:

$$\nu_1\int\limits_{\Omega_1}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega_1\le\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS,\qquad 0<\varepsilon\le1, \quad (3.23)$$

$$\nu_2\int\limits_{\Omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega_2\le\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS,\qquad 0<\varepsilon\le1. \quad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что справедливы следующие леммы

Л е м м а 3.1. *Для любых функций $v_1\in W_2^1(\Omega_1)$ и $v_2\in W_2^1(\Omega_2)$ справедливы неравенства*

$$\|v_1\|^2_{L_2(S)}\le\frac{2}{\xi_1}\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_1)}+\xi_1\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \quad (3.25)$$

$$\|v_2\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{l_1-\xi_1}\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}. \qquad (3.26)$$

Л е м м а 3.2. *Для любых функций $v_1 \in W_2^1(\Omega_1)$ и $v_2 \in W_2^1(\Omega_2)$ справедливы неравенства*

$$\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \frac{1}{\pi}\max\{2\xi_1; l_2\}\|v_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$

$$\|v_2\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} +$$
$$+\tfrac{1}{\pi}\max\{2(l_1-\xi_1); l_2\}\|v_2\|^2_{L_2(\Gamma_2)}. \qquad (3.27)$$

Оценим теперь правые части неравенств (3.23), (3.24).

В силу (3.25), (3.26) имеем оценки:

$$\int_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} \le$$
$$\le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{\xi_1}\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}\right], \qquad (3.28)$$

$$\int_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(S)} \le$$
$$\le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{(l_1-\xi_1)}\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}\right]. \qquad (3.29)$$

Далее, так как $z_1^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, $z_2^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_2$, то применение неравенств (3.27) к функциям $z_1^n(x)$ и $z_2^n(x)$ дает оценки:

$$\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le M_1^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \qquad (3.30)$$

$$\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le M_2^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}, \qquad (3.31)$$

где

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}. \qquad (3.32)$$

Так что из оценок (3.28), (3.29) и (3.30) – (3.32) установим:

$$\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}\right], \tag{3.33}$$

$$\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} + \right. \\ \left. +(l_1-\xi_1)\left\|\tfrac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}\right]. \tag{3.34}$$

Откуда имеем

$$\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\xi_1+\frac{2}{\xi_1}M_1^2\right]\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \tag{3.35}$$

$$\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[(l_1-\xi_1)+\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2\right]\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}. \tag{3.36}$$

Принимая во внимание оценки (3.35), (3.36) из (3.23), (3.24) найдем

$$\int\limits_{\Omega_1}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_1 \le \frac{1}{\nu_1\varepsilon}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{l_1-\xi_1}{4}+\frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right]\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}, \tag{3.37}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_2 \le \frac{1}{\nu_2\varepsilon}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{\xi_1}{4}+\frac{M_1^2}{2\xi_1}\right]\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \tag{3.38}$$

$$0<\varepsilon\le 1.$$

В частности, при $\varepsilon=1$ получаем оценки:

$$|z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1^2|z_2^{(n-1)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n=1,2,..., \tag{3.39}$$

$$|z_2^n|^2_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_2^2|z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)}, \qquad n=1,2,..., \tag{3.40}$$

где

$$q_1^2=\frac{1}{\nu_1}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left(\frac{l_1-\xi_1}{4}+\frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right), \tag{3.41}$$

$$q_2^2=\frac{1}{\nu_2}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left(\frac{\xi_1}{4}+\frac{M_1^2}{2\xi_1}\right), \tag{3.42}$$

$$M_1^2=\frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2;l_2^2\}, \qquad M_2^2=\frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2;l_2^2\}, \tag{3.43}$$

$$|v_k|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} \right\|^2_{L_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.44}$$

Из оценок (3.39), (3.40) следует

$$|z_2^n|^2_{W_2^1(\Omega_2)} \leq q_2^2 |z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \leq q_1^2 q_2^2 |z_2^{n-1}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \tag{3.45}$$

т.е. имеем оценку

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \leq q_1 q_2 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.46}$$

Таким образом установлена пара оценок

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \leq q_1 q_2 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.47}$$

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq q_1 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.48}$$

Следовательно, $z_2^n = u_2^n - u_2$, $z_1^n = u_1^n - u_1$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, если

$$q = q_1 q_2 < 1, \tag{3.49}$$

т.е. сходимость в норме $|\cdot|_{W_2^1(\Omega)}$ доказана при выполнении условия (3.49).

Условие (3.49) в подробной записи имеет вид

$$q = q_1 q_2 = \frac{1}{(\nu_1 \nu_2)^{1/2}} \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)} \left(\frac{\xi_1}{4} + \frac{M_1^2}{2\xi_1} \right)^{1/2} \left(\frac{l_1 - \xi_1}{4} + \frac{M_2^2}{2(l_1 - \xi_1)} \right)^{1/2} < 1, \tag{3.50}$$

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2} \max\left\{4\xi_1^2; l_2^2\right\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2} \max\left\{4(l_1 - \xi_1)^2; l_2^2\right\}. \tag{3.51}$$

Далее, из оценки (3.47) получаем оценку скорости сходимости для компоненты $z_2^n(x) = u_2^n(x) - u_2(x)$, $x \in \Omega_2$:

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \leq q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad 0 < q = q_1 q_2 < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.52}$$

Далее, из оценок (3.48) и (3.52) имеем

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq q_1 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)} \leq q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \tag{3.53}$$

т.е. наряду с оценкой скорости сходимости (3.52) справедлива также оценка скорости сходимости для компоненты $z_1^n(x) = u_1^n(x) - u_1(x)$, $x \in \Omega_1$:

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.54}$$

Далее, как показано выше, справедливы оценки (3.52) и (3.54):

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, 3, ...;$$

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad 0 < q = q_1 q_2 < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

С другой стороны, для оценки функций $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$, обладающих условиями $z_1^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, $z_2^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_2$, можно применить неравенства (3.27) из леммы 3.2.:

$$\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le M_1^2 |z_1^{(n)}|^2_{W_2^1(\Omega_1)}, \qquad M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \tag{3.55}$$

$$\|z_2^n\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le M_2^2 |z_2^{(n)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}. \tag{3.56}$$

Принимая во внимание оценки (3.55), (3.56) из неравенств (3.52) и (3.54) устанавливаем оценки для $L_2(\Omega_1)$ – нормы и $L_2(\Omega_2)$ – нормы погрешностей $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$:

$$\|z_1^n\|_{L_2(\Omega_1)} \le M_1 q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.57}$$

$$\|z_2^n\|_{L_2(\Omega_2)} \le M_2 q^n |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.58}$$

Установим теперь оценки $L_2(S)$ – норм погрешностей $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$.

Используя оценки (3.25), (3.26) леммы 3.1., а также оценки (3.52), (3.54) и (3.57), (3.58) получаем:

$$\begin{gathered}\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{\xi_1}\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1 \left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le \\ \le \frac{2}{\xi_1} M_1^2 \big(q_1 q^{n-1}\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + \xi_1 \big(q_1 q^{n-1}\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} = \\ = \left(\frac{2}{\xi_1} M_1^2 + \xi_1\right)\big(q_1 q^{n-1}\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)},\end{gathered} \tag{3.59}$$

$$\begin{gathered}\|z_2^n\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{l_1-\xi_1}\|z_2^n\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1) \left\|\frac{\partial z_2^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le \\ \le \frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 \big(q^n\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\big(q^n\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} = \\ = \left(\frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\big(q^n\big)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}.\end{gathered} \tag{3.60}$$

Таким образом из неравенств (3.59) и (3.60) получаем, что справедливы также следующие оценки погрешности метода итераций:

$$\|z_1^n\|_{L_2(S)} \le \left(\frac{2}{\xi_1} M_1^2 + \xi_1\right)^{1/2} q_1 q^{n-1} |z_2^0|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.61}$$

$$\|z_2^n\|_{L_2(S)} \le \left(\frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)^{1/2} q^n |z_2^0|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.62}$$

Установим теперь оценку величины

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS = \int\limits_S \left(z_2^n - z_1^n\right)^2 dS = \|z_2^n - z_1^n\|^2_{L_2(S)}. \tag{3.63}$$

Имеем

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS \le 2\left(\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} + \|z_2^n\|^2_{L_2(S)}\right). \tag{3.64}$$

Принимая во внимание оценки (3.61) и (3.62) и неравенство (3.64) получим

$$\begin{gathered}\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS \le 2\left[\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + \right.\\ \left. + \left(\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}\right] = \\ = 2\left\{\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2\right\} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}.\end{gathered} \tag{3.65}$$

Итак, установлена еще одна оценка

$$\begin{gathered}\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS = \int\limits_S \left(z_2^n - z_1^n\right)^2 dS = \|z_2^n - z_1^n\|^2_{L_2(S)} \le \\ \le 2\left\{\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2\right\} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}.\end{gathered} \tag{3.66}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

2. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

4. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.

5. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

6. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Доклады РАН*, **349**:5 (1996), 598–602.

7. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.

8. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

9. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

10. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

11. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

12. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

13. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

14. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

15. Киндерлелер Д., Стампаккья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

16. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.

Some iterative processes of solution of elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions with a design estimates of the rate of convergence of iterations

© F. V. Lubyshev[3], M. E. Fairuzov[4]

Abstract. We study the approximate solution of the contact boundary problems for elliptic equations in inhomogeneous anisotropic media with discontinuous coefficients and solution when contacting the internal borders of multilayer media define the conditions of conjugation nonideal contact type. Developed and validated method for solving these classes of problems with discontinuous coefficients and solutions to equations of mathematical physics of elliptic type. Questions of convergence of the iterative process. And the set design of the rate of convergence of iterations (with calculated constants).

Key Words: iteration method, mathematical modeling, elliptic equation, problems for equations of mathematical physics with discontinuous coefficients and solutions, the operator.

---

[3] full professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.

[4] associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.

УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности

© В. В. Лукашев[1], В. Н. Попов[2]

Аннотация. Построено аналитическое решение БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. В качестве граничного условия на стенке использована модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений коэффициента диффузности вычислена скорость теплового скольжения вдоль поверхности, получены распределения массовой скорости газа и вектора потока тепла в слое Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными результатами, имеющимися в открытой печати

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий

1. Введение

Поведение разреженных газов существенно отличается от поведения плотных газов. Так, если в разреженный газ поместить неравномерно нагретое тело, то газ придет в движение от менее нагретых частей тела к более нагретым [1]. Это явление получило название теплового скольжения или теплового крипа, а установившаяся скорость движения газа – скоростью теплового скольжения [1]. Теоретический анализ теплового скольжения с использованием кинетической теории впервые был дан Максвеллом [2]. Однако при решении этой задачи Максвелл опирался на предположение о том, что молекулы газа перед ударом о стенку имеют то же самое распределение по скоростям, что и в объеме газа. В действительности же функция распределения молекул газа в слое Кнудсена существенно отличается той, что имеет место в объеме газа вдали от стенки при наличии градиента температуры. Как отмечено в [1], строгое описание теплового скольжения должно быть основано на решении в слое Кнудсена (тонком пристеночном слое, толщина которого примерно равна средней длине свободного пробега молекул газа) кинетического уравнения Больцмана или, в силу его сложности, модельного кинетического уравнения. В данной постановке с использованием приближенных методов данная задача впервые решена в [1]. В рамках модельного уравнения были вычислены скорость теплового скольжения газа

[1] Ассистент кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

[2] Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

и скорость газа непосредственно вблизи стенки, а также построен профиль массовой скорости газа в слое Кнудсена. При этом в качестве граничного условия была использована модель диффузного отражения молекул газа обтекаемой поверхностью. Дальнейшие исследования теплового скольжения с учетом поведения макропараметров газа в слое Кнудсена были предприняты в работах [3]–[5]. В [3] и [5] в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовалась БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения, а в [4] – линеаризованное уравнение Больцмана. В [4] и [5] для решения задачи использован метод дискретных ординат, а в качестве граничного условия – модель зеркально-диффузного отражения Максвелла. В [3] задача решалась с использованием метода Кейза при диффузном отражении молекул газа поверхностью и метода аппроксимационных функций с учетом диффузно-зеркального граничного условия. Основное достоинство метода Кейза по сравнению с другими методами заключается в том, что он позволяет получить в явном виде функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям, зная которую, можно сравнительно легко вычислить все макропараметры газа [3]. В представленной работе решение, полученное в [3] с использованием метода Кейза обобщается на случай зеркально-диффузного граничного условия Максвелла. Данная модель граничного условия более реалистична для технических (специальным образом не обработанных) поверхностей. Однако ее использование существенно усложняет решение задачи: коэффициенты в разложении решения задачи по собственным векторам дискретного спектра характеристического уравнения, соответствующего исходному интегро-дифференциальному уравнению, в этом случае зависят от коэффициентов в разложении по собственным векторам непрерывного спектра, а нахождение последних приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В итоге как сама функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, так и макропараметры газа записываются в виде рядов Неймана. Для решения задачи в работе используется математический аппарат, разработанный в [6] при моделировании течений разреженного газа в плоских каналах. Полученные в работе результаты сравниваются с аналогичными результатами, полученными в [5] и [4].

2. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим газ, заполняющий полупространство $x' > 0$, ограниченное стенкой, расположенной в плоскости $x' = 0$. Предположим, вдоль стенки поддерживается постоянный градиент температуры. Если ось Oz' направить вдоль градиента температуры, то в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана записывается в виде [3]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f). \tag{2.1}$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально равновесная функция распределения, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа. Будем полагать, что состояния газа мало отличается от равновесного. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) \left[1 + C_z Z(x, C_x) + C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x)\right], \tag{2.2}$$

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)[1 + 2C_z U_0 + G_T(z - C_z)(C^2 - \frac{5}{2})].$$

Здесь $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа вдали от стенки; $f(C) = n_0\,(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан; $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\,\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T_0\,$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T_0 – температура газа в начале координат; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g\,\beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа; U_0 – искомая скорость скольжения газа; $G_T = (1/T_0)(dT/dz)$ – безразмерный градиент температуры. Учитывая, что состояние газа мало отличается от равновесного, функцию $f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ линеаризуем относительно абсолютного максвеллиана, т.е. запишем ее в виде

$$f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)[1 + 2C_z U_z(x) + G_T z(C^2 - \frac{5}{2})], \tag{2.3}$$

где с учетом (2.2)

$$\begin{aligned} U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2)\, C_z \Big[1 + 2C_z U_0 + G_T(z - C_z)(C^2 - \frac{5}{2}) + \\ + C_z Z(x, C_x) + C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x) \Big] = \\ = U_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_x^2) Z(x, C_x)\, dC_x, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), приходим к системе незацепленных уравнений для нахождения функций $Z(x, \mu)$ и $Z_1(x, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)(1 - \mu\tau) Z(x, \tau)\, d\tau, \tag{2.5}$$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x,\mu) = 0. \tag{2.6}$$

При записи системы уравнений (2.5), (2.6) ввели обозначение $\mu = C_x$ и учли ортогональность в смысле скалярного произведения с весом $\exp(-C_y^2 - C_z^2)$ функций C_z и $C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2)$. С учетом (2.2) граничные условия для $Z(x,\mu)$ и $Z_1(x,\mu)$ вдали от стенки записываются в виде

$$\lim_{x\to+\infty} Z(x,\mu) = \lim_{x\to+\infty} Z_1(x,\mu) = 0, \qquad \mu < 0. \tag{2.7}$$

Граничное условие на стенке имеет вид

$$f^+(\mathbf{r}',\mathbf{v})\big|_s = (1-q) f^-(\mathbf{r}',\mathbf{v})\big|_s + q f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v}), \tag{2.8}$$

$$f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v}) = f(C)\left[1 + G_T z\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\right].$$

Здесь $f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v})$ – функция распределения с параметрами, заданными на стенке, q – коэффициент аккомодации стенкой тангенциального импульса молекул газа (коэффициент диффузности). Подставляя (2.2) и (2.8) в (2.7), находим

$$Z(0,\mu) = (1-q)Z(0,-\mu) - 2qU_0 + qG_T\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right), \qquad \mu > 0, \tag{2.9}$$

$$Z_1(0,\mu) = (1-q)Z_1(0,-\mu) + qG_T, \qquad \mu > 0. \tag{2.10}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению системы уравнений (2.5), (2.6) с граничными условиями (2.7), (2.9), (2.10).

3. Построение функции распределения молекул газа

Решение уравнения (2.6) с граничными условиями (2.7), (2.10) имеет вид

$$Z_1(x,\mu) = qG_T \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) H_+(\mu), \tag{3.1}$$

где $H_+(\mu)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($H_+(\mu) = 1$, если $\mu > 0$, и $H_+(\mu) = 0$, если $\mu < 0$)

Общее решение (2.5) имеет вид [3]

$$Z(x,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta,\mu) a(\eta)\, d\eta. \tag{3.2}$$

Здесь

$$F(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu}+\exp(\eta^2)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu),$$

$$\lambda(z)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-\mu^2)\,d\mu}{\mu-z},\tag{3.3}$$

$\mathrm{P}(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, а A_0, A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению. С учетом граничного условия (2.7) находим $A_0=0$, $A_1=0$. Подставляя далее (3.2) в граничное условие (2.9), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,a(\eta)\,d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)a(\mu)\lambda(\mu)=f(\mu),\tag{3.4}$$

$$f(\mu)=-2qU_0+qG_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,a(\eta)\,d\eta}{\eta+\mu},\qquad \mu>0.\tag{3.5}$$

Решение (3.4) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta a(\eta)\,d\eta}{\eta-z},\tag{3.6}$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой, выполняются соотношения

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=2\sqrt{\pi}\,i\,\mu a(\mu),\qquad 0<\mu<+\infty,\tag{3.7}$$

$$N^+(\mu)+N^-(\mu)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta a(\eta)\,d\eta}{\eta-\mu},\qquad 0<\mu<+\infty.\tag{3.8}$$

Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (3.3), имеют вид

$$\lambda^+(\mu)-\lambda^-(\mu)=2\sqrt{\pi}\,i\,\mu\exp(-\mu^2),\qquad -\infty<\mu<+\infty,\tag{3.9}$$

$$\lambda^+(\mu)+\lambda^-(\mu)=2\lambda(\mu),\qquad -\infty<\mu<+\infty.\tag{3.10}$$

С учетом (3.5) и (3.7) – (3.10) сведем сингулярное интегральное уравнение (3.4) к краевой задаче Римана

$$\left[N^+(\mu)+2qU_0-qG_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right]\lambda^+(\mu)-$$
$$-\left[N^-(\mu)+2qU_0-qG_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right]\lambda^-(\mu)=$$
$$=2\,i\,(1-q)\mu\exp(-\mu^2)\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,a(\eta)}{\eta+\mu}\,d\eta,\qquad \mu>0. \quad (3.11)$$

Особенность краевой задачи (3.11) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в нуль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}$$

и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости.

Решение этой задачи имеет вид [3]:

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(\theta(\tau)-\pi)\,d\tau}{\tau-z}\right],\quad \theta(\tau)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp(-\tau^2)}\right).$$

С учетом решения задачи факторизации перепишем (3.11)

$$\left[N^+(\mu)+2qU_0-qG_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right]X^+(\mu)-$$
$$-\left[N^-(\mu)+2qU_0-qG_T\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right]X^-(\mu)=$$
$$=\frac{2\,i\,(1-q)X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\,\mu\exp(-\mu^2)\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,a(\eta)\,d\eta}{\eta+\mu},\qquad \mu>0. \quad (3.12)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.12) функций, ее общее решение по формулам Сохоцкого имеет вид

$$N(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu\exp(-\mu^2)\,\frac{d\mu}{\mu-z}\,\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,a(\eta)\,d\eta}{\eta+\mu}-$$
$$-2qU_0+qG_T\left(z^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{P_n(z)}{X(z)},\quad(3.13)$$

где $P_n(z)$ – многочлен коэффициенты и степень которого найдем из условия разрешимости задачи.

В окрестности бесконечно удаленной точки выражение (3.13) будет иметь вид:

$$N(z)=-\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta X(-\eta)a(\eta)\,d\eta}{\eta+\mu}+O\left(\frac{1}{z}\right)-$$
$$-2qU_0+qG_T\left(z^2-\frac{1}{2}\right)+P_n(z)\left(z+Q_1+\frac{Q_2+Q_1^2}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right),\quad(3.14)$$

где Q_n – интегралы Лоялки, в частности, $Q_1=-1.01619$, $Q_2=-1.26632$.

Так как функция $N(z)$ согласно (3.6) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение $N(z)=O(1/z)$. Отсюда, с учетом (3.14) необходимо положить $P_n(z)=C_0+C_1z$. Тогда, приравнивая в (3.14) коэффициенты при одинаковых степенях z, находим

$$C_0=qG_TQ_1,\qquad C_1=-qG_T,$$
$$U_0=-\frac{1}{2q}\left[qG_T\left(Q_2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\eta X(-\eta)a(\eta)\,d\eta\right].\qquad(3.15)$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (3.2) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.7), предварительно преобразовав (3.13).

