ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 14, № 2

СВМО

2012

Средневолжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва

Журнал Средневолжского математического общества

Том 14, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Саранск

2012

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 14, № 2

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

Краткие сообщения

От редакции

Во втором номере 14-го тома публикуются работы ведущих учёных и молодых исследователей, являющихся участниками X конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 27 – 29 августа 2012 года). Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (грант № 12-01-06069 г). Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен теперь и в сети Internet на сайтах Math-Net.Ru и Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 51.7:532.546

Флюидодинамическая модель автоколебательных процессов

© Л.В. Клочкова[1], Ю.А. Повещенко[2], В.Ф. Тишкин[3]

Аннотация. Рассмотрены различные модели динамического поведения флюидов углеводородов в пористых средах, состоящих из разнородных геологических структур, в которых возникают автоколебательные процессы.

Ключевые слова: геолого–механические модели, динамические процессы, углеводородные флюиды, месторождения, математическое моделирование, автоколебательные процессы.

1. Введение

Данная статья, состоящая из двух, казалось бы, независимых частей, ставит своей целью показать, как решённые ранее задачи математического моделирования могут неожиданно помочь при решении задач совершенно в других областях изучения природы реальных явлений. В ряде работ [1] рассмотрены геомеханические модели флюидодинамических процессов с однофазным и двухфазным флюидом в надвигах и разломах, глубина которых превышает 7 км. На основе этих моделей исследуются условия и механизмы образования гигантских газовых и газокондесатных месторождений в структурах типа Астраханского свода. Характерной особенностью этих структур является малая проницаемость пород вне разломов и высокая трещиноватых зон. Кроме того, вся Прикаспийская впадина является гигантским углеводородным материнским телом, которое в состоянии снабдить органическим веществом все нефтеобразующие процессы в этом районе. Поэтому сбор и переработка органического вещества может происходить в глубоких разломах, которые одновременно являются и движущей силой флюидных процессов. В разломах возникают автоколебательные процессы, обусловленные смещениями бортов разломов. Эти колебания выжимают флюиды из разломов внутрь тела надвигов, внутри которых они двигаются по ослабленным зонам. Движение двухфазного флюида в пористой среде происходит в режиме реверсивных автоколебаний, обусловленных накоплением газа в некоторых слоистых пачках. Таким образом объясняется образование гигантских газовых месторождений типа Астраханского.

Первичным источником всех движений является горизонтальное напряжение в коре и литосфере, которое создаётся в результате глобальных геодинамических процессов, определяемых конвективными движениями в мантии. Далее глобальные процессы трансформируются в региональные движения.

2. Флюидодинамическая модель автоколебательных процессов

Возможно существование автоколебательных процессов, связанных с относительным смещением по бортам разлома и движением флюидов. По геофизическим данным, строе-

[1] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[2] Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; poveschenko@keldysh.ru.

[3] Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

ние Астраханского свода характеризуется наличием как раз таких разломов. Блоки земной коры в районе вала Карпинского находятся в поле действия тектонических сил, которые приводят к движениям по разломам и сейсмическим событиям. Флюиды, попадая в очаговую зону, могут играть роль спускового крючка, т. е. создают так называемый триггерный эффект.

Большинство фильтрационных моделей в разломах основывается на предположении о фильтрации углеводородов и воды сквозь упругий (или упруго–хрупкий) скелет, т.е. на модели упругой консолидации. Эти явления описываются параболическим уравнением пьезопроводности. Особенности наблюдаемого циклического процесса позволяют предположить, что изменения сейсмотектонического режима состоят из быстрых и медленных фаз. Особенности циклического процесса не укладываются в известные классы моделей и дилатантно–диффузионную концепцию. Проведён анализ математической модели подобного циклического процесса [2]. Фаза разжижения в разломе является медленной фазой вязкой консолидации, во время которой флюиды из очаговой зоны отжимаются в окружающий массив. В процессе этой фазы углеводороды и вода перетекают из магистральных трещин в более мелкие трещины и поры сформированного месторождения. Обратный процесс закачивания флюидов в разлом описывается быстрой дилатантной фазой. Для описания этого процесса была предложена следующая геолого–механическая модель. Два смежных блока земной коры, разделенных разломом, движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Границы блоков считаются плоскопараллельными, а трещиновато–пористая среда разлома однородной, обладающей некими особыми свойствами. Поэтому краевая задача, описывающая ситуацию в разломе, не стационарна и одномерна по пространственной координате. Для простоты считается, что разлом ориентирован вертикально. Система трещин в разломной зоне обладает ориентацией, параллельной плоскости разлома, поэтому среда в нем анизотропна. Однако если рассматривать одномерную по пространственной координате z (ось z направлена вертикально вверх) задачу, то вертикальными смещениями скелета можно пренебречь, поскольку основные смещения границ трещин будут происходить в направлении, перпендикулярном плоскости разлома. Поэтому одномерное приближение применимо. Для описания динамики скелета для фильтрационного потока это приближение также применимо, поскольку толщина погранслоя для него порядка горизонтального размера трещин и, следовательно, пренебрежимо мала по сравнению с толщиной разлома, которая, обычно имеет размер порядка первых километров.

Результаты экспериментальных исследований [3], а также исследования глубинного строения земной коры показывают, что одни и те же горные породы в пределах верхней коры ведут себя по–разному в зависимости от глубины. С глубиной, с увеличением всестороннего давления меняется угол между плоскостью разрушения и направлением максимального главного напряжения. Из этих экспериментов следует, что в консолидированных породах каталаз наступает на глубинах порядка 10–15 км. В ослабленных трещиноватых породах разломной зоны режим разрушения, соответствующий каталазу, наступает на меньших глубинах. По этой причине режим разрушения пород коры приводит либо к образованию листрических разломов, плавно переходящих в коровые волноводы, либо к глубинным разломам. В любом случае с глубиной увеличивается толщина разрушенной зоны.

Суть предлагаемой модели автоколебательных процессов в разломной зоне состоит в том, что существуют два конкурирующих режима движения флюидов — режимы компакции и дилатансии. В результате в разломе возникают две фазы цикла — дилатансионное нагружение и разгрузка, сопровождающаяся компакцией. Фаза дилатансии описывается уравнениями дилатансии Рейса. Фаза компакции описывается системой уравнений компакции, которая в безразмерной форме имеет вид [1], [3], [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f^{-l}\frac{\partial s}{\partial x}\right) = k^2 f^{-k} s - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x},$$

здесь s — скорость фильтрации, f — пористость, t — время, k^2 — безразмерный параметр, равный

$$k^2 = \frac{H^2(0)}{(H^*)^2}, \qquad H^* \equiv \sqrt{\frac{\tilde{\zeta}^*}{\tilde{\delta}^*}},$$

где $H(0)$ — начальный размер области определения $H(t)$, $\tilde{\zeta}^*$, $\tilde{\delta}^*$ — характерные масштабы вязкости и гидравлического сопротивления среды. Взаимодействие двух конкурирующих режимов проявляется в виде энергетически мощного автоколебательного процесса.

Уравнения дилатансии совместно с уравнениями компакции исследовались численно и аналитически [3], [4] при дополнительном условии периодичности. Решение представляет собой релаксационные автоколебания.

При нагружении разлома в нем возникает дилатансионный эффект, связанный с раскрытием трещин. В этот момент поровое давление в разломах падает, и флюиды устремляются вниз по простиранию разлома. Расчеты показывают, что при сдвиге в режиме дилатансии в разломе возникают такие отрицательные давления, которые создают мощный эффект нагнетания флюидов в него как сверху, так и снизу. Когда движение по разлому прекращается, трещины в разломе закрываются (по крайней мере, частично) и наступает фаза компакции. Фаза компакции является более длительной и соответствует уменьшению пористости. В это время поровое давление возрастает до геостатического и даже выше. При этом флюиды частично устремляются вверх по разлому и оперяющим его трещинам, а частично — устремляются по оперяющим разломам вглубь тела надвига. Под действием этого давления раскрываются трещины в ослабленных трещиноватых зонах. Поэтому отток флюидов происходит не равномерно по всему объему, а только по ослабленным зонам.

Период автоколебаний определяется самой длительной фазой — фазой компакции. В глубоких разломах эти колебания имеют периоды порядка сотен и тысяч лет. В процессе этих колебаний флюиды будут периодически поступать из разлома в окружающие массивы. Таким образом создаются условия для периодического "промывания флюидами подсолевой толщи Прикаспийской впадины вплоть до глубин примерно 10–15 км.

Поскольку сверху все эти структуры перекрыты соленосными отложениями, то создаются условия для образования углеводородных месторождений. При этом указанный колебательный флюидный режим будет играть определяющую роль. Если трещиноватые зоны (по которым из разлома двигаются флюиды) перекрываются сверху непроницаемыми антиклинальными флюидоупорами, то возможно образование месторождений нефти и газа. Если же трещиноватая зона выходит на поверхность, то флюиды рассеиваются в атмосфере. Особенность модели с однофазным флюидом состоит в том, что все колебательные процессы обусловлены автоколебаниями в самом разломе. За пределами разломов движение подчиняется параболическому уравнению пьезопроводности, и решение носит типичный диссипативный характер, свойственный уравнению диффузии. Канализация миграции флюидов (которая приводит к образованию месторождений) обуславливается только наличием ослабленных сильно проводящих зон, которые упираются в непроницаемые ловушки.

3. Различные гидродинамические режимы при двухфазном флюиде

Если в рассмотренной выше схеме учесть наличие двухфазного флюида (например, вода–газ), то помимо автоколебаний в разломе, возникнут еще автоколебательные процессы в массиве пород, вмещающем разломы. Эти колебания с одной стороны не требуют наличия особых проводящих каналов, а с другой стороны — они могут способствовать возникновению газовых месторождений–гигантов.

Одним из основных процессов, определяющих формирование залежей углеводородов, является многофазная фильтрация флюидов (гидротермальные воды, газоконденсат, газ, жидкие углеводороды). В математическом отношении система уравнений, описывающая такие процессы (в частности, с учётом гравитации), обладает смешанным гиперболически–параболическим типом. Рассмотренная в предыдущем разделе схема предполагает, что движущим механизмов флюидных процессов являются автоколебания в разломах. Они дают некий флюидный импульс, который затем распространяется в массиве вне разлома. Полагают, что флюид состоит из двух фаз — вода-газ. Все пространство вне разлома вначале заполнено водой. В режиме компакции в разломе из него подается газовый импульс во внешнее (по отношению к разлому) пространство, который распространяется в соответствии с законами двухфазной фильтрации.

Структура пористого пространства, в котором распространяется этот импульс примерно такова. Сверху находится соленосная покрышка, которая собственно и обеспечивает существование газового месторождения. В данной ситуации уже нет необходимости в наличии ослабленного проводящего канала от разлома к ловушкам. Концентрация газового импульса и его движение вверх обеспечивается сложной слоистой структурой трещиновато-пористой среды в подсолевом комплексе. Анализ расчётных баз данных для данного региона (Каракульско–Смушковская зона и Астраханского свода) позволяет выделить в подсолевом массиве слоистые комплексы, состоящие из малопроницаемых и сильно проницаемых слоев. Эти слои образуют своего рода флюидоупор и способны находиться в метастабильном состоянии. Они частично удерживают газ, но это состояние крайне неустойчиво. Газ все время сочится из этих слоистых комплексов вверх, а когда его накапливается слишком много, то он прорывается и устремляется вверх большими порциями. Объем прорыва зависит от размеров слоистой пачки и числа чередующихся в ней сильно- и малопроницаемых слоев.

Были проведены численные расчеты движения двухфазного флюида от его источника (разлома) в подсолевом пористом массиве. Расчеты показали, что существуют три режима движения флюидов: первичный пробой, реверсивный (колебательный) и диссипативный (диффузия в окружающее пространство). Диссипативный процесс полностью аналогичен процессам в системе с однофазным флюидом, которые рассмотрены в предыдущем разделе. Первичный пробой — это достижение газовой фазой верхних отложений осадочного бассейна, т.е. солевой покрышки. При этом происходит бифуркация решения, и вся динамика флюидов качественно меняется. После этого момента при определенных условиях возникает реверсивный режим, который характеризуется собственными колебаниями. Типичный период цикла в реверсивном режиме состоит в следующем: в начальной фазе происходит накачка флюидов в упомянутую выше слоистую структуру, сопровождающаяся повышением порового давления в этой зоне над гидростатическим давлением. Этот процесс происходит локально, равновесно (градиенты давлений и плотности гравитационных усилий в законе Дарси соизмеримы). Флюидная система перестраивается, накапливая свой потенциал (т.е. объем газа) к пробою сквозь слоистую структуру за счёт повышения давления и увеличения относительной проницаемости газа. Затем начинается связанная с процессом реверсии фаза пробоя, которая состоит в перестройке профиля давлений и всплытия газового пузыря. Всплытие сквозь флюидный упор происходит быстро. Необходимо отметить, что в этот период происходит резкое падение давления ниже примерно гидростатического и нарушение локального гидродинамического равновесия в законе Дарси. Собственно динамическая стадия цикла состоит в дальнейшем реверсивном проседании воды в образовавшуюся зону пониженного давления. В завершающей фазе происходит выравнивание (как правило, полное) профилей давлений и флюидной насыщенности, достигая примерно начальных величин цикла. Это и есть третья, асимптотическая стадия цикла.

Наблюдаемые расчётные периоды циклов — порядка 50 – 100 лет. При этом начальный пробой газом всей осадочной толщи происходит примерно за время порядка 300 – 400 лет. Собственные пространственные и временные масштабы реверсивной флюидной системы, так же как и достижение критической пробойной точки зависят от флюидного динамического режима всего региона. В частности, они зависят от интенсивности источников поступления углеводородов, генерирующих возможностей системы разломов и термодинамики региона. Придонный источник углеводородов для Каракульско-Смушковской надвиговой зоны на поперечной мощности слоя порядка 50 км задавался в виде ступенчатого по времени газофлюидного потока с амплитудой (общим объёмом газа) порядка $2.85 * 10^2 \text{м}^3/\text{сек}$.

Входные ёмкостные свойства и литологическая информация для расчетов бассейнового анализа (пористости, проницаемости), как правило, бывает недостаточна. Поэтому привлекаются данные бурения по регионам сходного геологического и геодинамического строения, а также данные геофизики. Проведены расчеты для Каракульско–Смушковской надвиговой зоны с помощью интерполяции данных в скважинах (Краснокудунская, Смушковская, Высоковская, Долгожданная, Воложковская, Астраханская, Заволжская).

Быстрые прорывы описывались в работе уравнениями изотермической фильтрации двухфазного флюида в среде с упругим скелетом [4]. Краевую задачу о быстрых прорывах решали при условиях, характерных для поднадвиговой Каракульско-Смушковской зоны и Астраханского свода. Эта зона аппроксимировалась некоторым телом с простой геометрией, на котором была задана сетка с достаточной степенью точности, отражающая структуру этого района и его литологические и фильтрационные свойства. Расчёты проводились с привлечением системы "Текон". Фильтрационно–гравитационное моделирование системы состоящей из легкого газа проникающего снизу и изначально заполнявшей поровый объем осадочного бассейна жидкой компоненты показало, что существуют три режима движения флюидов: первичный пробой, реверсивный (колебательный) и диссипативный (диффузия в окружающее пространство). Типичный период цикла в реверсивном режиме состоит в следующем. Происходит накачка флюидов в слоистую структуру бассейна, сопровождающаяся повышением в этой зоне порового давления над гидростатическим. Этот процесс происходит локально и гидродинамически равновесно (градиенты давлений и плотности гравитационных усилий в законе Дарси соизмеримы). Флюидная система перестраивается, накапливая свой потенциал (т.е. объем флюида) к пробою сквозь слоистую структуру за счёт повышения давления и увеличения относительной проницаемости. Затем начинается связанная с процессом реверсии фаза пробоя, которая состоит в перестройке профиля давлений и всплытия УВ флюида. Всплытие сквозь флюидный упор происходит быстро (десятки лет). Необходимо отметить, что в этот период происходит резкое падение давления ниже примерно гидростатического и нарушение локального гидродинамического равновесия в законе Дарси. Собственно динамическая стадия цикла состоит в дальнейшем реверсионном проседании воды в образовавшуюся зону пониженного давления и фазе релаксации.

Собственные пространственные и временные масштабы реверсивной флюидной системы, так же как и достижение критической пред пробойной точки зависят от флюидного динамического режима всего региона. В частности, они зависят от интенсивности источников поступления углеводородов, миграционных возможностей системы разломов и термодинамики региона. Наблюдаемые расчётные периоды циклов — порядка 50 – 100 лет вполне соответствуют циклу возможного притока углеводородов на выработанных "старых месторождениях особенно приуроченных к зонам разломов, что и наблюдают по целому ряду месторождений (см. рис 1.).

ГРАВИТАЦИОННО-РЕВЕРСИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

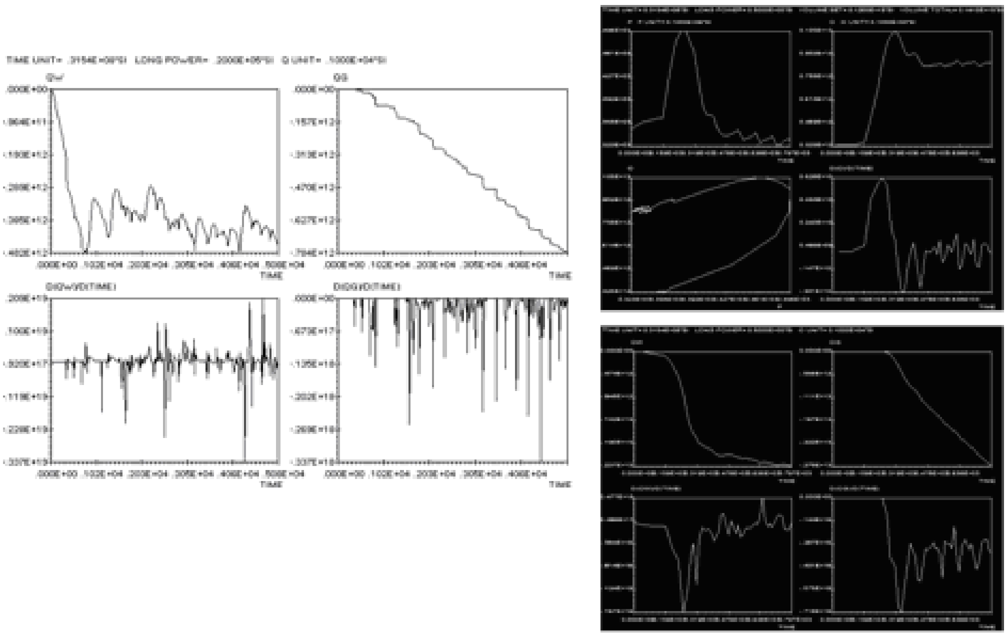


Рис.1

4. Заключение

Из приведённых рассуждений и вычислительных экспериментов математического моделирования напрашиваются аналогии с современными данными о спорадических выбросах метана, взрывах и пожарах в шахтах, приводящих к гибели людей.

Эти результаты могут быть также применены для интерпретации и анализа периодических выбросов газа, сопровождающихся пожарами, например, на торфяных залежах подмосковного региона.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00444-а.

Список литературы

1. Дмитриевский А. Н., Каракин А. В., Баланюк И. Е., “Математическое моделирование пластовых систем”, *Докл. РАН.*, **374**:4 (2000), 534–536.

2. Каракин А. В., Идармачев Ш. Г., Асманов А. А., “Фильтрационная модель сезонных изменений сейсмического режима района Чиркейского водохранилища”, *Физика Земли*, 1990, № 6, 20–27.

3. Николаевский В. Н., *Геомеханика и флюидодинамика*, Недра, М., 1996, 447 с.

4. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. и др., *Разностные схемы на нерегулярных сетках*, Минск, 1996, 273 с.

Dynamic fluid model of self-oscillatory processes

© L.V Klochkova[4], J.A. Poveschenko[5], V.F. Tishkin[6]

Abstract. Various models of dynamic hydro-carbonic fluids behavior in the porous environments consisting of diverse geological structures in which there are self–oscillatory processes are considered.

Key Words: geo-mechanical models, dynamic processes, hydro–carbonic fluids, fields, mathematical modeling, self–oscillatory processes.

[4] Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

[5] Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; poveschenko@keldysh.ru.

[6] Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 517.9

Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций с квадратичной нелинейностью

© **С.Н. Алексеенко** [1], **С.Н. Нагорных** [2], **Н.С. Алексеенко** [3]

Аннотация. Рассмотрены варианты условий на характеристики стоков и истоков плотности дислокаций в задаче по вычислению диффузионной ползучести. Получено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью в свободном члене. С применением метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости и нелокальной ограниченности решения и его первых производных.
Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, локальная разрешимость, метод дополнительного аргумента, ограниченность.

В работе [1] при вычислении крутильной жёсткости стержней на основе динамики дислокаций и теории упругого кручения [2] получено нестационарное нелинейное уравнение плотности переползающих дислокаций (ПД) вида:

$$\dot{\nu} + \alpha\nu(\nabla\nu)^2 + f(\nu) = 0, \tag{1.1}$$

где $(\nabla\nu)^2 = (\partial_{x_1}\nu)^2 + (\partial_{x_2}\nu)^2; f(\nu) = (a(\nu) - \varepsilon(\nu)bL^{-1})\nu,\ \ b, L, \alpha$ - постоянные величины; $\varepsilon(\nu), a(\nu)$ - функции, характеризующие полную деформацию и сток ПД. Искомая функция ν - плотность ПД, зависит от времени $t \in [0, T]$ и координат x_1, x_2, принадлежащих кругу $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$. Уравнение (1.1) описывает изменение плотности ПД с течением времени при заданном начальном значении

$$\nu(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2), \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \tag{1.2}$$

С помощью метода дополнительного аргумента задача Коши в [1] была сведена к системе интегральных уравнений с дополнительным аргументом. Сформулирована теорема о локальной разрешимости. В форме замечания указано, что полученная система интегральных уравнений может быть использована для нахождения численного решения в исходных координатах.

В настоящей работе рассматриваются приложения динамики дислокаций к температурно зависимым явлениям таким как диффузионная ползучесть. В соответствии с феноменологической моделью [3] кинетики плотности скользящих дислокаций (СД) допустим, что полная деформация среды $\varepsilon(\nu)$ определяется зависимостью вида

$$\frac{\varepsilon b}{L} = \frac{Gb}{a_\delta + b\nu}, \tag{1.3}$$

где a_δ - коэффициент линейного стока СД, G - источник плотности СД (в единицу времени), b - коэффициент столкновений СД и ПД в единицу времени, превращающий СД в ПД.

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Старший инженер по разработке программного обеспечения, ЗАО «Интел А/О», филиал в Нижнем Новгороде, г. Нижний Новгород; nik-alekseenko@yandex.ru

Примем, что $a_\delta \gg b$ или $\nu \ll a_\delta b^{-1}$ в (1.3). Функцию $a(\nu)$, характеризующую сток ПД на порах, границах зерен или иных структурных особенностях кристаллов, будем считать принимающей постоянное значение $a(\nu) = a_0 = const.$

Коэффициент α из уравнения (1.1) в работе [1] имеет вид:

$$\alpha = \frac{2\mu\tau^2 b}{\sigma(\nu)L}, \tag{1.4}$$

где μ - модуль сдвига; $\tau = \frac{d\varphi}{dz}, \varphi$ -угол кручения стержня длинной dz и полной длинной L; σ - компонента напряжения, действующая на скалярную плотность дислокаций.

Определим функцию $\sigma(\nu)$ из сопоставления скорости диффузионной ползучести при растяжении [4]

$$\dot{\varepsilon} = F\sigma \tag{1.5}$$

с производной по времени от ε, определяемой посредством (1.3).

В равенстве (1.5)

$$F = \frac{2Dc^3}{d^2kT},$$

где D - коэффициент диффузии, c - период решётки, d - размер зерна, k - постоянная Больцмана, T - температура.

В однородном случае, раскладывая в ряды нелинейные члены и ограничиваясь первым порядком, получим приближенное равенство

$$\dot{\varepsilon} \cong \frac{GbL}{a_\delta^2}(a_0 - \frac{Gb}{a_\delta})\nu. \tag{1.6}$$

В выражении $a_0 - \frac{Gb}{a_\delta}$ вычитаемое является относительным источником ПД, которое при малых G даёт $\dot{\varepsilon} > 0$, а при больших G даёт $\dot{\varepsilon} < 0$. Этот эффект, возникающий из конкуренции внешнего напряжения и поверхностного натяжения, рассмотрен в [4]. В нашей интерпретации предполагается, что $bGa_\delta^{-1} - a_0 > 0$. Напряжение растяжения или сжатия $\sigma(\nu)$ определяется из (1.5) и (1.6) формулой

$$\sigma(\nu) = \frac{GbL}{F\,a_\delta^2}(a_0 - \frac{Gb}{a_\delta})\nu.$$

Подставив $\sigma(\nu)$ в (1.4), получим

$$\alpha = \frac{2\mu\tau^2 F a_\delta^2}{GL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})\nu}.$$

Обозначив

$$\delta = \frac{2\mu\tau^2 F a_\delta^2}{GL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})} = \frac{4\mu\tau^2 Dc^3 a_\delta^2}{d^2kGL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})T}$$

и подставив $a(\nu) = a_0$,

$$\frac{\varepsilon b}{L} = \frac{Gb}{a_\delta + b\nu} \cong \frac{Gb}{a_\delta}\left(1 - \frac{b\nu}{a_\delta}\right)$$

в (1.1), получим, что в сформулированных условиях уравнение (1.1) примет вид:

$$\dot{\nu} + \delta(\nabla\nu)^2 - A\nu + B\nu = 0, \tag{1.7}$$

где $A = bGa_\delta^{-1} - a_0, \quad B = Gb^2 a_\delta^{-2}$ являются постоянными положительными величинами.

Сделаем ещё одно упрощающее предположение. При изучении поведения решения задачи (1.1)-(1.2) отдельные исследования необходимы, чтобы определить условия, при которых решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1) не выходят из круга $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$. В данной работе этого аспекта задачи касаться не будем и примем, что $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}^2$ - это вся двумерная плоскость. Так что начальное условие (1.2) примет вид:

$$\nu(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.8}$$

По своему физическому смыслу функция $\nu(t, x_1, x_2)$ является величиной положительной, так что в качестве исходного условия примем, что

$$\varphi_0(x_1, x_2) > 0.$$

Так же, как в [1], применим для исследования разрешимости задачи (1.7)-(1.8) метод дополнительного аргумента. В соответствии с изложенной в [1] схемой вначале преобразуем задачу (1.7)-(1.8) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.7) по x_1 и x_2 и введя новые неизвестные функции $p_1(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1}\nu(t, x_1, x_2), p_2(t, x_1, x_2) = \partial_{x_2}\nu(t, x_1, x_2)$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\right) = F_i(t, \nu, p_1, p_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.9}$$

где $F_i(t, \nu, p_1, p_2) = -(2B\nu - A)p_i$.

Из (1.7) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial \nu}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\right) = F_0(t, \nu, p_1, p_2), \tag{1.10}$$

где $F_0(t, \nu, p_1, p_2) = -B\nu^2 + A\nu + \delta(p_1^2 + p_2^2)$. Из (1.8) естественным образом следуют начальные условия для p_1 и p_2:

$$p_i(0, x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.11}$$

где $\varphi_i(x_1, x_2) = \partial_{x_i}\varphi_0(x_1, x_2)$.

Составим для задачи (1.8) - (1.11), расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x_1, x_2)}{ds} = 2\delta w_1(s, t, x_1, x_2), \qquad \eta_1(t, t, x_1, x_2) = x_1,$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x_1, x_2)}{ds} = 2\delta w_2(s, t, x_1, x_2), \qquad \eta_2(t, t, x_1, x_2) = x_2,$$

$$\frac{dw_i(s, t, x_1, x_2)}{ds} = F_i(s, w_0, w_1, w_2), \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.12}$$

$$w_i(0, t, x_1, x_2) = \varphi_i(\eta_1(0, t, x_1, x_2), \eta_2(0, t, x_1, x_2)), \quad (i = 0, 1, 2). \tag{1.13}$$

Так как в правую часть (1.12) функции $\eta_i, \quad i=1,2,$ явным образом не входят, то мы приходим к системе трех интегральных уравнений от трех неизвестных функций:

$$w_i(s,t,x_1,x_2) = \varphi_i(x_1 - 2\delta \int\limits_0^t w_1(\tau,t,x_1,x_2)d\tau, x_2 - 2\delta \int\limits_0^t w_2(\tau,t,x_1,x_2)d\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^s F_i(\tau, w_o(\tau,t,x_1,x_2), w_1(\tau,t,x_1,x_2), w_2(\tau,t,x_1,x_2))d\tau, \qquad (1.14)$$

$$(i = 0,1,2).$$

Локальное существование непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14) доказывается с помощью метода последовательных приближений. При этом промежуток разрешимости $0 < t \leq T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.7)-(1.8). Возможность определения границ области разрешимости рассматриваемой задачи в исходных координатах является одним из преимуществ метода дополнительного аргумента. Функции $p_i(t,x_1,x_2) = w_i(t,t,x_1,x_2), \quad i=1,2, \quad \nu(t,x_1,x_2) = w_0(t,t,x_1,x_2)$ дадут решение задачи (1.8) - (1.11), а функция $\nu(t,x_1,x_2)$ будет решением задачи (1.7) - (1.8). Сформулируем соответствующую теорему.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда существует такое число* $\Upsilon > 0$, *что при* $0 < t < \Upsilon$ *задача Коши* (1.7) - (1.8) *имеет решение* $\nu(t,x_1,x_2) \in \overline{\mathbb{C}}^{1,2}([0,\Upsilon] \times \mathbb{R}^2)$, *которое определяется из решения системы интегральных уравнений* (1.14) *в виде* $\nu(t,x_1,x_2) = w_0(t,t,x_1,x_2)$.

З а м е ч а н и е 1.1. *Система интегральных уравнений* (1.14) *может быть использована для нахождения численного решения задачи* (1.7),(1.8) *в исходных координатах.*

Система интегральных уравнений (1.14) выводится из задачи (1.8) - (1.11) с помощью непосредственного интегрирования соответствующих уравнений. Однако, детальное исследование свойств решений задачи (1.8) - (1.11) даёт возможность указать условия, при которых решение исходной задачи будет обладать теми или иными свойствами.

