ISSN 2079 – 6900

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 15, № 1

СВМО

2013

Средневолжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва

# Журнал Средневолжского математического общества

Том 15, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год



Саранск

2013

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых комммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

**Журнал Средневолжского математического общества. Том 15, № 1**

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

*Адрес редакции:* 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
*Тел.:* (834-2) 23-32-05
*E-mail для статей:* journal@svmo.ru
*E-mail для организационных вопросов:* svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
*Web:* http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

## Содержание

## Математическая жизнь

# От редакции

В настоящем номере публикуются работы ученых, которые являются постоянными участниками международной математической школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского, проводимых национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом. Номер выходит к началу VI международной математической школы-семинара с участием зарубежных ученых, которая пройдет в г. Саранске с 6 по 12 июля 2013 года. Конференция проводится при поддержке РФФИ, грант № 13-01-06814. Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен и в сети Internet на сайте Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

*УДК 51.7:532.546*

# Методика определения коэффициента корреляции для нестационарных временных рядов

© **Д. С. Кириллов[1], Л. В. Клочкова[2], Ю. Н. Орлов[3], В. Ф. Тишкин[4]**

**Аннотация.** В работе строится метод определения выборочного коэффициента корреляции для двух нестационарных временных рядов. Отличие от стационарного случая состоит в том, что одновременно с величиной коэффициента корреляции строятся эмпирические статистики оптимальной длины выборки и доверительного интервала, содержащего коэффициент корреляции в наибольшем числе случаев.

**Ключевые слова:** нестационарный коэффициент корреляции, оптимальная длина выборки, оптимальный уровень достоверности

## 1. Введение

Во многих задачах долгосрочного прогнозирования величин, модель изменения которых во времени предполагает наличие случайных процессов, требуется выделить главные векторы корреляционной матрицы, чтобы определить группы величин, находящиеся между собой в статистической зависимости. Таковы модели и прогнозы макроэкономических показателей, модели факторов, влияющих на экологическое состояние, статистические модели в социологии и др. В частности, в работе [1] была поставлена задача о методах оценки корреляции эпидемического состояния мегаполиса в зависимости от уровня загрязненности воздуха. Настоящая работа продолжает начатое исследование.

Традиционно практические исследования с использованием статистических методов в этих областях опираются на модель реакции (линейной или нелинейной) сложной системы при изменении параметров, представляемых как внешние или управляющие воздействия. При этом цель анализа данных за определенный исторический период состоит в определении коэффициентов в такой модели, предполагая, что они образуют стационарный временной ряд. Чаще всего анализируются линейные функции реакции, когда предполагается, что два наблюдаемых нестационарных ряда данных находятся между собой в стационарной статистической взаимосвязи. В реальности стационарность связи выполняется лишь приближенно, поскольку в сложных системах коэффициенты в параметрических моделях являются неизвестными функционалами от анализируемых рядов данных. Поэтому все модели коинтеграции нестационарных рядов содержат коррелированные остатки регрессий. В результате оказывается, что очевидный качественный результат о том, что некоторые два ряда находятся в корреляционной зависимости - например, уровень загрязненности атмосферы определенным типом вещества и заболеваемость населения тем или иным видом заболевания, не имеет четкого численного подтверждения. Именно, если зафиксировать лаг корреляции и момент времени наблюдения, и начать затем варьировать длину выборки, то часто обнаруживается, что выборочный коэффициент корреляции

[1] Аспирант Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

[2] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[3] Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

[4] Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

изменяется при этом в весьма широких пределах и даже может менять знак. И обратно, если зафиксировать длину выборки, то корреляция в разные моменты времени может быть сильно нестационарной. Следовательно, актуальной является задача корректного определения интересующей исследователя корреляционной связи.

В настоящей работе излагается методика определения величины корреляции между двумя нестационарными временными рядами. Математически проблема состоит в том, что выборочный коэффициент корреляции между двумя рядами данных стабилизируется к своему генеральному значению с увеличением объема выборки только для стационарных в широком смысле процессов, среднее и дисперсия которых не зависят от времени. Для нестационарных процессов наблюдается непостоянство корреляции как функции времени для выборки определенного объема, а также и непостоянство ее в один и тот же момент времени, но для выборок разных объемов. Как определить величину корреляции и ее достоверность для нестационарных рядов? Необходимым условием для корректного определения нестационарной корреляции является нахождение оптимальной длины выборки, на которой следует вычислять выборочные моменты распределений. Именно, требуется найти длину выборки, на которой определенное значение корреляции между двумя рядами проявляется с наибольшей достоверностью.

Формально нестационарный выборочный коэффициент корреляции представляет собой обычный выборочный коэффициент корреляции, зависящий от длины выборки и текущего момента времени, от которого назад в прошлое отсчитывается эта выборка.

Для каждого интервала, ширина которого определяет точность определения коэффициента корреляции, можно найти длину выборки, на которой доля корреляций, попадающих в этот промежуток, наибольшая. Эта доля и представляет собой уровень достоверности корреляционной связи. Тот интервал, для которого эта доля абсолютно наибольшая, принимается за промежуток, содержащий коэффициент корреляции. Этот методический подход и описывается в настоящей работе.

## 2. Определение статистической функциональной связи.

Опишем сначала общий метод отыскания корреляционной статистической зависимости между случайными величинами. Идея метода была предложена в [2] для анализа нелинейных хаотических динамических систем. Для краткости мы ограничимся далее рассмотрением двух случайных величин, равномерно ограниченных по времени на отрезке $[0;1]$. Для каждой из них можно построить распределение вероятностей попадания значений в определенные классовые интервалы, на которые на практике разбивается промежуток $[0;1]$. Будем для простоты считать разбиение на промежутков равномерным. В этом случае вероятность и плотность вероятности аппроксимируются одной и той же гистограммой.

Предположим сначала, что ряды $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ стационарны, и между ними есть прямая функциональная связь, т.е. $y = \varphi(x)$. Тогда, построив совместное распределение вероятностей $F_N(x, y, t)$ по выборке длины $N$ в момент времени $t$, мы обнаружим, что с точностью $1/\sqrt{N}$ в норме суммируемых функций оно не меняется, и его носитель находится в квадратах $y_i = \varphi(x_j)$ , в соответствии с разбиением гистограммы. Точность, с которой мы можем говорить о такой функциональной связи, равна точности позиционирования случайных величин в классовых интервалах, т.е. $1/n$ . Действительно, точность оценки функциональной связи -— это мера носителя совместного распределения в единичном квадрате. При фиксированной мелкости разбиения эта доля, т.е. точность оценки, не может быть меньше, чем $1/n$ ($n$ квадратов с площадью $1/n^2$). Уровень достоверности полученной оценки равен интегралу от плотности распределения по выбранной доле носителя. Поскольку в данном случае вне отмеченных квадратов нет точек носителя совместного распределения, уровень достоверности равен единице.

Если функциональной связи нет, то при фиксированном номере $j$ интервала по первому аргументу мы обнаружим отличные от нуля значения функции $F_N(j,i,t)$ для нескольких номеров $i$ интервалов по второму аргументу. При этом с увеличением длины выборки носитель совместного распределения занимает все большую долю области разбиения гистограммы. Это означает, что путем потери точности можно получить достоверную оценку функциональной связи даже в отсутствие таковой, но будет ли это удовлетворять исследователя? Насколько точно нужно позиционировать искомое значение, чтобы и вероятность его принадлежности определенному интервалу была не исчезающе малой, и сам интервал существенно отличался бы от всего множества значений случайной величины? Представляется, что вместо априори задаваемого уровня значимости следует ввести согласованный критерий совместной оценки точности и уровня значимости.

Пусть $\delta = \int\limits_{\Omega} dxdy$ есть мера множества $\Omega(x,y)$, принадлежащего носителю совместного распределения, на котором можно однозначно говорить о связи между $x$ и $y$. Величина $\delta$ будет точностью, с которой установлена эта связь, а величина $\alpha = \int\limits_{\Omega} F(x,y)dxdy$ будет давать уровень достоверности найденной связи. И $\delta$, и $\alpha$ зависят от множества $\Omega(x,y)$. Тогда введем функционал, минимизирующий совокупную ошибку оценки корреляционной связи (не обязательно линейной), которая находится на том множестве $\Omega(x,y)$, где

$$U^2 = (1-\alpha(\Omega))^2 + \delta(\Omega)^2 \to \min. \tag{2.1}$$

Заметим, что условие (2.1) не позволяет в общем случае однозначно определить множество $\Omega(x,y)$. Для унимодальных распределений $F(x,y,t)$ это множество при фиксированном $x$ содержит $y = \arg\max F(x,y)$. Будем поэтому для определенности считать, что $\Omega(x,y)$ содержит полосу разбиения гистограммы, содержащую локальные (при фиксированных номерах -ячеек) максимумы распределения $F_N(j,i,t)$. Собственно значением $i(j)$ будет называться номер ячейки, содержащей условное среднее значение номера $i$ по множеству ячеек с $j$-ым номером вертикальной полосы, которое с точностью $\delta$ охватывает $\arg\max F(j,i)$.

Функционал $U$ зависит от длины выборки $N$. В стационарном случае с увеличением происходит лишь уточнение множества $\Omega(x,y)$ и, соответственно, уменьшение значения $U$. В нестационарном случае увеличение длины выборки сверх оптимального значения может привести к увеличению функционала $U$. Пусть $U(N,t)$ есть результат оптимизации (2.1) в данный момент времени $t$ по выборкам произвольных объемов, при котором находятся локально-оптимальные значения $\delta(N,t)$ и $\alpha(N,t)$. Тогда

$$N_{opt}(t) = \arg\min U(N,t). \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что функциональная связь, определяемая множеством $\Omega(x,y;t)$, полученном в результате оптимизации (2.1), в разные моменты времени может быть совершенно различной. Также и оптимальные длины $N_{opt}(t)$ образуют в совокупности некоторое распределение с плотностью $\nu(N)$. В результате глобально оптимальным за рассматриваемый промежуток времени будет некоторое среднее из оптимальных длин и некоторая средняя функциональная связь. Точность этой связи будет определяться ее условной дисперсией (при условии, что имеется заданная неточность в определении локально-оптимальной длины выборки) и чувствительностью функциональной связи к длине выборки. Пример этого общего подхода будет далее рассмотрен подробно для конкретного вида искомой функциональной связи – а именно, линейной. Меняющимся параметром в этом случае (т.е. множеством $\Omega(x, y; t)$ ) будет выборочный коэффициент корреляции.

## 3. Определение оптимальной корреляции между двумя временными рядами

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два исследуемых временных ряда на промежутке времени $[1; T]$, и $R(k, t)$ есть их выборочный коэффициент корреляции по выборке объема $k$ в момент времени $t$, т.е. коэффициент корреляции, вычисленный по данным, взятым в моменты времени $t-k+1$, $t-k+2, \ldots, t$.

Корреляция $R(k, t)$ выборки $\{x_1, \ldots, x_k\}$ объема $k$ в момент времени $t$ на выборку $\{y_1, \ldots, y_k\}$ определяется $r(t)$ по формуле (3.3)

$$R(k,t) = \frac{k\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} y_i\right)}{\sqrt{k\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} x_i\right)^2}\sqrt{k\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=t-k+1}^{t} y_i\right)^2}}. \tag{3.3}$$

Определим два взаимодополняющих временных ряда: ряд $r(t)$ максимальных алгебраических значений корреляции $R(k, t)$, и ряд $n(t)$ соответствующих объемов выборки, на которых корреляция в данный момент времени $t$ максимальна:

$$r(t) = \max_k R(k,t) \quad n(t) = \arg\max_k R(k,t). \tag{3.4}$$

При вычислении $r(t)$ объем выборки должен превосходить некоторый минимальный объем, на котором вообще разумно вычислять корреляцию, поэтому будем считать, что $k \geq 3$.

Определим также среднее значение $\bar{r}$ и дисперсию $\sigma_r^2$ максимальных значений корреляции по всем моментам времени, и аналогично $\bar{n}$ и $\sigma_n^2$. Пусть также $\gamma$ есть коэффициент корреляции рядов $r(t)$ и $n(t)$ на промежутке времени $[1; T]$. Этот коэффициент подсчитывается по количеству данных $T - N + 1$, где $N \leq T$ есть максимальный объем среди всех $n(t) : N = \max\limits_t n(t)$.

Величина $\sigma_r/\bar{r}$ характеризует относительную ширину разброса средних по времени значений максимумов корреляций. Это условие для стационарных рядов является основным показателем точности оценки $R(n, t) = \bar{r}$. Если же объем выборки $n(t)$ также меняется со временем, то фактическая неточность в оценке корреляции $r(t)$ должна определяться с учетом вариации $\sigma_n/\bar{n}$. Однако при вариации объема выборки может оказаться, что корреляция на отрезке $\Delta_\sigma(n(t)) = [n(t) - \sigma_n; n(t) + \sigma_n]$ меняется незначительно. Поэтому, чтобы учесть вариацию объема выборки, необходимо оценить чувствительность корреляции по объему выборки.

Введем величину

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{2\sigma_n r(t)}\left(\max_{k\in\Delta_\sigma(n(t))} R(k,t) - \min_{k\in\Delta_\sigma(n(t))}\right), \tag{3.5}$$

которая представляет собой разностный аналог логарифмического размаха корреляции по логарифму объема выборки в окрестности точки максимума, который вычисляется на отрезке $\Delta_\sigma(n(t)) = [n(t) - \sigma_n; n(t) + \sigma_n]$ ширины $2\sigma_n$. Среднее по времени значение

$\bar{\lambda}$ характеризует среднюю крутизну графика корреляции как функции объема выборки в окрестности своего максимального значения. Если $\bar{\lambda}$ близко к нулю, т.е. график $R(n(t),t)$ представляет слабо меняющуюся функцию объема выборки, приблизительно параллельную оси абсцисс, то знание именно того объема $n(t)$, на котором достигается максимум корреляции, не обязательно, поскольку близкие к нему значения корреляции достигаются и на других объемах. Тем самым $\bar{\lambda}$ можно трактовать как чувствительность максимума корреляции к объему выборки. Тогда в качестве ориентировочной оценки относительной неточности $O^2$ в установлении корреляционной связи на уровне $\bar{r}$ между двумя рядами можно использовать показатель

$$O^2 = \left(\frac{\sigma_r}{\bar{r}}\right)^2 + (1-\gamma^2)(\bar{\lambda})^2\left(\frac{\sigma_n}{\bar{n}}\right)^2 \tag{3.6}$$

Величина $\gamma^2$ определяет ту долю дисперсии максимальной корреляции, которая может быть «объяснена» дисперсией объема выборки в регрессионном приближении. Остаток представляет собственный вклад вариации объема выборки в неточность оценки корреляции. Тогда ширина доверительного интервала, содержащего оценку максимальной корреляции на уровне значимости $O$, равна $2O\bar{r}$.

Критерий $\ll O^2 \gg$ (3.6) дает уровень значимости оценки корреляционной связи, характеризуемой числом $\bar{r}$. Но объем выборки, на котором следует вычислять эту корреляцию, не фиксируется критерием (3.6). Этот объем может быть любым в границах $[\bar{n}-\sigma_n;\bar{n}-\sigma_n]$, что учитывается введением коэффициента чувствительности $\bar{\lambda}$. Поскольку же не обязательно наибольшая корреляция с наибольшей же достоверностью достигается на среднем объеме $\bar{n}$, дающем максимумы корреляций, то следует найти соответствующий оптимальный объем $n_{opt}$.

Введем достоверность $\alpha$ в определении объема выборки, при котором корреляция между рядами не ниже определенного уровня. Определим множество $M_n(t)$ тех объемов выборки $n$, корреляция по которым в момент времени $t$ лежит в определенной области $\Delta$ значений, т.е.

$$M_n(t) : \bigcup_n \{n : R(n,t) \in \Delta\}. \tag{3.7}$$

Корреляционная связь между двумя рядами на промежутке времени $[1;T]$ называется достоверной по объему выборки на уровне $\alpha$ с абсолютной ошибкой $\delta$, если пересечение $\bigcap\limits_{t=1}^{T} M_n^{\alpha}(t)$ не пусто. При этом должно быть не менее, чем $[\alpha(T-n(t)+1)]$ носителей $n(t)$ значений корреляции этих рядов как функции объема выборки, содержащихся в полосе минимальной ширины $\delta$ ($[1;1-\delta]$ для максимальной корреляции, $[-1;-1+\delta]$ для минимальной, $[-\delta/2;\delta/2]$ для нулевой корреляции).

Интерес представляют три случая: достоверная корреляция, достоверная антикорреляция, а также достоверное отсутствие корреляции (нулевая корреляция). Разберем подробно случай достоверной корреляции, т.е. устойчивого по времени достаточно высокого положительного коэффициента выборочной корреляции, вычисленного по одинаковому объему данных. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

В каждый момент времени $t \in [1;T]$ строится выборочный коэффициент корреляции $R(n,t)$ как функция объема выборки $n$, $n \le t$, задается произвольное значение $0 < \delta < 1$ и рассматриваются те и только те значения $R(n,t)$, которые попали в полосу $[1;1-\delta]$. Пусть $\{n_i(t)\}$ — соответствующие значения объемов выборок. Множество $M_n(t)$ определяется как $M_n(t) = \bigcup\limits_i n_i(t)$. Значение $n_i(t) = m$ как элемент множества $M_n$ может появиться в различные моменты времени не более чем $T-m+1$ раз. Если оно появилось именно столько раз, то во всех случаях (с достоверностью $\alpha = 1$) объем выборки удовлетворяет условию принадлежности корреляции множеству $[1; 1-\delta]$.

Зададим некоторое $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть значение $n_i(t) = m$ появилось $k$ раз. Если $k/(T-m+1) \geq \alpha$, то пересечение соответствующей части $\bigcap\limits_{t=1}^{T} M_n^{\alpha}(t)$ будем считать непустым с достоверностью $\alpha$. Взяв затем объединение всех таких непустых пересечений, получим множество (не обязательно связное) объемов выборки, на каждом из которых удовлетворяется условие наличия корреляционной связи на выбранном уровне значимости. Далее для определенности берется тот объем выборки $n_{opt}$, для которого достоверность, т.е. отношение $k/(T-m+1)$ выше, а при равных значениях таких отношений — наибольший из объемов.

Минимальное значение $\delta(\alpha)$, при котором вышеописанное объединение пересечений не пусто, и будет представлять абсолютную ошибку в определении корреляции, а величина $1-\delta(\alpha)$ — наименьшую из возможных оценок максимума корреляции. Относительная ошибка в определении максимума корреляции будет тогда не больше, чем $\delta/(1-\delta)$.

Устойчивость корреляционной связи по отношению к объему выборки характеризуется достоверностью $\alpha$, которую желательно сделать как можно больше. Однако с увеличением $\alpha$ начинает возрастать и минимальное $\delta(\alpha)$, так что оптимальным следует считать такое значение $\alpha$, при котором

$$U^2 = \delta^2 + (1-\alpha)^2 \to \min. \tag{3.8}$$

Подчеркнем, что критерий (3.8) не обобщает критерий (3.6), а уточняет объем, по которому следует вычислять выборочную корреляцию. Величина критерия $U$ не является уровнем значимости корреляционной связи, т.е. его числовое значение не имеет самостоятельного смысла, а важность имеют лишь аргументы, при которых этот критерий минимален. Доверительная вероятность того, что корреляция при выбранном объеме $n_{opt}$ принадлежит промежутку $[1; 1-\delta(\alpha)]$, определяется выборочным распределением $F(R, n_{opt})$, и по построению равна $\alpha$.

Описанный подход может быть обобщен для определения наиболее вероятной корреляции между двумя рядами. Зададим некоторое произвольное число $-1 < r < 1$ и рассмотрим отрезок, его содержащий, шириной $\delta$:

$$\Delta_\delta(r) = [a; b] \subset [-1; 1], \quad b - \alpha = \delta. \tag{3.9}$$

Для каждого $r$ рассматриваются те, и только те значения $R(n,t)$, которые попали в отрезок $\Delta_\delta(r)$. Пусть $\{n_i(t)\}$ — соответствующие значения объемов выборок. Корреляцию $R$ между двумя рядами на промежутке времени $[1; T]$ называем достоверной по объему выборки на уровне $\beta$ в промежутке $\Delta_\delta(r)$, если пересечение $\bigcap\limits_{t=1}^{T} M_n^{\beta}(t)$ не менее чем $[\beta(T-n(t)+1)]$ носителей $n(t)$ значений корреляции этих рядов как функции объема выборки, и оно не пусто. Из всех возможных пар $\alpha, \beta$, для которых это пересечение не пусто, выбираются те, которые определяют отрезок (3.9) наименьшей длины. Варьируя затем величину $\beta$, находим минимум критерия (3.8): $U^2(r) = \delta^2 + (1-\beta)^2 \to \min$. В результате находим $\beta(r)$, $\delta(\beta)$ и $n_{opt}(r)$. Наиболее достоверной будем считать ту корреляцию, для которой уровень доверия наибольший:

$$r_{opt} = \arg\max \beta(r). \tag{3.10}$$

## 4. Заключение

В работе построена методика определения нестационарной корреляционной связи между двумя рядами, которая формально без изменений обобщается на случай большего числа случайных величин. Введены два критерия, совместная оптимизация которых позволяет найти наилучший объем выборки и доверительный интервал, с наибольшей вероятностью содержащий коэффициент корреляции.

Для краткости изложения мы провели оптимизацию для фиксированного лага между рядами, поскольку методика не зависит от этого параметра. Если требуется определить также и наиболее достоверный лаг, то, параметризуя результат (3.10), находится максимальное значение из наибольших уровней доверия, которому и отвечает этот лаг.

Примеры эффективного применения методики анализа нестационарных корреляций с переменным лагом к задачам макроэкономического анализа в нефтегазовой сфере содержится в [4]–[5]. В последующих работах описанная методика будет применена для определения корреляционной матрицы для многофакторных задач экологического и эпидемиологического мониторинга и прогнозирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11–01–00444–а

## Список литературы

1. Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н., Тишкин В. Ф., “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, 2012, № 3, 34–43.

2. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, Эдиториал УРСС/Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2011, 384 с.

3. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф., *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, Наука, М., 1985, 640 с.

4. Вовк В. С., Новиков А. И., Глаголев А. И., Орлов Ю. Н., Бычков В. К., Удалов В. А., *Мировая индустрия и рынки сжиженного природного газа: прогнозное моделирование*, ООО "Газпром экспо", М., 2009, 312 с.

5. Абрамов С. Э., Босов Д. Б., Орлов Ю. Н., Першуков В. А., “Некоррелированность цен на рынках СПГ Европы, США и Юго-Восточной Азии”, *Газовая промышленность*, 2010, № 5, 10–14.

# Methodology of correlation coefficient calculation for non-stationary time series

© D.S. Kirillov[5], L.V Klochkova[6], J.H. Orlov[7], V.F. Tishkin[8]

**Abstract.** In this paper we construct a method of determination of correlation coefficient for two non-stationary time series. In comparison with stationary case we need to determine the so-called optimal set length and confidence interval as empirical statistics.

**Key Words:** non-stationary correlation coefficient, optimal set length, optimal confidence level.

[5] Postgraduate student of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

[6] Senior Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

[7] Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

[8] Deputy Director of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.

*УДК 517.938*

# Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных потоков с седлами одинакового индекса Морса на 3-многообразиях

© **В. З. Гринес[1], О. В. Починка[2], А. В. Рузаев[3], А. Н. Сахаров[4]**

**Аннотация.** Показывается, что для градиентно-подобных потоков с седловыми состояниями равновесия одинакового индекса Морса на замкнутых 3-многообразиях энергетическая функция является полным инвариантом.

**Ключевые слова:** потоки Морса-Смейла, энергетическая функция, топологическая эквивалентность

## 1. Введение

Пусть $M^n$ – гладкое замкнутое ориентируемое $n$-мерное многообразие. Напомним, что гладкий поток $f^t$ называется *потоком Морса-Смейла*, если он задается гладким векторным полем[5] $v : M^n \to TM^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество потока $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических особых точек $p_1, \dots, p_l$ (собственные числа линеаризации поля $v(x)$ в особых точках имееют ненулевые действительные части) и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ (мультипликаторы[6] любой замкнутой траектории по модулю не равны 1);

2. устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений имеют трансверсальное пересечения.

Поток Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит замкнутых траекторий.

А.М. Ляпунов разработал метод исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании функции, получившей название функции Ляпунова. Эта функция убывает вдоль траекторий системы, что и легло в основу определения глобальной функции Ляпунова для потока.

Пусть $f^t$ – поток Морса-Смейла, заданный на многообразии $M^n$ и $\Omega(f^t)$ его неблуждающее множество.

**Определение 1.1.** *Непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова потока Морса-Смейла $f^t$ на $M^n$, если она удовлетоворяет следующим условиям.*

---

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

[2] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

[3] Студент 5-го курса, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск;

[4] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

[5] Как всегда, символы $TM^n$ и $NM^n$ обозначают касательное и нормальное расслоения над гладким многообразием $M^n$.

[6] Мультипликаторы периодического решения – собственные значения оператора линейной части отображения за период, определенного в некоторой окрестности этого решения.

1. *$\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;*

2. *$\varphi$ является константой на каждой траектории из $\Omega(f^t)$*

Согласно Ч. Конли [2] функция Ляпунова существует для любого потока Морса-Смейла[7]. При этом, если для данного потока функция Ляпунова известна из каких-либо физических соображений (например, функция энергии для диссипативных систем в механике), то зная множество критических точек этой функции, можно (в определенном смысле) восстановить динамику самого потока. Более того, при некоторых ограничениях на классы потоков и функций Ляпунова можно извлечь и более детальную информацию о взаимоотношениях между функцией Ляпунова и динамикой потока. В частности, функция Ляпунова может оказаться полным топологическим инвариантом систем из некоторого класса.

Напомним, что гладкая функция $\varphi : M^n \to R$ называется *функцией Морса*, если множество ее критических точек конечно и состоит из невырожденных точек, то есть точек в которых определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ (гессиан) отличен от нуля. Для критической точки $p$ функции Морса $\varphi$ число отрицательных собственных значений матрицы $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, вычисленной в точке $p$, называют *индексом критической точки* $p$ и обозначают $\mathrm{ind}\,(p)$. В некоторой окрестности критической точки $p$ существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция $\varphi$ имеет вид

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

где $k = \mathrm{ind}(p)$ (лемма Морса, [5], лемма 2.2).

Естественное ограничение на функцию Ляпунова $\varphi$ для градиентно-подобного потока $f^t$ состоит в требовании, что она является функцией Морса. В этом случае, аналогично [7] (Proposition), можно доказать, что каждая неподвижная точка $p$ потока $f^t$ является критической точкой функции $\varphi$, при этом *индекс Морса* $\dim\, W_p^u$ равен $\mathrm{ind}(p)$.

Если множество критических точек гладкой функции Ляпунова $\varphi$ для потока $f^t$ совпадает с множеством $\Omega(f^t)$, то $\varphi$ называется *энергетической функцией* для $f^t$. Факт существования энергетической функции для потоков из заданного класса требует обоснования. Первый результат в этом направлении был получен С. Смейлом [8], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса для градиентно-подобных потоков, заданных на гладком замкнутом ориентируемом многообразии $M^n$, $n \geq 1$. В 1968 году К. Мейер [4] обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта[8] для произвольных потоков Морса-Смейла на $M^n$.

Как уже отмечалось энергетическая функция может служить для топологической классификации потоков Морса-Смейла, в основе которой лежит важное понятие, принадлежащее Р. Тому [10].

**Определение 1.2.** *Две гладкие функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\psi : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $G : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\psi \circ G = \chi \circ \varphi.$$

[7] На самом деле Конли доказал более общее утверждение: для любого потока существует непрерывная функция Ляпунова.

[8] Функция $\varphi$ называется *функцией Морса-Ботта*, если ее гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

К. Мейер доказал ([4], theorem 2), что топологически эквивалентные потоки Морса-Смейла имеют топологически эквивалентные энергетические функции. В работе [4] (proposition) утверждалось, что для потоков Морса-Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях, некоторая *специальная энергетическая функция* является полным топологическим инвариантом. Однако, как было отмечено А.А. Ошемковым и В.В. Шарко [6], этот результат верен только для градиентно-подобных потоков. В [6] указаны примеры топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла с замкнутыми траекториями на торе, имеющими эквивалентные специальные энергетические функции. Специальная энергетическая функция для градиентно-подобного потока $f^t : M^n \to M^n$ — это *самоиндексирующаяся* функция Морса, то есть функция Морса $\varphi : M^n \to [0, n]$ такая, что $\varphi(p) = \mathrm{ind}(p)$ для любой критической точки $p$ потока.

В настоящей работе показывается, что для градиентно-подобных потоков, имеющих седловые состояния равновесия одинакового индекса Морса и заданных на ориентируемом замкнутом многообразии размерности 3, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Обозначим через $\Phi(M^3)$ класс таких потоков и для определенности будем полагать, что все седловые состояния равновесия рассматриваемых потоков имеют индекс Морса 1.

**Теорема 1.1.** *Пусть $f^t \in \Phi(M^3)$. Тогда неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие $M^3$ диффеоморфно 3-сфере.*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.2.** *Потоки $f^t, f'^t \in \Phi(M^3)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

## 2. Доказательство теоремы 1.1.

Пусть $f^t \in \Phi(M^3)$. Обозначим через $k \geq 0$ число седловых состояний равновесия потока $f^t$ и через $f$ сдвиг на единицу времени потока $f^t$. Тогда $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса-Смейла с $k$ седловыми точками индекса Морса 1 и без седловых точек с индексом Морса 2. Индукцией по числу $k$ покажем, что неблуждающее множество $\Omega(f)$ содержит ровно один источник, $k \geq 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие $M^3$ диффеоморфно 3-сфере.

Если $k = 0$, то неблуждающее множество $\Omega(f)$ диффеоморфизма $f$ состоит в точности из одного источника и одного стока, а объемлющее многообразие диффеоморфно $\mathbb{S}^3$ (см., например, [3], теорема 2.2.1).

Предположим, что утверждение теоремы имеет место для $k < n$, докажем его справедливость для $k = n$.

Выберем некоторую седловую точку $\sigma$ диффеоморфизма $f$. Тогда 2-сфера $S = cl\ (W^s_\sigma)$ является топологическим репеллером, следовательно, существует окрестность $U(S) \in M^3$ и целое положительное число $r(S)$ такое, что $U(S) \subset int\ f^{r(S)}(U(S))$. Не уменьшая общности можно считать, что $r(S) = 1$ для любого $\sigma$ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма $f$, при этом многообразие $M^3$ останется прежним).

Из работы [1] (Proposition 0.1) следует, что для каждой седловой точки $\sigma$ диффеоморфизма $f$ существует замкнутая окрестность $V(S) \subset U(S)$ сферы $S$, ограниченная гладко вложенными 2-сферами $S_1$, $S_2$ и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через $l_1$ и $l_2$ неустойчивые сепаратрисы точки $\sigma$, через $\omega_1$ и $\omega_2$ – стоковые точки, принадлежащие замыканиям $l_1$ и $l_2$ соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма $f$ с линейным отображением следует, что дуги $cl\ l_1 \cap V(S)$ и $cl\ l_2 \cap V(S)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(S) \setminus S$.

Удалим из многообразия $M^3$ внутренность окрестности $V(S)$. Многообразие $M^3 \setminus int\ V(S)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер $S_1$, $S_2$. Обозначим через $\tilde{M}^3$ компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus int\ V(S)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых 3-шаров $B_1^3$ и $B_2^3$. Зададим диффеоморфизм $\widetilde{f} : \tilde{M}^3 \to \tilde{M}^3$ таким образом, что:

1) диффеоморфизм $\widetilde{f}|_{\tilde{M}^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^3 \setminus int\ V(S)}$;

2) $\widetilde{f}|_{B_1^3 \cup B_2^3}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B_1^3$, $\alpha_2 \in B_2^3$, каждая из которых является неподвижным источником.

Неблуждающее множество $\Omega(\widetilde{f})$ диффеоморфизма Морса-Смейла $\widetilde{f}$ содержит $n-1$ седловых точек с индексом Морса 1 и не содержит седловых точек с индексом Морса 2. Поскольку $\Omega(\widetilde{f})$ содержит в точности два источника, то, по предположению индукции, многообразие $\tilde{M}^3$ состоит из двух компонент связности $\tilde{M}_1^3$, $\tilde{M}_2^3$, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{S}^3$.

По построению многообразие $M^3$ является связной суммой двух экземпляров 3-сфер[9]. Поэтому $M^3$ гомеоморфно 3– сфере. Поскольку диффеоморфизм $\widetilde{f}|_{\tilde{M}^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^3 \setminus int\ V(S)}$, то неблуждающее множество диффеоморфизма $f$ содержит ровно один источник, $n$ седел и $n+1$ сток. Теорема доказана.

## 3. Доказательство теоремы 1.2.

**Необходимость.** Пусть $\varphi$ и $\varphi'$ – самоидексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса-Смейла $f^t$ и $f'^t$ из множества $\Phi(M^3)$ и $h : M^3 \to M^3$ гомеоморфизм, преобразующий траектории потока $f^t$ в траектории потока $f'^t$. Тогда из определения самоидексирующейся функции и свойств гомеоморфизма $h$ следует, что для любого состояния равновесия $p$ потока $f^t$ имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма $\chi$ тождественное отображение, и сконструируем гомеоморфизм $G$, удовлетворяющий определению 1.2.

Пусть $x \in M^n$ произвольная точка отличная от состояния равновесия потока $f^t$. Обозначим через $l_x$ траекторию потока $f^t$ ($f'^t$), проходящую через точку $x$ и через $\alpha(l_x)$ ($\omega(l_x)$) состояние равновесия, являющееся $\alpha$-предельным ($\omega$ -предельным) множеством траектории $l_x$. Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма $h$ следует, точка $\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x))$ ($\omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x))$). Кроме того, имеют место равенства: $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}))$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$. Пусть $c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x)))$

[9] Связной суммой $M_1^3 \sharp M_2^3$ двух ориентируемых связных 3-многообразий $M_1^3$, $M_2^3$ называется многообразие $M_1^3 \sharp M_2^3$, полученное удалением из $M_1^3, M_2^3$ шаров $B_1^3 \subset M_3^1$, $B_2^3 \subset M_2^3$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\varphi : \partial B_1^3 \to \partial B_2^3$, обращающего естественную ориентацию $\partial B_1^3$.

и $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ $(\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c))$. Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ $(\Sigma'_c \cap l_{x'})$ состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^3 \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение $\tilde{G}$, ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение $\tilde{G}$ является гомеоморфизмом между множествами $M^3 \setminus \Omega(f^t)$ и $M^3 \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока $f^t$ и множество регулярных уровней функции $\varphi$ в траектории потока $f'^t$ и множество регулярных уровней функции $\varphi'$ [10]. В силу свойства $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})$ для любой точки $x$, отличной от состояния равновесия, гомеоморфизм однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма $G$, удовлетворяющего условию: $\varphi(x) = \varphi'(G(x))$.

**Достаточность.** Пусть $f^t$ и $f'^t$ потоки из множества $\Phi(M^3)$, имеющие эквивалентные самоиндексирующиеся энергетические функции $\varphi$ и $\varphi'$, соответственно. Из определения эквивалентных функций следует, что существуют гомеоморфизмы $G : M^3 \to M^3$ и $\chi : [0,3] \to [0,3]$, для которых выполняется условие $\varphi' \circ G = \chi \circ \varphi$.

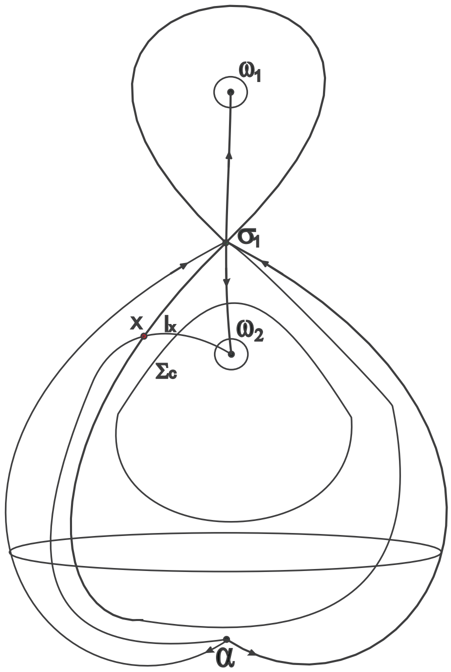



Рис. 1: Построение отображения $h_1$.

Согласно теореме 2.3 работы [9], $M^3 = \bigcup\limits_{p \in \Omega(f^t)} W^s_p$. Для $q = 0,1,2,3$ обозначим через $\Omega_q(f^t)$ множество всех состояний равновесия потока $f^t$ с индексом Морса $q$. Из теоремы 1.1. следует, что множество $\Omega_3(f^t)$ состоит из одного источника $\alpha$. Для любого $c \in [0,3]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c), \Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c)$ и $M_c = \varphi^{-1}([0,c]), M'_c = (\varphi')^{-1}([0,c])$. Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W^s_{\Omega_1(f^t)} = \Omega_1(f^t)$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности $Q$ множества $M_1 \setminus \Omega_1(f^t)$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0(f^t)$ такой, что $Q \subset W^s_{\omega_S}$. Пусть $x \in (\partial Q \setminus \Omega_1(f^t))$. Тогда траектория $l_x$ потока $f^t$, проходящая через точку $x$ имеет $\omega$-предельную точку $\omega_Q$ и $\alpha$-предельную точку $\alpha$. Кроме того, для любого $c \in (0,3)$ множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = G(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока $f'^t$, аналогичных введенным выше объектам потока $f^t$. Тогда на множестве $W^s_{\Omega_0(f^t)} \setminus cl\, W^u_{\Omega_1(f^t)}$ корректно определено отображение $\tilde{h}_1$, переводящее точку $\Sigma_c \cap l_x$ в точку $\Sigma'_{\chi(c)} \cap l_{x'}$ (см. рисунок

[10] Регулярным уровнем функции Морса называется уровень, не содержащей критических точек.

1). Поскольку $\omega_{_{Q'}} = G(\omega_{_Q})$ и отображение $\tilde{h}_1$ переводит множества уровня функции $\varphi$ в множества уровня функции $\varphi'$, то $\tilde{h}_1$ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $h_1 : W^s_{\Omega_0(f^t)} \to W^s_{\Omega_0(f'^t)}$, осуществляющего топологическую эквивалентность ограничений потоков $f^t$ и $f'^t$ на множества $W^s_{\Omega_0(f^t)}$ и $W^s_{\Omega_0(f'^t)}$.

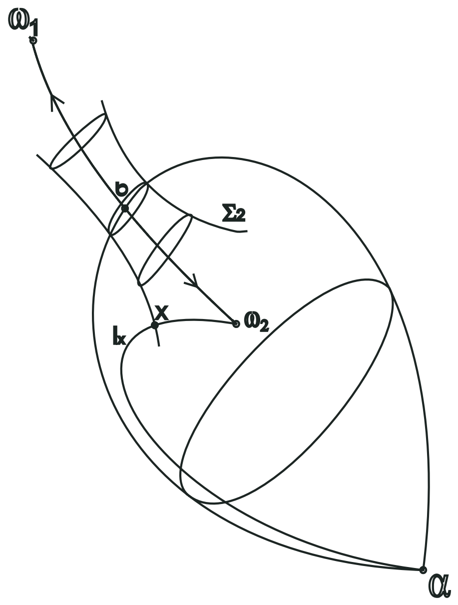



Рис. 2: Построение отображения $h_2$.

Положим $C = \Sigma_2 \cap W^u_{\Omega_1(f^t)}$ и $C' = \Sigma'_2 \cap W^u_{\Omega_1(f'^t)}$. Согласно теории Морса, линия уровня $\Sigma_2$ $(\Sigma'_2)$ является гладкой 2-сферой. Поскольку $\varphi$ $(\varphi')$ является энергетической функцией потока $f^t$ $(f'^t)$ и $\Sigma'_2 = G(\Sigma_2)$, то множество $C$ $(C')$ состоит из $k$ окружностей, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W^s_{\Omega_1(f^t)}$ $(W^s_{\Omega_1(f'^t)})$. Поскольку $h_1(\Sigma_2 \setminus C) = \Sigma'_2 \setminus C'$ и $h_1|_{\Omega_0(f^t)} = G|_{\Omega_0(f^t)}$, то существует гомеоморфизм $g : \Sigma_2 \to \Sigma'_2$ со следующими свойствами:

a) $g(C) = C'$;

b) существует окрестность $V(C)$ множества $C$ такая, что $g|_{\Sigma_2 \setminus V(C)} = h_0|_{\Sigma_2 \setminus V(C)}$.

Пусть $x \in \Sigma_2$, $c \in (0, 3)$. Тогда на множестве $W^u_\alpha \setminus \alpha$ корректно определено отображение $\tilde{h}_2$, переводящее точку $\Sigma_c \cap l_x$ в точку $\Sigma'_{\chi(c)} \cap l_{x'}$ (см. рисунок 2). Поскольку $\alpha' = G(\alpha)$, то отображение $\tilde{h}_2$ единственным образом продолжается до гомеоморфизма $h_2 : W^u_\alpha \to W^u_{\alpha'}$, осуществляющего топологическую эквивалентность потоков $f^t$ и $f'^t$ на множествах $W^u_\alpha$ и $W^u_{\alpha'}$. Поскольку гомеоморфизм $h_2$ переводит множества уровня функции $\varphi$ в множества уровня функции $\varphi'$, то $h_2$ единственным образом продолжается по непрерывности до искомого гомеоморфизма $h : M^3 \to M^3$ формулой $h(x) = \begin{cases} h_2(x), \text{ если } x \in W^u_\alpha; \\ h_1(x), \text{ если } x \in cl\ W^u_{\Omega_1(f^t)}. \end{cases}$ Теорема доказана.

# Список литературы

1. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its Applications*, **117** (2002), 335 – 344.

2. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.

4. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

5. Milnor J., *Morse Theory*, Princeton University Press, N.Y. (русский перевод: Милнор Дж. Теория Морса. – М.: Мир. 1965.), 1963.

6. Ошемков А.А., Шарко В.В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.

7. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

8. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math.*, **1**:1 (1961), 199–206.

9. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи мат. наук*, **25**:1 (1970), 113 – 125.

10. Thom R., “La stabilite topologique des applications polinomiales”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.

# Energy function as complete topological invariant for the gradient-like flows with the saddle points of the same Morse index on 3-manifolds

**© V. Z. Grines[11], O. V. Pochinka[12], A. V. Ruzaev[13], A.N. Sakharov[14].**

**Abstract.** It is shown that for gradient-like flows with the same Morse index on closed 3-manifolds the energy function is a complete invariant.

**Key Words:** Morse-Smale flows, energy function, the topological equivalence

[11] Professor of Chair of numerical and functional analysis, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, vgrines@yandex.ru

[12] Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

[13] Graduatied student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

[14] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.

*УДК 541.127*

# Декомпозиция систем дифференциальных уравнений химической кинетики на основе теории графов

© **С. И. Спивак**[1] **А. С. Исмагилова**[2]

**Аннотация.** Предметом исследования данной работы являются обратные задачи химической кинетики. Обратная задача состоит в определении констант скоростей элементарных стадий на основе экспериментальных данных о концентрациях участвующих в реакции веществ. Основным результатом является построение методологии анализа информативности кинетических измерений при решении обратных задач, позволяющей выделить число и вид независимых комбинаций констант скоростей реакций.

**Ключевые слова:** Обратная задача, информативность, параметры модели, базис параметрических функций, граф химической реакции.

Основная проблема, которая возникает при исследовании меанизмов сложных химических реакций, – недостаточная информативность кинетических измерений [1]. Сложность состоит в том, что из участников реакции непосредственно проанализировать можно только часть – исходные вещества и продукты реакции. Изучение сложных химических реакций приводит к схемам с большим количеством промежуточных веществ, которые невозможно проанализировать в ходе реакции.

Таким образом, возникает значительная степень неопределенности при оценивании параметров математических моделей кинетики сложных реакций. Следствием является неоднозначность решения обратной задачи [2].

Важно знать, какие из констант однозначно определяются по заданной структуре эксперимента, какие опредляются только в виде функциональных комбинаций, количество независимых комбинаций и каков их явный вид. Если при всем этом число таких комбинаций меньше общего числа констант, то в технологических целях удобно иметь дело с моделями, содержащими меньшее число параметров.

В [3], [4] рассматривается данный вопрос, получены общие результаты. Основным аппаратом исследований является теория функций, матрицы Якоби частных производных от измеряемых величин.

Кинетическую модель чаще всего представляют в виде:

$$\frac{da}{dt} = f\left(a, k\right),$$

где $a$ – вектор концентраций веществ, $k$ – вектор кинетических констант, $f$ выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Если измеряются концентрации части веществ, то $a = \left(x', y\right)$, где $x'$ и $y$ – вектора измеряемых и неизмеряемых веществ соответственно. Концентрация неизмеряемых веществ определяется из некоторых дополнительных соотношений. Система кинетических уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1\left(x', y, k\right) \\ f_2\left(x', y, k\right) = 0 \\ x'\left(0\right) = x'_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

[1] Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[2] Докторант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; ismagilovaas@rambler.ru.

$x' = x + F(x, \varepsilon)$, где функция $F(x, \varepsilon)$ заключает в себе информацию о погрешности измерения, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1$ – предельно допустимая погрешность эксперимента. Параметр $\varepsilon$ входит в вектор определяемых параметров $k' = k'(k, \varepsilon)$.

Для решения задачи определения числа и вида нелинейных параметрических функций (НПФ) достаточно исследовать матрицу

$$U = \left(\frac{\partial f_1}{\partial k'}\right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial k'}\right), \qquad (1.2)$$

явный вид которой определяется правыми частями системы (1.1). Следовательно, существует ненулевая матрица $A$, зависящая от $k$ и $\varepsilon$, такая, что $U \cdot A \equiv 0$. Если эта матрица найдена, то базис независимых частных решений системы

$$\frac{\partial \rho}{\partial k'} \cdot A = 0,$$

где $\rho_1(k, \varepsilon)$, ... , $\rho_m(k, \varepsilon)$ – система НПФ, $m$ – число линейно независимых столбцов матрицы Якоби. Матрицу $A$ называют матрицей связей.