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}\,i\,\mu\exp(-\mu^2)X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}\left[qG_T(\mu-Q_1)+\frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,X(-\eta)a(\eta)\,d\eta}{\eta+\mu}\right].\quad(3.16)$$

Отсюда с учетом (3.7) для нахождения $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu)\left[qG_T(\mu - Q_1) + \lambda \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, X(-\eta)a(\eta)\, d\eta}{\eta + \mu}\right], \qquad \mu > 0. \qquad (3.17)$$

Здесь

$$h(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2)X(-\mu)}{2|\lambda^+(\mu)|^2}, \qquad \lambda = \frac{1-q}{\sqrt{\pi}}.$$

Решение (3.17) ищем в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \qquad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к системе реккурентных соотношений, из которых находим

$$a_0(\mu) = qG_T(\mu - Q_1)h(\mu), \qquad a_1(\mu) = qG_T h(\mu) \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1)g(\eta_1)\, d\eta_1}{\eta_1 + \mu},$$

$$a_k(\mu) = qG_T h(\mu) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1)\, d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2)\, d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dots \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1)g(\eta_k)\, d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$g(\eta) = \eta\, X(-\eta)h(\eta).$$

Подставляя (3.18) в (3.15) с учетом полученных результатов, можем записать

$$U_0 = -\frac{G_T}{2}\left[Q_2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} I_k\right], \qquad (3.19)$$

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} (\eta - Q_1)g(\eta)\, d\eta, \qquad I_1 = \int\limits_0^{+\infty} g(\eta)\, d\eta \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1)g(\eta_1)\, d\eta}{\eta_1 + \eta},$$

$$I_k = \int\limits_0^{+\infty} g(\eta)\, d\eta \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1)\, d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1)g(\eta_k)\, d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}.$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (3.2) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

4. Вычисление макропараметров газа

Подставляя полученные результаты в (2.4), находим скорость газа над стенкой

$$U_z(x) = U_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z(x,\mu)\, d\mu =$$
$$= -\frac{G_T}{2}\left[Q_2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} I_k - q\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k J_k(x)\right]. \quad (4.1)$$

Здесь

$$J_0(x) = \int\limits_0^{+\infty} (\eta - Q_1)\gamma(x,\eta)\, d\eta, \qquad J_1(x) = \int\limits_0^{+\infty} \gamma(x,\eta)\, d\eta \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1) g(\eta_1)\, d\eta_1}{\eta_1 + \eta},$$

$$J_k(x) = \int\limits_0^{+\infty} \gamma(x,\eta)\, d\eta \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1)\, d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1) g(\eta_k)\, d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$\gamma(x,\eta) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) h(\eta).$$

Аналогичным образом, исходя из статистического смысла функции распределения, находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) \left[1 + 2C_z U_0 + G_T(z - C_z)(C^2 - \frac{5}{2}) + \right.$$
$$\left. + C_z Z(x, C_x) + C_z (C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x)\right] =$$
$$= G_T\left[-\frac{5}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2)\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) Z(x,\mu)\, d\mu + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z_1(x,\mu)\, d\mu\right].$$

Подставляя теперь явный вид функций $Z(x,\mu)$ и $Z_1(x,\mu)$, находим

$$q_z(x) = G_T\left[-\frac{5}{4} + \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right) d\mu - \frac{q}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k J_k(x)\right]. \quad (4.2)$$

5. Анализ результатов

Значения $U_z(x)/G_T$ и $-q_z(x)/G_T$, вычисленные согласно (4.1) и (4.2) и полученные в [4] с использованием метода дискретных ординат на основе линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер, представлены в Таблицах 1 и 2.

x	$q = 0.1^*$	$q = 0.1^{**}$	$q = 0.5^*$	$q = 0.5^{**}$	$q = 1.0^*$	$q = 1.0^{**}$
0.0	0.23425	0.23877	0.17518	0.17337	0.10928	0.10469
0.5	0.25011	0.25648	0.25027	0.25474	0.2499	0.25196
1.0	0.25543	0.26131	0.27604	0.27774	0.29956	0.29544
2.0	0.26013	0.26456	0.29901	0.29333	0.34421	0.32517

Таблица 1. Значения $U_z(x)/G_T$: * – (4.1), ** – [4].

x	$q = 0.1^*$	$q = 0.1^{**}$	$q = 0.5^*$	$q = 0.5^{**}$	$q = 1.0^*$	$q = 1.0^{**}$
0.0	1.18505	1.1662	0.92814	0.8584	0.61306	0.5271
0.5	1.22611	1.2254	1.13142	1.1322	1.01484	1.0264
1.0	1.23716	1.2389	1.18625	1.1969	1.12354	1.1487
2.0	1.24516	1.2472	1.22599	1.1969	1.20238	1.2242

Таблица 2. Значения $-q_z(x)/G_T$: * – (4.2), ** – [4].

Как видно из приведенных таблиц полученные в работе результаты хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными в [4]. Имеющее место различие объясняется тем, что операторы столкновений модельных уравнений не своем корректно описывают спектр собственных значений оператора столкновений Больцмана, что неоднократно отмечалось в [1] – [3] [5]. Вместе с тем в рамках одной и той же модели отличие менее существенное. Так, значение $U_z(x)/G_T = 0.10928$, полученное в представленной работе при $q = 1$, отличается менее чем на 0.001% от 0.109278, полученного в [3].

Профили массовой скорости газа $U_z(x)$ и z-компоненты вектора потока тепла q_z, отнесенные к градиенту массовой скорости, для различных значений коэффициента аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) и (4.2) приведены на Рисунке 1.

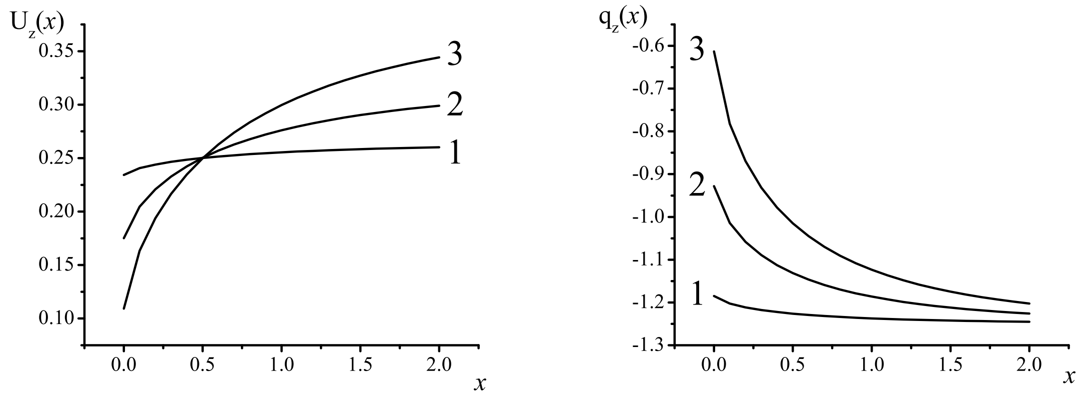


Рис. 1. Графики зависимости $U_z(x)/G_v$ и $q_z(x)/G_v$: 1) $q = 0.1$, 2) $q = 0.5$, 3) $q = 1.0$

Значения скорости скольжения U_0 , рассчитанные согласно (3.19), приведены в Таблице 3. Там же приведены значения, полученные в [3] – [5] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер (LBE), модели кинетического уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) и БГК модели (BGK).

q	(3.19)	BGK [3]	BGK [5]	CES [4]	LBE [4]
0.1	0.26418	0.263956	0.2641783	0.2671726	0.265765
0.2	0.27815	0.277741	0.2781510	0.2770231	0.274450
0.3	0.29192	0.291357	0.2919238	0.2864184	0.2864184
0.4	0.30550	0.304807	0.3055019	0.2953902	0.291124
0.5	0.31889	0.318096	0.3188906	0.3039673	0.299133
0.6	0.33209	0.331227	0.3320949	0.3121761	0.306938
0.7	0.34512	0.344202	0.3451195	0.3200405	0.314547
0.8	0.35797	0.357024	0.3579692	0.3275826	0.321968
0.9	0.37065	0.369697	0.3706483	0.3348226	0.329210
1.0	0.38316	0.382223	0.3831612	0.3417790	0.336280

Таблица 3. Значения U_0/G_v при различных значениях q.

Как видно из приведенной таблицы, отличие значений скорости изотермического скольжения, полученных в представленной работе, не превышает 0.001% от аналогичных значений, найденных в [5] и 0.2% от значений в [3], полученных в рамках БГК модели. Отличие от аналогичных результатов, полученных в рамках CES и LBE моделей, составляет от 10% при $q = 1$ до 1% при $q = 0.1$, и обусловлено зависимостью значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений.

6. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов построено решение задачи об тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. Для произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа получены аналитические выражения, описывающие в слое Кнудсена распределения скорости газа и вектора потока тепла. Проведен численный анализ полученных выражений.

Список литературы

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Maxwell J. On stress in rarefied gases arising from inequalities of temperature Philos. Trans. R. Soc. 1879. V 170. № 1. P. 170-231.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение граничных задач для кинетических уравнений: монография. М.: МГОУ. 2004. 286 с.
4. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273–303.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equation in rarefied gas dynemics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Physics Fluids. 2002. V. 14. No 12. P. 4123–2129.
6. Попов В., Юшканов А. Лукашев В. Математическое моделирование процессов переноса в каналах: монография. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co. KG. 2014. 116 с.

Analytic solution of the problem of heat slip of a rarefied gas along a hard flat surface

© V. V. Lukashev[3], V. N. Popov [4]

Abstract. The analytic solution of the BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) models of the Boltzmann kinetic equation in the problem on thermal heat slip of a rarefied gas along a hard flat surface is constructed. As boundary conditions on a wall the mirror-diffuse reflection model is used. For different values of the coefficient of diffusely the speed of thermal slip along the surface and distribution of the gas velocity and the vector of heat flow in the Knudsen layer are obtained. The comparison with similar results, published in the open press is done.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

[3] Assistant of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.

[4] Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

УДК 519.853:517.988

Версия непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой

© **В. Г. Малинов**[1]

Аннотация. Предлагается новая версия непрерывного проекционного метода второго порядка с переменной метрикой для задач минимизации выпуклых дифференцируемых по Фреше функций на простом множестве в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость для выпуклых функций; для сильно выпуклых функций получена оценка экспоненциальной скорости сходимости метода, которая выше, чем у других аналогичных методов.

Ключевые слова: минимизация, простое множество, непрерывный проекционный метод переменной метрики, сходимость, скорость сходимости

1. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим задачу минимизации на простом множестве

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где Q – выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, нормированного скалярным произведением, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}\ \forall\ \mathbf{x} \in H$; функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывно дифференцируема по Фреше на H, её градиент удовлетворяет условию Липшица: $\exists\ L = const > 0$,

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \ \leq\ L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|\ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что условия существования решения задачи выполнены,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty,\ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q:\ f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.3}$$

1.2. Для решения задачи (1.1)–(1.3) пользуемся непрерывным методом минимизации (НММ). Напомним, что НММ от первого до высоких порядков записываются в виде задачи Коши для ОДУ соответствующих порядков с постоянными или переменными коэффициентами. НММ исследовались во многих работах (см., [1]– [5]). Простейшим из них является непрерывный градиентный метод $\frac{dx}{dt} = -\alpha\nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ без оператора проектирования [3]– [5].

Если в правой части ОДУ имеется оператор проектирования вектора или векторного выражения, то НММ называют проекционным (НПММ). Идея такого метода обоснована в работах [1]– [3]. Их подмножество — непрерывные

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru

методы проекции градиента (НМПГ), в которых проектируемое векторное выражение включает градиент минимизируемой функции $f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ в точке $\mathbf{x}(t)$. НМПГ первого порядка записывается в форме задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{x}(\mathbf{t}) = P_Q[\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \alpha\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))],\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \tag{1.1}$$

Итеративный аналог НМПГ первого порядка — МПГ $\mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{x}^k - \alpha_k\nabla f(\mathbf{x}^k)]$, $\mathbf{x}^0 \in Q$, $k \geq 0$, изучался в работах [1] – [8].

В проекционных методах решения задачи (1.1) ограничения, образующие простое множество $Q \subset H$, учитываются в операторе проектирования; проекция легко вычисляется непосредственно, если эти множества — шар, положительный ортант, параллелепипед [1], [2].

Вычислительный процесс минимизации функции $f(\mathbf{x}(t))$ в НММ осуществляется на основе численного метода интегрирования систем ОДУ. Если в правой части ОДУ присутствует функция $f(\mathbf{x}(t))$ с "овражными"гиперповерхностями уровней, то предпочтительно применение численного метода интегрирования "жёстких"систем ОДУ.

НМПГ второго порядка вида

$$\begin{gathered} \mu\mathbf{x}''(t) + \beta\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x} = P_Q[\mathbf{x} - \alpha\nabla f(\mathbf{x})], \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{'}(t_0) = \mathbf{x}^1,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где числа $\mu > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$ – параметры метода, исследован в работах [2], [3]. Другие НМПГ второго порядка предложены в работах [9], [13]. Их итеративные аналоги — двухшаговые МПГ; например, это известный метод

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{x}^k - \alpha_k\nabla f(\mathbf{x}^k) + \beta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})], \\ \mathbf{x}^0 \in Q,\ k = 0, 1, 2, ..., \end{gathered}$$

детально исследованный в работе [2].

В более общих НПММ проектируемое векторное выражение в правой части ОДУ образуется с помощью градиента $\nabla f(\mathbf{z}(t))$ в экстраполированной точке, например, вида $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t)$, где $\mathbf{x}'(t)$ – производная, а $\alpha(t)$ – параметр соответствующего метода (см., например, [8], [9]).

В работах [10], [12] исследован НПММ второго порядка

$$\begin{gathered} \sigma(t)\mathbf{x}^{''} + \mathbf{x}^{'} + \mathbf{x}(t) = P_Q\left(\mathbf{y}(t) + \beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}^{'}(t) - \gamma_2(t)\nabla f(\mathbf{y}(t)))\right), \\ t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^{'}(0) = \mathbf{x}^1,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}^{'}(t), \end{gathered} \tag{1.5}$$

Доказана сходимость метода и получена оценка экспоненциальной скорости сходимости. Для НПММ вида (1.5) различные итеративные аналоги — проекционные обобщенные двухшаговые методы (ПОДМ), исследованные в работах [9], [11], [14], [15] и других.

Ввиду не безупречности исследованных НМПГ и НПММ при минимизации функций с "овражными"гиперповерхностями уровней и явных преимуществ методов переменной метрики (МПМ) в локальной скорости сходимости, были предложены НМПГ с переменной метрикой (НМПГПМ) первого и второго порядков с оператором $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ *переменной метрики*, доказана сходимость методов. НМПГПМ второго порядка

$$\beta(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{u}'' + \mathbf{u}' + \mathbf{u} = P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{u})}[\mathbf{u}(t) - \alpha(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\nabla f(\mathbf{u})],$$
$$t \geq 0,\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1,$$

где $\forall\ \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u}^1 \in H$ – начальные точки; $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{u})}$ – оператор проекции в метрике $\mathbf{G}(\mathbf{u})$; $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{u})} = (\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v})$, изучался в работе [17]. При $\beta(t) = 0$ метод превращается в НМПГПМ первого порядка [16], а при $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{I}$ будет НМПГ второго порядка, тогда $\mathbf{G}$– проекция $P_Q^{\mathbf{G}}(\mathbf{v})$ меняется на обычную проекцию $P_Q[\mathbf{v}]$.

НПММ с переменной метрикой (НПММПМ) исследованы в работах [18]–[19], а их итеративные аналоги, ПОДМПМ — в работах [20], [21] и других. В работах [22], [23] исследованы непрерывные методы линеаризации (МЛ) второго порядка, в том числе в [23] - МЛ с переменной метрикой.

Как видно на примерах, имеются по два вида проекционных МПМ и непрерывных, и итеративных, с операторами проектирования: а) P_Q — в исходной метрике; б) $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}$ — в переменной метрике $\mathbf{G}(\mathbf{x})$. Заметим, *первые МПМ* появились итеративные не проекционные, для решения задач *безусловной минимизации*; их краткие обзоры имеются в работах [4], [5], а прекрасный расширенный обзор — в работе [24].

В предлагаемой работе исследуется новая версия НПММПМ второго порядка с проектированием в исходной обычной метрике для решения задач вида (1.1), имеющий преимущества в скорости сходимости в сравнении с другими НПММПМ.

2. Метод решения задачи

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q[\mathbf{y}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))],\\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \sigma(t)\mathbf{x}'(t),\ t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}^1 \in H$; параметры метода $\alpha(t) \in C^2[0; +\infty)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t) \in C^1[0; +\infty)$ — заданные функции; оператор $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))$ в (2.1), обратный к оператору метрики в точке $\mathbf{y}(t)$, участвует в построении вектора направления движения к минимуму задачи; производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$,

$\mathbf{x}^{''}(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$, в смысле главы 4 книги [25]; в правой части (2.1) проектирование производится в исходной метрике. Предполагаем, что решение задачи Коши (2.1) существует и единственно на полуоси $[0, \infty)$.

Отметим, что при $\alpha(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$, $\beta(t) = 1$ и использовании в (2.1) оператора проектирования в переменной метрике, метод (2.1) превращается в НМПГПМ первого порядка, исследованный в [16], а при $\mathbf{G}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{I}$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ из (2.1) получаем НМПГ второго порядка.

3. Исследование сходимости метода

В следующей теореме обосновываются достаточные условия сходимости метода (2.1) при $H = E^n$, где E^n – евклидово n- мерное пространство, нормированное тем же скалярным произведением, что и H. (Аргумент t у функции $\mathbf{x}(t)$, её производных и параметров метода для краткости часто опускаем.)

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) множество $Q \subset E^n$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ выпукла; 3) существует выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E^n)$ такая, что градиент*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}); \tag{3.1}$$

4) оператор $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ переменной метрики таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \le (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le M\|\mathbf{u}\|^2 \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n,\ 0 < m \le M; \tag{3.2}$$

5) функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ таковы, что

$$\begin{gathered}
\alpha(t) \in C^2[0,\infty),\ \beta(t), \gamma(t), \sigma(t) \in C^1[0,\infty),\\
\alpha(t) \ge \alpha_0 > 0,\ \beta(t) \ge \beta_0 > 0,\ \beta(t) > \sigma(t) > 0,\\
\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \alpha_0,\ \lim_{t\to\infty}\beta(t) = \beta_0,\ \gamma(0) \ge \gamma(t) \ge \lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \gamma_0 > 0;\\
\alpha^{'}(t) \le 0,\ \beta^{'}(t) < \sigma^{'}(t) \le 0,\ \gamma^{'}(t) \le 0,\ \alpha^{''}(t) \ge 0;\\
(\alpha(t)\gamma\sigma(t))' < (\alpha\beta(t)\gamma)',\ \alpha(t) \le \beta^2(t),\ \alpha\beta + 2\beta^2 + \beta^3 > 2,\\
0 < \gamma(t) < 4(\beta^2 - \alpha)/[L(\beta - \sigma)^2],\ \sigma(t) < (\alpha^2 + 2\beta^3(t))/(4\beta^2(t)),\ t \ge 0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in E^n$ существует такая точка $\mathbf{x}^* \in Q_*$, что

$$\int_0^\infty (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2)\, ds < +\infty,$$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^{'}(t)\| + \|\mathbf{x}^{''}(t)\| \ \longrightarrow\ 0, \quad t \to \infty, \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, отметим, что: 1) третье условие теоремы существенно, классы функций и операторов, удовлетворяющих

(3.1), не пусты [20]; 2) четвёртое условие теоремы гарантирует существование обратного оператора $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\ \forall\, \mathbf{x} \in Q$. Далее, пользуясь (2.1) и свойством

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q \tag{3.5}$$

оператора проекции [1] получим вариационное неравенство

$$(\alpha(t)\mathbf{x}^{''}(t) + \beta(t)\mathbf{x}^{'}(t) + \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t)), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{w} = \alpha(t)\mathbf{x}^{''}(t) + \beta(t)\mathbf{x}^{'}(t) + \mathbf{x} \in Q$.