В работе [5] подобные исследования позволили определить условия, при которых уравнение вида $\partial_t v + v\partial_x v = f(t,x,v)$ имеет решение на заданном промежутке изменения t, а в работе [6] определить условия, при которых стационарное уравнение $(\nabla v)^2 = f(x_1,x_2,v)$ имеет нелокальное решение в заданной области, определяемой физическими характеристиками задачи.

Определим здесь условия, при которых на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11) функции $w_i, \ i=0,1,2,$ а значит и функции ν, p_1, p_2, будут ограничены величинами, не зависящими от промежутка изменения t.

Из (1.12)-(1.13) при $i=1,2$ будем иметь

$$w_i(s,t,x_1,x_2) = \varphi_i(\eta_1,\eta_2) exp\left[-\int_0^s (2Bw_0 - A)d\tau\right]. \qquad (1.15)$$

Следовательно, при $A \leq 2Bw_0$ функции $|w_i|, \ i=1,2,$ будут ограничены величинами $|\varphi_i|, i=1,2,$ если $|\varphi_i|$ ограничены, что мы и предполагаем в условии $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$.

Для w_0 у нас имеется задача Коши

$$\frac{dw_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -Bw_0^2 + Aw_0 + \delta(w_1^2 + w_2^2), \qquad (1.16)$$

$$w_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.17}$$

Так как неравенство $A \le 2Bw_0$ требует для w_0 оценки снизу, составим для (1.16) минорантное уравнение

$$\frac{d\check{w}_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -B\check{w}_0^2 + A\check{w}_0 \tag{1.18}$$

с тем же самым начальным условием

$$\check{w}_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.19}$$

Задача Коши (1.18)-(1.19) решается в явном виде

$$\check{w}_0(s,t,x_1,x_2) = \frac{A\varphi_0(\eta_1,\eta_2)}{B\varphi_0(\eta_1,\eta_2) - (B\varphi_0(\eta_1,\eta_2) - A)exp[-As]}. \tag{1.20}$$

Так как $B\varphi_0 - A < B\varphi_0$ и с увеличением s значение $(B\varphi_0 - A)exp[-As]$ будет только уменьшаться (или не увеличиваться), то знаменатель в (1.20) в нуль не обращается и

$$\check{w}_0 \ge \frac{A\varphi_0}{B\varphi_0 - B\varphi_0 + A} = \varphi_0.$$

Следовательно $w_0 \ge \check{w}_0 \ge \varphi_0$.

Таким образом, при условии

$$\varphi_0 \ge \frac{A}{2B} \quad \text{для всех}\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.21}$$

неравенство $A \le 2Bw_0$ будет справедливо на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11).

При выполнении этого неравенства из (1.15) вытекает априорная оценка

$$|w_i(s,t,x_1,x_2)| \le N_1, \qquad i = 1,2, \tag{1.22}$$

где $N_1 = max\{\sup\limits_{\mathbb{R}^2}|\varphi_1|, \sup\limits_{\mathbb{R}^2}|\varphi_2|\}$.

Теперь из выведем оценку сверху для w_0. С этой целью построим для (1.16) мажорантное уравнение

$$\frac{d\hat{w}_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -B\hat{w}_0^2 + A\hat{w}_0 + 2\delta N_1^2 \tag{1.23}$$

с тем же самым начальным условием

$$\hat{w}_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.24}$$

Правая часть (1.23) может быть представлена в виде

$$-B\hat{w}_0^2 + A\hat{w}_0 + 2\delta N_1^2 = -\,B(\hat{w}_0 - \hat{w}_{01})(\hat{w}_0 - \hat{w}_{02}),$$

где $\hat{w}_{01}$ и $\hat{w}_{02}$ корни уравнения $B\hat{w}_0^2 - A\hat{w}_0 - 2\delta N_1^2 = 0$ или

$$\hat{w}_{01} = \frac{A - \sqrt{A^2 + 8B\delta N_1^2}}{2B}, \qquad \hat{w}_{02} = \frac{A + \sqrt{A^2 + 8B\delta N_1^2}}{2B}.$$

Здесь меньший корень $\hat{w}_{01} < 0$, а $\varphi_0(x_1,x_2) > 0$. Как показано в [5], [6] (в чём, впрочем, можно убедиться из явного вида решения задачи Коши (1.16) - (1.17)) при $\varphi_0(x_1,x_2) > \hat{w}_{01}$.

будет выполняться неравенство $\hat{w}_0 \leq N_2$, где $N_2 = max\{\hat{w}_{02}, \sup_{\mathbb{R}^2} \varphi_0\}$. Следовательно будет справедлива оценка $w_0 \leq \hat{w}_0 \leq N_2$.

Таким образом, для w_0 имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{A}{2B} \leq w_0 \leq N_2 \tag{1.25}$$

на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11).

Оценки (1.22) и (1.25) выполняются при всех $0 < s \leq t$, а значит будут справедливы и для функций $p_i(t, x_1, x_2) = w_i(t, t, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, $\nu(t, x_1, x_2) = w_0(t, t, x_1, x_2)$, удовлетворяющих задаче Коши (1.8) - (1.11). В итоге приходим к следующей лемме.

Л е м м а 1.1. *Пусть* $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$ *и выполнено условие* (1.21). *Тогда на любом промежутке существования решения задачи Коши* (1.8) - (1.11) *будут справедливы оценки*

$$\frac{A}{2B} \leq \nu \leq N_2, \qquad |p_i| \leq N_1, \quad i = 1, 2. \tag{1.26}$$

З а м е ч а н и е 1.2. *Оценок* (1.26) *недостаточно для обоснования существования нелокального решения задачи* (1.7) - (1.8) *на любом заданном промежутке* $[0, \Upsilon]$. *Нужны ещё оценки для вторых производных. Их вывод, как видно на примере статьи* [6]*, требует достаточно длинных выкладок. Поэтому в данной работе мы ограничились изложением первого этапа в поисках условий нелокальной разрешимости. Хотя оценки вида* (1.26) *имеют и определённое значение сами по себе, т.к. характеризуют качественные свойства решений.*

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., "Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций", *Журнал Средневолжского математического общества*, **12**:1 (2010), 41 – 45.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука, М., 1987.

3. Крупкин П. Л., Куров И. Е., Нагорных С. Н., Цыванюк К. И., "Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении", *ФММ*, **66**:5 (1988), 978–984.

4. *Физическое металловедение под редакцией Р.Канта*, 3-е издание, Мир, М., 1968.

5. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., "Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени", *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.

6. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., "Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.", *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

The nonstationary dissipative first-order partial differential equation of the dislocation density with a quadratic non-linearity

© S.N. Alekseenko[4], S.N. Nagornykh[5], N. S. Alekseenko[6]

Abstract. Variants of hypotheses on characteristics of sinks and sources of the dislocation density in the problem of calculating the diffusion creep are considered. A first-order partial differential equation with a quadratic non-linearity in the constant term is obtained. Conditions of the local solvability and non-local boundedness of the solution and its first derivatives are determined with using the method of an additional argument.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order equation, local solvability, method of an additional argument, boundedness.

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The senior software developer, Intel, Nizhniy Novgorod; nik-alekseenko@yandex.ru

УДК 539.3: 533.5, 517.9

Математическое моделирование систем динамического контроля за изменением давления

© **П.А. Вельмисов,[1]Ю.В. Покладова,[2]Е.С. Серебрянникова[3]**

Аннотация. Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, составной частью которого является упругий элемент. Датчик предназначен для определения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), закон изменения которого считается заданным. Получены дифференциальные уравнения, описывающие колебания упругого элемента, и на их основе проведен численный эксперимент по исследованию его динамики.

Ключевые слова: трубопровод, датчик давления, деформация, упругий элемент, интегро-дифференциальные уравнения, динамика.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (ГК 14.740.12.0837).

1. Введение

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию высоких температур и повышенных виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на корпусе двигателя принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на него температур и виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Причем во многих реальных случаях (например, при взлете и посадке аппарата) воздействие имеет нестационарный характер. В связи с вышеизложенным, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод - датчик давления». В такой системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод - датчик давления» рассматривались в [1] – [8]. Исследовались как линейные модели (движение рабочей среды, а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями), так и нелинейные (динамика элемента описывается нелинейными уравнениями). В данной статье предложена новая нелинейная модель системы «трубопровод - датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика.

[1] Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

[2] Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

[3] Старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

2. Линейные модели системы «трубопровод - датчик давления»

Рассматриваются плоские модели механической системы «трубопровод - датчик давления» для трубопровода конечной длины (рис.2.1,2.2) и бесконечно длинного трубопровода (рис.2.3,2.4) с датчиком, закрепленным на торцевой и на боковой стенках, а также бесконечно длинного трубопровода с датчиком, расположенным на стенке полости трубопровода (рис.2.5).

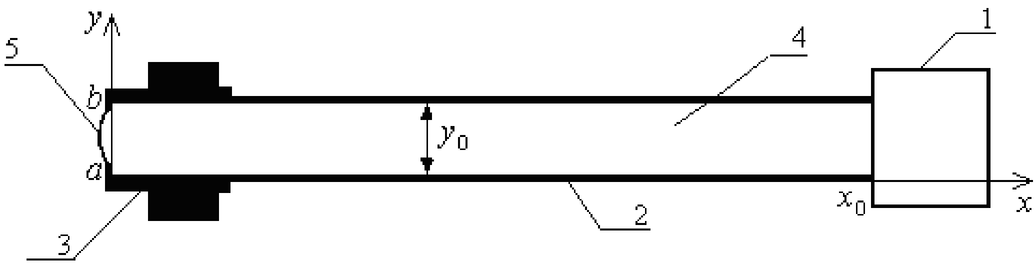


Рисунок **2.1**

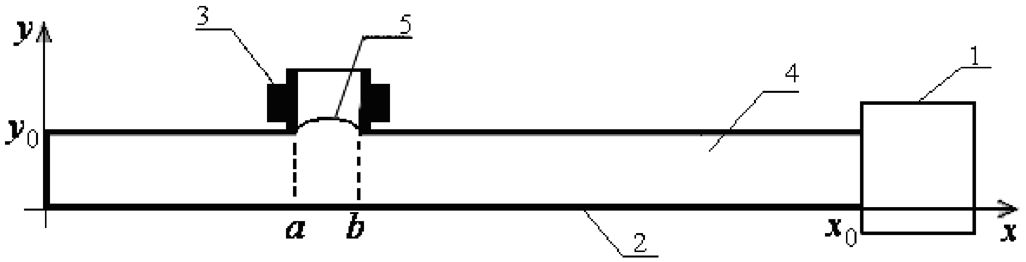


Рисунок **2.2**

На рис.2.1, 2.2 изображена схема системы для трубопровода конечной длины с упругим элементом на торцевой (2.1) и боковой (2.2) стенках.

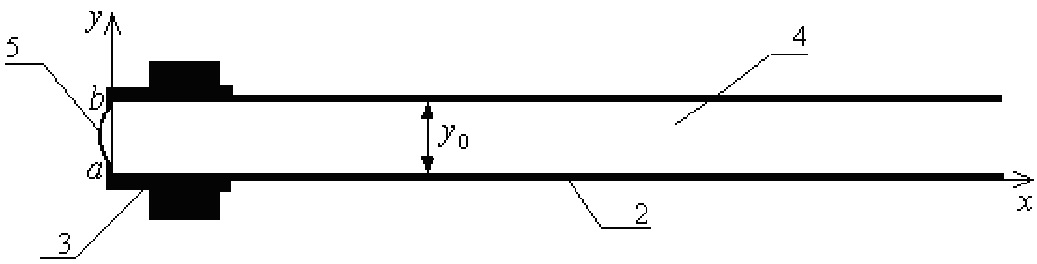


Рисунок **2.3**

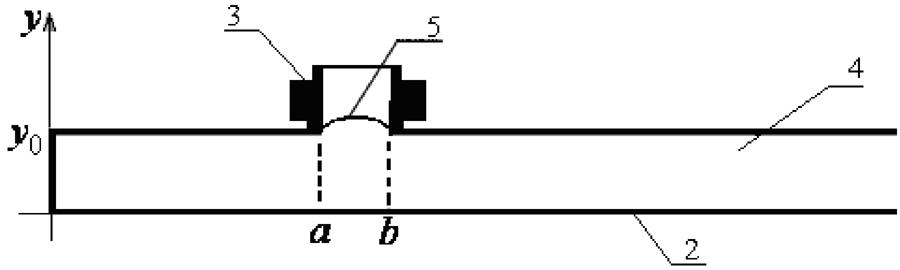


Рисунок **2.4**

На рис.2.3, 2.4 представлена схема системы для бесконечно длинного трубопровода с упругим элементом на торцевой (рис. 2.3) и боковой (рис. 2.4) стенках.

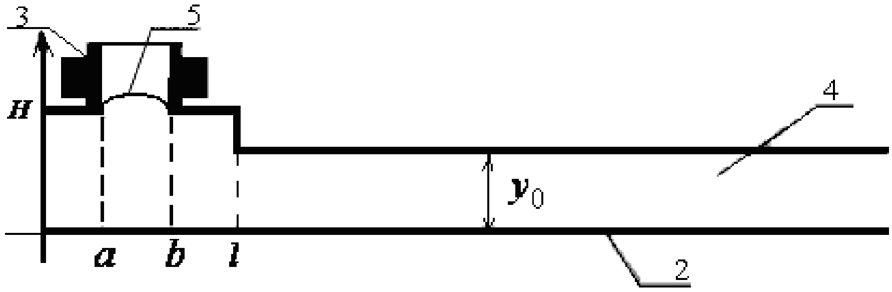


Рисунок **2.5**

Для модели, геометрическая схема которой изображена на рис.2.5, датчик расположен на стенке полости бесконечно длинного трубопровода.

На рис. 2.1-2.5: 1 - двигатель, 2 - трубопровод, 3 - датчик, 4 - рабочая среда, 5 - пластина (упругий элемент датчика).

Рассмотрим задачу о динамике упругого элемента (упругой пластины) датчика давления рабочей среды, расположенного на торцевой стенке трубопровода конечной длины (рис.2.1).

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}; \tag{2.1}$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \tag{2.2}$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0; \tag{2.3}$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0); \tag{2.4}$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0); \tag{2.5}$$

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' =$$
$$= P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \tag{2.6}$$

Здесь (2.1) - уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2.2)-(2.4) - условия непротекания; условие (2.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (2.6) - уравнение динамики элемента; $\varphi(x, y, t)$ - потенциал скорости среды; $w(y, t)$ - прогиб упругого элемента; x_0, y_0 - продольный и поперечный размеры трубопровода; a, b - координаты концов упругого элемента; $\tilde{P}$ - давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя; ρ - плотность среды; M - погонная масса; D - изгибная жесткость; N - сжимающее (растягивающее) усилие; α, β - коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; δ - коэффициент, учитывающий инерцию вращения; точка и штрих, также как и индексы t и y снизу, обозначают частные производные по t и y соответственно; $P_*(y,t)$ - закон распределения давления среды в сечении $x = x_0$ (на выходе из двигателя); $P_0(y,t)$ - распределенная внешняя нагрузка, действующая на элемент.

Математическая модель (2.1)-(2.6) рассматривалась в [1] – [5]. На основе метода Фурье задача сводилась к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение, связывающее закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из двигателя) и функцию прогиба упругого элемента датчика давления имеет вид:

$$L(w) = P_0(y,t) - \frac{\rho x_0}{y_0}\int\limits_a^b \ddot{w}(y,t)dy - \frac{1}{y_0}\int\limits_0^{y_0} P_*(y,t)dy -$$

$$-\frac{2\rho}{y_0}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(\lambda_s y)}{ch(\lambda_s x_0)}\left[\int\limits_0^{y_0}\frac{P_*(y,t)}{\rho}\cos(\lambda_s y)dy + \frac{sh(\lambda_s x_0)}{\lambda_s}\int\limits_a^b \ddot{w}(y,t)\cos(\lambda_s y)dy\right], \tag{2.7}$$

где оператор $L(w)$ определяется, согласно (2.6), выражением

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}''. \tag{2.8}$$

В случае бесконечно длинного трубопровода (рис.2.3-2.5) на основе методов теории функций комплексного переменного (с помощью интеграла Кристофеля-Шварца, формул Шварца и Сохоцкого) получено уравнение, связывающее закон изменения давления $P(t)$ на входе в трубопровод и деформацию w упругого элемента датчика. Например, для модели, изображенной на рис.2.4, имеем:

$$L(w) = P_*(t) - P_0(x,t) + \frac{\rho}{\pi}\int\limits_a^b \ddot{w}(s,t)\ln\left|ch\frac{\pi s}{y_0} - ch\frac{\pi x}{y_0}\right| ds, \tag{2.9}$$

а для модели, изображенной на рис.2.5 -

$$L(w) = P(t) - P_0(x,t) + \frac{\rho}{\pi}\int\limits_a^b \ddot{w}(\tau,t)\ln\left|\frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)}\right| d\tau, \quad x \in (a,b), \tag{2.10}$$

где $\xi(x)$ - функция, обратная к функции $x(\xi) = C_0\int\limits_0^{\xi}\sqrt{\frac{m-s}{s(1-s)}}\frac{ds}{n-s}$, $\xi \in [0,1]$. Концы интервала (α, β) определяются из условий: $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Параметры C_0, m, n выражаются через параметры l, y_0, H [6].

3. Нелинейные модели системы «трубопровод - датчик давления»

Постановка задачи (2.1)-(2.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика, описываются линейными уравнениями.

Авторами была предложена ранее в [7] также нелинейная модель, которая определяется приведенными выше уравнениями (2.1)-(2.6), при этом в уравнении (2.6), описывающем динамику пластины, дифференциальный оператор $L(w)$ заменяется следующим:

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + \left(\frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}\right)'' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}''. \qquad (3.1)$$

В предположении, что w' мало, производилась замена $\frac{1}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}$ на $\left[1 - \frac{3}{2}(w')^2\right]$. В результате выражение для $L(w)$ принимало вид

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' - \frac{3}{2}Dw''''(w')^2 - 9Dw'''w''' - 3D(w'')^3 + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}''. \quad (3.2)$$

В данной статье предлагается новая нелинейная модель системы «трубопровод - датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика. Уравнение (2.6), описывающее динамику пластины, заменяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} -EF\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]' + M\ddot{u} + \alpha_*\dot{u}'' = 0, \\ -EF\left[w'(u' + \frac{1}{2}(w')^2)\right]' + \left(\frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}\right)'' + M\ddot{w} + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w} + Nw'' = \\ \\ = P_0(y,t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0,y,t), y \in (a,b). \end{cases} \qquad (3.3)$$

Правая часть второго уравнения системы (3.3) имеет такой же вид, как и правые части уравнений (2.7), (2.9), (2.10) в зависимости от выбранной модели. Здесь $u(y,t), w(y,t)$ - продольная и поперечная деформации упругого элемента в направлении осей x и y соответственно; E-модуль упругости; F-площадь поперечного сечения. В предположении, что w' мало, производилась замена $\frac{1}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}$ на $\left[1 - \frac{3}{2}(w')^2\right]$.

4. Решение уравнения для деформации

Для линейных и нелинейных моделей, геометрические схемы которых изображены на рис.2.1-2.5, решение уравнения для деформации строится с помощью метода Галеркина.

Для линейной математической модели (2.1)-(2.6) и нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.2) решение $w(y,t)$ уравнения (2.7) представляется в виде $w(y,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(t)g_k(y)$, где $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ - полная на $[a,b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Например, в случае жесткого защемления концов пластины ($w = 0, w' = 0$ при $y = a, y = b$) решение уравнения отыскивается в виде $w(y,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k(t)\psi_k(y)$, где

$$\psi_k(y) = ch(\mu_k(y-a)) - \cos(\mu_k(y-a)) -$$
$$-\frac{ch(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{sh(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))}(sh(\mu_k(y-a)) - \sin(\mu_k(y-a))),$$

при этом μ_k находятся из уравнения $ch(\mu_k(y-a))\cdot\cos(\mu_k(y-a))=1$ ($k=1,...,n$). Функции $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны на $[a,b]$, т.е. $\int\limits_a^b\psi_i(y)\psi_j(y)dy=0$ при $i\neq j$. Можно показать, что $\int\limits_a^b\psi_i^2(y)dy=b-a$.

Для шарнирного закрепления концов пластины ($w=0$, $w''=0$ при $y=a$, $y=b$) можно положить

$$w(y,t)=\sum_{k=1}^{m}w_k(t)\sin\beta_k(y-a),$$

где $\beta_k=\frac{\pi k}{b-a}$.

Из условия ортогональности невязки уравнения (2.7) к системе базисных функций $\{g_k(y)\}_{k=1}^{n}$ получим систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений для $w_k(t)$.

Для нелинейной модели, учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, согласно методу Галеркина, искомые функции деформации $u(y,t),w(y,t)$ ищем в виде $u(y,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(t)h_k(y)$, $w(y,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}w_k(t)g_k(y)$, где $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ - полные на $[a,b]$ системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязок первого и второго уравнений (3.3) к системам базисных функций $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно, получим систему из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $u_k(t),w_k(t)$.

Например, для $n=2$ в случае шарнирного закрепления концов пластины и $a=0,b=y_0$, $h_k(y)=\sin\beta_k(y-a)$, $g_k(y)=\sin\beta_k(y-a)$ система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

1. Линейная модель (2.1)-(2.6)

$$\begin{cases} A_1\ddot{w}_1(t)+B_1\dot{w}_1(t)+C_1w_1(t)=F_1(t),\\ A_2\ddot{w}_2(t)+B_2\dot{w}_2(t)+C_2w_2(t)=F_2(t)\end{cases}$$

2. Нелинейная модель (2.1)-(2.5), (3.2)

$$\begin{cases} N_1\ddot{w}_1(t)+M_1\dot{w}_1(t)+D_1w_1(t)+G_1w_1^3(t)+H_1w_1(t)w_2^2(t)=P_1(t),\\ N_2\ddot{w}_2(t)+M_2\dot{w}_2(t)+D_2w_2(t)+G_2w_2^3(t)+H_2w_2(t)w_1^2(t)=P_2(t).\end{cases}$$

3. Нелинейная модель (2.1)-(2.5), (3.3)

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{u}_1+a_{12}\dot{u}_1+a_{13}u_1+a_{14}w_1w_2=0,\\ a_{21}\ddot{u}_2+a_{22}\dot{u}_2+a_{23}u_2+a_{24}w_1^2=0,\\ \\ a_{31}\ddot{w}_1+a_{32}\dot{w}_1+a_{33}w_1+a_{34}w_1^3+a_{35}w_1w_2^2+a_{36}u_1w_2+a_{37}w_1u_2=f_1(t),\\ \\ a_{41}\ddot{w}_2+a_{42}\dot{w}_2+a_{43}w_2+a_{44}w_2^3+a_{45}w_2w_1^2+a_{46}u_1w_2=0.\end{cases}$$

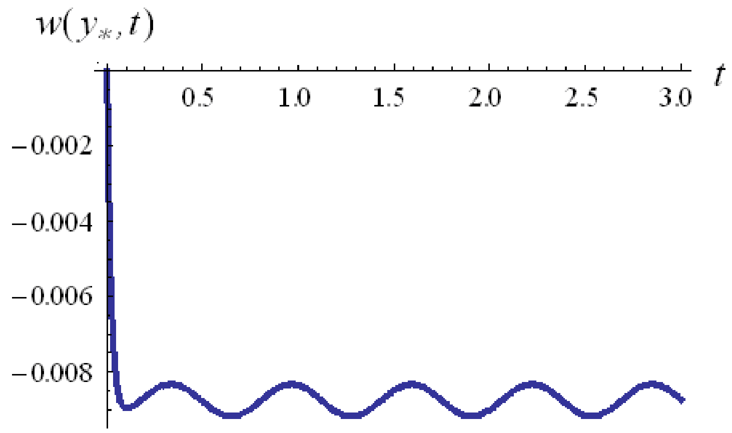
Коэффициенты $A_1,B_1...,N_1,M_1,...$ $a_{11},a_{12},...$ выражаются через параметры задачи.

5. Численное моделирование

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых в результате процедуры ортогонализации, решается с помощью системы Mathematica. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

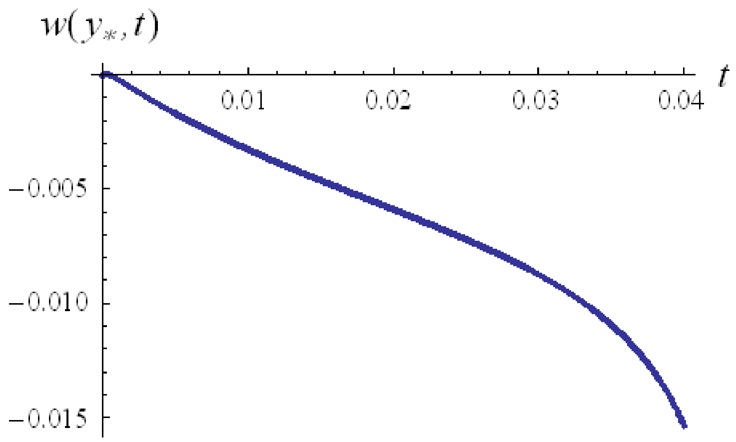
П р и м е р 5.1. *Рассмотрим модель, изображенную на рис. 2.1, в случае шарнирного закрепления концов упругого элемента. Рабочая среда - вода (* $\rho_0 = 10^3$ *), пластина изготовлена из стали (* $E = 2 \cdot 10^{11}, \rho_0 = 7,8 \cdot 10^3, h = 3 \cdot 10^{-4}$ *).*

Для значений параметров (все значения приведены в системе СИ) $x_0 = 2$, $y_0 = 0,02$, $a = 0$, $b = y_0$, $M = 2,34$, $D = 0,495$, $N = 10^3$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,3$, $\delta = 0$, $w(y,0) = 0$, $\dot{w}(y,0) = 0,5$, $P_0(x,t) = 0$, $P_0(y,t) = 10^5(20 + \cos(10t)$ *получено решение для функции* $w(y,t)$ *в точке* $y_* = \frac{a+b}{2.5}$ *(рис.5.1):*



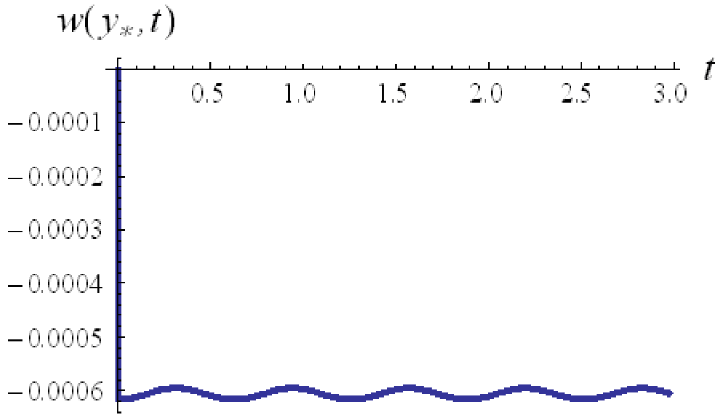
Р и с у н о к ***5.1***

График деформации $w(y,t)$ *для линейной модели* (2.1)-(2.6).



Р и с у н о к ***5.2***

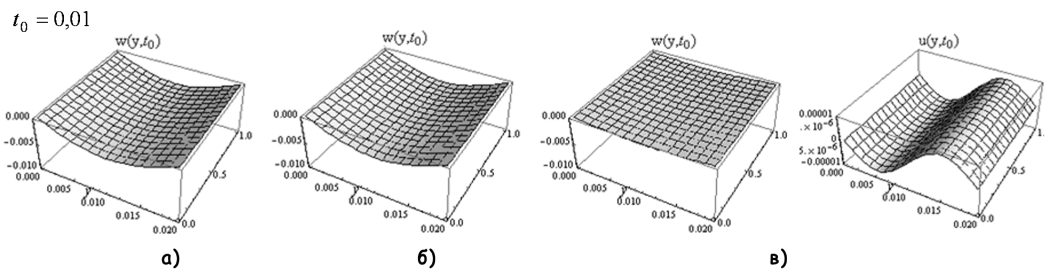
График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.2).



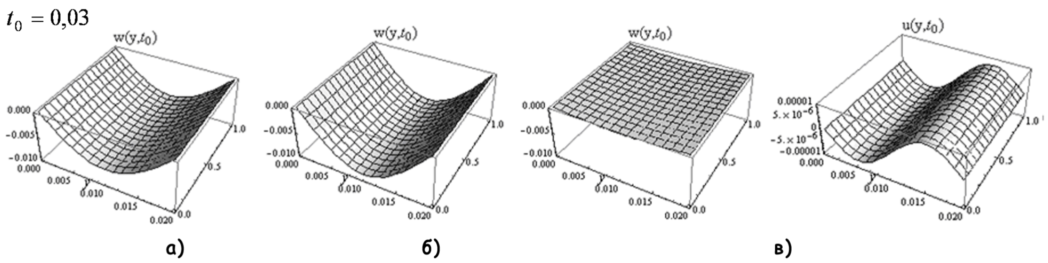
Р и с у н о к ***5.3***

График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.3).

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени $t = t_0$ *для линейной и нелинейных моделей представлены на рис.5.4,5.5.*



Р и с у н о к ***5.4***



Р и с у н о к ***5.5***

Рис. 5.4, 5.5. Графики деформации $w(y, t_0)$ *для а)линейной* (2.1)-(2.6), *б)нелинейной* (2.1)-(2.5),(3.2) *и в)нелинейной* (2.1)-(2.5), (3.3) *в фиксированные моменты времени* t_0 .