Рассмотрим модельную реакцию:

$$\begin{array}{l} 1) A + Z \Rightarrow AZ \\ 2) AZ \Rightarrow BZ \\ 3) BZ \Rightarrow B + Z \end{array} \qquad (1.3)$$

Будем предполагать, что измеряются с погрешностью текущая концентрация исходного вещества $A$, продукта реакции $B$, т.е. $[x_1, x_2] = [A, B]$, $x'_i = x_i(1 + \varepsilon_i)$, $1 \le i \le 2$. Концентрации промежуточных веществ $Z$, $AZ$, $BZ$ определяются из условий квазистационарности, т.е. $[y_1, y_2, y_3] = [Z, AZ, BZ]$.

Выпишем матрицы, входящие в выражение для $U$ (1.2):

$$\frac{\partial f_1}{\partial k} = \begin{pmatrix} -x'_1 y_1 & 0 & 0 & -k_1 x_1 y_1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \begin{pmatrix} -k_1 x'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k} = \begin{pmatrix} -x'_1 y_1 & 0 & y_3 & -k_1 x_1 y_1 \\ x'_1 y_1 & -y_2 & 0 & k_1 x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \begin{pmatrix} -k_1 x'_1 & 0 & k_3 \\ k_1 x'_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -k_2 & k_3 & k_2 k_3 \\ -k_1 x'_1 & -k_1 x'_1 - k_3 & k_1 k_3 x'_1 \\ k_1 x'_1 + k_2 & k_1 x'_1 & k_1 k_2 x'_1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = -k_1 k_2 k_3 x_1 y_1.$$

Тогда матрица Якоби для $x'(x, \varepsilon)$ от $k'(k, \varepsilon)$ будет выглядеть следующим образом:

$$U = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \frac{1}{k_1}(1+\varepsilon) & \frac{y_2}{k_2 y_1}(1+\varepsilon) & \frac{y_3}{k_3 y_1}(1+\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица связей $A$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2^2 \\ 0 & -k_3^2 \\ -(1+\varepsilon_1) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Получим два уравнения:

$$k_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial k_1} - (1+\varepsilon_1)\frac{\partial \rho_1}{\partial \varepsilon_1} = 0, \qquad k_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial k_2} - k_3^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial k_3} = 0,$$

частное решение которых можно представить системой

$$\rho_1 = k_1 \left(1 + \varepsilon_1\right), \qquad \rho_2 = \frac{k_2 + k_3}{k_2 k_3}. \tag{1.5}$$

Пусть модель представлена в виде, содержащем только независимые параметры $\rho_1$ и $\rho_2$. Пусть найдены численные значения $\rho_1$ и $\rho_2$, удовлетворительно описывающие $x = (x_1, x_2)$. Тогда формулы (1.5) определяют интервал изменения $\rho_1$ в пределах величины погрешности измерений.

Данный подход, как видим, достаточно трудоемкий. Здесь речь идет об аналитических вычислениях с нелинейными выражениями.

Для устранения данной проблемы был предложен метод анализа информативности кинетических измерений, позволяющий решить задачу декомпозицией исходной системы на подсистемы меньшей размерности в числе, равном числу независимых маршрутов [5], [6]:

1. Нахождение маршрутов химической реакции, разложение исходной системы на подсистемы, соответствующим маршрутам.
2. Нахождение матрицы $U$ для каждой из подсистем. Объединение $U$-матриц.
3. Нахождение базиса НПФ кинетических параметров для исходной системы.

Иначе говоря, предлагаемый алгоритм представляет собой декомпозицию системы по независимым маршрутам, определение числа и вида НПФ для исходной сложной системы эквивалентно анализу для нескольких систем, соответствующих независимым маршрутам. Справедлива теорема:

**Теорема 1.1.** *Совокупность стадий химической реакции можно разбить на подсистемы, в которые входят части стадий исходного механизма. Число таких подсистем равно числу независимых маршрутов. Объединение $U$-матриц для каждой подсистемы позволяет выписать $U$-матрицу всей системы и найти базис НПФ исходной сложной системы реакций.*

Для развития представлений о закономерностях сложных реакций оказалось весьма полезным применение теории графов. Она была использована многими авторами для иллюстрации и анализа механизмов сложных реакций, а также вывода кинетических уравнений. Далее предложен теоретико-графовый подход анализа идентифицируемости параметров математических моделей химической кинетики.

Напомним некоторые понятия из теории графов [7].

Совокупность ребер, продолжающих друг друга, называют цепью. Цепь, у которой начало и конец совпадают, называют циклом. Корневым деревом называют цепь, проходящую через все вершины графа к фиксированной вершине, называемой корнем, и в ней заканчивающейся. Величине каждого ребра дают количественную характеристику, называемую весом.

В качестве графической интерпретации М.И.Темкиным [8] введен граф химической реакции. Вершинами графа являются промежуточные вещества, ребрами – стадии. В случае линейной стадии ребро соединяет вершины, отвечающие промежуточным веществам, участвующим в этой стадии. Для интерпретации нелинейной стадии в рассмотрение введены вторичные ребра. На графе первичные ребра изображают в виде сплошной линии, вторичные – пунктирной. Под весом ребра графа химической реакции будем понимать удельную (на единицу промежуточного соединения или поверхностного центра) скорость реакции. Веса ребер, ведущих к корню дерева, для параллельных реакций складываются, а последовательные – перемножаются.

Итак, алгоритм нахождения параметров математических моделей следующий:

1. Нахождения цикла, построение корневых деревьев.
2. Нахождение весов корневых деревьев, веса циклического графа.
3. Выписывание стационарного кинетического уравнения.
4. Нахождение базиса НПФ.

На Рисунке 1.1 изображен граф и корневые деревья модельной реакции (1.3).

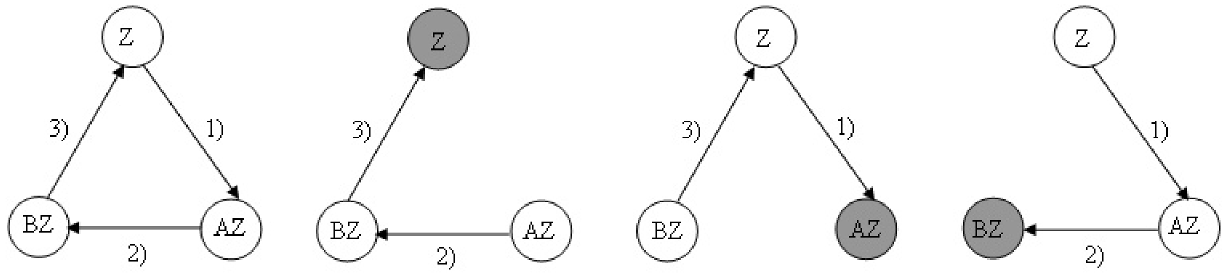



Рисунок **1.1**
Граф и корневые деревья механизма реакции (1.3)

Обозначим через $w_{i)}$ – скорость реакции $i$ $(1 \le i \le 3)$, $v_{i)}$ – вес дуги (скорость расходованияо̆бразования промежуточного вещества в $i)$-й реакции), $U$ – вес графа, $U = \sum_j U_j$, где $U_j$ – вес $j$-дерева, т.е. дерева с корнем в вершине $j$ $(j = Z, AZ, BZ)$.

Выражения для весов дуг получаются, если скорости реакций разделить на концентрации участвующих в реакции промежуточных веществ. Скорости реакций записывают в соответствии с законом действующих масс.

$$w_{1)} = k_1 x'_1 y_1, \quad w_{2)} = k_2 y_2, \quad w_{3)} = k_3 y_3$$
$$v_{1)} = k_1 x'_1, \quad v_{2)} = k_2, \quad v_{3)} = k_3$$
$$U_Z = v_2 v_3, \quad U_{AZ} = v_3 v_1, \quad U_{BZ} = v_1 v_2$$

Используя правило Мэзона для нахождения концентраций промежуточных веществ, можно получить стационарное кинетическое уравнение. Для рассматриваемой модельной реакции (1.3) скорость любой стадии равна скорости расходования вещества $A$ или скорости образования вещества $B$.

Таким образом,

$$R = \frac{v_2 U_{AZ}}{U_Z + U_{AZ} + U_{BZ}} = \frac{v_1 v_2 v_3}{v_2 v_3 + v_3 v_1 + v_1 v_2}$$
$$R = \frac{k_1 k_2 k_3 x'_1}{k_1 (k_2 + k_3) x'_1 + k_2 k_3} \tag{1.6}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial k} = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 k_3 (1+\varepsilon_1) & 0 & 0 & k_1 k_2^2 k_3^2 \\ 0 & k_1^2 k_3^2 (1+\varepsilon_1)^2 & k_1^2 k_2^2 (1+\varepsilon_1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\Delta = -k_1 k_2 k_3 x_1 y_1$.

Легко видеть, что решение (1.6) можно выразить в виде

$$Q(k') = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2^2 \\ 0 & -k_3^2 \\ -(1+\varepsilon_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $Q(k')$ полностью совпадает с матрицей связи $A$ (1.4).

## Список литературы


1. Спивак С. И., Горский В. Г., “О полноте доступных кинетических измерений при определении констант скоростей сложной химической реакции”, *Химическая физика*, 1982, № 2(1), 237–243.

2. Спивак С. И., Горский В. Г., “Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант”, *Доклады АН СССР*, 1981, № 2(257), 412.

3. Горский В. Г., Спивак С. И., “Исследование идентифицируемости параметров – один из важнейших этапов построения математических моделей в химии”, *Журнал структурной химии*, 1988, № 6(29), 119.

4. Спивак С. И. Тимошенко В. И., Слинько М. Г., “Методы построения кинетических моделей стационарных реакций”, *Химическая промышленность*, 1979, № 3, 33.

5. Спивак С. И., Исмагилова А. С., “Метод анализа информативности кинетических измерений при определении параметров кинетических моделей химической кинетики”, *Журнал СВМО*, 2010, № 4(12), 51–58.

6. Альбина Исмагилова, Семен Спивак, *Обратные задачи химической кинетики. Каталитические реакции*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2013.

7. Харари Фрэнк, *Теория графов*, КомКнига, М., 2006.

8. Темкин М. И., *Механизм и кинетика сложных каталитических реакций. Кинетика стационарных сложных реакций*, Наука, М., 1970.


# Decomposition of systems of the differential equations of chemical kinetics on the basis of the graph theory

© **S. I. Spivak**[3] **A. S. Ismagilova**[4]

**Abstract.** The subject of the given paper research is inverse problems of chemical kinetics. The inverse problem is determining rate constants of elementary steps based on the experimental data of the substance concentrations involved in the reaction. The main result is developing a methodology of kinetic measuring informativity analysis when solving the inverse problems. This methodology makes it possible to find the number and type of independent combinations of reaction rate constants.

**Key Words:** Inverse problems, informativaty, model parameters, basis of parametric functions, graph of chemical reaction.

[3] Manager by the department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

[4] Doctoral student by the department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; ismagilovaas@rambler.ru.

## В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.9

# Нелокальная разрешимость задачи Коши для диссипативного уравнения плотности дислокаций с квадратичной нелинейностью

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2]

**Аннотация.** Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, характеризующее изменение плотности дислокаций при наличии диффузионной ползучести. С применением метода дополнительного аргумента выведены глобальные оценки самого решения и его производных до третьего порядка по пространственным переменным; определены условия, при которых задача Коши имеет нелокальное решение.

**Ключевые слова:** плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, глобальные оценки, нелокальная разрешимость, метод дополнительного аргумента.

В работе [1] при изучении динамики дислокаций в температурно- зависимых явлениях, таких как диффузионная ползучесть, для определения плотности дислокаций было выведено уравнение:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \delta \left[ \left( \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \nu}{\partial x_2} \right)^2 \right] - A\nu + B\nu^2 = 0, \tag{1.1}$$

где $\delta, A, B$ - положительные константы, характеризующие параметры физического процесса, и, в частности, зависящие от температуры. При выводе уравнения (1.1) за основу была взята модель изменения скалярной плотности дислокаций в стержнях при кручении. Вместе с тем известно, что упругое кручение стержней из-за эффекта Пойнтинга вызывает продольные деформации как при малых, так и при больших деформациях [2]. Андроновым И.Н. и Лихачёвым В.А. [3] обнаружен эффект удлинения стержней при жёстком пластическом циклическом кручении с малой скоростью нагружения, зависящий от температуры, амплитуды и числа циклов закручивания, и вызванный дислокационной текстурой металлов, близкой к диффузионной ползучести. Таким образом, энергетический баланс для свободной энергии при кручении [4] является универсальным и приемлемым для растяжения стержней при диффузионной ползучести, сохраняющий вид дифференциального оператора в правой части уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) описывает изменение плотности переползающих дислокаций с течением времени при заданном начальном условии

$$\nu(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2), \qquad x_1^2 + x_2^2 \le R^2. \tag{1.2}$$

Но так как для дифференциального уравнения первого порядка необходимы дополнительные исследования, чтобы определить условия, при которых решение задачи Коши (1.1)-(1.2) не выходит из круга $x_1^2+x_2^2 \le R^2$ , то в [1] было сделано упрощающее предположение,

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

что $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Так что начальное условие (1.2) приобрело вид

$$\nu(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

С помощью метода дополнительного аргумента [5] для задачи Коши(1.1),(1.3) в [1] было доказано наличие локального решения на некотором отрезке $[0, T_1]$, определяемом из условия сходимости последовательных приближений, и получены глобальные оценки для самой функции и её первых производных:

$$|\nu(t, x_1, x_2)| \leq C_1 = const, \quad \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_i}\right| \leq C_2 = const, \ i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Однако, оценок (1.4) недостаточно для доказательства существования нелокального решения на заранее заданном отрезке $[0, T]$. Для этого нужны (как вариант) глобальные оценки для вторых и третьих производных, выводу которых и посвящена данная статья.

Так же как в [1], применим для исследования задачи (1.1),(1.3) метод дополнительного аргумента. В соответствии с изложенной в [1] схемой вначале преобразуем задачу (1.1),(1.3) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.1) по $x_1$ и $x_2$ и введя новые неизвестные функции $p_1(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1}\nu(t, x_1, x_2), p_2(t, x_1, x_2) = \partial_{x_2}\nu(t, x_1, x_2)$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\right) = F_i(t, \nu, p_1, p_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.5}$$

где $F_i(t, \nu, p_1, p_2) = -(2B\nu - A)p_i$.

Из (1.1) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial \nu}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\right) = F_0(t, \nu, p_1, p_2), \tag{1.6}$$

где $F_0(t, \nu, p_1, p_2) = -B\nu^2 + A\nu + \delta(p_1^2 + p_2^2)$. Продифференцировав (1.3), получим начальные условия для $p_1$ и $p_2$:

$$p_i(0, x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2) = \partial_{x_i}\varphi_0(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.7}$$

Далее, продифференцировав (1.5), (1.7) по $x_1$ и $x_2$ и введя обозначения

$$q_0 = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad q_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad q_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_2},$$

придём ещё к трём уравнениям:

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial q_0}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right) = -[2\delta(q_1 + q_2) + 2B\nu - A]q_0 - 2Bp_1p_2, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial q_j}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial q_j}{\partial x_2}\right) = -2\delta q_j^2 - (2B\nu - A)q_j - 2\delta q_0^2 - 2Bp_j, \quad (j = 1, 2), \tag{1.9}$$

с соответствующими начальными условиями

$$q_0(0, x_1, x_2) = \varphi_{12}(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 \varphi_0(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{1.10}$$

$$q_j(0, x_1, x_2) = \varphi_{jj}(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 \varphi_0(x_1, x_2)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (j = 1, 2). \tag{1.11}$$

Составим для задачи (1.3),(1.5) - (1.11) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\delta w_1(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_1(t,t,x_1,x_2) = x_1, \tag{1.12}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\delta w_2(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_2(t,t,x_1,x_2) = x_2, \tag{1.13}$$

$$\frac{dw_i(s,t,x_1,x_2)}{ds} = F_i(s,w_0,w_1,w_2), \quad (i=0,1,2), \tag{1.14}$$

$$w_i(0,t,x_1,x_2) = \varphi_i(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \quad (i=0,1,2), \tag{1.15}$$

$$\frac{d\omega_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -[2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A]\omega_0 - 2Bw_1w_2, \tag{1.16}$$

$$\omega_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_{12}(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \tag{1.17}$$

$$\frac{d\omega_j(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -2\delta\omega_j^2 - (2Bw_0-A)\omega_j - 2\delta\omega_0^2 - 2Bw_j^2, \quad (j=1,2), \tag{1.18}$$

$$\omega_j(0,t,x_1,x_2) = \varphi_{jj}(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \quad (j=1,2). \tag{1.19}$$

Для задачи (1.12)-(1.15) при выполнении условий

$$\varphi_0 \in \bar{\ }^2(\mathbb{R}^2), \quad \varphi_0(x_1,x_2) \geq \frac{A}{2B} \tag{1.20}$$

из результатов работы [1] следуют глобальные оценки

$$\frac{A}{2B} \leq w_0(s,t,x_1,x_2) \leq N_0, \tag{1.21}$$

$$|w_i(s,t,x_1,x_2)| \leq \Phi_1, \quad (i=1,2), \tag{1.22}$$

где

$$N_0 = max\left\{\frac{A+\sqrt{A^2+2B\delta\Psi_1^2}}{2B}, \sup_{\mathbb{R}^2}\varphi_0\right\}, \quad \Phi_1 = max\{\sup_{\mathbb{R}^2}|\varphi_1|, \sup_{\mathbb{R}^2}|\varphi_2|\}.$$

Выведем глобальные оценки для $\omega_0, \omega_1, \omega_2$.

Примем пока формально, а потом установим условия выполнимости этого предположения, что имеет место неравенство

$$P \stackrel{def}{=} 2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A \geq 0. \tag{1.23}$$

С этим предположением из (1.16)-(1.17) следует глобальная оценка:

$$|\omega_0| \leq N_{00} \stackrel{def}{=} \Phi_{12} + 2B\Phi_1^2. \tag{1.24}$$

Для разности $\omega_1 - \omega_2$ из (1.18) вытекает уравнение

$$\frac{d(\omega_1-\omega_2)}{ds} = -[2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A](\omega_1-\omega_2) - 2B(w_1^2+w_2^2).$$

С учётом (1.23) последнее уравнение приводит к глобальной оценке

$$|\omega_1 - \omega_2| \le N_{12} \stackrel{def}{=} \Phi_{11} + \Phi_{22} + 2BN_1^2, \tag{1.25}$$

где $\Phi_{jj} = \sup_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{jj}|, \quad (j = 1, 2)$. Теперь сложим два уравнения из (1.18) и запишем уравнение для суммы $\omega_1 + \omega_2$:

$$\frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{ds} = -\delta(\omega_1 + \omega_2)^2 - (2Bw_0 - A)(\omega_1 + \omega_2) - \delta(\omega_1 - \omega_2)^2 - 4\delta\omega_0^2 - 2B(w_1^2 + w_2^2). \tag{1.26}$$

С целью вывода глобальной оценки для $\omega_{12} \stackrel{def}{=} \omega_1 + \omega_2$ рассмотрим квадратное уравнение

$$\delta y^2 + (2Bw_0 - A)y + \delta(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\delta\omega_0^2 + 2B(w_1^2 + w_2^2) = 0. \tag{1.27}$$

Чтобы это уравнение имело действительные решения, необходимо чтобы дискриминант $d = (2Bw_0 - A)^2 - 4\delta^2(\omega_1 - \omega_2)^2 - 16\delta\omega_0^2 - 8\delta B(w_1^2 + w_2^2)$ был не меньше нуля:

$$d \ge 0. \tag{1.28}$$

С учётом уже имеющихся оценок (1.24), (1.25), (1.22) и возможностью выбрать $\min \varphi_0$ достаточно большим (что оправдано с физической точки зрения), можно конкретно определить условия, когда (1.28) имеет место.

При выполнении (1.28) уравнение (1.27) имеет два корня

$$y_1 = \frac{-(2Bw_0 - A) + \sqrt{d}}{2\delta}, \quad y_1 = \frac{-(2Bw_0 - A) - \sqrt{d}}{2\delta}.$$

Применив к уравнению (1.26) с начальным условием

$$\omega_1 + \omega_2|_{s=0} = \varphi_{11} + \varphi_{22}$$

метод оценок с использованием мажорантных и минорантных уравнений, развитый в [6], [7], получим, что при

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} > y^* \stackrel{def}{=} \max_{s \in [0,T]} y_1 \tag{1.29}$$

будет справедлива оценка

$$y^* \le \omega_1 + \omega_2 \le \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2}. \tag{1.30}$$

В силу оценки (1.30)

$$\omega_1 + \omega_2 \ge \frac{-(2Bw_0 - A) + \sqrt{d}}{2\delta} > -\frac{2Bw_0 - A}{2\delta}.$$

А значит $P = 2\delta(w_1 + w_2) + 2Bw_0 - A > -2\delta\frac{2Bw_0 - A}{2\delta} - (2Bw_0 - A) \ge 0$.

Таким образом, в рамках сделанных предположений условие (1.23) действительно имеет место, соответственно выполняются оценки (1.24), (1.25), (1.30).

Из (1.25), (1.30) следуют оценки

$$\frac{-\Phi_{11} - \Phi_{22} + y^*}{2} - BN_1^2 \le \omega_i \le \Phi_{11} + \Phi_{22} + BN_1^2, \quad i = 1, 2.$$

Обозначив $N_1 + \max\{\Phi_{11} + \Phi_{22} + BN_1^2, \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22} + N^*) + BN_1^2\}$, где $N^* = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} y^*$, получим глобальную оценку

$$|\omega_i(s, t, x_1, x_2)| \le N_1, \quad (i = 1, 2). \tag{1.31}$$

Как установлено в [1] при $\varphi_0 \geq \frac{A}{2B}$ выполняется неравенство $w_0(s,t,x_1,x_2) \geq \varphi_0$ при всех $x$. Пусть $\Phi_0 (\Phi_0 \geq \frac{A}{2B})$ то минимальное значение $\varphi_0(x_1,x_2)$, при котором имеет место условие (1.28). Из оценок (1.4), (1.22), (1.24), (1.31) при выполнении условий (1.28), (1.29), $\varphi_0 \geq \Phi_0$, вытекают оценки

$$\begin{gathered}\Phi_0 \leq \nu(s,t,x_1,x_2) \leq N_0,\\ \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_i}\right| \leq C_2, (i=1,2), \quad \left|\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \leq N_{00}, \quad \left|\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_j \partial x_j}\right| \leq N_1, (i=1,2).\end{gathered} \tag{1.32}$$

Основываясь на выведенных глобальных оценках и тождествах

$$w_0(s,t,x_1,x_2) = w_0(s,s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)) = \nu(s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)),$$

$$w_i(s,t,x_1,x_2) = w_i(s,s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)) = p_i(s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)),$$
$$(i=1,2),$$

получим глобальные оценки

$$|\partial_{x_i} w_j| \leq M^1_{ij} = const, \qquad |\partial_{x_i} \eta_k| \leq C_\eta = const, \quad i=1,2; j=0,1,2; k=1,2.$$

Наконец, продифференцировав (1.18), (1.19) по $x_1$ и $x_2$, придем к двум линейным системам дифференциальных уравнений относительно $\partial_{x_1}\omega_j$ и $\partial_{x_2}\omega_j, (j=0,1,2)$. Для всех функций,входящих в эти системы (кроме $\partial_{x_1}\omega_j$ и $\partial_{x_2}\omega_j$) уже получены глобальные оценки. Основываясь на лемме 4.1 из главы IV книги [8] приходим к заключению, что существуют такие постоянные числа, не зависящие от локального интервала разрешимости, что

$$|\partial_{x_i}\omega_j| \leq M^2_{ij} = const, \quad i=1,2; j=0,1,2, \tag{1.33}$$

для всех $s,t$ на любом промежутке разрешимости задачи (1.12) - (1.19). Соответственно, оценка (1.33) сохраняется при $s=t$, т.е. $|\partial_{x_i} q_j(t,x_1,x_2)| \leq M^2_{ij}$, что влечет в свою очередь оценки:

$$\left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1^3}\right| \leq M^2_{11}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_2^3}\right| \leq M^2_{22}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right| \leq M^2_{12}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right| \leq M^2_{21}. \tag{1.34}$$

Полученные глобальные оценки (1.32), (1.34) дают возможность продлить решение на любой заданный вначале промежуток $[0,T]$. Сформулируем общий итог исследования.

**Теорема 1.2.** *Пусть $\delta, A, B$ - положительные числа, $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^3(\mathbb{R}^2)$, $\inf_{\mathbb{R}^2}\varphi_0 \geq A(2B)^{-1}$, выполнены условия* (1.28),(1.29). *Тогда задача Коши* (1.1),(1.3) *имеет решение $\nu(t,x_1,x_2) \in \overline{\mathbb{C}}^{1,3}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ на любом заданном вначале конечном промежутке $[0,T]$ изменения переменной $t$, которое совпадает при $s=t$ с функцией $w_0(s,t,x_1,x_2)$, определяемой из задачи* (1.12)- (1.17).

## Список литературы


1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Алексеенко Н. С., “Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций с квадратичной нелинейностью”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 15 – 21.

2. Зубов Л. М., “О прямом и обратном эффектах Пойнтинга в упругих цилиндрах.”, *Доклады РАН*, **380**:2 (2001), 194 – 196.
3. Андронов И. Н., Богданов Н. П., Власов В. П, Лихачёв В. А., “Закономерности осевого деформирования металлов при пластическом кручении”, *Проблемы прочности*, 1990, № 7, 86 – 90.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука, М., 1987.
5. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.
6. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.
7. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.
8. Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, "Мир", М., 1970.


# Nonlocal solvability od the Cauchy problem for the dissipative equation of the dislocation density with a quadratic non-linearity

**© S. N. Alekseenko**[3], **S. N. Nagornykh**[4]

**Abstract.** A non-linear first-order partial differential equation describing a dislocation density changing under a coercion of the diffusion creep is considered. The global estimates of the solution and its derivatives up to third order with respect to spatial variables are derived and the conditions of the non-local solvability of the Cauchy problem are determined with using the method of an additional argument.

**Key Words:** dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, global estimates, nonlocal solvability, method of an additional argument.

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

УДК 517.9

# Анализ чувствительности кинетических кривых к изменению констант скоростей реакции модели реакции гидроалюминирования олефинов

© Н. М. Байназарова[1], Л. Ф. Нурисламова[2], И. М. Губайдуллин[3]

**Аннотация.** Одна из задач исследования химических реакций - это оценивание значимости влияния ее стадий на весь ход протекания реакции. Поэтому при математическом моделировании химического процесса первоочередным шагом является анализ чувствительности кинетических кривых к константам скорости каждой стадии. Рассматривается классический подход анализа чувствительности применительно к реакции гидроалюминирования олефинов (ГАО) с диизобутилалюминийгидридом (ДИБАГ), диизобутилалюминийхлоридом (ДИБАХ). Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-07-00324 и № 12-07-31029)

**Ключевые слова:** реакция гидроалюминирования олефинов, задача Коши, анализ чувствительности.

## 1. Введение

Кинетические модели, основанные на детальных механизмах сложных химических реакций, как правило, представляют собой системы дифференциальных уравнений большой размерности. Важным этапом при моделировании различных химических процессов является анализ чувствительности концентрации веществ реакции к изменению констант скоростей отдельных стадий.

Локальный анализ чувствительности, состоящий в вычислении коэффициентов чувствительности первого порядка, дает возможность оценить, насколько сильно исследуемая функция зависит от изменений того или иного параметра; какие параметры главные в модели, а изменения каких из них оказывает незначительные влияния на механизм [1].

Также анализ чувствительности помогает в замене исходной системы системой меньшей размерности, в каком-то смысле эквивалентной исходной, сохраняющей при этом изменение концентраций целевых веществ, т.е. осуществить редукцию [2].

## 2. Математическая постановка

Задачи химической кинетики с математической точки зрения сводятся к задаче исследования и решения систем нелинейных ОДУ первого порядка с коэффициентами, роль которых играют константы скоростей реакции $k_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ [3]. При этом

[1] Студентка 4 курса, Башкирский государственный университет, г. Уфа; nurzilyasha@mail.ru.
[2] Аспирант первого года обучения, Институт нефтехимии и катализа, г. Уфа; Nurislamova_LF@mail.ru.
[3] Старший научный сотрудник института нефтехимии и катализа, г. Уфа; IrekMars@mail.ru.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dX_j}{dt} = f_j(k, X),\\
&f_j = \sum_{i=1}^{N} S_{ji} \cdot W_i, j = \overline{1, n},\\
&W_i = k_i \prod_{j=1}^{M} (X_j)^{|\alpha_{ji}|} - k_j^{-} \prod_{j=1}^{M} (X_j)^{\beta_{ji}},\\
&X_i(0) = X_i^0,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

где $X_i$ – концентрации веществ (мольные доли), участвующих в реакции; $M$ – количество веществ; $N$ – количество стадий; $S_{ji}$ – стехиометрическая матрица; $W_i$ – скорость $i$-ой стадии (1/ч); $k_j, k_j^-$ – приведенные константы скорости прямой и обратной реакции (1/ч), соответственно; $\alpha_{ji}$ – отрицательные элементы $S_{ji}$, $\beta_{ji}$ – положительные элементы $S_{ji}$.

Решения системы (2.1) являются функциями времени и зависят от $k_j$ как от параметров [4]. Из линейности и непрерывности правых частей системы (2.1) относительно $k$ следует существование и непрерывность производных $dX_j(t,k)/dk_i$. При этом определены и непрерывны вторые смешанные производные функций $X_j(t,k)$ по $t$ и $k_i$. Дифференцируя систему уравнений (2.1) по $k_i$ (при заданной совокупности значений $k_i$) и обозначая

$$u_{ji}(t,k) = \frac{dX_j}{dk_i}$$

Получаем систему уравнений для $u_{ji}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_{ji}}{dt} = F_{ji}(X, u, k),\\
&F_{ji}(X, u, k) = \frac{\delta f_j(X,k)}{\delta k_i} + \sum_{l=1}^{N} a_{jl}(X,k) u_{li}(X,k),\\
&a_{jl}(X,k) = \frac{\delta f_j(X,k)}{\delta X_l}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Так как функции $F_{ji}$ зависят не только от $u_{ji}$, но и от $X_j$, системы уравнений (2.1) и (2.2) следует решать совместно, при следующих начальных условиях:

$$X_j(0) = X_j^0, u_{ji}(0) = 0. \tag{2.3}$$

В литературе подробно изучены критерии чувствительности решений системы уравнений химической кинетики (2.1) к изменению входящих в них констант скоростей реакции [5].

В качестве такого критерия могут быть использованы функции

$$u_{ji}(t,k) = \frac{\delta X_j}{\delta k_i}, \tag{2.4}$$

но, так как константы скоростей чаще всего обладают различной размерностью, значения их могут отличаться друг от друга по величине на много порядков. Также различные концентрации $X_j$ могут очень сильно отличаться друг от друга и существенно изменяться в ходе реакции. В связи с этим традиционными являются следующие критерии чувствительности [4]:

$$\frac{k_i \delta X_j(t,k)}{\delta k_i} = \frac{\delta X_j(t,k)}{\delta ln k_i} = k_i u_{ji}(t,k), \tag{2.5}$$

$$\frac{\delta X_j(t,k)}{X_j(t,k)\delta k_i} = \frac{\delta ln X_j(t,k)}{\delta k_i} = \frac{u_{ji}(t,k)}{X_j(t,k)}, \tag{2.6}$$

$$\frac{k_i \delta X_j(t,k)}{X_j(t,k)\delta k_i} = \frac{\delta ln X_j(t,k)}{\delta ln k_i} = \frac{u_{ji}(t,k) k_i}{X_j(t,k)}, \tag{2.7}$$

Критерий (2.4) позволяет (при всех значениях $t$) определить насколько изменяется концентрация $X_j$ в результате изменения константы скорости $k_i$ на $\Delta k_i$ при $\Delta k_i \to 0$.

Критерий (2.7) определяет для каждого момента времени относительные изменения концентрации $X_j$, вызываемые относительными изменениями $\Delta k_i / k_i$ константы $k_i$.

Критерии чувствительности ((2.5)-(2.7)) позволяют оценить влияние изменения каждой из констант $k_i$ на любую из концентраций $X_j$ для любого момента времени $t$, и оценить влияние какой-либо одной из констант на все (или часть) концентраций для любого момента времени. При этом удается определить, какие из констант и на каких стадиях реакции являются определяющими или мало влияющими на реакцию [6].

## 3. Анализ чувствительности модели реакции гидроалюминирования олефинов

Большинство задач, изучаемых в Институте нефтехимии и катализа РАН, представляют собой сложный многостадийный процесс, где в схемы протекания реакций включают большое количество промежуточных веществ (радикалы и их комплексы), непосредственное экспериментальное изучение которых, как правило, затруднено, либо невозможно. Это приводит к значительным трудностям решения как прямых, так и обратных задач химической кинетики для данных реакций. Из-за ограниченного количества экспериментальных данных решение обратной задачи представляет собой всевозможный набор констант скоростей, которые с математической точки зрения адекватно описывают эксперимент. Поэтому на начальном этапе построения кинетической модели реакции необходимо провести анализ чувствительности внутренних параметров модели реакции к выходным параметрам.

Нами были рассмотрены частные реакции гидроалюминирования олефинов с диизобутилалюминийгидридом и диизобутилалюминийхлоридом.

Для ГАО с ДИБАГ система дифференциальных уравнений, выписанная по (2.1) имеет вид [7]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 + k_2x_2^2 - k_3x_1x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2k_1x_1 - 2k_2x_2^2 + k3x_1x_3 - k_4x_2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -k_3x_1x_3 - k_4x_2x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = k_3x_1x_3 + k_4x_2x_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

Начальные данные:

$$x_1(0) = 0.086, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.903, x_4(0) = 0.11. \tag{3.2}$$

где $x_i$ – концентрации соответствующих веществ $X_i$: $X_1 = [Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]_2, X_2 = [Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2], X_3 = HAlBu_2, X_4 = [Cp_2ZrH_2 \cdot HAlBu_2 \cdot ClAlBu_2], Cp = C_5H_5, Bu = C_4H_9$.

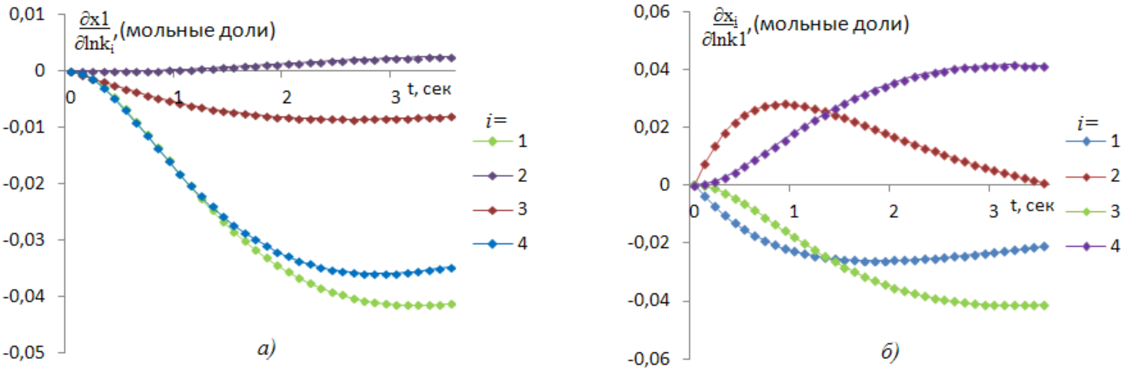
Константы скоростей для данной реакции при температуре $-65 \circ C$ представлены в табл. 1.

Таблица 1: Константы скоростей для частной схемы реакции ГАО с ДИБАГ, для температуры $-65 \circ C$

| $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ |
|---|---|---|---|
| 0.48 | 0.86 | 0.08 | 1.05 |

Из приведенных ниже рисунков видно, что значения критериев чувствительности могут быть положительными, отрицательными или обращаться в нуль. Положительное (отрицательное) значение критерия чувствительности в момент времени $t$ означает, что при принятых значениях констант увеличение данной константы скорости приводит к возрастанию (уменьшению) значения концентрации $X_j$ в данный момент времени. Равенство значения критерия нулю в момент времени $t$ означает, что в данной временной точке малое изменение $k_i$ не приводит к какому-либо изменению $X_j$ [4].

Для реакции ГАО с ДИБАГ проведен анализ чувствительности: решалась система уравнений (2.1), (2.2) при начальных данных (2.3). На рис. 3.1,а приведены кинетические кривые вещества $X_1$ к изменению констант скоростей реакции. Видим, что $x_1$ наиболее чувствителен к изменению константы $k_1$: ее увеличение приведет к уменьшению концентрации вещества $X_1$. Влияние же остальных констант на $X_1$ не столь существенно.




Р и с у н о к **3.1**

Зависимость от времени чувствительности концентрации $X_1$ к изменению констант $k_i$ и чувствительности концентрации $X_i$ к изменению константы $k_1$.

На рис. 3.1,б показана зависимость концентрации веществ $X_i$ от константы скорости $k_1$. Видим, что значение критерия чувствительности может существенно меняться в ходе реакции. Симметричное расположение кривых $\delta x_3/\delta ln k_1$ и $\delta x_4/\delta ln k_1$ обусловлено механизмом протекания реакции.

Для ГАО с ДИБАХ система дифференциальных уравнений, выписанная по (2.1) имеет вид [7]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 + k_2x_2^2 - k_5x_1x_5 - k_3x_1x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2k_1x_1 - 2k_2x_2^2 - k_6x_2x_5 + k_7x_3x_6 - k_4x_5x_6 + k_3x_1x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = k_6x_2x_5 - k_7x_3x_6 - k_4x_2x_3 - k_3x_1x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = k_5x_1x_5 + k_4x_2x_3 + k_3x_1x_3, \\ \frac{dx_5}{dt} = -k_6x_2x_5 + k_7x_3x_6 - k_5x_1x_5 - k_8x_5x_6, \\ \frac{dx_6}{dt} = k_6x_2x_5 - k_7x_3x_6 + k_5x_1x_5 - k_8x_5x_6, \\ \frac{dx_7}{dt} = k_8x_5x_6, \\ \frac{dx_8}{dt} = k_8x_5x_6 \end{cases} \tag{3.3}$$

Начальные данные:

$$x_1(0) = 0.086, x_4(0) = 0.034, x_5(0) = 0.88, x_i(0) = 0, i = 2, 3, 5, 6, 7, 8. \tag{3.4}$$

где $x_i$ – концентрации соответствующих веществ $X_i$: $X_1 = [Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]_2, X_2 = [Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2], X_3 = HAlBu_2, X_4 = [Cp_2ZrH_2 \cdot HAlBu_2 \cdot ClAlBu_2], X_5 = ClAlBu_2, X_6 = [Cp_2ZrHCl \cdot ClAlBu_2, X_7 = [Cl_2AlBu], X_8 = Cl_2AlBu, Cp = C_5H_5, Bu = C_4H_9$.

Константы скоростей для данной реакции при температуре $-40 \circ C$ представлены в табл. 2.

Таблица 2: Константы скоростей для частной схемы реакции ГАО с ДИБАХ, для температуры $-40 \circ C$

| $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ | $k_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0011 | 0.088 | 0.0017 | 19.2919 | 0.189 | 9.9984 | 2.9309 | 9.9745 |

На рис (3.2) приведена зависимость от времени чувствительности концентрации вещества $X_2$ к изменению наиболее значимых констант для данной реакции. Концентрация $x_2$ обладает наибольшей чувствительностью (с положительным знаком критерия) к изменению $k_5$ и несколько меньшей по абсолютной величине (но при обратном по знаку значении критерия) чувствительностью к изменению $k_6$. Изменения констант $k_1$, $k_2$ и $k_7$ оказывают наименьшее влияние на концентрацию вещества $X_2$.

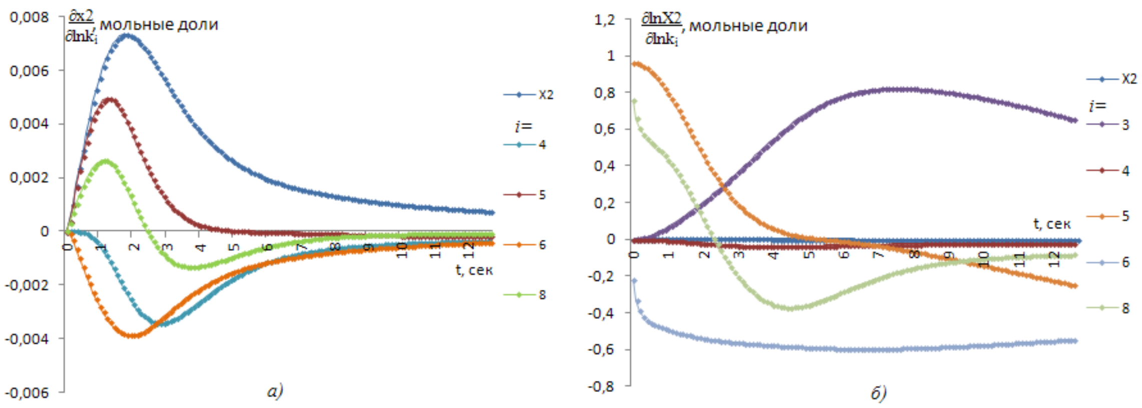



Рисунок **3.2**

Зависимость от времени чувствительности концентрации $X_2$ к изменению констант $k_i$.

В один и тот же момент времени и при одинаковых условиях реакции разные критерии чувствительности имеют различные численные значения одного и того же знака. Действительно, анализируя графики для критерия $\frac{k_i \delta X_j(t,k)}{\delta k_i} = \frac{\delta X_j(t,k)}{\delta ln k_i}$ и для критерия $\frac{k_i \delta X_j(t,k)}{X_j(t,k)\delta k_i} = \frac{\delta ln X_j(t,k)}{\delta ln k_i} = \frac{u_{ji}(t,k)k_i}{X_j(t,k)}$, видим, что характер кривых совпадает.

Величина и знак значения критерия чувствительности какой-либо концентрации веществ к одной и той же константе может в ходе реакции существенно изменяться, как например, для вещества $X_2$ к изменению константы $k_8$. Отсюда следует, что при сравнении значений критериев чувствительности для различных концентраций $x_i$ и констант $k_j$ необходимо оговаривать время, в которое анализируется чувствительность параметров реакции.

Аналогичные выводы можно сделать, проанализировав матрицу чувствительности $U_{ji} = \frac{\delta ln X_j(t,k)}{\delta ln k_i}$ (табл. 2) [8]. Чем больше абсолютное значение соответствующего элемента $u_{ji}$, тем большее влияние оказывает данная константа на данное вещество.

На основании анализа чувствительности двух моделей выделенных реакций гидроалюминирования олефинов с ДИБАХ и ДИБАГ следует важный физико-химический вывод. Первые стадии процессов можно считать необратимыми при использовании разработанных кинетических моделей, так как влияние константы $k_2$, отвечающей за обратимость, несущественно. Поскольку первая стадия является одной и той же для двух описанных химических процессов, и в обочих случаях обратимая стадия оказывает незначительное влияние на весь процесс реакции, то предстоит задача рассмотрения других возможных детализированнх схем указанных реакций.

Таблица 3: Матрица чувствительности для реакции ГАО с ДИБАХ для момента времени t=1.42

| $\frac{\delta x_j}{\delta ln k_i}$, мол.доли $\cdot 10^{-3}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | $-0.099$ | 0.078 | 0.529 | 0.047 | $-1.079$ | 0.074 | 0.503 | 0.503 |
| $k_2$ | 0.002 | $-0.002$ | $-0.007$ | $-0.001$ | 0.013 | $-0.002$ | $-0.006$ | $-0.006$ |
| $k_3$ | $-0.003$ | 0.001 | 0.001 | 0.003 | $-0.007$ | 0.001 | $-0.174$ | 0.003 |
| $k_4$ | $-0.018$ | $-1.182$ | $-5.143$ | 2.115 | 5.159 | $-0.897$ | $-2.131$ | $-2.131$ |
| $k_5$ | $-14.644$ | 4.864 | 30.520 | 18.659 | $-92.592$ | 5.765 | 43.414 | 43.414 |
| $k_6$ | 0.275 | $-3.589$ | 22.451 | $-0.159$ | $-41.387$ | 3.198 | 19.095 | 19.095 |
| $k_7$ | 0.000 | 0.057 | $-0.239$ | 0.006 | 0.407 | $-0.059$ | $-0.174$ | $-0.174$ |
| $k_8$ | 0.010 | 2.411 | 17.792 | 1.932 | $-44.467$ | $-5.020$ | 24.743 | 24.743 |

## 4. Заключение

Используя информацию о чувствительности системы по параметрам, можно сократить время поиска констант скорости, которые наилучшим образом описывают набор экспериментальных данных. Сначала следует, зафиксировав все константы скорости, к которым чувствительность невелика, найти значение параметров, к которому чувствительность системы максимальна. На следующем этапе можно подобрать остальные константы. Выявлено, что для реакции ГАО с ДИБАГ наиболее значительное влияние оказывают константы $k_1$ и $k_4$, наименьшее влияние – $k_2$ (обратная константа); для реакции ГАО с ДИБАХ наиболее значительное влияние оказывают константы $k_4$, $k_5$ и $k_6$, наименьшее влияние – $k_2$, $k_3$, $k_7$. Первые стадии процессов можно считать необратимыми при использовании разработанных кинетических моделей, так как влияние константы $k_2$, отвечающей за обратимость несущественно. Предстоит задача рассмотрения других возможных детализированнх схем указанных реакций.

## Список литературы


1. Turanyi T., *Applications of sensitivity analysis to combustion chemistry*, Hungary, 1997.
2. Губайдуллин И. М., Маничев В. Б., Нурисламова Л. Ф., "Редуктивный подход при моделировании сложных задач химической кинетики", *Журнал Средневолжского математического общества*, **4**:4 (2012), 26–33.
3. Быков В. И., *Моделирование критических явления в химической кинетике*, КомКнига, М., 2006.
4. Полак Л. С., *Применение вычислительной математики в химической и физической кинетике*, Наука, М., 1969.
5. Helton J. C., "Uncertainty and Sensitivity Analysis for Models of Complex Systems. Computational Methods in Transport: Verification and Validation", *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **62** (2008), 207–228.
6. Oran E. S., Boris J. P., *Numerical Simulation of Reactive Flow*, New York, 1987.
7. Коледина К. Ф., *Последовательно-параллельное определение кинетических параметров при моделировании детального механизма гидроалюминирования олефинов: дис. … канд. хим. наук.*, Уфа, 2011.
8. Rebeca V. Jacques R., "Kinetic and sensitivity approach to the mechanism of inhibited polymerization of vinyl acetate in the presence of furan compounds", *Polimeros*, **7**:4 (1997), 22–26.