В исходной метрике пространства E^n для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ имеет место равенство [1], [16]

$$\mathbf{x}^* = P_Q[\mathbf{x}^* - \gamma \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)]. \tag{3.7}$$

Пользуясь (2.1) и свойством (3.5) оператора проекции $\mathbf{w} = P_Q(\mathbf{v}) \in Q$ в E^n, из (3.7) имеем

$$\gamma(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q. \tag{3.8}$$

Поскольку $\gamma > 0$, отсюда следует неравенство $(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0,\ \mathbf{u} \in Q$. Положим в (3.8) $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in Q$, а в (3.6) возьмём $\mathbf{u} = \mathbf{x}^*$ и полученные неравенства сложим:

$$(\alpha(t)\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'} + \gamma(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y})\nabla f(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}) \geq 0,\ t \geq 0. \tag{3.9}$$

Воспользуемся соотношением (3.1) в (3.9):

$$\begin{gathered} \|\alpha(t)\mathbf{x}^{''} + \beta(t)\mathbf{x}^{'}\|^2 + (\alpha\mathbf{x}^{''} + \beta(t)\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq \\ \leq \gamma(\nabla\varphi(\mathbf{y}(t)) - \nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}),\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Скалярное произведение в правой части (3.10) оценим с помощью неравенства ([26], гл. 1)

$$\begin{gathered} (\nabla\varphi(\mathbf{y}) - \nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{w}) \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2/4, \\ \mathbf{y}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w} \in Q,\ \varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q) \end{gathered}$$

и при

$$\begin{gathered} \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2 = \|\sigma\mathbf{x}^{'} - (\alpha\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'})\|^2 = \\ = (\sigma^2 - 2\beta\sigma)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 - 2\alpha\sigma(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x}^{'}) + \|\alpha\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'}\|^2; \end{gathered}$$

имеем

$$\begin{gathered} a_1(t)\|\alpha\mathbf{x}^{''} + \beta\mathbf{x}^{'}\|^2 + [2\alpha\sigma(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x}^{'}) + (2\beta\sigma - \sigma^2)\|\mathbf{x}^{'}\|^2]L\gamma/4 + \\ +\alpha(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \beta(\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*; \end{gathered}$$

преобразуем его к виду

$$\begin{gathered} a_1(t)\alpha^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2 + 2a_2(t)(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x}^{'}) + a_3(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \\ +\alpha(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \beta(\mathbf{x}^{'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq 0,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $a_1(t) = 1 - L\gamma(t)/4 > 0$, $a_2(t) = a_1\alpha(t)\beta(t) + L\alpha\gamma\sigma(t)/4 > 0$, $a_3(t) = a_1(t)\beta^2 + (2\beta\sigma - \sigma^2)L\gamma/4 > 0$, при условиях (3.3).

Используя тождества

$$\begin{gathered} 2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2,\ 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, \\ 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}'') = \tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 - 2\|\mathbf{x}'\|^2,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{3.12}$$

от (3.11) приходим к неравенству

$$\begin{gathered} a_1(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_2(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + [a_3(t) - \alpha(t)]\|\mathbf{x}'\|^2 + \\ +\alpha(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + \beta(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 \leq 0,\ t \geq 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Проинтегрируем (3.13) на отрезке $[\xi, t]$, $t > \xi \geq 0$:

$$\begin{gathered} \textstyle\int_\xi^t \{a_1(s)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{31}(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + [\alpha''(s) - \beta'(s)]\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2/2\,\}\,ds + \\ +a_2(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + \alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + [\beta - \alpha'(t)]\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2 \leq \\ \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $C_1(\xi, \mathbf{x}^*) = a_2(\xi)\|\mathbf{x}'(\xi)\|^2 + \alpha(\xi)(\mathbf{x}'(\xi), \mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*) + [\beta(\xi) - \alpha'(\xi)]\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2$, $a_{31}(s) = a_3(s) - \alpha(s) - a_2'(s) > 0$, $\gamma(s) < 4(\beta^2 - \alpha)/[L(\beta - \sigma)^2] = \gamma^{11}$, $\alpha''(s) - \beta'(s) > 0$, $\beta(t) - \alpha'(t) \geq \beta(t) > 0\ \forall\ t \geq 0$ при условиях (3.3) и интеграл положителен. Из (3.14) без положительных слагаемых следует

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\beta(t),\ t > \xi \geq 0, \mathbf{x}^* \in Q_*.$$

Умножив это неравенство на $\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}e(t)$, где $e(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\beta(s)\,ds}{\alpha(s)}\right) > 0$, получим:

$$e(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \beta(t)e(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/\alpha(t) \leq 2e(t)C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e'(t) = \beta(t)e(t)/\alpha(t)$, $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}[e(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2] \leq 2e(t)C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0. \tag{3.15}$$

Проинтегрируем (3.15) на отрезке $[\xi, t]$, умножим полученное неравенство на $e^{-1}(t)$, тогда придём к неравенству

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2\frac{C_1(\xi, \mathbf{x}^*)}{\alpha_0 e(t)}\int_\xi^t e(s)\,ds + \frac{e(\xi)\|\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*\|^2}{e(t)},\ t > \xi \geq 0.$$

Отсюда следует:

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0,\ t > \xi \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.16}$$

Далее оценим второе и третье слагаемые во втором соотношении из (3.4), пользуясь (3.14) и (3.11). Существуют числа $r > 0$ и $\eta \geq 0$ такие, что для $s \geq \eta \geq \xi \geq 0$ имеют место оценки для коэффициентов подынтегральных слагаемых в (3.14): $a_3(s) - \alpha(s) - a_2'(s) \geq r > 0$, $(\alpha^{''}(s) - \beta^{'}(s))/2 \geq r > 0$, $a_1(s)\alpha^2 \geq r > 0$. Учитывая их, (3.3) и (3.12), из (3.14) получаем:

$$\begin{gathered} r\int_\xi^t \{\|\mathbf{x}^{''}\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds + 0.5\beta(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ +\alpha(t)(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) + a_2(t)\|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 \leq \\ \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \xi \geq \eta \geq 0. \end{gathered} \tag{3.17}$$

В (3.17) третье слагаемое оценим с помощью неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2 \ \forall\, a, b, \varepsilon > 0 \tag{3.18}$$

при $\varepsilon = 1/\beta$, $a(t) = \alpha\mathbf{x}^{'}(t)$, $b = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, то есть

$$(\alpha(t)\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\frac{\alpha^2}{2\beta}\|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 - \frac{\beta}{2}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)\|^2.$$

Тогда

$$\begin{gathered} r\int_\xi^t \{\|\mathbf{x}^{''}\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds + \\ +[a_2(t) - \alpha^2/(2\beta)]\|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где коэффициент при втором слагаемом неотрицателен при условиях (3.3). Кроме того, $\forall\, t \geq \eta$ имеем $2a_3\beta - \alpha^2 \geq \alpha_0 r > 0$. Тогда из (3.19) следует

$$\begin{gathered} \int_\xi^t \{\|\mathbf{x}^{''}\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/r, \\ \|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 \leq 2\beta(\alpha_0 r)^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0. \end{gathered}$$

Отсюда с учетом условий (3.3) имеем:

$$\int_0^\infty \{\|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\}\, ds < +\infty \ \forall\, \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{3.20}$$

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x}^{'}\|^2 \leq 2\beta_0(\alpha_0 r)^{-1} C_1(\xi, \mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0. \tag{3.21}$$

Далее оценим $\|\mathbf{x}^{''}(t)\|$ с помощью (3.11) и (3.18). С учётом оценок

$$\begin{gathered} 2a_2(\mathbf{x}^{''}(t), \mathbf{x}^{'}(t)) \geq -a_2\alpha\beta^2\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 - (a_1\beta + L\gamma\sigma/4)\beta^{-2}\|\mathbf{x}^{'}\|^2, \\ \alpha(\mathbf{x}^{''}, \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\alpha^2\beta^2\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2/2 - 0.5\beta^{-2}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2, \\ (\beta\mathbf{x}^{'}(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\beta\|\mathbf{x}^{'}\|^2/2 - \beta\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2, \end{gathered}$$

получаемых из (3.18) соответственно при $\varepsilon = \alpha\beta^2$, $\varepsilon = \alpha\beta^2$, $\varepsilon = \beta^{-1}$, от (3.11) приходим к неравенству

$$a_4(t)\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \leq a_5(t)\|\mathbf{x}^{'}(t)\|^2 + a_6(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \geq 0,\ \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{3.22}$$

где выполняются неравенства: $a_4(t) = a_1\alpha^2 - a_2\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2/2 \geq \alpha_0^2\beta_0^2/2$, $a_5(t) = a_2\alpha^{-1}\beta^2 + \beta/2 - a_3 \leq (2+\beta_0^2 - 2\beta_0^3)\alpha_0 r/\beta_0$, $a_6(t) = (1+\beta^3)/(2\beta^2) \leq (1+\beta_0^3)/(2\beta_0^2)$; $0 < \sigma < \beta < 1$, $\gamma \leq 4(1-\beta^2-\beta^3)/[L(1+\beta^2\sigma-\beta^3)] = \gamma^{12} < 4/L$, $\gamma < \gamma^{11} < \gamma^{12}$ при $\alpha\beta + 2\beta^2 + \beta^3 > 2$. С учётом этих оценок и (3.16), (3.21), из (3.22) следует

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 \leq C_2(\xi,\mathbf{x}^*),\ t > \eta \geq \xi \geq 0, \tag{3.23}$$

где $C_2(\xi,\mathbf{x}^*) = 4[(\alpha_0\beta_0)^{-2}(2+\beta_0^2-2\beta_0^3) + \alpha_0^{-3}\beta_0^{-4}(1+\beta_0^3)]C_1(\xi,\mathbf{x}^*)$.

Асимптотическую устойчивость траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (2.1) и единственность предельной точки траектории можно показать способом, аналогичным использованным в работах [2], [3], [17].

Далее из (3.16) следует, что траектория $\mathbf{x}(t)$ ограничена, а в силу (3.20)

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}[\|\mathbf{x}^{''}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}^{'}\|^2 + \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2] = 0\ \forall\ \mathbf{x}^* \in Q_*$$

и существует подпоследовательность $\{t_i\}$, что

$$\|\mathbf{x}^{''}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}^{'}(t_i)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\| \to 0,\ i \to \infty,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.24}$$

Для $t = t_i$ в (3.17) обозначим при всех $t_i \geq t_1$

$$a_2(t_i)\|\mathbf{x}^{'}(t_i)\|^2 + \alpha(t_i)(\mathbf{x}^{'}(t_i), \mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*) + 0.5\beta(t_i)\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\|^2 = C_1(t_i,\mathbf{x}^*).$$

С учётом (3.16), (3.21) и (3.24), имеем

$$C_1(t_i,\mathbf{x}^*) \to 0,\ i \to \infty,\ \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{3.25}$$

Тогда из (3.20) следует первое соотношение (3.4), а из (3.16), (3.21), (3.23), (3.24), (3.25) следует второе соотношение из (3.4).

Теорема 1 доказана.

4. Оценка скорости сходимости

Для оценки скорости сходимости метода (2.1) предположим, что функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ сильно выпуклая и воспользуемся результатами теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того: 1) функция $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\kappa_1 > 0$; 2) функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\kappa > 0$ и имеет место равенство*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in H;$$

3) функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ *удовлетворяют условиям (3.3) и, кроме того,*

$$\begin{gathered}0<\alpha(t)<min\{0.5\beta^2(t),(1-\beta^2(t))/2\},\ 0<\sigma(t)<\beta(t)<1,\\ 0<\gamma(t)<2\beta(t)/[(L+2\kappa)(\beta(t)-\sigma(t))],\ 2\kappa=\mu,\\ 0<\sigma(t)<min\{\tfrac{(L+\mu)^2[4\alpha(t)-(\beta-\alpha')\beta^2]}{8L\mu(\beta^2-\alpha)};\tfrac{\beta(1-2\alpha-\beta^2)}{2-2\alpha-\beta^2}\},\ t\geq 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда при любых начальных приближениях $\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1\in E^n$ *траектория метода (2.1) сходится к точке* $\mathbf{x}^*\in Q_*$ *и имеют место оценки* $\forall\, t\geq 0$:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|\leq\{2C_5(t)[C_3g(t)+C_4]\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|\leq\{[2b_{21}(t)C_5(t)C_6(t)+C_3b_{16}^{-1}](1-\beta_0)^{-1}\}^{1/2}, \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}''(t)\|\leq\{2\alpha_0^{-3}(2-\beta_0^2)\beta_0^{-1}(1-\beta_0)^{-1}(C_3\alpha^{-1}(t)+\\ +0.5\beta^{-2}(t)e^{-1}(t)C_6(t))+\alpha_0^{-4}(1+\alpha_0)C_5(t)C_6(t)\}^{1/2},\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $e(t)=e^{\alpha(t)}$; $C_3=0.5(b_{12}(0)-\alpha'(0))\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(0)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*)+b_{16}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2$; $C_4=0.5b_{16}^{-1}(0)\alpha(0)e(0)$; $C_5(t)=b_{16}(t)(e(t)\alpha(t))^{-1}$; $C_6(t)=C_3g(t)+C_4$; $b_{11}(t)=1-(L+\mu)\gamma(t)/4$; $g(t)=\int_0^t e(s)b_{16}^{-1}(s)\,ds$; $b_{12}(t)=\beta(t)+2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)$; $b_{13}(t)=(L+\mu)\alpha\gamma\sigma/2$; $b_{16}(t)=b_{11}\alpha\beta+b_{13}(t)/2$; $b_{21}(t)=b_{11}\alpha^2-0.5\alpha^3-b_{16}\alpha\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при выполнении всех условий теоремы 2: 1) множество минимумов $Q_*=\{\mathbf{x}^*\}$ ввиду сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$; 2) результаты теоремы 1 о сходимости метода (2.1) справедливы.

Из неравенства (3.10), где в условиях данной теоремы функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $\kappa>0$, следует:

$$\begin{gathered}\|\alpha(t)\mathbf{x}''+\beta(t)\mathbf{x}'\|^2+(\alpha\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\beta(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)\leq\\ \leq\gamma(\nabla\varphi(\mathbf{y})-\nabla\varphi(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w}),\ t\geq 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*.\end{gathered} \tag{4.5}$$

В правой части (4.5) воспользуемся неравенством ([26], гл. 1)

$$(\nabla\varphi(\mathbf{y})-\nabla\varphi(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w})\leq(L+\mu)\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2/4-\frac{L\mu}{L+\mu}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|^2$$

$\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{w}\in Q$, равенством

$$\begin{gathered}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*+\sigma(t)\mathbf{x}'\|^2=\\ =\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+2\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,\mathbf{x}')+\sigma^2\|\mathbf{x}'\|^2\end{gathered}$$

и выражением для $\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2$, приведённым при выводе (3.11). Тогда из (4.5) следует

$$\begin{gathered}b_{11}(t)\|\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}'\|^2+(\alpha\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+b_{12}(t)(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\\ +b_{13}(t)(\mathbf{x}'',\mathbf{x}')+b_{14}(t)\|\mathbf{x}'\|^2+\\ +b_{15}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\leq 0,\ t\geq 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*,\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $b_{11}(t) = 1-(L+\mu)\gamma(t)/4$, $b_{12} = \beta+2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)$, $b_{13} = (L+\mu)\alpha\gamma\sigma/2$, $b_{14} = (L+\mu)\gamma(t)(2\beta\sigma-\sigma^2)+L\mu\gamma\sigma^2/(L+\mu)$, $b_{15} = L\mu\gamma(t)/(L+\mu)$. В (4.6) распишем первый квадрат нормы и воспользуемся тождествами (3.12). Тогда

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\alpha^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2+(b_{11}\beta^2+b_{14}-\alpha)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+b_{16}\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}^{'}\|^2+ \\ +0.5\alpha\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+0.5b_{12}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+ \\ +b_{15}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le 0,\ t\ge 0,\ \mathbf{x}^*\in Q_*, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $b_{16} = b_{11}\alpha\beta+b_{13}/2$, $b_{16} > 0$ при $\gamma < 4/(L+\mu) = \gamma^{20} < 4\beta/[(L+\mu)(\beta-\sigma)]$.

Проинтегрируем (4.7) на отрезке $[0;t]$, тогда получим:

$$\begin{gathered} \int_0^t \left(b_{11}(s)\alpha^2(s)\|\mathbf{x}^{''}(s)\|^2+b_{17}\|\mathbf{x}^{'}\|^2+b_{18}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2\right) ds+b_{16}(t)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+ \\ +0.5(b_{12}(t)-\alpha^{'})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+0.5\alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le C_3,\ t\ge 0, \end{gathered}$$

где $b_{17}(s) = b_{11}\beta^2(s)+b_{14}-\alpha(s)-b_{16}^{'}(s) > 0$, $b_{18} = b_{15}+0.5(\alpha^{''}(s)-b_{12}^{'}(s)) > 0$ при условиях (4.1); $C_3 = 0.5(b_{12}(0)-\alpha^{'}(0))\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(0)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*)+b_{16}(0)\|\mathbf{x}^1\|^2$ с учетом (2.1), (3.12); $\gamma < \gamma^{21} = 4(\beta^2-\alpha)/[(L+\mu)\beta^2] < \gamma^{20}$. Отсюда, поскольку интеграл положителен ввиду положительности подынтегральных слагаемых, после умножения на $[b_{16}(t)]^{-1}$, следует неравенство

$$\begin{gathered} 0.5[b_{16}(t)]^{-1}[(b_{12}(t)-\alpha^{'})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+\alpha(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2]+ \\ +\|\mathbf{x}^{'}\|^2 \le C_3 b_{16}^{-1}(t),\ t\ge 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Умножив (4.8) на функцию $e(t) = exp(\alpha(t)) > 0$, проинтегрируем полученное неравенство на отрезке $[0;t]$:

$$\begin{gathered} \int_0^t \left(e(s)\|\mathbf{x}^{'}\|^2+b_{19}(s)\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2\right) ds+ \\ +0.5b_{16}^{-1}(t)\alpha(t)e(t)\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2 \le C_3\int_0^t b_{16}^{-1}(s)e(s)\,ds+C_4,\ t\ge 0, \end{gathered}$$

где $C_4 = b_{16}^{-1}(0)\alpha(0)e(0)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2$; $b_{19}(s) = 0.5[e(s)b_{16}^{-1}(s)(b_{12}-\alpha^{'})-(\alpha(s)e(s)b_{16}^{-1}(s))^{'}] > 0$ при $b_{12}(s)-\alpha^{'} > 0$, $b_{16}^{-1} > 0$, $[b_{16}^{-1}(t)]' > 0$, $\beta > \sigma > 0$. Отсюда, поскольку интеграл в левой части неравенства положителен, имеем

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2 \le 2C_5(t)(C_3 g(t)+C_4),\ t\ge 0, \tag{4.9}$$

где $C_5(t) = b_{16}(t)(\alpha(t)e(t))^{-1}$, $g(t) = \int_0^t e(s)b_{16}^{-1}(s)\,ds$.

Здесь, поскольку справедливы соотношения $e(t)\to\infty$, $[g(t)e^{-1}(t)]\to 0$ при $t\to\infty$, правая часть неравенства (4.9) стремится к нулю. В (4.9) имеет место сходимость порядка $e^{-1}(t)$. Из (4.9) следует (4.2).

Для доказательства (4.3) и (4.4) выкладки аналогичны проведённым при получении (4.9). Из неравенства (4.8), пользуясь (3.12), имеем

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{'}\|^2+0.5b_{16}^{-1}(t)(b_{12}(t)-\alpha^{'})\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2+ \\ +0.5\alpha(t)(\mathbf{x}^{'},\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \le b_{22}(t),\ t\ge 0. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Здесь третье слагаемое преобразуем с помощью (3.18), при $\varepsilon = \frac{b_{16}(t)\beta(t)}{\alpha(t)}$, то есть

$$\alpha b_{16}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq -\beta\|\mathbf{x}'\|^2 - \alpha^2\beta^{-1}b_{16}^{-2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,$$

тогда

$$(1-\beta)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq b_{21}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{22}(t),\ t \geq 0,$$

где $b_{21}(t) = \alpha^2 b_{16}^{-2}\beta^{-1} - 0.5b_{16}^{-1}(t)(b_{12} - \alpha')$, $b_{22}(t) = C_3 b_{16}^{-1}(t)$, $b_{12} > 0$ при выполнении неравенств: $b_{11}\beta + (L+\mu)\gamma\sigma/4 \geq \beta/2$, то есть $0 < \gamma < 2\beta/[(L+\mu)(\beta-\sigma)] = \gamma^{22}$; $4\alpha - [\beta - \alpha' + 2L\mu\gamma\sigma/(L+\mu)]\beta^2 > 0$, $0 < \gamma < \gamma^{22} < \gamma^{21} < (L+\mu)[4\alpha - (\beta-\alpha')]\beta^2/(2L\mu\beta^2\sigma)$, $0 < \sigma < \sigma^{21} = (L+\mu)^2[4\alpha - (\beta-\alpha')\beta^2]/[8L\mu(\beta^2 - \alpha)]$, $0 < \alpha < \beta^2/2 < [4L\mu\beta + (L+\mu)^2(\beta - \alpha')]\beta^2/[8L\mu\beta + (L+\mu)^2]$.

Отсюда, учитывая оценку (4.9) и $\beta < 1$, получим неравенство

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq [2b_{21}(t)C_5(t)C_6(t) + C_3 b_{16}^{-1}](1 - \beta(t))^{-1},\ t \geq 0, \tag{4.11}$$

где $C_6(t) = C_3 g(t) + C_4$. Из (4.11) следует (4.3).