Для указанных выше значений параметров, увеличим толщину пластинки $h = 4{\cdot}10^{-4}$ *(* $M = 3,12\,; D = 1,172\,; EF = 8 \cdot 10^7$ *).*

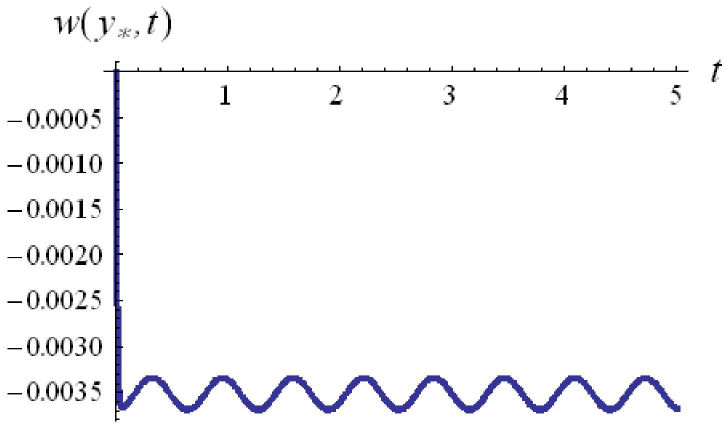


Рисунок ***5.6***

График деформации $w(y,t)$ *для линейной модели* (2.1)-(2.6).

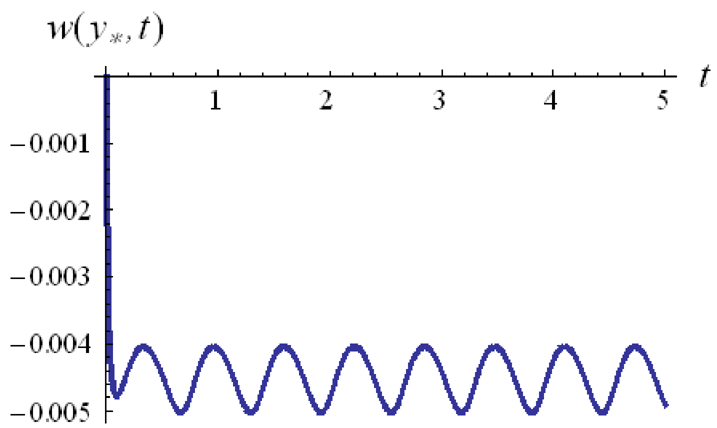


Рисунок ***5.7***

График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.2).

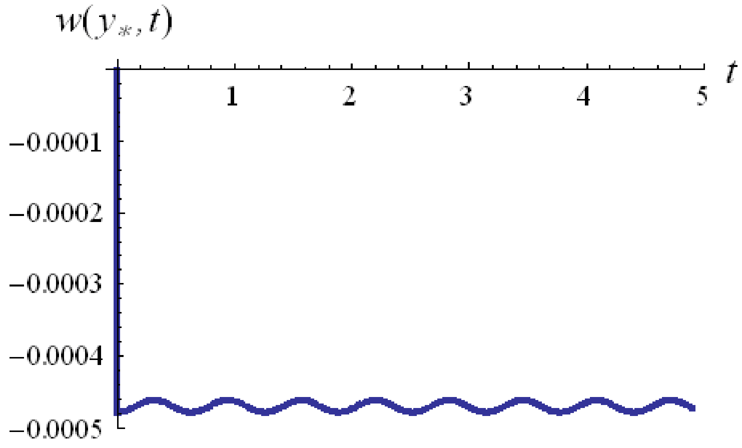


Рисунок ***5.8***

График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.3).

Для $h = 9 \cdot 10^{-4} (M = 7,02; D = 3,365; EF = 18 \cdot 10^7)$ *получим графики деформации* $w(y_*, t)$.

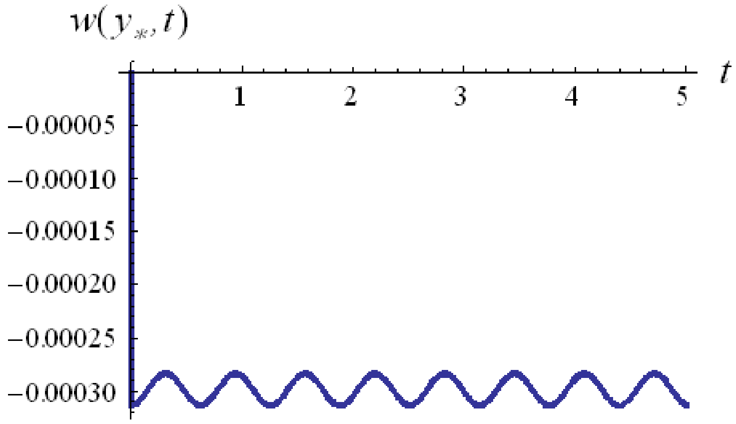


Рисунок ***5.9***

График деформации $w(y,t)$ *для линейной модели* (2.1)-(2.6).

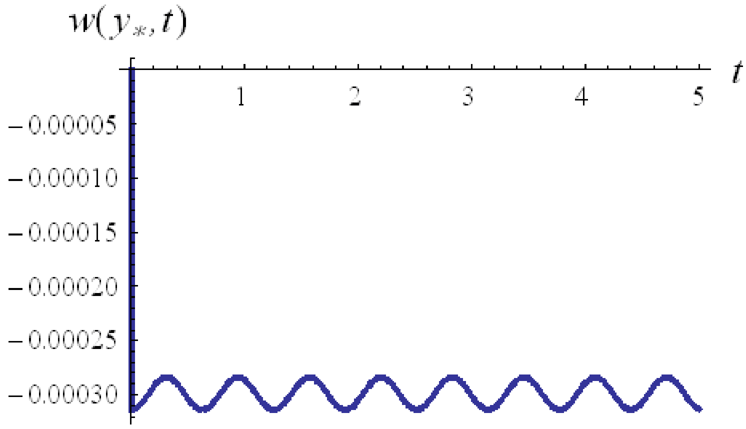


Рисунок ***5.10***

График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.2).

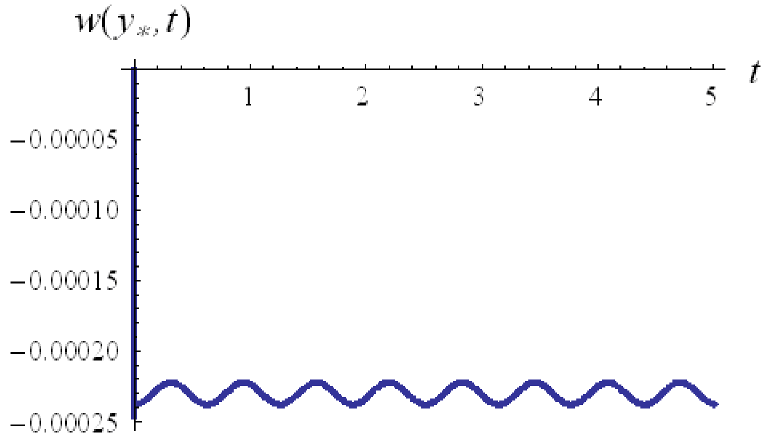


Рисунок ***5.11***

График деформации $w(y,t)$ *для нелинейной модели* (2.1)-(2.5), (3.3).

Сравнивая графики 5.1-5.11 можно сделать вывод, что при увеличении толщины пластинки происходит уменьшение деформации упругого элемента, что соответствует физическим представлениям. Численный эксперимент показал также, что для одинаковых значений параметров системы графики деформаций пластины для нелинейных и линейной моделей существенно отличаются, откуда следует вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента.

6. Заключение

Развитие авиационной, космической и другой техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления. В связи с этим, возникает актуальная задача разработки специальных методов исследования динамики и устойчивости упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с жидкостью. Предложенные авторами новые модели механической системы «трубопровод - датчик давления», методика решения соответствующих задач аэрогидроупругости позволяют дополнить базу современного проектирования датчиков давления и усовершенствовать ее.

Список литературы

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., "Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»", *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2007, № 3, 7–14.

2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В., *Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления»*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.

3. Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Решетников Ю.А., "Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления»", *Датчики и системы*, 2003, № 6(49), 12–15.

4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., "Математические модели одной гидроупругой системы", *Труды Средневолжского математического общества*, **8**:2 (2006), 93–98.

5. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., "О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод-датчик давления»", *Вестник Самарского государственного технического университета*, 2011, № 1(29), 137–144.

6. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., "О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод-датчик давления»", *Proceeding of the international conference «Education, sience and economics at universities. Integration to international education area»*, NOVUM, Plock, 2010, 492–499.

7. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С., "Математическое моделирование системы «трубопровод-датчик давления»", *Труды Средневолжского математического общества*, **12**:4 (2010), 85–93.

8. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V., “Mathematical models of a mechanical system «Pipeline - Pressure Sensor»”, *Application of Mathematics in Engineering and Economics*, Bulgaria, Sofia, 2004, 84–89.

An investigation of dynamic of an elastic element of a pressure sensor.

© **P.A. Velmisov,**[4] **Yu.V. Pokladova,**[5] **E. S. Serebryannikova**[6]

Abstract. Mathematical models of mechanical system, including a pipeline with the work-area and a sensor with an elastic element as a part, are considered. The sensor is used for pressure definition of the work-area, whose law of change is considered set. The differential equations, describing fluctuations of an elastic element make a base for the numerical experiment on research of dynamics of the element.

Key Words: elastic element, pressure sensor, pipeline, deformation, integro-differential equations, dynamics.

[4] Professor, Head of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, velmisov@ulstu.ru

[5] Docent of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, pokladovau@inbox.ru

[6] Teacher of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk

УДК 517.9

Оценка качества спецификации моделей системной динамики

© **С.И. Спивак[1], О.Г. Кантор[2]**

Аннотация. Рассматривается проблема оценки качества спецификации математических моделей системной динамики. На основе подхода Л.В. Канторовича разработан новый метод определения параметров моделей, нивелирующий неточности наблюдений и позволяющий учитывать дополнительные условия.

Ключевые слова: спецификация моделей системной динамики, качество математических моделей, подход Л.В. Канторовича, предельно допустимые погрешности измерений.

Категория «качество» применительно к математическим моделям может трактоваться двояко. В обычном понимании – это принципиальная способность модели описывать исследуемый объект («да» – описывает, «нет» – не описывает); в расширенном понимании «качество» модели характеризуется некоторой числовой величиной, принимающей значения в определенном интервале. С математической точки зрения эти два разных понимания качества отвечают ситуациям, когда моделям ставятся в соответствие дискретные или непрерывные числовые характеристики.

В случае использования первой трактовки наличие или отсутствие у модели «качественного» признака может осуществляться двумя принципиально отличными способами: первый состоит в апостериорном сопоставлении результатов модельных расчетов с фактическими данными, т.е. проверка практикой, второй – в проверке модели на предмет выполнения ряда критериев подобно тому, как это происходит в эконометрике. Второй способ подразумевает использование моделей, позволяющих описывать наблюдаемые объекты, с приемлемыми значениями качественной характеристики. При этом обычно предполагается связность уровней качества, т.е. вся совокупность значений качественной характеристики может быть разбита на непересекающиеся интервалы, соответствующие различным (неповторяющимся) уровням качества. Другими словами, качество используемой модели должно определяться на основании некоторого критерия, принимающего значения в заданном интервале. Под задачей определения качества модели будем подразумевать задание некоторого числового критерия и алгоритм его идентификации [5], позволяющий ответить на вопрос, описывает ли модель изучаемую систему с требуемым уровнем качества, что в нашем понимании соответствует попаданию значений введенного критерия внутрь заданного интервала. Под «качеством спецификации модели» будем понимать числовой критерий, характеризующий насколько выбранный тип модели и фиксированный набор значений ее параметров, обеспечивают качество модели в целом.

Проблема оценки качества спецификации моделей является актуальной для задач системной динамики – метода изучения сложных систем с нелинейными обратными связями, разработанный в середине XX века профессором Массачусетского технологического института Дж. Форрестером. В методе системной динамики предполагается, что для всех системных уровней пишутся уравнения одного и того же типа [2]:

$$\frac{dx}{dt} = x^{+} - x^{-}, \tag{1.1}$$

[1] Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[2] Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

где x^+ и x^- - положительный и отрицательный темпы скорости системного уровня x, каждый из которых включает в себя все факторы, вызывающие соответственно рост и убывание x. Предполагается, что x^+ и x^- являются функциями только системных уровней. Таким образом, уравнения системной динамики представляют собой дифференциальные уравнения вполне определенной структуры. Общий вид системы (1.1) в случае исследования модели с двумя переменными следующий

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x^{\alpha_1} \cdot y^{\beta_1} - a_2 \cdot x^{\alpha_2} \cdot y^{\beta_2}, \qquad (1.2)$$
$$\frac{dx}{dt} = a_3 \cdot x^{\alpha_3} \cdot y^{\beta_3} - a_4 \cdot x^{\alpha_4} \cdot y^{\beta_4}.$$

Очевидно, что спецификация модели системной динамики (1.2) и, как следствие, ее качество, зависят от значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j\}$, $j = \overline{1,4}$, которые определяются по имеющейся статистической информации и только в самых простых случаях - на основе очевидных логических связей между системными уровнями и темпами.

Для непосредственной оценки качества спецификации параметров моделей системной динамики авторами предлагается использовать подход, основоположником которого является Л.В.Канторович, впервые высказавший в своей работе [1] идеи получения точных двусторонних границ для параметров моделей и областей расположения искомых и наблюдаемых величин. Существенным является тот факт, что предложенный Л.В. Канторовичем подход явился новым словом в теории математической обработки эксперимента, т.к. не требует знания о статистических свойствах распределения погрешностей измерений. Более того, при использовании метода Канторовича возможно включение в модель различных дополнительных условий, оказывающих влияние на качество модели в целом, соблюдение которых продиктовано очевидными соображениями.

В общем виде постановка задачи оценки качества спецификации моделей на основе использования подхода Канторовича имеет следующий вид.

$$F(a_1, ..., a_k) \to \underset{\overline{a}}{opt} \qquad (1.3)$$

$$|x_i^{эксп} - x_i^{расч}| \le \delta_i, i = \overline{1,n}, \qquad (1.4)$$

$$G(x, \overline{a}) \subset S^0, \qquad (1.5)$$

где $\overline{a} = \{a_1, ..., a_k\}$ - искомые параметры, определяющие спецификацию модели $x = x(x, \overline{a})$; n – число наблюдений; $F(a_1, ..., a_k)$ - критерий качества модели; (1.4) – условия, характеризующие близость расчетных и экспериментальных значений; δ_i – величина предельно допустимой погрешности аппроксимации в i-м наблюдении; (1.5) – дополнительные условия.

Л.В. Канторович, описывая предлагаемый им подход к обработке наблюдений, считал, что исследователь должен располагать информацией о величине предельно допустимой погрешности. Однако далеко не всегда это является возможным. В связи с этим считаем целесообразным рассматривать предельно допустимые погрешности аппроксимации $\{\delta_i\}$ как неизвестные величины, а определение параметров моделей осуществлять с позиций учета следующих аспектов: необходимо добиваться, во-первых, близости расчетных и экспериментальных данных, во-вторых, – минимально возможной области предельно допустимых погрешностей аппроксимации; в-третьих, – приемлемого уровня вариации оцениваемых параметров. Под минимально возможной областью предельно допустимых погрешностей аппроксимации будем подразумевать область значений величин $\{\delta_i\}$ с минимальным диаметром.

Близость расчетных и экспериментальных данных, а также размер области допустимых погрешностей аппроксимации могут быть выражены отдельными критериями. Однако, использование критериев вида

$$F = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}}, \tag{1.6}$$

или

$$F = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\delta_i}{x_i^{эксп}} \right| \right) \cdot 100\% \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}}, \tag{1.7}$$

суть которых – сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от расчетных и средняя ошибка аппроксимации, соответственно, позволит определять параметры модели таким образом, что будет одновременно обеспечиваться достижение двух целей: наилучшая близость расчетных и экспериментальных данных и достижение минимально возможной области допустимых погрешностей аппроксимации, т.к. функциональный вид критерия (1.6) соответствует квадрату диагонали координатного параллелепипеда, в который вписана область предельно допустимых ошибок аппроксимации $\{\delta_i\}$, а критерия (1.7) – среднему относительному отклонению расчетных данных от экспериментальных, выраженному в процентах.

Повышенные требования к качеству модели, которые, на взгляд авторов, должны реализовываться посредством определения параметров модели, обладающих приемлемым уровнем вариации, обусловливаются неточностью экспериментальных данных, т.к. в результате минимизации критериев (1.6) или (1.7) при условиях (1.4), (1.5) может быть получена качественная модель «некачественных» данных.

Под *уровнем вариации отдельного параметра* (I_{a_p}) модели будем понимать интервал его значений, для каждого элемента которого модель характеризуется приемлемым качеством. Очевидно, чем больше длина интервала (I_{a_p}), тем большее количество приемлемых вариантов существует для спецификации модели, а это в свою очередь увеличивает неопределенность при выборе ее окончательного вида. Под *уровнем вариации всей совокупности параметров* аппроксимирующей функции будем понимать некую числовую характеристику множества I, представляющего собой область в пространстве значений величин $a_1, ..., a_k$, каждая точка которой обеспечивает приемлемое качество модели F^0, определяемое соотношением $F \leq F^0$. В качестве такой характеристики наиболее логичным является использование диаметра множества I, однако, определение границ данного множества представляет собой весьма непростую самостоятельную задачу. В этой связи более простым, хотя и менее точным, является способ оценки уровня вариации всей совокупности параметров аппроксимирующей функции на основе вычисления диагонали координатного параллелепипеда $\Omega_k = \left\{M(a_1, ..., a_k) | a_p \in I_{a_p}, p = \overline{1,k}\right\}$. Также оценивать уровень вариации всей совокупности параметров аппроксимирующей функции целесообразно посредством анализа среднего значения относительной вариации ее параметров, которое по сути служит мерой разброса допустимых значений величин $\left\{a_p | p = \overline{1,k}\right\}$ вокруг соответствующих точечных оценок.

Таким образом, авторами настоящей работы предлагается следующая процедура реализации задачи оценки качества параметров моделей системной динамики.

1. Сбор данных.

2. Решение оптимизационной задачи (1.6), (1.4), (1.5) или (1.7), (1.4), (1.5) (в зависимости от предпочтений исследователя в отношении критерия качества), в результате чего будут определены оптимальное значение критерия качества F^*, величины погрешностей

аппроксимации $\left\{\delta_i^*, i=\overline{1,n}\right\}$ и набор значений параметров $\overline{a}^* = \left\{a_1^*, ..., a_k^*\right\}$, определяющий спецификацию модели.

3. Последовательное решение k задач вида

$$a_p \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}} (\max_{\overline{a},\{\delta_i\}}), \tag{1.8}$$

$$|x_i^{эксп} - x_i^{расч}| \le \delta_i, i=\overline{1,n}, \tag{1.9}$$

$$G(x, \overline{a}^p) \subset S^0, \tag{1.10}$$

$$F \le F^0, \tag{1.11}$$

где $p=\overline{1,k}$, $F^0 \ge F^*$.

Условие (1.11) обеспечивает учет вариабельности (неопределенности) параметров модели при условии сохранения допустимого уровня качества модели в целом.

В результате решения всех k задач (1.8)-(1.11) будут определены интервалы изменения параметров модели $a_p \in [a_p^{min}, a_p^{max}], p=\overline{1,k}$, обеспечивающих ее приемлемое качество.

4. Определение величин $\Delta_p = a_p^{min} - a_p^{max}$, $p=\overline{1,k}$, характеризующих вариации параметров модели.

5. Расчет интегрального показателя вариации параметров модели по формуле

$$G = \sqrt{\sum_{p=1}^{k} \Delta_p^2}, \tag{1.12}$$

либо

$$G = \frac{1}{k}\left(\sum_{p=1}^{k} \left|\frac{\Delta_p}{a_p^*}\right|\right) \cdot 100\%. \tag{1.13}$$

6. Интерпретация значения интегрального показателя вариации параметров модели в соответствии с принятой исследователем шкалой для его оценки.

Модель будет считаться качественной, если на этапах 2 и 5 будут получены удовлетворительные значения критериев F и G, соответственно. В противном случае исследователю придется переходить к другому составу переменных в модели системной динамики, а затем вновь оценивать ее качество.

Заметим, что на взгляд авторов, критерии (1.7) и (1.13) в контексте решаемой задачи имеют более наглядную трактовку. Кроме того, использование критерия (1.13) по сравнению с критерием (1.12) позволяет более объективно оценивать вариацию параметров модели ввиду того, что при его использовании учитываются относительные вариации параметров, а не абсолютные, которые могут существенно отличаться для различных параметров.

Учитывая нелинейность моделей системной динамики и связанную с эти фактом сложность численной реализации приведенных моделей, предлагается использование идей линеаризации уравнений системной динамики (1.2) по параметрам $\{a_j, \alpha_j, \beta_j\}$, $j=\overline{1,4}$ [3].

$$\frac{dx}{dt} \approx a_1 - a_2, \tag{1.14}$$

$$\frac{dy}{dt} \approx a_3 - a_4.$$

Таким образом, на основании имеющихся наблюдений возможным является определение точечных и интервальных оценок только для параметров $\{a_j\}$, $j=\overline{1,4}$. Полученные точечные и интервальные оценки $\{a_j^0\}$, $j=\overline{1,4}$ и $\{[a_j^-;a_j^+]\}$, $j=\overline{1,4}$ могут быть использованы для определения точечных и интервальных оценок для всех параметров модели (1.2) на основе использования линейных частей разложений уравнений в ряд Тейлора с центром в точке $\{a_j^0, \alpha_j=0, \beta_j=0\}$, $j=\overline{1,4}$:

$$\frac{dx}{dt} \approx a_1 + a_1^0\cdot\ln x\cdot\alpha_1 + a_1^0\cdot\ln y\cdot\beta_1 - a_2 - a_2^0\cdot\ln x\cdot\alpha_2 - a_2^0\cdot\ln y\cdot\beta_2, \tag{1.15}$$
$$\frac{dy}{dt} \approx a_3 + a_3^0\cdot\ln x\cdot\alpha_3 + a_3^0\cdot\ln y\cdot\beta_3 - a_4 - a_4^0\cdot\ln x\cdot\alpha_4 - a_4^0\cdot\ln y\cdot\beta_4.$$

Знание интервалов $\{[a_j^-;a_j^+]\}$, $j=\overline{1,4}$ позволит варьировать центр разложения в ряде Тейлора.

В этом случае оценку качества спецификации моделей системной динамики следует осуществлять посредством применения изложенной выше процедуры к каждой из моделей (1.14) и (1.15) в отдельности. При этом целесообразным является учет требований близости экспериментальных и расчетных данных в виде дополнительных условий

$$\left|\left.\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\text{расч}}\right|_i - \left.\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\text{эксп}}\right|_i\right| \le \varepsilon_i^x, i=\overline{1,n,} \tag{1.16}$$

$$\left|\left.\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\text{расч}}\right|_i - \left.\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\text{эксп}}\right|_i\right| \le \varepsilon_i^y, i=\overline{1,n.} \tag{1.17}$$

Заметим, что стандартный путь решения задачи определения параметров моделей состоит в минимизации отклонений расчетных и экспериментальных данных в смысле некоторого введенного критерия. Основанием для выбора критерия является информация о законе распределения погрешности измерений. В реальных системах, как правило, такая информация отсутствует, в то время как доступной является информация о предельно допустимой погрешности измерений. Именно этот факт является главным доводом в пользу применения идеи, лежащей в основе подхода Л.В.Канторовича.

Список литературы

1. Канторович Л. В., “О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений”, *Сибирский математический журнал*, **3**:5 (1962), 701–709.

2. Махов С. А., “Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера”, *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, **6** (2005), 24.

3. Моисеев Н. Н., *Математические задачи системного анализа*, Наука, М., 1981, 488 с.

4. Спивак С. И., “Информативность кинетических измерений”, *Вестник Башкирского университета*, **14**:3 (2009), 1056–1059.

5. Спивак С. И., Кантор О. Г., “Качество моделей математической обработки наблюдений социально-экономических систем”, *Системы управления и информационные технологии*, 2012, № 2(48), 44–49.

Evaluation the quality specification of system dynamics models.

© S.I. Spivak[3], O.G. Kantor[4]

Abstract. The problem of evaluation the quality specification of system dynamics models is considered. Based on the approach of L.V. Kantorovich, a new method of determination the model parameters is developed. It grades inaccuracies of socio-economic observations and allows taking into account additional terms and conditions.
Key Words: specification of system dynamics models, quality of mathematical models, L.V. Kantorovich's approach, maximum allowable error of measurement.

[3] Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.
[4] Senior Research Scientist, Institute of Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.

В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.984.54

К вопросу об идентификации нераспадающихся краевых условий

© **А.М. Ахтямов**[1,2], **А.В. Муфтахов**[3,4]

Аннотация. Доказан критерий однозначности восстановления нераспадающихся краевых условий для спектральной задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка по 2 собственным значениям. Предъявлено явное решение задачи. Показана корректность задачи. Приведены примеры восстановления краевых условий для конкретных спектральных задач.
Ключевые слова: обратная спектральная задача, собственные значения, краевые условия.

1. Постановка задачи

Обратным спектральным задачам посвящено большое количество работ (подробнее см. [1-9]. Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, А.Н. Тихонов, М.Г. Крейн, М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие.

Первой работой, посвященной изучению обратной несамосопряженной задачи с неизвестными нераспадающимися краевыми условиями была статья В.А. Садовничего [10], в которой было показано, что в случае уравнения вида $-y''+q(x)y=\lambda\,y$ для однозначности восстановления функции $q(x)$ и коэффициентов нераспадающихся краевых условий требуется три спектра связанных между собой задач и другие дополнительные спектральные данные. Впоследствии восстановлению коэффициентов дифференциального уравнения и нераспадающихся краевых условий посвятили свои работы М.Г. Гасымов, И.М. Гусейнов, И.М. Набиев, О.А. Плаксина, В.А. Юрко, Б.Е. Кангужин и другие авторы [9-12]. Были изучены и неполные обратные задачи — задачи восстановления только краевых условий (подробнее см. [13]). Так, в работах [13, 14] была рассмотрена задача восстановления общих нераспадающихся краевых условий для спектральной задачи с дифференциальным уравнением 2–го порядка

$$l(y)=y''(x)+(\lambda\,p_1+p_2(x))\,y'(x)+(\lambda^2\,q_1+\lambda\,q_2(x)+q_3(x))\,y(x)=0, \tag{1.1}$$

$$U_l(y)=\sum_{k=1}^{2}\left(a_{lk}\,y^{(k-1)}(0)+a_{l\,k+2}\,y^{(k-1)}(1)\right)=0,\quad l=1,2, \tag{1.2}$$

где λ — спектральный параметр; $x\in[0,1]$; $p_2(x),\,q_2(x)\in C^1[0,1]$; $q_3(x)\in C[0,1]$; $a_{lk},\,p_1,\,q_1\in\mathbb{C}$.

[1] Зав. кафедрой механики сплошных сред, Башкирский государственный университет, г. Уфа; akhtyamovam@mail.ru
[2] Ведущий научный сотрудник, Институт механики УНЦ РАН, г. Уфа
[3] Lector, The Jerusalem College of Engineering, Jerusalem, Israel; muftahov@yahoo.com
[4] Lector, Sami Shamoon Engineering College, Be'er Sheva, Israel

Было показано, что при выполнении определенных условий краевые условия (1.2), содержащие 8 неизвестных коэффициентов a_{lk}, по 5 собственным значениям задачи (1.1),(1.2) восстанавливаются однозначно.

Настоящая статья посвящена продолжению этих исследований. В статье дается ответ на вопрос о том, сколько собственных значений нужно для однозначного восстановления краевых условий вида:

$$U_1(y) = a_{11}\, y(0) + a_{12}\, y'(0) + a_{13}\, y(1) = 0, \tag{1.3}$$

$$U_2(y) = a_{21}\, y(0) + a_{22}\, y'(0) + a_{23}\, y(1) = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{lk} краевых условий (1.3), (1.4) через A:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right\|, \tag{1.5}$$

а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через M_{ij}:

$$M_{ij} = \left| \begin{array}{cc} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{array} \right|, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Векторы будем выделять жирным шрифтом — $\mathbf{a}$. Символом ^{T} будем обозначать транспонирование. Вектор-строка с этим индексом — $(a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ — будет обозначать вектор-столбец. Через $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ будем обозначать линейную оболочку, построенную на векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\mathrm{rank}\, A$.

Название статьи связано с идентификацией краевых условий. Что же означает найти краевые условия? На первый взгляд может показаться, что это означает, что нужно найти все коэффициенты a_{lk} матрицы A. Однако это ошибочное утверждение. Дело в том, что одно и то же краевое условие может иметь совершенно разные коэффициенты. Например, условия $y(0) = 0$ и $5\,y(0) = 0$ имеют совершенно разные коэффициенты a_{11}. В первом случае это 1, а во втором — это 5. Однако эти коэффициенты соответствуют одному и тому же краевому условию. Поэтому нужно искать матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк, а не коэффициенты a_{lk}.

Обратная задача формулируется следующим образом: *коэффициенты a_{lk} форм $U_l(y)$, $l = 1, 2$ спектральной задачи (1.1), (1.3), (1.4) — неизвестны;* $\mathrm{rank}\, A = 2$*; известны собственные значения λ_m задачи (1.1), (1.3), (1.4). Требуется найти краевые условия (1.3), (1.4), т.е. восстановить матрицу A вида (1.5) с точностью до линейных преобразований ее строк.*

Очевидно, что задание матрицы A вида (1.5) с точностью до линейных преобразований ее строк эквивалентно заданию линейной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, построенной на векторах $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$.

В настоящей статье доказано, что для однозначного восстановления краевых условий (1.3), (1.4) достаточно двух собственных значений.

Заметим, что если известно, какой именно минор M_{ij} матрицы A отличен от нуля, то краевые условия (1.3), (1.4) упрощаются. Например, если известно, что $M_{12} \neq 0$, то краевые условия можно привести к следующему виду: $y(0) + \widetilde{a}_{13}\, y(1) = 0$, $y'(0) + \widetilde{a}_{23}\, y(1) = 0$. Тогда для поиска двух неизвестных коэффициентов $\widetilde{a}_{13}$, $\widetilde{a}_{13}$ можно использовать только два собственных значения.

Такое решение справедливо, если заранее известно, какой из миноров M_{ij} матрицы A отличен от нуля. В нашей же постановке задачи известно лишь, что ранг матрицы

A равен 2 и неизвестно какой из миноров M_{ij} отличен от нуля. Поэтому условия теоремы должны даваться не в терминах миноров, которые нам неизвестны, а в терминах известных собственных значений.