# Sensitivity analysis to changes in the kinetic curves of the reaction rate constants for the reaction of olefins hydroalumination.

**© N. M. Baynazarova[4],L. F. Nurislamova[5], I. M. Gubaidullin[6],**

**Abstract.**
**Key Words:** One of the objectives of the study of chemical reactions - is the significance assessment of its impact on all stages of the mechanism of the reaction. Therefore, a sensitivity analysis of the kinetic curves to the rate constants of each stage is an important problem in mathematical modeling of chemical processes. In present paper the classical approach of sensitivity analysis for the reaction of olefins hydroalumination is considered. This work are supported by RFBR grants (projects № 12-07-00324 and № 12-07-31029)
Hydroalumination reaction of olefins, the Cauchy problem, the sensitivity analysis.

[4] Fourth year student at the Department of mathematical modelling, Bashkir State University, Ufa; Nurzilyasha@mail.ru.

[5] First year postfraduate student, nstitute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; Nurislamova_LF@mail.ru.

[6] Senior Research Associate in the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; IrekMars@mail.ru.

*УДК 517.9*

# Приближенное решение интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

**© И. В. Бойков[1], О. А. Баулина[2]**

**Аннотация.** Исследованы непрерывные методы решения операторных уравнений в банаховых пространствах. Даны приложения этих методов к решению линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда.

**Ключевые слова:** нейронная сеть Хопфилда, интегральные уравнения Фредгольма, гиперсингулярные интегральные уравнения.

## 1. Введение

Применение нейронных сетей Хопфилда для решения задач математической физики основано на возможности представления нейрона в виде электронной схемы, описываемой нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Согласно этому представлению $i$-ый нейрон, соединенный с $N$ нейронами сети (включая самого себя), описывается уравнением

$$C_i \frac{u_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f(u_j) + I_i, i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где $w_{ij}$ – синаптические веса нейронов сети; $I_i$ – ток, представляющий внешнее смещение; $u_i$ – индуцированное локальное поле на входе функции активации $f(u_i)$; $f(u_i)$ – нелинейные функции активации; $R_i$ и $C_i$ – сопротивление утечки и емкость утечки, соответственно.

В работе [1] J.J. Hopfied исследовал возможность применения вычислительных свойств биологических организмов к конструированию вычислительных машин. В основу архитектуры этих машин положено очень большое число взаимосвязанных и очень простых однотипных вычислительных узлов (названных нейронами).

В работе [2] J.J. Hopfied показал возможность реализации подобных компьютеров, получивших название нейронных сетей Хопфилда, используя простые цепи составленные из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

Опишем архитектуру нейронной сети Хопфилда, используемой в данной работе. Предлагаемая сеть, состоящая из $n$ нейронов, показана на рис. 1.1.

В нейронную сеть входят нелинейные устройства, реализующие нелинейные функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Эти устройства обозначены на рис. 1 буквой П. В основу построения блока П может быть положена теорема о приближенной аппроксимации функций многих переменных суперпозициями функций одной переменной и операцией сложения [3].

[1] Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; golovolomka@list.ru.

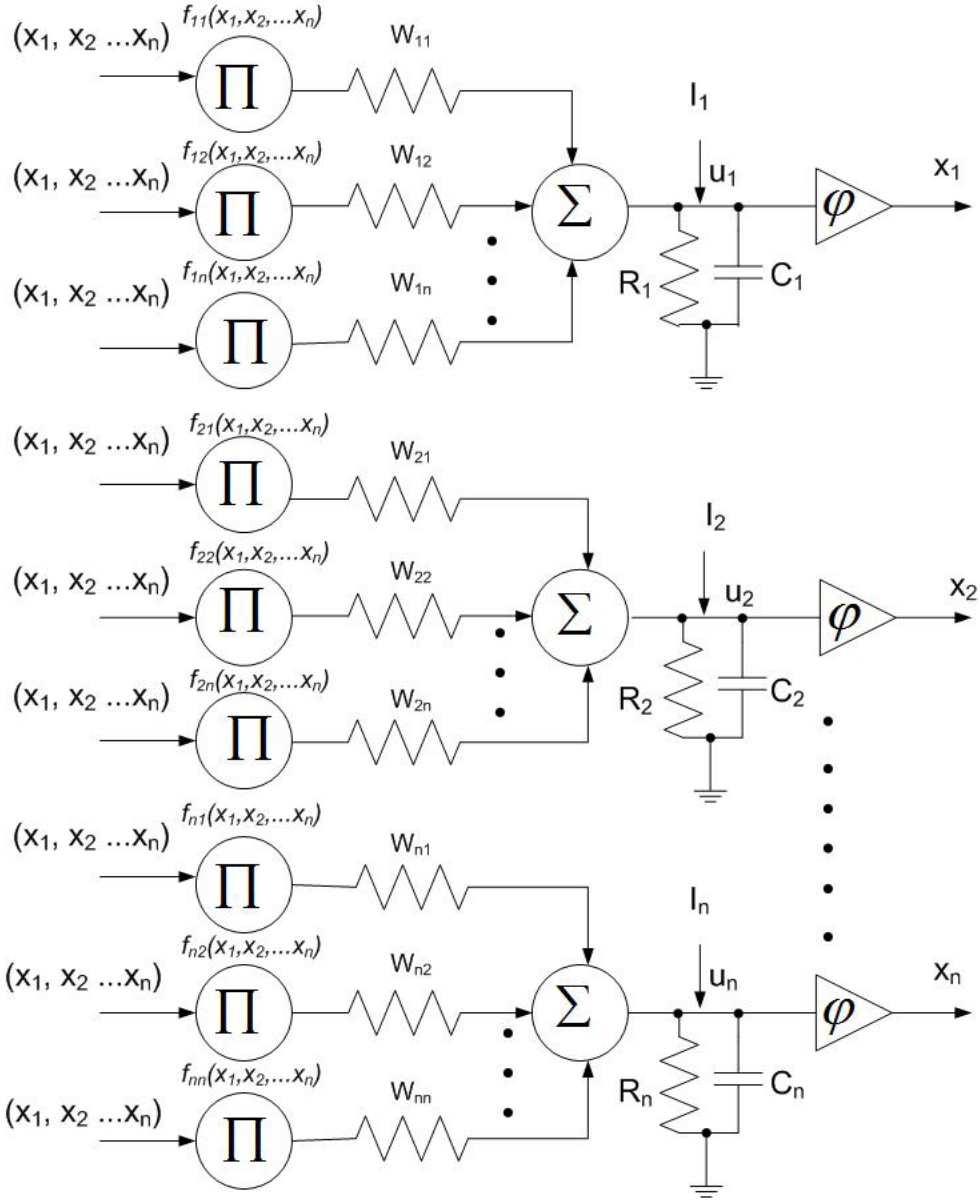



Рисунок **1.1**
Архитектура нейронной сети

Выходные сигналы $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, суммируются в сумматоре с коэффициентами $w_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и после прохождения $RC$ цепочки подаются на вход устройства активации, реализующего функцию $x = \varphi(u)$.

В данной архитектуре используется функция $\varphi(u) = au$. Таким образом, представленная на рис. 1.1 нейронная сеть Хопфилда реализует систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{C_i}{a}\frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{x_i(t)}{aR_i} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n) + I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Отметим, что в качестве сопротивлений $R_i$ могут браться достаточно большие значения, а также $I_i$ могут полагаться равными нулю. В результате нейронные сети Хопфилда могут моделировать системы уравнений вида

$$\frac{C_i}{a}\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} f_{ij}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В известных авторам работах численные методы решения задач математической физики на ИНС (искусственных нейронных сетях) основаны на методах минимизации функционалов. В данной работе в основу построения алгоритмов положены методы теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже используются следующие обозначения $R(a,r) = \{z \in B : \|z-a\| \le r\}$, $S(a,r) = \{z \in B : \|z-a\| = r\}$, $\Lambda(K) = \lim\limits_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)h^{-1}$. Здесь $B-$ банахово пространство, $a \in B, K-$ линейный оператор, действующий из $B$ в $B$, $\Lambda(K)-$ логарифмическая норма [4] оператора $K$; $I-$ тождественный оператор.

Для наиболее употребительных норм логарифмическая норма известна.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. В $n$-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ \|x\|_2 = [\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2]^{1/2},\ \|x\|_3 = \max_{1\le k\le n} |x_k|,$$

логарифмическая норма матрицы $A$ равна [5]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i\ne j} |a_{ij}|),\ \Lambda_2(A) = \lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),\ \Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j\ne i} |a_{ij}|).$$

## 2. Непрерывные методы решения операторных уравнений

Приближенным методам решения нелинейных операторных уравнений посвящена обширная литература, подробная библиография которой содержится в книгах [6], [7]. При этом, в основном, рассматривались дискретные методы, среди которых в первую очередь следует отметить методы простой итерации и Ньютона–Канторовича. Исследование непрерывных аналогов метода Ньютона–Канторович началось, по–видимому, со статьи [8]. Позднее непрерывные аналоги метода Ньютона–Канторовича широко применялись при решении многочисленных задач физики [9], [10]. В работах [9], [10] приведена обширная библиография посвященная непрерывным аналогам метода Ньютона–Канторовича.

В этом разделе приведем несколько утверждений о непрерывных методах решения операторных уравнений, которые ниже будут использованы при обосновании вычислительных методов.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) = 0, \tag{2.1}$$

действующее из банахова пространства $B$ в $B$. Здесь $A(x)-$ нелинейный оператор.

Рассмотрим в банаховом пространстве $B$ задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)), \tag{2.2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.3}$$

Будем считать, что оператор $A$ имеет непрерывную производную Гато; $A(0) = 0$.

**Т е о р е м а 2.1.** [11], [12]. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $\varphi(t)$, *расположенной в шаре* $B(0,r)$ *достаточно малого радиуса* $r$, *интеграл* $\int\limits_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))d\tau$ *не положителен (отрицателен и* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))d\tau = -\alpha, \quad \alpha > 0.$*) Тогда тривиальное решение уравнения* (2.2) *устойчиво (асимптотически устойчиво).*

**З а м е ч а н и е 2.1.** *Теорема справедлива и при* $r = \infty$.

Из теоремы 2.1. следует, что если для любой дифференцируемой функции $g(t)$, определенной в банаховом пространстве $B$ выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau \le -\alpha, \quad \alpha > 0, \tag{2.4}$$

то задача Коши (2.2)–(2.3) сходится к решению $x^*$ уравнения (2.1).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.2.** [13]. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет решение* $x^*$. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$, *расположенной в банаховом пространстве* $B$, *справедливо неравенство* (2.4). *Тогда решение задачи Коши* (2.2)–(2.3) *сходится к решению* $x^*$ *уравнения* (2.1) *при любом начальном приближении.*

**З а м е ч а н и е 2.2.** *Из неравенства* (2.4) *следует, что логарифмическая норма* $\Lambda(A'(x))$ *может обращаться в нуль или принимать положительные значения в конечном или счетном числе точек пространства* $B$.

**Т е о р е м а 2.3.** [13]. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет решение* $x^*$. *Пусть на любой дифференцируемой кривой* $g(t)$, *расположенной в шаре* $B(x^*,r)$ *выполняются следующие условия:*

*1) при любом* $t(t > 0)$ *выполняется неравенство* $\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau \le 0;$

*2) справедливо равенство* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau = -\alpha, \alpha > 0.$

*Тогда решение задачи Коши* (2.2)–(2.3) *сходится к решению* $x^*$ *уравнения* (2.1).

## 3. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма на нейронных сетях Хопфилда

Решение интегральных уравнений Фредгольма на нейронных сетях Хопфилда изложим на примере одномерного интегрального уравнения

$$x(t) = \int\limits_0^1 h(t,\tau,x(\tau))d\tau + f(t) \tag{3.1}$$

с непрерывным ядром и непрерывной правой частью.

Предположим, что уравнение (3.1) имеет решение $x^*(t)$ в шаре $B(x^*, r)$ пространства $\mathbb{C}[0,1]$.

Приближенное решение $x_N(t)$ уравнения (3.1) определяется из системы уравнений

$$x_N(t_{kN}) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, x_N(t_{lN})) + f(t_{kN}), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.2}$$

где $\alpha_{lN}$ и $t_{lN}$, $l = 1, 2, \ldots, N$, коэффициенты и узлы квадратурной формулы

$$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} g(t_{lN}) + R_N(g),$$

в которой коэффициенты $\alpha_{lN} > 0$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$, узлы $t_{lN}$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ лежат в сегменте [0,1].

Условия разрешимости системы (3.2) и сходимости приближенных решений $x_N^*(t)$ системы уравнений (3.2) к точному решению $x^*(t)$ уравнения (3.1) в узлах $t_{lN}, l = 1, 2, \ldots, N$, приведены в [7] (теорема 19.5 из главы 4).

Наложим на функцию $h(t, \tau, u)$ следующее условие: во всякой внутренней точке области $B(x^*, r)$ пространства $C[0, 1]$ существует производная $h_3'(t_{kN}, t_{lN}, u), k.l = 1, 2, \ldots, N$. Здесь $h_3'(t, \tau, u)$ означает производную по третьей переменной.

Введем матрицу $C(u) = \{c_{ij}(u)\}, i, j = 1, 2, \ldots, N$, где $c_{ii}(u) = 1 - \alpha_{iN} h_3'(t_{iN}, t_{iN}, u)$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $c_{ij}(u) = -\alpha_{iN} h_3'(t_{iN}, t_{jN}, u), i, j = 1, 2, \ldots, N, i \neq j$.

Из теоремы 2.3. следует, что если $\Lambda(C(u)) < 0$ при $u \in B(x^*, r)$, то решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_{kN}(t)}{dt} = z_{kN}(t) - \sum_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, z_{lN}(t)) - f(t_{kN}), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.3}$$

сходится к решению $x^*(t)$ системы уравнений (3.2) в узлах $t_{kN}, k = 1, 2, \ldots, N$.

**Замечание 3.1.** *Условие* $\Lambda(C(u)) < 0$ *носит достаточный характер и, как показывают модельные примеры, решение системы* (3.3) *при* $t \to \infty$ *сходится к* $x^*(t)$ *при более широких условиях.*

Непрерывный метод решения нелинейных уравнений имеет следующие преимущества относительно стандартного метода Ньютона-Канторовича:
1) не требуется существования обратного оператора для производной Фреше нелинейного оператора $K_N x_N$, где $K_N x_N-$ операторная форма записи левой части системы уравнений $x_N(t_{kN}) - \sum\limits_{l=1}^{N} \alpha_{lN} h(t_{kN}, t_{lN}, x_N(t_{lN})) = f_N(t_{kN}),\ \ k = 1, 2, \ldots, N,$
2) в случае выполнения неравенства $\int\limits_0^t \Lambda(C(g(\tau))d\tau < 0$ на любой дифференцируемой функции $g(t)$, сходимость метода не зависит от начальных условий.

Непрерывный метод особенно эффективен в случае уравнений первого рода, которые, как известно, являются некорректными задачами, и их решение требует применение методов регуляризации.

## 4. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

Рассмотрим одномерное линейное гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p = 2, 4, \dots. \tag{4.1}$$

На коэффициенты и правую часть уравнения (4.1) наложим следующие условия:
1) функция $b(t) \neq 0$ на сегменте $[-1, 1]$;
2) функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in W^r(1)$, $h(t,\tau) \in W^{r,r}(1)$, $r \geq p$.
3) уравнение (4.1) однозначно разрешимо и его решение $x^*(t) \in W^r(M)$, $M = \text{const}$.

Введем узлы $t_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$, и $\bar{t}_k = t_k + k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через $\Delta_k$ сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\psi_k(t), \tag{4.2}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases} \tag{4.3}$$

Значения $\{\alpha_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, определяются из системы уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + b(\bar{t}_k){\sum_{l=0}^{N-1}}'\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}h(\bar{t}_k,\tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \tag{4.4}$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$. Здесь $\sum'$ означает суммирование по $l \neq k-v, k-v+1, \dots, k-1, k+1, \dots, k+v-1$, где величина $v (v \geq 1)$ зависит от абсолютной величины коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и от значений $N$. Способ выбора $v$ описан в работе [14] и следует из неравенств (4.5), (4.6).

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** [14]. *Пусть выполнены следующие условия: 1) уравнение* (4.1) *имеет единственное непрерывно-дифференцируемое до* $p-1$ *порядка решение* $x^*(t)$; *2) справедливо неравенство* $|b(t)| \geq b > 0$ *при* $t \in (-1, 1)$. *3) функция* $h(t,\tau)$ *удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. Тогда при достаточно больших* $N$ *система уравнений* (4.4) *имеет единственное решение* $x^*_N(t)$ *и в метрике пространства* $R_N$ *справедлива оценка* $\|x^* - x^*_N\| \asymp N^{-1}$.

**Замечание 4.1.** *При достаточно малых значениях* $N$ *для однозначной разрешимости системы уравнений* (4.4) *достаточно выполнение следующих условий: при* $k \neq 0$ *и* $k \neq N-1$

$$|b(\bar{t}_k)|\frac{2}{p-1}N^{p-1} - |a(\bar{t}_k)|\frac{2}{N}H^* > |b(\bar{t}_k)|\frac{N^{p-1}}{p-1}\left\{\left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2N-2k-1)^{p-1}}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^{p-1}}\right|\right\} + 2H^*; \tag{4.5}$$

*при* $k = 0$ *или* $k = N - 1$

$$|b(\bar{t}_k)|\frac{2}{p-1}N^{p-1} - |a(\bar{t}_k)|\frac{2}{N}H^* > |b(\bar{t}_k)|\frac{2N^{p-1}}{p-1}\left|\frac{1}{(2v+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2N+1)^{p-1}}\right| + 2H^*. \quad (4.6)$$

Этот результат переносится на гиперсингулярные интегральные уравнения следующего вида

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}} + \int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p = 1, 2, \ldots \quad (4.7)$$

Приближенное решение уравнения (4.7) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (4.2), значения $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{|\tau - \bar{t}_k|^{p+\lambda}} + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}h(\bar{t}_k,\tau)d\tau = f(\bar{t}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (4.8)$$

В работе [14] показано, что при достаточно больших $N$ и при выполнении условия

$$\frac{2}{p+\lambda-1} > \max_t|a(t)| + \frac{2}{N}H^* \quad (4.9)$$

система уравнений (4.5) однозначно разрешима. Здесь $H^* = \max\limits_{-1\le t,\tau\le 1}|h(t,\tau)|$.

При выполнении условий теоремы 4.1. система уравнений (4.4) может быть решена на нейронных сетях Хопфилда.

Для этого систему (4.4) следует представить в эквивалентном виде

$$(\mathrm{sgnb}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}))\left[\mathrm{a}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\alpha_\mathrm{k} + \mathrm{b}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}){\sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}}'\alpha_\mathrm{l}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\frac{\mathrm{d}\tau}{(\tau - \bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})^\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}\alpha_\mathrm{k}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\mathrm{h}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k},\tau)\mathrm{d}\tau - \mathrm{f}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\right] = 0, \quad (4.10)$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из утверждений, приведенных в разделе 2 и из замечания к теореме 4.1. следует, что решение системы уравнений

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} = (\mathrm{sgnb}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}))\left[\mathrm{a}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})\alpha_\mathrm{k}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}(\bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k}){\sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1}}'\alpha_\mathrm{l}\int_{\Delta_\mathrm{l}}\frac{\mathrm{d}\tau}{(\tau - \bar{\mathrm{t}}_\mathrm{k})^\mathrm{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{N-1}\alpha_k(t)\int_{\Delta_l}h(\bar{t}_k,\tau)d\tau - f(\bar{t}_k)\right], \quad (4.11)$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$, при $t \to \infty$ сходится к решению системы уравнений (4.10) при любом начальном приближении.

В самом деле, запишем систему уравнений (4.11) в виде матричного уравнения

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = A\alpha(t) + F$$

с очевидными обозначениями $A$ и $F$.

Нетрудно видеть, что при выполнении неравенств (4.5) и (4.6) логарифмическая норма матрицы $A$ отрицательна и, следовательно, в силу утверждений раздела 2, решение системы дифференциальных уравнений (4.11) сходится к решению системы уравнений (4.4).

## 5. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда

В этом разделе исследуются приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t, x(t)) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t, \tau, x(\tau))d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t), \tag{5.1}$$

где $p-$ целое четное число.

Рассмотрим уравнение (5.1) при $p = 2$. Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (4.2), коэффициенты которой определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k, \alpha_k) + \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l} \frac{h(\bar{t}_k, \bar{t}_l, \alpha_l)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau = f(\bar{t}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5.2}$$

где $\bar{t}_k = -1 + (2k+1)/N, k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Запишем уравнение (5.2) в операторной форме

$$K_N x_N = F_N,$$

где $x_N = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})^T$, $F_N = (f(\bar{t}_0), \ldots, f(\bar{t}_{N-1}))^T$, $K_N - N \times N$ матрица.

Производная Фреше матрицы $K_N$ на элементе $x_N^0 = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})^T$ имеет вид $K_N'(x_N^0) = \{k_{ij}(x_N^0)\}$, $i, j = 0, 1, \ldots, N-1$, где

$$k_{ii}(x_N^0) = a_2'(\bar{t}_i, \alpha_i^0) + h_3'(\bar{t}_i, \bar{t}_i, \alpha_i^0) \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$k_{ij}(x_N^0) = h_3'(\bar{t}_i, \bar{t}_j, \alpha_i^0) \int\limits_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, N-1, \quad i \neq j.$$

Здесь $a_2'(t, u)$ означает производную функции $a(t, u)$ по второй переменной; $h_3'(t, \tau, u)$ означает производную функции $h(t, \tau, u)$ по третьей переменной.

Будем считать, что уравнение (5.1) имеет решение $x^*$ в шаре $B(x^*, R)$ пространства $R_N$ и что для любой дифференцируемой кривой $g(t) \in B(x^*, R)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \Lambda(K_N'(g(\tau)))d\tau < 0.$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} = a(\bar{t}_k, \alpha_k(t)) + \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_l} \frac{h(\bar{t}_k, \bar{t}_l, \alpha_l(\tau))}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau - f(\bar{t}_k), \tag{5.3}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1,$ сходится к решению $x_N^* = (\alpha_0^*, \ldots, \alpha_{N-1}^*)$ системы уравнений (5.2).

**Замечание 5.1.** *Аналогичным образом строятся вычислительные схемы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда при* $p = 4, 6, \ldots$.

**Замечание 5.2.** *В случае нечетных* $p$ *в основу построения вычислительных схем следует положить алгоритмы, предложенные и обоснованные в работе* [15].

**Замечание 5.3.** *Эффективность предложенного метода решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений иллюстрируется на примере уравнений*

$$a(t)x(t) + b(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \tag{5.4}$$

$$a(t)x(t) + b(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \tag{5.5}$$

Решениями уравнений (5.4) и (5.5) являются соответственно предельные точки решений систем дифференциальных уравнений (4.11) и (5.3) при $t \to \infty$. Системы (4.11) и (5.3) решались методом Эйлера с шагом h. Результаты численного эксперемента представлены на рис. 5.1. Здесь через N обозначен порядок систем (4.11) и (5.3).

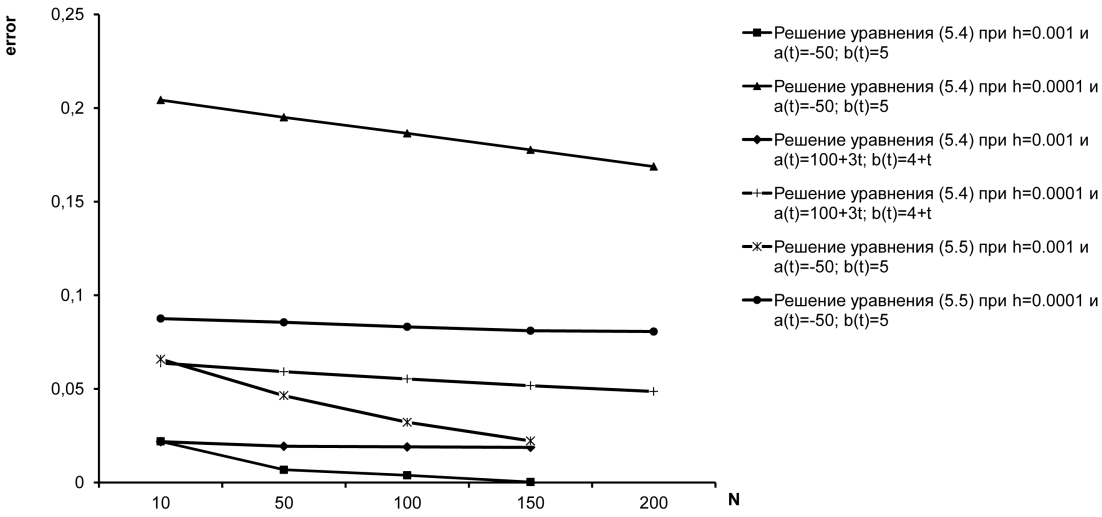



Рисунок **5.1**

# Список литературы


1. Hopfield И. В., “Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **79** (April 1982), 2554 - 2558.

2. Hopfield J. J., “Neurons with Graded Response have Collective Computational Properties like those of Two-State Neurons”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **81** (May 1984), 3088 - 3092.

3. Горбань А. Н., Дунин-Барковский В. Л., Кирин А. Н. и др., *Нейроинформатика*, Наука. Сибирское предприятие РАН, Новосибирск, 1998, 296 с.

4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.

5. Деккер К., Вербер Я., *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1998, 334 с.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977, 750 с.

7. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др., *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969, 456 с.

8. Гавурин М. К., “Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов”, *"Изв. вузов. Математика"*, 1958, № 5, 18 - 31.

9. Жидков Е. Н., Макаренко Г. И., Пузынин М. В., “Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики”, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1973, т.4, N 1, 127 - 166.

10. Пузынина Т. П., *Модифицированные ньютоновские схемы для численного исследования квантово-полевых моделей*, Автореферат дисс. на соискание ученой степени д.ф.-м.н., Тверской государственный университет, Тверь, 2003, 37 с.

11. Бойков И. В., “Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений”, *ДАН СССР*, 1990, № 6, т. 314, 1298 - 1300.

12. Бойков И. В., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Издательство Пензенского государственного университета, Пенза, 2008, 244 с.

13. Бойков И. В., “Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, 2012, № 9, Т. 48, 1308 - 1314.

14. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I., “An approximate solution of hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics 60*, **6** (2010), 607 - 628.

15. Бойков И. В., Бойкова А. И., “Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений с целыми сингулярностями нечетного порядка”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика.*, 2010, № 3, 15 - 27.

# Approximate solution of integral equations on the Hopfield neural networks

© **I. V. Boykov**[3], **O. A. Baulina**[4]

**Abstract.** Continuous methods for solving operator equations in Banach spaces are envestigated. Applications of these methods to the solution of linear and non-linear Fredholm integral equations, singular and hypersingular integral equations on Hopfield neural networks are given.

**Key Words:** Hopfield neural network, integral Fredholm equations, hypersingular integral equations.

[3] Head of Higher and Applied Mathematics Chair,Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru.

[4] Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; golovolomka@list.ru

УДК 519.213

# О некоторых классах копул

© Е. М. Бронштейн[1], Е. И. Прокудина[2]

**Аннотация.** В работе рассматриваются копулы $n$ переменных такие, что всякое семейство из $n-1$ маргинальных случайных величин является независимым в совокупности. Описано два подхода к построению подобных копул. Детально рассмотрен случай $n=2$.

**Ключевые слова:** копулы, независимость случайных величин, комонотонность, контрмонотонность.

## 1. Введение

Копулы (копула функции), активно исследуемые и применяемые в различных областях знания, начиная с работы Скляра [1], характеризуют в безразмерной форме степень зависимости случайных величин. Обзор теории копул см. [2].

Копулой называется функция распределения многомерной случайной величины (СВ), маргинальные распределения которой равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Аналитически копула – это неотрицательная функция $C(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на кубе $[0,1]^n$, со следующими свойствами:

- $C(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)=0$ при любых $i,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$;
- $C(1,\ldots,1,x_i,1,\ldots,1)=x_i$ при любых $i,x_i$;
- обобщенная монотонность: если $x_1\le y_1,\ldots,x_n\le y_n$, то
$$\sum_{t_1,\ldots,t_n}\pm C(t_1,\ldots,t_n)\ge 0,$$
где суммируются все значения копулы при $t_i$, равных либо $x_i$, либо $y_i$, причем знак равен $(-1)^k$ ($k$ равно числу значений $x_i$ в последовательности аргументов).

Обобщенная монотонность копулы двух переменных имеет вид
$$C(y_1,y_2)+C(x_1,x_2)-C(y_1,x_2)-C(x_1,y_2)\ge 0.$$

Если $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ – функция распределения случайного вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ с функциями маргинальных распределений $F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)$, то существует копула $C$, для которой
$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)=C\left(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\right),$$
причем единственная, если функции маргинальных распределений непрерывны (теорема Скляра).

Выделение копулы из общей функции распределения позволяет выявить только свойства, существенные для характеризации зависимости случайных величин. В частности,

[1] Профессор кафедры вычислительной математики и кибернетики, Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа; bro-efim@yandex.ru.

[2] Доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики, Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа; preliv@mail.ru.

при произвольном (в том числе, нелинейном) изменении масштабов маргинальных СВ копула не изменяется.

СВ независимы в совокупности, если их копула равна $C^{\perp}(x_1,\ldots,x_n) = x_1\cdot\ldots\cdot x_n$.

Множество копул является выпуклым, но не является решеткой: максимум и минимум копул могут таковыми не являться. Тем не менее, существует максимальная копула $C^{+}(x_1,\ldots,x_n) = min\{x_1,\ldots,x_n\}$, которая равна поточечному супремуму всех копул. $C^{+}$ является копулой комонотонной многомерной СВ, т.е такой, что с ростом любой из маргинальных СВ не уменьшаются и все остальные.

Инфимумом всех копул является функция

$$C^{-}(x_1,\ldots,x_n) = max\{0, x_1+\ldots+x_n-n+1\},$$

которая является копулой только при $n=2$. Копула двумерной СВ равна $C^{-}$, если ее маргинальные СВ контрмонотонны, т.е. с ростом одной вторая не возрастает.

Начиная с работы П.Эмбрехтса и др. [3] копулы (чаще всего двух переменных) применяются в финансовом анализе. Обзор см. [4]. В частности в [5] к анализу состояния финансового рынка применены экстремальные копулы $C^{+}, C^{-}$ и независимая копула $C^{\perp}$. Построены широкие классы копул (обзоры см. [6], [7]). Исследователи постоянно работают над построением новых копул с теми или иными свойствами (пример - недавняя работа [8]).

В настоящей работе вводятся копулы, описывающие в некотором смысле ослабленную независимость СВ, даются способы их построения. Более подробно рассмотрены копулы двух переменных.

## 2. $(n-1)$-независимые копулы

**Определение 2.1.** *Копулу $n$ переменных при $n>2$ назовем $(n-1)$-независимой, если все подмножества из $n-1$ маргинальных распределений копулы независимые.*

Очевидно, что в это семейство входит и независимая копула $C^{\perp}$.

Для копул, имеющих плотность распределения $g(x_1,\ldots,x_n)$ (далее в основном будут рассматриваться именно такие копулы), критерий $(n-1)$-независимости очень прост.

**Предложение 2.1.** *Для того, чтобы функция $g(x_1,\ldots,x_n)$ являлась плотностью $(n-1)$-независимой копулы, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\int_0^1 g(x_1,\ldots,x_n)dx_i = 1$$

*для любых $i, x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$.*

Доказательство. Поскольку координаты равноправны, положим $i=n$. Обозначим $G(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \int_0^1 g(t_1,\ldots,t_n)dt_n$.

Если $G(t_1,\ldots,t_{n-1}) \equiv 1$, то

$$\int_0^{x_1} dt_1 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dt_{n-1} \int_0^1 g(t_1,\ldots,t_n)dt_n = x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1},$$

т.е. СВ $X_1,\ldots,X_{n-1}$ независимые.

Обратно, если выполняется тождество

$$\int_0^{x_1} dt_1 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dt_{n-2} \int_0^{x_{n-1}} G(t_1, \ldots, t_{n-1}) dt_{n-1} \equiv x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},$$

то, продифференцировав это равенство последовательно по всем переменным, получим: $G(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 1$, что и требовалось.
Доказательство закончено.

Независимым в совокупности СВ соответствует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$. В следующих параграфах описаны достаточно общие способы построения подобных функций $g(x_1, \ldots, x_n)$.

## 3. Использование функций одной переменной

Пусть неотрицательная непрерывная функция $g(t)$ обладает следующими свойствами.

- Является периодической с периодом 1.
- $\int_0^1 g(t)dt = 1$.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ произвольный $n$-мерный вектор с компонентами 1 и $-1$. Как легко проверить, функция $g((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}))(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ является плотностью распределения копулы, обладающей свойством из предложения 2.1. Независимости в совокупности соответствует функция $g \equiv 1$.

Вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и $-\boldsymbol{\sigma}$ порождают один и тот же класс функций (достаточно функцию $g(t)$ заменить на $g(-t)$), в других случаях эти классы разные, как следует из следующего утверждения.

**Предложение 3.1.** *Если $g_1$ и $g_2$ – непрерывные функции с описанными свойствами, $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2}$ – два вектора с компонентами 1 и $-1$, $\boldsymbol{\sigma_1} \neq \pm \boldsymbol{\sigma_2}$ и копулы с плотностями $g_1((\boldsymbol{\sigma_1}, \mathbf{x})), g_2((\boldsymbol{\sigma_2}, \mathbf{x}))$ равны, то $g_1 = g_2 \equiv 1$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{\sigma_1} \neq \pm \boldsymbol{\sigma_2}$, то у векторов $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2}$ существуют совпадающие (пусть первые, равные 1) и противоположные (пусть вторые) компоненты. Поскольку совпадают копулы и плотности непрерывны, то плотности также совпадают. Тогда $g_1(x_1 + x_2 + A) = g_2(x_1 - x_2 + B)$, где в $A$ и $B$ входят все остальные переменные с соответствующими знаками. Положив $x_1 = x_2$, имеем $g_1(2x_1 + A) = g_2(B)$, т.е. $g_1$, а тогда и $g_2$, постоянные. Из свойств функций $g$, $g_1 \equiv g_2 \equiv 1$.
Доказательство закончено.

Таким образом, введенные классы копул имеют в пересечении только $C^{\perp}$.

## 4. Кусочно постоянные плотности

$(n-1)$-независимые копулы могут порождаться многими плотностями, постоянными на параллелепипедах разбиения куба $[0,1]^n$.

Опишем две такие общие конструкции.

1. Пусть $\alpha, \beta$ – неотрицательные числа с суммой 2. Разобьем куб $[0,1]^n$ при $k \geq 1$ на $(2k)^n$ кубиков гиперплоскостями $x_i = s/(2k)(i = 1, \ldots, n; s = 0, \ldots, 2k)$. Выберем

подмножество полученных кубиков такое, что каждая прямая, параллельная какому-нибудь ребру куба, пересекает $k$ кубиков. Функция $g$, равная $\alpha$ на выбранных кубиках и $\beta$ на всех остальных, очевидно, удовлетворяет условиям предложения 2.1 и тем самым является плотностью $(n-1)$-независимой копулы.

Эта конструкция позволяет подойти к построению подобных функций на комбинаторной основе.

Опишем одну из возможных конструкций, позволяющих выделить подобное семейство кубиков. Зададим положение кубика $n$-мерным вектором $(a_1, \ldots, a_n)$ с натуральными компонентами от 1 до $2k$. Пусть $\varphi_i : \{1, \ldots, k\} \to \{k+1, \ldots, 2k\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ – биекции. Выберем произвольное семейство кубиков в кубе $[0, 1/2]^n$. Пусть для множества индексов $S$ компоненты вектора $(a_1, \ldots, a_n)$ больше $k$, для остальных выполняется противоположное неравенство. Рассмотрим кубик с координатами $\varphi_i^{-1}(a_i)$ при $i \in S$, $a_i$ при $i \notin S$. Этот кубик расположен в кубе $[0, 1/2]^n$, т.е. является выбранным или нет. Если он выбранный, то кубик, положение которого задается вектором $(a_1, \ldots, a_n)$, попадет в выбранные тогда и только тогда, когда мощность $|S|$ является четной, если же нет, то кубик с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$ попадет в выбранные в противоположной ситуации.

Если рассмотреть только $2^n$ кубиков с координатами $(y_1, \ldots, y_n)$, где каждая из координат равна $a_i$ или $\varphi_i(a_i)$, то каждая прямая, параллельная ребру куба, либо не пересекает ни одного из этих кубиков, либо пересекает ровно два кубика, один из которых попал в выбранные. Отсюда следует, что построение приводит к плотности распределения с нужными свойствами.

Из приведенного построения видно, что множество таких функций весьма обширно: при заданных $k, \alpha, \beta$ их число равно $2^{k^n} \cdot (k!)^n$.

2. Пусть $k \geq 2$ и $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ – неотрицательные числа такие, что $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = k.$ Разобьем, как и выше, куб $[0, 1]^n$ на кубики гиперплоскостями

$$x_i = s/k \quad (i = 1, \ldots, n; s = 0, \ldots, k).$$

На каждом из кубиков разбиения положим плотность равной одному из значеий $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ таким образом, чтобы в каждом ряду любого координатного направления встречалось каждое из этих значений (естественно по одному разу). Очевидно, что так определенная плотность удовлетворяет условию предложения 2.1. Обеспечить такое построение можно, в частности, расположив значения в многомерном „шахматном“ порядке: пусть, как и выше, кубик задается $n$-мерным вектором $(a_1, \ldots, a_n)$. Значение плотности в кубике примем равным $\alpha_i$, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv i (mod \;\; k).$$

Разумеется, подобные функции можно построить и при разбиении куба на параллелепипеды. Некоторые примеры такого вида приведены в следующем пункте.

## 5. Случай $n = 2$

Разумеется, при $n = 2$ понятие $(n-1)$-независимости не имеет смысла. Тем не менее, приведем соответствующие построения.

При $n = 2$ построение из п. 3 приводит к двум классам копул:

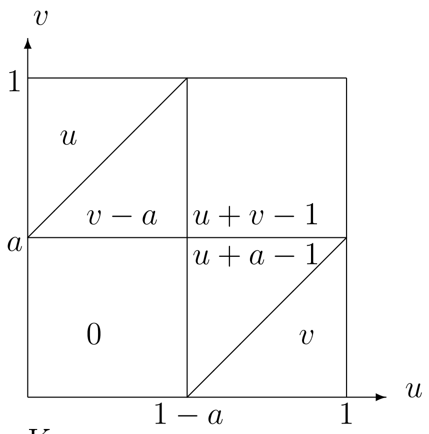
$$C_g^+(x,y) = \int_0^x du \int_0^y g(u-v)dv, \quad C_g^-(x,y) = \int_0^x du \int_0^y g(u+v)dv.$$

В качестве функции $g$ можно использовать и обобщенную, в частности, периодически продолженную $\delta$- функцию Хевисайда. В этом случае, как легко проверить, функции $C_\delta^+$ и $C_\delta^-$ равны соответственно комонотонной и контрмонотонной копулам $C^+$ и $C^-$, отсюда и обозначения.

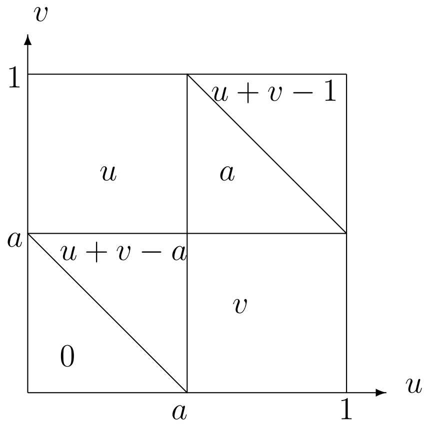
Введем более широкие классы копул, порожденные смещенными $\delta$-функциями $\delta(a)(0 \le a \le 1)$, сосредоточенными в точках $a+k$, где $k$ – целое число.

В [9] функции $C_{\delta(a)}^+, C_{\delta(a)}^-$ названы соответственно копулами ко- и контрмонотонного типа.

Эти копулы имеют следующий вид.




Копула комонотонного типа

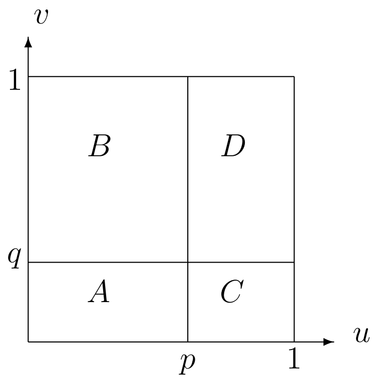



Копула контрмонотонного типа

В [9] так определенные копулы были использованы для оценки перспектив российского финансового рынка, полученные результаты согласуются с мнением экспертов.

Приведем также конструкцию копулы двух переменных с кусочно постоянной плотностью, частным случаем которой является копула, построенная в п. 4.

Пусть $p, q \in (0,1)$. Прямыми $u = p, v = q$ квадрат $[0,1]^2$ разбивается на четыре прямоугольника (см. рисунок).




Если плотность в области $A$ равна $a$, то в областях $B, C, D$ плотность равна

$$b = \frac{1 - aq}{1 - q}, c = \frac{1 - ap}{1 - p}, d = \frac{1 - p - q + apq}{(1 - p)(1 - q)}.$$

Из неотрицательности плотности следует, что значение $a$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$a \leq \frac{1}{p}, a \leq \frac{1}{q}, a \geq 0, a \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq}.$$

Как легко проверить, множество допустимых значений $a$ всегда непустое. В частности, оно содежит $1$, это соответствует независимой копуле $C^{\perp}$.

Значения соответствующей копулы в областях $A, B, C, D$ соответственно равны

$$auv; aqu + b(v - q)u; apv + c(u - p)v; apq + b(v - q)p + cq(u - p) + d(u - p)(v - q).$$

При $p = q = 0,5$ получаем конструкцию, описанную в п. 4. Допустимые значения $a$ – отрезок $[0, 2]$.

В этом случае значения копулы в областях $A, B, C, D$ соответственно равны

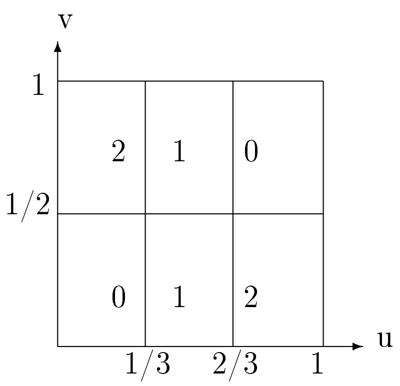
$$auv; 0,5au + bu(v - 0,5); 0,5av + bv(u - 0,5); 0,25a + 0,5b(u + v - 1) + a(u - 0,5)(v - 0,5).$$

Здесь $b = 2 - a$.

Как и в общем случае, при $a = 1$ получаем независимую копулу. Естественно полагать, что при $a > 1$ копула имеет сдвиг к комонотонной, а при $a < 1$ – к контрмонотонной копулам.

Приведем также пример копулы рассматриваемого вида, кусочно постоянной на прямоугольниках.

Разобьем квадрат на шесть прямоугольников прямыми $u = 1/3, u = 2/3, v = 1/2$. Одна из плотностей копул с нужными свойствами приведена на рисунке.



## 6. Заключение

В статье рассмотрены копулы $n$ переменных, у которых любые $n-1$ маргинальных СВ независимы, а все они таковыми, вообще говоря, не являются. Приведены способы построения таких копул и соответствующие примеры.

Было бы интересно построить копулы $n$ переменных, у которых при заданном $k$ любые $k$ маргинальных СВ независимы в то время, как никакие $k+1$ таковыми не являются.

## Список литературы


1. Sclar A., "Fonctions de répartition à n dimensions et leures marges.", *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 1959, № 8, 229 – 231.
2. Nelsen R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
3. Embrechts P., Hoeing A., Juri A., *Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*, ETH preprint, 2001.
4. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula methods in finance*, John Wiley & Sons, 2004.
5. Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И., Герасимова А. С., Дубинская К. Г., "Оценка взаимосвязей временных рядов курсов акций с помощью копула функций", *Прикладная эконометрика,*, 2011, № 2(22), 22–31.
6. Пеникас Г. И., "Модели "копула"в приложении к задачам финансов", *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, 2010, № 7, 24-44.
7. Пеникас Г. И., *Копулы в управлении рисками банков. Практика применения моделей в России*, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbruken, 2011.
8. Durante F., Rodriguez-Lallena J. A., Ubeda-Flores M. U., "New constructions of diagonal patchwork copulas", *Information Sciences*, 2009, № 179, 3383-3391.
9. Бронштейн Е. М., Зинурова А. Р., "Копулы специального вида и их применение к анализу состояния финансового рынка", *Прикладная эконометрика*, 2012, № 3(27), 109–114.


# On some classes of copulas.

**© E. M. Bronshtein[3], E. I. Prokudina[4]**

**Abstract.** Copulas of $n$ variables such that any family of $n-1$ marginal random values is independent are considered. Two approaches to the construction of such copulas are described. The case $n=2$ is considered in detail.
**Key Words:** copulas, independence of random values, comonotonicity, countermonotonicity.

[3] Professor, Numerical Mathematics and Cybernetics Chair, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, bro-efim@yandex.ru

[4] Associate Professor, Numerical Mathematics and Cybernetics Chair, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, preliv@mail.ru

*УДК 544.43*

# Поиск кинетических параметров для редуцированной схемы реакции димеризации $\alpha$-метилстирола

© **В. А. Вайтиев**[1], **Е. В. Степашина**[2], **С. А. Мустафина**[3]

**Аннотация.** В работе найдены константы скоростей стадий и значения энергий активации для редуцированной схемы реакции димеризации $\alpha$-метилстирола. Сравнение численного решения прямой кинетической задачи для исходной и сокращенной схем реакций показывает адекватное воспроизведение исходного механизма. Средняя относительная погрешность не превышает 11 %.

**Ключевые слова:** $\alpha$-метилстирол, обратная задача, химическая кинетика.

## 1. Введение

Кинетические модели, основанные на детальных механизмах сложных химических реакций, как правило, представляют собой системы дифференциальных уравнений, в которых число неизвестных равно числу участвующих в реакции веществ. Гипотетические схемы сложных химических реакций содержат большое количество веществ и реакций между ними. Однако непосредственному измерению доступна только часть из этих веществ. При этом для анализа механизма реакции порой требуется точное описание поведения лишь нескольких веществ, и для выявления их динамики не все стадии являются важными. В связи с этим возникает необходимость в замене исходной системы системой меньшей размерности, в каком-то смысле эквивалентной исходной, сохраняющей динамику концентраций выбранных веществ.