Для оценки $\|\mathbf{x}''(t)\|$ запишем (4.6) в форме

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\alpha^2\|\mathbf{x}''\|^2 + (b_{11}\beta^2 + b_{14})\|\mathbf{x}'\|^2 + \alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \\ + b_{12}(t)(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + 2b_{16}(t)(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + b_{15}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 0,\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где скалярные произведения оценим с помощью (3.18) соответственно при $\varepsilon = \alpha^2$, $\varepsilon = \alpha\beta$, $\varepsilon = \beta$:

$$\begin{gathered} \alpha(\mathbf{x}'', \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* \geq -0.5\alpha^3\|\mathbf{x}''(t)\|^2/2 - 0.5\alpha^{-1}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2, \\ 2b_{16}(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'(t)) \geq -b_{16}\alpha\beta\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - b_{16}(\alpha\beta)^{-1}\|\mathbf{x}'\|^2, \\ b_{12}(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -0.5b_{12}\beta\|\mathbf{x}'\|^2 - 0.5b_{12}\beta^{-1}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2. \end{gathered}$$

Тогда из (4.12) следует

$$b_{23}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 \leq b_{24}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + b_{25}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2,\ t \geq 0, \tag{4.13}$$

где $b_{23} = b_{11}\alpha^2 - 0.5\alpha^3 - b_{16}\alpha\beta = \alpha^2[1 - \alpha/2 - \beta^2 - (L+\mu)\gamma(1 - \beta^2 + \beta\sigma)] \geq \alpha^3/2 \geq \alpha_0^3/2$ при $0 < \gamma < \gamma^{22} \leq 4(1 - \alpha - \beta^2)/[(L+\mu)(1 - \beta^2 + \beta\sigma)]$, $0 < \sigma < \beta < 1$, $\sigma < (1 - 2\alpha - \beta^2)/(2 - 2\alpha - \beta^2)$; $b_{24} = b_{16}(\alpha\beta)^{-1} + 0.5b_{12}\beta - b_{11}\beta^2 - b_{14} < 0.5(2 - \beta^2) \leq 0.5(2 - \beta_0^2)$; $b_{25}(t) = 1/(2\alpha) + b_{12}(t)/(2\beta) - b_{15}(t) < 0.5\alpha_0^{-1}(1 + \alpha_0)$.

С учётом этих оценок коэффициентов, (4.9), (4.11), из (4.13) имеем

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}''(t)\|^2 \leq 2\alpha_0^{-3}(2 - \beta_0^2)\beta_0^{-1}(1 - \beta_0)^{-1} \times \\ \times (C_3\alpha^{-1}(t) + 0.5\beta^{-2}(t)e^{-1}(t)C_6(t)) + \\ + 2\alpha_0^{-4}(1 + \alpha_0)C_5(t)C_6(t). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Из (4.14) следует оценка (4.4).

Теорема 2 доказана.

Примечания.

1. Скорость сходимости НПММПМ второго порядка (2.1) выше, чем у методов первого порядка, в следующем смысле, указанном в работах [2], [3]: для НПММ второго порядка показатель сходимости всегда можно сделать больше, чем в методах первого порядка, за счет выбора параметров метода.

2. НПММПМ сочетают преимущества НПММ второго порядка и методов переменной метрики, поэтому они имеют лучшую скорость сходимости при минимизации функций с "овражными"гиперповерхностями уровней.

Список литературы

1. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002, 824 с.

2. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, 1989, 5–43.

3. Антипин А. С., “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1475–1486.

4. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.

5. Поляк Б. Т., *Введение в оптимизацию*, Наука, М., 1983, 384 с.

6. Антипин А. С., “Об оценках скорости сходимости метода проекции градиента”, *Автоматика и Телемеханика*, 1995, № 6, 16–24.

7. Бобылев Н. А., Кутузов А. А., “О методе проекции градиента в задачах бесконечномерной оптимизации”, *Автоматика и Телемеханика*, 1995, № 5, 19–33.

8. Нурминский Е. А., “О скорости сходимости метода проекции градиента”, *Кибернетика*, 1973, № 5, 84–87.

9. Амочкина Т. В., Недич А., “Об одном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка и его дискретном аналоге”, *Вестник МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1995, № 2, 5–11.

10. Малинов В. Г., "Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка", *Дифференциальные уравнения и применения. Тезисы докладов первой международной научно-практической конференции. 3 - 5 декабря 1996 г. С.-Петербург*, 1996, 147.

11. Малинов В. Г., "О двухшаговом четырехпараметрическом методе минимизации и его непрерывном аналоге", *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2001, № 1(23), 270–283.

12. Малинов В. Г., "О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка", *Методы оптимизации и их приложения. Труды 12 Байкальской международной конференции. Иркутск, Байкал, 24 июня– 1 июля 2001г. Иркутск: ИСЭМ СО РАН*, **1А. Математическое программирование** (2001), 21–26.

13. Рязанцева И. П., "Непрерывный метод решения задач минимизации", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **39**:5 (1999), 734–742.

14. Малинов В. Г., "Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **36**:12 (1996), 48–56.

15. Малинов В. Г., "Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации", *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1999, № 1(20), 169–178.

16. Антипин А. С., Васильев Ф. П., "О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой", *Известия вузов. Математика*, 1995, № 12(403), 3–9.

17. Амочкина Т. В., "Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **37**:10 (1997), 1174–1182.

18. Malinov V. G., "On Continuous Projection Minimization Method of the Second Order with Variable Metric", *The International Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi (1937-2000). Abstracts. June 25-28, 2002. Kiev. NTUU*, 2002, 48–49.

19. Малинов В. Г., "Непрерывный проекционный метод минимизации второго порядка с переменной метрикой", *Функциональный анализ. Межвуз.сб. научных трудов. Ульяновск: УлПУ*, **39** (2006), 53–64.

20. Малинов В. Г., "О проекционном квазиньютоновском обобщённом двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата", *Журнал Средневолжского Математического Общества*, **12**:4 (2010), 37–48.

21. Malinov V. G., "Projection Two-step Variable Metric Methods", *4th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2004). Moscow. September 21-24, 2004. Proceedings. Moscow. MAKS Press*, 2004, 135–137.

22. Антипин А. С., Недич А., "Непрерывный метод линеаризации второго порядка для задач выпуклого программирования", *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1996, № 2, 3–15.

23. Амочкина Т.В., "Непрерывный метод линеаризации второго порядка с переменной метрикой", *Вестник Московск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1997, № 3, 9–12.

24. Нестеров Ю. Е., Скоков В. А., "Методы первого порядка нелинейной безусловной оптимизации", *Методы математического программирования: М.: ЦЭМИ АН СССР*, 1980, 6–60.

25. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1978, 336 с.

26. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. Препринт.*, ВНИИ системных исследований, М., 1979, 73 с.

A version of continuous projection second order variable metric method

© V. G. Malinov[2]

Abstract. In the work a new version of continuous projection second order variable metric method for problems of minimization of convex Frechet differentiable functions in Hilbert space is proposed. The convergence examined and exponential rate of convergence of the method is derived.
Key Words: minimization, simple set, continuous variable metric method, convergence, rate of convergence

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

УДК 517.9

Об оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях

© Т. Ф. Мамедова [1], Д. К. Егорова [2], Е. В. Десяев [3]

Аннотация. В работе рассматривается задача об оптимальной стабилизации программного движения в смысле абсолютно равномерной устойчивости, что отличает постановку этой задачи от классической, когда программное движение асимптотически устойчиво.
Ключевые слова: оптимальная стабилизация программного движения, абсолютно равномерно устойчивые решения

Исследования в области стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях были впервые рассмотрены в работах Е. В. Воскресенского. Известно, что программное движение стабилизировано, если оно является устойчивым решением уравнения движения, в заранее определенном смысле [1],[2].

Рассмотрим постановку задачи оптимальной стабилизации программного движения $x = 0$. К такой постановке при подходящей замене переменных сводится задача об оптимальной стабилизации произвольного программного движения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, u), \tag{1.1}$$

где функция

$$G : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to R^n$$

при любом допустимом управлении $u \in K$ удовлетворяет требованиям теоремы существования и единственности решения Каратеодори при любых начальных данных $(t_0, x_0), T \leq t_0 < +\infty, x_0 \in R^n$; K – класс допустимых управлений, $u : [T, +\infty) \times R^n \to R^m$ – функции типа Каратеодори и $u(t, 0) \equiv 0$, функционал качества I вида

$$I = \int\limits_T^{+\infty} G_0(t, x(t), u(t, x))dt, \tag{1.2}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск;mamedovatf@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева,г. Саранск; egorovadk@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; desyaev@rambler.ru.

рассматривается на решениях уравнения (1.1). Здесь

$$G_0 : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to [0, +\infty)$$

– типа Каратеодори, $x(t) = x(t : t_0, x_0, u)$ – решение уравнения (1.1) с начальными данными (t_0, x_0) при любом управлении $u \in K, \|x_0\| \le \delta$.

В задаче (1.1)-(1.2) предполагается стабилизация по асимптотической устойчивости. Однако при решения прикладных задач возникают случаи, когда тривиальное решение уравнения движения (1.1) не может быть асимптотически устойчивым, а, следовательно, стабилизировать движение $x = 0$ в классическом смысле не удастся [3],[4].

В работах [1],[5] приводится понятие стабилизации программных движений для абсолютно равномерно устойчивых решений, т.е. для таких решений $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (1.1) для которых выполняется неравенство

$$\|x(t : +\infty, x_0, u)\| < \varepsilon$$

при всех $T \le t \le +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\|x_0\| < \delta$.

Пусть в сформулированной постановке задачи (1.1)-(1.2) решение $x = 0$ является абсолютно равномерно устойчивым, тогда необходимо уточнить понятие минимума функционала (1.2). Для этого мы потребуем глобальную выпрямляемость поля направлений [6], определяемого уравнением (1.1), в классе допустимых управлений. В этом случае минимум функционала I определяется так: существует управление $u_0(t, x)$ такое, что

$$\int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u_0(t, x(t) - x_0))dt \le \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt,$$

при всех $u \in K, x(t) = x(t : +\infty, x_0, u), \|x_0\| \le \delta.$ и функционал качества (1.2) можно записать в виде

$$I = \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt, \tag{1.3}$$

где $x(t) = x(t : +\infty, x_0, u)$, $\|x_0\| \le \delta.$

Тогда $u_0 = u_0(t, x)$ оптимально стабилизирует решение $x = 0$ в классе допустимых управлений K.

В общем случае вид устойчивости каждый раз в конкретной задаче требует уточнения. Заметим, что здесь асимптотической устойчивости решения $x = 0$ нет, и поэтому, потребовалось новое определение оптимальной стабилизации программного движения.

Возвращаясь к решению практических задач, отметим, что точные аналитические задания функций из формулировки задачи чаще всего неизвестны, указываются лишь свойства уравнений вида (1.1), области их определения и области значений. Однако, исходя из результатов измерений, можно задать их мажоранты, которые будут являться носителями функциональных свойств.

Итак потребуем существования мажоранты для функции $G_0(t, x, u)$:

$$\|G_0(t, x, u)\| \leq \lambda_0(t, \|x\|, \|u\|), \lambda_0 \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+, \mathbb{R}^1_+),$$

$$\lambda_0(t, \alpha_1, \|u\|) \leq \lambda_0(t, \alpha_2, \|u\|), \alpha_1 \leq \alpha_2.$$

Уточним класс допустимых управлений K. В формулировке задачи (1.1),(1.3) рассматриваются лишь только управления с обратной связью, более общие классы требуют уточнения формулировки. Еще потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u(t, x)\| \leq \mu\|x\|,$$

где μ – минимальное неотрицательное число, обеспечивающее это неравенство для данного управления при любом $T \leq t < +\infty$.

Приведем условия при которых основная задача имеет решение.

Пусть $\lambda_0(t, z, \mu) \leq \lambda_0(t, z, \mu_0)$, $0 \leq \mu, \mu \neq \mu_0$. Тогда для любого x_0, $||x_0|| \leq \delta_0$, $||x(t : +\infty, x_0, u) - x_0|| \leq M(\delta_0, \mu_0)$ и при $\mu = \mu_0$ справедлива оценка

$$I \leq \int\limits_T^{+\infty} \lambda_0(t, M(\delta_0, \mu), \mu) dt,$$

существование функции M вытекает из абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (1.1).

Будем считать, что управление $u \in K$ удовлетворяет условию Липшица: $||u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)|| \leq L_1|t_1 - t_2| + L_2||x_1 - x_2||$; L_1, $L_2 - const$. В этом случае множество

$$S(t) = \{(x(t : +\infty, x_0, u), u) : ||x_0|| \leq \delta_0,\ u \in K,\ T \leq t < +\infty\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому непрерывный функционал I_r на $S_r(t) = S(t)$, $T \leq t \leq r$ имеет вид

$$I_r = \int\limits_T^r G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0)) ds$$

и по теореме Вейерштрасса достигает минимума при любом $r \geq T$. Пусть он достигается в точке $(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0)))$, $T \leq t \leq r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x(t : +\infty, x_0, u), u(t, x(t : +\infty, x_0, u)))$, $T \leq t \leq r$ такая, что справедливо

$$G_0(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0)) <$$

$$< G_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0)) + \varepsilon,\ T \leq t \leq r.$$

Поэтому существует последовательность

$$(x_n(t : +\infty, x_0, u_n), u_n(t, x_n(t : +\infty, x_0, u_n))), \tag{1.4}$$

равномерно сходящаяся при $n \to +\infty$ на сегменте $T \leq t \leq r$ к паре

$$(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0))),\ T \leq t \leq r. \tag{1.5}$$

Рассматривая вложенную систему сегментов $[T, r] \subset [T, r_1] \subset \ldots \subset [T, r_n] \subset \ldots$, $r_n > r_{n-1}, r_0 = r$, получим: последовательность (1.4) при $n \to +\infty$ на полуоси $T \leq t < +\infty$ сходится к паре (1.5) равномерно на любом сегменте из $[T, +\infty)$. Поэтому существует минимум функционала I:

$$\int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0))ds \leq$$

$$\leq \int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0))ds$$

при всех $u \in K$.

Далее решение задачи оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях вида (1.5) можно найти применяя принцип максимума Понтрягина [7].

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., “Оптимальная стабилизация программного движения”, *Труды Средневолжского математического общества*, **6**:1 (2004), 14–19.

2. Мамедова Т. Ф., Десяев Е. В., “О построении управления для нелинейных динамических систем”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2012, №1, 154.

3. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., “Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 55–58.

4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., “О стабилизации экономической системы асимптотическими методами С”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 243–245.

5. Воскресенский Е. В., “О стабилизации программного движения”, *Укр.мат.журнал*, **55**:11 (2003), 1450–1458.

6. Воскресенский Е. В., *О полиномиальных аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений*, СВМО, Саранск, 1998, 22 с.

7. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Из-во Саратовского университета, Саранск, 1990, 224 с.

The optimal stabilization of programmed motion for the absolutely uniform stability solutions

© T. F. Mamedova [4], D. K. Egorova [5] E. V. Desyaev [6]

Abstract. In this article the problem of optimal stabilization of programmed motion in the sense of absolutely uniform stability that distinguishes this statement from the classic problem when software motion is asymptotically stable is investigated.

Key Words: optimal stabilization program movement, absolutely uniformly bounded solutions

[4] Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru.

[5] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru.

[6] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; desyaev@rambler.ru

УДК 621.315.592

Использование кремния легированного золотом для определения формы оптического сигнала

© С. М. Мурюмин[1], А. Е. Никишина[2], Е. В. Никишин[3]

Аннотация. В статье приведены результаты численных исследований кинетики фотопроводимости при возбуждении полупроводника высокочастотными импульсами света произвольной формы. Кинетика фотопроводимости при выполнении условий $\tau_j\omega >> 1$ определяется зависимостью величины темпа генерации от времени и не зависит от времен жизни электронов и дырок. Это позволяет восстановить временную форму высокочастотного импульса света

Ключевые слова: Кинетика фотопроводимости, рекомбинационные центры, времена жизни электронов и дырок, восстановление сигналов

В работах [1, 2] исследована возможность восстановления зависимости интенсивности возбуждающего света от времени при освещении полупроводникового фотоприемника светом, интенсивность J которого меняется периодически с частотой ω $(J = J(\omega\, t))$. Необходимым условием является большая частота изменения интенсивности света ω, а именно: $\omega >> \max(\tau_n^{-1}, \tau_p^{-1})$. Моделирование было проведено для кремния легированного индием, через который при рассматриваемых уровнях инжекции осуществляется рекомбинация неравновесных носителей заряда.

В данной работе показано, что предложенный метод может быть осуществлен и при использовании фотоприемников с более сложными механизмами рекомбинации. При математическом моделировании кинетических процессов мы встречаемся с существенными нелинейностями в уравнениях (1.6) -(1.8). Нами рассмотрен случай рекомбинации электронов n и дырок p через глубокие центры, образующиеся при легировании кремния золотом. Золото в кремнии является амфотерной примесью. При рекомбинации через глубокие центры возникает необходимость учитывать их разные зарядовые состояния и разную глубину залегания в запрещенной зоне. Золото формирует донорный(Ev+0.35 eV; (0/+)) и акцепторный (Ec-0.55 eV; (-/0)) глубокие уровни [4], концентрации которых Nd и Na соответственно. В работе [5] показано, что в кремнии n-типа за эти уровни отвечают разные центры. При освещении будет изменяться функция fj ,определяющая вероятность нахождения на j центре электрона. При этом изменяется скорость рекомбинации неравновесных носителей; может происходить высвобождение электронов и дырок

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск.
[2] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; annikishina@yandex.ru.
[3] Доцент кафедры экспериментальной физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikishin57@mail.ru.

с глубоких центров.

Исследовались кинетические уравнения:

$$\begin{aligned}&\tfrac{dn}{dt}=g(\omega t)-N_a\sigma_{na}\left(n\left(1-f_a^-\right)-n_{1a}f_a^-\right)-\\&-N_d\sigma_{nd}\left(n\left(1-f_d^0\right)-n_{1d}f_d^0\right)-N_d\sigma_{nd}^m\left(nf_d^0-n_{1d}f_d^-\right)-\\&-A(np-n_i^2)-B_nn(np-n_i^2)-B_pp(pn-n_i^2)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{dp}{dt}=g(\omega t)-N_a\sigma_{pa}\left(pf_a^--p_{1a}\left(1-f_a^-\right)\right)-\\&-N_d\sigma_{pd}\left(pf_d^0-p_{1d}\left(1-f_d^0\right)\right)-N_d\sigma_{pd}^mpf_d^--\\&A(np-n_i^2)-B_nn(np-n_i^2)-B_pp(np-n_i^2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

здесь *g(ω t)* - темп генерации носителей заряда; *n1j и p1j* численно равны концентрации электронов и дырок, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушки; *Nj* –концентрация примесных центров*j* – типа; *σ nj* и *σ pj* – вероятности захвата электронов и дырок примесными центрами; *A* – коэффициент межзонной рекомбинации; *Bn*, *Bp* – коэффициенты Оже-рекомбинации. Темп генерации связан с интенсивностью:

$$g(\omega\cdot t)=k\cdot\beta\cdot(1-R)\cdot J(\omega\cdot t)\tag{1.3}$$

β – квантовый выход; k и R – коэффициенты поглощения и отражения света соответственно. В соотношении (1.1) первое слагаемое правой части описывает скорость межзонной генерации электронов при возбуждении полупроводника светом, интенсивность которого периодически меняется периодическими: второе и третье слагаемые описывают изменение концентрации электронов в зоне проводимости, обусловленное акцепторными и донорными центрами, соответственно. Четвертое слагаемое соответствует медленной реакции захвата электронов незаряженными донорными центрами. Учет данного механизма рекомбинации необходим при длительном возбуждении полупроводника светом. Пятое, шестое и седьмое слагаемые описывают межзонную рекомбинацию и межзонную Оже-рекомбинацию, роль которых становится существенной при больших уровнях возбуждения. Аналогичные слагаемые для дырок присутствуют в уравнении (1.2).

Вероятности нахождения акцепторного центра золота в состоянии Au^- и донорного в состояниях Au^0 и Au^- описываются уравнениями:

$$\frac{df_a^-}{dt}=\sigma_{na}\left(n\left(1-f_a^-\right)-n_{1a}f_a^-\right)-\sigma_{pa}\left(pf_a^--p_{1a}\left(1-f_a^-\right)\right),\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{df_d^0}{dt}=\sigma_{nd}\left(n\left(1-f_d^0\right)-n_{1d}f_d^0\right)-\sigma_{pd}\left(pf_d^0-p_{1d}\left(1-f_d^0\right)\right)-\\&-\sigma_{nd}^m\left(nf_d^0-n_{1d}f_d^-\right)+\sigma_{pd}^mpf_d^-\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\frac{df_d^-}{dt} = \sigma_{nd}^m \left(nf_d^0 - n_{1d}f_d^-\right) - \sigma_{pd}^m p f_d^- \tag{1.6}$$

Восстановление вида функции оптического сигнала осуществлялось по методике, описанной в работах [1, 2]. При больших частотах производная от проводимости пропорциональна переменной составляющей интенсивности света $\tilde{J}(\omega \cdot t)$, падающего на фоторезистор [1]:

$$\frac{d}{dt}j(\omega \cdot t) \approx e \cdot k \cdot \beta \cdot (1 - R) \cdot \tilde{J}(\omega \cdot t) \cdot (\mu_n + \mu_p) \cdot E, \tag{1.7}$$

Интенсивность падающего света представлена в виде $J(\omega \cdot t) =< J > +\tilde{J}(\omega \cdot t)$, здесь $< J >= \frac{1}{\prime\prime} \int_t^{t+T} J(\omega \cdot t)dt$ – среднее значение интенсивности света за период Т. Уравнения (1.1) - (1.7) анализировались численными методами. На рис. 1 представлены зависимости восстановленного по зависимости силы тока от времени оптического сигнала (кривые 2 - 5). Кривая 1 соответствует темпу генерации $g(\omega t)$, представленному в относительных единицах, величина которого $g(\omega t)$=1020(1 – $cos(\omega t)$) Концентрация донорных центров золота Nd=1015 см-3, концентрация равновесных электронов n =109 см-3. Для кривой 2 концентрация акцепторных центров золота равна Na=1017 см-3, для кривой 3 – Na=1016 см-3, для кривой 4– Na=1015 см-3, для кривой 5 – Na=1014 см-3.