Ниже соответствующая теорема об идентификации краевых условий (1.3), (1.4) получена. В статье показано также, что малым изменениям собственных значений соответствуют малые изменения краевых условий. Выявлена интересная связь поставленной задачи с задачами линейной алгебры и аналитической геометрии.

2. Критерий единственности решения задачи

Пусть $\{y_n(x,\lambda)\}_{n=1,2}$ — фундаментальная система решений уравнения (1.1), удовлетворяющая условиям $y_n^{(k-1)}(0,\lambda)=\delta_{nk},\ \ n,k\ =\ 1,2$

Числа $\lambda_m,\ m=1,2$ являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) тогда и только тогда, когда они являются нулями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

(см. [15, с.1–16]), а значит, и решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1)=-M_{23}\,y_1(1,\lambda_1)-M_{31}\,y_2(1,\lambda_1)+M_{12}=0,\\ \Delta(\lambda_2)=-M_{23}\,y_1(1,\lambda_2)-M_{31}\,y_2(1,\lambda_2)+M_{12}=0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

При решении обратной задач на систему (2.2) можно смотреть как на систему линейных уравнений относительно неизвестных $x_1=M_{23}$, $x_2=M_{31}$, $x_3=M_{12}$. Определитель этой системы линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3 обозначим через F:

$$F=\left\| \begin{matrix} -y_1(1,\lambda_1) & -y_2(1,\lambda_1) & 1 \\ -y_1(1,\lambda_2) & -y_2(1,\lambda_2) & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{2.3}$$

а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через F_{ij}, $i,j=1,2,3$.

Т е о р е м а 2.1. (о единственности решения) *Решение обратной задачи восстановления краевых условий (1.3), (1.4) по двум собственным значениям λ_1, λ_2 задачи (1.1), (1.3), (1.4) единственно тогда и только тогда, когда для собственных значений λ_1 и λ_2 ранг матрицы (2.3) равен 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено выше задание краевых условий (1.3), (1.4) эквивалентно заданию линейной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$, построенную на векторах $\mathbf{a}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})^T$.

Достаточность. Пусть для собственных значений λ_1 и λ_2 ранг матрицы (2.3) равен 2 ($\operatorname{rank} F=2$). Тогда хотя бы один из миноров F_{ij} не равен нулю.

Отсюда следует, что решение системы (2.2) представляет собой вектор $\mathbf{N}=(M_{23},M_{31},M_{12})$, определяемый с точностью до ненулевого множителя. Покажем это. Не ограничивая общности будем считать, что $F_{12}=y_1(1,\lambda_1)\,y_2(1,\lambda_2)-y_2(1,\lambda_1)\,y_1(1,\lambda_2)\neq 0$. Тогда матрицу F с помощью линейных преобразований строк можно привести к следующей матрице:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -F_{23}/F_{12} \\ 0 & 1 & F_{13}/F_{12} \end{matrix} \right\| \tag{2.4}$$

Поэтому система (2.2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} M_{23} - \tfrac{F_{23}}{F_{12}} M_{12} = 0, \\ M_{31} + \tfrac{F_{13}}{F_{12}} M_{12} = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

имеющей следующее решение:

$$M_{12} = C, \quad M_{31} = \frac{F_{31}}{F_{12}} C, \quad M_{23} = \frac{F_{23}}{F_{12}} C, \tag{2.6}$$

где C — произвольная константа, отличная от нуля. (Случай $C = 0$ противоречит условию теоремы, согласно которой $\operatorname{rank} A = 2$.) Как видим из (2.6), вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Заметим, что если отличен от нуля другой минор матрицы F (не F_{12}), то найденный вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ также совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Покажем это на примере минора F_{23}. Пусть $F_{23} = y_2(1, \lambda_2) - y_2(1, \lambda_1) \neq 0$. Тогда матрицу F с помощью линейных преобразований можно привести к следующей матрице:

$$\left\| \begin{array}{ccc} F_{13}/F_{23} & 1 & 0 \\ -F_{13}/F_{23} & 0 & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.7}$$

Поэтому система (2.2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} \tfrac{F_{13}}{F_{23}} M_{23} + M_{31} = 0, \\ -\tfrac{F_{12}}{F_{23}} M_{23} + M_{12} = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

имеющей следующее решение:

$$M_{12} = \frac{F_{23}}{F_{12}} C_1, \quad M_{31} = \frac{F_{31}}{F_{12}} C_1, \quad M_{23} = C_1, \tag{2.9}$$

где C_1 — произвольная константа, отличная от нуля. Из (2.9) также следует, что вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Таким образом, решение системы (2.2) представляет собой вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$, определяемый с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов. Этот вектор определяет единственную плоскость в трехмерном пространстве, содержащую в себе начало координат и совпадающую с линейной оболочкой $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, построенной на векторах $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$. Таким образом, матрица A и краевые условия (1.3), (1.4) определяются однозначно с точностью до линейных преобразований строк.

Более того, как было показано выше вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов. Поэтому совпадают и линейные оболочки $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ и $\operatorname{Span}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, где $\mathbf{f}_1 = (-y_1(1, \lambda_1), -y_2(1, \lambda_1), 1)^T$, $\mathbf{f}_2 = (-y_1(1, \lambda_2), -y_2(1, \lambda_2), 1)^T$. Следовательно с точностью до линейных преобразований строк верны равенства

$$A = F = \left\| \begin{array}{ccc} -y_1(1, \lambda_1) & -y_2(1, \lambda_1) & 1 \\ -y_1(1, \lambda_2) & -y_2(1, \lambda_2) & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.10}$$

Необходимость. Пусть краевые условия (1.3), (1.4) восстанавливаются по двум собственным значениям λ_1, λ_2 задачи (1.1), (1.3), (1.4) однозначно. Тогда матрица A определяется однозначно с помощью линейного преобразования строк, а ее миноры M_{ij} находятся однозначно с точностью до ненулевого коэффициента, не зависящего от индексов. Покажем, что тогда ранг матрицы (2.3) равен 2 ($\operatorname{rank} F = 2$). Предположим противное: $\operatorname{rank} F = 1$ (случай $\operatorname{rank} F = 0$ исключается поскольку первый столбец матрицы F состоит из единиц). Тогда строки матрицы F должны быть линейно зависимыми. Поскольку первый столбец матрицы F состоит из единиц, то обе строки матрицы F должны совпадать, откуда

$$y_2(1,\lambda_1) - y_2(1,\lambda_2) = 0, \quad y_1(1,\lambda_1) - y_1(1,\lambda_2) = 0.$$

Следовательно система (2.2) эквивалентна уравнению

$$\Delta(\lambda_1) = -M_{23}\, y_1(1,\lambda_1) - M_{31}\, y_2(1,\lambda_1) + M_{12} = 0.$$

Это уравнение с неизвестными минорами M_{23}, M_{31}, M_{12} представляет собой уравнение плоскости с нормальным вектором $(-y_1(1,\lambda_1), -y_2(1,\lambda_1), 1)^T$. Вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ сам является нормальным вектором искомой плоскости коэффициентов

$$a_1\, M_{23} - a_2\, M_{13} + a_3\, M_{12} = 0,$$

которая совпадает со $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Следовательно, искомое множество линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ представляет собой бесконечное множество плоскостей проходящих через начало координат, нормальные векторы которых «пробегают плоскость» с нормальным вектором $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = (-y_1(1,\lambda_1), -y_2(1,\lambda_1), 1)^T$. Другими словами, искомое множество линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ представляет собой множество линейных оболочек, для которых смешанное произведение $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f}$ равно нулю. Итак, предположив, что $\operatorname{rank} F = 1$, мы получили бесконечное число линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

Таким образом, если $\operatorname{rank} F = 2$, получаем единственную с точностью до линейных преобразований строк матрицу коэффициентов (2.10). Если $\operatorname{rank} F = 1$, то получаем бесконечное число матриц A, определяемых с точностью до линейных преобразований строк. Верно и обратное, если матрица коэффициентов A находится по двум собственным значениям λ_1 и λ_2 однозначно с точностью до линейных преобразований строк, то $\operatorname{rank} F = 2$. Если матрица коэффициентов находится по двум собственным значениям λ_1 и λ_2 неоднозначно с точностью до линейных преобразований строк, то $\operatorname{rank} F = 1$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Устойчивость решения

Итак, пусть числа λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) и ранг матрицы $F = F(\lambda_1, \lambda_2)$ равен двум. Тогда, как показано выше, матрицу A краевых условий (1.3), (1.4) можно представить в виде (2.10). Причем это представление единственно с точностью до линейных преобразований ее строк.

Следующий вопрос, который возникает — это вопрос об устойчивости решения.

Ранее авторами для другой задачи уже доказывалась устойчивость решения [16]. Доказательство проводилось с помощью метода Лагранжа. Здесь можно провести аналогичное доказательство. Однако нам представляется более наглядным другое доказательство, основанное на использовании канонических краевых условий, которое мы и приведем здесь.

Определение 3.1. *Краевые условия (1.3), (1.4) будем называть каноническими, если соответствующая матрица A имеет вид:*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \end{array} \right\|. \tag{3.1}$$

Заметим, что к каноническому виду приводятся все краевые условия (1.3), (1.4) за исключением условий Коши $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (соответствующая спектральная задача для условий Коши не имеет собственных значений, поэтому говорить о задаче восстановления краевых условий по собственным значениям в этом случае не имеет смысла). Из вида уравнения (1.1) следует, что функции $y_1(1, \lambda)$ и $y_2(1, \lambda)$ непрерывно зависят от λ. Поэтому если λ_1 и λ_2 изменятся мало, то и элементы матрицы (2.10) также изменятся мало. Отсюда и вытекает устойчивость соответствующей задачи.

4. Примеры

Пример 4.1. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть известны два ее собственных значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\pi$. Найдем краевые условия, которые соответствуют этим значениям.*

Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения являются функции $y_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$ и $y_2(x, \lambda) = (\sin \lambda x)/\lambda$. Поэтому из (2.10) получаем, что

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

а краевые условия имеют вид: $-y(0) - y'(0) + y(1) = 0$, $-y(0) + y(1) = 0$.

Пример 4.2. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть два ее собственных значения равны $\lambda_1 = 0,01$, $\lambda_2 = 6,29$ (отличаются от собственных значений предыдущего примера не более чем на 0,01). Используя представление (2.10) для матрицы A, получим с точностью до сотых те же самые краевые условия, что и в примере 4.1. Соответствующая матрица A имеет следующий вид:*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -0,99995 & -0,99998 & 1 \\ -0,99998 & -0,002167 & 1 \end{array} \right\|.$$

Пример 4.3. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть два ее собственных значения равны $\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_2 = 4\pi$. Используя представление (2.3) для матрицы F, получим:*

$$F = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Откуда следует, что искомое множество линейных оболочек $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ представляет собой бесконечное множество плоскостей проходящих через начало координат, нормальные векторы которых «пробегают плоскость» с нормальным вектором $\mathbf{f} = (-1, 0, 1)^T$. Таким образом, существует бесконечное число краевых условий (1.3), (1.4), соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_2 = 4\pi$. В качестве коэффициентов искомых краевых условий годятся любые, для которых смешанное произведение ненулевых *векторов* $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f}$ *равно нулю. Помимо краевых условий* $-y(0) - y'(0) + y(1) = 0$, $-y(0) + y(1) = 0$ *годятся, например, краевые условия* $y(0) = 0$ *и* $y(1) = 0$. *Действительно, в случае этих краевых условий имеем:*

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Заключение

Подытоживая можно заключить, что если числа λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) и ранг матрицы $F = F(\lambda_1, \lambda_2)$ равен двум, то задача отыскания матрицы A краевых условий (1.3), (1.4) с точностью до линейных преобразований строк является корректной: решение ее: 1) существует, 2) единственно, 3) непрерывно зависит от входных данных λ_1, λ_2. Найден явный вид решения поставленной обратной задачи в виде матрицы (2.10) коэффициентов краевых условий (1.3), (1.4).

Заметим, что для решения задачи идентификации краевых условий вид линейного дифференциального уравнения (1.1) не существенен. Ведь решение задачи (2.10) представляется через фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$. Линейное дифференциальное уравнение может быть и более общего вида. Главное, чтобы линейно независимые решения $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ были бы непрерывно дифференцируемыми функциями по x и λ.

Задача идентификации краевых условий (1.3), (1.4) имеет особенность по сравнению с общим случаем идентификации краевых условий (1.2). В восстановлении (1.3), (1.4) участвуют все миноры максимального порядка M_{12}, M_{13}, M_{23} (F_{12}, F_{13}, F_{23}). То есть какие бы значения мы им не приписали, всегда найдутся соответствующие краевые условия (1.3), (1.4). В общем случае это не так. Для идентификации общих краевых условий (1.2) необходимо выполнение соотношений Плюккера $M_{12}M_{34} + M_{13}M_{42} + M_{14}M_{23} = 0$ [13, 16]. В этом смысле задача идентификации краевых условий (1.3), (1.4) является уникальной.

Список литературы

1. Левитан Б. М., *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, М., 1984, 240 с.

2. Guliyev N. J., “Inverse eigenvalue problems for Sturm–Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions”, *Inverse Problems*, **21** (2005), 1315–1330.

3. Andrew A. L., “Computing Sturm–Liouville potentials from two spectra”, *Inverse Problems*, **22** (2006), 2069–2081.

4. Binding P. A. and Watson B. A., “An inverse nodal problem for two-parameter Sturm–Liouville systems”, *Inverse Problems*, **25** (2009), 1-19.

5. Nizhnik L., “Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem”, *Inverse Problems*, **26** (2010), 1–9.

6. Efendiev R. F., “Spectral analysis for one class of second-order indefinite non-self-adjoint differential operator pencil”, *Applicable Analysis*, **90**:12 (2011), 1837–1849.

7. Савчук А. М., Шкаликов А. А., “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:4 (2010), 34–53.

8. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М., “Обобщение теоремы единственности Борга на случай нераспадающихся краевых условий”, *Доклады Академии наук*, **438**:1 (2011), 1-4.

9. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М., *Обратная задача Штурма-Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями*, Изд-во МГУ, М., 2009, 184 с.

10. Садовничий В. А., “Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя”, *ДАН СССР*, **206**:2 (1972), 293–296.

11. Freiling G., Yurko V. A., “On the solvability of an inverse problem in the central symmetric case”, *Applicable Analysis*, **90**:12 (2011), 1819–1828.

12. Гусейнов И. М., Набиев И. М., “Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов”, *Математический сборник*, **198**:11 (2007), 47–66.

13. Ахтямов А. М., *Теория идентификации краевых условий и ее приложения*, Физматлит, М., 2009, 272 с.

14. Ахтямов А. М., “О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **6**:4 (2000), 995–1006.

15. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 526 с.

16. Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V., “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393–408.

On the identification of nonseparated boundary conditions

© **A.M. Akhtyamov**[5,6], **A.V. Mouftakhov**[7,8]

Abstract. A criterion for uniqueness of the nonseparated boundary conditions restoration for eigenvalue problem with the differential equation of order 2 from two eigenvalues is proved. An explicit solution of the problem is presented. The well-posedness of the problem is showed. Examples of boundary conditions identification for the specific spectral problems are considered.

Key Words: inverse eigenvalue problem, the eigenvalues, the boundary conditions

[5] Chief Researcher, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa; akhtyamovam@mail.ru;

[6] Head of the Continuum Mechanics Chair, Bashkir State University, Ufa

[7] Lector, The Jerusalem College of Engineering, Jerusalem, Israel; muftahov@yahoo.com

[8] Sami Shamoon Engineering College, Israel

УДК 517.938

Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерными поверхностными базисными множествами

© В.З. Гринес[1], Ю.А. Левченко[2]

Аннотация. Настоящая работа является продолжением работы [2], в которой были найдены необходимые и достаточные условия тологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов f и f' с неблуждающими множествами, состоящими из связных поверхностных двумерных базисных множеств, удовлетворяющих некоторому условию на структуру пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек из различных базисных множеств.

В настоящей работе допускается, что базисные множества могут быть несвязными и приводится обобщение введенного ранее топологического инварианта. Более того решена проблема реализации, то есть выделено множество допустимых инваринтов, для каждого из которых предъявлен стандартный представитель, принадлежащий рассматриваемому классу диффеоморфизмов.

Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, аттрактор, топологическая классификация

1. Введение и формулировка результатов

В работе рассматриваются сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f, заданные на замкнутых ориентируемых связных 3-многообразиях M^3, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [7], неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

В силу [8], [9] каждое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде конечного объединения $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ ($f^k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i, f(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+1} \quad (\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_1)$) замкнутых подмножеств ($k \geq 1$), которые называются периодическими компонентами множества $\mathcal{B}$, а число k - периодом базисного множества $\mathcal{B}$.

Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется репеллером диффеоморфизма f. Согласно [1] базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется поверхностным, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ (не обязательно связной), топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой носителем множества $\mathcal{B}$.

В [1] установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа многообразий, каждое

[1] Заведующий кафедрой высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2] Старший преподаватель кафедры высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com

из которых ручно вложено в M^3 и гомеоморфно двумерному тору. Более того, ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора[3]. Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть не гладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [10]).

Далее мы будем всегда предполагать, что неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств и ограничение диффеоморфизма f на носитель любого базисного множества из сохраняет его ориентацию. Это означает, что ограничение отображения f^k на любую периодическую компоненту (периода k) этого множества сохраняет его ориентацию. Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$.

Следующая лемма (доказательство приводится в разделе 1.2.) устанавливает связь между динамикой диффеоморфизма f и структурой многообразия M^3.

Лемма 1.1. *Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и состоят из одинакового числа $n_f \geq 1$ базисных множеств, периодические компоненты каждого из которых имеют один и тот же период $k_f \geq 1$. Множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит из $2n_f k_f$ компонент связности, граница каждой из которых состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера.*

Зафиксируем любую периодическую компоненту B базисного множества диффеоморфизма f. Обозначим через U_B трубчатую окрестность поверхности B и U^+, U^- компоненты связности $U(B) \setminus B$. Тогда для $k_f > 1$ существует единственное минимальное число $l_f \in \{1, \dots, k_f - 1\}$ такое, что хотя бы одна из компонент связности множества $M^3 \setminus (B \cup f^{l_f}(B))$ не содержит образов множества B под действием f^i для всех $i \in \mathbb{Z}$. В случае $k_f = 1$ положим $l_f = 0$. При этом, если $k_f \neq 2$, то существует в точности одна компонента с этим свойством и мы обозначим ее через K_B, а если $k_f = 2$, то существует ровно две такие компоненты, которые обозначим через K_B^+ и K_B^- таким образом, что $U^+ \subset K_B^+$, $U^- \subset K_B^-$. Кроме того, если $k_f = 1$, то граница K_B состоит только из одной компоненты B и $M^3 = cl(K_B)$, если $k_f = 2$, то граница K_B^+ и K_B^- состоит из объедиения $B \cup f(B)$ и $M^3 = clK_B^+ \cup clK_B^-$, если $k_f > 2$, то граница K_B состоит из объединения $B \cup f^{l_f}(B)$ и $M^3 = \bigcup\limits_{i=0}^{k_f-1} f^i(clK_B)$. Непосредственно проверяется, что число l_f не зависит от выбора компоненты B и числа k_f, n_f, l_f являются инвариантами топологической сопряженности.

Обозначим через G класс диффеоморфизмов $f: M^3 \to M^3$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $f \in G$ является структурно устойчивым[4];
2. $NW(f)$ состоит из двумерных поверхностных базисных множеств;
3. ограничение диффеоморфизма $f \in G$ на носитель любого базисного множества из $NW(f)$ сохраняет его ориентацию;

[3] Гиперболическим автоморфизмом тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм f_C, задаваемый целочисленной унимодулярной матрицей $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. То есть $f_C(x, y) = (ax + by, cx + dy) \ mod\ 1$

[4] В силу [5], [6], [3], необходимым и достаточным условием структурной устойчивости диффеоморфизма f является выполнение аксиомы A и строгого условия трансверсальности.

4. для любых точек x, y таких, что $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$ пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ либо пусто, либо каждая компонента связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей ровно две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, а другая $\mathcal{R}$.

Лемма 1.2. *Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где A - периодическая компонента некоторого аттрактора и R - периодическая компонента некоторого репеллера. Тогда существует гомеоморфизм $H_V : T^2 \times [0,1] \to cl(V)$, такой что $H_V(T^2 \times \{0\}) = A$, $H_V(T^2 \times \{1\}) = R$ и для любой точки $z \in T^2$ существуют точки $x \in A$, $y \in R$ такие, что $H_V(z \times [0,1])$ есть замыкание компоненты связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ с граничными точками x, y, где $x = H_V(z,0), y = H_V(z,1)$.*

Доказательство приведено в разделе 2..

Следующая лемма является следствием леммы 1.2. и мы приводим ее без доказательства.

Лемма 1.3. *Пусть B — периодическая компонента некоторого базисного множества диффеоморфизма f периода k_f. Тогда:*

a) если $k_f = 1$, то существуют непрерывные отображения $H_1^+, H_1^- : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B)$ и $0 < \varepsilon < 1$ такие, что $H_1^+(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_1^-(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_1^+(T^2 \times (0,\varepsilon]) \subset U^+$, $H_1^-(T^2 \times (0,\varepsilon]) \subset U^-$ и $H_1^+|_{T^2 \times [0,1)}$, $H_1^-|_{T^2 \times [0,1)}$ есть взаимно однозначные отображения;

b) если $k_f = 2$, то существуют гомеоморфизмы $H_2^+ : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B^+)$, $H_2^- : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B^-)$ такие, что $H_2^+(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_2^-(T^2 \times \{0\}) = B$;

c) если $k_f > 2$, то существует гомеоморфизм $H : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B)$, такой что $H(T^2 \times \{0\}) = B$.

Отображения H_i^σ ($i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$) обладают следующим свойством: для любой точки $z \in T^2$ множества $H_i(z \times [0,1])$, $H(z \times [0,1])$ являются объединением замыкания $2n_f$ дуг, каждая из которых является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ для некоторых точек x, y, где $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{R}$.

Рассмотрим два случая: $k_f \leq 2$, $k_f > 2$, в каждом из которых зададим гомеоморфизмы множества B на $f^{l_f}(B)$ следующим образом.

В случае $k_f \leq 2$ зададим гомеоморфизм $h_i^\sigma : T^2 \to B$ по формуле $h_i^\sigma = H_i^\sigma|_{T^2 \times \{0\}}$, где $i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$, и гомеоморфизм $\tau^\sigma : B \to f^{l_f}(B)$ по формуле $\tau^\sigma(b) = H_i^\sigma((h_i^\sigma)^{-1}(b), 1)$, где $b \in B$, $i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$. Заметим, что в случае $k_f = 1$, τ^σ есть отображение множества B на B и справедливо равенство $\tau^+ = (\tau^-)^{-1}$.

В случае $k_f > 2$ зададим гомеоморфизм $h : T^2 \to B$ по формуле $h = H|_{T^2 \times \{0\}}$ и гомеоморфизм $\tau : B \to f^{l_f}(B)$ по формуле $\tau(b) = H(h^{-1}(b), 1)$ для любой точки $b \in B$.

Определение 1.1. *Пусть $f, f' \in G$ такие что $k_f = k_{f'} = k$, $l_f = l_{f'} = l$. Назовем периодические компоненты $B \subset \mathcal{N}W(f)$ и $B' \subset NW(f')$ эквивалентными, если они одновременно являются атракторами или репеллерами диффеоморфизмов f и f' и существует гомеоморфизм $g : B \to B'$ такой, что*

1. ${f'}^k|_{B'} = g f^k g^{-1}|_{B'}$,

2. если $k \leq 2$, то ${f'}^l g f^{-l}|_{f^l(B)} = {\tau'}^{\sigma'} g (\tau^\sigma)^{-1}|_{f^l(B)}$, для некоторых $\sigma, \sigma' \in \{+,-\}$.

3. если $k > 2$, то ${f'}^l g f^{-l}|_{f^l(B)} = \tau' g \tau^{-1}|_{f^l(B)}$.

Следующая теорема является обобщением результатов, полученных в работе [2] (теорема 1.1).

Т е о р е м а 1.1. *Для того, чтобы диффеоморфизмы $f, f' \in G$ были топологически сопряжены*[5] *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $k_f = k_{f'}$, $l_f = l_{f'}$ и $n_f = n_{f'}$;*

2) для некоторой периодической компоненты $B \subset NW(f)$ нашлась эквивалентная ей периодическая компонента $B' \subset NW(f')$.

Доказательство теоремы 1.1. является не принципиальной модификацией доказательства теоремы 1.1 в [2], поэтому мы его не приводим. В настоящей работе основное внимание уделяется решению проблемы реализации. Вводится класс $\tilde{G}$ стандартных диффеоморфизмов, принадлежащих G, и доказывается, что любой диффеоморфизм из G сопряжен с некоторым диффеоморфизмом класса $\tilde{G}$.

Пусть $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - целочисленная унимодулярная матрица, $f_C : T^2 \to T^2$ - алгебраический гиперболический автоморфизм двумерного тора T^2, индуцированный матрицей $\mathbf{C}$, и $\tau : T^2 \to T^2$ - гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $f_C\tau = \tau f_C$. Тогда в силу [11] (теорема 2) гомеоморфизм τ является линейным преобразованием[6] и, следовательно, диффеоморфизмом. Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(z,t) = (\tau(z), t-1)$. Положим $G = \{\gamma^k, k \in Z\}$ и $M_{C,\tau} = (T^2 \times R)/G$. Обозначим через $p_{M_{C,\tau}} : T^2 \times R \to M_{C,\tau}$ естественную проекцию. Заметим, что $M_{C,\tau}$ является гладким многообразием.

Т е о р е м а 1.2. *Для каждого гиперболического автоморфизма $f_C : T^2 \to T^2$ и линейного преобразования $\tau : T^2 \to T^2$, удовлетворяющего условию $f_C\tau = \tau f_C$, и набора натуральных чисел $n_f > 0, k_f \geq 1, l_f \in \{0, \dots k_f - 1\}$ существует диффеоморфизм $\tilde{f} : M_{C,\tau} \to M_{C,\tau}$, принадлежащий классу G, неблуждающее множество которого состоит из n_f поверхностных двумерных аттракторов и n_f поверхностных двумерных репеллеров периода k_f, причем ограничение диффеоморфизма $\tilde{f}^{k_f}$ на периодическую компоненту некоторого базисного множества сопряжено с $f_C^{k_f}$.*

Обозначим через $\tilde{G}$ множество всех диффеоморфизмов, построенных с помощью конструкции, описанной при доказательстве теоремы 1.2.. Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.3. *Для любого диффеоморфизма из класса G существует диффеоморфизм $\tilde{f} \in \tilde{G}$, топологически сопряженный с f.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ и грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

[5] Напомним, что два диффеоморфизма $f, f' : M^n \to M^n$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $g : M^n \to M^n$ такой, что $f' = gfg^{-1}$.

[6] Преобразование $\tau : T^2 \to T^2$ называется линейным, если оно представляется в виде суперпозиции алгебраического автоморфизма тора и группового сдвига T_γ, где $T_\gamma(x_1, x_2) = (x_1 + \gamma_1, x_2 + \gamma_2)\ mod\ 1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

2. Реализация (доказательство теорем 1.2. и 1.3.)

2.1. Доказательство леммы 1.1.

Покажем, что множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты. Предположим противное. Согласно [7] (следствие 6.3 к теореме 6.2) все многообразие M^3 представляется в виде $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\Lambda_i} = \bigcup\limits_i W^u_{\Lambda_i}$, где Λ_i - базисное множество диффеоморфизма f из разложения $NW(f) = \bigcup\limits_i \Lambda_i$. Пусть $\mathcal{A} = \emptyset$. Тогда $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\Lambda_i}$ при этом согласно [4] для любой точки $z \in \mathcal{R}$ устойчивое многообразие $W^s(z)$ принадлежит $\mathcal{R}$. Следовательно, $M^3 \subset \mathcal{R}$, что невозможно, так как множество $\mathcal{R}$ двумерно. Таким образом, множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты.

Рассмотрим множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ и обозначим через K его любую компоненту связности. Заметим, что $K \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{A}} W^s(z)$, $K \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{R}} W^u(z)$. Тогда существует единственная компонента связности A некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и единственная компонента связности R некоторого репеллера из множества $\mathcal{R}$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$ и $K \subset \bigcup\limits_{z\in R} W^u(z)$. Следовательно, $clK = A \cup K \cup R$ и $A \cup R \subset \partial K$. Покажем, что $\partial K = A \cup R$. Предположим противное. Пусть существует компонента некоторого аттрактора A' такая, что $A' \cap \partial K \neq \emptyset$. Тогда в силу того, что компонента A' гомеоморфна ручно вложенному в M^3 тору [1] для любой окрестности $U(A')$ аттрактора A' справедливо $U(A') \cap K \neq \emptyset$, что невозможно, так как $K \subset \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$. Таким образом, получаем $\partial K = A \cup R$

Покажем, что число компонент всех аттракторов из множества $\mathcal{A}$ совпадает с числом компонент репеллеров из множества $\mathcal{R}$. Зафиксируем любую компоненту некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и обозначим ее через A_1. Тогда A_1 является границей двух областей $K_1, K_2 \subset M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$. Пусть $\partial K_1 = A_1 \cup R_1$ и $\partial K_2 = A_1 \cup R_2$. Тогда либо R_1 и R_2 совпадают и доказываемое утверждение верно, либо существуют области K_3, K_4 такие, что $R_1 \subset \partial K_3$, $R_2 \subset \partial K_4$. Обозначим A_2 граничную компоненту области K_4 отличную от R_2 и A_3 граничную компоненту области K_3, отличную от R_1. Возможны 2 случая: либо $A_2 = A_3$ и доказываемое утверждение верно, либо существуют области K_5, K_6 в границу которых входят компоненты A_3, A_2 соответственно. Продолжая рассуждения и учитывая, что число базисных множеств конечно получаем, что число периодических компонент всех аттракторов совпадает с числом периодических компонент всех репеллеров.