В результате редукции кинетической схемы механизм реакции описывается другой схемой реакции, содержащей меньше веществ и стадий, чем в исходной схеме. Поэтому построение математических моделей редуцированных схем реакций влечет за собой необходимость решения задачи идентификации математической модели реакции, то есть обратной задачи химической кинетики.

## 2. Постановка задачи

Решение обратной кинетической задачи тесно связано с формулировкой прямой кинетической задачи, то есть разработкой математического описания для расчета состава реакционной смеси и скоростей стадий реакции на основе кинетической модели.

Обратная кинетическая задача представляет собой задачу минимизации функционала отклонения между расчетными и экспериментальными данными:

$$F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}^{\text{Р}} - x_{ij}^{\text{Э}}| \to min, \tag{2.1}$$

[1] Аспирант кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; vladimirvaytiev@yandex.ru.

[2] Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; stepashinaev@ya.ru.

[3] Заведущий кафедрой математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак.

где $x_{ij}^{\text{Р}}$ – расчетные значения концентраций веществ, $x_{ij}^{\text{Р}}$ – значения концентраций веществ, полученные экспериментальным путем, $k$ – количество точек эксперимента, $n$ – количество веществ.

Процедура решения обратной задачи состоит в поиске констант, минимизирующих функционал (2.1). Для минимизации функционала (2.1) будем использовать метод Хука-Дживса, который представляет собой комбинацию исследующего поиска с циклическим изменением переменных и ускоряющего поиска по образцу. Алгоритм метода Хука-Дживса на каждом шаге содержит две основные процедуры: исследующий поиск в окрестности данной точки для определения направления убывания целевой функции и перемещение в направлении убывания. Для определения значений энергий активации по стадиям реакции воспользуемся методом наименьших квадратов.

## 3. Вычислительный эксперимент

Получим кинетические параметры промышленно значимой редуцированной схемы реакции димеризации $\alpha$-метилстирола в присутствии цеолитного катализатора NaHY. Продукты данной реакции (линейные и циклические димеры) находят практическое применение в качестве пластификаторов, модификаторов полимеров, каучуков, в производстве синтетических масел и др. Совокупность химических превращений, описывающих данную реакцию, представляется следующей схемой стадий:

$$\begin{aligned}
&2X_1 \rightleftarrows X_2,\\
&2X_1 \rightleftarrows X_3,\\
&2X_1 \rightarrow X_4,\\
&X_2 \rightleftarrows X_3,\\
&X_2 \rightarrow X_4,\\
&X_3 \rightarrow X_4,\\
&X_1 + X_2 \rightarrow X_5,\\
&X_1 + X_3 \rightarrow X_5,\\
&X_1 + X_4 \rightarrow X_5,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $X_1$ – $\alpha$-метилстирол, $X_2$ – $\alpha$-димер, $X_3$ – $\beta$-димер, $X_4$ –циклический димер, $X_5$ – тримеры.

Согласно закону действующих масс кинетические уравнения, соответствующие схеме химических превращений (3.1), можно выразить уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = k_1C_1^2 - k_{10}C_2,\\
&\omega_2 = k_2C_1^2 - k_{11}C_3,\\
&\omega_3 = k_3C_1^2,\\
&\omega_4 = k_4C_2 - k_{12}C_3,\\
&\omega_5 = k_5C_3,\\
&\omega_6 = k_6C_2C_1,\\
&\omega_7 = k_7C_1C_3,\\
&\omega_8 = k_8C_1C_4,\\
&\omega_9 = k_9C_2C_4,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\omega_i(t,x)$ – скорость $i$-й стадии (кмоль/(м$^3\cdot$ч)), $i=\overline{1,9}$; $C=(C_1,\ldots,C_5)$ – вектор концентраций компонентов (кмоль/м$^3$); $k=(k_1,\ldots,k_{12})$ – вектор кинетических констант скоростей $j$-й реакции (м$^3$/(кмоль $\cdot$ ч)) $(j=\overline{1,12})$.

Таблица 4: Кинетические параметры процесса димеризации $\alpha$-метилстирола в присутствии катализатора NaHY при температуре 373K.

| № | $k_s(373K)$, $м^3/(кг_{kat}\cdot ч)$ | $E_i$, кДж/моль | № | $k_s(373K)$, $м^3/(кг_{kat}\cdot ч)$ | $E_i$, кДж/моль |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 61,357 | 196 | 7 | 0,019308 | 247 |
| 2 | 8,9534 | 263 | 8 | 41,556 | 194 |
| 3 | 7,7916 | 259 | 9 | 0,03662 | 115 |
| 4 | 1,1693 | 238 | 10 | 0,04547 | 279 |
| 5 | 0,11922 | 275 | 11 | 0,0995 | 204 |
| 6 | 0,12041 | 127 | 12 | 0,05132 | 138 |

Значения кинетических констант и энергии активации (табл. 4) были рассчитаны в лаборатории приготовления катализаторов Института нефтехимии и катализа РАН (г. Уфа) с учетом наличия цеолитного катализатора. Константа скорости $j$-й реакции рассчитывается через выбранную опорную температуру $T_{оп} = 373K$ по формуле:

$$k_j(T) = k_j(T_{оп})exp\left(\frac{E_j}{RT_{оп}}\left(1 - \frac{T_{оп}}{T}\right)\right). \tag{3.3}$$

Кинетическая модель процесса димеризации $\alpha$-метилстирола с учетом изменения реакционного объема в ходе протекания реакции представляется системой:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{F_i(x,T) - x_iF_n(x,T)}{N}, \quad \text{где} \quad F_i = \sum_{j=1}^{9}\gamma_{ij}W_j, \quad i = \overline{1,5}; \tag{3.4}$$

$$\frac{dN}{dt} = F_n(x,T), \quad \text{где} \quad F_n = \sum_{j=1}^{9}W_j\sum_{i=1}^{5}\gamma_{ij},$$

с начальными условиями:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,5}; \quad N(0) = 1, \tag{3.5}$$

где $N$ – переменный реакционный объем, $(\gamma_{ij})$ – матрица стехиометрических коэффициентов $(i = \overline{1,5}, j = \overline{1,9})$.

Функции $F_n(\mathbf{x},T), F_i(\mathbf{x},T)$ $(i = \overline{1,5})$, с учетом матрицы стехиометрических коэффициентов, имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{x},T) = &\ -2W_1(\mathbf{x},T) - 2W_2(\mathbf{x},T) - 2W_3(\mathbf{x},T)- \\
&-W_7(\mathbf{x},T) - W_8(\mathbf{x},T) - W_9(\mathbf{x},T), \\
F_2(\mathbf{x},T) = &\ W_1(\mathbf{x},T) - W_4(\mathbf{x},T) - W_5(\mathbf{x},T) - W_7(\mathbf{x},T), \\
F_3(\mathbf{x},T) = &\ W_2(\mathbf{x},T) + W_4(\mathbf{x},T) - W_6(\mathbf{x},T) - W_8(\mathbf{x},T), \\
F_4(\mathbf{x},T) = &\ W_3(\mathbf{x},T) + W_5(\mathbf{x},T) + W_6(\mathbf{x},T) - W_9(\mathbf{x},T), \\
F_5(\mathbf{x},T) = &\ W_7(\mathbf{x},T) + W_8(\mathbf{x},T) + W_9(\mathbf{x},T), \\
F_n(\mathbf{x},T) = &\ -W_1(\mathbf{x},T) - W_2(\mathbf{x},T) - W_3(\mathbf{x},T)- \\
&-W_7(\mathbf{x},T) - W_8(\mathbf{x},T) - W_9(\mathbf{x},T).
\end{aligned}$$

Сокращенная схема данной реакции имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
&2X_1 \rightleftarrows X_2,\\
&2X_1 \rightleftarrows X_3,\\
&2X_1 \to X_4,\\
&X_2 \rightleftarrows X_3,\\
&X_2 \to X_4,\\
&X_3 \to X_4.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Составим кинетическую модель реакции (3.6). Скорости стадий реакции (3.6) выражаются уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = k_1C_1^2 - k_7C_2,\\
&\omega_2 = k_2C_1^2 - k_8C_3,\\
&\omega_3 = k_3C_1^2,\\
&\omega_4 = k_4C_2 - k_9C_3,\\
&\omega_5 = k_5C_2,\\
&\omega_6 = k_6C_3,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ – вектор концентраций компонентов, $k = (k_1, \ldots, k_9)$ – вектор кинетических констант скоростей стадий реакции (3.6).

Тогда схема реакции (3.6) описывается кинетической моделью

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{F_i(x,T) - x_iF_n(x,T)}{N}, \quad \text{где} \quad F_i = \sum_{j=1}^{6} \gamma_{ij}^{'} W_j, \quad i = \overline{1,4}; \tag{3.8}$$

$$\frac{dN}{dt} = F_n(x,T), \quad \text{где} \quad F_n = \sum_{j=1}^{6} W_j \sum_{i=1}^{4} \gamma_{ij}^{'},$$

с начальными условиями:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,4}; \quad N(0) = 1, \tag{3.9}$$

где $N$ – переменный реакционный объем, $(\gamma_{ij}^{'})$ – матрица стехиометрических коэффициентов сокращенной схемы реакции $(i = \overline{1,4}, j = \overline{1,6})$, функции $F_n(\mathbf{x},T), F_i(\mathbf{x},T)$ $(i = \overline{1,4})$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{x},T) &= -2W_1(\mathbf{x},T) - 2W_2(\mathbf{x},T) - 2W_3(\mathbf{x},T),\\
F_2(\mathbf{x},T) &= W_1(\mathbf{x},T) - W_4(\mathbf{x},T) - W_5(\mathbf{x},T),\\
F_3(\mathbf{x},T) &= W_2(\mathbf{x},T) + W_4(\mathbf{x},T) - W_6(\mathbf{x},T),\\
F_4(\mathbf{x},T) &= W_3(\mathbf{x},T) + W_5(\mathbf{x},T) + W_6(\mathbf{x},T),\\
F_n(\mathbf{x},T) &= -W_1(\mathbf{x},T) - W_2(\mathbf{x},T) - W_3(\mathbf{x},T).
\end{aligned}$$

Рассчитанные кинетические параметры сокращенной схемы реакции $\alpha$-метилстирола представлены в табл. 5.

## 4. Результаты и выводы

В результате решения обратной кинетической задачи получены значения энергий активации $E_j$ и констант $k_{0j}$ $(j = \overline{1,9})$ (табл. 5), на основе которых решена прямая кинетическая задача. Относительная разница между расчетными и экспериментальными значениями концентраций веществ составила не более 11%, что укладывается в погрешность измерений при проведении эксперимента. На рис. 4.1 представлена динамика концентраций целевых веществ сокращенной схемы и концентраций этих же веществ в исходной

Таблица 5: Кинетические параметры сокращенной схемы реакции димеризации $\alpha$-метилстирола в присутствии катализатора NaHY при температуре 373K.

| № | $k_s(373K)$, м$^3$/(кг$_{kat}\cdot$ ч) | $E_i$, кДж/моль | № | $k_s(373K)$, м$^3$/(кг$_{kat}\cdot$ ч) | $E_i$, кДж/моль |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $62,788$ | $197,56$ | 6 | $0,70168$ | $320,9$ |
| 2 | $6,037$ | $231,4$ | 7 | $0,001207$ | $301,25$ |
| 3 | $9,055$ | $263,3$ | 8 | $0,008467$ | $242,35$ |
| 4 | $1,092$ | $311,9$ | 9 | $0,004678$ | $184$ |
| 5 | $0,0012$ | $573,3$ | | | |

схеме при температуре $T = 353K$. Как видно из рисунка, сокращение схемы реакции (3.1) не изменило общую динамику изменения концентраций веществ во времени.

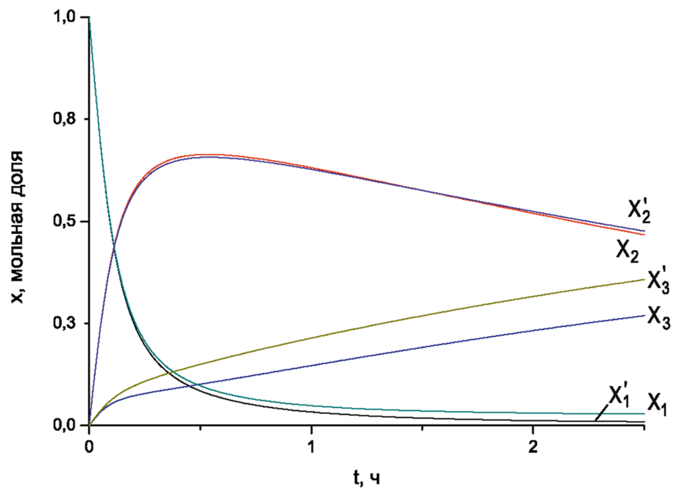



Рисунок **4.1**

Динамика концентраций целевых веществ реакции димеризации $\alpha$-метилстирола при $T = 353K$ ( $X_i$ – вещества исходной схемы, $X_i'$ – вещества сокращенной схемы, $i = 1, 2, 3$ ).

Относительные погрешности векторов концентраций веществ $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ для сокращенной схемы реакции димеризации $\alpha$-метилстирола, полученной при температуре $T = 353K$ составили: $\delta(x_1') = 1,35\%$, $\delta(x_2') = 1,68\%$, $\delta(x_3') = 10,24\%$, $\delta(x_4') = 7,93\%$.

Отсюда видно, что точность описания динамики концентраций целевых веществ схемой реакции (3.6) находится в пределах погрешности количественного анализа, поэтому редуцированная схема реакции (3.6) является эквивалентной схеме реакции (3.1) меньшей размерности, что позволяет использовать ее при других задач, основанных на анализе кинетической модели схемы реакции.

# Список литературы

1. Степашина Е. В., Мустафина С. А., “Формирование математической модели каталитических процессов с переменным реакционным на основе теоретико-графового подхода”, *Известия Томского политехнического университета*, **320**:3 (2012), 31–36.

# Search the kinetic parameters for the reduced scheme of the reaction of dimerization $\alpha$-methylstyrene.

© **V. A. Vaitiev**[4], **E. V. Stepashina**[5], **S. A. Mustafina**[6]

**Abstract.** In this paper the rate constants of the stages and activation energies for the reduced scheme dimerization reaction $\alpha$-methylstyrene is found. A comparison of the numerical solution of the direct kinetic problem for the original and reduced reaction schemes shows an adequate reproduction of the original mechanism. The average relative error does not exceed 11 %.

**Key Words:** $\alpha$-methylstyrene, inverse problem, chemical kinetics.

[4] Graduate student of chair of the mathematical Modelling, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; vladimirvaytiev@yandex.ru.

[5] The senior teacher of chair of the mathematical Modelling, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; stepashinaev@ya.ru.

[6] Head of chair of the mathematical Modelling, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak.

*УДК 517.938*

# Разрушение соленоидов Смейла-Вильямса

**© С. В. Гонченко[1], Е. В. Жужома[2], Н.В. Исаенкова[3]**

**Аннотация.** В статье приводится семейство диффеоморфизмов $f_\nu : S^3 \to S^3$, $-1 \leq \nu \leq 1$, гладко зависящих от параметра $\nu$, таких, что 1) при любом $-1 \leq \nu < 0$ неблуждающее множество диффеоморфизма $f_\nu$ состоит из одномерного растягивающегося аттрактора и одномерного сжимающегося репеллера, являющихся соленоидом Смейла-Вильямса; 2) диффеоморфизм $f_0$ имеет неблуждающее множество, состоящее из двух нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ таких, что каждое их этих множеств локально гомеоморфно произведению канторовых множеств, и ограничение $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ является частично гиперболическим диффеоморфизмом; 3) при любом $0 < \nu \leq 1$ неблуждающее множество диффеоморфизма $f_\nu$ состоит из из двух гиперболических нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств, локально гомеоморфных произведению двух канторовых множеств.

**Ключевые слова:** Аттрактор, репеллер, соленоид Смейла-Вильямса

В последнее время появилось большое количество математических моделей, имеющих прикладное значение, в которых появляется соленоид Смейла-Вильямса. Например, при изучении движения кельтского камня [1] и в моделях связанных с нейронными сетями [6]. Серия генераторов стохастических колебаний с гиперболическими растягивающимися аттракторами соленоидального типа построена С.П.Кузнецовым и его соратниками [4], [5]. Такие генераторы играют большую роль в некоторых вариантах скрытой передачи информации (о возможности применения гиперболических шумов при передачи сообщений см. [3], [12]). Указанные модели описываются системами дифференциальных уравнений, фазовые пространства которых содержат (динамическую) надстройку над отображением последования Пуанкаре, переводящего полноторий в себя так, что его образ прокручивается вдоль оси полнотория не менее двух раз. Классическим примером такого отображения является отображение Смейла с равномерным сжатием в направлении, перпендикулярном оси полнотория, и равномерным растяжением вдоль оси полнотория [11]. Отображение Смейла имеет соленоидальный равномерно гиперболический аттрактор, который локально гомеоморфен произведению канторова множества на отрезок (в силу этого свойства, аттрактор Смейла относят в список странных аттракторов) [13]. Анализ некоторых работ, в частности, работы [5], показывает, что отображение вдоль оси полнотория не обязательно является равномерно растягивающим. Поэтому возникла необходимость исследовать более общий класс отображений полнотория в себя. В [2] был рассмотрен класс отображений (названных отображениями Смейла-Виеториса), которые отличались от преобразования Смейла ослаблением условия равномерного растяжения на отображение вдоль оси полнотория: требовалось только чтобы оно было неособым эндоморфизмом. В предположении, что неблуждающее множество имеет гиперболическую структуру было показано, что кроме соленоидального аттрактора Смейла неблуждающее множество может представлять собой совокупность конечного набора изолированных периодических орбит и нетривиального нульмерного базисного множества. Возникает естественный вопрос о возможности плавного перехода (бифуркации) от одного случая к другому. Бифуркации такого вида

[1] Заведующий отделом дифференциальных уравнений НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород;

[2] Профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[3] Старший преподаватель кафедры математического анализа, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

можно интерпретировать как бифуркации разрушения (или возникновения) инвариантных множеств (в частности, аттракторов или репеллеров) соленоидального типа.

Согласно [1], в фазовом пространстве системы, описывающей движение кельтского камня, при некоторых параметрах имеются области со странным аттрактором и странным репеллером соленоидального типа, а при других параметрах имеются так называемые области Карапетяна с изолированными периодическими орбитами. Предполагаемые бифуркации можно рассматривать как возможные сценарии перехода от одного типа движения кельтского камня к другому. Кроме этого, система, описывающая движение кельтского камня, инвариантна относительно обращения времени [1]. Поэтому возникает задача найти в пространстве отображений пути, которые отвечают соответствующим бифуркациям и которые были бы инвариантны относительно перехода к обратным отображениям. Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.1.** *Существует семейство диффеоморфизмов $f_\nu : S^3 \to S^3$, $-1 \leq \nu \leq 1$, **гладко** зависящих от параметра $\nu$, таких, что*

- *при любом $-1 \leq \nu < 0$ неблуждающее множество диффеоморфизма $f_\nu$ состоит из одномерного растягивающегося аттрактора и одномерного сжимающегося репеллера, являющихся соленоидом Смейла-Вильямса;*
- *диффеоморфизм $f_0$ имеет неблуждающее множество, состоящее из двух нульмерных транзитивных инвариантных множеств $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ таких, что каждое их этих множеств локально гомеоморфно произведению канторовых множеств, и ограничение $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ является частично гиперболическим диффеоморфизмом;*
- *при любом $0 < \nu \leq 1$ неблуждающее множество диффеоморфизма $f_\nu$ состоит из из двух гиперболических нуль-мерных транзитивных инвариантных множеств, локально гомеоморфных произведению двух канторовых множеств.*

*Более того, аналогичные утверждения имеют место для семейства обратных диффеоморфизмов $f_\nu^{-1} : S^3 \to S^3$, $-1 \leq \nu \leq 1$.*

Ее доказательство основано на следующей теореме, которая относится к бифуркациям эндоморфизмов окружности $S^1$ и которая имеет самостоятельный интерес.

**Теорема 1.2.** *Существует семейство гладких неособых $d$-эндоморфизмов $g_\nu : S^1 \to S^1$, $-1 \leq \nu \leq 1$, **гладко** зависящих от параметра $\nu$, где $d \geq 2$, таких, что*

- *при любом $-1 \leq \nu < 0$ эндоморфизм $g_\nu$ гиперболический (структурно устойчивый) и неблуждающее множество эндоморфизма $g_\nu$ состоит из канторова транзитивного множества и изолированной притягивающей неподвижной точки;*
- *неблуждающее множество эндоморфизма $g_0$ канторово, и в нем содержится негиперболическая неподвижная точка;*
- *при любом $0 < \nu \leq 1$ эндоморфизм $g_\nu$ гиперболический (структурно устойчивый) транзитивный и сопряжен линейному растягивающему $d$-эндоморфизму.*

Если предположить, что теорема 1.2. верна, то основная теорема 1.1. вытекает из нее и техники, развитой в работах [2], [7], [8]. Поэтому мы перейдем к доказательству теоремы 1.2..

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией, которая индуцируется проекцией $[0;1] \to S^1$. Сюрьективное $C^1$ отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм $g$ называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной $Dg$. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$. Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу $d$-накрытий (т.е., отображений окружности в себя степени $d$, которые являются локальными гомеоморфизмами) [9]. Для краткости эндоморфизм степени $d$ мы будем называть $d$-эндоморфизмом. Нас будет интересовать случай $d \geq 2$ (при $d = 1$ неособый $d$-эндоморфизм является диффеоморфизмом). Классическим примером неособого $d$-эндоморфизма является линейный эндоморфизм $E_d(x) = dx \; mod\, 1$, который является растягивающим [10]. Известно, что неблуждающее множество такого эндоморфизма совпадает с окружностью.

Пусть $U_\delta(x)$ – стандартная бамп-функция, равная единице на промежутке $[-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}] \subset [-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ с носителем на промежутке $[-\delta; +\delta]$. Более точно,

- $U_\delta(x) = 1$ при всех $x \in \left[-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}\right]$, $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$;
- $U_\delta(x) = 0$ при всех $|x| \geq \delta$;
- $U'_\delta(x) \geq 0$ при всех $x \in \left[-\delta; -\frac{\delta}{2}\right]$, и $U'_\delta(x) \leq 0$ при всех $x \in \left[\frac{\delta}{2}; \delta\right]$.

Далее для определенности считаем $\delta = \frac{1}{8}$ и обозначим $U_\delta$ через $U$. Дополнительно к ранее приведенным свойствам функции $U$ потребуем, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:

- $|U'(x)| \leq 1$ при всех $\frac{3}{48} \leq |x| \leq \frac{4}{48}$, $\frac{5}{48} \leq |x| \leq \frac{6}{48}$;
- $\frac{1}{2} \leq |U'(x)| \leq 48$ и $|U'(x)| \geq \frac{1}{3}$ при всех $\frac{4}{48} \leq |x| \leq \frac{5}{48}$.

Рассмотрим семейство преобразований окружности вида

$$g_\mu(x) = (x^3 + \alpha x + \mu)U(x) + [1 - U(x)]\, dx \;\; mod\; 1. \tag{1.1}$$

Область изменения параметра $\mu$ и постоянную $0 < \alpha < 1$ мы уточним ниже. Производная имеет вид

$$g'_\mu(x) = (3x^2 + \alpha)U(x) + [1 - U(x)]\, d + (x^3 + \alpha x + \mu)U'(x) - dU'(x)x \;\; mod\; 1. \tag{1.2}$$

На промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ при $\mu = 0$ имеем равенства $g_0(x) = x^3 + \alpha x$, $g'_0(x) = 3x^2 + \alpha$. Если

$$\sqrt{1-\alpha} \leq \frac{1}{16}, \tag{1.3}$$

то $g_0$ на указанном промежутке имеет три неподвижные точки

$$x_- = -\sqrt{1-\alpha},\; x_0 = 0,\; x_+ = \sqrt{1-\alpha}, \text{ причем } g'_0(x_\pm) = 3 - 2\alpha > 1,\; g'_0(0) = \alpha < 1. \tag{1.4}$$

Система

$$\begin{cases} g_\mu(x) & = & x \\ g'_\mu(x) & = & 1 \end{cases}$$

имеет решения

$$\mu_{crit} = -2\left(\frac{1-\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \pm x_{crit} = \pm\sqrt{\frac{1-\alpha}{3}}. \tag{1.5}$$

Покажем теперь, что для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ отображение (1.1) является неособым $d$-эндоморфизмом окружности при $\mu \in [-\varepsilon_1 + \mu_{crit}; 0]$. Действительно, для доказательства неравенства $g'_\mu(x) > 0$ представим производную (1.2) в виде

$$g'_\mu(x) = (3x^2+\alpha)U(x) + [1-U(x)]\,d + (x^2+\alpha-d)xU'(x) + \mu U'(x) \ \ mod\ 1. \qquad (1.6)$$

Поскольку вне отрезка $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ производная $g'_\mu = d \geq 2$, то достаточно рассмотреть производную на $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$. На отрезке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ имеем $g'_\mu(x) = 3x^2 + \alpha \geq \alpha > 0$. Осталось рассмотреть $g'_\mu(x)$ при $\frac{1}{16} \leq |x| \leq \frac{1}{8}$. Далее будем учитывать неравенство $xU'(x) \leq 0$, которое следует из свойств бамп-функции. Так как $d \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$, то $x^2 + \alpha - d \leq 1 + \alpha - d \leq 0$. Поэтому $(x^2+\alpha-d)xU'(x) \geq 0$. Отсюда и (1.6) при $\frac{5}{48} \leq |x| \leq \frac{1}{8}$ получаем

$$g'_\mu(x) \geq (3x^2+\alpha)U(x) - |\mu U'(x)| \geq \frac{25}{12}\cdot\frac{1}{64} + \alpha - |\mu U'(x)|.$$

Правая часть при $\mu = \mu_{crit}$ равна

$$\frac{25}{12}\cdot\frac{1}{64} + \alpha - 2\left(\frac{1-\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что при малом $\nu_1 > 0$ и близком к единице $\alpha$ выполняется неравенство $g'_\mu(x) > 0$, если $\mu \in [-\nu_1 + \mu_{crit}; 0]$. Аналогичный вывод получаем при $\frac{3}{48} \leq |x| \leq \frac{4}{48}$. Для $\frac{4}{48} \leq |x| \leq \frac{5}{48}$ имеем

$$(3x^2+\alpha)U(x) \geq (3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{64}+\alpha)\frac{1}{3} = \frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3},$$

$$(x^2+\alpha-d)xU'(x) \geq |x^2+\alpha-d|\cdot|xU'(x)| \geq \left(d - \frac{25}{36}\cdot\frac{1}{64}+\alpha\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} \geq \frac{d}{12}.$$

Учитывая, что $|U'(x)| \leq 48$, получаем

$$g'_\mu(x) \geq \frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3} + \frac{d}{12} - 48|\mu|.$$

Правая часть при $\mu = \mu_{crit}$ равна

$$\frac{1}{144} + \frac{\alpha}{3} + \frac{d}{12} - 96\left(\frac{1-\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что при малом $\nu_2 > 0$ и близком к единице $\alpha$ также выполняется неравенство $g'_\mu(x) > 0$, если $\mu \in [-\nu_2 + \mu_{crit}; 0]$. Осталось взять $\varepsilon_1 = \min\{\nu_1; \nu_2\}$.

Из неравенства $g'_\mu(x) > 0$ вытекает, что на промежутке $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ преобразование $g_\mu$ является диффеоморфизмом $[-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}] \to [-\frac{d}{8}; +\frac{d}{8}]$. Так как вне этого отрезка $g_\mu = dx\ mod\ 1$, то преобразование $g_\mu$ является неособым $d$-эндоморфизмом окружности.

Покажем, что при любом $\mu_{crit} < \mu \leq 0$ неблуждающее множество $NW(g_\mu)$ состоит из притягивающей изолированной точки $x^{attr}_\mu \in [-\frac{1}{8}; +\frac{1}{8}]$ и канторова транзитивного множества $K_\mu$, которое является дополнением к притягивающему множеству (бассейну) точки $x^{attr}_\mu$, $K_\mu = S^1 \setminus W^s(x^{attr}_\mu)$ (отсюда и [9] будет следовать, что $g_\mu$ является структурно устойчивым эндоморфизмом). Действительно, согласно (1.4), $g_0$ на промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ имеет три неподвижные точки, причем точка $x_0 = 0$ притягивающая, а точки $x_\pm$ отталкивающие. Вне промежутка $[-x_{crit}; x_{crit}]$ производная $g'_0(x) > 1$. Отсюда вытекает, что $g_0$ удовлетворяет требуемому утверждению.

Из вида (1.1) следует, что на промежутке $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$ график функции $g_\mu$ получается жестким сдвигом графика $g_0$. Отсюда можно заключить, что при $\mu_{crit} < \mu < 0$ эндоморфизм $g_\mu$ имеет также при неподвижные точки $x_\mu^-$, $x_\mu^{attr}$, $x_\mu^+$. Учитывая (1.4) и (1.5), непосредственно проверяется, что точки $x_\mu^-$, $x_\mu^+$ являются гиперболическими неподвижными и отталкивающими точками, а $x_\mu^{attr}$ является гиперболической неподвижной притягивающей точкой. Поэтому дополнение $K_\mu$ к притягивающему множеству (бассейну) точки $x_\mu^{attr}$ является канторовым множеством, на котором $g_\mu$ действует транзитивно.

При $\mu = \mu_{crit}$ неблуждающее множество $NW(g_\mu)$ по прежнему является канторовым транзитивным множеством $K_\mu$, в котором лежит негиперболическая неподвижная точка $x_{crit}$, причем производная $g_{crit}(x_{crit})' = 1$. Из (1.2) следует, что $x_{crit}$ является негиперболической точкой общего положения, поскольку $g_{crit}(x_{crit})'' \neq 0$. Это означает, что $x_{crit}$ является частично гиперболической точкой отображения $g_\mu$.

Аналогично показывается, что для некоторого $\varepsilon_2 > 0$ такое, что при $-\varepsilon_2 + \mu_{crit} \leq \mu < \mu_{crit}$ отображение $g_\mu$ является структурно устойчивым транзитивным эндоморфизмом (неблуждающее множество совпадает со всей окружностью). Это завершает доказательство теоремы 1.2..

Авторы благодарят РФФИ, грант 12-01-00672-а, за финансовую поддержку.

# Список литературы


1. Борисов А.В., Мамаев И.С., “Странные аттракторы в динамике кельтских камней”, *Успехи физ. наук*, **174 4** (2003), 407–418.

2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202 3** (2011), 47–68.

3. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е., “О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации”, *Успехи физ. наук*, **179 12** (2009), 1281–1310.

4. Кузнецов С.П., “Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике”, *Успехи физ. наук*, **181 2** (2011), 121–149.

5. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И., “О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием”, *Письма в ЖТФ*, **34 18** (2008), 1–8.

6. Belykh I., Belykh V., Mosekilde V., “Hyperbolic Plykin attarctor can exist in neuron models”, *Int. Journ. Bifurc. Chaos*, **15** (2005), 3567–3578.

7. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1083), 69–102.

8. Jiang B., Ni Y., Wang S., “3-manifolds that admit knotted solenoids”, *ArXiv: math. GT/0403427*.

9. Nitecki Z., “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203–220.

10. Shub M., “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

11. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817 (имеется перевод: Успехи мат. наук, 251970, 113-185)..

12. Strogatz S.H., *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, Massachusetts..

13. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 169–203.

# The destruction of the Smale-Williams solenoids

**© S. V. Gonchenko[4], E.V. Zhuzhoma[5], N.V. Isaenkova [6]**

**Abstract.** In the paper, one represents the family of diffeomorphisms $f_\nu : S^3 \to S^3$ , $-1 \le \nu \le 1$ , depending smoothly on the parameter $\nu$ such that 1) given any $-1 \le \nu < 0$ , the non-wandering set of $f_\nu$ consists of one-dimensional expanding attractor and one-dimensional contracting repeller that are Smale-Williams solenoid; 2) the diffeomorphism $f_0$ has a non-wandering set consisting of the two zero-dimensional transitive invariant sets $\Lambda_1$ and $\Lambda_2$ such that each is homeomorphic to the product of Cantor sets, and the restriction $f_0|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ is a partially hyperbolic diffeomorphism; 3) given any $0 < \nu \le 1$ , the non-wandering set of $f_\nu$ consists of two hyperbolic zero-dimensional transitive invariant sets each is homeomorphic to the product of Cantor sets.

**Key Words:** Attractor, repeller, solenoid Smale-Williams

[4] Head of Department of Differential Equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod

[5] Professor of mathematical analysis, theory and methodology of training, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

*УДК 517.9*

# О структуре трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы с одномерными базисными множествами

© **Ю. А. Левченко**[1]

**Аннотация.** В работе уточняется структура трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме $A$ С. Смейла, неблуждающее множество которых содержит одномерное просторно расположенное базисное множество.

**Ключевые слова:** диффеоморфизм, базисное множество, аксиома $A$, аттрактор.

## 1. Введение и формулировка основного результата

Пусть $f$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, заданный на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии $M^3$ и удовлетворяющие аксиоме $A$ С.Смейла (то есть множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$). Согласно С. Смейлу [1] неблуждающее множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Любое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде конечного объединения $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ замкнутых подмножеств $(k \geq 1)$, называемых периодическими компонентами множества $\mathcal{B}$, таких, что $f^k(B_i) = B_i, f(B_i) = B_{i+1}$ $(B_{k+1} = B_1)$. Число $k$ называется периодом базисного множества $\mathcal{B}$.

**Определение 1.1.** *Базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма $f$ называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность $U$ множества $\mathcal{B}$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j\geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма $f^{-1}$ называется репеллером диффеоморфизма $f$. Аттрактор $\mathcal{B}$ диффеоморфизма $f$ называется растягивающимся, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E^u_{\mathcal{B}})$ неустойчивого подрасслоения $E^u_{\mathcal{B}}$. Сжимающийся репеллер диффеоморфизма $f$ определяется как растягивающийся аттрактор для $f^{-1}$. Базисное множество, не являющееся ни аттрактором, ни репеллером, будем называть седловым.*

В силу [2] нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма $f$ называется поверхностным, если оно принадлежит $f$-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически вложенной в 3-многообразие $M^3$ и называемой носителем множества $\mathcal{B}$.

Из работы [3] следует, что любой двумерный аттрактор (репеллер) диффеоморфизма $f$ является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером).

В работе [4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов $f$ в предположении, что их неблуждающее множество содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Там же доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество

[1] Младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики., г. Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com

содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

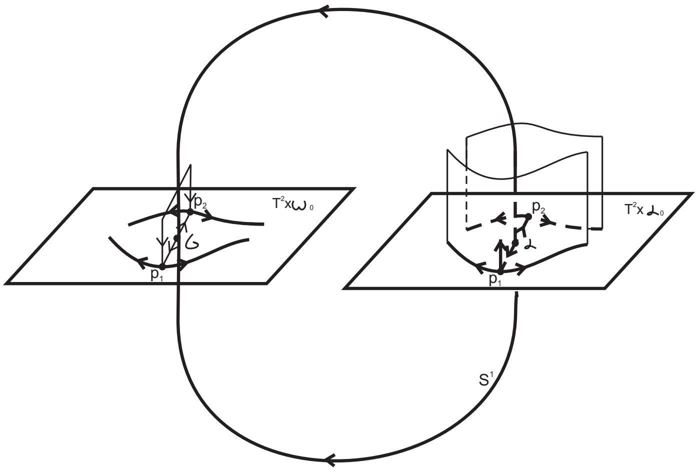
В [2] доказано, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f$ содержит двумерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$, принадлежащее поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$, то поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$ есть двумерный тор ручно вложенный[2] в $M^3$, а ограничение диффеоморфизма $f$ на поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически сопряжено алгебраическому автоморфизму (Аносова), индуцированному ограничением исходного диффеоморфизма фундаментальной группе тора $M^2_{\mathcal{B}}$. В [5] доказано, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит только из поверхностных двумерных базисных множеств, то многообразие $M^3$ является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор. В работах [6]-[8] выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов с поверхностными двумерными базисными множествами, для которого получена полная топологическая классификация.

Настоящая работа посвящена изучению диффеоморфизмов трехмерного многообразия, неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества. Отметим, что топологическая классификация одномерных базисных множеств на двумерных поверхностях получена в работах Плыкина Р.В., Гринеса В.З., Жирова А.Ю., Калая Х.Х., и кроме того, в работах Гринеса В.З., Бонатти Х., Ланжевена Р. найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях. Изучению диффеоморфизмов на три-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит одномерные растягивающиеся аттракторы (сжимающиеся репеллеры) посвящены работы Вильямса [9], Жужомы, Исаенковой [10], Боте [11], [12] и др. Заметим, что рассматриваемые в перечисленных работах базисные множества не являлись поверхностными. Кроме того, все известные примеры диффеоморфизмов трехмерного многообразия с одномерными растягивающимися аттракторами (сжимающимися репеллерами) не являются структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивого диффеоморфизма такого типа является открытым.

Однако, нетрудно построить пример структурно устойчивого диффеоморфизма, неблуждающее множество которого содержит нетривиальное одномерное поверхностное базисное множество. Рассмотрим $DA$-диффеоморфизм $f_0 : T^2 \to T^2$ на двумерном торе $T^2$. Напомним, что $DA$-диффеоморфизмом называется структурно устойчивый диффеоморфизм тора $T^2$, неблуждающее множество которого состоит из неподвижного источника и гиперболического одномерного аттрактора, полученного, так называемой, хирургической операцией Смейла [1] из диффеоморфизма Аносова 2-тора $T^2$. Представим трехмерный тор $T^3$ как прямое произведение $T^2 \times S^1$ тора $T^2$ на окружность $S^1$ и зададим на пространстве $T^3 = T^2 \times S^1$ отображение $F(x,t) = (f_0(x), \Phi(t))$ ($x \in T^2, t \in S^1$), где $\Phi(t) : S^1 \to S^1$ - диффеоморфизм окружности с двумя неподвижными точками: источником $\alpha_0$ и стоком $\omega_0$. В силу описанной конструкции полученный диффеоморфизм $F$ удовлетворяет аксиоме $A$ С. Смейла. Неблуждающее множество диффеоморфизма $F$ состоит из двух нетривиальных одномерных просторно расположенных базисных множества, каждое из которых принадлежит поверхности гомеоморфной двумерному тору, а также одного неподвижного источника $\alpha \in T^2 \times \{\alpha_0\}$ и одного неподвижного седла $\sigma \in T^2 \times \{\omega_0\}$ (схема построения диффеоморфизма $F$ показана на рисунке 1.1). Базисное множество принадлежащее поверхности $T^2 \times \{\omega_0\}$ является одномерным аттрактором, а базисное множество, лежащее на поверхности $T^2 \times \{\alpha_0\}$ является седловым. Кроме того,

[2] Пусть $D_0 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ — стандартный диск и $M^2$ поверхность, топологически вложенная в 3-многобразие $M^3$. Поверхность $M^2$ называется локально плоской или ручной если для каждой точки $x \in M^2$ существует окрестность $U_x$ точки $x$ в $M^3$ и гомеоморфизм $h_x : \overline{U_x} \to \mathbb{R}^3$ такой, что $h(\overline{U_x} \cap M^2) = D_0$.

в построенном примере двумерные устойчивые (неустойчивые) многообразия точек базисных множеств пересекаются с поверхностями $T^2 \times \{\omega_0\}$, $T^2 \times \{\alpha_0\}$ по единственной кривой, при этом аттрактор, принадлежащий поверхности $T^2 \times \{\omega_0\}$ является объединением одномерных неустойчивых многообразий, а седловое базисное множество, принадлежащее поверхности $T^2 \times \{\alpha_0\}$, является пересечением двумерных неустойчивых многообразий с поверхностью $T^2 \times \{\alpha_0\}$. Из построения также следует, что устойчивые и неустойчивые многообразия точек неблуждающего множества пересекаются трансверсально и, следовательно, диффеоморфизм $F$ является структурно устойчивым.




Р и с у н о к **1.1**

Следуя [13], поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ назовем просторно расположенным, если не существует гомотопной нулю на $M^2_{\mathcal{B}}$ петли, образованной парой отрезков, являющихся пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий какой-либо точки из $\mathcal{B}$ с $M^2_{\mathcal{B}}$.

Пусть $f : M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме $A$ С. Смейла. Предположим, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ содержит одномерное просторно расположенное базисное множество $\mathcal{B}$, периодическая компонента $B$ которого имеет период $k$ и принадлежит поверхности $M^2_B$.

Будем говорить, что для базисного множества $\mathcal{B}$ выполняется условие $(*)$, если двумерные устойчивые (неустойчивые) многообразия $W^s(x)(W^u(x))$ точек периодической компоненты $B$ базисного множества $\mathcal{B}$ пересекаются с несущей поверхностью $M^2_B$ по единственной кривой. Обозначим через $\hat{W}^s(x) = W^s(x) \cap M^2_B$ ($\hat{W}^u(x) = W^u(x) \cap M^2_B$) след устойчивого (неустойчивого) многообразия точки $x$.

Предположим теперь, что носитель периодической компоненты $B$ является поверхностью гомеоморфеной тору $T^2_B$. Тогда справедливо следующее предложение, которое доказывается с использованием техники доказательства теоремы 2 из [2].

**П р е д л о ж е н и е 1.1.** *Ограничение диффеоморфизма $f^k|_{T^2_B}$ индуцирует гиперболический автоморфизм фундаментальной группы тора $T^2_B$ (то есть матрица, индуцирующая этот автоморфизм, является гиперболической, то есть не имеет собственных значений, по модулю равных единице).*

Предположим теперь, что $M^3$ – замкнутое, неприводимое[3], ориентируемое многообразие и $T^2$ - двумерный тор вложенный в $M^3$. Согласно [14] будем называть $T^2$ аносовским

[3] Многообразие $M$ называется неприводимым, если любая вложенная в $M$ двумерная сфера ограничивает трехмерный шар.

тором, если существует диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ такой, что $f$ индуцирует гиперболический автоморфизм фундоментальной группы тора.

Пусть $M_A$ — мноогобразие, являющееся фактор-пространством, полученным из $T^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(f_{A(z)},0)$, где $f_A$ диффеоморфизм тора, индуцированный унимодулярной матрицей $A$, которая является либо гиперболической, либо тождественной, либо равной $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Предложение 1.2.** *Замкнутое, неприводимое, ориентируемое многообразие $M^3$ допускает существование аносовского тора тогда и только тогда, когда многообразие $M^3$ гомеоморфно $M_A$.*

Следствием предложений 1.1., 1.2. является следующий результат, который является основным в настоящей работе.

**Теорема 1.1.** *Пусть $f : M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме $A$, заданный на замкнутом, неприводимом, ориентируемом трехмерном многообразии $M^3$, неблуждающее множество которого содержит одномерное просторно расположенное базисное множество $\mathcal{B}$, удовлетворяющее условию $(*)$. Тогда если носитель периодической компоненты $B$ базисного множества $\mathcal{B}$ гомеоморфен двумерному тору, то многообразие $M^3$ гомеоморфно многообразию $M_A$.*

## 2. Доказательство предложения 1.1.

Пусть $B$ - периодическая компонента некоторого базисного множества $\mathcal{B}$ периода $k$ диффеоморфизма $f$, принадлежащая поверхности $T^2_B$, гомеоморфной двумерному тору. Положим $g = f^k$.

Следуя [15] периодическую точку $p \in \mathcal{B}$ назовем граничной периодической точкой множества $\mathcal{B}$, если одна из компонент связности хотя бы одного из множеств $(W^u_p \cap M^2_{\mathcal{B}}) \backslash p$ или $(W^s_p \cap M^2_{\mathcal{B}}) \backslash p$ не пересекается с $\mathcal{B}$; периодические точки, не являющиеся граничными, назовем внутренними периодическими точками базисного множества $\mathcal{B}$. Аналогично [15] устанавливается, что граничные точки существуют и их конечное число.

Представим тор $T^2_B$ как фактор-группу группы $R^2$ по целочисленной решетке $\Gamma = Z \oplus Z : T^2_B = R^2/\Gamma$. Обозначим через $\pi$ естественную проекцию группы $R^2$ на фактор группу $T^2_B$, через $\bar{g} : R^2 \to R^2$ - диффеоморфизм, накрывающий $g|_{T^2_B}$ и через $g_*$ - автоморфизм группы $\Gamma : g_*(\gamma) = \bar{g}(\gamma) - \bar{g}(0)$, где $0$ - начало координат на $R^2$, $\gamma \in \Gamma$.

Предположим для определенности, что $B$ содержит устойчивые многообразия своих точек.

Пусть $\pi^{-1}(B) = \bar{B}$ - полный прообраз базисного множества $B$ на $R^2$ и $\bar{x}$ - точка из $\bar{B}$. Обозначим через $w^s_{\bar{x}}, w^u_{\bar{x}}$ прообразы устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s_x, \hat{W}^u_x$ точки $x = \pi(\bar{x})$, проходящие через точку $\bar{x}$. Введем на кривой $w^s_{\bar{x}}$ $(w^u_{\bar{x}})$ параметр $t \in R$ так, что $w^s_{\bar{x}}(0) = \bar{x}$ $(w^u_{\bar{x}}(0) = \bar{x})$. Обозначим через $w^{s+}_{\bar{x}}, w^{s-}_{\bar{x}}$ $(w^{u+}_{\bar{x}}, w^{u-}_{\bar{x}})$ компоненты связности множества $w^s_{\bar{x}} \setminus \bar{x}$ $(w^u_{\bar{x}} \setminus \bar{x})$, соответствующие значениям $t > 0$, $t < 0$ и через $x^s(t), y^s(t)$ $(x^u(t), {}^u(t))$ эвклидовы координаты на $R^2$ точки $w^s_{\bar{x}}(t)$ $(w^u_{\bar{x}}(t))$.

Тогда согласно [15] справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** *Пусть существует последовательность $t_k \to +\infty$ $t_k > 0$ $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $w^{s+}_{\bar{x}}(t_k) \in \bar{B}$. Тогда луч $w^{s+}_{\bar{x}}$ уходит на $R^2$ в бесконечность и имеет иррациональное асимптотическое направление.*

Утверждение аналогичное утверждению леммы 2.1. имеет место и для прообразов неустойчивых многообразии точек из $B$.