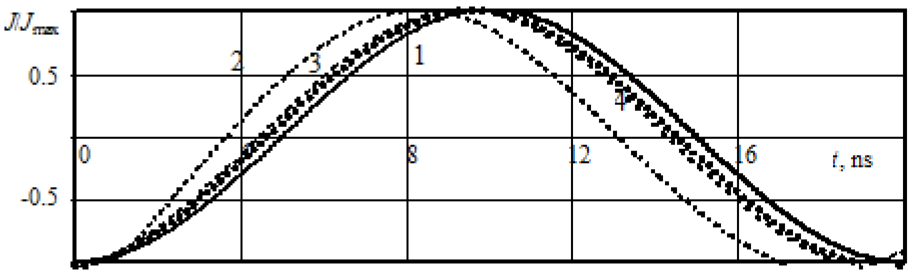


Рисунок **1.1**

Рис.1 Зависимости интенсивности света от времени: 1 - возбуждающий импульс; 2 - 4 - импульсы, восстановленные по зависимостям тока от времени

Область применимости предложенного метода характеризуется коэффициентом нелинейных искажений, величина которого рассчитывается по формулам:

$$K = \frac{1}{|c_1|}\sqrt{\sum_i |c_k|^2}, c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i_t'(\tau) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot \tau} d\tau, \tag{1.8}$$

Для кривой 2 $K = 0.10$, что недопустимо много; для кривой 3 и 4 K =0.0084 и K =0.0047 соответственно, что приводит к незначительным искажениям.

Анализ показывает, что для кривых 3 и 4 справедливы неравенства $\tau_n\omega > 1$ и $\tau_p\omega > 1$, для кривой 1 выполняются соотношения $\tau_n\omega \approx 1$ и $\tau_p\omega \approx 1$.

Таким образом, усложнение рекомбинационных процессов неравновесных носителей заряда в фоторезисторе принципиально не изменяет правило выбора частотных границ применимости метода восстановления формы оптического сигнала, предложенного в работах 1, 2.

Список литературы

1. Горюнов В.А., Гришаев В.Я., Никишин Е.В., “Кинетика фотопроводимости при возбуждении высокочасиотными импульсами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, 2012, № 4, 242 - 250.
2. Гришаев В.Я., Никишин Е.В., Пескова Е.Е., “Способ восстановления формы оптических сигналов с длительностью меньшей постоянной времени фотоприемника”, *Труды первой Российско-Белорусской научно-технической конф. (Нижний Новгород, Россия).*, **1** (2013), 42 - 45.
3. Милнс А., *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.
4. Lang D.V., H.G. Grimmeiss H.G., Meijer E., Jaros M., “Complex nature of gold-related deep levels in silicon”, *Phys. Rev.*, **22** (1980), 3917 - 3925.
5. Каражанов С. Ж., “Свойства точно компенсированных полупроводников”, *ФТП*, **34(8)** (2000), 909 - 916.
6. Савченко А.В., Горбань А.П., Костылев В.П., Соколовский И.О., “Квадратичная рекомбинация в кремнии и ее влияние на объемное время жизни”, *ФТП*, **41(3)** (2007), 290 - 294.
7. Денисов Б.Н., Никишин Е.В., “Исследования кинетики неравновесных носителей в полупроводнике по среднему значению фотопроводимости при периодическом оптическом возбуждении”, *ФТП*, **48**:52 (2014), 175 - 178.

The use of silicon alloyed with gold, to determine the shape of the optical signal

© S.M. Murjumin[4], A.E. Nikishina[5], E.V. Nikishin[6]

Abstract. In the article the results of numerical investigations of photoconductivity kinetics under the excitation of semiconductor by high-frequency pulses of arbitrary-shaped light are presented. The kinetics of photoconductivity under the conditions $\tau_j\omega >> 1$ is determined by the dependency of the value of the generate rate on time. It does not depend on the lifetimes of electrons and holes. It allows to reconstruct the time waveform of high-frequency pulse of light

Key Words: Photoconductivity kinetics, recombination centers, lifetimes of electrons and holes, signal reconstruction

[4] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P.Ogarev, Saransk.

[5] Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P.Ogarev, Saransk; annikishina@yandex.ru.

[6] Associate professor of Experimental Physics Chair, Mordovian State University after N.P.Ogarev, Saransk; nikishin57@mail.ru.

УДК 519.3:62-50

Приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях для квазилинейных уравнений с частными разностями первого порядка

© Т. К. Юлдашев [1] М. А. Довгий[2]

Аннотация. В данной работе предлагается методика приближенного решения квазилинейного уравнения в частных разностях первого порядка и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях. С помощью нелинейного дискретного аналога метода характеристик начальная задача сводится к изучению нелинейного суммарного уравнения. Далее используется метод последовательных приближений.

Ключевые слова: оптимальное управление, разностное уравнение, суммарное уравнение, метод последовательных приближений, минимизация функционала

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс в области D описывается квазилинейным разностным уравнением вида

$$\Delta_n u(n,m) + A\big(n,m,u(n,m)\big)\Delta_m u(n,m) =$$
$$= \alpha(n)\sigma(n) + f\big(n,m,u(n,m)\big) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(n,m)_{|n=n_0} = \varphi(m), \tag{1.2}$$

где целочисленные функции $A\big(n,m,u\big)$, $f\big(n,m,u\big)$ определены для всех $n \geq n_0$, целочисленная функция $\varphi(m)$ определена для $m \in \mathbb{Z}$, $\Delta_n u(n,m) = u(n+1,m) - u(n,m)$, $\Delta_m u(n,m) = u(n,m+1) - u(n,m)$, $\alpha(n)$ – целочисленная функция, определенная при $n \geq n_0$, $D \equiv D_N \times \mathbb{Z}$, $D_N \equiv \big\{n_0 \leq n \leq N\big\}$, а n_0, n, N – натуральные числа, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Управление $\sigma(n)$ суммируемо с квадратом и удовлетворяет неравенству

$$\big|\sigma(n)\big| \leq M_0 = const. \tag{1.3}$$

Качества управления характеризуются функционалом

$$J\big[\sigma\big] = \sum_{n=n_o}^{N-1} \sum_{m=-m_o}^{m_0-1} K(m)u^2(n,m) + \gamma \sum_{n=n_o}^{N-1} \sigma^2(n), \tag{1.4}$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru;

[2] Студентка института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

где $0 < \sum\limits_{m=-m_o}^{m_0-1} K(m) < \infty$, γ – действительное число, m_0 – достаточно большое натуральное число.

Уравнения вида (1.1) при нулевом управлении являются дискретными аналогами дифференциальных уравнений, которые встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точных (частных) решений квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка при конкретных случаях нелинейных функций, входящих в данное уравнение [1]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективными являются те методы, которой позволяют поставленную задачу заменить с эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления [2] - [5]. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используются широкий спектр разных методов (см., напр. [5] - [7]).

Задача. Найти такое состояние $u^\star(n,m)$ начальной задачи (1.1), (1.2) при заданной управляющей функции

$$\sigma^\star(n) \in Q \equiv \left\{\sigma^\star : \left|\sigma^\star(n)\right| \leq M_0,\, n_0 \leq n \leq N\right\},$$

что доставляет минимум функционалу (1.4).

2. Разрешимость начальной задачи (1.1), (1.2)

При фиксированных значениях управления $\sigma(n)$ начальная задача (1.1), (1.2) эквивалентна следующему суммарному уравнению [8]

$$u(n,m) \equiv \Theta(n,m;u) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu, m, u(\nu,m)\big)\right) + \\ + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu) + f\big(\nu, m, u(\nu,m)\big)\Big], \quad (2.1)$$

где m – целочисленный параметр.

Мы используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целочисленных функций, ограниченных по норме с положительным числом M; $Lip\Big\{L_{|u,v,\dots}\Big\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с положительным коэффициентом L.

В качестве нормы на множестве D для произвольной целочисленной функции $g(n,m)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|g(n,m)\| = \max\big\{|g(n,m)| : n \in D_N, m \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\varphi(m) \in Bnd(M_1) \cap Lip\left\{L_{1|m}\right\}$, $0 < L_1 = const$;
2. $f(n,m,u) \in Bnd(M_2) \cap Lip\left\{L_{2|u}\right\}$, $0 < L_2 = const$;
3. $A(n,m,u) \in Lip\left\{L_{3|u}\right\}$, $0 < L_3 = const$;
4. $\rho = \big(L_1L_3 + L_2\big)(N - n_0 - 1) < 1$.
Тогда суммарное уравнение (2.1) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$, *для которых выполняется условие (1.3), имеет единственное решение на множестве* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [8] - [11]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$u_0(n,m) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu, m, 0\big)\right) + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu) + f\big(\nu, m, 0\big)\Big], \quad (2.2)$$

$$u_{\mu+1}(n,m) = \Theta(n,m;u_\mu),\ \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

где m – целочисленный параметр.

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (2.2) мы получим следующую оценку

$$\big\|u_0(n,m)\big\| \leq M_1 + M_2(N - n_0 - 1). \quad (2.4)$$

В силу условий теоремы, с учетом (2.4) из (2.2) и (2.3) для первого приближения имеем оценку

$$\big\|u_1(n,m) - u_0(n,m)\big\| \leq$$

$$\leq L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \big\|A\big(\nu,m,u_0\big) - A\big(\nu,m,0\big)\big\| + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\big\|f\big(\nu,m,u_0\big) - f\big(\nu,m,0\big)\big\| \leq$$

$$\leq \big(L_1L_3 + L_2\big)(N - n_0 - 1)\big\|u_0(n,m)\big\| \leq (M_1 + M_2(N - n_0 - 1))\,\rho < M_1 + M_2(N - n_0 - 1). \quad (2.5)$$

Аналогично, в силу условий теоремы, для произвольного натурального числа μ из (2.3) по индукции получаем

$$\left\|u_{\mu+1}(n,m)-u_\mu(n,m)\right\| \leq$$

$$\leq L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| +$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| \leq$$

$$\leq \rho\left\|u_\mu(n,m)-u_{\mu-1}(n,m)\right\| < \left\|u_\mu(n,m)-u_{\mu-1}(n,m)\right\|. \tag{2.6}$$

Кроме того, для разности $u(n,m)-u_\mu(n,m)$ имеем оценку

$$\left\|u(n,m)-u_\mu(n,m)\right\| \leq \left\|u(n,m)-u_{\mu+1}(n,m)\right\| + \left\|u_{\mu+1}(n,m)-u_\mu(n,m)\right\| \leq$$

$$\leq L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)\right\| +$$

$$+L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| +$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)\right\| +$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u_\mu(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| \leq$$

$$\leq \rho\left\|u(n,m)-u_\mu(n,m)\right\| + \rho^\mu\left(M_1+M_2(N-n_0-1)\right).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$\left\|u(n,m)-u_\mu(n,m)\right\| \leq \frac{\rho^\mu\left(M_1+M_2(N-n_0-1)\right)}{1-\rho}. \tag{2.7}$$

Из оценок (2.4) - (2.6) следует, что оператор в правой части (2.1) является сжимающим. Следовательно, задача (1.1), (1.1) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$, для которых выполняется условие (1.3), имеет единственное решение на множестве D.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Приближенный расчет функционала качества в задаче оптимального управления

Так как $\rho < 1$, то из (2.7) следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \left\| u(n,m) - u_\mu(n,m) \right\| = 0.$$

С учетом последовательности функций (2.3) функционал (1.4) запишем в виде

$$J_\mu[\sigma] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m) u_\mu^2(n,m) + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \sigma^2(n). \tag{3.1}$$

В силу условий теоремы, из (2.7) и (3.1) получаем следующую оценку

$$\left| J[\sigma] - J_\mu[\sigma] \right| \le 2\beta \frac{\rho^\mu \left(M_1 + M_2(N - n_0 - 1)\right)^2 (N - n_0 - 1)}{1-\rho},$$

где $\beta = \sum\limits_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m) < \infty$.

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \left| J[\sigma] - J_\mu[\sigma] \right| = 0. \tag{3.2}$$

Пусть $\sigma^\star(n)$ – оптимальное допустимое управление в задаче. Тогда для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\left| \sigma^\star(n) - \sigma_\mu^\star(n) \right| \le q_\mu(n), \ \lim_{\mu\to\infty} q_\mu(n) = 0. \tag{3.3}$$

Рассмотрим следующие соотношения:

$$u^\star(n,m) \equiv \Theta\big(n,m;u^\star\big) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu,m,u^\star(\nu,m)\big)\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \Big[\alpha(\nu)\sigma^\star(\nu) + f\big(\nu,m,u^\star(\nu,m)\big) \Big], \tag{3.4}$$

$$u_0^\star(n,m) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu,m,0\big)\right) + \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left[\alpha(\nu)\sigma_0^\star(\nu) + f\big(\nu,m,0\big)\right], \tag{3.5}$$

$$u_{\mu+1}^\star(n,m) = \Theta\Big(n,m;u_\mu^\star\Big), \tag{3.6}$$

$$J_\mu[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m)\big(u_\mu^\star(n,m)\big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma^\star(n)\big)^2, \tag{3.7}$$

$$J_\mu[\sigma_\mu^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m)\big(u_\mu^\star(n,m)\big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma_\mu^\star(n)\big)^2. \tag{3.8}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. и (3.3). Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty} \big| J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star] \big| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (3.3) из (3.4)-(3.6) имеем оценку

$$\big\| u^\star(n,m) - u_\mu^\star(n,m) \big\| \le \frac{\rho^\mu \big[M_1 + \big(M_2 + q_\mu(n)\big)(N - n_0 - 1)\big]}{1-\rho}. \tag{3.9}$$

Далее, с учетом (1.3) и (3.9) из (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\big| J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star] \big| \le 2\Big\{ \beta \frac{\rho^\mu \big[M_1 + \big(M_2 + q_\mu(n)\big)(N - n_0 - 1)\big]^2}{1-\rho} +$$

$$+ \gamma M_0 q_\mu(n) \Big\} (N - n_0 - 1).$$

Из последней оценки следует, что справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{\mu\to\infty} \big| J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star] \big| = 0. \tag{3.10}$$

С учетом оценки (3.2) и соотношение (3.10) для функционалов

$$J[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m)\big(u^\star(n,m)\big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma^\star(n)\big)^2$$

и (3.8) получаем, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \big| J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star] \big| = \lim_{\mu\to\infty} \big| J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma^\star] \big| + \lim_{\mu\to\infty} \big| J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star] \big| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д., *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*, Физматлит, М., 2003, 416 с.

2. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.

3. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.

4. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.

5. Бутковский А. Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965, 474 с.

6. Рапопорт Э. Я., *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами*, Высшая школа, М., 2009, 680 с.

7. Юлдашев Т. К., "Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 78–89.

8. Yuldashev T. K., "On a first order quasilinear partial difference equation", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677–680.

9. Yuldashev T. K., "On a summery equation with weak nonlinear right-hand side", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95–98.

10. Yuldashev T. K., "On solvability and stability of solutions of linear integral and summary equations of first kind", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **17**:1 (2008), 41–56.

11. Yuldashev T. K., "On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation", *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83–88.

Approximate calculation of functionality of quality at known operating influences for quazilinear partial difference equation of the first order

© T. K. Yuldashev[3] M. A. Dovgiy[4]

Abstract. It is proposed in this paper a method of approximate studying the quasilinear partial difference equation of first order and approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. With the help of a nonlinear discrete method of characteristics the problem reduces to the study of nonlinear summary equation. Further, we use the discrete analog of the method of successive approximation.

Key Words: Optimal control, difference equation, summary equation, method of successive approximation, minimization of functional.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

[4] Student of Institute of Informatics and Telecommunication, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Краткие сообщения

УДК 517.956.2

Топологическая классификации диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными транзитивными множествами

© А. Н. Сахаров[1], Е. В. Трегубова[2]

Аннотация. Рассматриваются диффеоморфизмы поверхностей, имеющих в качестве неблуждающего множества объединение конечного числа нормально гиперболических окружностей. Описана взаимосвязь между динамикой таких диффеоморфизмов и топологией несущего многообразия. Получена топологическая классификация диффеоморфизмов из расматриваемого класса.

Ключевые слова: диффеоморфизм, аттрактор, репеллер, топологическая сопряженность, транзитивные инвариантные множества

В настоящей работе рассматривается задача топологической классификации диффеоморфизмов замкнутых поверхностей из класса G таких, что для каждого $f \in G$ выполняются следующие условия:

1. неблуждающее множество $NW(f)$ представляет собой дизъюнктное объединение конечного числа простых замкнутых кривых;

2. $NW(f)$ – нормально гиперболическое инвариантное многообразие[3] диффеоморфизма f.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru

[2] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru

[3] Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм компактного гладкого многообразия, $Df : TM \to TM$ – дифференциал f. f-инвариантное подмногообразие $N \subset M$ называется нормально гиперболическим, если ограничение на N касательного расслоения TM допускает разложение в сумму инвариантных подрасслоений, одно из которых – TN, а два других – устойчивое и неустойчивое расслоения, обозначаемые E^s и E^u, соответственно. Относительно некоторой римановой метрики на M ограничения Df на E^s должно быть сжатием, ограничение Df на E^u должно быть расширением, а ограничение на TN должно быть относительно нейтральным. Следовательно, существуют постоянные $0 < \mu^{-1} < \lambda < 1$ и $c > 0$ такие, что

$$T_N M = TN \oplus E^s \oplus E^u,$$

$$(Df)_x E^s_x = E^s_{f(x)} \text{ и } (Df)_x E^u_x = E^u_{f(x)} \text{ для всех } x \in N,$$

$$\|Df^n v\| \le c\lambda^n \|v\| \text{ для всех } v \in E^s \text{ и } n > 0,$$

$$\|Df^{-n} v\| \le c\lambda^n \|v\| \text{ для всех } v \in E^u \text{ и } n > 0,$$

и

$$\|Df^n v\| \le c\mu^{|n|} \|v\| \text{ для всех } v \in TN \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

3. сужение некоторой степени диффеоморфизма f на любую кривую из $NW(f)$ является транзитивным гомеоморфизмом окружности с одним и тем же иррациональным числом вращения.

Условие нормальной гиперболичности гарантирует, что неблуждающее множество сохраняется при малых возмущениях f [1], [2]. Однако возмущенный диффеоморфизм не обязательно принадлежит классу G, так как условие 3 для него может не выполняться.

Решение задачи классификации основано на методах работы [3], посвященной решению аналогичной задачи для А-диффеоморфизмов 3-многообразий с двумерными базисными множествами. При этом удается показать, что классификация диффеоморфизмов из класса G сводится к классификации транзитивных диффеоморфизмов окружности.

Напомним, классификацию гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения. Пусть $\chi : S^1 \to S^1$ – диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения α. Согласно теореме А. Пуанкаре существует непрерывное отображение $p : S^1 \to S^1$, переводящее χ в поворот на угол α[4]. Если диффеоморфизм χ минимален, то отображение p – гомеоморфизм и число вращения является полным топологическим инвариантом. В противном случае минимальным множеством χ будет канторово множество C, а полным топологическим инвариантом является число вращения и множество $T = p(I)$, где I – множество достижимых точек C [4].

Пусть $f : M \to M$ – диффеоморфизм из класса G на замкнутой поверхности M. Существование такого диффеоморфизма позволяет уточнить топологию многообразия M.

Предложение 1.1. *Для любого $f \in G$ верно следующее: замыкание каждой компоненты связности множества $V_f = M \setminus NW(f)$ гомеоморфно $S^1 \times [0,1]$.*

В силу этого утверждения многообразие M гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $S^1 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где $\tau : S^1 \to S^1$ – некоторый гомеоморфизм.

Лемма 1.1. *Фактор-пространство M_τ гомеоморфно $\mathbb{T}^2$, если гомеоморфизм τ сохраняет ориентацию; бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$, если τ меняет ориентацию.*

В итоге получаем следующую теорему, описывающую топологию несущего многообразия диффеоморфизма $f \in G$.

[4] Отображение p называется канторовской функцией.

Теорема 1.2. *Пусть многобразие M допускает диффеоморфизм из класса G. Тогда M гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$.*

Построим модельные диффеоморфизмы из класса G на торе $\mathbb{T}^2$. Для этого сначала построим модели грубых преобразований окружности S^1, представляя её как факторпространство $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $\pi : \mathbb{R} \to S^1$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ взаимно просто с k, построим стандартного представителя φ_+ с параметрами n, k, l в множестве грубых сохраняющих ориентацию преобразований окружности. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- с параметром q в множестве грубых меняющих ориентацию преобразований окружности.