Докажем, что все периодические компонеты из множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ имеют один и тот же период. Для этого сначала покажем, что если в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существует компонента периода 1, то и все компоненты множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ будут периода 1. Предположим противное, и предположим для определенности, что некоторая компонета связности A из множества $\mathcal{A}$ имеет период единица. Пусть K - область принадлежащая $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial K = A \cup R$, где R компонента связности, принадлежащая множеству $\mathcal{R}$. Покажем, что R также имеет период единица. Предположим противное, то есть $f(R) \neq R$. Положим $\bar{K} = f(K)$. Тогда $\bar{K} \neq K$ и Заметим, что $\partial \bar{K} = f(A) \cup f(R) = A \cup f(R)$ и $K \neq \bar{K}$. Рассмотрим трубчатую окрестность $U(A)$ аттрактора A ($U(A) \subset K \cup \bar{K}$). Обозначим U, $\bar{U}$ компоненты связности множества $U(A) \setminus A$ такие, что $U \subset K$, и $\bar{U} \subset \bar{K}$ соответственно. Так как A по предположению имеет период 1, то $f(U) \subset \bar{K}$ и $f(U) \cap \bar{U} \neq \emptyset$. Получаем противоречие с тем, что ограничение диффеоморфизма f на A сохраняет его ориентацию.

Пусть теперь в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существуют компоненты различного периода. Обозначим k_i период компоненты $B_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. Среди чисел k_i выберем наименьшее и обозначим его k_f.

Рассмотрим диффеоморфизм $g = f^k$, для которого по крайней мере одна из компонент множества $NW(g)$ будет являться неподвижной. Тогда в силу доказанного все компоненты $g(B_i)$ также неподвижны, а значит все B_i имеют период k_f для любого i. Лемма 1.1. доказана.

2.2. Доказательство леммы 1.2.

Пусть V - компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где A - периодическая компонента некоторого аттрактора и R - периодическая компонента некоторого репеллера. Так как в силу [1] периодическая компонента A гомеоморфна двумерному тору T^2, то существует гомеоморфизм $h : A \to T^2$. В силу условия 4, определяющего класс G, для любой точки $v \in int\ V$ существует дуга l_v, $v \in l_v$ с граничными точками $x \in A, y \in R$ такая, что l_v является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$. Обозначим через ν проекцию вдоль дуги l_v, ставящую в соответствие любой точке $v \in cl(l_v)$ точку $x = \nu(v) \in A$ и через $\rho_x(v)$ длину дуги от точки v до точки x.

Для любой точки $w \in T^2 \times [0,1]$, $w = (z,t)$, положим $x = h^{-1}(z)$ ($x \in A$). Зададим гомеоморфизм $H_V : T^2 \times [0,1] \to cl(V)$ следующим образом. Положим $H(w) = v$, где $v \in cl(V)$ такая точка, что $\nu(v) = x$, и выполняется условие $\frac{\rho_x(v)}{\rho_x(y)} = t$. Отображение $H_V : T^2 \times [0,1] \to cl(V)$ по построению является взаимооднозначным и удовлетворяет условиям $H_V(T^2 \times \{0\}) = A$, $H_V(T^2 \times \{1\}) = R$, для любой точки $z \in T^2$ существуют точки $x \in A$, $y \in R$ такие, что $H_V(z \times [0,1])$ есть замыкание компоненты связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ с граничными точками x, y, где $x = H_V(z,0), y = H_V(z,1)$. Из непрерывной зависимости устойчивых и неустойчивых многообразий точек из $A \cup R$ на компактных множествах следует, что H_V непрерывно и, следовательно, является гомеоморфизмом.

Лемма 1.2. доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.2.

Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(x,t) = (\tau(x), t-1)$. Положим $G = \{\gamma^k, k \in Z\}$ и $M_{C,\tau} = (T^2 \times R)/G$. Обозначим через $p_{M_{C,\tau}} : T^2 \times R \to M_{C,\tau}$ естественную проекцию. Пусть $\varphi_0 : I \to I$ — диффеоморфизм отрезка $I = [0, \frac{1}{k_f}]$ с конечным числом $2n_f + 1$ неподвижных гиперболических точек: источников $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_f}$ и стоков $\omega_1, \ldots, \omega_{n_f+1}$, причем будем считать, что точки ω_1, ω_{n_f+1} принадлежат концам отрезка I. Определим диффеоморфизм $\varphi_1 : [0,1] \to [0,1]$ по формуле $\varphi_1(t) = \varphi_0(t - \frac{k}{k_f}) + \frac{k}{k_f}$, где k наименьшее из чисел $\{0, \ldots, k_f - 1\}$ такое, что $t - \frac{k}{k_f} \in I$. Для любой точки $t \in R$ положим $\Phi(t) = \varphi_1(t-n) + n$, где $n \in Z$ - число с наименьшим модулем, для которого $t - n \in [0,1]$. Непосредственно проверяется, что $\Phi(t-m) = \Phi(t) - m$ для любого $m \in Z$. Зададим на пространстве $T^2 \times R$ отображение $F(x,t) = (f_C(x), \Phi(t) + \frac{l_f}{k_f})$. Покажем, что для любого $m \in Z$ и $z = (x,t)$ выполняется $F(\gamma^m(z)) = \gamma^m(F(z))$. В самом деле, $F(\gamma^m(x,t)) = F(\tau(x), t-m) = (f_C\tau(x)), \Phi(t-m) + \frac{l_f}{k_f}) = (\tau f_C(x), \Phi(t) - m + \frac{l_f}{k_f}) = \gamma^m(F(x,t))$. Следовательно, отображение $F : T^2 \times R \to T^2 \times R$ является накрывающим отображением для диффеоморфизма $\tilde{f} : M_{C,\tau} \to M_{C,\tau}$, определенного формулой $\tilde{f} = p_{M_{C,\tau}}(F(p^{-1}_{M_{C,\tau}}(z)))$.

В силу описанной конструкции неблуждающее множество диффеоморфизма $\tilde{f}$ является гиперболическим, состоит из $n_f k_f$ периодических компонент (диффеоморфных T^2) периода k_f, являющихся аттракторами и репеллерами. Более того, периодические точки диффеоморфизма $\tilde{f}$ образуют множество плотное в его неблуждающем множестве, то есть диффеоморфизм $\tilde{f}$ удовлетворяет аксиоме A. Из построения также следует, что устойчивые и неустойчивые многообразия точек неблуждающего множества пересекаются трансверсально и, следовательно, диффеоморфизм $\tilde{f}$ является структурно устойчивым. При этом пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек базисных множеств диффеоморфизма $\tilde{f}$ либо пусто, либо представляет собой счетное объединение открытых дуг, граничные точки которых лежат в $NW(\tilde{f})$. Таким образом, $\tilde{f} \in G$.

2.4. Доказательство теоремы 1.3.

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм из класса G, неблуждающее множество которого состоит из n_f аттракторов и n_f репеллеров и B — периодическая компонента некоторого базисного множества диффеоморфизма f периода k_f. Для определенности будем считать B периодической компонентой некоторого аттрактора. Положим $g = f^{k_f}$ и аналогично конструкции описанной в разделе 1. зададим отображения H_1^+, τ_g^+ для диффеоморфизма g, где $\tau_g^+ = H_1^+((h_1^+)^{-1}(z), 1)$.

Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(z, t) = (\tau(z), t - 1)$, где $\tau = (h_1^+)^{-1}\tau_g^+ h_1^+$ и положим $\Gamma = \{\gamma^k, k \in Z\}$.

Зададим накрытие $p : T^2 \times R \to M^3$ следующим образом, для любой точки $w \in T^2 \times R$, $w = (z, t)$, положим $p(w) = p(z, t) = H_1^+(\tau^n(z), t - n)$, где $n \in Z$ - число с наименьшим модулем, для которого точка $(\tau^n(z), t - n)$ принадлежит $T^2 \times [0, 1]$. Заметим, что $p(z, 1) = p(\tau(z), 0)$. В самом деле, $p(\tau(z), 0) = H_1^+(\tau(z), 0) = h_1^+(\tau(z)) = h_1^+((h_1^+)^{-1}\tau_g^+ h_1^+(z)) = \tau_g^+ h_1^+(z) = H_1^+((h_1^+)^{-1}(h_1^+(z)), 1) = H_1^+(z, 1) = p(z, 1)$.

Из леммы 1.2. следует, что на множестве M^3 определено f-инвариантное одномерное слоение N_f, каждый слой которого является объединением замыканий открытых дуг, каждая из которых является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ при некоторых $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$. По построению для любой точки $z \in T^2$ накрытие p отображает множество $\{z\} \times R$ в некоторый слой слоения N_f. Тогда для диффеоморфизма f существует поднятие $F : T^2 \times R \to T^2 \times R$, которое имеет вид $F(z, t) = (\Phi(z), \Psi(t))$, где $\Phi(z)$ есть гомеоморфизм из T^2 в T^2 и Ψ - гомеоморфизм из R в R. Кроме того $F(z, t)$ удовлетворяет условию $F(\gamma^m(w)) = \gamma^m(F(w))$ ($m \in Z$, $\gamma \in \Gamma$), откуда следует, что $\Phi\tau = \tau\Phi$. Так как B - периодическая компонента периода k_f, то $f^{k_f}(B) = B$ и $\Phi^{k_f} = (h_1^+)^{-1} f^{k_f} h_1^+$. В силу того, что ограничение диффеоморфизма f^{k_f} сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора, получаем, что отображение Φ^{k_f} также сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. Аналогично [1] (теорема 2) доказывается, что и отображение Φ сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора $f_C : T^2 \to T^2$, индуцированным некоторой матрицей $\mathbf{C}$, то есть существует гомеоморфизм $\tilde{h} : T^2 \to T^2$ такой, что выполняется равенство $\tilde{h} f_C = \Phi\tilde{h}$. Положим $\tau' = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h}$. Покажем, что выполняется равенство $f_C\tau' = \tau' f_C$. В самом деле, $f_C\tau' = f_C\tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\Phi\tilde{h}\tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\Phi\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\tau\Phi\tilde{h}$, с другой стороны $\tau' f_C = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} f_C = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h}\tilde{h}^{-1}\Phi\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\tau\Phi\tilde{h}$.

Зададим на пространстве $T^2 \times R$ группу движений $\Gamma' = \{\gamma'^k, k \in Z\}$, где $\gamma' : T^2 \times R \to T^2 \times R$ - диффеоморфизм, заданный формулой $\gamma'(z, t) = (\tau'(z), t - 1)$. Пусть $\tilde{F} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ - такое отображение, что $\tilde{F}(z, t) = (f_C(z), \tilde{\Psi}(t))$, где $\tilde{\Psi}(t)$ - гладкое отображение построенное согласно конструкции, описанной при доказательстве теоремы 1.2., и сопряженное с $\Psi(t)$ посредством гомеоморфизма h_Ψ. Причем, отображения h_Ψ и $\tilde{\Psi}$ такие, что выполняются условия $\tilde{\Psi}(t - m) = \tilde{\Psi}(t) - m$, $h_\Psi(t - m) = h_\Psi(t) - m$ для любого целого числа m. Покажем, что $\tilde{F}(\gamma'^m(w)) = \gamma'^m(\tilde{F}(w))$ для любого $m \in Z$ и любой точки $w = (z, t)$. В самом деле, $\tilde{F}(\gamma'^m(w)) = \tilde{F}(\tau'(z), t - m) = (f_C(\tau'(z)), \tilde{\Psi}(t - m)) = (\tau' f_C(z), \tilde{\Psi}(t) - m) = \gamma'^m(\tilde{F}(w))$. Тогда отображение $\tilde{F} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ является накрывающим отображением для некоторого диффеоморфизма $\tilde{f} : M^3 \to M^3$, определенного формулой $\tilde{f}(w) = p(\tilde{F}(p^{-1}(w)))$. По построению гомеоморфизм $\tilde{H} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ заданный формулой $\tilde{H}(z,t) = (\tilde{h}(z), h_\Psi(t))$ удовлетворяет условию $\tilde{H}(\gamma'^m(w)) = \gamma'^m(\tilde{H}(w))$ ($m \in Z$, $\gamma' \in \Gamma$) и является сопрягающим для F и $\tilde{F}$, то есть $\tilde{H}\tilde{F} = F\tilde{H}$. Тогда $\tilde{f} \in \tilde{G}$ и диффеоморфизмы f и $\tilde{f}$ топологически сопряжены.

Список литературы

1. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях.”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813 – 826.

2. Гринес В.З., Левченко Ю.А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Труды СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

3. Mane R., “A proof of the C^1 stability conjecture”, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ . Math.*, 1987, № 66, 161 – 210.

4. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Математический сборник*, **84**:2 (1971), 301 – 312.

5. Robbin J., “A structural stability theorem”, *Ann. of Math.*, **94**:2 (1971), 447 – 493.

6. Robinson C., “Structural stability of C^1 diffeomorphisms”, *Differential Equations*, 1976, № 22, 28 – 73.

7. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 – 817.

8. Bowen R., “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms”, *Transactions of the American. Math. Soc.*, **154** (1971), 337 – 397.

9. Аносов Д.В., “Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем”, *Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Качественные методы, Ин-т математики АН УССР*, **2** (1970), 39 – 45.

10. Kaplan J., Mallet-Paret J. Yorke J., “The Lapunov dimension of nonwhere difffernţiable attracting torus”, *Ergodic theory and Dynam. Systems.*, 1984, № 2, 261 – 281.

11. Аров Д. З., “О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп”, *Успехи мат. наук*, **18**:5 (1963), 333 – 338.

On the realization of structurally stable diffeomorphisms with 2-dimensional surface basic sets.

© V.Z. Grines[7], Y.A. Levchenko[8]

Abstract. The present paper is continuation of the paper [2] which was devoted to topological classification of structurally stable diffeomorphisms with 2-dimensional connected surface basic sets. In the present paper topological classification of such diffeomorphisms was obtained in case if $NW(f)$ consist of 2-dimensional surface basic sets (which are not necessary connected) under certain conditions on the structure of the intersection of two-dimensional invariant manifolds. Moreover in this paper the problem of the realization of such diffeomorphisms was solved.

Key Words: diffeomorphism, basic set, attractor, topological classification.

[7] Heard of High Mathematics Chair, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru

[8] Assistant Professor of Chair High Mathematics, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, ulev4enko@gmail.com

УДК 517.938

О внутренней и окрестностной классификации аттракторов

© **Е.В. Жужома**[1], **Н.В. Исаенкова**[2], **Л.А. Куприна**[3], **В.С. Медведев**[4]

Аннотация. Изучается связь между внутренней и окрестностной топологической сопряженностью аттракторов некоторого класса динамических систем.

Ключевые слова: Внутренняя сопряженность, окрестностная сопряженность, топологическая эквивалентность

В качественной теории динамических систем имеется два основных типа классификации преобразований с точностью до сопряженности: внутренняя и внешняя. Приведем точные определения. Пусть преобразования $f : M \to M$, $g : N \to N$ имеют инвариантные множества Λ_f, Λ_g соответственно. Ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ этих преобразований на их инвариантные множества называются *внутренне сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : \Lambda_f \to \Lambda_g$, такой, что $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$. Если φ можно продолжить до гомеоморфизма $\varphi : M \to N$ или $\varphi : U(\Lambda_f) \to U(\Lambda_g)$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_f)$, $U(\Lambda_g)$ множеств Λ_f, Λ_g соответственно, сохранив соотношение $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$, то $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ называются *окрестностно сопряженными.* Ясно, что из окрестностной сопряженности следует внутренняя сопряженность. Соответствующую классификацию будем называть *внутренней* и *окрестностной.*

Пусть M - компактное гладкое многообразие с непустой границей, и пусть $f : M \to f(M) \subset M$ - диффеоморфизм на свой образ, причем включение $f(M) \subset M$ собственное. Предположим, что f имеет инвариантное замкнутое множество Λ (основные понятия и факты см. в [1], [2]). Следуя [23], [25], будем называть Λ *растягивающимся аттрактором*, если Λ есть притягивающее, гиперболическое множество, в котором плотны периодические точки, и размерность неустойчивого многообразия любой точки из Λ равна топологической размерности $d = \dim \Lambda$ множества Λ. Согласно [15] и [25], растягивающиеся аттракторы локально устроены как произведение канторова множества на евклидово пространство $\mathbb{R}^d$.

Из работ Гринеса В. З. [3]-[7], Жирова А.Ю. [10]-[12], Плыкина Р. В.[17], можно извлечь, что из внутренней сопряженности одномерных растягивающихся аттракторов диффеоморфизмов двумерных компактных многообразий следует их окрестностная сопряженность. На многообразиях размерности не меньше трех окрестностная классификация растягивающихся аттракторов коразмерности один была получена Гринесом В.З., Жужомой Е.В., Плыкиным Р.В. в работах [8], [9], [16].

Внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы получена Вильямсом [23] - [25]. Поэтому естественным образом возникает вопрос: влечет ли внутренняя классификация окрестностную. В работе [21] было доказано, что ответ, вообще говоря, отрицательный. Именно, Робинсон и Вильямс [21] построили

[1] профессор, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] старший преподпватель, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

[3] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[4] старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

два диффеоморфизма $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ пятимерных компактных многообразий M, N в себя с двумерными растягивающимися аттракторами Λ_f, Λ_g соответственно такими, что $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены. Что касается других размерностей, то этот вопрос до настоящего времени оставался открытым.

Главным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая расширяет набор размерностей, в которых внутренняя классификация отличается от окрестностной:

Теорема 1.1. *Существуют четырехмерные компактные многообразия M, N и диффеоморфизмы $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ с одномерными растягивающими аттракторами Λ_f, Λ_g соответственно такие, что ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.*

Для доказательства этого факта построим сперва общую конструкцию диффеоморфизма с одномерным растягивающимся аттрактором.

Пусть $M^n = M$ - компактное гладкое n-многообразие с непустым краем, наделенное римановой структурой, которая индуцирует на M метрику ρ. Для гладкого преобразования $\psi : M \to M$ будем обозначать через $D\psi : TM \to TM$ дифференциал ψ, который определен на касательном расслоении TM. Предположим, что существует гомотопная тождественному периодическая изометрия $R : M \to M$ такая, что

$$R^k \equiv id, \quad k \geq 2, \quad DR^i = id, \quad i \geq 1. \tag{1.1}$$

Пусть $e : M \to e(M) \subset M$ - гладкое вложение M в себя, являющееся равномерно сжимающим отображением $e(M) \subset int\ M$, т.е. существует $0 < \lambda < 1$ такое, что

$$diam\ (e^n(M)) \leq \lambda^n \cdot diam\ (M), \quad diam\ (M) = \max_{(p,q)\in M\times M} \rho(p,q) \tag{1.2}$$

и множества

$$e(M), R\left(e(M)\right), \ldots, R^{k-1}\left(e(M)\right) \quad \text{попарно не пересекаются.} \tag{1.3}$$

Определим отображение $f_i : [\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}] \times M \to [0;1] \times M$, $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, положив

$$f_i(t,z) = \left(kt - i, R^i \circ e(z)\right), \quad t \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right], \quad z \in M. \tag{1.4}$$

На рис. 1 приведена иллюстрация для $k = 3$.

Нетрудно показать, что f_i является сюрьктивным отображением множества $[\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}] \times M$ на множество $[0;1] \times M$, где $i \in \{0,\ldots,k-1\}$.

Рассмотрим фактор-многообразие M_1, получаемое из прямого произведения $[0;1]\times M$ отождествлением точек $(1,z)$, $(0,R(z))$,

$$M_1 = [0;1] \times M / \left((1,z) \simeq (0,R(z))\right), z \in M.$$

Согласно (1.4),

$$f_i\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (1, R^i \circ e(z)), \quad f_{i+1}\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (0, R^{i+1} \circ e(z)) \simeq (1, R^i \circ e(z)).$$

Поэтому совокупность отображений f_0, $\ldots$, f_{k-1} порождает отображение $F : M_1 \to M_1$, которое является гомеоморфизмом на свой образ, $M_1 \to F(M_1) \subset M_1$. Так как R

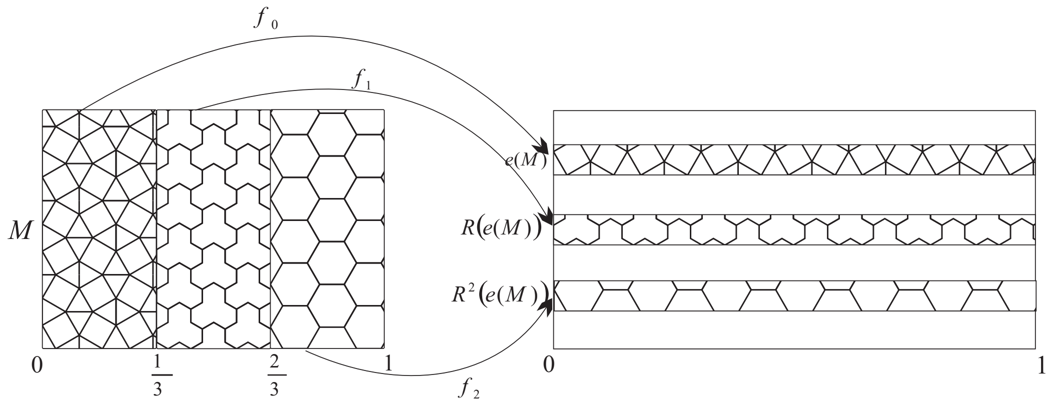


Рис. 1:

гомотопно тождественному, то M_1 гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times M$. Из (1.4) получаем

$$Df_i(t,z) = Df_{i+1}(t,z) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & De(z) \end{pmatrix},$$

поскольку

$$DR^i \circ e(z) = DR(R^{i-1} \circ e(z)) \cdot \ldots \cdot DR \circ e(z) \cdot De(z) = De(z).$$

Отсюда и (1.4) вытекает, что F является диффеоморфизмом на свой образ, причем дифференциал DF сохраняет естественное разложение $T(M_1) = T(S^1 \times M) = T(S^1) \oplus T(M)$,

$$DF = (k, De) : T(S^1) \oplus T(M) \to T(S^1) \oplus T(M). \tag{1.5}$$

Так как включение $F(M_1) \subset M_1$ собственное и отображение $M_1 \to F(M_1)$ является диффеоморфизмом на свой образ, то получаем цепочку последовательно вложенных множеств

$$\cdots \subset \mathcal{N}_{j+1} \subset \mathcal{N}_j \subset \cdots \subset \mathcal{N}_1 \subset M_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_j = \bigcap_{i=0}^{j} F^i(M_1). \tag{1.6}$$

Положим

$$\bigcap_{j \geq 0} \mathcal{N}_j = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M_1) \stackrel{\text{def}}{=} Sol(F).$$

Так как множества $\mathcal{N}_j$ замкнутые, то из (1.6) следует, что $Sol(F)$ есть замкнутое и притягивающее множество.

Лемма 1.1. *Множество $Sol\ (F)$ инвариантно относительно F и F^{-1}.*

Доказательство. Согласно (1.6), $F^i(M_1) \supset F^{i+1}(M_1)$. Тогда

$$F(Sol\ (F)) = F(\bigcap_{n \geq 0} F^n(M_1)) = \bigcap_{n \geq 0} F^{n+1}(M_1) = Sol\ (F).$$

$$F^{-1}(Sol\ (F)) = F^{-1}(\bigcap_{n \geq 0} F^n(M_1)) = \bigcap_{n \geq 0} F^{n-1}(M_1) = Sol\ (F).$$

Доказательство закончено.

Множество $\{t\} \times M \stackrel{\text{def}}{=} M_t$ назовем t - *сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с M посредством проекции $p_2 : S^1 \times M \to M$. Согласно (1.4), диффеоморфизм F переводит t-сечение в $(kt \bmod 1)$ - сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(M_t)$ по следующему правилу $diam\ F^n(M_t) = diam\ p_2(F^n(M_t))$.

Следующие две леммы описывают локальную структуру множества $Sol(F)$.

Лемма 1.2. *Для любого фиксированного $t \in S^1$, $diam\ F^n(M_t) \to 0$ при $n \to \infty$, причем стремление величины $diam\ F^n(M_t)$ к нулю равномерно относительно t.*

Доказательство. Поскольку R - изометрия, а отображение F переводит t-сечение в $(kt \mod 1)$-сечение, то $diam\ F^n(M_t) = diam\ e^n(M)$. Отсюда и 1.2 следует требуемый результат.
Доказательство закончено.

Лемма 1.3. *Для любого фиксированного $t \in S^1$ пересечение $M_t \cap Sol(F) = C_t$ - множество канторовского типа. $Sol(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению C_t на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Множество $M_t \cap Sol(F)$ замкнуто, так как является пересечением замкнутых множеств.

Сперва покажем индукцией по n, что пересечение $\mathcal{N}_n \cap M_t$ состоит из k^n связных компонент. Непосредственно из определения отображения F вытекает, что множество $M_t \cap F(M_1)$ состоит из k связных компонент. Так как имеется k различных значений t_1, $\ldots$, $t_k \in S^1$ таких, что $t = kt_1 \mod 1 = \cdots = kt_k \mod 1$, то

$$M_t \cap \mathcal{N}_n = \bigcup_{i=1}^{k} F(\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}).$$

Согласно предположению индукции, каждое множество $\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}$ состоит из k^{n-1} связных компонент. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Согласно лемме 1.2., диаметр каждой компоненты связности стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $M_t \cap Sol(F)$ совершенное и нигде не плотное. Поэтому $Sol(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.
Доказательство закончено.

Следуя [23], [25], построим символическую модель ограничения $F|_{Sol(F)}$ отображения F на $Sol(F)$. Обозначим через $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (в этой топологии база образована множествами $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1, и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1, см., например, [14], стр. 155). Точками множества $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, где $t_i \in S_i^1$. Обозначим через Σ_k^- подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^{\infty}$, где $t_i = kt_{i+1} \mod 1$ при всех $i \geq 0$. Определим на Σ_k^- отображение $\widehat{E}_k : \Sigma_k^- \to \Sigma_k^-$, положив

$$\widehat{E}_k\left(\{t_0, \ldots, t_i, \ldots\}\right) = \{kt_0 \mod 1, t_0, \ldots, t_i \ldots\}.$$

Пара $(\Sigma_k^-, \widehat{E}_k)$ является обратным пределом линейного растягивающего отображения окружности $E_k : S^1 \to S^1$, $E_k(x) = kx \mod 1$, степени k.

Важной для построения символической модели является следующая лемма.

Лемма 1.4. *Каждой точке $p \in Sol\ (F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^{\infty}$, $t_i \in S^1$, и соответствующая последовательность t_i-сечений M_{t_i} таких, что*

- $p \in \dots \subset F^{i+1}(M_{t_{i+1}}) \subset F^i(M_{t_i}) \subset \dots \subset M_{t_0}$;
- $p = \cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$;
- $t_i = E_k(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in M_{t_0}$. Из (1.4) следует, что существуют s_1 , ..., $s_k \in S^1$ такие, что $E_k(s_1) = E_k(s_2) = \ldots = E_k(s_k) = t_0$, и множества $F(M_{s_1})$, ..., $F(M_{s_k})$ принадлежат t_0 -сечению M_{t_0} . Из (1.3) следует, что $F(M_{s_1})$, ..., $F(M_{s_k})$ попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(M_{s_j})$. Положим $t_1 = s_j$. Аналогично, получаем значения t_2 , t_3 , ... и соответствующие им множества $F^2(M_{t_2})$, $F^3(M_{t_3})$, ... Из построения вытекает, что $t_i = E_k(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из леммы 1.2. следует, что $p = \cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Определим отображение $h : Sol\ (F) \to \Sigma_k^-$ по правилу $h(p) = \{t_i\}_0^\infty$, $p \in Sol\ (F)$, $t_i \in S^1$. Следующая лемма показывает, что ограничение диффеоморфизма $F|_{Sol\ (F)}$ сопряжено специальному сдвигу на обратном пределе линейного растягивающего отображения окружности $\widehat{E}_k$.

Л е м м а 1.5. *h является гомеоморфизмом таким, что* $h \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{E}_k \circ h|_{Sol\ (F)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку пересечение последовательно вложенных друг в друга компактных множеств непустое, то пересечение $\cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$ непустое для любой последовательности $\{t_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^-$. Из леммы 1.2. следует, что это пересечение состоит из одной точки. Поэтому h – сюрьективное отображение.

Для двух различных точек z , $z' \in Sol\ (F)$ найдутся две непересекающиеся компоненты $F^i(M_{t_i})$, $F^i(M_{t'_i})$ из соответствующих последовательностей компонент, удовлетворяющих лемме 1.4., так как их диаметры стремятся к нулю. Отсюда следует, что h взаимно однозначно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и рассмотрим окрестность точки $h(p)$. Согласно определению топологии на множестве Σ_k^- , окрестностью этой точки является множество вида $U(h(p)) = \{\{x_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^- : |x_i - t_i| < \varepsilon$, для $i = 0, \ \ldots, \ r\}$. Поскольку для точки $h(p)$ в ее окрестности $U(h(p))$, заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = E_k^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение E_k непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0$, ..., r .

Обозначим $M_{t,\delta} \overset{\text{def}}{=} [t-\delta, t+\delta] \times M_t$. Пусть $U(p)$ окрестность точки $p \in Sol\ (F)$. Тогда для любой точки $q \in U(p) \cap Sol\ (F)$, в силу леммы 1.4., $h(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$ и $q \in F^r(M_{x_r}) \subset F^{r-1}(M_{x_{r-1}}) \subset \dots \subset F(M_{x_1}) \subset M_{x_0}$.

Непосредственно из определения отображения F вытекает, что множество $M_t \cap F(M_1)$ состоит из k связных компонент, так как имеется k различных значений t_1 , ..., $t_k \in S^1$ таких, что $t = kt_1 \mod 1 = \dots = kt_k \mod 1$. Поскольку F диффеоморфизм, существует $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $F\left(M_{t_1^1,\delta_1}\right) \cap F\left(M_{t_1^2,\delta_1}\right) \cap \ldots \cap F\left(M_{t_1^k,\delta_1}\right) = \varnothing$ и $F\left(M_{t_1^i,\delta_1}\right) \subset F\left(M_{t_0,\varepsilon}\right)$ при $i = \overline{1,k}$. Тогда точка q принадлежит одному из множеств $F\left(M_{t_1^i,\delta_1}\right)$, пусть для определенности $q \in F\left(M_{t_1,\delta_1}\right)$. Рассмотрим сперва, что $q \in M_{x_0} \cap F(M_{x_1})$. Так как $q \in U(p) \cap Sol\ (F)$, тогда $q \in M_{x_0} \cap F(M_{x_1}) \cap F\left(M_{t_1,\delta_1}\right)$. Следовательно $F(M_{x_1}) \cap F\left(M_{t_1,\delta_1}\right) \neq \varnothing$ и $M_{x_1} \cap M_{t_1,\delta_1} \neq \varnothing$, тогда $|x_1 - t_1| < \delta_1$. Из равномерной непрерывности эндоморфизма E_k вытекает неравенство $|E_k(x_1) - E_k(t_1)| < \varepsilon$, т.е. $|x_0 - t_0)| < \varepsilon$. Таким образом, для двух первых координат последовательности $h(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ доказали, что $h(q) \in U(h(p))$. Рассуждая аналогично, существует $\delta_r > 0$, $\delta_r \leq \ldots \leq \delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $|x_{r-1} - t_{r-1}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|x_0 - t_0| < \varepsilon$.