**Следствие 2.1.** *Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ - любые точки из $\bar{B}$, которых кривые $w^s_{\bar{x}}, w^u_{\bar{y}}$ уходят на $R^2$ в бесконечность в обоих возможных на них направлениях. Тогда $w^s_{\bar{x}} \cap w^u_{\bar{y}} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Достаточно показать, что утверждение теоремы выполняется для некоторой степени диффеоморфизма $g$. Пусть $p$ - внутренняя периодическая точка множества $B$ и $m$ - такое натуральное число, что $g^m(p) = p$. Не уменьшая общности, можно считать, что один из прообразов $\bar{p}$ точки $p$ является началом координат на плоскости $R^2$. Пусть $\bar{g}_m$ - накрывающий $g^m$ диффеоморфизм, для которого точка $\bar{p}$ является неподвижной и $\bar{p}_1$ - любая точка решетки $\Gamma$, отличная от $\bar{p}$. Так как $\bar{p}$ и $\bar{p}_1$ - прообразы внутренней периодической точки $p$, то в силу леммы 2.1. кривые $w^u_{\bar{p}}, w^s_{\bar{p}}, w^s_{\bar{p}_1}, w^u_{\bar{p}_1}$ уходят на $R^2$ в бесконечность в обоих возможных на них направлениях. Применяя следствие 2.1., получаем $w^s_{\bar{p}_1} \cap w^u_{\bar{p}} \neq \emptyset$, $w^u_{\bar{p}_1} \cap w^s_{\bar{p}} \neq \emptyset$. Отсюда, используя просторную расположенность базисного множества $B$, нетрудно получить, что орбита точки $p_1$, в силу действия диффеоморфизма $\bar{g}_m$ покидает любую компактную часть плоскости $R^2$. Предположим теперь, что матрица $g^m_*$ не является гиперболической. Тогда существуют точки решетки $\Gamma$, отличные от начала координат, орбиты которых в силу действия $g^m_*$ остаются в компактной части плоскости. Так как $g^m_*|_\Gamma = \bar{g}_m|_\Gamma$, то это невозможно.
Доказательство закончено.

Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи и полезные обсуждения, а также грант РФФИ 12-01-00672-а за частичную финансовую поддержку.

# Список литературы


1. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

2. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.

3. Brown A., “Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds”, *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.

4. Grines V., Zhuzhoma E., “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:5 (2005), 617–667.

5. Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А., “О структуре 3-многообразия, допускающего А-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством”, *Журнал СВМО*, **12**:2 (2010), 7–12.

6. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Журнал СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов”, *Журнал СВМО*, **14**:2 (2012), 48–57.

8. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.

9. Williams R. F., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.

10. Жужома Е. В., Исаенкова Н. В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.

11. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods II”, *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.

12. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

13. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.

14. Hertz F., Herts M., Ures R., “Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds”, *Journal of modern dynamics*, **5**:1 (2011), 185–202.

15. Гринес В. З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.


## On structure of the three-dimensional manifold admitting diffeomorphisms with one-dimensional basic sets

© **Y. A. Levchenko**[4]

**Abstract.** The paper clarifies the structure of three-dimensional manifold admitting $A$-diffeomorphisms whose non-wandering set contains of an one-dimensional surface basic set and supporting surface is homeomorphic to the 2-torus.

**Key Words:** diffeomorphism, basis set, the axiom $A$, the attractor

[4] Junior Researcher, Department of Differential Equations, Scientific-Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics. Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com

УДК 519.6..517.977.58

# Численный метод решения одной задачи оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением

© Ф. В. Лубышев[1], А. Р. Манапова[2], М. Э. Файрузов[3]

**Аннотация.** В работе рассматривается и исследуется нелинейная задача оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решением, с управлениями в коэффициентах. Излагается метод разностной аппроксимации экстремальной задачи, получены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксиммаций по Тихонову.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, полулинейное эллиптическое уравнение, метод разностной аппроксимации, метод регуляризации.

## 1. Введение

С теоретической и практической точек зрения важными для исследования представляются физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными уравнениями математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ допускают разрывы. Такие задачи оптимизации мало изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования подобных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач.

В настоящей работе рассмотрена и исследована нелинейная задача оптимального управления для полулинейного уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением (с условиями сопряжения типа неидеального контакта [1]-[3]). Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных незавышенных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

В теплофизических терминах поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления коэффициентами теплоотдачи $d_1(x)$ и $d_2(x)$, входящими в нелинейные слагаемые $d_1(x)q_1(u)$ и $d_2(x)q_2(u)$, характеризующие мощность нелинейных стоков тепла, зависящих от температуры и распределенных в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$.

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа.

[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

## 2. Постановка задач оптимизации для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и решением и их корректность

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область $\Omega$ разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней границей» $\overline{S} = \{x_1 = \xi,\ 0 \leq x_2 \leq l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < x_1 < \xi,\quad 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < x_1 < l_1,\quad 0 < x_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти $\Omega^-$ и $\Omega^+$) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область $\Omega$ есть объединение областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ и внутренних точек «контактной границы $\overline{S}$» подобластей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области $\Omega$ (в отличие от $S$-внутренней границы области $\Omega$). Далее, будем обозначать через $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей $\Omega_k$ без $S$, $k = 1,2$, так что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части $\Gamma_k$, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета $S$), $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через $n_\alpha$, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области $\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к $S$ в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль $n$ является внешней нормалью к $S$ по отношению к области $\Omega_1$, то есть нормаль $n$ направлена внутрь области $\Omega_2$. Ниже при постановке краевых задач, $S$ – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, $k = 1,2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, разбитой на части внутренней границей $S$, следующей задачей, а именно:

требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^-$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, удовлетворяют в $\Omega_k$ уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1,2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1,2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на $S$ – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы $S$ областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу (2.1) – (2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ полулинейному уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$ и условиям сопряжения на внутренней границе $S$ (на границе раздела областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$)

$$\begin{gathered} u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S)\,, \\ \big[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big] = 0, \quad G(x) = \big(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(x)$ на $S$, а $k_\alpha(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha = 1, 2$ – известные функции, определяемые по-разному в $\Omega_1$ и $\Omega_2$, обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях $\Omega_k$, $k = 1, 2$, претерпевающими разрыв на $S$ первого рода; $\theta(x_2)$ – заданная функция; $g(x) = \big(d_1(x), d_2(x)\big)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W^1_\infty(\Omega_1) \times W^1_\infty(\Omega_2)$, $0 < \nu \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}$, $\alpha = 1, 2$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\theta(x_2) \in L_\infty(S)$, $0 < \theta_0 \le \theta(x_2) \le \overline{\theta}_0$, $x \in S$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1)$, $\nu, \overline{\nu}, \theta_0, \overline{\theta}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi)$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $\quad 0 < q^0 \le \dfrac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \le L_q < \infty$, для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \ne \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U_k = \big\{g_k(x) = d_k(x) \in H^{(k)} : \ 0 < d_0 \le d_k(x) \le \overline{d}_0 \text{ п.в. на } \Omega_k\big\}, \quad k = 1, 2, \tag{2.8}$$

где $H^{(k)} = L_2(\Omega_k)$ – пространство управлений, $U_k \subset H^{(k)}$, $U = \prod\limits_{k=1}^{2} U_k$, $H = H^{(1)} \times H^{(2)}$, $d_0$, $\overline{d}_0$ – заданные числа, а п.в. – почти всюду. Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \Big|u(x_1, x_2; g) - u_0^{(1)}(x)\Big|^2 d\Omega_1 = I(u(x, g)), \tag{2.9}$$

где $u_0^{(1)} \in W^1_2(\Omega_1)$ – заданная функция. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(x) = u(x; g)$ задачи (2.6) – (2.7), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \big(d_1, d_2\big) \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.9).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W^1_2(\Omega_1) \times W^1_2(\Omega_2)\big\}\,. \tag{2.10}$$

Здесь $W^1_2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях $\Omega_k$, $k = 1, 2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ и нормой [4]

$$\|u_k\|_{W^1_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.11}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,\vartheta)_V=(u_1,\vartheta_1)_{W_2^1(\Omega_1)}+(u_2,\vartheta_2)_{W_2^1(\Omega_2)},\quad \|u\|_V^2=\sum_{k=1}^2\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},\tag{2.12}$$

$V=V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2=\sum_{k=1}^2\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^2\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega_k+\sum_{k=1}^2\int\limits_{\Gamma_k}u_k^2\,d\Gamma_k+\int\limits_S[u]^2\,dS.\tag{2.13}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset\partial\Omega_k$, $k=1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})=\left\{u(x)=(u_1(x),u_2(x))\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\}\tag{2.14}$$

с нормой:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=\|u\|_*^2=\sum_{k=1}^2\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^2\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2d\Omega_k+\int\limits_S[u]^2\,dS.\tag{2.15}$$

Под решением прямой задачи (2.6) – (2.6) при фиксированном управлении $g(x)=\big(d_1(x),d_2(x)\big)$ понимается функция $u(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}Q(u,\vartheta)=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^2k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}+d(x)\,q(u)\,\vartheta\right]d\Omega^{(1,2)}+\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\theta(x)[u][\vartheta]dS=\\=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}f(x)\,\vartheta d\Omega^{(1,2)}=l(\vartheta),\qquad\forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\end{aligned}\tag{2.16}$$

**Теорема 2.1.** *При любом $g\in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ задачи (2.6) – (2.6) в смысле определения (2.16). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.16) эквивалентна решению операторного уравнения $Au=F$, где нелинейный оператор $A:\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\to\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется равенством $(Au,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=Q(u,\vartheta)$, $\forall u,\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=l(\vartheta)$, $\forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка $\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}\le C\sum\limits_{k=1}^2\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}$.*

В дальнейшем, при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию и функционалу сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе

[14], с.16 при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи $(2.6)-(2.6)$ принадлежит $W_2^2(\Omega_1)\times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству

$$\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u=(u_1,u_2)\in W_2^2(\Omega_1)\times W_2^2(\Omega_2)\}, \qquad (2.17)$$

и при каждом фиксированном управлении $g\in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2}\|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \le M\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \qquad \forall g\in U, \qquad (2.18)$$

где $M=Const>0$, не зависящая от управления $g(x)=\big(d_1(x),d_2(x)\big)\in U$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.6)-(2.9). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

**Теорема 2.2.** *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $g_*\in U$ *задачи* (2.6)-(2.9), *т.е.* $J_*=\inf\big\{J(g):g\in U\big\}>-\infty$, $U_*=\big\{g_*\in U:\ J(g_*)=J_*\big\}\ne\emptyset$. *Множество точек минимума* $U_*$ *функционала цели* $J(g)$ *в экстремальной задаче* (2.6)-(2.9) *слабо бикомпактно в* $H=L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_2)$. *Любая минимизирующая последовательность* $\big\{g^{(n)}\big\}_{n=1}^{\infty}\subset U$ *функционала* $J(g)$ *слабо в* $H$ *сходится к множеству* $U_*$.

## 3. Разностная аппроксимация задач оптимального управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.6)-(2.9) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Для аппроксимации задачи (2.6)-(2.9) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$, и в $\overline{\Omega}$, скалярные произведения и нормы в $\overline{\Omega}$ (по поводу определения сеток, норм и скалярных произведений см. [11]).

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x\in\overline{\omega}^{(k)}$ на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\omega^{(k)}$, $k=1,2$:

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{x\in\partial\omega^{(k)}} y_k(x)\,\nu_k(x)\,\tau_k(x), \quad k=1,2,$$

и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями

$$\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = (y_k,y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x)\tau_k(x), \quad k=1,2,$$

$$\tau_1(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=0,\xi;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\widetilde{\gamma}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=\xi,l_1;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\widetilde{\gamma}^{(2)}, \end{cases}$$

$\widetilde{\gamma}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника $\Omega_k$, $k=1,2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы будет $L_2(\partial\omega^{(1)})$ определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|^2_{L_2(\partial\omega^{(1)})} = \sum_{x_2\in\overline{\omega}_2}\left[y_1^2(0,x_2)+y_1^2(\xi,x_2)\right]\hbar_2(x_2) + \sum_{x_1\in\overline{\omega}_1}\left[y_1^2(x_1,0)+y_1^2(x_1,l_2)\right]\hbar_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{0}{\gamma}{}^{(k)} = \partial\omega^{(k)}\cap \overset{0}{\Gamma}{}_k \equiv \partial\omega^{(k)}\setminus S_\xi$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)}\subset\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$. Через $L_2\left(\overline{\omega}^{k)},\gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi} y_k^2(x)h_1h_2 = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x_2\in\omega_2} y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2,$$

$k=1,2$, индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi} y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2, \qquad k=1,2.$$

В дальнейшем $\|y_k\|^2_{L_2(S_\xi)} = \sum\limits_{x\in S_\xi} y^2(x)h_2 = \sum\limits_{x_2\in\omega_2} y^2(\xi,x_2)h_2$. Нетрудно видеть, что

$$(y_1,\nu_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})} = (y_1,\nu_1)_{L_2(\omega^{(1)+}\times\omega_2)}, \qquad (y_2,\nu_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})} = (y_2,\nu_2)_{L_2(\omega^{(2)-}\times\omega_2)}.$$

Через $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)},\gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$. Справедливы неравенства

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} \le C\,\|\nabla y_k\|^2, \qquad C = Const > 0, \quad k=1,2.$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y=(y_1,y_2)$: $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in L_2(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)})\right.$ $\left.\times L_2(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\right\}$, $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\ (\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\right\}$, с нормами

$$\|y\|^2_{\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)}}, \quad \|y\|^2_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2}\|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}. \tag{3.1}$$

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1)=\{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(1)}\subset[0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0)=\{r_1 : 0\le r_1\le 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi-0.5h_1\le r_1\le\xi\}$, а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi,l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1-0.5h_1\le r_1\le x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(2)}\subset[\xi,l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi)=\{r_1 : \xi\le r_1\le\xi+0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(l_1)=\{r_1 : l_1-0.5h_1\le r_1\le l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0,l_2]$: $e_2(x_2)=\{r_2 : x_2-0.5h_2\le r_2\le x_2+0.5h_2\}$, $x_2\in\omega_2\subset[0,l_2]$, $e_2(0)=\{r_2 : 0\le r_2\le 0.5h_2\}$, $e_2(l_2)=\{r_2 : l_2-0.5h_2\le r_2\le l_2\}$. Далее, через $e^{(1)}(x)\equiv e^{(1)}(x_1,x_2)=e^{(1)}(x_1)\times e_2(x_2)$, $x\in\overline{\omega}^{(1)}=\overline{\omega}_1^{(1)}\times\overline{\omega}_2\subset\overline{\Omega}_1$ будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x)\equiv e^{(2)}(x_1,x_2)=e^{(2)}(x_1)\times e_2(x_2)$, $x\in\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}_1^{(2)}\times\overline{\omega}_2\subset\overline{\Omega}_2$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $\nu(x)=\nu_1(x)$, $x\in\overline{\Omega}_1$. Определим для функций $\nu_1(x)$, $x\in\overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову $S^{x_\alpha}$ по переменным $x_\alpha$:

$$S^{x_1}\nu_1(x)=\frac{1}{\hbar_1}\int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)}\nu_1(r_1,x_2)dr_1,\quad x_1\in\overline{\omega}_1^{(1)},\quad \hbar_1=\hbar_1(x_1)=\begin{cases}h_1, & x_1\in\omega_1^{(1)},\\ 0.5h_1, & x_1=0,\xi,\end{cases}$$

$$S^{x_2}\nu_1(x)=\frac{1}{\hbar_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\nu_1(x_1,r_2)dr_2,\quad x_2\in\overline{\omega}_2,\quad \hbar_2=\hbar_2(x_2)=\begin{cases}h_2, & x_2\in\omega_2,\\ 0.5h_2, & x_2=0,l_2,\end{cases}$$

С помощью одномерных операторов $S^{x_\alpha}$, действующих по направлению $x_\alpha$, $\alpha=1,2$, определим усредняющий оператор $S^x=S^{x_1}S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $\nu_2(x)$, $x\in\overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)\equiv L_2(\omega^{(k)}\cup S_\xi)$ будем обозначать пространство сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, заданных на сетке $\omega^{(k)}\cup S_\xi$ со скалярным произведением и нормой:

$$\big(\Phi_{kh},\widetilde{\Phi}_{kh}\big)_{H_h^{(1)}}=\big(\Phi_{kh},\widetilde{\Phi}_{kh}\big)_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}\Phi_{kh}(x)\widetilde{\Phi}_{kh}(x)h_1h_2+\tfrac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi}\Phi_{kh}(x)\widetilde{\Phi}_{kh}(x)h_1h_2,$$
$$\big\|\Phi_{kh}\big\|^2_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)}\cup S_\xi)}=\big(\Phi_{kh},\Phi_{kh}\big)_{H_h^{(k)}}.$$

Задачам оптимального управления $(2.6)-(2.9)$ поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h)=\sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}}\big|y(x;\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}(x)\big|^2\hbar_1\hbar_2=\big\|y(x;\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}(x)\big\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})},\tag{3.2}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x)\equiv y(x;\Phi_h)=\big(y_1(x;\Phi_h),y_2(x;\Phi_h)\big)\in\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$, называемая решением разностной краевой задачи для задачи $(2.6)-(2.7)$, удовлетворяет для любой сеточной функции $\nu(x)=\big(\nu_1(x),\nu_2(x)\big)\in\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}Q_h(\Phi_h,y,v)=\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(1)}(x)\,y_{1\overline{x}_1}\,v_{1\overline{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(x)\,y_{1\overline{x}_2}\,v_{1\overline{x}_2}h_1h_2+\\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\,y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(2)}(x)\,y_{2\overline{x}_1}\,v_{2\overline{x}_1}h_1h_2+\\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(x)\,y_{2\overline{x}_2}\,v_{2\overline{x}_2}h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\,y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\\
+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{1h}(x)\,q_1(y_1(x))\,\nu_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,q_1(y_1(\xi,x_2))\,\nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+\\
+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}}\Phi_{2h}(x)\,q_2(y_2(x))\,\nu_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,q_2(y_2(\xi,x_2))\,\nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\\
+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,\big[y(\xi,x_2)\big]\,\big[\nu(\xi,x_2)\big]\,h_2=\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}f_{1h}(x)\,\nu_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{2h}(\xi,x_2)\,\nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+\\
+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}}f_{2h}(x)\,\nu_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{2h}(\xi,x_2)\,\nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}=l_h(v),\end{gathered}\tag{3.3}$$

а сеточные управления $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h}\big)$ таковы, что

$$\begin{gathered}\Phi_{kh}(x)\in U_{kh}=\big\{\Phi_{kh}(x)\in H_h^{(k)}=L_2(\omega^{(k)}\cup S_\xi):0<d_0\le\Phi_{kh}(x)\le\overline{d}_0,\\ x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi\big\},\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta_h(x_2)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $f_\alpha(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta(x_2)$, $u_0^{(1)}(x)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$
\begin{gathered}
a_{1h}^{(\alpha)}(x_1,x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2, \qquad x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \quad \alpha=1,2;\\
a_{2h}^{(\alpha)}(x_1,x_2)=\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \qquad x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+, \quad \alpha=1,2;\\
a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \qquad x_2\in\omega_2^+;\\
a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \qquad x_2\in\omega_2^+;\\
f_{\alpha h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x\in\omega^{(\alpha)}, \quad \alpha=1,2;\\
f_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;\\
f_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x_2\in\omega_2;\\
\theta_h(x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, \quad x_2\in\omega_2;\\
u_{0h}^{(1)}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x\in\overline{\omega}^{(1)}=\overline{\omega}_1^{(1)}\times\overline{\omega}_2.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

**Теорема 3.1.** *Задача о нахождения решения разностной схемы* (3.3) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_h y=F_h$, *где* $A_h$ *– разностный оператор, действующий из* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *в* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *и сеточная функция* $F_h\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *определяются равенствами* $(A_h y,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=Q_h(y,\vartheta)$, $(F_h,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=l_h(\vartheta)$, $\forall y,\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$; *задача (разностная схема)* (3.3) *однозначно разрешима для любого сеточного управления* $\Phi_h\in U_h$, *причем справедлива априорная оценка*

$$
\left\|y(x,\Phi_h)\right\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\le M\big(\|f_{2h}\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}+\|f_{1h}\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)}\big). \tag{3.6}
$$

**Теорема 3.2.** *Для каждого* $h>0$ *существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $\Phi_{h*}\in U_h$ *в последовательности сеточных экстремальных задач* $(3.2)-(3.5)$, *т.е.* $J_{h*}=\inf\{J_h(\Phi_h):\Phi_h\in U_h\}>-\infty$, $U_{h*}=\{\Phi_{h*}\in U_h: J_h(\Phi_{h*})=J_{h*}\}\neq\emptyset$.

## 4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (2.6) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x,\Phi_h) = \big(y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)\big)$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.3) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где $U$ и $U_h$ – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ соответственно. Пусть $u(r;g) = \big(u_1(r;g), u_2(r;g)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega_0)$ – решение прямой задачи (2.6), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x,\Phi_h) = \big(y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\overline{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (3.3), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x;g,\Phi_h) = \big(z_1(x;g,\Phi_h), z_2(x;g,\Phi_h)\big) = \big(y_1(x;\Phi_h) - u_1(x;g), y_2(x;\Phi_h) - u_2(x;g)\big)$ – погрешность метода по состоянию.

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

**Т е о р е м а 4.1.** *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r;g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$. Тогда для любых $h>0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.6)-(2.9):*

$$\|z(x;g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \|y(x;\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \le C\Bigg\{|h|\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L\,q_\alpha\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\big)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg] +$$
$$+\|S^x d_1(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \|S^x d_2(x) - \Phi_{2h}(x)\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\Bigg\}. \tag{4.1}$$

## 5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления $(3.2)-(3.5)$ по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, и любых $h>0$.

Оценку погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи $(3.2)-(3.5)$ устанавливает следующая

**Т е о р е м а 5.1.** *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ соответственно и любых $h>0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи $(3.2)-(3.5)$ справедлива оценка:*

$$\begin{aligned}\big|J(g) - J_h(\Phi_h)\big| = \big|I(u(r;g)) - I_h(y(x;\Phi_h))\big| \le M\big[|h| +\\ +\|S^x d_1(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \|S^x d_2(x) - \Phi_{2h}(x)\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\big],\end{aligned} \tag{5.1}$$

*где $M = Const > 0$, не зависящая от $h$, $y$, $u$, $\Phi_h$, $g$.*

Рассмотрим сеточные управления $\Phi_{kh}(x)$, $x=(x_1,x_2)\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ и определим кусочно-постоянные восполнения на $\Omega_k$ сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, $k=1,2$ по формулам

$$\hat{g}_h^{(k)}(r)=\widehat{P}_{kh}\Phi_{kh}(r)=\Phi_{kh}(x),\quad r\in\hat{e}^{(k)}(x),\quad x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi, \tag{5.2}$$

где $\hat{e}^{(k)}(x)\subset\overline{\Omega}_k$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$ (см. [11]):

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.6)-(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации $(3.2)-(3.5)$, зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to0$. Для исследования связи между экстремальными задачами (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ введем отображения:

$$R_h:\ H\to H_h,\quad \widehat{P}_h:\ H_h\to H, \tag{5.3}$$

которые определим следующим образом: $R_hg=\Phi_h$, где $g=(d_1,d_2)$, $\Phi_h=\big(R_{1h}g_1,R_{2h}g_2\big)=\big(S^xd_1(x),S^xd_2(x)\big)$, $R_{kh}d_k=S^xd_k(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ – дискретизации на сетках $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$ управлений $g_k(r)\equiv d_k(r)=d_k(r_1,r_2)$, $r\in\Omega_k$, $k=1,2$, где $S^x=S^{x_1}S^{x_2}$ – оператор усреднения по Стеклову; а $\widehat{P}_h\Phi_h=g$, где $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h}\big)$, $g=\big(\widehat{P}_{1h}\Phi_{1h}(r),\widehat{P}_{2h}\Phi_{2h}(r)\big)$, $\widehat{P}_{kh}\Phi_{kh}(r)$ – кусочно-постоянные восполнения на $\Omega_k$ сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $x\in\omega^{(k)}\cup S_\xi$, $k=1,2$, определяемые формулой (5.2).

**Теорема 5.2.** *Пусть $J_*$ и $J_{h*}$ – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задач* (2.6)-(2.9) *и* $(3.2)-(3.5)$ *соответственно. Семейство сеточных задач* $(3.2)-(3.5)$*, зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.6)-(2.9) *по функционалу, т.е. $\lim J_{h*}=J_*$ при $|h|\to0$, и справедлива оценка скорости сходимости*

$$\big|J_{h*}-J_*\big|\le M\,|h|. \tag{5.4}$$

Предположим теперь, что при каждом $h=(h_1,h_2)$ и соответствующей сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*}+\varepsilon_h$ нижней грани $J_{h*}$ функционала $J_h(\Phi_h)$ на $U_h$ в задаче $(3.2)-(3.5)$ и найдено сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$, дающее приближенное решение задачи $(3.2)-(3.5)$ в следующем смысле:

$$J_{h*}\le J_h(\Phi_{h\varepsilon_h})\le J_{h*}+\varepsilon_h,\quad \Phi_{h\varepsilon_h}\in U_h, \tag{5.5}$$

где последовательность $\varepsilon_h$ такова, что $\varepsilon_h\ge0$ и $\varepsilon_h\to0$ при $|h|\to0$. Здесь последовательность $\varepsilon_h$ характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на $U_h$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$ из (5.5) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.6)-(2.9).

**Теорема 5.3.** *Пусть последовательность сеточных управлений $\big\{\Phi_{h\varepsilon_h}\big\}\subset U_h$ определена из условий* (5.5)*. Тогда последовательность управлений $\big\{\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\big\}$, где $\widehat{P}_h:\ H_h\to H$ – отображение, определяемое из* (5.3)*, является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи* (2.6)-(2.9)*, то есть $\lim J(\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h})=J_*$ при $|h|\to0$ и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0\le J(\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h})-J_*\le C\,|h|+\varepsilon_h.$$

*Последовательность $\big\{\widehat{P}_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\big\}$ слабо в $H=L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_2)$ сходится к множеству $U_*\neq\emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи* (2.6)-(2.9).

**З а м е ч а н и е 5.1.** *Из оценки* (5.4) *и неравенства* (5.5) *нетрудно получить, что* $\lim J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ *при* $|h| \to 0$, *причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$\left|J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_*\right| \leq M\,|h| + \varepsilon_h.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в $H$ по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций $(3.2)-(3.5)$. В силу теоремы 2.2. задача $(3.2)-(3.5)$ корректно поставлена в слабой топологии пространства $H$. Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства $H$, то есть нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5.3.) будет сходящейся в норме $H$ ко множеству $U_*$. Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации А.Н. Тихонова [15], [16]. Рассмотрим один вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность получаемую на основе разностной аппроксимации, сильно сходящуюся к множеству «$\Omega$ -нормальных решений» задачи оптимального управления (2.6)-(2.9). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \qquad \left|\theta_{\delta_h}(\Phi_h)\right| \leq \delta_h, \quad \forall\Phi_h \in U_h, \quad \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач $(3.2)-(3.5)$ введем на $U$ функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|^2_H$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|^2_{H_h}$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на $U_h$ сеточный функционал Тихонова задачи $(3.2)-(3.5)$: $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h), \qquad \Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на $U_h$: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\widehat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h *} = \inf\left\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\right\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h *} + \nu_h, \tag{5.6}$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество $\Omega$-нормальных решений задачи оптимального управления (2.6)-(2.9): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\Omega(g_*) : g_* \in U_*\}$.

**Т е о р е м а 5.4.** *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\widehat{\Phi}_h\}$ *определена из условий* (5.6). *Тогда последовательность* $\{\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h(r)\}$, *где отображение* $\widehat{P}_h : H_h \to H$ *определено в* (5.3), *является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.6)-(2.9), *то есть* $\lim J(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости:*

$$0 \leq J(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h) - J_* \leq M\big(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h\big).$$

*Если, кроме того, последовательности* $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ *удовлетворяют условиям* $\alpha_h$, $\delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *причем* $\{\alpha_h\}$ *стремится к нулю согласовано с величинами* $|h|$, $\delta_h$, $\nu_h$ *так, что* $\big(|h| + \nu_h + \delta_h\big)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *то последовательность* $\{\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\}$ *сильно в* $H$ *сходится к множеству* $\Omega$ *-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* $U_{**}$ *задачи* (2.6)-(2.9), *то есть*

$$\lim \rho\big(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h; U_{**}\big) = \lim\inf\big\{\|\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h - g_{**}\|_H : g_{**} \in U_{**}\big\} = 0, \quad \text{при} |h| \to 0,$$
$$\lim\Omega\big(\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\big) = \lim\big\|\widehat{P}_h\widehat{\Phi}_h\big\|^2_H = \Omega_* = \inf\Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при } |h| \to 0.$$

**Замечание 5.2.** *Можно показать, что* $\lim T_{h\delta_h\alpha_h *} = J_*$, $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$, *причем справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\left|T_{h\delta_h\alpha_h *} - J_*\right| \le M\left[\,|h| + \delta_h + \alpha_h\right], \qquad \left|T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) - J_*\right| \le M\left[\,|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h\right].$$

**Замечание 5.3.** *Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации* (3.2) – (3.5).

## Список литературы


1. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.
3. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.
4. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
5. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.
6. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31**:1 (1991), 17–30.
7. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БГУ, Уфа, 1999.
8. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.
9. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.
10. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области”, *Труды Средневолжского математического общества*, **11**:1 (2009), 133–144.
11. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Труды Средневолжского математического общества*, **13**:1 (2011), 32–44.
12. Лубышев Ф. В., “О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52**:8 (2012), 1378–1399.

13. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

14. Дренска Н. Т., “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московск. университета*, **15**:4, Вычислит. матем. и кибернетика (1981), 15–21.

15. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

16. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

# Numerical method of one optimal control problem solution for semilinear elliptic equation with discontinuous coefficients and solution

**© F. V. Lubyshev[4], A. R. Manapova[5], M. E. Fairuzov[6]**

**Abstract.** Non-linear optimal control problem for semilinear elliptic equation with discontinuous coefficients and solution, with controls involved in the coefficients is considered and investigated in the work. Method of difference approximation of extremum problem is stated. The convergence rate of the approximations with respect to the state and the functional is estimated, weak convergence with respect to the control is established. The approximations are regularized by Tikhonov.

**Key Words:** optimal control problem, semilinear elliptic equation, method of difference approximation, regularization method.

[4] Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa.

[5] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

[6] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

*УДК 517.9*

# Аналитическое решение задачи о тепловом крипе

**© В. В. Лукашев, [1]В. Н. Попов,[2]**

**Аннотация.** В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о тепловом крипе – вычислении потока массы газа, обусловленного перепадом температуры в канале. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала вычислены значения потоков массы газа, приходящихся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

**Ключевые слова:** течение газа в канале, тепловой крип, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения

## 1. Введение

Одной из важнейших в прикладном отношении задач динамики разреженного газа является задача о течении газа в каналах [1], [2]. Не смотря на то, что первые исследования, посвященные данной проблеме, впервые были выполнены в начале–первой половине прошлого столетия в работах Кнудсена, Смолуховского, Клаузинга, она до сих пор привлекает к себе внимание разных авторов. Отличительной особенностью течения разреженных газов в каналах является наличие так называемых перекрестных эффектов: потоки массы газа могут быть обусловлены не только перепадом давления, то и перепадом температуры, и обратно, потоки тепла могут быть обусловлены не только перепадами температуры, но и перепадами давления. Целью представленной работы яялется рассмотрение на основе точных аналитических методов, представленных в [3]-[9], одного из таких эффектов – теплового крипа, т.е. процесса переноса массы газа в канале, обусловленного перепадом температуры. С использованием методов прямого численного моделирования данная задача рассматривалась ранее в [10]-[12].

В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса в работе используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана [3], а в качестве модели взаимодействия молекул газа со стенками канала – зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. При решении задачи полагается, что стенки канала образованы двумя бесконечнми параллельными плоскостями.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим канал, толщиной $D'$, стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в

[1] Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

[2] Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

канале поддерживается постоянный градиент температуры, параллельный его стенкам. Направим ось $Oz$ декартовой системы координат вдоль градиента температуры. Будем считать, относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(r', v) = \beta^{3/2}\pi^{-3/2}\exp(-C^2)\left[1 + (C^2 - \frac{5}{2})G_T\, z + G_T\, Z(x, C)\right]. \tag{2.1}$$

Здесь $C = \sqrt{\beta}\, v$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_BT$; $m$ – масса молекулы газа; $k_B$ – постоянная Больцмана; $T$ – температура газа; $G_T = (1/T)(dT/dz)$ – безразмерный градиент температуры; $Z(x, C)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g\, \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа. Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x'} + v_z\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f). \tag{2.2}$$

Здесь $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный максвеллиан. Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(r', v)$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, C)$

$$C_x\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, C) + C_z(C^2 - \frac{5}{2}) = \pi^{-3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-C'^2)K(C, C')Z(x, C')\, dC', \tag{2.3}$$

$$K(C, C') = 1 + 2CC' + \frac{2}{3}(C^2 - \frac{3}{2})(C'^{\,2} - \frac{3}{2}).$$

Решение (2.3) ищем в виде

$$Z(x, C) = C_z\, Z_1(x, C_x) + C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2)\, Z_2(x, C_x). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), домножая полученное уравнение последовательно на $C_z$ и $C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2)$ и интегрируя по $C_y$ и $C_z$ от $-\infty$ до $+\infty$ приходим к системе уравнений ($\mu = C_x$)

$$\mu\frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\, Z_1(x, \tau)\, d\tau, \tag{2.5}$$

$$\mu\frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) + 1 = 0. \tag{2.6}$$

Учитывая зеркально-диффузное отражение молекул газа стенками канала, граничные условия для $Z_k(x, \mu)$ ($k = 1, 2$) записываются в виде

$$Z_k(d, \mu) = (1 - q)Z_k(d, -\mu), \qquad \mu < 0, \tag{2.7}$$

$$Z_k(-d, \mu) = (1 - q)Z_k(-d, \mu), \qquad \mu > 0. \tag{2.8}$$

Исходя из статистического смысла функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, массовая скорость газа в направлении оси $Oz'$ определяется выражением

$$U_z(x) = \pi^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C^2)C_zZ(x, C)\, dC = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mu^2)Z_1(x, \mu)\, d\mu. \tag{2.9}$$

Соответственно, поток массы газа, приходящийся на единицу ширины канала, равен

$$J_M = -\frac{1}{2d^2}\int\limits_{-d}^{d} U_z(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Отсюда, так как $Z_2(x,\mu)$ не входит в выражение (2.9), решение поставленной задачи сводится к нахождению $Z_1(x,\mu)$ из краевой задачи (2.5), (2.7), (2.8).

## 3. Построение функции распределения молекул газа

Общее решение (2.5) имеет вид [3]

$$Z_1(x,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x}{\eta})\,F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta - (\mu^2-\frac{1}{2}), \tag{3.1}$$

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu), \tag{3.2}$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)}{\mu-z}\,d\mu, \tag{3.3}$$

$\mathrm{P}(1/z)$ - распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, а $A_0$, $A_1$ и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

Подставляя (3.1) в (2.7) и (2.8), приходим к интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} A_0 + A_1(d-\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta - (\mu^2-\frac{1}{2}) = \\ = (1-q)\left[A_0 + A_1(d+\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{d}{\eta}\right)F(\eta,-\mu)a(\eta)d\eta - (\mu^2-\frac{1}{2})\right], \quad \mu<0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} A_0 - A_1(d+\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{d}{\eta}\right)F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta - (\mu^2-\frac{1}{2}) = \\ = (1-q)\left[A_0 - A_1(d-\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{d}{\eta}\right)F(\eta,-\mu)a(\eta)d\eta - (\mu^2-\frac{1}{2})\right], \quad \mu>0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Обозначим

$$b(\eta,x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\,a(\eta).$$

Тогда, с учетом (3.2) уравнения (3.4) и (3.5) запишем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,d)\lambda(\mu)=$$

$$=q\mu^2+A_1\mu(2-q)-q(A_0+A_1d+\frac{1}{2}),\qquad \mu<0,\quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu)=$$

$$=q\mu^2+A_1\mu(2-q)-q(A_0-A_1d+\frac{1}{2}),\qquad \mu>0.\quad (3.7)$$

Здесь

$$B(\mu,d)=b(\mu,d)-(1-q)b(-\mu,d). \qquad (3.8)$$

Заменив в (3.6) $\mu$ на $-\mu$ и учитывая, что на действительной оси $\lambda(z)$ является четной функцией, перепишем его в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu)=$$

$$=q\mu^2-A_1\mu(2-q)-q(A_0+A_1d+\frac{1}{2}),\qquad \mu>0.\quad (3.9)$$

Представим интеграл, входящий в (3.9) в виде суммы двух интегралов: регулярного и сингулярного, после чего заменим в первом переменную интегрирования $\eta$ на $-\eta$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta.$$

Аналогично преобразовав интеграл, входящий в (3.7), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu)=$$

$$=q\mu^2-A_1\mu(2-q)-q(A_0+A_1d+\frac{1}{2})-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta,\quad \mu>0,\quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu)=$$

$$=q\mu^2+A_1\mu(2-q)-q(A_0-A_1d+\frac{1}{2})-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta B(-\eta,-d)}{\eta+\mu}\,d\eta,\quad \mu>0.\quad (3.11)$$

Последовательно складывая и вычитая почленно (3.10) и (3.11), приходим к уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(-\eta,d)+B(\eta,-d)]}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)[B(-\mu,d)+B(\mu,-d)]\lambda(\mu)=$$
$$=2q\mu^2-2qA_0-q-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(\eta,d)+B(-\eta,-d)]}{\eta+\mu}\,d\eta,\qquad \mu>0,\quad(3.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(\eta,-d)-B(-\eta,d)]}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)[B(\mu,-d)-B(-\mu,d)]\lambda(\mu)=$$
$$=-2A_1(\mu(2-q)+qd)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(-\eta,-d)-B(\eta,d)]}{\eta+\mu}\,d\eta,\quad \mu>0.\quad(3.13)$$

Нетрудно видеть, что (3.12) обращается в тождество при выполнении условий $B(-\eta,d)=B(\eta,-d)$, $A_1=0$. А с учетом определения функции $B(\eta,d)$ (3.8) получаем, что $a(-\eta)=a(\eta)$. Теперь (3.13) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu)=f(\mu),\quad(3.14)$$

$$f(\mu)=q\mu^2-q\left(A_0+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta,\qquad \mu>0.\quad(3.15)$$

Решение (3.14) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(-\eta,d)}{\eta-z}\,d\eta,\quad(3.16)$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой, выполняются соотношения

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu,d),\qquad 0<\mu<+\infty.\quad(3.17)$$

$$N^+(\mu)+N^-(\mu)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta,\qquad 0<\mu<+\infty.\quad(3.18)$$

Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (3.3), имеют вид

$$\lambda^+(\mu)-\lambda^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2),\qquad -\infty<\mu<+\infty\quad(3.19)$$

$$\lambda^+(\mu)+\lambda^-(\mu)=2\lambda(\mu),\qquad -\infty<\mu<+\infty.\quad(3.20)$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (3.17) - (3.20) сведем интегральное уравнение (3.14) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^{+}(\mu)\lambda^{+}(\mu)-N^{-}(\mu)\lambda^{-}(\mu)=2\sqrt{\pi}\mu f(\mu)\exp(-\mu^{2}),\qquad \mu>0. \tag{3.21}$$

Особенность краевой задачи (3.21) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в ноль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие (3.22) и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости

$$\frac{X^{+}(\mu)}{X^{-}(\mu)}=\frac{\lambda^{+}(\mu)}{\lambda^{-}(\mu)}. \tag{3.22}$$

Решение этой задачи имеет вид [3]:

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\theta(\tau)-\pi)}{\tau-z}\,dt\right],\qquad \theta(\tau)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp-\tau^{2}}\right).$$

С учетом решения однородной краевой задачи (3.22) перепишем (3.21)

$$N^{+}(\mu)X^{+}(\mu)-N^{-}(\mu)X^{-}(\mu)=\frac{X^{-}(\mu)}{\lambda^{-}(\mu)}2\sqrt{\pi}\mu f(\mu)\exp(-\mu^{2}),\qquad \mu>0. \tag{3.23}$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана - задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.23) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{X^{-}(\eta)}{\lambda^{-}(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^{2})\frac{d\eta}{\eta-z}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (3.24) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z|\to+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{X^{-}(\eta)}{\lambda^{-}(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^{2})\frac{d\eta}{\eta-z}=$$

$$=-\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{X^{-}(\eta)}{\lambda^{-}(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^{2})d\eta+O\left(\frac{1}{z^{2}}\right),\qquad |z|\to+\infty,$$

$$\frac{1}{X(z)}=z+Q_{1}+O\left(\frac{1}{z}\right),\qquad |z|\to+\infty,$$

находим

$$N(z)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{X^{-}(\eta)}{\lambda^{-}(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^{2})d\eta+O\left(\frac{1}{z}\right),\qquad |z|\to+\infty. \tag{3.25}$$

Здесь

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2)\, d\eta \tag{3.26}$$

– интегралы Лоялки, в частности, $Q_1 = -1.01619$ , $Q_2 = -1.26632$ .