Для этого введем следующие отображения:
$\tilde{\psi}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\tilde{\eta}_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\eta}_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\tilde{\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\eta}(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\eta}_{k,l}\tilde{\psi}_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \tilde{\eta}\tilde{\psi}_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Таким образом,
$\tilde{\varphi}_+(r) = \tilde{\psi}_{n\cdot k}(r) - \frac{l}{k}$ и $\tilde{\varphi}_+(r + \nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$;
$\tilde{\varphi}_-(r) = -\tilde{\psi}_q(r)$ и $\tilde{\varphi}_-(r + \nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$.

Следовательно следующие диффеоморфизмы корректно определены: $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : S^1 \to S^1, \sigma \in \{+, -\}$.

Представим теперь S^1 как множество точек $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Для иррационального числа $\alpha \in (0,1)$ обозначим через $\varphi_\alpha : S^1 \to S^1$ диффеоморфизм, заданный формулой $\varphi_\alpha(z) = e^{2\pi\alpha}z$.

Определим диффеоморфизм $\psi_\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой $\varphi_\sigma(z_1, z_2) = (\varphi_\alpha(z_1), \varphi_\sigma(z_2))$, где $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим Ψ_+ (Ψ_-) множество диффеоморфизмов ψ_+ (ψ_-). Положим $\Psi = \Psi_+ \cup \Psi_-$.

Каждый диффеоморфизм из класса Ψ_+ характеризуется набором параметров $\{\alpha, n, k, l\}$, каждый диффеоморфизм из класса Ψ_- характеризуется набором параметров $\{\alpha, q\}$.

Следующий результат дает топологическую классификацию модельных диффеоморфизмов.

Теорема 1.3.

1. Два диффеоморфизма $\psi_+; \psi'_+ \in \Psi_+$ с параметрами $\{\alpha, n, k, l\}; \{\alpha', n', k', l'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha', n = n', k = k'$, и либо $l = l'$, либо $l = k' - l'$.

2. Два диффеоморфизма $\psi_-; \psi'_- \in \Psi_-$ с параметрами $\{\alpha, q\}; \{\alpha', q'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha'$ и $q = q'$.

3. Не существует топологически сопряженных диффеоморфизмов $\psi_+ \in \Psi_+$ и $\psi_- \in \Psi_-$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Каждый диффеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму из класса Ψ.*

Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа была поддержана грантом РФФИ № 12-01-00672a.

Список литературы

1. J. Palis, F. Takens, "Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems", *Topology*, **16** (1977), 335-345.

2. R. Mané, "Persistens manifolds are normally hyperbolic", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 261–283.

3. В.З. Гринес, Ю.А. Левченко, О.В, Починка, "О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами", *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.

4. N. Markley, "Homeomorphisms of the circle without periodic points", *Proc. London Math. Soc.*, **20**:3 (1970), 688–69.

Topological classification of surface diffeomorphisms with one-dimensional invariant transitive sets

© **A. N. Sakharov[5], E. V. Tregubova[6]**

Abstract. We consider diffeomorphisms of surfaces having as non-wandering set $NW(f)$ finite number of normally hyperbolic circles. Describe the relationship between the dynamics of such diffeomorphisms and supporting manifold topology. The topological classification is obtained for the considered class of diffeomorphisms

Key Words: diffeomorphism, attractor, repeller, topological conjugacy, transitive invariant sets

[5] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru

[6] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

УДК 517.9

Асимптотическая эквивалентность дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений

© Е. А. Черноиванова[1]

Аннотация. В данной статье решается проблема классификации дифференциальных уравнений на основе асимптотических свойств решений, кроме того, исследуются дифференциально-функциональные уравнения, для которых уравнениями сравнения являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дифференциально-функциональные уравнения, асимптотические свойства решений

Классификация дифференциальных уравнений на основе асимптотических свойств решений — методологическая основа многих асимптотических методов интегрирования. В негладком анализе такую основу имеют все асимптотические методы. Выбор отношения эквивалентности и уравнения сравнения - главные задачи, решение которых на определенном классе уравнений составляет суть конкретного асимптотического метода. Однако большинство работ (особенно в негладком анализе) по классификациям относится к классам уравнений, которые в качестве фазового пространства имеют множество $D = [T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $T_0 \in \mathbb{R}$.

Если же уравнения определены на подмножествах множества D, то обычные методы выбора уравнения сравнения здесь непригодны. В данной статье решается эта проблема, кроме того, здесь исследуются дифференциально-функциональные уравнения, для которых уравнениями сравнения являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пусть дифференциально-функциональное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, A_t y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $A_t : C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n) \to D_m$, $D_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$,
$f \in C([T_0, +\infty) \times D \times S_c \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$,
$g \in K([T_0, +\infty) \times D, D_m, S_c \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$ — класс функций, измеримых по t и непрерывных по остальным аргументам, D — область, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $S = \{z : z \in R^{m0}, ||z|| \leq C, 0 < C < +\infty\}$, $\varphi \in C^{(1,0,0)}([T_0, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], S_c)$; $\lambda_*(\gamma, \varepsilon) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, \gamma, \varepsilon)$ для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и всех $\gamma \in \mathbb{R}^n$, при всех $T_0 \leq t < +\infty$, $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существуют ненулевые частные производные $f_y, f_\lambda(\lambda = \varphi(t, y, \varepsilon))$, локально

[1] Доцент кафедры информационных технологий и математики, АНОО ВПО ЦС РФ РУК «Саранский кооперативный институт» (филиал), г. Саранск

удовлетворяющие условию Липшица. При $C = +\infty$, $\lambda_*(\gamma, \varepsilon) = \infty$ будем считать, что $\lim_{k\to+\infty} f(t, y, \varphi(t_k, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, \gamma, \varepsilon)$, $f_1 \in C([T_0, +\infty) \times D \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$, $f(t, y, \lambda_*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, y, \varepsilon)$, $T_0 \le t < +\infty$, $\gamma, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Требуется на множестве $T_0 \le \tau \le t < +\infty$ с точностью ε_1 найти решение $y(t) = y(t : \tau, \gamma, \varepsilon)$ уравнения (1.1) при всех достаточно малых ε. Считая функции g, φ в некотором смысле малыми, будем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda_*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) \tag{1.2}$$

рассматривать в качестве уравнения сравнения. В эту схему укладывается классический метод усреднения. Более того, рассматривая для конкретного уравнения различные представления вида 1.1, можно получать различные уравнения сравнения и появляется возможность выбора простейшего из них. Будем считать, что в дальнейшем все выше перечисленные условия для уравнений (1.1) и (1.2) всегда выполняются.

В зависимости от выбора оператора A уравнение (1.1) может быть либо уравнением с запаздывающим аргументом, либо каким-нибудь другим дифференциально-функциональным уравнением. Например, уравнение (1.1) может иметь вид:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, y(t - t_0), \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, \int\limits_0^t G(t, s) y(s) ds, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon).$$

Будем говорить, что уравнения (1.1) и (1.2) на множестве $\Omega \subseteq D$ асимптотически эквивалентны относительно решений (P), определенных при достаточно малом ε_0 и всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ при $t > \tau$, принадлежащих множеству Ω, если для каждого решения из (P) уравнения (1.1) при достаточно малом ε_0 и при всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, найдется решение из (P) уравнения (1.2) такое, что разность между ними стремится к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной t, и, наоборот: для каждого решения из (P) уравнения (1.2) при достаточно малом ε_0 и всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ найдется решение из (P) уравнения (1.1) такое, что выполняется то же асимптотическое соотношение. В качестве решений (P) уравнений (1.1) и (1.2) будем рассматривать решения $z(t)$, $t \ge \tau$ такие, для которых существуют такие числа $\alpha > 0$, зависящие от решения $z(t)$, что множество $z : ||z - z(t)|| \le \alpha \subset \Omega$ при всех $t \ge \tau$ и всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, при достаточно малом ε_0.

К первоначальной задаче добавим задачу об асимптоматической эквивалентности уравнений (1.1) и (1.2) на множестве Ω.

Для решения этих задач понадобится вспомогательное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon),$$

которое определено при значениях параметров, принадлежащих вышеуказанным множествам.

Пусть $x(t) = x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)$ — решение уравнения (1.2), $x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) = \gamma$, $y(t)$ — решение уравнения (1.1), $X_T(t) = x(t : T, y_T(T), \varphi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (1.2), $y_T(T) = x(T : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) = x(T, \lambda^*)$, $T \geq \tau \geq T_0$, $x(t : \tau, \gamma, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (3).

Будем говорить, что выполняется условие (A), если:

A_1. Для любой ограниченной функции $y \in C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ оператор $A_t(y)$ непрерывен по $t \in [\tau, +\infty)$;

A_2. Для любого $\varepsilon > 0$, для всех τ_1 существует $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_1) > 0$ такое, что как только $z_1, z_2 \in S$, S — подмножество ограниченных вектор-функций из $C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$, $||z_1 - z_2|| < \delta$, неравенство $||A_t z_1 - A_t z_2|| < \varepsilon$ справедливо для всех $t \in [\tau, \tau_1]$.

Будем говорить, что выполняется условие (B), если для произвольных $t_0 \geq \tau$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и для произвольного $x_0 \in \Omega$ решение $x(t : t_0, x_0, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon)$ существует для всех $t \in [\tau, t_0]$ и имеет значения в D.

Будем говорить, что выполняется условие (C), если для любой непрерывной функции $z(t)$ со значениями в Ω при $t \geq \tau$ $\int\limits_{\tau}^{+\infty} ||H_1(t, s, z(s), \varepsilon)|| ds \leq I(t, \varepsilon)$, $I(t, \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $I(t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

Не умаляя общности, предположим, что $I(t, \varepsilon)$ непрерывная по совокупности t, ε и невозрастающая по каждой из переменных функция.

Теорема 1.5. *При условиях (A), (B), (C) уравнения (1.1) и (1.2) асимптотически эквивалентны на множестве Ω относительно множества решений (P), если для любого решения $x(t) \in (P)$ и любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\lim_{T \to +\infty} \sup ||x(t : T, y_T(T), \varphi(T, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) - x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)|| = 0.$$

Доказательство теоремы проводится на основании принципов Шаудера и Арцела. Рассматривается множество $D_T = \{z \in S, z(t) \in \Omega : ||z(t) - x_T(t)|| \leq d, \tau \leq t \leq T\}$ и оператор $L : D_T \to S$,

$$Lz(t) = \begin{cases} x_T(t) - \int\limits_t^T H_1(t, s, z(s), \varepsilon) ds, & \tau \leq t \leq T, \\ x_T(t), & t > T, \end{cases}$$

для которого доказывается существование неподвижной точки, то есть

$$Lz(t) = z(t),$$

и $z_T(t)$, $\tau \leq t \leq T$, удовлетворяет уравнению (1.1).

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, изд-во Сарат. ун-та, Саран. Фил., 1990, 224 с.

2. Черноиванова Е. А., "Математические модели электрических цепей с диодами и методы их исследования", *Математическое моделирование*, **7**:5 (1995), 68.

3. Черноиванова Е. А., "Математическая модель для расчета плановых показателей приема в ВУЗ", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 119–122.

Asymptotic Equivalence Of Differential And Differential-Functional Equations.

© E. A. Chernoivanova[2]

Abstract. In this article we solve the problem of classification of differential equations on the basis of asymptotic properties of the solutions, in addition, we investigate the differential-functional equations, for which equations are ordinary differential equations.

Key Words: differential equations, differential-functional equations, asymptotic properties of solutions

[2] Associate Professor of information systems and mathematics Autonomous non-profit educational organization of higher professional education of the Russian Central Union «The Russian University of cooperation» Saransk cooperative Institute (branch)

УДК 517.929

Задача исследования устойчивости интегральных многообразий

© А. В. Зубов[1], С.В. Зубов[2], И.С. Стрекопытов[3], Н.Н. Учватова[4]

Аннотация. В статье рассмотрены новые методы исследования устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены определения интегрального многообразия, положительной и отрицательной определенности функции.

Ключевые слова: автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость по Ляпунову, интегральное многообразие.

1. Введение

При компьютерном моделировании динамики управляемых систем чрезвычайно важным является вопрос о том, как исследовать поведение системы при различных начальных данных. Можно, естественно, применять численное интегрирование для различных наборов начальных данных, принадлежащих некоторому множеству. Это приводит к значительным и даже неограниченным вычислительным затратам. Поставим вопрос: возможно ли, предварительно вычислив некоторый фиксированный набор решений, сделать выводы о поведении целого множества решений, множество начальных данных которых представляет компактное множество?

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = O(X), \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\star$ - вектор фазового состояния системы, $O(X)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Пусть для системы (2.1) множество M, являющееся пересечением k поверхностей:

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.2}$$

. . . .

[1] Профессор кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru

$$\Phi_k(x_1,\ldots,x_n) = 0,$$

является интегральным многообразием, т.е. из $X_0 \in M$ следует $X(t, X_0) \in M$ при $t \geq 0$, где $X(t, X_0)$ - решение (2.1), удовлетворющее условию $X = X_0$ при $t = 0$. Будем называть множество (2.2) *равновесным режимом системы* (2.1). Пусть векторы $b_j = \nabla\Phi_j / \|\nabla\Phi_j\|$ $(j = 1,\ldots,k)$ определены и линейно независимы в каждой точке M. Построим в каждой точке $m \in M$ ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$, и выберем в нем произвольный ортонормальный базис $b_{k+1},\ldots,b_n$. Пусть векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора X в каждой точке M. Пусть $\rho(X, M)$ - расстояние от точки X до множества $M, S(M,\delta)$ - множество точек X таких, что $\rho(X, M) < \delta$. Введем в рассмотрение P_m - нормальную к M k - мерную плоскость, определяемую уравнениями

$$(X - m, b_s|_{X=m}) = 0,\, S = k+1,\ldots,n; \tag{2.3}$$

P_m проходит через точку $m \in M$.

Рассмотрим систему n уравнений (2.2), (2.3). Применим теорему о неявной функции. Рассмотрим функциональный определитель этой системы относительно компонент вектора m. Если Якобиан системы $n-k$ уравнений (2.3) относительно компонент вектора $m = (m_1,\ldots,m_{n-k})^\star$ отличен от нуля на M, то в некоторой окрестности M существует функция $m = m(X)$, непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора X.

Введем новую систему координат $y_1,\ldots,y_n$ с центром в точке $m \in M$ и ортами $b_1,\ldots,b_n$. Матрицу перехода обозначим B. Получим соотношения

$$X = m(X) + BY,\, Y = B^{-1}(\dot{X} - m(X)). \tag{2.4}$$

Отметим, что $y_{k+1} \equiv \ldots \equiv y_n \equiv 0$. Это следует из (2.3), (2.4). Составим систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют переменные $y_1,\ldots,y_k$. Из (2.4), (2.1) имеем

$$\dot{Y} = B^{-1}(-\dot{B}Y + O(Y) - \frac{D_m}{DX}O(X)). \tag{2.5}$$

Здесь $\frac{D_m}{DX} = \frac{D(m_1,\ldots,m_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} = \{\frac{\partial m_i}{\partial x_j}\}$, $i, j = 1,\ldots,n$.

Определение 2.1. *Равновесный режим M называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) < \delta$ будет $\rho(X(t, X_0), M) < \varepsilon$ для любого $t \geq 0$. Устойчивый режим называется асимптотически устойчивым, если δ можно выбрать так, чтобы выполнялось $\rho(X(t, X_0), M) \to_{t\to+\infty} 0$.*

Система (2.1), (2.5) имеет интегральное многообразие

$$Y = 0,\ \Phi_j(X) = 0,\ j = 1, \ldots, k. \tag{2.6}$$

О п р е д е л е н и е 2.2. *Интегральное многообразие* (2.6) *системы* (2.1), (2.5) *называется устойчивым по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$ *такое, что при* $\|Y_0\| < \delta$ *будет* $\|Y(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon$ *при* $t \geq 0$ *для всех* $X_0 \in E_n$. *Если к тому же* δ *можно выбрать так, что выполняется* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $X_0 \in E_n$, *многообразие* (2.6) *называется асимптотически устойчивым по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X.

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы равновесный режим системы* (2.1) *был устойчив (асимптотически устойчив), необходимо и достаточно, чтобы семейство* (2.6) *было устойчиво (асимптотически устойчиво) по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть равновесный режим (2.2) системы (2.1) устойчив (асимптотически устойчив). Тогда по определению, пользуясь соотношениями (2.4), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при выполнении условия $\rho(X_0, M) = \|BY_0\| < \delta\sqrt{n}$ будет выполняться

$$\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| \leq \varepsilon\sqrt{n}\, \text{РїСЂРё}\, t \geq 0$$

$$(\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| \to 0\, \text{РїСЂРё}\, t \to \infty),$$

т.е. имеем устойчивость (асимптотическую устойчивость) семейства (2.6) относительно V равномерно по X, так как X не входит в оценки выражений $\|BY_0\|$, $\|BY(t, Y_0, X_0)\|$.

Достаточность. Пусть семейство (2.6) устойчиво (асимптотически устойчиво) по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X. Тогда из (2.4) имеем, что $\forall\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) = \|BY_0\| < \delta\sqrt{n}$ будет выполняться

$$\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon\sqrt{n}\, \text{РїСЂРё}\, t \geq 0$$

$$(\rho(X(t, X_0), M) \to 0)\, \text{РїСЂРё}\, t \to \infty),$$

т.е. режим (2.2) системы (2.1) устойчив (асимптотически устойчив).
Доказательство закончено.

Определение 2.3. *Функция $V(Y,X)$ называется положительно определенной по отношению к компонентам вектора Y равномерно по X, если выполнены следующие условия:*

1) $V(Y,X)$ задана при $X \in E_n$, $\|Y\| < \alpha$ вещественная и непрерывная, $V(0,X)=0$, α - некоторая положительная постоянная.

2) для достаточно малого $C_2 > 0$ можно указать такое $C_1 > 0$, что при $\|Y\| > C_2$ будет $V(Y,X) > C_1$ при $X_0 \in E_n$.

Теорема 2.2. *Если существует функция $V(Y,X)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $V(Y,X)$ положительно определенная по отношению к компонентам вектора Y равномерно по X;

2) функция $V(Y,X) \to_{Y\to 0} 0$ равномерно по отношению к $X_0 \in E_n$;

3) полная производная функции $V(Y,X)$ в силу системы (2.4)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\dot{Y} = W(Y,X)$$

непрерывна и неположительна; то многообразие (2.2) системы (2.1) будет устойчивым.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим сферу $\|Y\| = \varepsilon$. Найдем наименьшее значение $V(Y,X)$, $X_0 \in E_n$ на этой сфере. Это, очевидно, можно сделать в силу условия 1). Пусть при $\|Y\| = \varepsilon$, $X_0 \in E_n$

$$inf V(Y,X) = \omega.$$

В силу непрерывности $V(Y,X)$ существует $\delta > 0$ такое, что $V(Y,X) < \omega$ для $\|Y\| < \delta$, $X_0 \in E_n$. Покажем, что это δ отвечает ε в определении 2.2.. Пусть $\|Y\| < \delta$. Тогда $V(Y_0,X_0) < \omega$ при $X_0 \in E_n$, и так как V не возрастает в силу условия 3), то

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| < \delta \,\text{при всех}\, t \geq 0, X_0 \in E_n.$$

Следовательно,

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| < \varepsilon \,\text{при всех}\, t \geq 0,\; X_0 \in E_n,$$

Ибо в противном случае существует $T > 0$ такое, что $\|Y(T,Y_0,X_0)\| = \varepsilon$. Тогда $V(Y(T,Y_0,X_0), X(T,Y_0,X_0)) \geq \omega$. Полученное противоречие показывает, что при выполнении условий теоремы интегральное многообразие (2.6)

устойчиво по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X. Следовательно, по теореме 2.1., равновесный режим (2.2) системы (2.1) устойчив.
Доказательство закончено.

Теорема 2.3. *Если существует функция $V(Y, X)$, удовлетворяющая 1) и 2) теоремы 2.2., и функция $W(Y, X)$ является отрицательно определенной по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X, то равновесный режим* (2.2) *системы* (2.1) *асимптотически устойчив.*

Доказательство. Покажем, что

$$\|Y(t, Y_0, X_0)\| \to_{X_0 \in E_n} 0 \,\text{при}\, t \to \infty$$

т.е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $T(\varepsilon)$:

$$\|V(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon \,\forall t \geq T(\varepsilon),\, \forall X_0 \in E_n.$$

Действительно, по заданному ε по теореме 2.2. можно найти δ ($\delta < \varepsilon$), удовлетворяющее определению устойчивости 2.2.. При этом возможны два случая:

1) существует T такое, что

$$\|Y(T, Y_0, X_0)\| < \delta \,\text{при}\, \|Y_0\| < \delta, X_0 \in E_n;$$

следовательно,

$$Y(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon \,\forall t \geq T,\, \forall X_0 \in E_n;$$

2) не существует такого T, т.е. $\forall t > 0$ всегда будет

$$\|Y(t, Y_0, X_0)\| \geq \delta.$$

Во втором случае, в силу условия 3) имеем, что функция W является положительно определенной относительно компонент вектора Y равномерно относительно компонент вектора X, т.е. $-W \geq \alpha > 0$. Следовательно, всегда

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$V(Y(t, Y_0, X_0), X(t, Y_0, X_0)) \leq -\alpha t + V(Y_0, X_0).$$

Правая часть этого неравенства с ростом t стремится к $-\infty$, а функция V удовлетворяет неравенству

$$V(Y(t,Y_0,X_0),X(t,Y_0,X_0)) \geq \beta > 0,\ \|Y(t,Y_0,X_0)\| \geq \delta > 0.$$

Таким образом, возможен лишь случай 1), а тогда в силу теоремы 2.1. равновесный режим (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчив. Доказательство закончено.