Из определения отображений F и h вытекает, что $h(q) \in U(h(p))$ для любой точки $q \in U(p)$. Значит, h – непрерывное отображение. h^{-1} – непрерывное отображение, как прообраз непрерывного отображения на компакте. Таким образом, h - гомеоморфизм.

Непосредственно проверяется равенство $h \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{E}_k \circ h|_{Sol\ (F)}$, то есть наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol\ (F) & \xrightarrow{F} & Sol\ (F) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma_k^- & \xrightarrow{\widehat{E}_k} & \Sigma_k^-. \end{array}$$

Лемма доказана.
Доказательство закончено.

Лемма 1.6. $\widehat{E}_k$ *имеет всюду плотную положительную полуорбиту в* Σ_k^-.

Доказательство. Пусть $U(q)$ - окрестность произвольной точки $q = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$. Не уменьшая общности, можно считать, что $U(q)$ является (ε, r) – окрестностью, т.е. $\{t'_0, t'_1, \ldots, t'_i, \ldots\} \in U(q)$ тогда и только тогда, когда $|t_0 - t'_0| < \varepsilon$, $\ldots$, $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \varepsilon$. Из равномерной непрерывности линейного растягивающего отображения окружности $E_k(t) = kt \bmod 1$, степени $k \geq 2$ вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \delta$ влечет $|t_j - t'_j| < \varepsilon$ для всех $0 \leq j \leq r-2$, так как $t_j = k^{r-1-j} t_{r-1} \bmod 1$, $t'_j = k^{r-1-j} t'_{r-1} \bmod 1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\delta \leq \varepsilon$. Тогда из $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \delta$ следует, что $q' = \{t'_0, t'_1, \ldots, t'_{r-1}, \ldots\} \in U(q)$. Так как отображение E_k содержит всюду плотную полуорбиту $O^+(x_0) = \{k^n(x_0) \bmod 1 : n \geq 0\}$, $x_0 \in S^1$, тогда $q_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$. Существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $|k^l(x_0) - t_{r-1}| < \delta$, $k^l(x_0) \in S^1$. Поэтому $\widehat{E}_k^{r+l}(q_0) = \{k^{l+r}(x_0), \ldots, k^l(x_0), \ldots\} \in U(q)$. Следовательно, положительная полуорбита точки q_0 всюду плотна в Σ_k^-.
Доказательство закончено.

Теорема 1.2. *Множество* $Sol\ (F)$ *является одномерным растягивающимся аттрактором отображения* F, *локально гомеоморфным прямому произведению множества канторовского типа на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Из леммы 1.1. следует, что $Sol\ (F)$ есть инвариантное множество такое, что ограничение $F|_{Sol\ (F)}$ есть диффеоморфизм. Ясно, что $Sol\ (F)$ является замкнутым множеством. Из леммы 1.2. следует, что $Sol\ (F)$ является притягивающим множеством.

В силу леммы 1.6., $\widehat{E}_k$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве Σ_k^-, таким образом $Sol\ (F)$ является базисным множеством. Из сопряженности $F|_{Sol\ (F)}$ и $\widehat{E}_k$, согласно лемме 1.5., вытекает, что $Sol\ (F)$ состоит из неблуждающих точек диффеоморфизма $F|_{Sol\ (F)}$ со всюду плотным множеством периодических точек. Из (1.2), (1.4) и (1.5), множество $Sol\ (F)$ гиперболическое с одномерным растягивающимся расслоением. Следовательно, $Sol\ (F)$ – растягивающийся аттрактор. Последнее утверждение теоремы о том, что множество $Sol\ (F)$ локально гомеоморфно прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$ вытекает из леммы 1.3..
Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 1.1. проводится предоставлением соответствующих примеров диффеоморфизмов f, g, в рамках рассмотренной выше конструкции, удовлетворяющих условиям (1.1) – (1.4).

Построим первый пример диффеоморфизма. Пусть $M = S^1 \times D^3$, где $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ – единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Определим на D^3 координаты (x, y, z), рассмотрим вложение $e : D^3 \to e(D^3) \subset D^3$ такое, что $e(x, y, z) = (\frac{1}{10}x, \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}, \frac{1}{10}z)$ и поворот на 90° вокруг оси OZ $R_{90^\circ} : D^3 \to D^3$ вида

$$R_{90^\circ}(x, y, z) = \begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{2} - y\sin\frac{\pi}{2} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2} \\ z' = z \end{cases}$$

т.е $R^4 \equiv id$ и $k = 4$, удовлетворяющие условиям (1.1) – (1.3).

Тогда в силу теоремы 1.2. диффеоморфизм $f = f_{Sm} : S^1 \times D^3 \to f(S^1 \times D^3) \subset S^1 \times D^3$ имеет одномерный растягивающийся аттрактор $Sol\ (f) = \Lambda_{Sm}$, который локально гомеоморфен прямому произведению стандартного канторовского множества $\mathfrak{K}$ в D^3 на $\mathbb{R}$. Каждая точка из $\mathfrak{K}$ есть пересечение счетного семейства последовательно вложенных трехмерных шаров. Отсюда и замкнутости $\mathfrak{K}$ вытекает, что любая простая замкнутая кривая, принадлежащая множеству $D^3 - \mathfrak{K}$, стягивается в точку в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$. Поскольку диффеоморфизмы подобного типа f_{Sm} были введены в теорию динамических систем Смейлом [22], то естественно назвать Λ_{Sm} *одномерным соленоидом Смейла.*

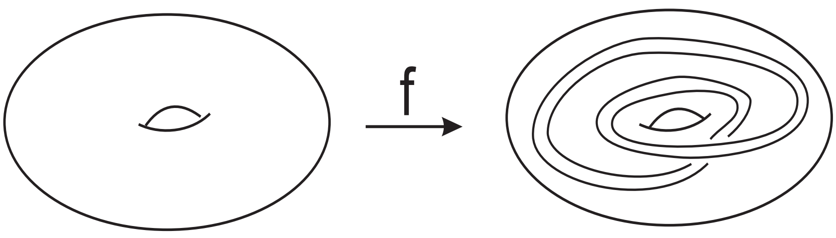


Рис. 2: $f = f_{Sm}$ для $k = 2$ и $n = 3$.

Диффеоморфизм f_{Sm} схематично изображен на рис. 2 для $k = 2$ и $n = 3$. Следуя [19], будем число k называть порядком соленоида Λ_{Sm}. Из леммы 1.5. вытекает, что порядок является полным инвариантом внутренней сопряженности диффеоморфизмов $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$.

В основе построения второго примера диффеоморфизма с одномерным растягивающим аттрактором для $n = 3$ лежит конструкция Антуана [18]. Пусть $T_1 = S^1 \times D^2$ - трехмерный замкнутый полноторий. Рассмотрим семейство T_2 циклически зацепленных полноториев внутри T_1, см. рис. 3. Предполагается, что число компонент семейства T_2 равно $k \geq 4$. Далее по индукции определим семейство T_{n+1}, $n \geq 2$, k^n попарно не пересекающихся полноториев следующим образом. Каждая компонента C_i^n конфигурации T_n есть полноторий. Для каждой C_i^n, $1 \leq i \leq k^{n-1}$, обозначим через φ_i^n отображение подобия $T_1 \to C_i^n$. Под действием φ_i^n конфигурация T_2 отображается в конфигурацию $\varphi_i^n(T_2)$, которая представляет собой семейство k полноториев в C_i^n. Положим $T_{n+1} = \cup\varphi_i^n(T_2)$. Таким образом, мы получаем последовательность T_1, T_2, $\ldots$ вложенных друг в друга конфигураций. Множество $\mathfrak{C} = \bigcap T_n$ называется *ожерельем Антуана.* Известно, что $\mathfrak{C}$ является вполне разрывным множеством канторовского типа таким, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathfrak{C}) \neq 0$. Ясно, что если K - классическое канторово множество, лежащее на некоторой прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$, то $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = 0$. Поэтому, несмотря на то, что множества K и $\mathfrak{C}$ гомеоморфны, не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящего K в $\mathfrak{C}$.

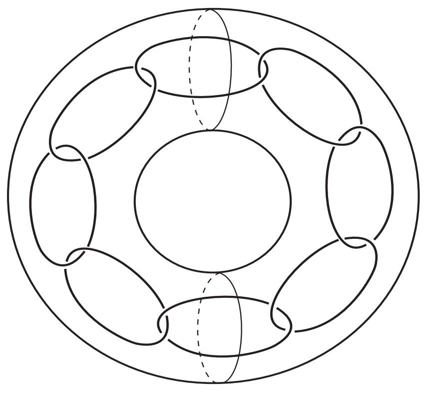


Рис. 3: Семейство T_2.

Переобозначим $M = S^1 \times T_1$, $\varphi_1^1 = e$. Немного модифицируем конструкцию Антуана так, чтобы существовал сдвиг $R : T_1 \to T_1$ вдоль оси $\{0\} \times D^2$ такой, что $R(x,y,z) = (x + \frac{1}{4} \bmod 1, y, z)$, где $x \in S^1$ и $(y,z) \in D^2$, переводящий T_2 в себя, и число $k = 4$, которые удовлетворяют условиям (1.1) - (1.3) и $R^4 \equiv id$. Например, можно каждую компоненту C_i^1 заменить полноторием, у которого одна часть подобна компоненте C_1^1, а вторая часть - компоненте C_2^1 из оригинальной конструкции Антуана. Ясно, что в результате получится множество со свойствами ожерелья Антуана. Диффеоморфизм $g = g_{NRW} : S^1 \times M \to g(S^1 \times M) \subset S^1 \times M$ имеет одномерный растягивающийся аттрактор $Sol\ (g) = \Lambda_{NRW}$, который локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}$ на ожерелье Антуана $\mathfrak{C}$ в $\mathbb{R}^3$. Поскольку впервые базисные множества подобного типа были введены в работах [20], [21], то естественно назвать Λ_{NRW} *одномерным соленоидом Ньюхауса-Робинсона-Вильямса (НРВ).*

Из леммы 1.5. вытекает, что диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $g_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ при фиксированном $k = 4$ внутренне сопряжены.

Лемма 1.7. *Диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$ и $g_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ окрестностно не сопряжены.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi : U(\Lambda_{Sm}) \to U(\Lambda_{NRW})$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_{Sm})$, $U(\Lambda_{NRW})$ множеств Λ_{Sm}, Λ_{NRW} соответственно, который осуществляет сопряженность диффеоморфизмов $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $f_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$. В силу конструкции, любая точка Λ_{Sm} имеет окрестность U_0 локально гомеоморфную прямому произведению $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$ для некоторого $\varepsilon > 0$, причем пересечение Λ_{Sm} с U_0 совпадает с $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ - стандартное канторово множеством в D^3. Не уменьшая общности можно считать, что $U_0 \subset U(\Lambda_{Sm})$.

Согласно [18], в $U(\Lambda_{NRW}) - \Lambda_{NRW}$ существует простая замкнутая кривая C произвольно малого диаметра, которая не стягивается в точку в множестве $U(\Lambda_{NRW}) - \Lambda_{NRW}$. Так как φ - гомеоморфизм, то существует C такая, что $\varphi^{-1}(C) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$. Поскольку $\varphi(\Lambda_{Sm}) = \Lambda_{NRW}$, то $\varphi^{-1}(C) \in U(\Lambda_{Sm}) - \Lambda_{Sm}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ деформируется в сечение $\{t_0\} \times D^3$ вдоль слоев тривиального расслоения $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3 \to \{t_0\} \times D^3$ в некоторую замкнутую кривую, принадлежащую множеству $\{t_0\} \times (D^3 - \mathfrak{K})$. Эта кривая гомотопна нулю в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ гомотопна нулю в $U(\Lambda_{Sm}) - \Lambda_{Sm}$. Тогда C должна быть гомотопна нулю в $U(\Lambda_{NRW}) - -\Lambda_{NRW}$. Полученное противоречие показывает, что диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $f_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ окрестностно не сопряжены.

Доказательство закончено.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ и грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Аносов Д. В., “Исходные понятия”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова)*, 1985, 156–178.

2. Аносов Д.В., Солодов В.В., “Гиперболические множества”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 9 (под ред. Д. В. Аносова)*, **66** (1991), 12–99.

3. Гринес В.З., “О топологической эквивалентности одномерных базисных множеств диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *УМН*, **180**:6 (1974), 163–164.

4. Гринес В.З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 1”, *Труды ММО*, **32** (1975), 35–60.

5. Гринес В.З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах.2”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.

6. Гринес В.З., “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57–94.

7. Гринес В.З., “Представление одномерных аттракторов А-диффеоморфизмов поверхностей гиперболическими гомеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 76–87.

8. Гринес В. З., Жужома Е. В., “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе”, *Успехи мат. наук*, **34**:4 (1979), 185–186.

9. Гринес В. З., Жужома Е. В., “О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один”, *Доклады РАН*, **374** (2000), 274–276.

10. Жиров А. Ю., “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 1. Кодирование, классификация и накрытия”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 3–50.

11. Жиров А. Ю., “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 2. Перечисление и применение к псевдоаносовским диффеоморфизмам”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 29–80.

12. Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 59–82.

13. Жиров А. Ю., Устинов Ю. И., “Топологическая энтропия одномерных соленоидов Вильямса”, *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 859–873.

14. Куратовский Л., *Топология. Т. 1*, Мир, М, 1966.

15. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84** (1971), 301–312.

16. Плыкин Р. В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *УМН*, **35**:3 (1980), 94–104.

17. Плыкин Р. В., “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6 (1984), 75–113.

18. Antoine L., “Sur l'homéomorphisme de deux figures et leurs voisinages”, *J. Math. Pure et Appl.*, **4** (1921), 221–325.

19. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

20. Newhouse S., “On simple arcs between structurally stable flows”, *Lect. Notes in Math.*, **468** (1975), 262-277.

21. Robinson C., Williams R., “Classification of expanding attractors: an example”, *Topology*, **15** (1976), 321–323.

22. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817 [Руский перевод: Успехи мат. наук. – 1970. Т. 25. – С. 113–185].

23. Williams R., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.

24. Williams R., “Classification of subshifts of finite type”, *Annals of Math.*, **9** (1973), 120–153.

25. Williams R., “Expanding attractors”, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 169–203.

On the inner and the neighbor classification of the attractors

© E.V. Zhuzhoma[5], N.V. Isaenkova [6], L.A. Kuprina[7], V.S. Medvedev[8]

Abstract. The connection between the inner and the Neighbor topological conjugacy for the attractors of a certain class of dynamical systems

Key Words: Inner conjugation, conjugation of a neighborhood, topological equivalence

[5] Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Senior assistant Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[7] Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[8] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

УДК 51.7:532.546

Математическое моделирование качества воздуха на длительный период времени

© Л.В. Клочкова[1], Ю.А. Повещенко[2], В.Ф. Тишкин[3]

Аннотация. В работе представлены результаты, полученные в ходе разработок новых исполнительных модулей для интегрированного программного комплекса TIMES и методов математического прогнозирования качества окружающей среды как системного подхода к многофакторному анализу влияния различных воздействий. Приведены примеры решения некоторых практических задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, интегрированные программные комплексы, п роцессы распространения загрязнений в атмосфере.

Введение

Развитие методов математического прогнозирования качества окружающей среды является разработкой системного подхода к многофакторному анализу влияния различных воздействий, таких, как природные катаклизмы, так и антропогенные и техногенные воздействия. В научной литературе, опубликованной за последние пятьдесят лет, встречается огромное количество различных моделей, учитывающих те или иные факторы происходящих процессов [1]. Разработанный интегрированный пакет "TIMES" (транспортно-информационная модель для экологических систем) представляет собой визуально-прогностический пакет, позволяющий решать задачи о распространении загрязнений в воздушном бассейне с учетом ветрового поля и получать графические отображения процессов, как в условиях городской застройки, так и над местностью, имеющей сложный географический рельеф

1. Интегрированный пакет "TIMES"

Интегрированный пакет "TIMES" является оригинальной программной системой, как по применяемым адаптированным физико–математическим моделям, так и методам решения систем уравнений, опирающихся на специально разработанные методики численного моделирования. Базовая модель этого комплекса — оперативная конвективно-диффузионная модель или транспортная модель. При этом учитывается сухое и влажное осаждение и химические превращения веществ в зависимости от времени суток и годовых колебаний температур.

Исходными данными для математического моделирования являются данные, получаемые с метеостанций, расположенных внутри расчетной области. На метеостанциях определяются скорости анемометрического и геострофического ветра, высота верхней границы

[1] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

[2] Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; poveschenko@keldysh.ru.

[3] Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

слоя перемешивания, интенсивность влажного осаждения и другие физические величины. Кроме того, моделируются поле скоростей ветра и коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности.

Расчетная область имеет форму прямоугольника с характерными размерами в несколько десятков километров. Характерная высота слоя перемешивания, в пределах которого происходит интенсивный перенос загрязнений, составляет 100 м $\div$ 2 км. Прогноз концентрации загрязнений производится на основании данных эмиссии, состояния атмосферы, а также химического превращения и осаждения загрязнений в пределах каждой ячейки сетки моделируемой области. Трехмерная область разбивается на ячейки. Скорость ветра, высота верхней границы слоя перемешивания, интенсивность осаждения, класс атмосферной стабильности и другие физические величины определяются на метеостанциях.

В блоке начальных данных задаются параметры сетки, некоторые коэффициенты в исходном уравнении переноса и граничные условия. Варьируя их, можно проследить влияние вычислительных схем на корректность получаемых результатов. Там же задаются метеорологические характеристики: скорость ветра, количество метеостанций, температурные градиенты и параметры, необходимые при использовании прогностической модели поля ветра.

Уравнения физико–математической модели [2] выражают массовый баланс, где эмиссия, перенос, турбулентность, химические реакции и процесс осаждения выражены в математических терминах следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} c\tilde{\mathbf{w}} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} c) - \dfrac{\partial}{\partial z} K_z \dfrac{\partial c}{\partial z} + rc = Q, \quad z > h_t(x,y) \\ c = 0, z \le h_t(x,y). \end{cases}$$

где c — концентрация, K — коэффициент горизонтальной турбулентности, K_z — коэффициент вертикальной турбулентности, $\tilde{\mathbf{w}}$ — скорость ветра, Q — поле эмиссии, r — коэффициент, характеризующий интенсивность выбывания или образования вещества по определенному закону, $h_t(x,y)$ — кусочно-непрерывная функция, которая описывает рельеф области, причем $h_t(x,y) = h_b$, если точка $(x,y,0)$ принадлежит основанию возвышения высотой h_b, и $h_t(x,y) = 0$, если в точке $(x,y,0)$ возвышения нет.

Система решается методом расщепления на процессы. В данной системе выделяются следующие процессы: перенос ветром, горизонтальная турбулентность и вертикальная турбулентность.

Начальные условия имеют вид:

$$c(x,y,t)|_{t=0} = c^{\circ}(x,y).$$

Значения коэффициента горизонтальной турбулентности вычисляются по формуле

$$K = \sigma_{\ominus}^2 \cdot \max(0.5, |\tilde{\mathbf{w}}|) \cdot \mathrm{h},$$

где $\sigma_{\ominus}$ — угол горизонтальной флуктуации направления ветра в радианах в зависимости от класса атмосферной стабильности, $\tilde{\mathbf{w}}$ — скорость ветра в м/с, H — высота слоя перемешивания в м, также зависящая от атмосферной стабильности.

Значения коэффициента вертикальной турбулентности

$$K_z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{h} K_z(h), & z < h \\ K_z(h), & z \le h, \end{cases}$$

где h — высота приземного слоя, позволяет достаточно правильно распределять примесь по высоте, если только полагать h и $K_z(h)$ зависящими от класса атмосферной стабильности. Класс атмосферной стабильности задается на метеостанциях или визуально.

Данный программный комплекс предполагает наличие как площадных (расположенных на некотором участке земной поверхности), так и точечных (заводских труб) источников. Площадные источники характеризуются интенсивностью эмиссии Q_s, измеряемой в г/(м$^2 \cdot c$) и численно равной массе загрязнителя, выделяемой с единицы площади в единицу времени. Точечный источник характеризуется интенсивностью эмиссии Q_e, измеряемой в г/(м$^3 \cdot c$) и численно равной массе загрязнителя, выделяемой в единицу объема в единицу времени трубой высотой h_e и диаметром d_e. Высота и диаметр трубы а также скорость вылета v_e и температура t_e газов, влияют на эффективную высоту подъема шлейфа.

Для расчета полей ветра над холмистой местностью и в условиях городской застройки построены соответствующие алгоритмы. **WFM**-модель — модель ветрового поля над местностью с невысокими холмами. Модель описывает поворот вектора скорости ветра и изменение его модуля при безотрывном обтекании холмов. Описание базируется на начальном приближении для ветрового поля. Затем оно корректируется путем минимизации дивергенции и сглаживания. **URBAN**-модель — модель поля ветра в условиях городской застройки описывает поворот вектора скорости ветра и изменение его модуля при обтекании воздушных масс вокруг домов или крутых препятствий. Описание также базируется на начальном приближении ветрового поля и его последующей корректировке в каждой точке пространства между домами путем минимизации дивергенции и сглаживания. Все системы замкнуты и базируются на эмпирических измерениях и аппроксимации на их основе функциональных зависимостей физических величин от пространственно-временных координат расчетной области.

Пакет всё время находится в процессе усовершенствования, так как любая конкретная реальная проблема требует своей постановки задачи.

2. Некоторые практические задачи

Важным вопросом является построение по известным дискретным значениям высоты верхней границы пограничного слоя H функциональной зависимости $H = f(x, y, t)$, которая дает ограниченный профиль значений. В данной работе предлагается оригинальный метод экстраполяции функции f. Она должна быть дифференцируемой по пространственным и временным координатам. В дальнейшем величина H используется в транспортно–диффузионном уравнении, а ее значения н а метеостанциях в моменты измерений должны совпадать с результатами этих измерений.

Приведём вывод этой функциональной зависимости в качестве примера численного моделирования.

Пусть имеются M метеостанций, причем для каждой станции задан набор из N значений величины H (H_n^i, $i = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$) для N метеоэпизодов. Длительность n-го эпизода обозначим за Δt_n. Определим величину $\overline{H}^i$ для i-й метеостанции как

$$\overline{H}^i = \frac{\sum\limits_n H_n^i \Delta t_n}{\sum\limits_n \Delta t_n}.$$

Тогда зависимость от времени высоты верхней границы пограничного слоя на данной станции может быть аппроксимирована с помощью выражения

$$H^i(t) = \overline{H}^i + \sum_n \frac{k_n^i}{1+\varepsilon(t-\tau_n)^2}, \quad i=1,\ldots,M,$$

где ε — положительный параметр, τ_n — момент в пределах n-го метеоэпизода, в который снимаются измерения, т.е. $H^i(\tau_n) = H_n^i \forall i = 1,\ldots,M$; k_n^i — коэффициенты, для i-й станции удовлетворяющие системе N линейных уравнений, выражающей совпадение значений функции $H^i(t)$ с измеренными значениями величины H для всех моментов измерений $(t=\tau_n$, $n=1,\ldots,N)$ и решаемой методом Гаусса:

$$H_n^i = \overline{H}^i + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_n^j}{1+\varepsilon(\tau_n-\tau_j)^2}, \quad i=1,\ldots,M, \quad n=1,\ldots,N.$$

После аппроксимации во времени величины H для всех метеостанций (построения функций $H^i(t), \quad i=1,\ldots,M$) выполняется аппроксимация по пространству для любого момента времени t. Пусть

$$H(x,y,t) = \overline{H}(t) + \sum_{i=1}^{M} \frac{k^i(t)}{1+\delta r^i(x,y)},$$

$$\overline{H}(t) = \frac{1}{L_x L_y} \iint\limits_{\Omega} H_a(x,y,t)dxdy,$$

где $r^i(x,y)$ — расстояние от точки (x,y) до i-й станции, $H_a(x,y,t)$ — функция, значение которой в точке (x,y) в момент времени t равно значению H в тот же самый момент на ближайшей станции, L_x, L_y — размеры прямоугольной расчетной области Ω, δ — положительный параметр, $k^i(t)$ — коэффициенты, удовлетворяющие системе M линейных уравнений, выражающей совпадение значений функции $H(x,y,t)$ со значениями величины $H^i(t)$ в точках расположения метеостанций $(x=x^i, y=y^i, i=1,\ldots,M)$, решаемой методом Гаусса

$$H(x^i,y^i,t) \equiv H^i(t) = \overline{H}^i + \sum_{j=1}^{N} \frac{k^j(t)}{1+\delta r^j(x^i,y^i)}, \quad i=1,\ldots,M,$$

где (x^i,y^i) — координаты i-й метеостанции. Искомая функциональная зависимость построена.

Таким образом мы имеем аппроксимацию высоты слоя перемешивания в виде суперпозиции колоколообразных функций, которая дает ограниченный профиль значений.

Создание метода аппроксимации по времени для высоты слоя перемешивания потребовалось в связи с необходимостью учитывать особые случаи задания исходных данных расположения источников и метеостанций. Такая необходимость была выявлена в результате проведения вычислительных экспериментов при отладке одного из исполнительных модулей для международного проекта АИДАИР 1388 программы "Эврика"европейской комиссии по охране окружающей среды.

На комплексе TIMES по заказу института гражданской авиации РФ были выполнены вычислительные эксперименты для задач безопасности окружающей среды при эксплуатации авиапромышленных комплексов [3]. Каждая практическая задача требует разработки своей версии пакета. Поэтому пакет создавался как модульная система. Отправной моделью для создания схемы расщепления по физическим процессам для численного решения уравнений переноса в данном конкретном случае послужил классический метод частиц в ячейке. Однако по мере решения прикладных задач был разработан оригинальный по принятым допущениям метод частиц, не имеющий аналогов в литературе.

Аэродромы являются объектами, создающими значительное загрязнение атмосферного воздуха. Основными источниками загрязнения являются двигатели самолетов. Основным загрязняющим веществом является диоксид азота, который образуется за зоной горения топлива в результате взаимодействия азота воздуха с кислородом. Рассмотрены процессы распространения выхлопных газов как вблизи аэродромов в условиях городских застроек так и на больших расстояниях от источника загрязняющих веществ.

Горячие газы, истекающие из сопла двигателя, попадая в более холодную атмосферу, при наличии температурной стратификации атмосферы поднимаются вертикально вверх с ускорением, определяемым законом Архимеда. Они поднимаются до некоторой высоты, пока скорость подъёма не обратится в нуль, а температуры и давления у поднимающихся газов не выровняются с температурой и давлением окружающей атмосферы. Затем облако диффундирует в атмосфере за счет адвекции в поле ветра и диффузии в турбулентной атмосфере.

Эффективная высота подъема выхлопных газов может составлять сотни и даже тысячи метров. Для примера рассчитаны параметры такого подъёма для Боинга. Температура выхлопных газов Боинга порядка $300\,^\circ$C. Высота подъёма порядка тридцати километров.

Рассматриваемое облако под действием силы

$$f = g\rho - g\rho^{\otimes},$$

где f — сила, вызывающая вертикальный подъём облака, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность воздуха, $\rho^{\otimes}$ — плотность выхлопного газа, приобретает вертикальное ускорение и начинает смещаться. Величина этого ускорения при некоторых условиях

$$\frac{d^2t}{dt^2} = g\frac{T^{\otimes} - T}{T},$$

где $T^{\otimes}$ — температура выхлопных газов, T — температура окружающего воздуха.

При этих перемещениях температура выхлопных газов в адиабатических условиях будет изменяться по закону

$$T^{\otimes} = T_0^{\otimes} - \gamma_a \Delta z,$$

где $T_0^{\otimes}$ — начальная температура, γ_a — градиент температуры газов, равный $1\,^\circ$C/100м, Δz — высота подъёма.

Для окружающего воздуха

$$T = T_0 - \gamma \Delta t,$$

где γ — градиент температур при наличии температурной стратификации атмосферы.

Высота подъема или уровень конвекции

$$\Delta z = h = \frac{\Delta T_0}{\gamma_a - \gamma}.$$

На основании этих формул можно сделать вывод, что нагретые газы сначала ускоренно летят вверх, но по мере остывания замедляются и достигают состояния равновесия. При исходных данных для Боинга высота подъёма может достигать 3700 м и облако будет подниматься со средней скоростью порядка 11 м/с. Эта модель предполагает метод частиц.

Она была удобна для встраивания в пакет "TIMES поэтому последняя версия "TIMES" разработана с применением метода разделения по физическим процессам на основе специально адаптированного метода частиц в ячейках [4].

Облако загрязняющих примесей в окружающем воздухе над аэродромом формируется при соответствующих атмосферных метеорологических условиях и является совокупностью нескольких источников. Поэтому начальное распределение примеси над аэродромом при моделировании процессов переноса примеси в атмосфере представлено набором площадных источников. Сравнительно низкими источниками являются двигатели самолетов при движении по летному полю: перрону, рулежным дорожкам, при прогреве двигателей на старте и пробеге по взлетно-посадочной полосе (ВПП). Высокими источниками являются двигатели самолетов после отрыва от земли. При этом, если принять за Q_0 начальную эмиссию, выделяющуюся при отрыве самолётов от земли, то при отрыве самолетов от земли и дальнейшем взлёте концентрация в спутном следе самолёта выражается формулой

$$C = \frac{Q_0}{\sqrt{2(\sin\alpha)a\Delta h}},$$

где Q_0 — концентрация эмиссии газов при отрыве самолёта, α — угол наклона траектории взлёта самолёта к взлётной полосе, a — ускорение самолёта при взлёте, h — высота.