Так как функция $N(z)$ согласно (3.16) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение $N(z) = O(1/z)$ . Отсюда, с учетом (3.25) приходим к условию разрешимости краевой задачи (3.23)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta = 0. \tag{3.27}$$

Подставив в (3.27) $f(\eta)$ , определяемое соотношением (3.15), с учетом (3.26) перепишем (3.27) в виде

$$q(A_0 + \frac{1}{2} + Q_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2)\, d\eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\eta = 0. \tag{3.28}$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и, учитывая интегральное представление функции $X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta + z}, \tag{3.29}$$

из (3.28) находим

$$A_0 = -Q_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \tau\, B(\tau, d) X(-\tau)\, d\tau. \tag{3.30}$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (3.1) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.17), предварительно преобразовав (3.24). Принимая во внимание вид интегралов Лоялки (3.26) и интегральное представление $X(z)$ (3.29), получаем

$$N(z) = -q(A_0 + \frac{1}{2} - z^2) + \frac{1}{X(z)} \Bigg[ q(Q_1 - z) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\eta \Bigg].$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + \eta} = \frac{1}{\tau + z} \left[ \frac{1}{\eta - z} + \frac{1}{\eta + \tau} \right],$$

тогда, с учетом (3.29) и (3.26) получим:

$$N(z) = -q(A_0 + \frac{1}{2} - z^2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)\, d\tau}{\tau + z} + \\ + \frac{1}{X(z)} \Bigg[ q(Q_1 - z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau)\, \frac{d\tau}{\tau + z} \Bigg].$$

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля и (3.17), можем записать

$$2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu,d) = -\frac{\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2)}{|\lambda^+(\mu)|^2}X(-\mu)\times$$
$$\times\left[q(Q_1-\mu)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau B(\tau,d)X(-\tau)\,\frac{d\tau}{\tau+\mu}\right], \qquad \mu>0. \quad (3.31)$$

Теперь, учитывая четность функции $a(\eta)$ и подставляя в (3.31) в явном виде выражения для $B(\eta,d)$ (3.8) и $A_1$ (3.30), для определения $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению уравнение Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu)[(Q_1-\mu)q+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta[\exp(-d/\eta)-(1-q)\exp(d/\eta)]a(\eta)X(-\eta)}{\eta+\mu}\,d\eta, \qquad \mu>0, \quad (3.32)$$

$$h(\mu) = -\frac{X(-\mu)\exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2[\exp(d/\mu)-(1-q)\exp(-d/\mu)]}.$$

Решение (3.32) ищем в виде ряда

$$a(\mu)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k a_k(\mu), \qquad \lambda=\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$, приходим к системе реккурентных соотношений, из которых находим

$$a_0(\mu)=qh(\mu)(Q_1-\mu), \quad a_i(\mu)=qh(\mu)\int\limits_0^{\infty}\frac{g(\eta_1)\,d\eta_1}{\eta_1+\mu}\dots\int\limits_0^{\infty}\frac{g(\eta_i)\,[Q_1-\eta_i]\,d\eta_i}{\eta_i+\eta_{i-1}},$$

$$g(\tau)=-\frac{\tau\, X^2(-\tau)\exp(-\tau^2)(\exp(-2d/\tau)-1+q))}{2|\lambda^+(\tau)|^2(1-(1-q)\exp(-2d/\tau))}, \quad \tau>0.$$

Теперь мы можем выразить $A_1$ в виде ряда, подставив (3.33) в (3.30):

$$A_0=-Q_2-\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k I_k, \quad (3.34)$$

$$I_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}g(\tau)[Q_1-\tau]\,d\tau,$$

$$I_i=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}g(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_1)\,d\eta_1}{\eta_1+\tau}\dots\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_i)\,[Q_1-\eta_i]\,d\eta_i}{\eta_i+\eta_{i-1}}.$$

Таким образом, неизвестные параметры $A_0$, $A_1$ и функция $a(\eta)$, входящие в (3.2) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

## 4. Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов и соотношений (2.9), (2.10) находим

$$U_z(x) = -\frac{1}{2}\left(Q_2 + \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left[I_k + J_k(x)\right]\right), \tag{4.1}$$

$$J_0(x) = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\gamma(x,\tau)[Q_1-\tau]\,d\tau,$$

$$J_i(x) = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\gamma(x,\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\tau}\cdots\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_i)[Q_1-\eta_i]d\eta_i}{\eta_i+\eta_{i-1}},\quad \gamma(x,\tau) = 2h(\tau)\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\tau}\right).$$

Соответственно

$$J_M = -\frac{1}{4d^2}\left[-2\left(Q_2+\frac{1}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k I_k\right)d + q\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k K_k\right], \tag{4.2}$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\zeta(\tau)[Q_1-\tau]\,d\tau,$$

$$K_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\zeta(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_1)\,d\eta_1}{\eta_1+\tau}\cdots\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta_i)\,[Q_1-\eta_i]\,d\eta_i}{\eta_i+\eta_{i-1}},$$

$$\zeta(\tau) = -\frac{\tau X(-\tau)\exp(-\tau^2)(1-\exp(-2d/\tau))}{|\lambda^+(\tau)|^2(1-(1-q)\exp(-2d/\tau))}.$$

Профили массовой скорости газа $U_z(x)$ для каналов разной толщины и для разных коэффициентов аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) приведены на Рисунке 1. Значения $J_M$, вычисленные в пакете прикладных программ Wolfram Mathematica 8 согласно (4.2) при различных значениях толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа, а также аналогичные результаты, полученные в [10]-[12], приведены в Таблице 1. Как следует из Таблицы 1 отличие результатов, вычисленных на основе (4.2), от аналогичных, полученных численными методами в [10] рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана, не превышает $0.04\%$ для всего диапазона значений $D$ и $q$. Существенное отличие результатов, рассчитанных согласно (4.2) и полученных в [12] с использованием CES и LBE моделей кинетического уравнения Больцмана, объясняется тем, что БГК модель при переходе к гидродинамическому пределу дает значение числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$, в то время как CES и LBE модели дают значение $\mathrm{Pr} = 2/3$. В силу этого, в случае, когда в задаче преобладающими являются процессы, обусловленные теплопроводностью газа уравнение (2.2) записывают в виде

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x'} + v_z\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}\,\mathrm{Pr}\,(f_{eq}-f). \tag{4.3}$$

В этом случае во всех полученных выше формулах необходимо положить $x = \mathrm{Pr}\ x'/l_g$, $d = \mathrm{Pr}\ d'/l_g$. Соответствующие значения $J_M$ приведены во втором столбце Таблицы 1. Как видно из приведенных значений, полученные в этом случае результаты находятся в лучшем согласии с аналогичными результатами LBE модели

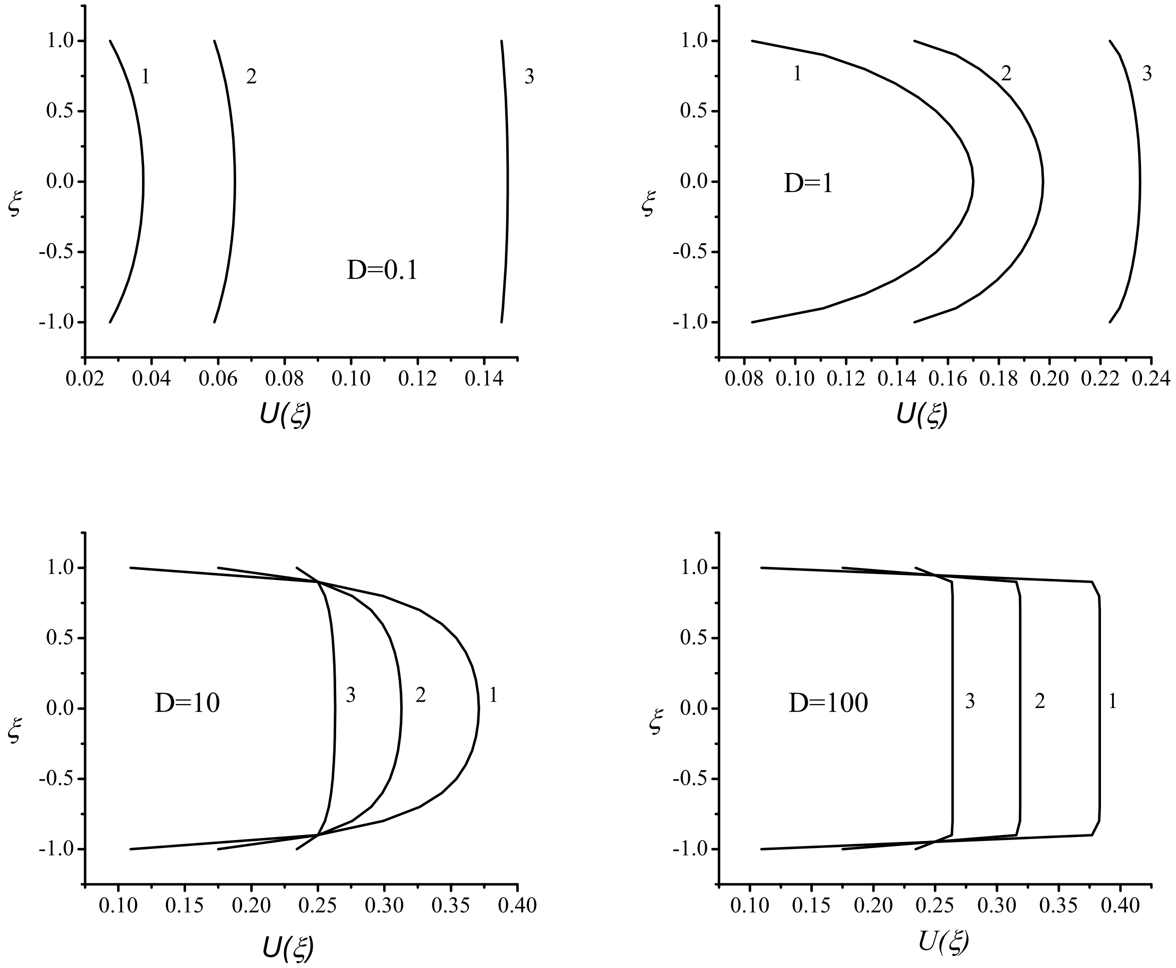



Рис. 1. Графики зависимости $U(\xi)$ ( $\xi = 2x/D$ ) для различных значений $D$ и $q$, рассчитанные по формуле (4.1): 1) $q = 0.1$, 2) $q = 0.5$, 3) $q = 1.0$.

| $k$ | $D = k$ (4.2) | $D = \mathrm{Pr}\, k$ (4.2) | $BGK$ [10] | $S$ [11] | $CES$ [12] | $LBE$ [12] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $q = 0.1$ | | | |
| 0.1 | −2.93128 | −3.77468 | | | −4.1416 | −4.1701 |
| 1.0 | −0.46498 | −0.66942 | | | −0.71489 | −0.71258 |
| 10.0 | −0.05173 | −0.07685 | | | −0.079621 | −0.07914 |
| | | | $q = 0.5$ | | | |
| 0.1 | −1.26627 | −1.48686 | −1.266442 | −1.4012 | −1.5426 | −1.5680 |
| 1.0 | −0.36854 | −0.47939 | −0.3685435 | −0.49043 | −0.5376 | −0.52876 |
| 10.0 | −0.05836 | −0.08388 | | −0.087524 | −0.086266 | −0.084299 |
| | | | $q = 1.0$ | | | |
| 0.1 | −0.69466 | −0.78079 | −0.6949272 | −0.73268 | −0.79087 | −0.79928 |
| 1.0 | −0.29489 | −0.35372 | −0.2948999 | −0.36546 | −0.40456 | −0.38908 |
| 10.0 | −0.06607 | −0.09196 | | −0.098147 | −0.093046 | −0.089950 |

Таблица 6: Зависимость $J_M$ от $k = D'/l_g$ при различных значениях $q$

## 5. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов построено решение задачи о тепловом крипе в канале, расстояние между стенками которого соизмеримо со средней длиной свободного пробега молекул газа. Получено аналитическое (в виде ряда Неймана) выражение для потока массы газа, приходящегося на единицу ширины канала. Проведен численный анализ полученного выражения. Показано, что полученные в работе результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными ранее использованием численных методов в рамках БГК модели.

## Список литературы


1. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УрО РАН. 2008. 230 с.

2. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа М.: Машиностроение, 1977. 184 с.

3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.

4. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля // Математический журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 3. С. 111-120.

5. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Математическое моделирование процессов переноса в плоских каналах // Математический журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13. № 2. С. 81-90.

6. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 1. С. 53-58.

7. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А. А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля с использованием эллипсоидально-статистической модели кинетического уравнения Больцмана // Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 4. С. 48-56.

8. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14. № 1. С. 72-82.

9. Лукашев В.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Моделирование процессов переноса в задаче о течении Куэтта при неполной аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 2. С. 111-124.

10. Barihcello L.B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // ZAMP. 2001. V. 52. P. 517-534.

11. C.E. Siewert. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics B. Fluids. 2002. V. 21. P. 579-597.

12. C.E. Siewert. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273-303.

# Analytic solution of the problem of a thermal creep

**© V. V. lukashev [3], V. N. Popov [4]**

**Abstract.** Within the kinetic approach limits the analytic solution of the thermal creep flow problem in the form of Neumann's series is contracted. As the basic equation it is used the linearize BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann kinetic equation, and as a boundary condition on walls of the channel - the model of mirror-diffusion reflections. For various values of thickness of the channel and factor of accommodation of a tangential impulse of molecules of gas by the walls of the channel values of streams of weight of gas and heat falling unit of width of the channel are calculated. Comparison with the similar results published in an open press is lead.

**Key Words:** flow of gas in the channel, thermal creep, Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

[3] Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.

[4] Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

УДК 519.853:517.988

# О скорости сходимости регуляризованного НПММ второго порядка

© В. Г. Малинов [1]

**Аннотация.** В работе исследуется регуляризованный непрерывный проекционный метод (НПММ) для решения неустойчивых задач минимизации с неточными исходными данными в гильбертовом пространстве, основанный на непрерывном проекционном методе второго порядка. Доказывается скорость сходимости метода.

**Ключевые слова:** регуляризованный непрерывный метод минимизации, оценки скорости сходимости.

## 1. Постановка задачи

Решается задача минимизации на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H$

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где $Q$ – простое множество, например, образованное координатными ограничениями, из гильбертова пространства , нормированного скалярным произведением, $\forall\, \mathbf{x} \in H \quad \|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$. Функция $f(\mathbf{x})$ с "овражными"гиперповерхностями уровней определена, выпукла и непрерывно дифференцируема по Фреше на $H$, её градиенты Липшицевы, $\exists L = const > 0$:

$$\|\nabla f(\mathbf{u}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq\ L\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|\ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H. \tag{1.2}$$

Предполагаем: градиенты $\nabla f(\mathbf{x})$ имеют возмущения;

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty,\ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q:\ f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.3}$$

Рассмотрим непрерывные проекционные методы минимизации (НПММ) для решения поставленной задачи, ввиду их известных достоинств [1]–[4]. НПММ записываются в форме задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Поскольку задача (1.1) в общем случае неустойчива [5] к возмущениям исходных данных (здесь в задании градиентов функции $f(\mathbf{x})$), то решается с помощью регуляризованных методов (см. [6]–[13]). Регуляризованные НПММ (в частности, проекции градиента (НМПГ)) для этой и других задач минимизации при функциональных ограничениях, предложены и исследованы во многих работах (см., например, работы [10]–[15]). Здесь для решения некорректной задачи (1.1)–(1.3) исследуется регуляризованный НПММ на простом множестве.

## 2. Метод решения задачи

Пусть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$ является решением задачи Коши

$$\sigma(t)\mathbf{x}''(t) + \mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q\left[\mathbf{y}(t) + \beta(t)(\gamma_1(t)\mathbf{x}'(t) - \gamma_2(t)\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{y}(t), t)\right], t \geq 0, \tag{2.1}$$

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

при начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1$, где $P_Q[\mathbf{v}]$ – проекция точки $\mathbf{v}$ на множество $Q$; $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$ – начальные точки; производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{x}''(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ функции $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, со значениями в гильбертовом пространстве $H$, понимаются (как и в [10]–[13]) в смысле главы 4 книги [16]; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t)$;

$$\nabla T_\delta(\mathbf{y}(t), t) = \nabla f(\mathbf{y}(t), t) + \tau(t)\mathbf{y}(t),\ \mathbf{y}(t) \in H,\ t \geq 0 - -- \tag{2.2}$$

приближение в точке $\mathbf{y}(t)$ точного градиента $\nabla T(\mathbf{x}(t), t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\mathbf{x}(t)$, $\forall\, \mathbf{x}(t) \in H$, $t \geq 0$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}(t), t) = f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\|\mathbf{x}\|^2/2$; $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ — параметры метода (2.1), (2.2); приближенные градиенты функции $f(\mathbf{x}(t))$, следуя работам [8]–[15] и другим, обозначаем $\nabla f(\mathbf{x}(t), t)$ $\forall \mathbf{x} \in Q \subset H$, отмечая их зависимость от параметра $t \geq 0$. Предполагаем, что решение $\mathbf{x}(t)$ задачи (2.1), (2.2) существует на полуоси $[0; +\infty)$ при любых начальных точках $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$. В силу условий для функции $f(\mathbf{x}(t))$, функция $T(\mathbf{x}(t), t)$ дифференцируема по Фреше на $Q$; полагаем, что выполнено свойство её непрерывной дифференцируемости на $Q$.

Отметим, что: одним из итеративных аналогов метода (2.1), (2.2) служит регуляризованный двухшаговый четырехпараметрический метод, предложенный и исследованный в работе [17]; метод (2.1) построен на основе НПММ второго порядка, исследованного в работе [14]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\gamma_1(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$ из (2.1), (2.2) получаем регуляризованный НМПГ [10]; при $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\gamma_1(t) = 0$ из (2.1), (2.2) получим регуляризованный НМПГ второго порядка [11]; сходимость метода (2.1), (2.2) доказана в работе [15], построены правило останова и регуляризующий оператор. Оценки скорости сходимости метода не получены, поэтому их изучение является целью настоящей работы.

## 3. О сходимости метода

Для возможности ссылок при обосновании оценок скорости сходимости здесь сначала приведём формулировку теоремы сходимости и схему её доказательства. (Аргумент $t$ у функции $\mathbf{x}(t)$, её производных, а также у вводимых коэффициентов, параметров метода и их производных, для краткости часто опускаем; градиенты часто обозначаем штрихом.)

**Теорема 1.** *Пусть выполнены такие условия: множество $Q \subset H$ выпукло и замкнуто; выпуклая функция $f(\mathbf{x}(t))$ непрерывно дифференцируема по Фреше на $H$, её градиенты удовлетворяют условию Липшица (1.2); приближения $\nabla f(\mathbf{x}(t), t)$ точных градиентов $\nabla f(\mathbf{x})$ непрерывны по $\mathbf{x}$ при всех $t \geq 0$, измеримы по $t$ при всех $\mathbf{x} \in H$, и*

$$\max \|\nabla f(\mathbf{x}(t), t) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \delta(t)(1 + \|\mathbf{x}\|)\ \forall\, \mathbf{x} \in H,\ t \geq 0; \tag{3.1}$$

*$\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ — параметры метода (2.1), (2.2), таковы, что: $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_2(t)$, $\tau(t) \in C^2[0, \infty)$; $\delta(t) \in C[0, \infty)$; $\gamma_1(t)$, $\sigma(t) \in C^1[0, \infty)$; функция $\tau(t)$ выпуклая; $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ ограничены;*

$$\begin{gathered}
\sigma(t) > 0,\ \alpha(t) > 0,\ \beta(t) > 0,\ \gamma_1(t) > 0,\\
\gamma_2(t) > 0,\ \tau(t) > 0,\ \delta(t) \geq 0,\ t \geq 0;\\
\tau'(t) \leq 0,\ \alpha'(t) \leq 0,\ \beta'(t) \leq 0,\ \gamma_1'(t) \leq 0,\ \gamma_2'(t) < 0, \sigma'(t) \leq 0,\ t \geq 0;\\
\alpha''(t) \geq 0,\ \beta''(t) \geq 0;\ \gamma_2''(t) \geq 0;\ \tau''(t) \geq 0,\ t \geq 0;\\
\tau + \gamma_2 + \delta \to 0,\ \tau^{-1}(\delta + \delta\gamma_2^{-1} + |\tau'|\gamma_2^{-1}) \to 0;\ t \to \infty;\\
\tau^{-2}(\delta\gamma_2^{-2} + \delta\gamma_2^{-1} + |\tau'|\gamma_2^{-2}) \to 0, \quad t \to \infty;\\
\sigma(t) \to \sigma^0 > 0,\ \beta(t) \to \beta^0 > 0,\ \alpha(t) \to \alpha^0 > 0, \gamma_1(t) \to \gamma_1^0 > 0,\ t \to \infty;\\
\tau'(t) \to 0,\ \alpha'(t) \to 0,\ \beta'(t) \to 0, \gamma_2'(t) \to 0,\ t \to \infty.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

*Тогда для метода (2.1), (2.2), (3.2)*

$$\Big(\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|+\|\mathbf{x}^{'}(t)\|+\|\mathbf{x}^{''}(t)\|\Big)\longrightarrow 0,\quad t\to\infty, \tag{3.3}$$

*где* $\mathbf{x}^*\in Q_*$, $\|\mathbf{x}^*\|=\inf\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}\in Q_*$ *— нормальное решение задачи (1.1). Сходимость в (3.3) равномерная относительно выбора приближенных градиентов* $\nabla f(\mathbf{x}(t),t)$ *из условия (3.1).*

**Схема доказательства,** данного в работе [15]. Сначала заметим, что в силу предположений теоремы 1 условия (1.3) выполнены, множество минимумов $Q_*$ выпукло и замкнуто, нормальное решение задачи (2.1), (2.2) и минимум функции $f(\mathbf{x}(t))$ существуют. $\exists\ \mathbf{v}^r=\mathbf{v}(r)=argminT(\mathbf{x},r)\ \ \mathbf{x}\in Q$, $r\geq 0$, ввиду сильной выпуклости функции Тихонова на $H$ единственная и

$$\sup_{r\geq 0}\|\mathbf{v}^r\|\leq\|\mathbf{x}^*\|,\ \lim_{r\to\infty}\|\mathbf{v}^r-\mathbf{x}^*\|=0,\ (\mathbf{T}^{'}(\mathbf{v}^r,r),\mathbf{u}-\mathbf{v}^r)\geq 0,\ \mathbf{u}\in Q,\ r\geq 0. \tag{3.4}$$

Из характеристического свойства оператора проектирования ([8], с. 72) и из (2.1), пользуясь идеей из работы [2], получаем вариационное неравенство

$$\Big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2\mathbf{T}^{'}{}_{\delta}(\mathbf{y},t),\mathbf{u}-\mathbf{w}\Big)\geq 0\quad\forall\,\mathbf{u}\in Q,\ t\geq 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{w}=\mathbf{w}(t)=\sigma\mathbf{x}^{''}+\mathbf{x}^{'}+\mathbf{x}\in Q$.

Положим в (3.5) $\mathbf{u}=\mathbf{v}(r)$ и сложим его с третьим соотношением из (3.4), приняв в нём $\mathbf{u}=\mathbf{w}\in Q$ и умножив на $\beta\gamma_2>0$ (далее полагаем $\mathbf{v}(r)=\mathbf{v}$):

$$\Big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2[\mathbf{T}^{'}{}_{\delta}(\mathbf{y},t)-\mathbf{T}^{'}(\mathbf{v},r)],\mathbf{v}-\mathbf{w}\Big)\geq 0\quad t,r\geq 0.$$

Преобразуем это неравенство, пользуясь (2.1), (2.2) и формулой для точного градиента функции Тихонова, к виду

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+(1-\alpha-\beta\gamma_1)\mathbf{x}^{'}+\beta\gamma_2(\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},t)-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},\mathbf{v}-\mathbf{w}\big)+\\ +\beta\gamma_2\left(\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y})-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{v})+\alpha\tau\mathbf{x}^{'}+\mathbf{v}[\tau(t)-\tau(r)],\mathbf{v}-\mathbf{w}\right)+\\ +\beta\gamma_2\tau(t)(\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(r),\mathbf{v}-\mathbf{w})\geq 0,\quad t,r\geq 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, неравенством (см. [1], с. 175), $(\nabla f(\mathbf{v})-\nabla f(\mathbf{u}),\mathbf{u}-\mathbf{z})\leq L\|\mathbf{v}-\mathbf{z}\|^2/4,\quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}\in Q,$ справедливым для выпуклой функции $f(\mathbf{x})\in C^{1,1}(Q)$, из (3.6) получим (часто до (3.12) полагаем $\mathbf{v}(r)=\mathbf{v}$),

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+a(t)\mathbf{x}^{'},\mathbf{w}-\mathbf{v}\big)+\beta\gamma_2\tau\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+\\ +\beta\gamma_2\tau(\mathbf{x}(t)-\mathbf{v},\sigma\mathbf{x}^{''}+\mathbf{x}^{'})\leq\\ \leq\beta\gamma_2\|\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y},t)-\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y})\|\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|+L\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\|^2/4+\\ +\beta\gamma_2|\tau(t)-\tau(r)|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|,\quad t,r\geq 0,\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $a(t)=1-\alpha-\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2\tau$. Преобразуем (3.7), пользуясь оценкой

$$\max\left\{\sup_{r\geq 0}\|\mathbf{v}(r)\|;\ \sup_{r\geq 0}\|\nabla f(\mathbf{v}(r))\|\right\}\leq C_0=const. \tag{3.8}$$

следующей из первого соотношения (3.4), неравенствами (3.1),

$$2|ab|\leq\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2,\quad (a+b)^2\leq(1+\varepsilon)a^2+(1+\varepsilon^{-1})b^2,\ \forall\ a,b,\varepsilon>0, \tag{3.9}$$

выбирая подходящие $\varepsilon$, оценками из [15]

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2 \le (1+\gamma_2)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + (1+\gamma_2^{-1})\|\sigma\mathbf{x}'' + \mathbf{x}'\|^2,$$
$$\beta\gamma_2\delta(C_0+1+\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|)\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| \le a_1\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + a_2\|\mathbf{x}''\|^2 + a_3\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{14},$$

где $a_1 = \beta\gamma_2\delta(2+3\gamma_2)/2$; $a_2 = \sigma^2\beta\delta(\gamma_2^2+\gamma_2+1)$; $a_3 = 0.5\beta\delta[2\gamma_2^2 + (\alpha^2+2)(\gamma_2+1)]$; $a_{14} = (C_0+1)^2\beta\delta$.

Полученное неравенство с помощью равенств ([2], [4])

$$\begin{gathered} 2(\mathbf{x}'',\mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2, \quad 2(\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{x}') = \tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2, \\ 2(\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)),\mathbf{x}'') = \tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(r)\|^2 - 2\|\mathbf{x}'\|^2, \end{gathered} \tag{3.10}$$

преобразуем к виду

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_{12}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_{13}(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + \\ +b_{14}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + b_{15}(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + b_{16}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \le Cg(t,r),\ t,r\ge 0, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $b_{11}(t) = 0.5\sigma(1+\beta\gamma_2\tau)$; $b_{12}(t) = 0.5(\alpha+\beta\gamma_2\tau)$; $b_{13}(t) = \beta\gamma_2\tau - a_1 - 0.5\beta\gamma_2^2(\gamma_2+1)$; $b_{14}(t) = \sigma^2[1-\beta\delta(\gamma_2^2+\gamma_2+1) - 0.5\beta\gamma_2(1+\gamma_2+2L)]$; $C = \max[(C_0+1)^2; 0.5C_0^2]$; $b_{15}(t) = 0.5\sigma[1+a(t)-\beta\gamma_2(0.5L(1-\alpha)+\gamma_2+1)]$; $g(t,r) = \beta(\delta+|\tau(t)-\tau(r)|^2)$; $b_{16}(t) = a+\sigma-a_3-\beta\gamma_2[(L(1-\alpha)^2-2\gamma_2-2)/4-\sigma\tau]$.

Покажем, что каждое слагаемое в левой части (3.3) стремится к нулю. Умножив (3.11) на функцию $e(t) = \exp\left(\int_0^t \tau(s)\gamma_2(s)\,ds\right)$, проинтегрируем полученное неравенство по $t\in[q,t]$, $t>q\ge t_0$, а затем преобразуем его к виду

$$\begin{gathered} b_1(t)e\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + [b_2e-(b_1e)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_4e\|\mathbf{x}'\|^2 \le \\ \le C\int_q^t g(s,r)e(s)\,ds + C_2(q),\ t>q\ge t_1,\ r\ge 0. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Проинтегрируем (3.12) на отрезке $[q,t]$ и заменим положительный интеграл нулем; при $r=t$ и всех $t>q\ge t_2$ придём к неравенству:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}(t)\|^2 \le \frac{2}{\sigma_0 e(t)}\left\{C\int\limits_q^t\int\limits_q^z g(s,t)e(s)\,ds\,dz + C_2(q)(t-q) + C_3(q)\right\}.$$

Здесь под интегралом, поскольку функция $\tau(t)$ выпуклая, монотонная, гладкая, имеет место оценка $0\le\tau(s)-\tau(t)\le-\tau'(s)(t-s)$ при $t\ge s$, то

$$g(s,t)\le\beta[\delta+|\tau'(s)|^2(t-s)^2],\ t\ge s\ge 0, \tag{3.13}$$

то придём к неравенству

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\|^2 \le \tfrac{2}{\sigma_0 e(t)}\left(C\int\limits_q^t\int\limits_q^z \beta[\delta+|\tau'(s)|^2(t-s)^2]e(s)\,ds\,dz\right) \\ +\tfrac{2}{\sigma_0 e(t)}(C_2(q)(t-q)+C_3(q)),\ t>q\ge t_2. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Учитывая (3.2) и соотношения

$$\beta\delta e(t)\to\infty,\ b_1e\to\infty,\ e(t)\to\infty,\ [\tau\gamma_2]^n e(t)\to\infty,\ t\to\infty, \tag{3.15}$$

применяя к правой части (3.14) правило Лопиталя несколько раз, получим:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|\to 0,\ t\to\infty, \tag{3.16}$$

и, с учетом неравенства $\|\mathbf{v}-\mathbf{x}^*\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|$, а также второго соотношения из (3.4) при $r = t$, имеем:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\| \to 0,\ t \to \infty. \tag{3.17}$$

Докажем, что $\|\mathbf{x}^{'}(t)\| \to 0,\ \|\mathbf{x}^{''}\| \to 0,\ t \to \infty$. Первое соотношение получим, исходя из (3.12) при $t = r$, с учетом (3.9) и оценки при преобразовании (3.12), с учетом (3.13) и (3.16),

$$\|\mathbf{x}^{'}\|^2 \leq \frac{8C}{3\sigma_0 e(t)} \left( \int_q^t \beta[\delta + |\tau^{'}(s)|^2(t-s)^2]e(s)\,ds + C_2(q) \right),\ t > q \geq t_2. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.15), (3.2), применяя к правой части (3.18) правило Лопиталя, получим:

$$\|\mathbf{x}^{'}(t)\| \to 0, t \to \infty. \tag{3.19}$$

Используя (2.1), (3.1), (1.2), (3.2), (3.8), равенство $P_Q(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v} \in Q$, $t \geq 0$, нерастягивающее свойство оператора проектирования, вычисляем:

$$\begin{gathered}\sigma\|\mathbf{x}''\| \leq P_Q[\mathbf{y} + \beta(\gamma_1\mathbf{x}^{'} - \gamma_2(\mathbf{f}^{'}(\mathbf{y}(t),t) + \tau\mathbf{y}))] - P_Q[\mathbf{v}(t)]\|+ \\ +\|\mathbf{x}^{'}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \leq a_4\|\mathbf{x}^{'}\| + (2+\beta\gamma_2\tau)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + \beta\gamma_2\delta(1+\|\mathbf{y}(t)\|)+ \\ +L\beta\gamma_2\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\| + C_0\beta\gamma_2(1+\tau) \leq a_5\|\mathbf{x}^{'}\| + a_6\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + a_7,\end{gathered}$$

где $a_4 = 1 + \alpha + \beta(\gamma_1 - \alpha\gamma_2\tau)$; $a_5 = a_4 + \alpha\beta\gamma_2(\delta + \mathrm{L})$; $a_6 = 2 + \beta\gamma_2(\delta + L + \tau)$; $a_7 = \beta\gamma_2[C_0(\delta+\tau+1)+\delta]$. И, с учетом оценки для $\sigma(t)$ при преобразовании (3.12):

$$\|\mathbf{x}''\| \leq (\sigma_0)^{-1}[a_5(t)\|\mathbf{x}^{'}\| + a_6(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| + a_7(t)],\ t > q \geq t_2. \tag{3.20}$$

Отсюда, учитывая (3.2), (3.15), (3.16) и (3.19), получаем:

$$\|\mathbf{x}''\| \to 0,\ t \to \infty. \tag{3.21}$$

Из (3.17), (3.19) и (3.21) следует (3.3). Правые части оценок в (3.14), (3.18) и (3.20) не зависят от выбора приближений $\nabla f(\mathbf{x},t)$ градиента функции $f(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1), предельное соотношение (3.3) выполняется равномерно относительно выбора приближений $\nabla f(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющих условию (3.1).

Теорема 1 доказана.

**Примечание 1.** В качестве параметров метода (2.1), (2.2), удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут быть выбраны, например, следующие:

$$\begin{gathered}\alpha(t) = c_1(1+t)^{-1},\ \beta = c_2(1+t)^{-1},\ \gamma_1 = c_3(1+t)^{-1},\ \gamma_2 = c_4(2+t)^{-1}, \\ \sigma(t) = c_5(1+t)^{-\sigma},\ \tau(t) = c_6(1+t)^{-\tau},\ \delta(t) = c_7(1+t)^{-\delta},\end{gathered} \tag{3.22}$$

где числа $c_i > 0$, $i \in [1:7]$; $c_5 < 1$; $\sigma$, $\tau$, $\delta > 0$; $2\tau + 2\sigma < \delta$; параметры метода $1 - \sigma(t) > \alpha(t)$; $\sigma(t) < 1$; $\delta(t) < \tau(t) < L/4$.

## 4. Оценка скорости сходимости метода

Оценку скорости сходимости метода получим при более строгом условии сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того: функция* $f(\mathbf{x})$ *сильно выпуклая с константой сильной выпуклости* $\kappa > 0$ *; функции* $\sigma(t)$ , $\alpha(t)$ , $\beta(t)$ , $\gamma_1(t)$ , $\gamma_2(t)$ , $\tau(t)$ , $\delta(t)$ *удовлетворяют условиям (3.2) и*

$$\begin{gathered}\max[\sup_{t\geq 0}(\beta(t)\delta(t)\tau(t)),\ \sup_{t\geq 0}\beta(\tau^{'})^2,\ \sup_{t\geq 0}\tau(t)\gamma_2^{-1},\\ \sup_{t\geq 0}[(b_1(t)h(t))^{'}-b_2(t)h(t)]]\leq C_{24}<1/2;\\ \exists t_0,\ \forall t>t_0: 0<\alpha(t)\leq(4b-\tau(t))/(4b+2\tau(t))<1,\\ 0<\beta(t)<(1-\alpha)/(\gamma_1+(1-\alpha)\gamma_2\tau), 0<\gamma_2<\gamma_1/[2(1-\alpha)\delta(t)+\alpha\tau],\\ 0<\tau(t)<2\delta(t),\ 0<\gamma_1(t)<\gamma_1^0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

*Тогда при любых начальных приближениях* $\mathbf{x}^0$ , $\mathbf{x}^1 \in H$ *траектория метода (2.1), (2.2) сходится к точке* $\mathbf{x}^* \in Q_*$ *с оценками:*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|\leq\\ \leq([C_{21}(C_{24}^3+2C_{24}^5)h(t)+C_{22}(0)t+C_{23}(0)][b_1(t)h(t)]^{-1})^{1/2}=b_7(t),\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\|\mathbf{x}^{'}(t)\|\leq\left\{[(C_{24}-b_1(t)h)b_7+b_{71}][(b_5-b_1)h(t)]^{-1}\right\}^{1/2}=b_8(t), \tag{4.3}$$

$$\|\mathbf{x}^{''}(t)\|\leq\sigma_0^{-1}[a_5(t)b_8(t)+a_6(t)b_7(t)+a_7(t)],\ t\geq 0, \tag{4.4}$$

*где* $a_i(t),\ i=5,6,7$ *, из теоремы 1;* $b=L\mu/(L+\mu)$ *;* $h(t)=\exp\int_{s=0}^{s=t}[\gamma_2(s)/\tau(s)]\,ds$ , $b_{71}(t) = C_{21}(C_{24}+2C_{23}^3)h(t)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при условиях теоремы 3: 1) множество минимумов $Q_*=\{\mathbf{x}^*\}$ ввиду сильной выпуклости функций $f(\mathbf{x})$, $T(\mathbf{x}(t),t)$; 2) результаты теоремы 1 о сходимости метода (2.1), (2.2), (3.2) справедливы. В (3.6) воспользуемся неравенством для сильно выпуклой функции $f(\mathbf{x})\in C^{1,1}(Q)$ ([18], гл. 1) $(\nabla f(\mathbf{v})-\nabla f(\mathbf{u}),\mathbf{u}-\mathbf{z})\leq(L+\mu)\|\mathbf{v}-\mathbf{z}\|^2/4-L\mu\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2/(L+\mu)$, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}\in Q$, $\mu=2\kappa$, условием (3.1), неравенством Коши-Буняковского. Тогда получим

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+a(t)\mathbf{x}^{'},\mathbf{v}-\mathbf{w}\big)+b\beta\gamma_2\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|^2+\beta\gamma_2\tau(\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})\leq\\ \leq\beta\gamma_2[\delta(1+\|\mathbf{y}\|)\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|+\|\mathbf{v}\||\tau(t)-\tau(r)|\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|],\ t,r\geq 0,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $a(t)=1-\alpha-\beta\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2\tau$ , $b=L\mu/(L+\mu)$ , $d=(L+\mu)/4$ . Далее, ввиду (2.1), (2.2), оценки (3.8), неравенств (3.9) при подходящих $\varepsilon$, для слагаемых в (4.5) имеем:

$$\begin{gathered}\big(\sigma\mathbf{x}^{''}+a(t)\mathbf{x}^{'},\mathbf{v}-\mathbf{w}\big)=\sigma^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2+(1+a)\sigma(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})+\sigma(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}-\mathbf{v})+\\ +a(\mathbf{x}^{'},\mathbf{x}-\mathbf{v})+a\|\mathbf{x}^{'}\|^2;\quad\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2=\|(\mathbf{v}-\mathbf{x})-(\sigma\mathbf{x}^{''}+\mathbf{x}^{'})\|^2=\\ =\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{v}-\mathbf{x},\sigma\mathbf{x}^{''})-2(\mathbf{v}-\mathbf{x},\mathbf{x}^{'})+\sigma^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2+2(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})+\|\mathbf{x}^{'}\|^2;\\ \|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{x}+\alpha\mathbf{x}^{'}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2+2(\mathbf{x}-\mathbf{v},\alpha\mathbf{x}^{'})+\alpha^2\|\mathbf{x}^{'}\|^2;\\ \|\mathbf{y}-\mathbf{w}\|^2=\|(1-\alpha)\mathbf{x}^{'}+\sigma\mathbf{x}^{''}\|^2=(1-\alpha)^2\|\mathbf{x}^{'}\|^2+2(1-\alpha)\sigma(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})+\sigma^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2;\\ \|\mathbf{v}\||\tau(t)-\tau(r)|\,\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|\leq C_0^2|\tau(t)-\tau(r)|^2/(2\tau)+(\tau/2)\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2=\\ =C_0^2|\tau(t)-\tau(r)|^2/(2\tau(t))+(\tau/2)\left(\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2+\sigma^2\|\mathbf{x}^{''}\|^2+\|\mathbf{x}^{'}\|^2\right)+\\ +\tau(t)[\sigma(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})+\sigma(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}-\mathbf{v})+(\mathbf{x}^{'},\mathbf{x}-\mathbf{v})].\end{gathered}$$

Пользуясь этими выражениями и (3.8), (3.9) в (4.5), получим

$$\begin{gathered}b_{21}(t)\|\mathbf{x}^{''}\|^2+b_{22}(t)(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}^{'})+b_{23}(t)(\mathbf{x}^{''},\mathbf{x}-\mathbf{v})+b_{24}(t)(\mathbf{x}^{'},\mathbf{x}-\mathbf{v})+\\ +b_{25}(t)\|\mathbf{x}^{''}\|^2+b_{26}(t)\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2\leq Cg(t,r),\ t,r\geq 0,\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $b_{21}(t)=\sigma^2(t)[1-\beta(t)\gamma_2(t)(\delta(t)+\tau(t)/2)]$ ; $b_{22}(t)=\sigma(t)[1+a(t)-\beta(t)\gamma_2(t)(2\delta(t)+\tau(t))]$ ; $b_{23}(t)=\sigma(t)[1-2\beta(t)\gamma_2(t)\delta(t)$ ; $b_{24}(t)=a(t)+\beta(t)\gamma_2(t)[2b\alpha(t)-(2+\alpha)\delta(t)]$ ; $b_{25}(t)=a(t)+\beta(t)\gamma_2(t)[2b\alpha(t)-(1+\alpha^2/2)\delta(t)-\tau(t)/2]$ ; $b_{26}(t)=\beta(t)\gamma_2(t)(b+\tau(t)-3\delta(t)/2-\tau(t)/2)$ ;

$C = \max[(C_0+1)^2; C_0^2/2]$; $g(t,r) = C\beta\gamma_2(\delta + \tau^{-1}|\tau(t)-\tau(r)|^2)$; $b_{2i}(t) > 0$ при условиях (4.1). Пользуясь равенствами (3.10), преобразуем (4.6) к виду

$$\begin{gathered} b_1(t)\tfrac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_2(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_3(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + \\ + b_4(t)\|\mathbf{x}''\|^2 + b_5(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}'\|^2 + b_6(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \le C_{21} g(t,r),\ t,r\ge 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $b_1(t) = 0.5b_{23}(t)$; $b_2(t) = 0.5b_{24}(t)$; $b_3(t) = b_{26}(t)$; $b_4(t) = b_{21}(t)$; $b_5(t) = 0.5b_{22}(t)$; $b_6(t) = b_{25}(t) - b_{23}(t)$; $b_i(t) \ge 0$, $i \in [1:6]$ при условиях (4.1).

Умножив (4.7) на функцию $h(t) = \exp\left(\int_0^t [\gamma_2(s)/\tau(s)]\,ds\right)$, и, проинтегрировав полученное неравенство по $t \in [q,t]$, $t > q \ge t_1$, получим:

$$\begin{gathered} \int_q^t [(b_1(s)h(s))'' - (b_2(s)h(s))' + b_3(s)h(s)]\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2\,ds + \\ \int_q^t [b_4(s)h(s)\|\mathbf{x}''\|^2 + (b_2(s)h(s) - (b_5(s)h(s))')\|\mathbf{x}'\|^2]\,ds + \\ + b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + [b_2(t)h(t) - (b_1h)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_5h\|\mathbf{x}'\|^2 \le \\ \le C_{21}\int_q^t g(s,r)h(s)\,ds + C_{22}(q),\ t > q \ge t_1,\ r \ge 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $C_{22}(q) = [(b_1(q)h(q))' - b_2(q)h(q)](C_0 + \|\mathbf{x}(q)\|)^2 - b_5(q)h(q)\|\mathbf{x}'(q)\|^2$ от r не зависит. Существует $t_2$ такое, что коэффициенты под интегралами в (4.8) неотрицательны $\forall q \ge t_2 \ge t_1 \ge t_0$, поэтому таковы и интегралы; заменим их нулём:

$$\begin{gathered} b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + [b_2h - (b_1h)']\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_5(t)h(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \le \\ \le C_{21}\int_q^t g(s,r)h(s)\,ds + C_{22}(q),\ t > q \ge t_1,\ r \ge 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Проинтегрируем (4.9) на отрезке $[q,t]$, тогда имеем:

$$\begin{gathered} \int_q^t [(b_2(s)h(s) - 2(b_1(s)h(s))')\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 + b_5(s)h(s)\|\mathbf{x}'\|^2]\,ds + \\ + b_1(t)h(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 \le C_{21}\int_q^t\int_q^z g(s,r)h(s)\,ds\,dz + \\ + C_{22}(q)(t-q) + C_{23}(q),\ t > q \ge t_2,\ r \ge 0, \end{gathered} \tag{4.10}$$

где с учётом (3.8) $C_{23}(q) = h(q)b_1(q)\left(C_0 + \|\mathbf{x}(q)\|\right)^2$ не зависит от r. При условиях теоремы интеграл в левой части (4.10) неотрицателен, его заменим нулём, затем положим $r = t$.

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{v}(t)\|^2 \le [C_{21}\int_q^t\int_q^z g(s,t)h(s)\,ds\,dz + \\ + C_{22}(q)(t-q) + C_{23}(q)]/[b_1(t)h(t)]. \end{gathered}$$

Преобразуем подынтегральную функцию $g(s,t)$ по (3.13); ввиду сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$, $Q_* = \{\mathbf{x}^*\}$, при $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$ имеем:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le [b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_q^t\int_q^z \beta(s)\gamma_2(s)h(s)(\delta(s) + (\tau')^2(t-s)^2)\,ds\,dz + \\ + C_{22}(q)(t-q) + C_{23}(q)],\ t > q \ge t_2. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Положим далее $q = 0$ и что при $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ выполнялись неравенства для параметров метода, использованные при доказательстве теоремы 1. Такие значения параметров содержатся и в (3.22). Вычислим коэффициенты при $q = 0$ и преобразуем (4.11);

$$\begin{gathered} C_{22}(0) = [(b_1(0)h(0))' - b_2(0)h(0)]\left(C_0 + \|\mathbf{x}^0\|\right)^2 - b_5(0)h(0)\|\mathbf{x}^1\|^2, \\ C_{23}(0) = b_1(0)h(0)\left(C_0 + \|\mathbf{x}^0\|\right)^2, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le [b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_0^t\int_0^z \beta(s)\gamma_2(s)h(s)(\delta(s) + (\tau')^2(t-s)^2)\,ds\,dz + \\ + C_{22}(0)t + C_{23}(0)],\ t \ge t_2. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Вычислим двойной интеграл в правой части неравенства (4.12). Обозначив $I_{21} = \int_0^z g(s,t)h(s)\,ds$, получим: $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le [b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}\int_0^t I_{21}\,dz + C_{22}(0)t + C_{23}(0)]$, $t \ge 0$. Интегрируя по частям, сначала оценим внутренний интеграл,

$$\begin{gathered} I_{21} = \int_0^z \beta(s)\delta(s)\tau(s)dh(s) + \int_0^z \frac{\tau(t)}{\gamma_2(t)}\beta(s)\gamma_2(s)\tau^{-1}(\tau')^2(t-s)^2\,dh(s) \le \\ \le C_{24}[h(z) + \int_0^z (t-s)^2 dh(s)]. \end{gathered}$$

Обозначив интеграл в правой части $I_{22}$, интегрируем по частям:

$$\begin{gathered} I_{21} = \int_0^z (t-s)^2\,dh(s) = (t-s)^2 h(s)|_{s=0}^{s=z} + 2\int_0^z (t-s)h(s)\,ds \le 2C_{24}^2 h(z); \\ I_{21} \le (C_{24} + 2C_{24}^3)h(z); \quad \int_0^t I_{21}\,dz = (C_{24} + 2C_{24}^3)C_{24}^2 h(t); \end{gathered}$$

и из (4.12) следует (4.2)

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le \{[b_1(t)h(t)]^{-1}[C_{21}(C_{24}^3 + 2C_{24}^5)h(t) + C_{22}(0)t + C_{23}(0)]\}^{1/2} = b_7(t). \end{gathered}$$

Получим оценку (4.3). Из (4.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $q = 0$, $r = t$ следует:

$$\begin{gathered} b_5(t)h(t)\|\mathbf{x}'\|^2 \le [(b_1 h)' - b_2 h]\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 - b_1(t)h(t)\tfrac{d}{dt}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2 + \\ + C_{21}\int_0^t g(s,t)h(s)\,ds + C_{22}(0),\ t \ge t_2. \end{gathered} \tag{4.13}$$

В правой части (4.13) преобразуем: первое слагаемое — с помощью (4.1) и (4.2); второе слагаемое — с помощью (3.10) и (3.9) при $\varepsilon = 1$; интеграл вычислим так же, как $I_{21}$. Тогда из (4.13), пользуясь (4.2), получим

$$(b_5 - b_1)h(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \le (C_{24} - b_1(t)h(t))b_7(t) + b_{71}(t), \tag{4.14}$$

где $b_{71}(t) = C_{21}(C_{24}^3 + 2C_{24}^5)h(t)$, $b_5(t) - b_1(t) = \sigma(t)[1 - \alpha - \beta(\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2\tau)] > 0$ при $0 < \beta < (1-\alpha)/(\gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2\tau)$, $h(t) < C_{24}/b_1(t)$. Разделив на коэффициент в левой части (4.14), получим оценку (4.3):

$$\|\mathbf{x}'(\mathbf{t})\| \le \left\{[(C_{24} - b_1 h)b_7(t) + b_{71}(t)][(b_5 - b_1)h(t)]^{-1}\right\}^{1/2} = b_8(t).$$

Получим оценку (4.4). В условиях теоремы 2 результаты теоремы 1 верны. Положим в (3.20) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $q = 0$, $r = t$ и подставим в преобразованное неравенство оценки (4.2) и (4.3). Придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}''(\mathbf{t})\| \le \sigma_0^{-1}[a_5(t)b_8(t) + a_6(t)b_7(t) + a_7(t)],\ t \ge 0,$$

где $a_i(t) > 0$, $i \in [5:7]$ из (3.20), $b_7(t) > 0$, $b_8(t) > 0$.

Теорема 2 доказана.

# Список литературы


1. Васильев Ф. П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

2. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем*, 1989, 5–43.

3. Антипин А. С., “Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1475–1486.

4. Недич А., “Непрерывный метод проекции градиента третьего порядка для задач минимизации”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:11 (1994), 1914–1922.

5. Тихонов А. Н., “Об устойчивости задач оптимизации функционалов”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **6**:4 (1966), 631–634.

6. Тихонов А. Н., “О некорректно поставленных задачах”, *Вычислит. математ. и прогр.*, 1967, № Вып. 8, 3–33.

7. Антипин А. С., “Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач”, *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика*, 1973, № 2, 60–67.

8. Васильев Ф. П., *Методы решения экстремальных задач. Регуляризация, аппроксимация*, Наука, М., 1981, 400 с.

9. Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными”, *Вестник МГУ. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн.*, 1994, № 1, 3–10.

10. Васильев Ф. П., Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка”, *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1994, № 2, 3–11.

11. Васильев Ф. П., Амочкина Т. В., Недич А., “Об одном регуляризованном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка”, *Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1995, № 3, 39–46.

12. Васильев Ф. П., Недич А., “Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **30**:12 (1994), 2033–2042.

13. Vasiljev F. P., Nedic A., “A regularized continuous projection gradient method of the fourth order”, *Yugoslav J. of Operations research*, **5**:2 (1995), 195–209.

14. Малинов В. Г., “О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка”, *Методы оптимизации и их приложения. Труды 12 Байкальской международной конференции. Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001г.*, **1А** (2001), 21–26.

15. Малинов В. Г., “О регуляризованном проекционном непрерывном методе минимизации второго порядка”, *Ученые записки Ульяновского государст. университета. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики"*, 2002, № Вып. 2(12), 155–173.

16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1978, 336 с.