Замечание 2.1. *Из* (2.4) *мы имеем* $Y = B^{-1}(X - m(X)) = \Phi(X)$. *В некоторых случаях можно выразить* X *через* Y *в формулах* (2.5). *Это будет возможно, например, когда функции от* X *в правой части* (2.5) *являются функциями от* $\Phi(X)$. *Тогда мы получим систему*

$$\dot{Y} = G(Y), \tag{2.7}$$

где

$$G(Y) = B^{-1}(X(Y))(-\dot{B}Y + O(X(Y))) - \frac{D_m}{DX}(Y)O(X(Y)).$$

Теорема 2.4. *Для того чтобы равновесный режим* (2.2) *системы* (2.1) *был устойчив (асимптотически устойчив), необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы* (2.7) *было устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть равновесный режим устойчив (асимптотически устойчив). Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $X_0 \in S(M,\delta)$ выполнено $X(t,X_0) \in S(M,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$ для всех $t \geq 0$ $(\rho(X(t,X_0),M) \to_{t\to\infty} 0)$. Из соотношений (2.4) следует, что

$$X_0 - m_0 = B_0Y_0,\ \|Y_0\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Интегральная кривая системы (2.7) определяется формулой

$$Y(t,Y_0) = B^{-1}(X(t,X_0) - m(X(t,X_0))).$$

Следовательно, при $\|Y_0\| < \delta\sqrt{n}$ выполняется

$$\|Y(t,Y_0)\| < \varepsilon \quad (\|Y(t,Y_0)\| \to_{t\to\infty} 0).$$

Достаточность. Пусть нулевое решение устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову). Тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|Y_0\| < \delta$ будем иметь $\|Y(t,Y_0)\| < \varepsilon\sqrt{n}$ для $t \geq 0$

($\|Y(t, Y_0)\| \to_{t\to\infty} 0$). Тогда, выбрав X_0 так, чтобы Y_0 в равенстве $Y_0 = B^{-1}(X_0 - m_0)$ удовлетворяло неравенству $\|Y_0\| < \delta$, будем иметь из формулы $X(t, X_0) - m(X(t, X_0)) = BY(t, Y_0)$, что $\rho(X(t, X_0), M) < \varepsilon$ при $t \geq 0$ ($\rho(X(t, X_0), M) \to_{t\to\infty} 0$).
Доказательство закончено.

3. Выводы

Показано, что задача об устойчивости стационарного интегрального многообразия сводится к задаче об устойчивости по части переменных нулевого решения специально построенной системы дифференциальных уравнений и дается метод ее построения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. №–10-08-000624).

Список литературы

1. С.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.

2. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.

3. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, *Динамаическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.

4. И.В.Зубов, Н.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб., 2012, 322 с.

5. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.

The task of investigation stability integral poly measures

© A. V. Zubov[5], S. V. Zubov[6], I. S. Zubov[7], N. N. Uchvatova[8]

Abstract. In article is looks the new methods of investigation stability systems ordinary differential equations. Is bring the definition of integral multitudes, positive and negative clarity of function.

Key Words: autonomous system of ordinary differential equations, Lyapunov stability, integral manifold

[5] Professor of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[6] Docent of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[7] Postgraduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[8] Docent of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

The task of definition minimum number controlling actions

© **A. V. Zubov**[1], **S.V. Zubov**[2]

Annotation. For linear stationary control systems is solve the task of definition minimum number controlling actions (entrances), with that open system one can fully controlling. Giving result is reduce on linear systems of observation like that in work too is solve the task of definition minimum number exists, by near open system one can is make fully observed.
Key words: vector of control, observation, synthesis, number of entrances and exits, structure, aggregate, coefficient, multiple

1. Introduction

With building system controlling and observation, so that solutions of tasks synthesis systems of control often is appear the task of minimization number entrances and exists this systems like so that this systems were fully controlling and observed. With building of systems control and observation, and also solutions the tasks synthesis control often is arise task minimization of number entrances and exits this systems, so that this systems was fully controlled and observed. Is put on the task measures open system (measures matrix A)

$$\dot{X} = AX + F(t), \tag{1.1}$$

that simply is define number p minimum entrances, with that exclusive system

$$\dot{X} = AX + BU + F(t), \tag{1.2}$$

one can is make fully controlling, way of choose corresponding to matrix B fully rank, i.e. the task of structure minimization system controlling. The task similar family can be is arise as with work system controlling, so with synthesis this systems. Is looking for also double task, i.e. the task of search measures open systems (measures matrix)

$$\dot{X} = AX, \tag{1.3}$$

that simply is define the number p minimum exits, with that system $\dot{X} = AX$, $Y = CX$ one can is make observed, the way of choose corresponding to matrix C fully rank. The results giving in work is allow to find all aggregate of systems controlling (system observed), by that is take place fully controlling (observation) and possessing with this minimum size. Besides they is give an opportunity to estimate excess al-ready existing of control and observation. As distinct from

[1] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[2] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

criteria Kalmana proposed approach is allow to look of problem fully control (observation) yet on stage of foundation system control (observation).

2. The structure minimization of system control

Is looking of closed stationary control system (1.2), when A and $B = \{B_1, \ldots, B_m\}$ constant matrixes of size $(n \times n)$ and $(n \times m)$; $U = (u_1, \ldots, u_m)^T$ - vector of control $u_i \in L_2[0,T]$, $(i = \overline{1,m})$; $F(t) \in KC[0,T]$ - piece-unbracing off vector of function defined on interval $[0,T]$.

Is know (criteria Kalmana), that in order to on interval $[0,T]$ system (1.2) were fully control necessary and sufficiently, that rank of matrix $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ were equivalent n, i.e. aggregate vectors $B_i, AB_i, \ldots, A^{n-1}B_i$, $i = \overline{1,m}$ is contains n linear independent.

It places the task of search minimum number p controlling actions, with that open system (1.1) may be to make fully controlling, the way of choose corresponding matrix $B = \{B_1, \ldots, B_p\}$ size ($n \times p$), i.e. the task of minimization of structure system control, with that closed system (1.2) will be fully control.

On practice for definition minimum number p entrances of control system usually is employs following results.

T h e o r e m 2.1. *[1]. Minimum number p entrance control system equal number in trivial invariant numerous of matrix A, that is defines on formulas:*

$$I_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda\varepsilon\varepsilon)},\ I_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \ldots, I_p(\lambda) = \frac{D_p(\lambda)}{D_{p-1}(\lambda)}, D_{p-1}(\lambda) \equiv 1.$$

when $D_j(\lambda)$ - the large common divisor (LCD) all minor keys j order of characteristical matrix $\lambda E - A$ (in $D_j(\lambda)$ the oldest coefficient always is choose equal one).

R e m a r k 2..1 *Indifficultly to see, that for building in trivial invariant polynomials of matrix A on giving over formulas is demands to find all characteristic multinomials of determines j order $j = 1\bar{.}p$ characteristic matrix $E - A$ and it is finds they LCD. For this is urges in symbol case is builds $C_n^j \times C_n^j$ this polynomials and it is finds they LCD, with that it's no necessary to forgets, that all conditions is produces in symbol case. If it's take $n = 10$, or $j = 5$, else number of polynomials, by that it's necessary to finds LCD $\approx 10^{10}$. All that is show, that for systems sufficiently large order that approach isn't receive [3].*

R e m a r k 2..2 *Another approach is allows to realize of building in trivial invariant polynomials of matrix A is appears reduction characteristic matrix*

$\lambda E - A$ to matrix diagonal appearance $S(\lambda) = P(\lambda)(\lambda E - A)Q(\lambda)$ with help right and left element operation, it's not changes characteristic polynomial this matrix, so that diagonal elements giving matrix $S(\lambda)$ is introduces itself searching in trivial invariant polynomials. By this approach, for building diagonal matrix $S(\lambda)$ also it's demands sufficient large number symbol sub traction, that by presence mistake of district may be leads to untrue results [3].

Remark 2..3 *If it's use bring over result for building all multitude of matrix B rank p, by near the system* (1.2) *is appears fully control, that for this necessary to build uncrossing bases answering in trivial invariant polynomials $I_j(\lambda)$, $j = \overline{1,p}$ to organize invariant subspace T_j. By way of columns of matrix B necessary is choose vectors $B_j \in T_j$, so that $I_j(A)B_j \neq 0$, $j = \overline{1,p}$. This task highly hard to algorithms, and she is demands sufficiently quantity of destructions [3].*

Under it shall be proposes more simple approach by definition minimum number p entrance of control system and by algorithm of building systems control minimum structure, by near the system (1.2) is appears fully control.

Definition 2..1 *It is call characteristic fully control of system* (1.2) *(system* (1.1)*) minimum number of control influences, by that closed system* (1.2) *one can to make fully control, by way of choose corresponding matrix B fully rank. Some times, for brevity, it shall be to says about characteristic fully control of matrix A.*

Justified following theorems.

Theorem 2.2. *(Algorithm minimization). If quantity p is appears maximum geometric multiple of own numbers of matrix A, that always one can to choose p linear independent vectors B_1, ..., B_p appeared columns of matrix B so that the system* (1.2) *should be fully control.*

Theorem 2.3. *If the rank matrix B smaller maximum geometric multiple own numbers matrix A, that system* (1.2) *isn't appears fully control.*

Notation 2..1 *The characteristic fully control matrix A is coincides with maximum geometric multiple she's own numbers.*

The proof this theorem whole is leaning on proof that if maximum geometric multiple own numbers of matrix A equal p that always one can is choose p linear independent material vectors $B_1, \ldots, B_p$ appeared the columns of matrix B so that rank of matrix $D = \{B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\}$ was equal n. If the rank of matrix B smaller p that system (1.2) isn't appears fully control [4].

N o t a t i o n 2..2 *If characteristic polynomial of matrix A is coincides with his minimum polynomial that system* (1.2) *one can to make fully control with help scalar control.*

3. Structure minimization of system observation

It's considers for simplicity of exposition linear stationary open system

$$\dot{X} = AX, \quad Y = CX \tag{3.4}$$

when C - constantly matrix of size $r \times n$, $Y = (y_1, \ldots, y_r)^T$ vector of observation (exit of system).

It's put the task of search minimum number p exits, by that open system $\dot{X} = AX$ one can is take to observe the way of choose corresponding matrix C size $p \times n$ fully rank, i.e. the task minimization system of observation.

D e f i n i t i o n 3..1 *It's names the characteristic of observation system* (1.3) *minimum number of exits by that system* (3.4) *one can to make observed, by way of choose corresponding matrix C fully rank. Some times, for simplicity, shall be to speak about characteristic of observation matrix A.*

It's know that system (3.4) is appears observed then and only then, when rank matrix of observation

$$V = \begin{matrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{matrix}$$

$\in R^{p\times n}$ equals n.

Since matrix $V^T = [C^T, A^T C^T, \ldots, (A^{n-1})^T C^T]$ is appears matrix of control for system $\dot{X} = A^T X + C^T U$, that this system is names duality by system (3.4) in as much as fully controlling in this system equals observation in system (3.4) and otherwise [2].

O b s e r v a t i o n 3..1 *From canon form Giordano is follows that characteristic fully control of matrix A is coincides with characteristic fully controlling of matrix A^T. Thus the characteristic of fully control matrix A is coincides with characteristic she's observation.*

It's come from the aforesaid and theorems 2.1-2.2 one can to formulate two obvious confirmations.

T h e o r e m 3.1. *(Algorithm of minimization). If characteristic fully control (observation) of matrix* A *equal* p *that always one can is chooses* p *linear independent vectors* $C_1, \ldots, C_p$ *is appears the lines of matrix* C *that system* (3.4) *it shall be observes.*

T h e o r e m 3.2. *If rank of matrix* C *smaller characteristic fully controlling (observation) of matrix* A *that system* (3.4) *isn't appears to observes.*

O b s e r v a t i o n 3..2 *If characteristic polynomial of matrix* A *is coincides with minimum polynomial then system* (3.4) *may be to take observes with help scalar system observation.*

O b s e r v a t i o n 3..3 *Algorithm of building all multitude of matrix observation details is describes with proof theorem 2.1..*

4. Conclusion

In work it is demonstrates that characteristic fully control and observation for open system (1.2) and (1.3) is coincides. Like this it's establishes that number minimum entrances and exits by that stationary system of control (observation) may be to take fully control (observed) equally and this number fully is depends properties of matrix A open system. This result is allows not only is appraises surplus of system controlling and observation, but and on stage of creation this systems is ensures they structure minimization. Definition of characteristic of control (observation) for any matrix A is not calls difficulties, but offering algorithm of building systems control (observations) possessing minimum structure (theorem 1) sufficiently transparent.

5. Acknowledgment

T h e o r e m 5.1. *(Algorithm minimization). If quantity* p *is appears maximum geometric multiple of own numbers of matrix* A*, that always one can to choose* p *linear independent vectors* $B_1, \ldots, B_p$ *appeared columns of matrix* B *so that the system* (1.2) *should be fully control.*

Let is quantity p appears maximum geometric multiple own numbers of matrix A. It's performs that one can to build p linear independent vectors $B_1, \ldots, B_p$ that totality of vectors $B_i, AB_i, \ldots, A^{n-1}B_i$, $i = \overline{1,p}$ is maintains n linear independent. So that between matrix and operators is exists reciprocity unequivocal correspondence, then is carries of examination putting over the task in complex space C^n, considering that matrix A is shows matrix operator A making in this complex space.

It shall propose that operator A is have own meaning λ_i, $(i = \overline{1,k})$ it's have multiple k_i, $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$. It is marks through T^i, $i = \overline{1,k}$ root invariant subspaces of operator A corresponding to this own meanings and is have dimensions k_i, $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$ giving in straight summa all subspace C^n: $T^1 \oplus \ldots \oplus T^k = C^n$. Each of this subspace T^i is contains p_i root vectors X_j^i, $j = \overline{1,p_i}$ is haves heights $r_j^{(i)}$, $\sum_{j=1}^{p_i} = k_i$ but itself subspaces T^i is represents themselves straight summers invariant subspaces T_j^i, $j = \overline{1,p_i}$ ($T^i = T_1^i \oplus \ldots \oplus T_{p_i}^i$, $i = 1,k$) is born the root vectors X_j^i, $j = \overline{1,p_i}$ and have cycles basis [3]

$$X_j^i(A - \lambda_i E)X_j^i, \ldots, (A - \lambda_i E)^{r_j{}^{(i)-1}} X_j^i, \quad j = \overline{1,p_i}, i = \overline{1,k} \tag{5.5}$$

Thus all space C^n is represents in appearance straight summa uncrossing invariant subspaces T_j^i, $j = \overline{1,p_i}$, $i = \overline{1,k}$ haves bases (5.5). Is notices that every invariant root subspace T^i is continues p_i linear independent own vectors $(A - \lambda_i E)^{r_j^{(i)-1}} X_j^i$, $j = \overline{1,p_i}$. It's notices that value p is definite that $p = \underset{i=\overline{1,k_i}}{p}$.

It's demonstrates that one can is choose p linear independent vectors $B_1, \ldots, B_p$ that multitude from n vectors

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{m_i - 1}B_i, \quad i = \overline{1,p}, \sum_{i=1}^{p} m_i = n \tag{5.6}$$

it was linear independent. It is takes vector B_1 as linear combination of vectors is belong to the root invariant subspaces T_1^i, $i = \overline{1,k}$, moreover all coefficients in this linear combination standing with root vectors X_1^i, $i = \overline{1,k}$ is distinguishes from zero. Then easy is shows that aggregate from m_1 vectors

$$B_1, AB_1, \ldots, A^{m_1 - 1}B_1, \sum_{i=1}^{k} r_1^{(i)} = m_1 \tag{5.7}$$

linear independent and is forms basis in invariant subspace $T_1 = T_1^1 \oplus \ldots \oplus T_1^k$.

Actually any linear combination of vectors from totality of vectors (5.7) may be is writes in appearance $\varphi_{m_1-1}(A)B_1$, when $\varphi_{m_1-1}(A)$ operator polynomial of degree $m_1 - 1$. If is suppose linear independent this aggregate that this shall be to means that for some operator polynomial $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$ of degree $m_1 - 1$ true equality $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)B_1 = 0$. As that in decomposing of vector B_1 is presents all root vectors X_1^i, $i = \overline{1,k}$, every from this is have strange $r_i^{(i)}$, $i = \overline{1,k}$, that multitude $\bar{\varphi}_{m_1-1}(A)$ for this, that is zero all components of vector B_1 may be to have factors $(A - \lambda_i E)^{r_1^{(i)}}$, i.e. to have degree large that -1, or $\sum_{i=1}^{k} r_1^{(i)} = m_1$.

In another side, any vector from total combination (5.7) is belong to invariant subspace T_1 is has dimensions m_1. That is means, that aggregate from m_1 vectors (5.7) linear independent and is compose bases in invariant subspace T_1. It's excludes from further considering subspaces T_1^k, $i = \overline{1,k}$.

It's takes the vector B_2 as linear combination of vectors is belong to root invariant subspace T_2^i, $i = \overline{1,k}$, moreover all coefficients in this linear combination is lies by root vectors X_2^i, $i = \overline{1,k}$ is distinguish from zero. It's notices, that in this linear combination may be lesser root vectors, then k, if some the root subspace T^i is maintains only one root vector X_1^i.

On analogy with preceding one can is indicates, that totality from m_2 vectors $B_2, AB_2, \ldots, A^{m_2-1}B_2, \sum_{i=1}^{k} r_2^{(i)} = m_2$ linear independent and is forms bases in invariant subspace $T_2 = T_2^1 \oplus \ldots \oplus T_2^k$.

It's acts in some way and further, until all root subspace T^i were not exhaust, we is building p vectors $B_1, \ldots, B_p$ that totality of vectors (1.2) is organized bases in C^n. It's run out from those, that any totality of vectors $B_j, AB_j, \ldots, A^{m_j-1}B_j, \sum_{i=1}^{k} r_j^{(i)} = m_j$, is presents themselves bases of invariant subspace T_j, $j = \overline{1,p}$, straight summa of which is presents themselves all subspace C^n.

It's notices, that the building totality $B_1, \ldots, B_p$ from p vectors is appears, generally speaking complex. For that is makes she material, that totality from n material vectors

$$B_i, AB_i, \ldots, A^{m_i-1}B_i, \quad i = \overline{1,p}, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = n \tag{5.8}$$

it was linear independent, sufficiently by building every from vectors B_j is demands, that his components, choosing from subspace T_j^i is born complex conjugate root vectors X_j^i was even and complex conjugate. That is means, that one from components Y_j of vector B_j is chooses from invariant subspace T_j^i ($Y_j \in T_j^i$) is born the root vector X_j^i, answering complex number λ_i, that another component Z_j without fail is chooses from invariant subspace T_j^{i+1} ($Z_j \in T_j^{i+1}$) is born complex conjugate root vector $\bar{X}_j^i$, answering complex conjugate number $\bar{\lambda}_j$. Moreover this components is chooses that, in order to be complex conjugate quantities $Y_j = \bar{Z}_j$. By that building every vector B_j is comes out material, totalities of vectors (5.8) linear independent and is be-longs to different invariant subspaces, straight summa of which and is presents all space C^n.

T h e o r e m 5.2. *If the rank matrix B smaller maximum geometric multiple own numbers matrix A, that system* (1.2) *isn't appears fully control.*

As in previous theorem is comes to learning algebraic task, the solution of that and is allows to installing the result to formulate in giving theorem.

Let's looking of complex space C^n and operator A, by that maximum geometric degree own numbers equally p. Therefore, largest number linear independent own vectors this operator is correspond to same his own meaning λ_i, $(i=\overline{1,k})$ equally p.

Let's show, that for any linear independent multitude of vectors $B = \{B_1,\ldots,B_l\}$, $B_i \in C^n$, $i=\overline{1,l}$, $l<p$ rank of matrix

$$\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} \tag{5.9}$$

smaller n, i.e. for any l linear independent vectors $B_i \in C^n$, $i=\overline{1,l}$, $l<p$ from multitude of vectors

$$\{B_i, AB_i, \ldots, A^{n-1}B_i,\ i=\overline{1,l},\ l<p\} \tag{5.10}$$

it's impossible choose n linear independent. If this fact it will be sets in C^n, that theorem will be proofing, i.e. $R^n \subset C^n$.