В процессе постановки вычислительных экспериментов было представлено последовательное развитие ситуации на различные моменты времени. Было видно, как облако выхлопных газов, усреднённое на временном отрезке в 20 минут, отрывается от земли, размывается по объёму и переносится по ветру.

Эти же вычислительные эксперименты легли в основу проекта прогноза экологической ситуации в Москве за год до лета 2010 года. Когда разразилась экологическая катастрофа в атмосфере Москвы, были полностью подтверждены прогнозы, опубликованные в отчёте 2009 года по проекту РФФИ [5].

Проект был направлен на построение математических моделей, вычислительных методов и алгоритмов и интегрированных экспертных систем для прогнозирования качества окружающей среды через длительный период времени при антропогенных и техногенных воздействиях. Основная идея проекта состояла в том, чтобы разработать системный подход к математическому прогнозированию для постановки вычислительных экспериментов при многофакторном анализе влияния развития различных социальных структур в течение продолжительного времени на окружающую среду мегаполиса Москва. В проекте были проведены фундаментальные исследования влияния конкретных характеристик состояния атмосферных слоёв на приземный слой перемешивания, определяющий качество воздуха, окружающего человека в мегаполисе. Было последовательно выявлено, что решающими факторами для состояния атмосферы в городе является роза ветров, плотность застройки и вертикальный градиент температур. При неблагоприятных метеорологических условиях резко уменьшаются коэффициенты диффузии и рассеивания токсичных выхлопных газов и, как следствие, резко увеличение задымлённости воздуха.

Заключение

Суммарный эффект от техногенной деятельности в Москве уже превысил все допустимые нормы, особенно при таких обстоятельствах, как чрезмерная плотность автомобильных потоков, недостаточная площадь проезжей части города, приведённые погодные условия. Набирая статистику периодичности повторяемости таких погодных условий, можно спрогнозировать качество воздуха в мегаполисах на длительный период времени. Сейчас в новом проекте от качественной картины предполагается перейти к вполне конкретным вычислительным количественным исследованиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №11-01-00444-а.

Список литературы

1. Белов И. В., Беспалов М. С., Клочкова Л. В., Павлова Н. К., Сузан Д, В., Тишкин В. Ф., “Сравнительный анализ некоторых математических моделей для процессов распространения загрязнений в атмосфере”, *Математическое моделирование*, **11**:7 (1999), 52–64.

2. Белов И. В., Беспалов М. С., Клочкова Л. В., Кулешов А. А., Сузан Д. В., Тишкин В. Ф., “Транспортная модель процессов распространения газообразных примесей в атмосфере города”, *Математическое моделирование*, **12**:11 (2000), 15–28.

3. Клочкова Л. В., “Программное обеспечение "TIMES"для решения актуальных задач экологии при эксплуатации аэрокосмических комплексов”, *Известия РАН. Теория и Системы Управления*, 2006, № 1, 92–102.

4. Клочкова Л. В., Сузан Д. В., Тишкин В. Ф., “Вычислительные алгоритмы конвективного переноса токсичных веществ при математическом прогнозировании качества окружающей среды в мегаполисах”, *Известия РАН. Теория и Системы Управления*, 2009, № 4, 163–176.

5. “Годовой отчёт по проекту РФФИ, грант 08-01-00435-а”, 2009.

Mathematical modeling of air quality on the prolonged period of time

© **L.V Klochkova[4], J.A. Poveschenko[5], V.F. Tishkin[6]**

Abstract. In work the results received during development of new executive modules for integrated program complex TIMES and methods of mathematical forecasting of quality of an environment as the system approach to the multifactorial analysis of influence of various influences are presented. Examples of the decision of some practical problems are resulted.

Key Words: the mathematical modeling, the integrated program complexes, processes of propagation of pollution in an atmosphere.

[4] Senior Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

[5] Leading Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; poveschenko@keldysh.ru.

[6] Deputy Director of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 517.956.2

Инвариантные многообразия в неавтономных моделях нейронных сетей

© М.Л. Коломиец[1], А.Н. Сахаров[2]

Аннотация. Рассматриваются задача о структуре инвариантных множеств в неавтономных системах, описывающих динамику нейронных сетей. Показывается, что нормально гиперболические многообразия нелинейных расширений квазипериодических потоков на торе являются расслоения с базой тор и слоем однородное пространство компактной матричной группы Ли.

Ключевые слова: расширения потоков на компактных пространствах, нормально гиперболические многообразия, минимальные множества, нейронные сети.

1. Введение

Нейронная сеть – это направленный граф, вершины которого “нейроны”, а ребра – связи между “нейронами”. В данном контексте слово “нейрон” обозначает систему, функционирующую по известному закону и, вообще говоря, никак не связанное с настоящими нейронами. Описание функционирования нейронных сетей на языке динамических систем принято называть *нейродинамикой*. Обычно предполагается, что работа отдельного “нейрона” в сети описывается некоторой динамической системой (моделью “нейрона”), которая одна и та же для всех “нейронов”. Таким образом, нейронная сеть является системой связанных динамических систем (например, системой связанных осцилляторов).

Нейронные сети используются для решения различных задач теории информации: анализ временных рядов, кодирование и передача данных, распознавание образов (приложения нейронных сетей подробно описаны в [1]).

Для описания динамики нейронных сетей довольно часто используется непрерывная модель Хопфилда [2], представляющая собой автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} \;=\; Ax + Ba(x) + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор состояния сети из n нейронов, A – отрицательно определенная диагональная матрица, B – симметрическая матрица (так называемая матрица синаптических весов), $a(x) = (a_1(x_1), \ldots, a_n(x_n))$. Эта модель успешно применяется для решения задач распознавания образов и обучения.

Для моделирования иных режимов работы нейронных сетей необходимо, как правило, рассматривать неавтономные системы (обычно, это системы с заданным внешним воздействием, зависящим от времени). Аналогом системы Хопфилда в неавтономном случае будет система

$$\dot{x} \;=\; A(t)x + B(t)a(x,t) + b(t). \tag{1.2}$$

При достаточно общих условиях эту систему можно превратить в автономную систему на косом произведении [3]. Предположим, что зависимость от времени является квазипериодической с вектором независимых частот $\omega \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathbb{T}^m$ – m-мерный тор,

[1] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[2] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ – угловые координаты на $\mathbb{T}^m$, $\{\varphi_t = \omega t + \varphi\}$ – квазипериодический поток на торе[3] с вектором частот ω. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi)a(x,\varphi) + b(\varphi), \qquad (\varphi, x) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Очевидно, что существует φ_* такое, что при $\varphi_t = \omega t + \varphi_*$ получаем систему (1.2). Система (1.3) порождает поток $\{f^t\}$, являющийся расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$: $f^t(\varphi, x) = (\varphi_t, F(t, \varphi, x))$. Предполагается, что $a(x, \varphi) = a_x(\varphi)x + r(x, \varphi)$, где нелинейность по x удовлетворяет оценке $\|r(x,\varphi)\| \le c$ при всех φ и $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, система (1.3) представима в виде возмущения линейной

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = C(\varphi)x + b(\varphi), \qquad C(\varphi) = A(\varphi) + B(\varphi)a_x(\varphi). \tag{1.4}$$

Аналогом состояний равновесия системы (1.3) являются, в известном смысле, минимальные множества. Какова струтура минимальных (и, вообще, компактных инвариантных) множеств этой системы? Чтобы сформулировать ответ на этот вопрос напомним некоторые понятия и определения.

Рассмотрим однородную линейную систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = D(\varphi)x. \tag{1.5}$$

Она определяет поток (линейное расширение потока на торе) $(\varphi, x) \mapsto (\varphi_t, U(t,\varphi)x)$, где $U(t,\varphi)$ – матрица Коши системы $\dot{x} = D(\varphi + \omega t)x$. Известно [4], что для этого потока существует разложение пространства $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ в сумму Уитни инвариантных подрасслоений:

$$\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n = W^u \oplus W^s \oplus W^c, \tag{1.6}$$

где W^u – равномерно неустойчивое, W^s – равномерно устойчивое, W^c – центральное инвариантные подрасслоения. Равномерная неустойчивость (устойчивость) означает, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что при всех $t \ge 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|U(-t,\varphi)x\| &\le \alpha e^{-\lambda t}\|x\| \qquad x \in W^u, \\ \|U(t,\varphi)x\| &\le \alpha e^{-\lambda t}\|x\| \qquad x \in W^s. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если $W^c = \varnothing$, то линейное расширение называется *гиперболическим.* Сужение линейного расширения на W^c называется *эллиптическим*, если W^c состоит из ограниченных траекторий, *параболическим*, если в W^c есть неограниченные траектории, норма которых растет не быстрее, чем t^β, $\beta > 0$, *неравномерно гиперболическим*, если в W^c есть неограниченные траектории, норма которых растет экспоненциально.

Пусть M – компактное инвариантое множество потока $\{f^t\}$, порождаемого (1.3). Ясно, что ограничение $\{f^t_M\}$ этого потока на M также является расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$, т.е. существует непрерывное отображение $p : M \to \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ f^t_M = \varphi_t \circ p$. Пусть Df^t обозначает индуцируемый f^t поток, действующий на касательном расслоении $T(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$. Если M – многообразие, то сужение касательного расслоения на M допускает разложение в инвариантную относительно потока $Df^t_M = Df^t\big|_M$ сумму касательного $T(M)$ и нормального $N(M)$ подрасслоений

$$T(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) = T(M) \oplus N(M).$$

[3] Вернее, на универсальном накрытии тора.

О п р е д е л е н и е 1.1. ([5], [6]) *Инвариантное многообразие M назвается нормально гиперболическим, если $N(M)$ разлагается в инвариантную сумму подрасслоений $N(M) = W^u(M) \oplus W^s(M)$ и существуют числа $\mu > 0$, $\lambda > 0$ такие, что*[4]

$$\begin{array}{ll} \|Df^t_M v\| \in (e^{-\lambda t}\|v\|, e^{\mu t}\|v\|), & v \in T(M), \\ \|Df^t_M v\| \geq e^{\mu t}\|v\|, & v \in W^u(M), \\ \|Df^t_M v\| \leq e^{-\lambda t}\|v\|, & v \in W^s(M). \end{array} \tag{1.8}$$

Нормально гиперболические многообразия сохраняются при возмущениях исходной системы [6].

Ясно, что инвариантные множества потока не обязательно являются многообразиями. Однако, как будет показано ниже минимальные множества потоков на косых произведениях являются подмножествами нормально гиперболических инвариантных многообразий. Поэтому уточнение поставленного выше вопроса теперь можно сформулировать так: какова структура нормально гиперболических инвариантных многообразий потока $\{f^t\}$? Ответ содержится в следующей теореме, являющейся основным результатом настоящей заметки.

Т е о р е м а 1.1. *Изолированное нормально гиперболическое многообразие потока $\{f^t\}$, порождаемого системой* (1.3), *гомеоморфно расслоению с базой $\mathbb{T}^m$ и слоем H^k, являющимся однородным k-мерным пространством $(0 \leq k \leq n)$ некоторой конечномерной компактной группы Ли.*

Эта теорема является обобщением результата для одномерных расширений квазипериодических потоков [11].

2. Инвариантные многообразия линейной системы

При сделанных выше предположениях относительно системы (1.3) структура инвариантных ее множеств в значительной степени определяется структурой инвариантных множеств системы (1.4). Описание последних связано с задачей *приводимости однородной системы к блочно-диагональному виду* (приводимости в смысле У. Коппеля) с помощью ляпуновского преобразования[5]. У. Коппель [7] рассматривал задачу приводмости для неавтономной системы с почти периодической матрицей коэффициентов $A(t)$, т.е. линейного расширения равномерно непрерывного потока на соленоиде[6]. Результат, полученный в [7], выглядит так: если линейное расширение потока на соленоиде гиперболично, то система блочно-диагонализуема с помощью ляпуновского преобразования.

Однако, остался открытым вопрос: будет ли это преобразование почти периодическим. Ответ на этот вопрос оказался отрицательным. Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, В.Я. Лин и О.В. Локуциевский в работе [8] представили пример вещественной почти периодической

[4] Отличие условий гиперболичности (1.7) от условий (1.8) объясняется тем, что в первом случае поток на торе линейный и $\|Df^t_{\mathbb{T}^m} v\| = \|v\|$, тогда как во втором случае поток на многообразии M произвольный.

[5] Здесь под ляпуновским преобразованием будем следующее: пусть поток θ_t является расширением потока φ_t, т.е. существует топологическое пространство X и непрерывное отображение $p : X \to \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ \theta_t = \varphi_t \circ p$. Тогда замена переменных $x = L(\theta_t)y$ называется ляпуновским преобразованием.

[6] Соленоид размерности m – пространство компактной абелевой группы – обратный предел $\lim\limits_{\leftarrow}(\mathbb{T}^m, \alpha_k)$ последовательности групповых гомоморфизмов m-мерного тора $\alpha_n : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$. На универсальном накрытии тора каждому такому гомоморфизму соответствует линейное преобразование $A_n \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$. Гомоморфизм α_n является q_n-листным накрытием $\mathbb{T}^m$, $q_n = \det A_n$. Соленоид является локально тривиальным расслоением над $\mathbb{T}^m$ со слоем гомеоморфным канторову множеству.

системы порядка 8 с разложением на инвариантные четырехмерные подрасслоения, которая не приводима почти периодическим ляпуновским преобразованием (даже комплексным) к блочно-диагональному виду, согласованному с инвариантным разложением. В этой же работе они построили пример комплексной почти периодической системы порядка 2 с разложением на одномерные инвариантные подрасслоения, которая не приводится к диагональному виду никаким почти периодическим преобразованием. Причина этого заключается в топологической нетривиальности соответствующих инвариантных расслоений.

Построенные в [8] примеры неприводимых систем не являются гиперболическими. Простой пример комплексной квазипериодической гиперболической системы порядка с одномерными нетривиальными инвариантными подрасслоениями построен К. Палмером [9].

Обобщение результата В. Коппеля было получено Р. Эллисом и Р. Джонсоном [10]. Они построили минимальное расширение $\{\theta_t\}$ потока $\{\varphi_t\}$ такое, что индуцированное линейное расширение потока θ_t приводимо к блочно-диагональной форме, согласующейся с разложением (1.6), ляпуновским преобразованием $x = L(\theta_t)y$.

Доказательство теоремы начнем с формулировки условий существования инвариантных многообразий у неоднородной линейной системы (1.4).

Пусть однородная система (1.5) – нормально гиперболическое расширение потока $\{\varphi_t\}$ на замкнутом многообразии M, $P(\varphi)$ и $E - P(\varphi)$ – проекторы на подрасслоения W^s, W^u соответственно. Тогда корректно определена *функция Грина* $G : \mathbb{R} \times M \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$:

$$G(t,\varphi) = \begin{cases} U(t,\varphi)P(\varphi_t), & t \geq 0; \\ -U(t,\varphi)(E - P(\varphi_t)), & t \leq 0. \end{cases}$$

Теорема 2.1. *У системы* (1.4) *существует единственное нормально гиперболическое инвариантное многообразие*

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)b(\varphi_s)ds, \tag{2.1}$$

гомеоморфное M, *тогда и только тогда, когда система* (1.5) *приводима к блочно-диагональному виду ляпуновским преобразованием* $x = L(\varphi_t)y$:

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{y} = \mathrm{diag}(D^s(\varphi), -D^u(\varphi))y,$$

где $D^s(\varphi)$, $D^u(\varphi)$ *– положительно определенные матрицы.*

Доказательство этой теоремы для случая, когда φ_t – поток на торе $\mathbb{T}^m$, изложено в [12], гл. 3, § 6,7. Для произвольного многообразия требуется небольшая модификация этого доказательства.

Вернемся к изучению гиперболического расширения квазипериодического потока на торе. Если инвариантные подрасслоения W^s, W^u нетривиальны, то ляпуновское преобразование к блочно-диагональному виду определено на некотором групповом расширении потока на торе [10]. В рассматриваемом случае – это произведение групп вращений $\mathrm{SO}(n_s, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n_u, \mathbb{R})$, где $n_s = \dim W^s$, $n_u = \dim W^u$. Траектории этого группового расширения лежат на инвариантных многообразиях проективного потока, индуцированного линейным расширением [13]. Эти многообразия являются расслоениями с базой $\mathbb{T}^m$ и слоем, являющимся однородным пространством $\mathrm{SO}(n_s, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n_u, \mathbb{R})$ [7]. Таким образом, справедлива

[7] Эти рассуждения показывают, что полное описание динамической системы включает в себя не толь-

Т е о р е м а 2.2. *Любое минимальное множество потока, порождаемого* (1.4), *содержится в некотором компактном инвариантном многообразии этого потока.*

Пусть, теперь, $W^c \neq \varnothing$.

Л е м м а 2.1. *Если сужение линейного расширения* (1.5) *на* W^c *является эллиптическим, то инвариантное многообразие неоднородной системы не будет изолированным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует ляпуновское преобразование, определенное на торе $\mathbb{T}^m$, приводящее систему (1.5) к блочно-диагональному виду

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{y} = \mathrm{diag}(D_u(\varphi), D_s(\varphi), D_c(\varphi))y,$$

соответствующему инвариантному разложению (1.6). Рассмотрим подсистему на инвариантном подрасслоении W^c:

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{z} = D_c(\varphi)z + p(\varphi). \tag{2.2}$$

Все решения однородной системы ограничены, то матрица Коши этой системы $U_c(t,\varphi)$ принимает значения в группе ортогональных матриц. Замена $z = U_c(t,\varphi)w$ приводит систему (2.2) к виду

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{w} = U_c^{-1}(t,\varphi)p(\varphi)U_c(t,\varphi).$$

Поэтому решения неоднородной системы либо все ограничены, либо все неограничены, т.е. инвариантные многобразия не будут изолированными[8].
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 2.2. *Если сужение линейного расширения* (1.5) *на* W^c *является параболическим или неравномерно гиперболическим, то неоднородная система не имеет инвариантных многообразий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае любое ограниченное решение $z(t,\varphi)$ однородной системы не отделено от нуля, т.е. существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z(t_k,\varphi) = 0$. Согласно теореме 2 из [16] ни одно из ограниченных решений неоднородной системы не может быть квазипериодическим. Замыкание ограниченного решения представляет собой компактное инвариантное множество, которое не является тором (в противном случае все ограниченные решения были бы квазипериодические).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из этих лемм следует отсутствие изолированных инвариантных торов в случае, когда W^c является прямой суммой эллиптических, параболических и неравномерно гиперболических инвариантных подрасслоений.

ко описание динамики на предельных множествах, но и описание поведения траекторий блуждающего множества. Действительно, рассмотрим два гиперболических линейных расширения квазипериодического потока на торе. Предположим, что размерности устойчивых и неустойчивых подрасслоений у обоих потоков одинаковы, но одно расширение имеет тривиальные расслоения, а другое – нетривиальные. Ясно, что они не будут топологически эквивалентными, так как их поведение на блуждающем множестве различно. Подобная ситуация наблюдается и для грубых систем [14].

[8] Согласно теории Фавара [15] все ограниченные решения – квазипериодические, т.е. замыкание любого ограниченного решения – тор.

3. Инвариантные многообразия нелинейной системы

При сделанных выше предположениях система (1.3) является асимптотически линейной. Поэтому можно предположить, что инвариантные нормально гиперболические многообразия сохраняются при малом возмущении системы. Подробное доказательство этого предположения для случая, когда инвариантное многообразие тор $\mathbb{T}^m$ в книге А.М. Самойленко [12], гл. IV, теорема 1.

Нахождение приближенный инвариантных многообразий системы (1.3) основано на следующем приеме. Пусть $x = u(\varphi) = u_0 + v(\varphi)$ – инвариантный тор системы

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = C(\varphi)x + b(\varphi) + R(\varphi, x), \tag{3.1}$$

где $u_0 = \int\limits_{\mathbb{T}^m} u(\varphi)d\varphi$. Поэтому должно выполнятся равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} [C(\varphi)u(\varphi) + R(\varphi, u(\varphi)]d\varphi = 0.$$

Пусть уравнение (порождающее уравнение)

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} [C(\varphi)u + b(\varphi) + R(\varphi, x)]d\varphi = 0 \tag{3.2}$$

имеет ℓ различных корней $u_1, \ldots, u_\ell$. Будем искать инвариантный тор системы (3.1) в виде $u_k(\varphi) = u_k + v_k(\varphi)$. Тогда в качестве линейного приближения $v_k(\varphi)$ берется линейная система

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{v_k} = C(\varphi)v_k + C(\varphi)u_k + b(\varphi) + R(\varphi, u_k).$$

При условии, что линейная часть системы (3.1) является гиперболической, инвариантный тор $v_k(\varphi)$ представим согласно (2.1) в виде

$$\begin{aligned} v_k(\varphi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)(C(\varphi_s)u_k + b(\varphi_s)R(\varphi_s, u_k)ds = \\ &= u_k + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)[b(\varphi_s) + R(\varphi_s, u_k)]ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку этой работы, гранты 11-01-12056-офи-м, 12-01-00672.

Список литературы

1. Haykin S., *Neural networks. Comprehensive foundation*, Prentice Hall, N.J., 1999 (русск. пер. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. М. Вильямс. 2006.).

2. Hopfield J.J., “Neural networks and physical systems with tmergent collective computational abilities”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **79** (1982), 2554–2558.

3. Бронштейн И. У., *Неавтономные динамические системы*, Штиница, Кишенев, 1984.

4. Selgrade J., "Isolated invariant sets for flows on vector bundles", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **203** (1975), 359–390.

5. Palis J., Takens F., "Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems", *Topology*, **16** (1977), 335–345.

6. Mane R., "Persistent manifolds are normally hyperbolic", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 261–283.

7. Coppel W.A., "Dihotomies and reducibility", *J. Diff. Equat.*, **4** (1968), 386–398.

8. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В., "О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем", *Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев. Наукова думка.*, 1977, 54–61.

9. Palmer K.J., "Reducibility of almost periodic linear systems", *Lect. Notis. Math.*, **846** (1981), 273–279.

10. Ellis R., Johnson R. A., "Topological dynamics and linear differential systems", *J. Diff. Equat.*, **44** (1982), 21–39.

11. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н., "Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодическим возмущением", *Журнал СВМО*, **13**:3 (2011), 53–65.

12. Самойленко А. М., *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, М, 1987.

13. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н., "Эквивалентность линейных расширений минимальных потоков", *Труды СВМО*, **12**:1 (2009), 181–189.

14. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, "О топологически несопряженных диффеоморфизмах Морса-Смейла с тривиальными пучками сепаратрис", *Журнал СВМО*, **12**:1 (2009), 24–31.

15. Жиков В. В., Левитан Б. М., "Теория Фавара", *УМН*, **32**:2 (1977), 123–171.

16. Ortega R., Tarallo M., "Almost periodic linear differential equations with non-separated solutions", *J. of Functional Analisis*, **237** (2006), 402–426.

Invariant manifolds of nonautonomous models neural networks

© M.L. Kolomiets[9], A.N. Sakharov[10]

Abstract. We consider the problem of the Structure of invariant sets in nonautonomous systems describing the dynamics of neural networks. It is shown that normal hyperbolic manifolds of non-linear extensions of quasiperiodic flows on the torus is a bundle over the torus with a homogeneous space of compact matrix Lie group as a fiber.

Key Words: flows extensions on compact spaces, normally hyperbolic diversity, attractors, minimal sets, neural networks

[9] Assistant professor of department of higher mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[10] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.

УДК 519.8

Методы оценки эффективности алгоритмов решения многокритериальных задач

© **Е.А. Лазарев**[1]

Аннотация. В работе предлагаются несколько методов оценки эффективности алгоритмов решения многокритериальных задач, приводится их сравнение и критический анализ.
Ключевые слова: Многокритериальная оптимизация, множество Парето, количественная оценка эффективности алгоритма.

1. Введение

При рассмотрении многокритериальных задач оптимизации знание множества Парето помогает лицу принимающему решение выбрать наилучшее компромиссное решение [1].

Однако, на практике, нахождение всего множества Парето может быть очень вычислительно трудоемко и, зачастую, просто невозможно, поэтому применение точных методов нерационально. Одним из возможных решений данной проблемы является использование класса эволюционных алгоритмов (ЭА). Они, зачастую, не гарантируют нахождения точного фронта Парето, но позволяют найти достаточно хорошее его приближение, т.е. множества решений, которые достаточно близки к парето-множеству. Существует большое количество различных эволюционных алгоритмов, и нас, естественно, интересует способ выбора наилучшего метода для решения поставленной задачи оптимизации.

Понятие эффективности алгоритма обычно включает в себя две компоненты: качество выдаваемого результата и вычислительные ресурсы, требуемые для его получения. Во втором случае, общей практикой является использование фиксированного числа операций вычисления приспособленности или константного времени выполнения в целом, поэтому в этом смысле нет разницы между однокритериальной и многокритериальной оптимизацией. Однако, при оценке качества выдаваемого результата существует серьезная разница. В случае однокритериальной оптимизации качество решения может быть определено с помощью целевой функции – чем больше (меньше) значение, тем лучше решение. Однако, при рассмотрении многокритериальных задач неясно, что означает качество – близость к фронту Парето, покрытие широкого спектра разнородных решений или оно характеризуется какими-то другими признаками?

2. Постановка задачи

Пусть рассматривается задача оптимизации с n критериями, которые, без ограничения общности, должны быть минимизированы. Обозначим множество допустимых решений задачи через X в смысле значения целевых функций. Каждый элемент $x \in X$ называется *целевым вектором* и имеет вид $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, где $x^1, x^2, \dots, x^n$ – значения целевых функций. В дальнейшем термины решение и целевой вектор используются как взаимозаменяемые.

[1] Аспирант кафедры вычислительные системы и технологии, Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; elazarev.nnov@gmail.com.

Рассматривается наиболее общий случай, когда все целевые функции имеют равную важность, т.е. нет никакой дополнительной информации о решаемой задаче. Единственное предположение заключается в том, что решение x_1 предпочтительнее решения x_2 если оно не хуже чем x_2 по всем критериям и лучше по, как минимум, одному. Данное отношение известно как *доминирование по Парето* и, в этом случае, говорят что x_1 доминирует x_2 и обозначают $x_1 \succ x_2$. Отношение доминирования задает частичное упорядочивание на пространстве поиска, таким образом, оптимальным может быть определено решение, которое не доминируется ни одним другим решением. Однако, могут существовать,несколько таких решений, которые называются *оптимальными по Парето*, так как два целевых вектора могут быть несравнимы друг с другом: один превосходит другой по некоторым критериям и уступает по другим. Например, несравнимы два целевых вектора, описываемые парами величин $(10, 8)$ и $(7, 11)$, так как $10 > 7$, а $8 < 11$.

Большая часть работ в области эволюционной многокритериальной оптимизации посвящена поиску оптимальных по Парето решений или, если это невозможно или крайне сложно с вычислительной точки зрения, нахождению хорошего их приближенного множества. Принимая во внимание данный факт, дадим определение множеству недоминируемых решений, находимых эволюционным алгоритмом:

Определение 2.1. *Множество решений $A \subseteq X$ назовем субоптимальным, если каждый элемент из A не доминирует и не равен ни одному другому элементу из A. Множество всех суботимальных множеств решений обозначим Ω.*

Понятно, что решения, найденные эволюционным алгоритмом, доминируемые каким-то другим решением, не представляют интереса и, поэтому, могут быть отброшены. Так же отметим, что данное выше определение, не включает в себя никакого представления о качестве полученного множества решений. Однако, нас интересует не любое субоптимальное решение, а *хорошее* субоптимальное решение. В идеальном случае задача состоит в нахождении *фронта Парето*, который состоит из всех парето-оптимальных решений. Для того, чтобы определить качество полученного субоптимального решения рассмотрим несколько различных методов.

3. Методы оценки

В математическом анализе для вычисления расстояния между двумя множествами A и B обычно используется Хаусдорфово расстояние, которое вычисляется следующим образом. Для каждого элемента $a \in A$ находится ближайший элемент $b \in B$. Среди найденных расстояний выбирается наибольшее. Обозначим его A_m. Затем, по аналогии, для каждого $b \in B$ находится ближайший элемент $a \in A$ и снова выбирается наибольшее из полученных расстояний. Обозначим его за B_m. Тогда Хаусдорфово расстояние между A и B есть $max(A_m, B_m)$.

Однако, использование Хаусдорфовой меры для оценки качества полученного субоптимального решения не является эффективным. Такая мера позволит показать в каких «границах» находится субоптимальное решение от множества Парето. Например, пусть фронт Парето X имеет следующий вид $X = \{(1, 4), (2, 8), (7, 9)\}$, а два субоптимальных решения следующие $X_1 = \{(1, 4), (4, 7), (7, 9)\}$, $X_1 = \{(1, 4), (4, 7), (8, 9)\}$. Хаусдорфово расстояние от X до X_1 и X_2 одинаково, однако решение X_1 предпочтительнее ввиду того, что в нем только одно решение $(4, 7)$ не является парето-оптимальным, а в X_2 сразу два: $(4, 7)$ и $(8, 9)$.

Таким образом, необходимо разработать метод оценки субоптимального решения, который бы адекватно показывал точность полученного решения.

Прежде чем перейти к описанию методов оценки введем несколько определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Обозначим через K фронт Парето для рассматриваемой задачи оптимизации, состоящий из $p \in \mathbb{N}$ элементов, а через $K' \subseteq \Omega$ – субоптимальное множество решений, состоящее из $q \in \mathbb{N}$ элементов, найденное эволюционным алгоритмом при решении той же задачи.

Определение 3.1. *Отклонение* $\Delta(K, K')$ *субоптимального множества решений* K' *от фронта Парето* K *есть функция* $\Delta : \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{q\times n} \to \mathbb{R}$.

Определение 3.2. *Решение* $x \in K'$ *назовем хорошим, если* $x \in K$.

Определение 3.3. *Решение* $x \in K'$ *назовем плохим, если* $x \notin K$.