17. Малинов В. Г., “Четырехпараметрический двухшаговый регуляризованный проекционный метод минимизации”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **39**:4 (1999), 567–572.

18. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. Препринт.*, ВНИИ системных исследований, М., 1979, 73 с.

# On the rate of convergence regularized CPMM of the second order

© **V. G. Malinov** [2]

**Abstract.** In the work a regularization method in Hilbert space is investigated for problems of minimization with inaccurate initial date, based on the continuous projection second order method in conjunction with the Tikhonov function method. Estimates rate of convergence are proved.

**Key Words:** regularized projection continuous minimization method, estimates rate of convergence.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

*УДК 517.9*

# Кинетика фотопроводимости при межзонном возбуждении с учетом поверхностной рекомбинации

© **С. М. Мурюмин[1], А. Е. Никишина[2], Е. В. Никишин[3]**

**Аннотация.** Проведено теоретическое исследование кинетики фотопроводимости резистора с глубокими примесными центрами. Использовались параметры характерные для полупроводников $A^2B^6$ и $A^3B^5$. Изучено влияние электрического поля и диффузии электронов и дырок к поверхностям на фоточувствительность резистора.

**Ключевые слова:** кинетика фотопроводимости, рекомбинационные центры, времена жизни электронов и дырок, $A^2B^6$ и $A^3B^5$, поверхностная рекомбинация.

Кинетика фотопроводимости определяется механизмом рекомбинации неравновесных носителей заряда: межзонная рекомбинация, рекомбинация через локальные центры (рекомбинация Шокли – Рида), межзонная Оже – рекомбинация, безызлучательная экситонная рекомбинация, поверхностная рекомбинация [1]–[4]. Одна из важных особенностей полупроводников заключается в том, что их электрические и оптические свойства могут существенно зависеть от состояния поверхности и изменяться при различной ее обработке (шлифовке, травлении, изменении окружающей среды). Рекомбинация избыточных носителей тока на поверхности полупроводника приводит к истощению приповерхностных областей носителями заряда [5]. Некоторая часть большого числа энергетических состояний, возникающих на поверхности, может являться эффективными рекомбинационными ловушками. Это вызывает диффузию избыточных носителей тока из середины образца к активным поверхностям. Наличие локальных поверхностных уровней энергии приводит также к тому, что на поверхности образуется электрический заряд, т. е. появляются обогащенные или обедненные приповерхностные слои (электроны локализуются на самой поверхности кристалла). Влияние поверхности на кинетику электронных процессов принято характеризовать скоростью поверхностной рекомбинации $(S_n, S_p)$ [6], и оно будет особенно сильно в случае тонких пластин и нитевидных образцов, имеющих большое отношение поверхности к объему [5]. В работе проведено теоретическое исследование влияния поверхностной рекомбинации на кинетику фотопроводимости полупроводника.

Нами были рассмотрены полупроводники $n$-типа малой толщины (ниже приведены рисунки для полупроводника, толщина которого 100 мкм) с параметрами характерными для широкозонных полупроводников типа $A^2B^6$ и $A^3B^5$ [7, 8] при продольном освещении. Наличие объёмного заряда внутри полупроводника не учитывалось. Это оправдано небольшими электрическими полями внутри полупроводника. Численными методами исследовалось уравнение непрерывности с учётом диффузии и дрейфа электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - R + \frac{1}{e} div j_n \tag{1}$$

где $j_n = en\mu_n E + D_n \frac{dn}{dx}$; $g = g_0 e^{-\alpha x}$.

Рассмотрены случаи, когда скорость рекомбинации свободных носителей изменяется по линейному $(R = \Delta n/\tau)$ и по квадратичному закону $(R = \gamma \cdot \Delta n^2)$.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

[2] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; annikishina@yandex.ru

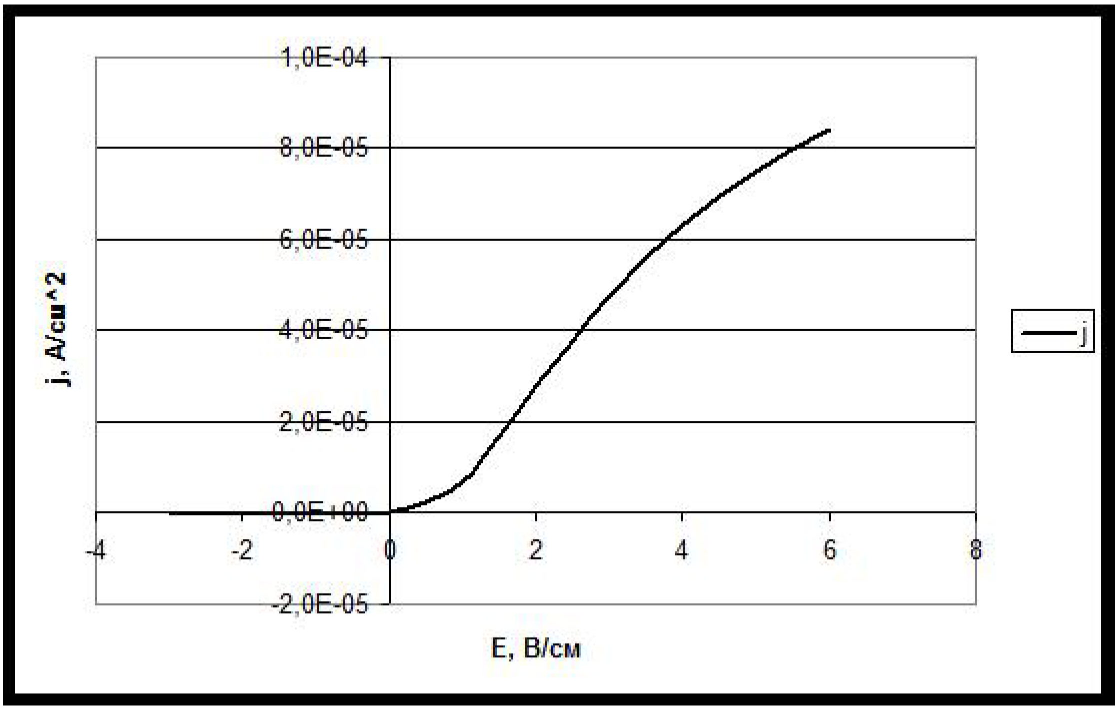
[3] Доцент кафедры экспериментальной физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikishin57@mail.ru

Краевые условия определились через скорости поверхностной рекомбинации на границах $S_1$ и $S_2$ [5]:

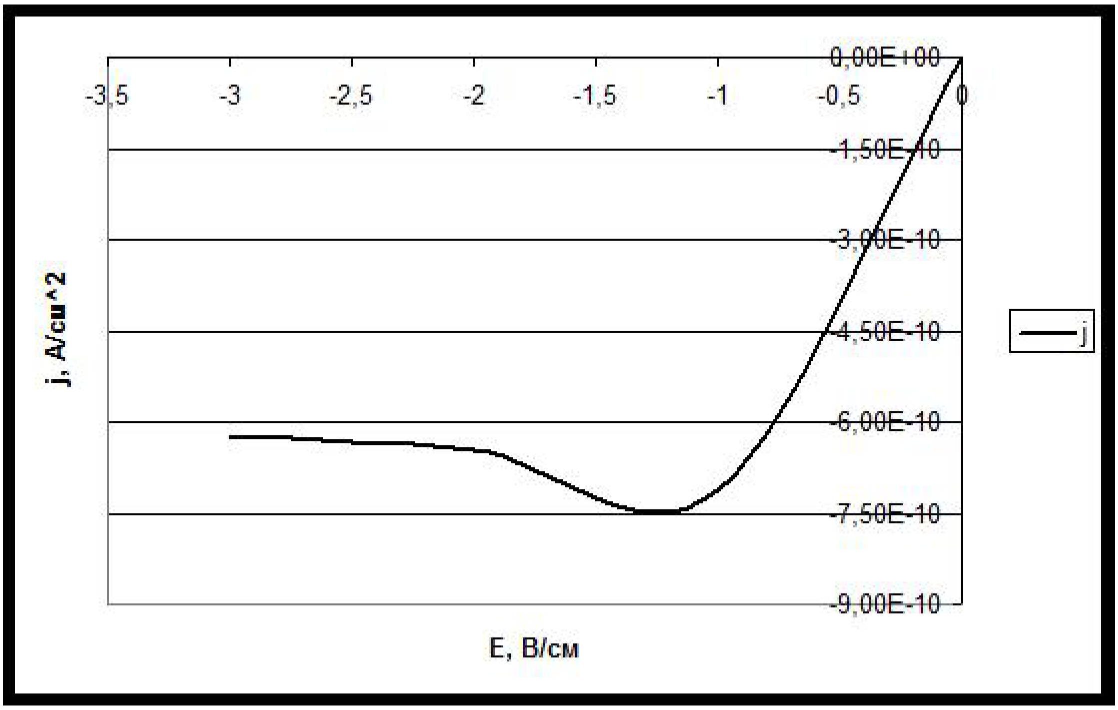
$$D\left.\frac{dn}{dx}\right|_{x=0,t} = S_1 n \qquad D\left.\frac{dn}{dx}\right|_{x=d,t} = -S_2 n \tag{2}$$

Выбор начальных условий определялся законом объемной рекомбинации: при линейной рекомбинации – $n(0,x) = g\tau$ ; при квадратичной рекомбинации – $n(0,x) = \sqrt{g/\gamma}$ .

На рисунках 1 – 2 представлены зависимости плотности тока от напряженности электрического поля в полупроводнике при продольном освещении для линейной рекомбинации неравновесных носителей заряда. Если хотя бы один из контактов обладает большой скоростью поверхностной рекомбинации, структура ведет себя подобно полупроводниковому диоду. Обратные токи на несколько порядков меньше токов, текущих в прямом направлении. Под прямым включением понимается случай, когда к освещенному контакту $n$-полупроводнику прикладывается «минус»; под обратным – «плюс». При прямом включении электроны выносятся полем из области генерации их светом в слабоосвещенную область. Этому способствует диффузия, возникающая из-за неоднородной генерации носителей заряда и рекомбинации их на границах. Вблизи контактов с большой скоростью поверхностной рекомбинации остаются небольшие участки с высоким сопротивлением. Они и определяют общее сопротивление такой структуры. При обратном включении электроны прижимаются полем к освещенному контакту. Сопротивление структуры резко возрастает. Если освещенный контакт имеет большую скорость поверхностной рекомбинации, то вблизи нее также присутствует область с малой электропроводностью. Сопротивление структуры меняется на несколько порядков и практически близко к сопротивлению неосвещенного полупроводника. На обратной ветви ВАХ при больших значениях $S_2$ возникают $N$-образные участки.

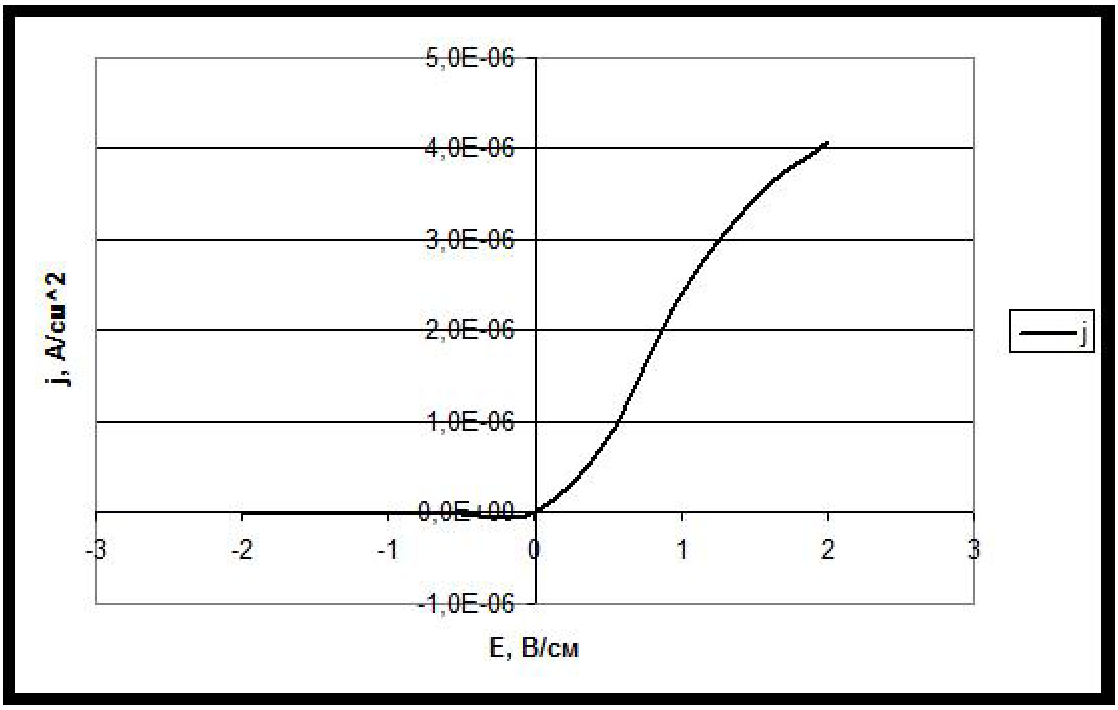



а)

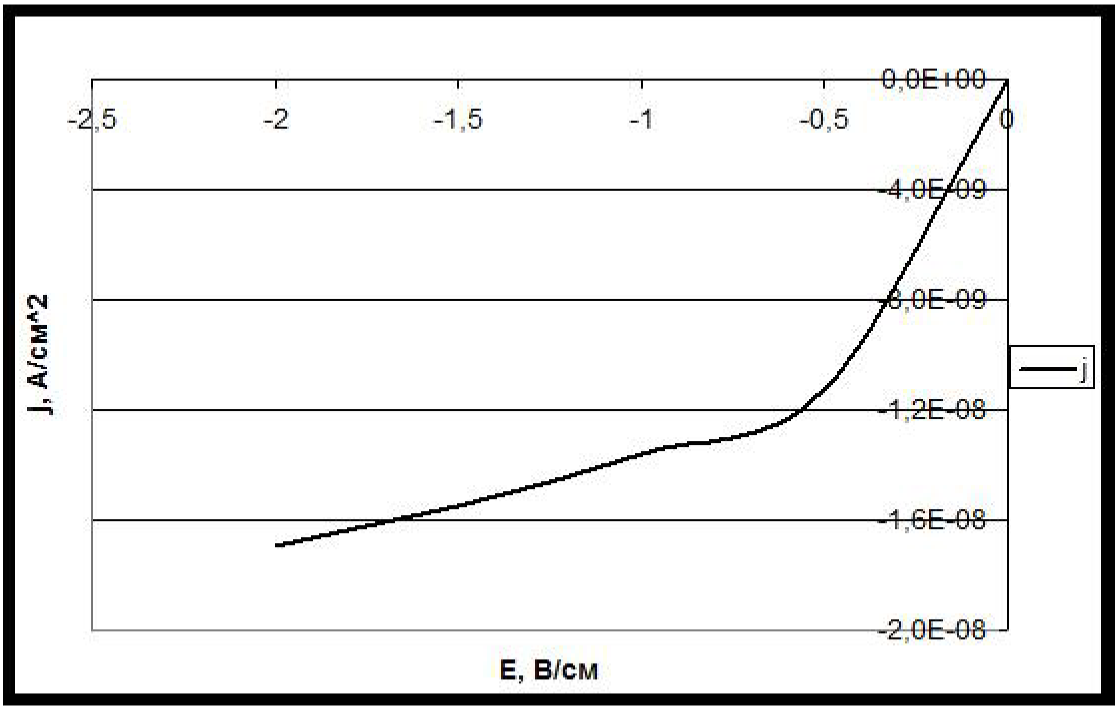



b)

Рис. 1 Зависимости плотности тока от напряженности электрического поля в полупроводнике при линейной рекомбинации (освещенный контакт – $S_1 = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$ неосвещенный контакт – $S_2 = 10^3$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\tau = 10^{-3}$ с, $g = 10^{15}$см$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$): направление напряженности электрического поля для a) от освещенного контакта; b) к освещенному контакту.




a)

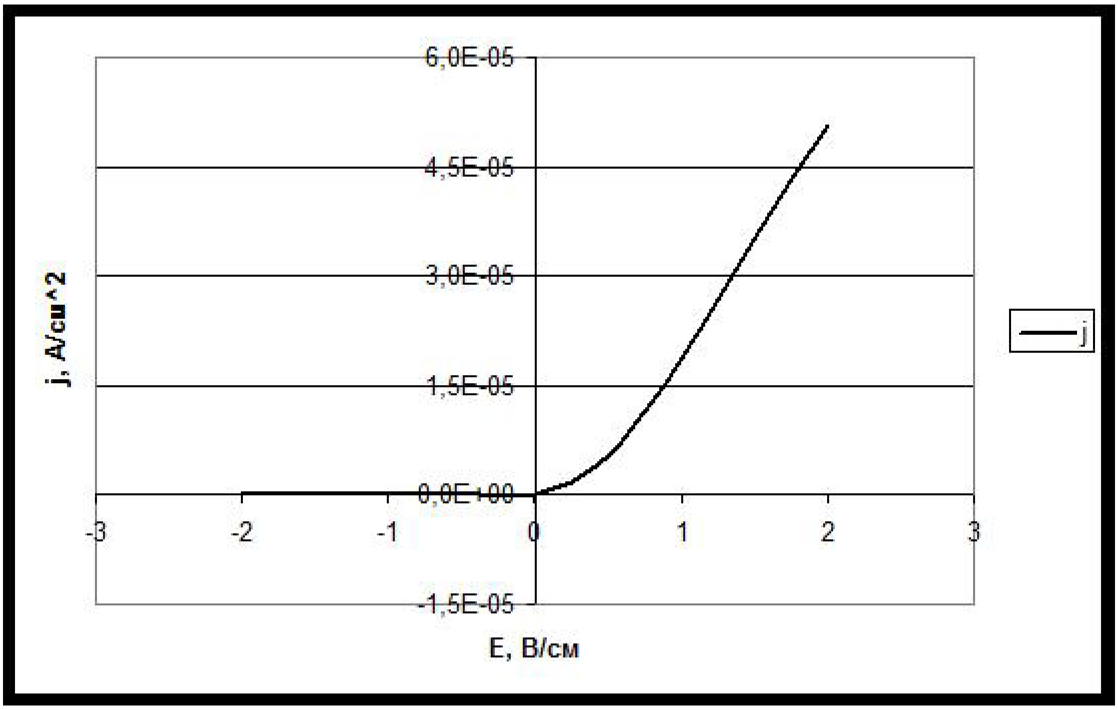



b)

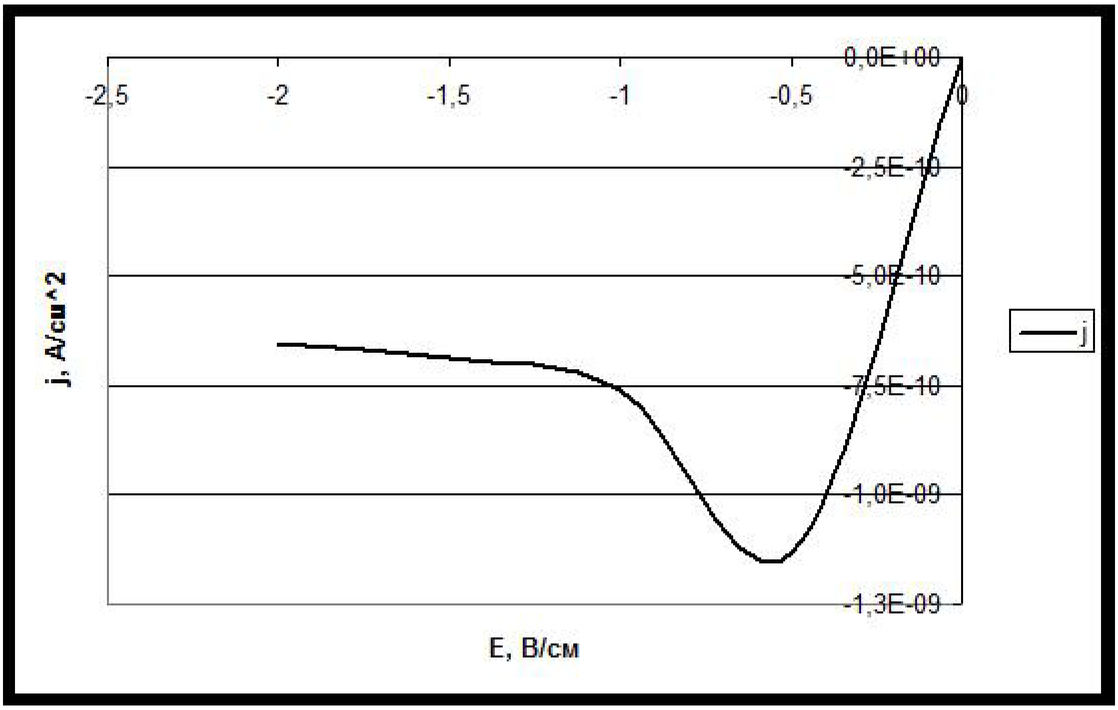
Рис. 2 Зависимости плотности тока от напряженности электрического поля в полупроводнике при линейной рекомбинации (освещенный контакт – $S_1 = 10^3$ см $\cdot$ с$^{-1}$, неосвещенный контакт – $S_2 = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\tau = 10^{-3}$ с, $g = 10^{15}$см$^{-3} \cdot$ с$^{-1}$): направление напряженности электрического поля для a) от освещенного контакта; b) к освещенному контакту.

Анализ полученных результатов показывает, что выпрямляющие свойства проявляются наиболее ярко, если освещенный контакт обладает малой скоростью поверхностной рекомбинации, а тыловой, соответственно, большой.

Аналогичные результаты вольтамперных характеристик представлены на рисунках 3-4 при квадратичном законе рекомбинации. Как и при линейной рекомбинации, выпрямление наиболее эффективно, если тыловой контакт обладает большой скоростью поверхностной рекомбинации, а освещенный – малой. На обратной ветви ВАХ наблюдается $N$-образный участок.

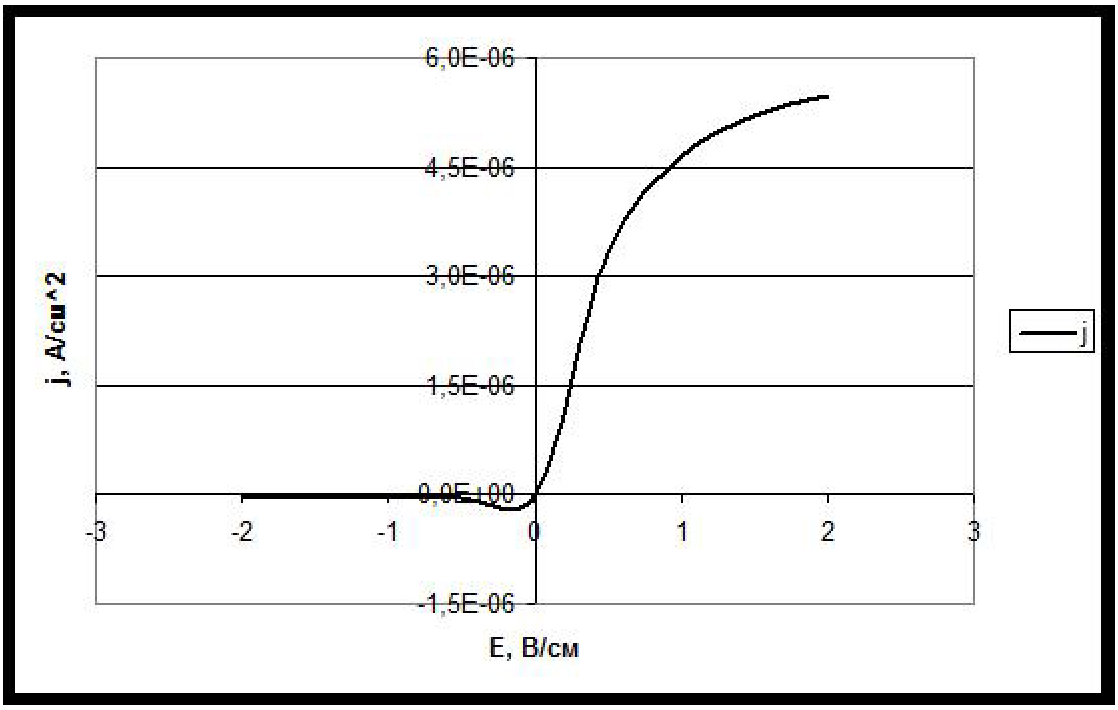



a)

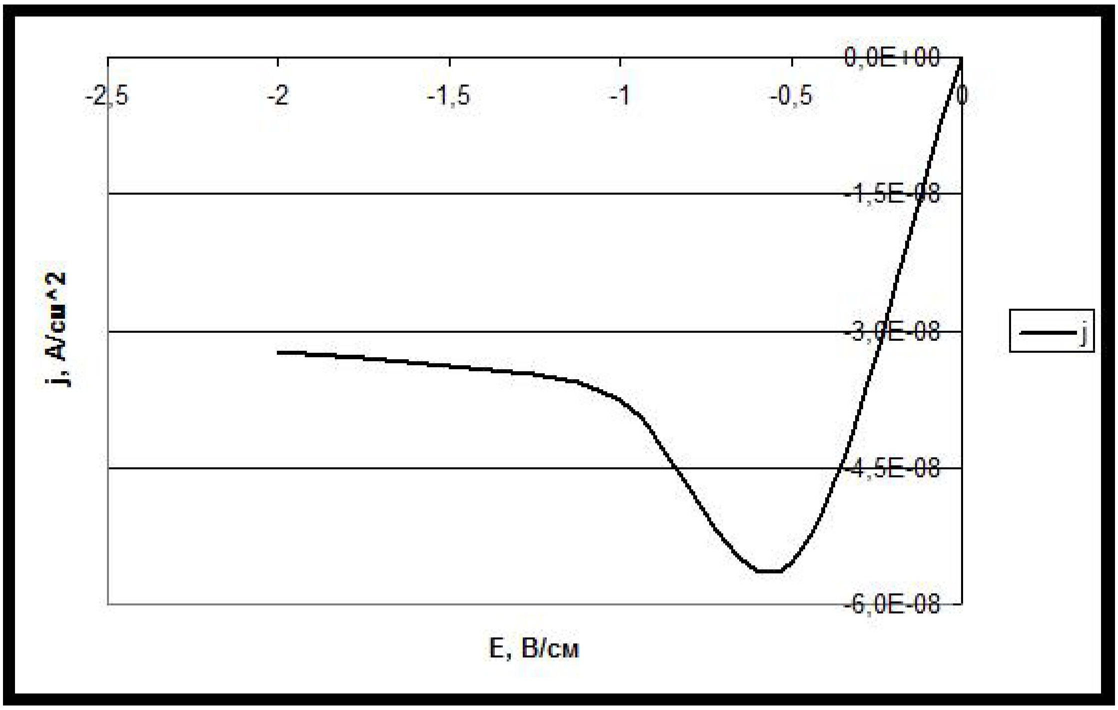



b)

Рис. 3 Зависимости плотности тока от напряженности электрического поля в полупроводнике при квадратичном законе рекомбинации (освещенный контакт – $S_1 = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$, неосвещенный контакт – $S_2 = 10^3$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\tau = 10^{-3}$ с, $g = 10^{15}$см$^{-3} \cdot$ с$^{-1}$): направление напряженности электрического поля для a) от освещенного контакта; b) к освещенному контакту.




a)




b)

Рис. 4 Зависимости плотности тока от напряженности электрического поля в полупроводнике при квадратичном законе рекомбинации (освещенный контакт – $S_1 = 10^3$ см $\cdot$ с$^{-1}$, неосвещенный контакт – $S_2 = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\tau = 10^{-3}$ с, $g = 10^{15}$см$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$): направление напряженности электрического поля для a) от освещенного контакта; b) к освещенному контакту.

Нами были рассчитаны средние по модулю токи (СМТ), определяющие выделяющуюся в полупроводнике мощность, и средние токи (СТ) через полупроводник, определяющие выпрямляющие свойства. Расчет проведен для случая, когда к полупроводнику прикладывалось переменное напряжение, изменяющееся по гармоническому закону и генерация носителей светом неоднородная $(g = g_0 exp(-\alpha x))$.

$$j = \frac{1}{T}\int_0^T |j(t)|dt \qquad j_1 = \frac{1}{T}\int_0^T j(t)dt \tag{3}$$

Освещается контакт 1, рекомбинация на котором равна $S_1$. При одинаковых рекомбинационных свойствах контактов $S_1 = S_2$ выпрямляющие свойства полупроводниковой структуры проявляются слабо и связаны с неоднородным поглощением света, а, следовательно, с неоднородной генерацией неравновесных носителей. Плотность тока для таких структур пропорциональна напряженности электрического поля $(j \sim E, j_1 \sim E)$. Выпрямляющие свойства проявляются слабо и в случае, когда освещенный контакт имеет существенно большую скорость поверхностной рекомбинации, чем неосвещенный. При наличии асимметрии в поверхностных свойствах контактов зависимости плотности тока от напряженности становятся нелинейными.

Если освещенный контакт имеет существенно меньшую скорость поверхностной рекомбинации, чем неосвещенный, то полупроводник является хорошим выпрямителем. Механизм выпрямления связан с выносом электронов электрическим полем из области их высокой концентрации в область низких концентраций (из освещенной области в тыловой контакт) в случае, когда напряженность электрического поля противоположна направлению падения луча света. При этом общее сопротивление уменьшается. При изменении направления напряженности электрического поля происходит вынос носителей заряда от тылового контакта. Вблизи него создается большой градиент концентрации основных носителей заряда. Это приводит к увеличению диффузии к контакту с большой скоростью поверхностной рекомбинации, что, в свою очередь, способствует увеличению запирающего слоя вблизи тылового контакта. Тыловой контакт играет роль $p - n$ перехода полупроводникового диода. В отличии от диода изготовление изучаемой структуры не требует высоких технологий.

Анализ зависимости $j$ и $j_1$ от $S_2$ (рис. 5) показывает, что с увеличением скорости поверхностной рекомбинации на тыловом контакте увеличиваются выпрямляющие свойства структуры. С увеличением скорости поверхностной рекомбинации $S_2$ выпрямленный ток увеличивается. Затем на кривой $j = j(S_2)$ наблюдается максимум $(S_2 = 80 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1})$, после чего величина выпрямленного тока уменьшается с увеличением $S_2$. Увеличение $S_2$ с одной стороны приводит к увеличению выпрямляющих свойств (рис. 5), с другой уменьшается чувствительность полупроводника к свету (то есть $j$ и $j_1$ уменьшаются). Последнее очевидно, так как увеличение $S_2$ приводит к обеднению свободными носителями заряда всей толщины полупроводника. Способствует этому диффузия и дрейф электронов в электрическом поле.

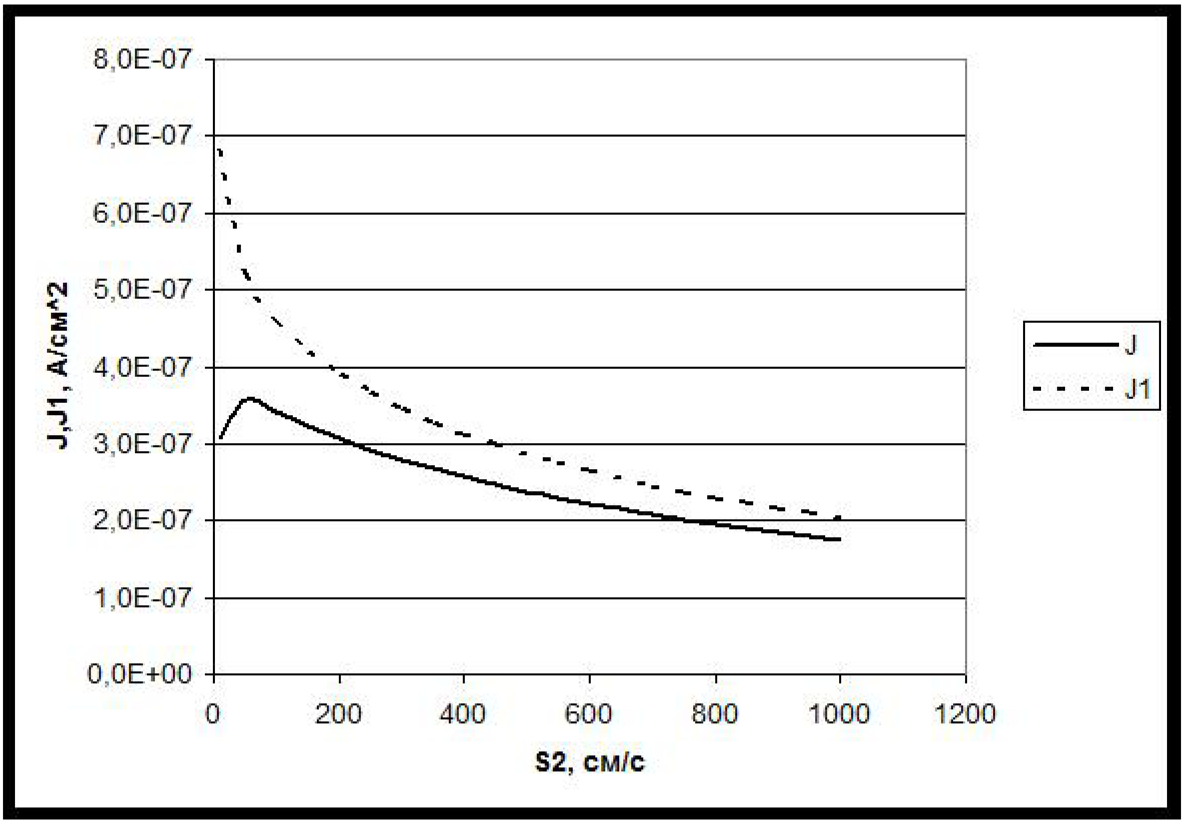



Рис. 5 Зависимости плотности тока от скорости поверхностной рекомбинации неосвещенного контакта: освещенный контакт – $S_1 = 1$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $\tau = 10^{-3}$ с, $g = 10^{15}$см$^{-3} \cdot$ с$^{-1}$, $E = 1$ В $\cdot$ см$^{-1}$, $v = 400$ Гц

Следует ожидать, что выпрямляющие свойства структур будут проявляться в определенной области частот. При относительно больших частотах свободные носители заряда будут совершать колебания относительно положения равновесия, практически не перемещаясь к активным (рекомбинирующим) поверхностям. Увеличения области частот, для которых наблюдается значительная составляющая постоянного тока, можно достичь уменьшением толщины полупроводника.

Таким образом, поверхностная рекомбинация уменьшает концентрацию носителей заряда у контактов [5]. Если поле «оттягивает» носители заряда от контакта, образуется слой с повышенным сопротивлением. Величина тока уменьшается. При обратном направлении электрического поля носители дрейфуют к рекомбинационной поверхности. При их рекомбинации за счёт дальнейшего дрейфа уменьшается концентрация носителей по глубине полупроводника. Происходит обеднение носителей заряда по всей глубине полупроводника.

## Список литературы

1. Милнс А., *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.

2. Савченко А. В., Горбань А. П., Костылев В. П., Соколовский И. О., “Квадратичная рекомбинация в кремнии и ее влияние на объемное время жизни”, *ФТП*, **41**:3 (2007), 290–294.

3. Бородовский П. А., Булдыгин А. Ф., Голод С. В., “Аномальная релаксация фотопроводимости в кремнии при высоких уровнях инжекции”, *ФТП*, **43**:3 (2009), 329–331.

4. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Об изменении времен жизни носителей заряда при импульсном фотовозбуждении в кремнии с глубокими примесными центрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 118–126.

5. Блекмор Д., *Статистика электронов в полупроводниках*, Мир, М., 1964, 392 с.

6. Смит Р.; под ред. Пенина Н. А., *Полупроводники: пер. с англ.*, Мир, М., 1982, 560 с.

7. Георгобиани А. Н., “Широкозонные полупроводники $A^{II}B^{VI}$ и перспективы их применения”, *Успехи физических наук*, **133**:1 (1974), 129–155.

8. Вавилов В. С., “Особенности физики широкозонных полупроводников и их практических применений”, *Успехи физических наук*, **164**:3 (1994), 503–525.


## The kinetics of photoconductivity under interband excitation with surface recombination

**© S. M. Muryumin[4],A. E. Nikishina[5],E. V. Nikishin[6]**

**Abstract.** We investigated the kinetics of photoresistor photoconductivity with deep foreign centers theoretically. Typical parameters of semiconductors $A^2B^6$ and $A^3B^5$ were used. We considered the influence of electric field and electrons and holes border diffusion to photosensitivity of photoresistor.

**Key Words:** the kinetics of photoconductivity, recombination centers, lifetime of electrons and holes, $A^2B^6$ and $A^3B^5$, surface recombination.

[4] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

[5] Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; annikishina@yandex.ru

[6] Associate professor of Experimental Physics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikishin57@mail.ru

*УДК 519.6*

# О построение WENO схем для гиперболических систем уравнений на треугольной сетке

**© Е. Е. Пескова[1], П. А. Шаманаев[2]**

**Аннотация.** В статье описывается алгоритм построения WENO схемы на неструктурированной сетке. Представлена схема третьего порядка точности, основанная на комбинации линейных полиномов.

**Ключевые слова:** WENO схема, неструктурированная сетка, высокий порядок точности.

## 1. Конечно-объемная схема на треугольной сетке

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^2(U)}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

где $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$; $F^1(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix}$; $F^2(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$ Здесь $\rho = \rho(t,x,y)$ – плотность среды, $v = v(t,x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – скорость движения газа, $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ – полная энергия единицы объема, удельная внутренняя энергия, $p = p(\rho, \varepsilon)$ – давление.

Для построения численного решения произведем триангуляцию Делоне расчетной области. Построим разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений газовой динамики, пользуясь интегро-интерполяционным методом:

$$\frac{d}{dt}U_i(t) + \frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\partial\Delta_i} F \cdot nds = 0 \tag{1.2}$$

Интеграл в (1.2) рассчитывается с помощью квадратурной формулы Гаусса:

$$\int_{\partial\Delta_i} F \cdot nds \approx |\partial\Delta_i| \sum_{j=1}^{q} \omega_j F(u(G_j,t)) \cdot n, \tag{1.3}$$

Используем двухточечную квадратуру Гаусса $q = 2$. Для ребра треугольника с координатами $P_1$ и $P_2$, точки Гаусса определяем следующим образом: $G_1 = cP_1 + (1-c)P_2$, $G_2 = cP_2 + (1-c)P_1$, где $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$.

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; Lizanika@mail.ru.

[2] Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

## 2. WENO реконструкция

Пусть дана триангуляция области $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N\}$ и заданы средние значения некоторой функции $u(x, y)$ для $\Delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\Delta_i} u(x, y) dxdy. \tag{2.1}$$

Алгоритм WENO построения интерполяционного полинома заключается в использовании комбинации всех возможных полиномов для данной ячейки [2].

Пусть выбран большой шаблон $S$, разбиваем его на малые шаблоны $\{S_m : m = 1, 2, \ldots, N\}$. Используя значения $u$ на $S$, строим искомый полином $p(x, y)$ для данной ячейки $\Delta_0$. Значения полинома в каждой точке Гаусса удовлетворяют:

$$p(x^G, y^G) = \sum_{m=1}^{N} \gamma_m p_m(x^G, y^G), \tag{2.2}$$

где $(x^G, y^G)$ – точка Гаусса, $p_m$ – полином, построенный на малом шаблоне $S_m$, $\gamma_m$ – линейные весовые коэффициенты. Нелинейная WENO реконструкция в точке Гаусса строится следующим образом:

$$p_{weno}(x^G, y^G) = \sum_{m=1}^{N} w_m p_m(x^G, y^G), \tag{2.3}$$

где $w_m$ – нелинейные весовые коэффициенты определяются из выражений:

$$w_m = \frac{\tilde{w}_m}{\sum_{m=1}^{N} \tilde{w}_m}, \;\; \tilde{w}_m = \frac{\gamma_m}{(\varepsilon + IS_m)^2}. \tag{2.4}$$

Здесь $\varepsilon$ – малая положительная величина, введенная, чтобы избежать деления на ноль. В расчетах принимаем $\varepsilon = 10^{-3}$. $IS_m$ – индикатор гладкости для полинома $p_m(x, y)$:

$$IS_m = \sum_{1 \le |\alpha| \le k} \int_{\Delta_0} |\Delta_0|^{|\alpha|-1} (D^\alpha p_m(x, y))^2 dxdy. \tag{2.5}$$

Здесь $k$ – степень полинома $p_m$.

## 3. Линейная реконструкция

Для построения линейной схемы третьего порядка точности для нахождения газодинамических параметров для ячейки $\Delta_0$ берем шаблон, включающий в себя два ряда соседних ячеек $S = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_{ia}, \Delta_{ib}, \Delta_j, \Delta_{ja}, \Delta_{jb}, \Delta_k, \Delta_{ka}, \Delta_{kb}\}$ (рис. 1).

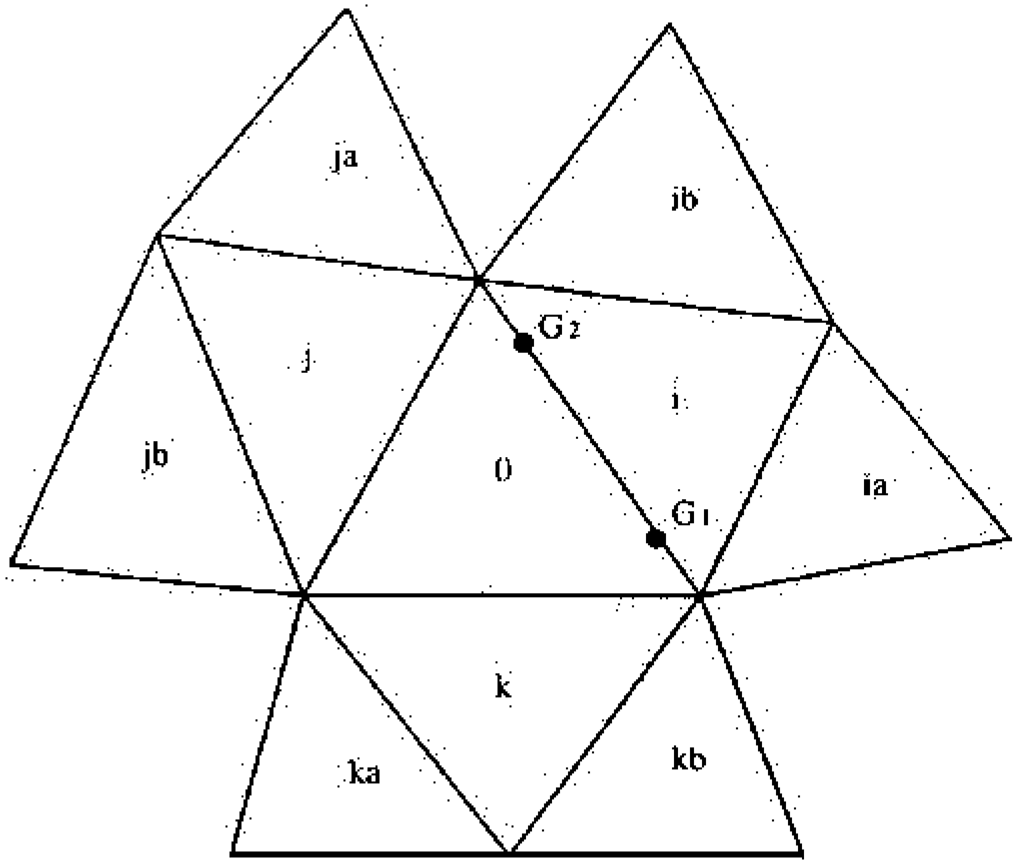



Рис. 1

Используя данный шаблон, строим квадратичный полином $p^2(x, y)$ методом наименьших квадратов. Заметим, что некоторые из ячеек $\{\Delta_{ia}, \Delta_{ib}, \Delta_{ja}, \Delta_{jb}, \Delta_{ka}, \Delta_{kb}\}$ могут совпадать, но этот факт не влияет на определение полинома $p^2(x, y)$. Для каждой точки Гаусса $(x^G, y^G)$ находим набор коэффициентов $\{c_l\}_{l=1}^N$, которые зависят только от геометрии ячеек:

$$p^2(x^G, y^G) = \sum_{l=1}^{N} c_l \bar{u}_l \tag{3.1}$$

Здесь $N$ – число треугольников в шаблоне, $\bar{u}_l$ – среднее значение $u$ в ячейке.

Идея WENO схемы заключается в следующем [2]. Строим линейные полиномы $p_i(x, y)$, взвешенная сумма которых дает тот же результат, что и квадратичный полином $p^2(x, y)$.

Используя $S$, строим линейные полиномы $p_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, 9$ на следующих шаблонах: $S_1 = \{\Delta_0, \Delta_j, \Delta_k\}$, $S_2 = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_k\}$, $S_3 = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_j\}$, $S_4 = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_{ia}\}$, $S_5 = \{\Delta_0, \Delta_i, \Delta_{ib}\}$, $S_6 = \{\Delta_0, \Delta_j, \Delta_{ja}\}$, $S_7 = \{\Delta_0, \Delta_j, \Delta_{jb}\}$, $S_8 = \{\Delta_0, \Delta_k, \Delta_{ka}\}$, $S_9 = \{\Delta_0, \Delta_k, \Delta_{kb}\}$.

Используя выражение (2.1) для каждого треугольника из шаблона и решив линейную систему $3 \times 3$ найдем искомый полином $p_i(x, y)$.

Для каждой точки Гаусса $(x^G, y^G)$ находим набор коэффициентов $\{c_l^{(i)}\}_{l=1}^3$, которые зависят только от геометрии ячеек:

$$p_i(x^G, y^G) = \sum_{l=1}^{3} c_l^{(i)} \bar{u}_l^{(i)}. \tag{3.2}$$

Здесь $\bar{u}_i$ – среднее значение $u$ в ячейке.

Для каждой точки Гаусса необходимо найти линейные весовые коэффициенты $\gamma_i$, которые зависят от параметров сетки. Строим полином с помощью комбинации линейных полиномов

$$R(x, y) = \sum_{i=1}^{9} \gamma_i p_i(x, y), \tag{3.3}$$

который удовлетворяет

$$R(x^G, y^G) = p^2(x^G, y^G). \tag{3.4}$$

Из равенства (3.4) получаем линейную систему уравнений вида:

$$M\gamma = c, \tag{3.5}$$

где вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T$ – коэффициенты в (3.1) для большого шаблона. Каждый столбец матрицы $M$ состоит из коэффициентов в (3.2) для малых шаблонов.