It is carry out the proof from contradiction. It's supposes, that for same $l<p$ is exists l linear independent vectors $B_i \in C^n$, $i=\overline{1,l}$ so that rank of matrix (5.9) equally n. Giving proposition is call hypothesis H.

It's marking without T the root subspace of operator A, that is have p linear independent own vectors. The size this subspace and own meaning is signify as and λ - correspondly. It's notices, that root subspace T is appearances straight summa invariant subspace T_i, $i=\overline{1,p}$ born root vectors X_i, $i=\overline{1,p}$ is haves heights r_i, $\sum_{i=1}^{p} r_i = s$ making in this subspaces circle bases.

$$X_i, (A-\lambda E)X_i, \ldots, (A-\lambda E)^{r_i-1}X_i, \quad i=\overline{1,p}. \tag{5.11}$$

It's introduces any vector B_i, $i=\overline{1,l}$ in view one meaning distribution on invariant subspaces $C^n\backslash T$ and $T (C^n = C^n\backslash T \oplus T)$, i.e. in mind $B_i = M_i + R_i$ when $M_i \in C^n\backslash T$, $R_i \in T$, $i=\overline{1,l}$. Then any linear combination from multitude (5.10) in strength that subspaces $C^n\backslash T$ and T invariantly correspondent to operator A is break off two linear combination, one from that is belong to subspace $C^n\backslash T$, and another subspace T. Therefore, if gipotesis H is takes place, that in help linear combination of vectors K_i, AR_i, $\ldots$, $A^{n-1}R_i$, $i=\overline{1,l}$ one can is receives any vector from invariant subspace T.

It's looking for matrix of operator A in canonic bases of Gordan is thinking that p cages Gordan corresponding to meaning λ this operator is stands in left upper corner this matrix and is have Gordan is appears vectors from multitude (5.11). It's notices that in this case by all vectors $R_i \in T$, $i=\overline{1,l}$ the last $n-s$ components is appears zero.

It's marked thought D the matrix of size $s \times s$ standing in left upper corner canonic matrix Gordan is includes all cages Gordan corresponding own meaning λ and is consists from p "boxes"Gordan is have the sizes r_i, $i = \overline{1,p}$, $\sum_{i=1}^{p} r_i = s$. From gipotesis H and is makes upper notices is flows, that is exists multitude from l linear independent vectors V_i, $i = \overline{1,l}$ (vectors V_i is introduces themselves the first s components of vector R_i) that from multitude of vectors V_i, DV_i, $\ldots$, $D^{n-1}V_i$, $i = \overline{1,l}$ one can is chooses s linear independent. Undifficultly is see, that in this case from multitude vectors

$$V_i, SV_i, \ldots, S^{n-1}V_i, \quad i = \overline{1,l}, \tag{5.12}$$

when $S = D - \lambda E$ so that is choose s linear independent. It's notices that matrix S is distinguishes from matrix D that by she on main diagonal is standing zeros.

It's looking of in borning matrix U the size $s \times s$ the pillars which is appears s linear independent vectors from multitude (5.12).

Evidently, that any vector $S^k V_i$, $k \geq 1$ is haves p components with numbers r_1, $r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2 + \ldots + r_p = s$ equally zero. That is notices, that p lines of matrix U with numbers $r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2 + \ldots + r_p$ is haves $s - l$ pillars with elements equally zero, i.e. the matrix is making this pillars is have rank no largest that l. Therefore that choosing lines of matrix U linear dependent and this matrix is appears borning. Thus, we is notices, that gipotesis H in correctly.

References

1. F.R. Gantmacher, *Theory of matrices*, Nauka, Moscow, 1988.

2. R. Gabasov F. Kirilova, *Quantatity theory of optimal processes*, Nauka, Moscow, 1971.

3. B.T. Polak P.S. Therbakov, *Robust stability and control*, Nauka, Moscow, 2002.

4. V.V. Dicusar G.A. Zelenkov N.V. Zubov, *The methods of analysis robust stability and in stability*, RC RAN, Moscow, 2007.

УДК 517.929

Необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости одного класса матриц линейных операторов

© А.В. Зубов [1], О.А. Пустовалова [2], И.С. Стрекопытов [3]

Аннотация. В этой статье найдены необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости одного класса матриц линейных операторов в терминах отрицательной определенности в первом случае и значений положительного и отрицательного индексов во втором случае квадратичной формы эрмитовой составляющей их аддитивного представления.
Ключевые слова: линейные операторы, эрмитова квадратичная форма, характеристический полином

Как известно из отрицательной определенности эрмитовой квадратичной формы с матрицей $B = \frac{A+A^\star}{2}$, где A вообще говоря комплексная квадратная матрица из аддитивного разложения

$$A = \frac{A + A^\star}{2} + \frac{A - A^\star}{2} = B + C \tag{1.1}$$

следует устойчивость матрицы A. Обратное неверно, более того, даже для сверх устойчивой вещественной матрицы, т. е. матрицы с диагональным отрицательным преобладанием по строке, не следует отрицательная определенность ее квадратичной формы. Нужны дополнительные условия.

Т е о р е м а 1.1. *Если матрица A нормальная ($AA^\star = A^\star A$), то для того, чтобы она была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы ее эрмитова квадратичная форма была отрицательно определенной.*

Это следует из представления матрицы A как суммы эрмитовой матрицы H_1 и косоэрмитовой jH_2 в разложении

$$A = \frac{A + A^\star}{2} + \frac{A - A^\star}{2} = H_1 + jH_2 \tag{1.2}$$

и того, что для нормальных матриц спектры матриц H_1 и H_2 совпадают с наборами реальных и мнимых частей чисел спектра матрицы A (и обе являются эрмитовыми).

О п р е д е л е н и е 1.1. *Назовем квадратную вещественную матрицу A симметрично сверхустойчивой, если она имеет отрицательное диагональное преобладание по строке и по столбцу.*

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Т е о р е м а 1.2. *Пусть вещественная матрица A симметрично сверхустойчива. Тогда для ее устойчивости необходимо и достаточно, чтобы ее квадратичная форма была отрицательно определенной.*

Аналогичная теорема верна и для квадратных комплексных матриц с отрицательным диагональным преобладанием по реальной части по строке и столбцу, т. е.

$$-Rea_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ Rea_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|. \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 1.2. *Назовем $n \times n$ матрицу A из класса (n, k) - эквивалентности, если ее характеристический полином имеет k корней справа и $n-k$ слева от мнимой оси с учетом кратностей.*

Принадлежность эрмитовой составляющей H_1 из (1.2) классу (n, k) - эквивалентности не дает информации о принадлежности матрицы A этому же классу. Исключением является случай, когда $k = 0$, т. е. H_1 - устойчивая эрмитова матрица, а ее эрмитова квадратичная форма отрицательно определенная. Действительно, для $k = 1, \dots, n-1$ из неравенства Гирша для спектров матриц A, H_1:

$$\min \lambda(H_1) \leq Re\lambda(A) \leq \max \lambda H_1 \tag{1.4}$$

не следует никакой связи локализации спектра матрицы A из того, что k чисел спектра матрицы H_1 находятся справа от нуля на вещественной оси, а $n-k$ - слева от нуля.

Анализ показал, что методы исследования знакоопределенности квадратичной формы удобны только тогда, когда нужно определить крайние случаи: отрицательную и положительную определенность. Если же нужно найти индекс и сигнатуру квадратичной формы, то для больших n аналитические методы не эффективны, а численные методы требуют не менее $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций для матриц квадратичной формы порядка n. Однако, даже если найдется эффективный алгоритм типа ММП для определения принадлежности классу (n, k) - эквивалентности характеристического полинома ее матрицы H_1 из (1.2), это, без дополнительных условий, ничего не даст для определения принадлежности классу (n, k) самой матрицы A. Исключением являются нормальные матрицы. Действительно, справедливо утверждение.

Т е о р е м а 1.3. *Для того, чтобы нормальная $n \times n$ матрица A принадлежала классу (n, k) - эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы этому же классу принадлежала ее эрмитова составляющая $A + A^\star$ из (1.2).*

Из теоремы (1.3) следует, что для нормальной матрицы A эрмитова квадратичная форма с матрицей $A+A^{\star}$ имеет положительный индекс равный k и отрицательный индекс равный $n-k$.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Назовем вещественную $n\times n$ матрицу A симметрично $k-$ диагональной, если она имеет положительное $k-$ диагональное преобладание по строке и по столбцу, т.е. для k элементов на главной диагонали выполняются неравенства:*

$$a_{ii} > \sum_{i\neq j}|a_{ij}|,\ a_{ii} > \sum_{i\neq j}|a_{ji}|; \tag{1.5}$$

а для остальных $n-k$ элементов выполняются неравенства:

$$-a_{ii} > \sum_{i\neq j}|a_{ij}|,\ -a_{ii} > \sum_{i\neq j}|a_{ji}|. \tag{1.6}$$

Опираясь на теорему Гершгорина и неравенство (1.4) получим следующий критерий.

Т е о р е м а 1.4. *Если вещественная квадратная матрица A симметрично $k-$ диагональная, то для ее принадлежности классу $(n,k)-$ эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы матрица ее квадратичной формы была тоже из этого класса или, что то же самое, ее квадратичная форма имела положительный индекс k и отрицательный индекс $n-k$.*

Нетрудно сформулировать и доказать критерий аналогичный теореме 4 для комплексных матриц с $k-$ диагональным преобладанием для реальных частей элементов главной диагонали, по строке и столбцу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

2. М. Маркус Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, Наука, М, 1972.

3. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.

4. Р. Хорн Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М, 1989.

The necessary and sufficient conditions of stability and in stability one class of matrixes linear operators

© A. V. Zubov [4], O. A. Pustovalova [5], I. S. Strecopitov [6]

Abstract. In this article is find sufficiently and necessary conditions of stability and un stability one class of matrixes linear operators in terms deny definite in first case and meanings plus and deny indexes in second case quadrat form emit compound they additive representation.

Key Words: linear operators, Hermitian quadratic form, the characteristic polynomial

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Lecture chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

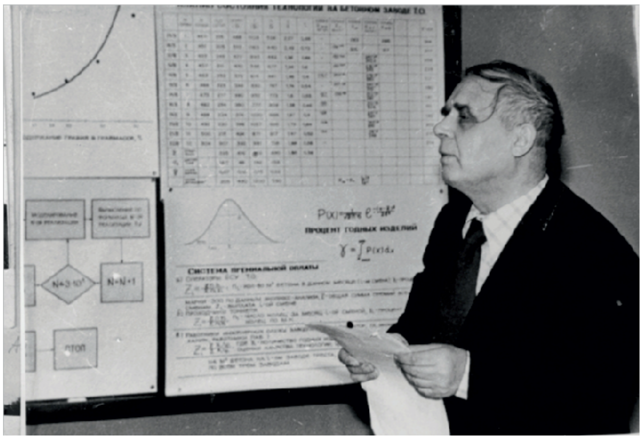
Александр Андреевич Шестаков

21 января 2014 г. скончался выдающийся российский математик, доктор физико-математических наук, профессор Александр Андреевич Шестаков. Он родился 19 января 1920 г. в селе Кисьва Пронского района Рязанской области в крестьянской семье. В 1936 г. окончил с отличием среднюю школу в г. Шуе Ивановской области, а в 1941 г. – с отличием физико-математический факультет Казанского университета. Александр Андреевич Шестаков был участником Великой Отечественной Войны. Он участвовал в боевых действиях Советской армии в качестве сержанта зенитной артиллерии. После демобилизации в декабре 1945 г. поступил в аспирантуру Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, которую окончил в 1947 г. В 1947 – 1949 гг. А. А. Шестаков – старший научный сотрудник ЦКБ НИИ 88 Министерства вооружения СССР и младший научный сотрудник математического отдела Геофизического института АН СССР.

Педагогическую деятельность А.А. Шестаков в высших учебных заведениях начал с 1948 г. Являясь основателем кафедры высшей математики Российского государственного открытого технического университета путей сообщения, с 1951 по 1990 г. заведовал кафедрой высшей математики, с 1991 по 2005 г. был профессором этой кафедры.

В Мордовском государственном университете (1980–1990 гг.) Александр Андреевич выполнял большую учебную и научную работу: читал курсы лекций для студентов математического факультета, руководил дипломными работами, был председателем Государственной экзаменационной комиссии.

Научная деятельность А. А. Шестакова началась в годы учебы в Казанском университете, когда под руководством Н.Г. Чеботарева им были написаны две работы по алгебре. В аспирантские годы (1945 – 1947 гг.) Александр Андреевич выполнил серию работ по качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости и защитил в декабре 1947 г. в МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством В.В. Немыцкого кандидатскую диссертацию «О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи сложной особой точки». На тему кандидатской диссертации Александр Андреевич опубликовал ряд статей в ДАН СССР. Они, как правило, представлялись академиком И.Г. Петровским. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов в свою фундаментальную монографию «Качественная теория дифференциальных уравнений» (М. : Гостехиздат, 1949; М. : УРСС, 2004, гл. IV, с. 267–271) включили теорему А.А. Шестакова о характеристике скоростей приближения интегральных кривых дифференциальной системы Пуанкаре – Ляпунова с линейной частью к началу координат. Следствием теоремы А. А. Шестакова является классический результат об условиях равенства характеристических чисел линейной системы с переменными коэффициентами характеристическим числам предельной системы с постоянными коэффициентами.



Доклад А. А. Шестакова на лекции

Итогом научной деятельности за 1948 – 1968 гг. стала его докторская диссертация «Некоторые вопросы качественной теории многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений», которая явилась фундаментальным вкладом в математическую науку.

А. А. Шестаков автор свыше 300 научных работ по теории дифференциальных уравнений, нелинейной механике и теории устойчивости, им написаны 5 монографий и 30 учебников и учебных пособий по математическим дисциплинам. Среди фундаментальных работ А. А. Шестакова, получивших международное признание, – монография «Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами» (М.: Наука, 1990 – первое изд.; М. : УРСС, 2007 – второе изд., доп.).

В 1991 г. в Издательстве Мордовского университета вышел курс лекций «Теория устойчивости: прямой метод Ляпунова для бесконечномерных динамических процессов». На кафедре дифференциальных уравнений, руководимой доктором физико-математических наук профессором В. Н. Щенниковым, под руководством А.А. Шестакова выполнен ряд дипломных работ и кандидатских диссертаций по дифференциальным уравнениям и их приложениям.

Научные результаты А. А. Шестакова получили широкое признание среди отечественных и зарубежных ученых. В научных трудах А. А. Шестакова разработаны такие перспективные направления качественной теории и теории устойчивости дифференциальных уравнений, как: разложение сложной аналитической особой точки на простые особые точки для многомерной автономной дифференциальной системы в действительной и комплексной области; развитие первого метода Ляпунова для систем без линейных членов с использованием обобщенных чисел Ляпунова и на этой базе изучение асимптотических свойств решений однородной и квазиоднородной систем в окрестности элементарных решений; развитие второго метода Ляпунова исследования устойчивоподобных свойств решений неавтономной дифференциальной системы и абстрактных динамических процессов, в частности исследование орбитальной устойчивости некомпактного множества относительно неавтономной дифференциальной системы; локализация положительного предельного множества с помощью функций и функционалов Ляпунова в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами; классификация возможных типов динамического потока на фазовом пространстве вблизи инвариантного множества; развитие методов теории орбитальной устойчивости и прочности траекторий общих динамических и небесно-механических систем; выделение устойчивых движений и прочных траекторий с помощью вариационных принципов динамики; развитие индексно-дивергентного метода исследования нелинейных динамических систем. В области теории устойчивости и качественного поведения систем железнодорожного транспорта А. А. Шестаковым получены важные результаты. В частности, им разработан метод оптимизации критических скоростей железнодорожных экипажей при высокоскоростном движении, получены эффективные критерии поперечной устойчивости движения рельсовых транспортных средств, разработаны алгоритмы для тестирования на устойчивость. Для нелинейных задач А. А. Шестаковым обоснован тот факт, что экстремальная точка значения скорости, в которой возникает предельный цикл, служит граничной точкой для скорости, обеспечивающей безопасность движения высокоскоростного рельсового экипажа. Кроме того, А. А. Шестаков внес весомый вклад в задачу усовершенствования математической модели движения колеса по рельсу при наличии неровностей рельса, он дополнил и существенно развил теорию движения колесной пары с учетом стохастических возмущений. Важным направлением исследований А. А. Шестакова, выполненных им в соавторстве с О. В. Дружининой, является развитие методов теории прочности траекторий динамических систем. Прочность траекторий в смысле Н. Е. Жуковского является более общим понятием по сравнению с устойчивостью в смысле А. М. Ляпунова и охватывает более широкий класс траекторий, что важно для практических приложений. По теории прочности траекторий опубликован большой цикл работ в журнале «Доклады РАН» (в период 1995–2009 гг.).

В перечисленных направлениях А. А. Шестаковым получены существенные ре-зультаты, вносящие весомый вклад в качественную теорию и теорию устойчивости динамических систем. Его идеи получили творческое развитие в трудах В. И. Зубова, Л. А. Беклемишевой, Ш. Р. Шарипова, О. В. Дружининой, Ю. Н. Меренкова, В. С. Пронькина, Ю. И. Голечкова, С. В. Волкова, Ю. В. Малышева, А. Ю. Александрова, А. А. Косова, Н. А. Панькина, Е. П. Королькова, А. М. Матвиенко, О. Н. Масиной, Т. С. Климачковой, В. В. Романкова.

В Саранске успешно работают ученики и последователи Александра Андрее-вича, ставшие известными специалистами в области теории устойчивости и качест-венной теории динамических систем, среди них – В. Н. Щенников, Р. Б. Лапшина, И. Г. Башмаков, П. М. Бочкарев, Е. В. Щенникова.

Александр Андреевич активно участвовал в общественно-научной жизни, он был ответственным редактором межвузовских сборников научных трудов, посвященных вопросам качественной теории и теорий устойчивости и прочности траекторий динамических систем, а также вопросам динамики подвижного состава железнодорожного транспорта. С 2002 по 2013 г.г. являлся одним из руководителей научного семинара Академии нелинейных наук. Был участником семинара по нелинейному анализу в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына РАН. Регулярно выступал с докладами на Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» им. Е. С. Пятницкого в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

Александр Андреевич – человек большого личного обаяния и доброты, который щедро делился своими научными идеями и оказывал всемерную помощь своим ученикам и всем, кто обращался к нему за консультациями. Светлая память об Александре Андреевиче надолго сохранится в наших сердцах.

А.Ю. Александров, А.С. Андреев, Е.В. Афиногентова, И.Г. Башмаков,

Ю.И. Голечков, О.В. Дружинина, А. П. Жабко, Р.В. Жалнин,

А.М. Камачкин, А.А. Косов, Ю.В. Малышев, О.Н. Масина,

Д.А. Овсянников, А.И. Перегудин, О.В. Перегудова, В.М. Савчин,

В.И. Сафонкин, Н.О. Седова, Г.А. Смолкин, В.Л. Харитонов, И.И. Чучаев,

П.А. Шаманаев, В.Н. Щенников, Е.В. Щенникова.

Д.И. Бояркин, С.М. Мурюмин, А.Ф. Зубова.

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **input** в преамбуле). Например,

\input{voskresensky.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду **headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду **headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду **headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **sect** с одним параметром:

\sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул Γ_i, *Д*$_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

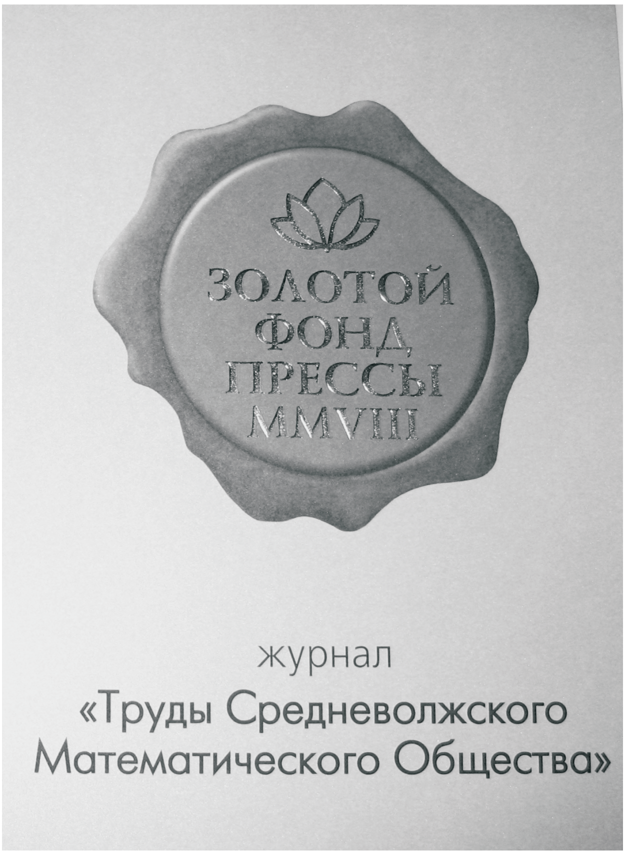
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTEX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок

Для заметок