## Список литературы


1. Годунов С. К., Забродин М. Я., Иванов М. Я., Крайко А. Н, Прокопов Г. П., *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, Наука, М., 1976.
2. Changqing Hu, Chi-Wang Shu., “Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular Meshes”, *Journal of Computational Physics*, 1999, № 150, 97–127.
3. Y.-T. Zhang and C.-W. Shu., “Third order WENO schemes on three dimensional tetrahedral meshes”, *Communications in Computational Physics*, 2009, № 5, 836–848.
4. Sod A. G., “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, **27**:1 (1978), 1–31.


# On the construction WENO schemes for hyperbolic systems on triangular meshes

**© E. E. Peskova[3], P. A. Shamanaev[4]**

**Abstract.** This paper describes an algorithm for constructing WENO schemes on unstructured meshes. We present third-order scheme using a combination of linear polynomials.
**Key Words:** WENO scheme, unstructured mesh, high-order accuracy.

[3] Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; Lizanika@mail.ru.

[4] Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

*УДК 51.7:532.546*

# Генерация системы уравнений методом Галеркина для решения задачи об установившихся колебаниях

**© Е. П. Тремасова[1], Д. И. Бояркин[2]**

**Аннотация.** Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона в задаче об установившихся колебаниях. В работе построена система базисных функций и получена форма Галеркина для соответствующего дифференциального оператора. Сгенерирована система уравнений, построена разностная схема.

**Ключевые слова:** базисные функции, форма Галеркина, слабое решение, задача Дирихле.

## 1. Некоторые вспомогательные определения

Рассмотрим некоторое линейное дифференциальное уравнение

$$Au = f \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

где $A$ – некоторый дифференциальный оператор

Под слабым решением будем понимать функцию $u(x)$ ,которая удовлетворяет уравнению

$$(Au, v) = (f, v) \quad (\text{для всех } v \in H). \tag{1.2}$$

Пространство $H$ содержит все измеримые допустимые функции, которые обращаются в нуль на границе $\partial R$, и скалярное произведение в пространстве $H(u, v)$ определяется следующим образом для любых $u(x), v(x) \in H$:

$$(u, v) = \int\limits_R u(x)v(x)dx. \tag{1.3}$$

Под формой Галеркина будем понимать слабую форму задачи, возникающую после $k$ раз интегрирования по частям, если дифференциальный оператор имеет порядок $2k$.

## 2. Построение базисных функций

Рассмотрим $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ – прямоугольник равномерной сетки с шагом $h$. Билинейная форма, приближающая функцию $f(x, y)$ на прямоугольном элементе имеет вид:

$$p_1^{i,j} = \alpha_{i,j}(x, y)f_{i,j} + \beta_{i+1,j}(x, y)f_{i+1,j} + \gamma_{i,j+1}(x, y)f_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}(x, y)f_{i+1,j+1}, \tag{2.1}$$

[1] Магистрант 1-го года обучения, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; tremasovaep@gmail.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.ru.

где

$$\alpha_{i,j}(x,y) = \frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y), \tag{2.2}$$

$$\beta_{i+1,j}(x,y) = \frac{1}{h^2}(x-x_i)(y_{j+1}-y), \tag{2.3}$$

$$\gamma_{i,j+1}(x,y) = \frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x)(y-y_j), \tag{2.4}$$

$$\delta_{i+1,j+1}(x,y) = \frac{1}{h^2}(x-x_i)(y-y_j), \tag{2.5}$$

где $1 \le i,j \le m-1$.

Кусочная аппроксимация функций на квадрате $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]$ задается выражением

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\tilde{f}\varphi_{i,j}(x,y). \tag{2.6}$$

$$\varphi_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(x-x_{i-1})(y-y_{j-1}), x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ \frac{1}{h^2}(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y), x_{i-1}\le x\le x_i, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ \frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x)(y-y_{j-1}), x_i\le x\le x_{i+1}, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ \frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y), x_i\le x\le x_{i+1}, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ 0, \text{ при других значениях аргумента,} \end{cases} \tag{2.7}$$

где $1 \le i,j \le m-1$.

Вычислим производные функций $\varphi_{i,j}(x,y)$ по пространственным переменным $x, y$. Частная производная функций $\varphi_{i,j}(x,y)$ по переменной $x$ имеет вид

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(y-y_{j-1}), x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ \frac{1}{h^2}(y_{j+1}-y), x_{i-1}\le x\le x_i, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ -\frac{1}{h^2}(y-y_{j-1}), x_i\le x\le x_{i+1}, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ -\frac{1}{h^2}(y_{j+1}-y), x_i\le x\le x_{i+1}, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ 0, \text{ при других значениях аргумента,} \end{cases} \tag{2.8}$$

где $1 \le i,j \le m-1$.

Частная производная функций $\varphi_{i,j}(x,y)$ по переменной $y$ имеет вид

$$\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(x-x_{i-1}), x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ -\frac{1}{h^2}(x-x_{i-1}), x_{i-1}\le x\le x_i, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ \frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x), x_i\le x\le x_{i+1}, y_{j-1}\le y\le y_j; \\ -\frac{1}{h^2}(x_{i+1}-x), x_i\le x\le x_{i+1}, y_j\le y\le y_{j+1}; \\ 0, \text{ при других значениях аргумента,} \end{cases} \tag{2.9}$$

где $1 \le i,j \le m-1$.

## 3. Форма Галеркина слабого решения

Рассмотрим малые колебания мембраны, находящейся в плоскости $Oxy$ в положении равновесия.

Будем предполагать, что колебания являются малыми, то есть можно пренебречь квадратами и произведениями величин $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Функция $u(x, y, t)$ – смещение точки $(x, y)$ мембраны в момент времени $t$. Величина площади мембраны $S(t)$ в момент времени $t$ определяется формулой

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dxdy \approx \iint\limits_D \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dxdy, \tag{3.1}$$

а в положении покоя

$$S(0) = \iint\limits_D dxdy \tag{3.2}$$

Для потенциальной энергии $E_p$ и кинетической $E_k$ в процессе колебания будем иметь, соответственно,

$$E_p = \mu(|S(t)| - S(0)) = \frac{1}{2}\mu \iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dxdy, \tag{3.3}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \iint\limits_D \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy. \tag{3.4}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\right) dxdy. \tag{3.5}$$

Тогда соответствующий функционал будет иметь вид

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} Ldt = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_D \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\right) dxdy. \tag{3.6}$$

В силу принципа Гамельтона колебание мембраны происходит таким образом, что описывающая его функция $u(x, y, t)$ должна быть решением уравнения Эйлера вариационной задачи для функционала 3.6

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = 0. \tag{3.7}$$

Считая, что функция $u(x, y, t)$ не зависит от $t$, то есть полагаем, что в положении изгиба, описанного уравнением $u = u(x, y)$, мембрана находится в равновесии, учитывая внешнее воздействие $f(x, y)$, а также некоторое начальное значение функции в начальный момент времени получим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D \tag{3.8}$$

$$u(x, y)|_{\partial D} = 0 \tag{3.9}$$

решения которой в классе допустимых функций минимизируют интеграл Дирихле

$$I\left(u(x,y)\right) = \iint\limits_D \left( \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy. \tag{3.10}$$

Вместо точного решения будем искать приближенное решение $U(x,y)$, которое можно представить через базисные функции следующим образом

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{u}_{i,j} \varphi_{i,j}(x,y), \tag{3.11}$$

где коэффициенты $\tilde{u}_{i,j}$ – приближенное решение задачи в точке $(x_i, y_j)$, которые являются коэффициентами разложения функции $U(x,y)$ по базису $\varphi_{i,j}(x,y)$.

Построим соответствующую форму Галеркина для дифференциального оператора $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ для задачи 3.8. Из 1.2получим

$$\iint\limits_D \left( \left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = \iint\limits_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy \tag{3.12}$$

где $1 \le i, j \le m-1$.
Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = \left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \varphi_{i,j}(x,y) \right) \Bigg|_{\partial D} - \\ - \iint\limits_D \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} dxdy \tag{3.13}$$

Аналогично

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = \left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \varphi_{i,j}(x,y) \right) \Bigg|_{\partial D} - \\ - \iint\limits_D \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} dxdy \tag{3.14}$$

Так как базисные функции $\varphi_{i,j}(x,y)$ имеют локальный носитель, то на границе $\partial D$ функции $\varphi_{i,j}(x,y)$ обращаются в ноль , то получим

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = - \iint\limits_D \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} dxdy, \tag{3.15}$$

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = - \iint\limits_D \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} dxdy. \tag{3.16}$$

Поэтому справедливо

$$\iint\limits_D \left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dxdy + \\ + \iint\limits_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = 0. \quad (3.17)$$

Подставим равенство 3.11 в выражение 3.17, получим

$$\iint\limits_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k,l=1}^{m-1} \tilde{u}_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{k,l=1}^{m-1} \tilde{u}_{k,l} \varphi_{k,l}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dxdy + \iint\limits_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{m-1} \tilde{u}_{k,l} \iint\limits_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{k,l}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_{k,l}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dxdy + \iint\limits_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy \quad (3.18)$$

Таким образом получим форму Галеркина для задачи 3.8-3.9

$$\sum_{k,l=1}^{m-1} \tilde{u}_{k,l} \iint\limits_D \left( \frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dxdy + \iint\limits_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dxdy = 0 \quad (3.19)$$

## 4. Генерация системы уравнений

Построим разностную схему на основе выражения для нахождения коэффициентов $\tilde{u}_{k,l}$.

Определим множество $D_{i,j} = \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i; y_{j-1} \le y \le y_j\}$.
В том случае, когда выполняется условие

$$\left( D_{k,l} \bigcap \bigcup_{r=i-1,s=j-1}^{r=i+1,s=j+1} D_{r,s} \right) = 0, \quad (4.1)$$

где $1 \le i,j \le m-1$, $1 \le k,l \le m-1$,
значение интеграла перед коэффициентами $\tilde{u}_{k,l}$ будет равно нулю, так как, по определе-

нию, функции $\varphi_{i,j}(x,y)$ имеют локальный носитель.

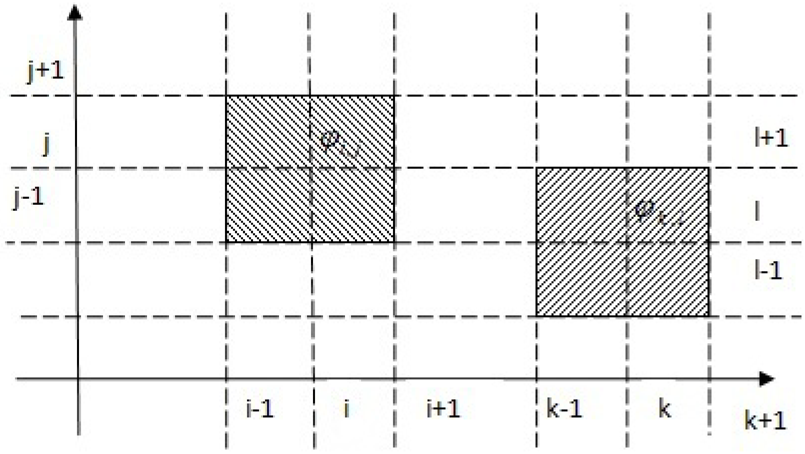



Рисунок **4.1**

Поэтому разностная схема будет иметь слагаемые $\tilde{u}_{i,j}$, $\tilde{u}_{i,j-1}$, $\tilde{u}_{i-1,j}$, $\tilde{u}_{i-1,j-1}$, $\tilde{u}_{i+1,j+1}$, $\tilde{u}_{i,j+1}$, $\tilde{u}_{i+1,j}$, $\tilde{u}_{i+1,j-1}$, $\tilde{u}_{i-1,j+1}$ с некоторыми коэффициентами, для нахождения которых рассмотрим несколько случаев

а) $k = i-1, l = j-1$. Найдем коэффициент перед слагаемым $\tilde{u}_{i-1,j-1}$. В этом случае

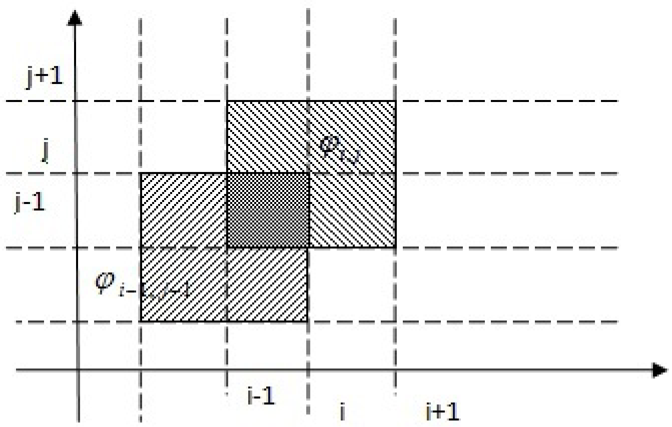



Рисунок **4.2**

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy= \tag{4.2}$$

$$=\iint\limits_{x_{i-1}y_{j-1}}^{x_iy_j}\left(\frac{\partial\varphi_{i-1,j-1}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i-1,j-1}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy= \tag{4.3}$$

$$=\iint\limits_{x_{i-1}y_{j-1}}^{x_iy_j}\left(\frac{1}{h^4}(y-y_{j-1})(y-y_j)+(x-x_{i-1})(x-x_i)\right)dxdy=-\frac{1}{3}. \tag{4.4}$$

Аналогично коэффициенты перед неизвестными $\tilde{u}_{i+1,j+1}$, $\tilde{u}_{i+1,j-1}$, $\tilde{u}_{i-1,j+1}$ равны $-\dfrac{1}{3}$.

б) $k = i + 1, l = j$. Найдем коэффициент перед $\tilde{u}_{i+1,j}$. В этом случае

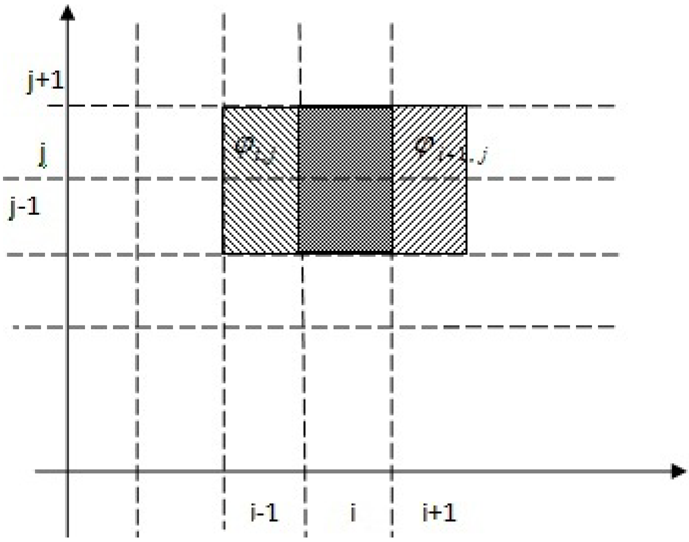



Рисунок **4.3**

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\frac{\partial\varphi_{i+1,j}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i+1,j}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy+ \tag{4.5}$$

$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial\varphi_{i+1,j}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i+1,j}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=-\frac{1}{3}. \tag{4.6}$$

Коэффициенты перед неизвестными $\tilde{u}_{i+1,j}, \tilde{u}_{i,j-1}, \tilde{u}_{i,j+1}$ равны $-\dfrac{1}{3}$.
в) $k = i, l = j$. Найдем коэффициент перед $\tilde{u}_{i,j}$. В этом случае

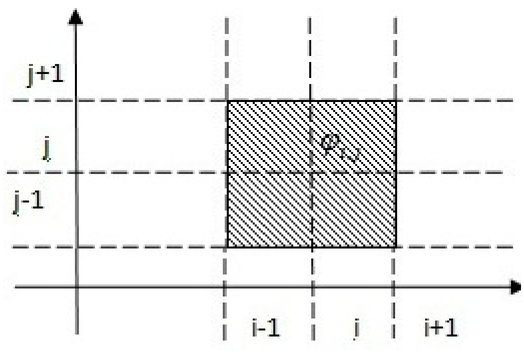



Рисунок **4.4**

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy= \tag{4.7}$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)\right)dxdy+$$
$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)\right)dxdy+$$
$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)\right)dxdy+$$
$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y}\right)\right)dxdy=\frac{8}{3}. \quad (4.8)$$

Получим разностную схему

$$\frac{8}{3}\tilde{u}_{i,j}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i-1,j-1}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i-1,j}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i-1,j+1}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i,j-1}-$$
$$-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i,j+1}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i+1,j-1}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i+1,j}-\frac{1}{3}\tilde{u}_{i+1,j+1}=-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy, \quad (4.9)$$

$$\tilde{u}_{i,0}=\tilde{u}_{0,j}=\tilde{u}_{i,m}=\tilde{u}_{m,j}=0, \quad (4.10)$$

где $1\le i,j\le m-1$.
Представим разностную схему в виде

$$3\tilde{u}_{i,j}-\frac{1}{3}\sum_{k=i-1,l=j-1}^{k=i+1,l=j+1}\tilde{u}_{k,l}=-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy \quad (4.11)$$
$$,\tilde{u}_{i,0}=\tilde{u}_{0,j}=\tilde{u}_{i,m}=\tilde{u}_{m,j}=0, \quad (4.12)$$

где $1\le i,j\le m-1$.

## 5. Применение метода Монте-Карло для вычисления кратных интегралов

Для вычисления интегралов в правой части выражения воспользуемся методом Монте-Карло. Требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy$. Рассмотрим случайную величину $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, равномерно распределенную на квадрате $[0,1]\times[0,1]$. Тогда функция $f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(\xi_1,\xi_2)$, где $1\le i,j\le m-1$ аналогично является случайной величиной, математическое ожидание которой выражается как $M=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)p(x,y)dxdy$, где $p(x,y)$ – плотность распределения случайной величины $\xi$, которая вычисляется на указанном квадрате как $\dfrac{c-d}{b-a} = 1$. Таким образом, исходный интеграл выражается как $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy = M$.

Математическое ожидание случайной величины $f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(\xi_1,\xi_2)$ можно оценить. Для этого смоделируем эту случайную величину и посчитаем выборочное среднее. Бросаем $N$ точек, равномерно распределенных на исходном интервале, для каждой точки $\xi_i = (\xi_1,\xi_2)$ вычислим $f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(\xi_1,\xi_2)$. Выборочное среднее вычислим как $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} f_{i,j}(\tilde{x},\tilde{y})\varphi_{i,j}(\tilde{x},\tilde{y})$, получим оценку интеграла

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_i,y_j)\varphi_{i,j}(x,y)dxdy = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{i,j}(\tilde{x},\tilde{y})\varphi_{i,j}(\tilde{x},\tilde{y}). \qquad (5.1)$$

## Список литературы


1. Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
2. Митчелл Р.,Уэйт В., *Метод конечных элеменов для уравнений с частными производными*, Мир, М., 1981.
3. Ferziger H.,Milovan Peric., *Numerische Strömungsmechanik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin., 2008.
4. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина*, Мир, М., 1988.


# Generation system of equations for the problem of steady oscillations by Galerkin method.

**© E. P. Tremasova[3],D. I. Boyarkin[4]**

**Abstract.** The Dirichlet problem for the Poisson equation of steady oscillations is considered. The system of basic functions is constructed, the Galerkin form for the corresponding differential operator is obtained. The system of equations is generated, the difference scheme is constructed.
**Key Words:** basis functions, Galerkin form, weak solution, Dirichlet problem.

[3] Magister of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; tremasovaep@gmail.ru.
[4] Docent of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; boyarkindi@gmail.ru.

УДК 517.95

# Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения

© Т. К. Юлдашев[1]

**Аннотация.** В данной работе доказываются теоремы об устойчивости по малым параметрам обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение, устойчивость решения, малые параметры, счетная система нелинейных интегральных уравнений.

## 1. Введение

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости [1].

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков [2]. Дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков необходимо решать и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения.

В области $D$ рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f\left(t,x,u\right)\in C\left(D\times\mathbb{R}\right)$, $\varphi_j(x)\in C^4(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=0$, $j=1,2$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\nu,\mu$ – малые параметры.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [3] - [8]).

В данной работе изучаются вопросы устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи (9)-(11). При этом применяется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (9)-(11) в виде ряда Фурье [9]

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, b_i(x), \tag{1.4}$$

где $b_i(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \lambda_i x,\ \lambda_i = \dfrac{i\pi}{l}$.

Общие вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи (9)-(11) рассматривались ранее в [10], [11].

Множество $\Big\{ a(t) = (a_i(t))\, | a_i(t) \in C\,[0,T]\,,\ i = 1,2,3,\ldots \Big\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)} = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_i(t)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(T)$ .

Для каждого $a(t) \in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) b_i(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_2(T) \to E_2(D)$ и $E_2(D) \subset L_2(D)$.

**Определение 1.1.** *Если функция* $u(t,x) \in E_2(D)$ *для любого* $F(t,x) \in W_2^{(2)}(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l \Big\{ u(t,y) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t,y) - \nu \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial y^2} F(t,y) - \mu \frac{\partial^5}{\partial t \partial y^4} F(t,y) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right] -$$

$$- f\left(t,y,u(t,y)\right) F(t,y) \Big\}\, dy dt =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[ \frac{\partial}{\partial t} F(t,y) - \nu \frac{\partial^3}{\partial t\, \partial y^2} F(t,y) + \mu \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right]_{t=0} dy -$$

$$- \int_0^l \varphi_2(y) \left[ F(t,y) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(t,y) \right]_{t=0} dy,$$

*то она называется обобщенным решением смешанной задачи* (9)-(11).

**Т е о р е м а 1.1.** *Пусть выполняются следующие условия:*
*1.* $\lambda_i^4\mu^2 - 4\lambda_i^2\nu - 4 < 0$ *;*
*2.* $\int\limits_0^T \|f(t,x,u)\|_{L_2(D_l)}\,dt \le \Delta < \infty$ *,*
*3.* $f(t,x,u) \in Lip\Big\{L(t,x)_{|u}\Big\},\ 0 < \int\limits_0^l \|L(t,y)\|_{L_2(D_l)}\,dy < \infty$ *;*
*4.* $\|W(t,\nu,\mu)\|_{B_2(T)} < \infty$ *.*

*Тогда смешанная задача* (9)-(11) *имеет единственное обобщенное решение в области* $D$ *и это решение можно представить в следующем виде:*

$$u(t,x,\nu,\mu) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big[W_i(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t\int\limits_0^l f(s,y,Qa(s,\nu,\mu))\,b_i(y)G_i(t,s,\nu,\mu)dyds\Big]b_i(x), \qquad (1.5)$$

$a_i(t,\nu,\mu)$ *определяется как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):*

$$a_i(t,\nu,\mu) = W_i(t,\nu,\mu) + \int\limits_0^t\int\limits_0^l f(s,y,Qa(s,\nu,\mu))\,G_i(t,s,\nu,\mu)b_i(y)dyds, \qquad (1.6)$$

*где*

$$W_i(t,\nu,\mu) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\times$$
$$\times\Big[\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2} + \frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Big(\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)\Big)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big],$$

$$G_i(t,s,\nu,\mu) = \frac{2\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2}\Big\}\,\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\dfrac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu) + \omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s\Big]},\ \omega_{0i}(\nu) = 1 + \lambda_i^2\nu,$$

$$\omega_{1i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)},\ \omega_{2i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu) - \lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)},\ \varphi_{ji} = \int\limits_0^l \varphi_j(y)b_i(y)dy,\ j = 1,2.$$

*Доказательство* этой теоремы приведено в [10]. Поэтому его здесь приводить не будем.

## 2. Основные результаты

Сначала изучаем устойчивость решения смешанной задачи (9)-(11) по первому малому параметру $\nu$.

**Т е о р е м а 2.1.** *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и*
*1)* $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{1i}|\Big[\dfrac{\omega_{1i}(\nu_1,\,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_1,\,\mu)} + \dfrac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \dfrac{\omega_{1i}(\nu_1,\,\mu)}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \dfrac{\lambda_i^6\mu}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)} + \dfrac{\omega_{1i}(\nu_2,\,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)}\cdot\dfrac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}\Big] < \infty$ *;*
*2)* $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{2i}|\Big[\dfrac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\,\mu)} + \dfrac{1}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}} + \dfrac{1}{\omega_{2i}(\nu_2,\,\mu)}\cdot\dfrac{\lambda_i^4\mu^2}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}\Big] < \infty$ *;*
*3)* $\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\dfrac{\lambda_i^6\mu}{\omega_{0i}(\nu_2)\tau_0^2} + \dfrac{\lambda_i^2}{\tau_0}\Big)\int\limits_0^T|f_i(u,\nu_1)|\,dt < \infty$ *, где* $f_i(u,\nu_1) =$

$$= \int\limits_0^l f\left(s, y, Qa(s, \nu_1, \mu)\right) b_i(y)dy\,, \quad \tau_0 = \inf_{[0;\,\nu]} |\omega_{2i}(\nu,\,\mu) + \omega_{1i}(\nu,\,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\,\mu)t|\;.$$

*Тогда для произвольных* $\nu_1, \nu_2 \in [0;\, \nu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t,x,\nu_1,\mu) - u(t,x,\nu_2,\mu)| \le A|\nu_1 - \nu_2|,\; 0 < A = const. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для разности $a(t,\nu_1,\mu) - a(t,\nu_2,\mu)$ из ССНИУ (1.6) имеем оценку

$$\|a(t,\nu_1,\mu) - a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)} \le \sum_{i=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \left|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}\Big\} - \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\Big\}\right| \times$$

$$\times \left|\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2} + \frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}\left(\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\,\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\right)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\Big\}\right| \Big\{|\varphi_{1i}| \cdot \left|\cos\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2} - \cos\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right| +$$

$$+ \left|\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)} - \frac{2}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\right| \cdot \left|\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\,\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\right| \cdot \left|\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}\right| +$$

$$+ \frac{2}{|\omega_{2i}(\nu_2,\mu)|}\Big[\frac{|\varphi_{1i}|}{2}\;|\omega_{1i}(\nu_1,\mu) - \omega_{1i}(\nu_2,\mu)| \cdot \left|\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}\right| +$$

$$+ \left|\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2} - \sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right| \cdot \left|\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2}\,\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\right|\Big]\Big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \left|G_i\Big(t,s,\nu_1,\mu\Big) - G_i\Big(t,s,\nu_2,\mu\Big)\right| |f\left(s,y,Qa(s,\nu_1,\mu)\right)|\,|b_i(y)|dyds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \left|G_i\Big(t,s,\nu_2,\mu\Big)\right| \cdot \left|f\Big(s,y,Qa(s,\nu_1,\mu)\Big) - \right.$$

$$\left. - f\Big(s,y,Qa(s,\nu_2,\mu)\Big)\right| \cdot \Big|b_i(y)\Big|dyds, \tag{2.2}$$

где

$$G_i(t,s,\nu_1,\mu) - G_i(t,s,\nu_2,\mu) = 2\left(\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\frac{t-s}{2}\Big\} - \exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\frac{t-s}{2}\Big\}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\dfrac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu_1)\Big[\omega_{2i}(\nu_1,\mu) + \omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s\Big]} + 2\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\frac{t-s}{2}\Big\} \times$$

$$\times\Big\{\left(\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t-s}{2} - \sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t-s}{2}\right)\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)\Big[\omega_{2i}(\nu_1,\mu) + \omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s\Big]} +$$

$$+ \sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t-s}{2}\Big[\left(\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)} - \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)}\right)\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu) + \omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s} + \frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu) + \omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s} - \frac{1}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu) + \omega_{1i}(\nu_2,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)s}\right)\Big]\Big\}.$$

Здесь мы воспользуемся следующими оценками:

$$\left|\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_1)}-\frac{1}{\omega_{0i}(\nu_2)}\right|\le\alpha_{1i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{1i}=\lambda_i^2; \tag{2.3}$$

$$|\omega_{1i}(\nu_1,\mu)-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)|\le\alpha_{2i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{2i}=\lambda_i^6\mu; \tag{2.4}$$

$$\left|\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}-\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\right|\le\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\Big]_\nu' d\nu\right|\le\ \alpha_{3i}\,|\nu_1-\nu_2|,\ \alpha_{3i}=\frac{1}{\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}; \tag{2.5}$$

$$\left|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_1,\mu)t\Big\}-\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu_2,\mu)t\Big\}\right|\le\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\Big]_\nu' d\nu\right|\le|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.6}$$

$$\left|\cos\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}-\cos\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right|\le\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big]_\nu' d\nu\right|\le\ \alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.7}$$

где $\alpha_{4i}=\dfrac{\lambda_i^4\mu^2T}{2\sqrt{4-\lambda_i^4\mu^2}}$;

$$\left|\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)\frac{t}{2}-\sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)\frac{t}{2}\right|\le\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big]_\nu' d\nu\right|\le\ \alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.8}$$

$$|\omega_{2i}(\nu_1,\mu)-\omega_{2i}(\nu_2,\mu)|\le\left|\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu)\Big]_\nu' d\nu\right|\le\frac{2}{T}\,\alpha_{4i}\,|\nu_1-\nu_2|; \tag{2.9}$$

$$\Big|\,\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)+\omega_{1i}(\nu_1,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_1,\mu)s}-$$
$$-\frac{1}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)+\omega_{1i}(\nu_2,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu_2,\mu)s}\Big|\le\alpha_{5i}\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.10}$$

где $\alpha_{5i}=\dfrac{T\alpha_{2i}+2\alpha_{4i}}{T\tau_0^2}$.

Тогда, в силу условий теоремы, с учетом оценок (2.3)-(2.10) из (2.2) имеем

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\le A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|+$$

$$+M_1\sum_{i=1}^\infty\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l L(s,y)\Big(\sum_{j=1}^\infty\Big|a_j(s,\nu_1,\mu)-a_j(s,\nu_2,\mu)\Big|\cdot|b_j(y)|\Big)\cdot|b_i(y)|dyds\le$$

$$\le A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|+M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\,\|a(s,\nu_1,\mu)-a(s,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\,ds, \tag{2.11}$$

где

$$A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)=\sum_{i=1}^\infty\Big\{|\varphi_{1i}|\Big[1+\frac{\omega_{1i}(\nu_1,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}+\alpha_{4i}+\alpha_{3i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu_1,\mu)}{2}+\frac{\alpha_{2i}}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}+$$

$$+\alpha_{4i}\frac{\omega_{1i}(\nu_2,\mu)}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\Big]+|\varphi_{2i}|\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu_1,\mu)}+\alpha_{3i}+\frac{2\alpha_{4i}}{\omega_{2i}(\nu_2,\mu)}\Big]\Big\}+$$

$$+\overline{M}_1\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l\Big|f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu_1,\,\mu)b_j(y)\Big)\Big|\cdot\Big|b_i(y)\Big|dyds,$$

$$\overline{M}_1=\left\|\frac{2+2\alpha_{4i}}{\omega_0(\nu_1)\tau_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{2\alpha_1}{\tau_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{2\alpha_{5i}}{\omega_0(\nu_2)}\right\|_{l_2}.$$

Применяя к (2.11) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\le A_1(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\,|\nu_1-\nu_2|, \tag{2.12}$$

где

$$A_1=A_0(\nu_1,\nu_2,\,\mu)\exp\left\{M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int_0^T\|L(t,x)\|_{L_2(D_l)}\,dt\right\}.$$

Учтем, что

$$|u(t,x,\nu_1,\mu)-u(t,x,\nu_2,\mu)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t,\nu_1,\mu)-a_i(t,\nu_2,\mu)|\cdot|b_i(x)|\le$$

$$\le\|a(t,\nu_1,\mu)-a(t,\nu_2,\mu)\|_{B_2(T)}\cdot\|b(x)\|_{B_2(l)}.$$

Тогда из (1.5) согласно (2.12) следует (2.1), если положим $A=A_1M_2$ .
Доказательство закончено.

Теперь будем изучать непрерывную зависимость решения смешанной задачи (9)-(11) по второму малому параметру $\mu$.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и*

*1)* $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{1i}|\Big[\frac{\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}+\frac{\lambda_i^6(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}+\frac{\lambda_i^2\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}+$
$+\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}+\frac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}\cdot\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]<\infty$, *где* $\rho_j=4-\lambda_i^4\mu_j^2, j=1,2$ ;

*2)* $\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_{2i}|\Big[\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}+\frac{\lambda_i^6\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}+\frac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}\cdot\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]<\infty$;

*3)* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)\overline{\tau}_0^2}\int_0^T\Big|f_i\Big(u,\mu_1\Big)\Big|dt<\infty$, *где* $f_i(u,\mu_1)=$
$=\int_0^l f\left(s,y,Qa(s,\nu,\mu_1)\right)b_i(y)dy$, $\overline{\tau}_0=\inf_{[0;\,\mu]}|\omega_{2i}(\nu,\,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\,\mu)t|$ .

*Тогда для* $\mu_1,\mu_2\in[0;\,\mu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)|\le B|\mu_1-\mu_2|,\ 0<B=const. \tag{2.13}$$

Доказательство. Используем следующие оценки:

$$|\omega_{1i}(\nu,\mu_1)-\omega_{1i}(\nu,\mu_2)|\le\beta_{1i}\,|\mu_1-\mu_2|,\ \beta_{1i}=\frac{\lambda_i^4}{\omega_{0i}(\nu)}; \tag{2.14}$$

$$\left|\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_1)}-\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\,\mu_2)}\right|\le\beta_{2i}\,|\mu_1-\mu_2|,\ \beta_{2i}=\frac{\lambda_i^6\omega_{0i}(\nu)(\mu_1+\mu_2)}{\rho_1\sqrt{\rho_2}+\rho_2\sqrt{\rho_1}}; \tag{2.15}$$

$$\Big|\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\,\mu_1)t\Big\}-\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\,\mu_2)t\Big\}\Big|\leq\left|\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\Big[\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)t\Big\}\Big]'_{\mu}d\mu\right|\leq|\mu_1-\mu_2|;\quad(2.16)$$

$$\left|\cos\omega_{2i}(\nu,\mu_1)\frac{t}{2}-\cos\omega_{2i}(\nu,\mu_2)\frac{t}{2}\right|\leq\frac{\lambda_i^2T}{2\omega_{0i}(\nu)}\left|\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\rho}{2\sqrt{\rho}}\right|\leq\beta_{3i}\,|\mu_1-\mu_2|,\qquad(2.17)$$

где $\beta_{3i}=\dfrac{\lambda_i^6T(\mu_1+\mu_2)}{2\omega_{0i}(\nu)(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})}$, $\rho=4-\lambda_i^4\mu^2$ ;

$$\left|\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_1)\frac{t}{2}-\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_2)\frac{t}{2}\right|\leq\beta_{3i}\,|\mu_1-\mu_2|;\qquad(2.18)$$

$$\Big|\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)+\omega_{1i}(\nu,\mu_1)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_1)s}-$$

$$-\frac{1}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)+\omega_{1i}(\nu,\mu_2)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu_2)s}\Big|\leq\beta_{4i}\,|\mu_1-\mu_2|,\qquad(2.19)$$

где $\beta_{4i}=\dfrac{T\beta_{1i}+2\beta_{3i}}{T\overline{\tau}_0^2}$.

В силу оценок (2.14)-(2.19), аналогично доказательства предыдущей теоремы имеем

$$\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\leq B_0(\nu,\mu_1,\,\mu_2)\,|\mu_1-\mu_2|+$$

$$+M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\,\|a(s,\nu,\mu_1)-a(s,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\,ds,\qquad(2.20)$$

где

$$B_0(\nu,\mu_1,\mu_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{|\varphi_{1i}|\Big[1+\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_1)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)}+\beta_{3i}+\beta_{2i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_1)}{2}+\frac{\beta_{1i}}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}+$$

$$+\beta_{3i}\,\frac{\omega_{1i}(\nu,\mu_2)}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]+|\varphi_{2i}|\Big[\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu_1)}+\beta_{2i}+\frac{2\beta_{3i}}{\omega_{2i}(\nu,\mu_2)}\Big]\Big\}+$$

$$+M_0\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big|f\Big(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j(s,\nu,\,\mu_1)b_j(y)\Big)\Big|\cdot\Big|b_i(y)\Big|dyds,$$

$$M_0=\left\|\frac{2+2\beta_3}{\omega_0(\nu)\overline{\tau}_0}\right\|_{l_2}+\left\|\frac{\beta_4}{\omega_0(\nu)}\right\|_{l_2}.$$

Применяя к (2.20) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\leq B_1(\nu,\mu_1,\mu_2)\,|\mu_1-\mu_2|,\qquad(2.21)$$

где

$$B_1=B_0(\nu,\mu_1,\,\mu_2)\exp\left\{M_1M_2^2l^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^T\|L(t,x)\|_{L_2(D_l)}\,dt\right\}.$$

С учетом

$$|u(t,x,\nu,\mu_1)-u(t,x,\nu,\mu_2)|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t,\nu,\mu_1)-a_i(t,\nu,\mu_2)|\cdot|b_i(x)|\leq$$

$$\leq \|a(t,\nu,\mu_1)-a(t,\nu,\mu_2)\|_{B_2(T)}\,\|b(x)\|_{B_2(l)}$$

из (2.21) получаем (2.13), если положим $B = B_1 M_2$ .
Доказательство закончено.

## 3. Следствие

**Следствие 3.1.** *Пусть выполняются условия теорем 2.1. и 2.2. Тогда для* $\nu_1,\nu_2 \in [0;\,\nu]$ , $\mu_1,\mu_2 \in [0;\,\mu]$ *справедлива оценка:*

$$|u(t,x,\nu_1,\mu_1)-u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq C\Big(|\nu_1-\nu_2|+|\mu_1-\mu_2|\Big),$$

*где* $C = max\{A;B\}$ .

Доказательство. Действительно, из (2.1) и (2.13) имеем

$$|u(t,x,\nu_1,\mu_1)-u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq |u(t,x,\nu_1,\mu_1)-u(t,x,\nu_2,\mu_1)|+$$

$$+|u(t,x,\nu_2,\mu_1)-u(t,x,\nu_2,\mu_2)| \leq A\,|\nu_1-\nu_2|+B\,|\mu_1-\mu_2| \leq C\Big(|\nu_1-\nu_2|+|\mu_1-\mu_2|\Big).$$

Доказательство закончено.

**Следствие 3.2.** *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда для* $\nu \in [0;\,\nu_0]$ , $\nu+h \in (0;\,\nu_0)$ , $h,\nu_0 = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu)-u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq A.$$

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 2.1. имеем

$$\left|\frac{u(t,x,\nu+h,\mu)-u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{a_i(t,\nu+h,\mu)-a_i(t,\nu,\mu)}{h}\right|\cdot|b_i(x)| \leq$$

$$\leq M_2\left\|\frac{a_i(t,\nu+h,\mu)-a_i(t,\nu,\mu)}{h}\right\|_{B_2(T)} \leq A_1 M_2\,\frac{|\nu+h-\nu|}{h} = A.$$

Доказательство закончено.

Аналогично можно доказать, что имеет место

**Следствие 3.3.** *Пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда для* $\mu \in [0;\,\mu_0]$ , $\mu+h \in (0;\,\mu_0)$ , $h,\mu_0 = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\nu,\mu+h)-u(t,x,\nu,\mu)}{h}\right| \leq B.$$

## Список литературы

1. Александров В. М., Коваленко Е. В., *Задачи механики смлошных сред со смешанными граничными условиями*, Наука, М., 1986, 336 с.

2. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

4. Нахушев А. М., “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81.

5. Похожаев С. И., “Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения”, *Труды МИ РАН*, **243** (2003), 257–288.

6. Гордезиани Д. Г., Авалашвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделир.*, **12**:1 (2000), 94–103.

7. Дмитриев В. Б., “Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения”, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, **42**:2 (2006), 15–27.

8. Пулькина Л. С., “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

9. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:2 (2012), 137–142.

10. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения пятого порядка”, *Тезисы докл. 4-й Российско-Армянского совещания по математической физике,комплексному анализу и смежным вопросам*, 2012, 88–91 с.

11. Юлдашев Т. К., “О слабой разрешимости смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:4 (2012), 91–94.


# On stability the solution by small parameters for nonlinear pseudohyperbolic equation of the fifth order

© **T. K. Yuldashev**[2]

**Abstract.** In this article it is proved the theorems about the stability the solutions by small parameters for nonlinear partial pseudohyperbolic differential equations of the fifth order.
**Key Words:** nonlinear equation, stability the solution, small parameters, countable system of nonlinear equations.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru.

# Математическая жизнь

## Вельмисов Петр Александрович (к шестидесятипятилетию со дня рождения)

Вельмисов Петр Александрович родился в 1948 году в селе Малое Перекопное Балаковского района Саратовской области. В 1966 году окончил с золотой медалью среднюю школу, а в 1971 году – с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета. В 1971 – 1974 гг. обучался в аспирантуре этого университета, по окончании которой в 1974 году защитил диссертацию кандидата физико-математических наук.

С 1974 по 1980 г. работал на кафедре «Теоретическая механика» Ульяновского политехнического института ассистентом, старшим преподавателем, затем доцентом. В 1980 – 1994 г.г. работал доцентом, заведующим кафедрой «Высшая математика», а с 1994 года по настоящее время является профессором, заведующим кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. В 2000г. получил ученую степень доктора физико-математических наук. Таким образом, Петр Александрович руководит кафедрой высшей математики вот уже 32 года.

Вельмисов П.А. является действительным членом (академиком) Российской Академии Естественных наук (РАЕН), регулярно участвует в Российских и международных конференциях по проблемам теории дифференциальных уравнений и их использовании в математическом моделировании реальных процессов. Он является автором (соавтором) около 600 публикаций, в том числе 9 монографий, 5 авторских свидетельств, 3 патента и более 40 учебных пособий. Также является членом GAMM – Европейского общества математиков и механиков, Средневолжского математического общества, референтом научных журналов «Mathematical Reviews» (США), «Zentralblatt fur Mathematic» (Германия). Петр Александрович - член научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), председатель Ульяновского регионального отделения данного совета, член Ученого Совета экономико-математического факультета УлГТУ, Ученого Совета УлГТУ, а также докторского диссертационного совета. Он занимается подготовкой кандидатов и докторов наук, подготовил шесть кандидатов физико-математических наук. Является ответственным редактором нескольких периодических сборников научных трудов.

Более 30 лет Петр Александрович проводит научную и организационную работу по развитию научной школы по математическому моделированию нелинейных систем и процессов и асимптотическим методам их исследования. Является основателем научного направления «Аэрогидроупругость» в г. Ульяновске, связанного с исследованием динамики и устойчивости деформируемых конструкций при аэрогидродинамическом воздействии.

Он также неоднократно являлся руководителем научных проектов по грантам и научно-техническим программам, получал гранты различных фондов и оргкомитетов для участия в зарубежных конференциях в качестве приглашенного лектора и члена оргкомитета (Польша, Болгария, Румыния, Дания, Германия).

Под руководством П.А. Вельмисова разработан и внедрен в УлГТУ комплекс организационных и научно-методических мероприятий, направленных на формирование математической культуры и повышения качества математического образования студентов. Подготовлены учебные пособия по высшей математике, в том числе для дистанционного обучения, базирующиеся на современных информационных и педагогических технологиях. Часть из них имеют гриф НМС и являются лауреатами различных конкурсов.

Награжден знаками Министерства образования «Победитель социалистического соревнования» и «Почетный работник высшего профессионального образования РФ», знаком «Изобретатель СССР», почетными грамотами губернатора Ульяновской области и мэра г. Ульяновска, ректора УлГТУ, медалями Российской Академии Естественных наук, Российской Академии Естествознания, Европейской научно-промышленной палаты. Удостоен почетных званий «Заслуженный работник образования Ульяновской области», «Лауреат премии Правительства РФ в области образования».

Необходимо особо отметить активную роль Вельмисова П.А. в организации научных школ и конференций, проводимых Средневолжским математическим обществом. Начиная с 1994 года он вместе с учениками является постоянным участником и членом организационных комитетов этих научных мероприятий, направляя усилия на консолидацию математиков и специалистов других областей, развитие отечественной науки.

Поздравляем Вельмисова Петра Александровича с 65-летием! Желаем ему крепкого здоровья, творческой активности и долголетия!

*Средневолжское математическое общество,*

*редколлегия Журнала СВМО*

# Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.*

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

**\input{voskresensky.tex}**

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

*Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду* **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

**\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}**

*Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду* **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

**\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}**

*Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду* **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

**\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв $\varphi$ и $\varepsilon$ необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул $\text{Г}_i$, $\textit{Д}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

**\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}**

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

**\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}**

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

**\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}**

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

**\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}**

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Внимание! Новые правила.** *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

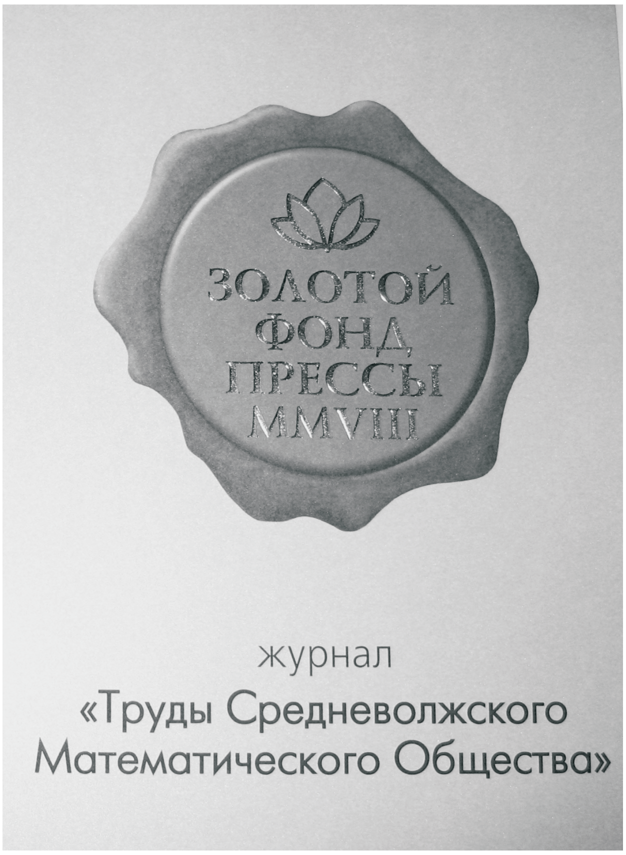
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

# Алфавитный указатель

**В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».**




**С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».**

*Уважаемые читатели и подписчики!*

*Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.*

*Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.*