Расстоянием $\rho(x_1, x_2)$ между решениями x_1 и x_2 назовем расстояние по метрике Чебышева:

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{i=1\dots n}(|x_1^i - x_2^i|). \tag{3.1}$$

Количество плохих решений Q_b вычисляется по формуле:

$$Q_b = |\{x : x \in K', x \notin K\}| \tag{3.2}$$

Количество хороших решений Q_g вычисляется по формуле:

$$Q_g = |\{x : x \in K', x \in K'\}| \tag{3.3}$$

3.1. Метод подсчета решений

Суть этого метода состоит в подсчете количества Q_m парето-оптимальных решений, которые не были найдены эволюционным алгоритмом и числа Q_b полученных плохих решений. Затем, наибольшая из найденных величин делится на количество элементов в K.

Величина Q_m вычисляется по формуле:

$$Q_m = |\{x : x \in K, x \notin K'\}| \tag{3.4}$$

Тогда отклонение Δ_1 вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta_1(K, K') = \frac{\max(Q_m, Q_b)}{|K|} \tag{3.5}$$

Данный метод позволяет достаточно грубо оценить качество полученной субоптимальной совокупности по количеству плохих и ненайденных оптимальных решений. Недостатком этого подхода является то, что при вычислении отклонения не учитывается насколько сильно отстоит субоптимальная оценка от оценки соответствующеего решения из совокупности Парето.

Например, пусть есть два субоптимальных множества $X_1 = \{(10, 15)\}$ и $X_2 = \{(5, 6)\}$, состоящих из одного решения. Расстояние между оценками и фронтом Парето $X = \{(5, 5)\}$ для первого равна $\max(|10 - 5|, |15 - 5|) = 10$, а для второго равна $\max(|5 - 5|, |6 - 5|) = 1$. Таким образом, несмотря на то, что оба решения вносят одинаковый вклад в величину отклонения, на практике выбор X_2 является предпочтительнее.

3.2. Метод усреднения отклонения от точного решения

Данный метод предложен в работе [2]. Для каждой оценки из множества Парето находится ближайшая к ней оценка из множества субоптимальных решений, а затем производится усреднение по всем оценкам из точной совокупности. Полученная величина нормируется на среднее значение расстояния парето-оптимальных решений до нуля. Таким образом, отклонение вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta_2(K, K') = \frac{\underset{x \in K}{avg}\left(\min\limits_{x' \in K'} \rho(x, x')\right)}{\underset{x \in K}{avg}\left(\rho(x, x_0))\right)} \tag{3.6}$$

где $x_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, а avg – оператор нахождения среднего значения.

Однако этот метод не лишен недостатков. Такой способ оценки отклонения дает понятие о приближении всей совокупности парето-оптимальных решений в целом, в среднем. Однако при таком подходе ситуации нахождения оценки, «неплохо» приближающей сразу несколько оценок совокупности Парето, иногда оказываются выигрышней ситуации нахождения какой-то одной точной оценки из их числа. В работе [2] приводится пример, иллюстрирующий это.

Для учета подобных ситуаций в работе [2] предлагается внести изменения в алгоритм оценки приближения оптимального множества решений. Если для некоторой оценки из парето-оптимальной совокупности расстояние для ближайшей оценки из субоптимальной совокупности превышает некоторую заданную величину ε, то ее вклад при нахождении среднего отклонения не учитывается, но при этом увеличивается число оценок, потерянных рассматриваемым субоптимальным алгоритмом. При таком подходе при сравнении алгоритмов предпочтительнее оказывается тот, который потерял наименьшее количество оценок из фронта Парето, и при этом, обеспечил наименьшее среднее относительное отклонение для тех оценок, которые он приблизил.

Однако при таком подходе встает вопрос о том, каким образом выбирать константу ε? И если в алгоритме считается количество потерянных решений, то почему бы просто не считать отклонение по формулам (3.5) и (3.6) и переходить к рассмотрению бикритериальной задачи?

Так же стоит отметить, что нормирование отклонения на среднее значение расстояния парето-оптимальных решений до нуля не является оптимальным. Для каждого решения из субоптимального множества стоит производить нормировку на величину расстояния от *ближайшего* элемента из множества Парето до нуля. Таким образом вычисляется на сколько сильно отстоит каждое конкретное субоптимальное решение от ближайшего эталонного. Тогда формула для вычисления отклонения примет вид:

$$\Delta_3(K, K') = \underset{x \in K}{avg} \frac{\min\limits_{x' \in K'} \rho(x, x')}{\rho(x'', x_0)} \tag{3.7}$$

где $x'' \in K$ – решение ближайшее к x.

Еще одним недостатком данного метода является то, что не учитываются решения, которые были найдены эволюционным алгоритмом, но при этом не входят в фронт Парето. Таким образом, субоптимальное решение может содержать большое количество «лишних» решений. Для учета этого случая рекомендуется совместное применение формул (3.7) и (3.5), что позволит избежать данной проблемы.

4. Заключение

Рассмотренные выше методы оценки были использованы при решении бикритериальной задачи оптимизации сети передачи данных [3] при анализе двух генетических алгоритмов [4] и алгоритма имитации отжига, решающих поставленную задачу. Совместное использование формул (3.5) и (3.7) позволяет не только оценить насколько сильно, в среднем, отклонение субоптимального решения, но и определить как много решений было потеряно или не является парето-оптимальными.

Стоит отметить, что существуют другие способы оценки качества полученного решения, например, метод, использующий метрику наподобие χ^2, предложен в работе [5], метод расчета гиперобъема, предложенный в работе [6], метод нахождения протяженности фронта Парето [7]. Однако, данные методы либо достаточно сложны в реализации, либо требуют значительных вычислительных ресурсов, либо уступают в точности и, при этом, не обладают серьезным преимуществом по сравнению с описанными выше методами.

Список литературы

1. В. В. Подиновский., *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*, Физматлит, М., 2007.

2. Н. А. Дуничкина, Ю. С. Федосенко., “Об оценке приближенных решений бикритериальных задач дискретного программирования”, *Материалы XV международной научно-технической конференции Информационные системы и технологии*, 2009, 300—302.

3. Е. А. Лазарев, Д. Е. Шапошников, П. В. Мисевич., “Бикритериальная модель сети передачи данных”, *Системы управления и информационные технологии*, 2011, № 3.2(45), 255-–258.

4. Е. А. Лазарев, Д. Е. Шапошников, П. В. Мисевич., “Генетические алгоритмы оптимизации сети передачи данных”, *Системы управления и информационные технологии*, 2011, № 4(46), 59—63.

5. N. Srinivas, K. Deb., “Muiltiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms”, *Evol. Comput.*, **2**:3 (1994), 221–248.

6. E. Zitzler, L. Thiele., “Multiobjective optimization using evolutionary algorithms – a comparative case study”, *Fifth International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, 1998, 292–301.

7. J. Wu, S. Azarm., “Metrics for quality assessment of a multiobjective design optimization solution set”, *Journal of Mechanical Design*, 2001, 18—25.

Methods of evaluation of performance of algorithms solving multicriterion optimization problems

© E.A. Lazarev[2]

Abstract. Several methods of evaluation of performance of algorithms solving multicriterion optimization problems are proposed in the work, they are compared and analyzed.
Key Words: multicriterion optimization, Pareto set, quantative comparison of algorithm performance.

[2] Graduate student of the department of computer systems and technologies, Nizhny Novgorod State Technical University after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; elazarev.nnov@gmail.com.

УДК 519.853.62

Проекционные обобщённые двухшаговые экстраградиентные методы для решения равновесных задач

© **В.Г. Малинов** [1]

Аннотация. В работе предлагаются и исследуются проекционные обобщённые двухшаговые экстраградиентные методы для решения задач равновесного программирования, когда седловые точки вычисляются для выпукло вогнутой непрерывно дифференцируемой функции с липшицевыми градиентами на выпуклом замкнутом подмножестве евклидова пространства. Средствами выпуклого анализа доказана сходимость и получены оценки скорости сходимости, для двух предложенных методов, без предположений о сильной выпукло вогнутости функции.

Ключевые слова: выпукло вогнутая функция, равновесная задача, проекционный обобщённый двухшаговый экстраградиентный метод.

1. Постановка задачи

На выпуклом замкнутом множестве $Q \times U \subset E^n \times E^m$ будем рассматривать задачу об отыскании седловой точки выпукло-вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, выпуклой по $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и вогнутой по $\mathbf{u} \in U \subset E^m$, то есть об отыскании точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U$,

$$\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \le \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \le \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u} \in U, \tag{1.1}$$

где предполагаем: а) множества $Q \subset E^n$ и $U \subset E^m$ непустые выпуклые замкнутые; б) функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ с овражными гиперповерхностями уровней определена в окрестности подмножества $W \subset Q \times U \subset E^{n+m}$, для всех фиксированных $\mathbf{u} \in U$ функция $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ выпукла на $Q \subset E^n$, а для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in Q$ функция $h(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ вогнута на $U \subset E^m$; в) множество $W_* = Q_* \times U_*$ седловых точек $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ на $W \subset E^{n+m}$ непустое; г) частные градиенты функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ Липшицевы на $Q \times U$,

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\| \le L\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|^2\right)^{1/2}, \\ \|\nabla\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\| \le L^0\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $L > 0, L^0 > 0$ – константы Липшица (см. [1] – [4]). В терминах оператора проектирования седловая точка $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_* \subset Q_* \times U_*$ задачи (1.1) характеризуется равенствами [3]

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \tau\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right], \quad \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \tau\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right], \quad \tau > 0, \tag{1.3}$$

где P_Q и P_U - операторы проектирования соответствующих векторов $\mathbf{x} \in Q$ и $\mathbf{u} \in U$ на множества Q и U.

2. Краткая предыстория методов решения задачи

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

Поставленная задача связана с решением различных классов экстремальных задач математической физики, оптимального управления, теории игр, математической экономики. В частности, задачи вычисления оптимальных решений многих прямых и двойственных задач математического программирования могут быть сведены к отысканию седловых точек соответствующих функций Лагранжа или их модификаций. Например, задача выпуклого программирования (ЗВП)

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in G \subset E^n, \quad G = \{\mathbf{x} \in E^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\, i \in [1:m]\}$$

приводит к эквивалентной (1.1) задаче отыскания седловой точки функции Лагранжа [1] – [5]

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}) = L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}, g(\mathbf{x})),\, \mathbf{x} \in G \subset E^n,\, \mathbf{u} \in E^m. \tag{2.1}$$

Решению задачи (1.1) посвящён ряд работ (см., например, работы [1] – [8]). Можно выделить три направления исследований: 1) замена седловой функции модифицированной, с теми же седловыми точками, но уже имеющей новые свойства, позволяющие обосновать сходимость метода [3], [4]; 2) разработка других методов минимизации для решения задач вида (1.1) [2], [5]; 3) работы, объединяющие оба указанных подхода.

Предлагаемая работа относится ко второму направлению исследований и актуальна с учётом малочисленности методов решения седловых задач.

Кратко о некоторых итеративных методах решения этой задачи. Один из них — метод проекции градиента (МПГ) Эрроу-Гурвица

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \tau\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k + \tau\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \quad \tau > 0, \quad k \ge 0$$

где P_Q и P_U – операторы проектирования соответствующих векторов на множества Q и U. Известно, что для задачи минимизации $f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n$, на простом множестве Q МПГ сходится, а для задач о точках равновесия сходимость МПГ доказана лишь при весьма ограничительных предположениях сильной выпукло вогнутости, что не выполняется для многих нужных классов задач. Например, функций Лагранжа задач минимизации при ограничениях, других седловых задач [1]– [8].

Метод отыскания седловой точки для вогнуто-выпуклой функции $f(\mathbf{x},\mathbf{u})$, названный автором "экстраградиентным"(ЭГМ), был предложен в работе [2]:

$$\begin{gathered}\mathbf{v}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \gamma\nabla f_x(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{z}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_u(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \\ \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \gamma\nabla f_v(\mathbf{v}^k,\mathbf{z}^k)\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_z(\mathbf{v}^k,\mathbf{z}^k)\right], \gamma > 0,\, k \ge 0.\end{gathered}$$

ЭГМ сходится при почти тех же предположениях, что и МПГ, в нём проводится по два градиентных шага по обоим переменным. На первом этапе вычисляется экстраполированная точка $\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{z}^k\right)$ (шаг МПГ), а на втором получается требуемая точка $\left(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1}\right)$; каждая итерация требует четыре вычисления градиента.

В [6] предложены две модификации ЭГМ решения седловой задачи для вогнуто выпуклой функции $f(\mathbf{x},\mathbf{u})$, обладающие линейной скоростью сходимости для квадратичной или линейной ЗВП, эквивалентной минимизации функции (2.1). Они требуют соответственно два и три вычисления градиента на каждую итерацию. Лучший из них

$$\begin{gathered}\mathbf{z}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_u(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \tau\nabla f_x(\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \tau(\mathbf{z}^k - \mathbf{u}^k)/\gamma, \quad 0 < \tau < \gamma, \quad k \ge 0.\end{gathered}$$

Метод имеет преимущества перед МПГ, а также перед ЭГМ из работы [2]. Для квадратичных задач получена оценка $\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1}) \le (1-mc)\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)$ скорости сходимости, где $\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$, константы $c > 0$, $m > 0$, $0 < 1 - mc < 1$.

В работе [7] для решения задачи (1.1) предложены и обоснованы, наряду с другими (в том числе и непрерывными), итерационный процесс

$$\mathbf{v}^k = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \alpha\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k,\mathbf{v}^k)\right],$$
$$\mathbf{u}^{k+1} = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{v}^k)\right], \; k \geq 0$$

и неявный итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \alpha\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^{k+1})\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\right], \; k \geq 0,$$

где P_+ – оператор проектирования на положительный ортант E^m_+. Доказана сходимость методов к седловой точке задачи (1.1), без оценки скорости сходимости.

Рассматриваемые методы получили дальнейшее развитие в работе [8] и других, где задачи вида (1.1) и многообразие других экстремальных задач и методы их решения обобщены к задачам и методам вычисления неподвижных точек экстремальных отображений.

Целью нашей работы является построение для решения задач вида (1.1) методов, по скорости сходимости не уступающих построенным на основе МПГ, и для случая такой задачи, что гиперповерхности уровней функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ имеют овражный характер. Тогда для решения задачи будут предпочтительны, например, многошаговые проекционные методы, приспособленные для минимизации таких функций.

3. Предлагаемые методы решения задачи и вспомогательные неравенства

Будем решать задачу (1.1) в случае овражности по переменной $\mathbf{x} \in E^n$ с помощью следующего проекционного обобщенного двухшагового метода:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{y}^k\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k)\right)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k + \lambda_k\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k)\right], \quad k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\forall\,(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ начальная точка; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; параметры $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $\gamma_{1k} > 0$, $\gamma_{2k} > 0$; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$. Метод (3.1) построен на основе проекционного обобщённого двухшагового двухэтапного четырёхпараметрического метода (ПОДМЧ) из работы [9]. В случае овражности гиперповерхностей уровня функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ по обоим переменным $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и $\mathbf{u} \in U \subset E^m$ для решения задачи (1.1) предпочтителен следующий метод, также построенный на основе ПОДМЧ из работы [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{y}^k\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k)\right)\right], \\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_k\mathbf{v}^k\right], \; \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{w}^k + \lambda_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{v}^k + \gamma_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $k \geq 0$; $\forall\,(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ – начальная точка; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; $\mathbf{v}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$; положительные параметры метода α_k, β_k, λ_k, γ_{1k}, γ_{2k}; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^0$. В (3.2) все другие обозначения сохраняются из (3.1).

Примечание 1. Отметим, что везде далее в этой работе для простоты обозначено $\nabla\varphi_x$ – частный градиент по первому аргументу, а $\nabla\varphi_u$ – по второму. Дифференцирование производится в точках, указанных в аргументах соответствующих функций.

3.2. Получим неравенства, дополняющие необходимый для обоснования сходимости и оценки скорости сходимости многошаговых методов математический инструментарий.

Л е м м а 1. *В евклидовом пространстве E^n имеет место двойное неравенство*

$$(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \le \\ \le (1+\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1+\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in E^n. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{w})+\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in E^n, \tag{3.4}$$

запишем его в форме

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2-2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})+\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \tag{3.5}$$

и второе слагаемое в правой части (3.5) оценим с помощью неравенства

$$2|(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})| \le \varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+\varepsilon^{-1}\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2,\ \varepsilon>0, \tag{3.6}$$

следующего из известного неравенства $2|ab| \le \varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2,\ \forall\, a,b,\varepsilon>0$.

Тогда из (3.6) получим $\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$. Левое неравенство (3.3) доказано. Пользуясь (3.6) в равенстве (3.4), получим правую часть (3.3), совпадающую с известным неравенством.

Лемма 1 доказана.

Отметим, что правое неравенство (3.3) известное, здесь оно для единообразия выведено в пространстве E^n, а левое неравенство (3.3) является результатом объединения применявшихся ранее при обосновании методов оптимизации разрозненных процедур получения нижней оценки квадрата нормы разности векторов в E^n.

3.3. **Л е м м а 2.** *В евклидовом пространстве E^n для любой тройки точек $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}\in E^n$ имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \ge (\varepsilon-1)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.7}$$

где $0<\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}=\left[s\mp(s^2-4l_2l_3)^{1/2}\right]/(2l_2)$, $\quad l_1=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$, $\quad l_2=\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2$, $l_3=\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2$, $\quad s=l_1+l_2+l_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку E^n метрическое пространство с метрикой $\rho(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \quad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v}\in E^n$, в нём имеет место неравенство ([12], с. 31)

$$|\rho(\mathbf{u},\mathbf{x})-\rho(\mathbf{v},\mathbf{y})| \le \rho(\mathbf{u},\mathbf{v})+\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\in E^n. \tag{3.8}$$

Отсюда с помощью формулы для метрики получим неравенство $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|-\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}\|$. Возведём его в квадрат и воспользуемся под знаком модуля формулой для квадрата разности, $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-2\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ и удвоенное произведение под знаком модуля оценим с помощью известного неравенства (3.6), тогда $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-\varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-\varepsilon\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$.

Представим абсолютную величину в форме двойного неравенства

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \le (1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2. \tag{3.9}$$

Возьмём левую часть этого неравенства и, умножив на -1, придём к неравенству (3.7). Решая неравенство (3.7) относительно $\varepsilon>0$ при данных обозначениях, получаем для этого числа интервал возможных в (3.7) значений. Заметим, что правое неравенство в (3.9) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\mathbf{x}=\mathbf{v}$, $\mathbf{v}=\mathbf{w}$ совпадает с левым неравенством (3.3).

Лемма 2 доказана.

3.4. **Примечание 2.** Верхняя и нижняя границы числа ε в (3.7) зависят от соотношения длин сторон треугольника с вершинами $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ (например, это $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^*$; случай их расположения на одной прямой не исключается; в данной работе предполагаем, что упорядоченная тройка точек $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ соответствуют порядку вычисления точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ метода).

Зададим дополнительные ограничения, при которых обеспечиваются конкретные значения ε, используемые в доказательстве теорем. Например, не обременительны условия: а) $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, его аналог при $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$, $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ запишется в виде

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|; \tag{3.10}$$

б) неравенства $2\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, их аналог $2\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|$;

в) неравенства $(11/5)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, их аналог $(11/5)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|$;

г) неравенства $3\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, ...

В случае а) для вычисления границ ε решаем следующее из (3.7) неравенство

$$l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \le 0, \tag{3.11}$$

полагая $l_1=l_2=l_3$. Получаем значения $\varepsilon_{1,2}=(3\mp 5^{1/2})/2$, то есть округлённо можно принять значения из интервала $0.39 \le \varepsilon \le 2.61$. В случае б) решаем неравенство, аналогичное (3.11), положив $4l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(9\mp 65^{1/2})/2$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.47 \le \varepsilon \le 8.5$. В случае в) решаем неравенство, аналогичное (3.11), положив $(121/25)l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(267\mp 60189^{1/2})/50$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.48 \le \varepsilon \le 10$, достаточен для применения (3.7) в данной работе. В случае г) решаем неравенство, полученное из (3.11) при $9l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(19\mp 325^{1/2})/2$; тогда искомый приближённый интервал $0.5 \le \varepsilon \le 18.5$.

О неравенстве (3.7). Оно является новым в обосновании методов решения экстремальных задач и выведено для обоснования методов класса ПОДМ, служит хорошим математическим инструментом при доказательстве сходимости и оценке скорости сходимости методов минимизации. Появление дополнительных ограничений неравенств при его применении здесь не представляется обременительным. Неравенство (3.7) получено на основе известного из функционального анализа неравенства четырёхугольника для метрики. Его частный случай известен как второе неравенство треугольника для метрики ([13], с. 27) $|\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})-\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})| \le \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$ в метрическом пространстве (X,ρ).

Далее докажем сходимость и получим оценки скорости сходимости для метода (3.1), а затем — для метода (3.2).

4. Обоснование сходимости метода (3.1)

О сходимости метода (3.1) с параметрами константами имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения а) - г) из п.1, параметры метода (3.1) таковы, что*

$$\begin{gathered} 0<\alpha<1/5=\alpha^0,\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\gamma_2<4(3-5\alpha)\gamma_1/(15L\alpha), \\ 0<\lambda<1/L^0,\ 0<\beta<(\alpha-5\alpha^2)/(2\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \longrightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, $k \to \infty$, *то есть найдётся седловая точка* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$ *такая, что процесс (3.1), (4.1) по норме пространства* $E^n \times E^m$ *к ней сходится, то есть* $\{\mathbf{x}^k\} \to \mathbf{x}^* \in Q_*$, $\{\mathbf{u}^k\} \to \mathbf{u}^* \in U_*$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in E^{n+m}$.

Доказательство. Следуя методике обоснования сходимости из работ [3], [5], [7], представим уравнения из (3.1) в виде вариационных неравенств:

$$\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k\right) \geq 0, \tag{4.2}$$

$$\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k - \beta\gamma_1 \mathbf{y}^k + \beta\gamma_2 \nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}\right) \geq 0, \tag{4.3}$$

$$\left(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k - \lambda \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k), \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}\right) \geq 0. \tag{4.4}$$

Сначала преобразуем (4.2) и (4.3), положив в (4.2) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, в (4.3) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и нерасширяющим свойством оператора проектирования ([10], с. 190). Из (4.2) имеем: $\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\right) \geq 0$, или

$$\begin{gathered} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 \leq \alpha \left(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\right) \leq \alpha \|\mathbf{y}^k\| \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\| = \\ = \alpha \|\mathbf{y}^k\| \|P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k\right) - P_Q(\mathbf{x}^k)\| \leq \alpha^2 \|\mathbf{y}^k\|^2. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Из (4.3) получим неравенство

$$\begin{gathered} \left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) - \beta\gamma_1 \left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) + \\ + \beta\gamma_2 \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) \geq 0, \end{gathered} \tag{4.6}$$

и первое слагаемое в нём выразим с помощью известного равенства (3.4),

$$\left(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\right) = \left(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2\right/ 2.$$

Подставим эту оценку в (4.6) и запишем полученное после этого неравенство в форме

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ -2\beta\gamma_1 \left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \leq 2\beta\gamma_2 \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right), \ k \geq 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь сначала преобразуем третье слагаемое в левой части с помощью нерасширяющего свойства оператора проектирования ([10], с. 190),

$$\begin{gathered} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 = \|P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k\right) - P_Q(\mathbf{x}^*)\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k - \mathbf{x}^*\|^2 = \\ = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + 2\alpha \left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k\right) + \alpha^2 \|\mathbf{y}^k\|^2, \end{gathered}$$

где скалярное произведение преобразуем с помощью (3.4),

$$2\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k\right) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Тогда получим оценку

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1 + \alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + (\alpha^2 + \alpha) \|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \tag{4.8}$$

и, с учётом (4.8), неравенство (4.7) запишется

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \\ -(1 + \alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - (\alpha^2 + \alpha) \|\mathbf{y}^k\|^2 + \alpha \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ -2\beta\gamma_1 \left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \leq 2\beta\gamma_2 \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right), \ k \geq 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Далее скалярное произведение в правой части (4.9) представим в виде суммы $\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\right) + \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right)$ и для первого слагаемого воспользуемся критерием выпуклости ([10], с. 164) $(f(\mathbf{v}), \mathbf{u}-\mathbf{v}) \le f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q$ ввиду выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по первой переменной, а для второго слагаемого — неравенством для функции $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ ([11], с. 164): $(f(\mathbf{v}), \mathbf{v}-\mathbf{u}) \le f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) + L\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2/2\ \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q$. Тогда, с учётом справедливости неравенства $\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) \le \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k)$ ввиду (1.1), то есть выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по переменной $\mathbf{x} \in E^n$, для суммы имеем

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\right) + \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right) \le \\ \le \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) + \varphi(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k) + L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2 \le \\ \le \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k) + L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2 \le L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2.\end{gathered} \tag{4.10}$$

Учитывая (4.10), из (4.9) получим:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - L\beta\gamma_2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - 2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + (\alpha^2+\alpha)\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k \ge 0.\end{gathered} \tag{4.11}$$

Второй квадрат нормы в левой части (4.11) преобразуем с помощью оценки

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.12}$$

которую получим из левого неравенства (3.3) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$. Положим $\varepsilon = 1/5$ в (4.12), а второй квадрат нормы в его правой части оценим с помощью (4.5):

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge 4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + 4\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2. \tag{4.13}$$

Подставив (4.13) в (4.11), придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + 4(1 - L\beta\gamma_2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 - 2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + a_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k \ge 0,\end{gathered} \tag{4.14}$$

где $a_{41} = \alpha + 5\alpha^2 - 4L\alpha^2\beta\gamma_2 < 2\alpha - 4L\alpha^2\beta\gamma_2$, $5\alpha^2 < \alpha$; $1 - L\beta\gamma_2 > 0$.

В левой части (4.14) третье слагаемое представим в виде суммы

$$-2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) = \beta\gamma_1\left[2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) - 2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)\right] \tag{4.15}$$

и преобразуем с помощью равенства (3.4) и неравенства (3.6) при $\varepsilon = 1/3$:

$$\begin{gathered}2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2, \\ -2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) \ge -\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/3 - 3\|\mathbf{y}^k\|^2;\end{gathered}$$

тогда

$$\begin{gathered}-2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \ge \\ \ge \beta\gamma_1\left(\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - 4\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/3\right).\end{gathered} \tag{4.16}$$

Подставив (4.16) в (4.14), получим (здесь и далее β^{ki}, γ_2^{ki}, λ^{ki} — функции от параметров метода)

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

где $a_1 = 4(1 - L\beta\gamma_2)/5 - \beta\gamma_1/3$, $a_2 = \alpha + \beta\gamma_1$, $a_3 = 1 + a_2$, $a_4 = a_{41} + 4\beta\gamma_1 = 2\alpha + 4\beta\gamma_1 - 4L\alpha^2\beta\gamma_2$; $a_1 > 0$ при $\beta < \beta^{11} = 12/(5\gamma_1 + 12L\gamma_2)$; $a_4 > 2\alpha$ при $\gamma_2 < \gamma_2^{11} = \gamma_1/(L\alpha^2)$.

Теперь преобразуем (4.4). При $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ из него следует неравенство

$$\left(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\right) \ge \lambda\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k), \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\right),\ k \ge 0. \tag{4.18}$$

Здесь первое скалярное произведение оценим с помощью равенства (3.4),

$$\left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)=\left(\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2-\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right)/2, \tag{4.19}$$

а скалярное произведение в правой части (4.18) представим в виде суммы

$$\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)=\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k+\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1}\right) \tag{4.20}$$

и первое слагаемое оценим с помощью неравенства для вогнутой функции ([11], с. 36) $(f(\mathbf{u}),\mathbf{v}-\mathbf{u})\geq f(\mathbf{v})-f(\mathbf{u})$ ввиду вогнутости функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ по второму аргументу,

$$\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k), \tag{4.21}$$

а второе слагаемое — с помощью неравенства ([10], с. 93) для функции $g(\mathbf{u})\in C^{1,1}(U)$, $\|g(\mathbf{v})-g(\mathbf{u})-(\nabla g(\mathbf{u}),\mathbf{v}-\mathbf{u})\|\leq L\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2/2$, то есть

$$-\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2.$$

С учётом этого неравенства и (4.21), а также $\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\geq 0$ ввиду вогнутости функции по второму аргументу, из (4.20) имеем,

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\\ -\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2\geq -L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Подставив (4.19) и (4.22) в (4.18), придём к неравенству

$$\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^k\|^2\leq\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\geq 0, \tag{4.23}$$

где $b_1=1-L^0\lambda>0$ при условиях (4.1).

Сложив неравенство (4.23) для переменной $\mathbf{u}\in E^m$ с (4.17), получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+\\ +a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2\leq a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k\geq 0.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Просуммируем неравенства (4.24) от $k=0$ до $k=m$, $m\geq 1$, тогда

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^m\|^2+\\ +(a_1-a_4)\sum_{k=0}^{k=m-1}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\sum_{k=0}^{k=m}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\leq\\ \leq a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2+(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2,\ m\geq 1,\end{gathered}$$

где $a_1-a_4>0$ при условиях (4.1). Упростим его, пользуясь оценкой первого слагаемого в правой части $a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2\leq 2a_2\left(\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^{m+1}\|^2+\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2\right)$, следующей из правого неравенства (3.3). С учётом неравенств $a_1-2a_2>a_1-a_4>0$, $a_4>2a_2$ при $0<\alpha<1/5$, $0<\beta<(\alpha-\alpha^2)/(2\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2)<\beta^{11}$, $0<\gamma_2<4(3-5\alpha)\gamma_1/(15L\alpha)<\gamma_2^{11}$, запишем

$$\begin{gathered}(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +\sum_{k=0}^{k=m}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^k\|^2\right]\leq\\ \leq(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2.\end{gathered} \tag{4.25}$$

При $m\to\infty$ сумма в левой части (4.25) ограничена и следует сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right].$$

Следовательно, для (4.25) имеют место соотношения

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \to 0, \quad \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\right\}$ невозрастающая, последовательность $\left\{\mathbf{x}^k; \mathbf{u}^k\right\}$ ограничена; (4.25) эквивалентно неравенству

$$(1 - 2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 \leq (1 - a_2)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2$$

и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}^{k_i}; \mathbf{u}^{k_i}\right\} \to (\mathbf{x}^*; \mathbf{u}^*)$, $k_i \to \infty$ такая, что

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^*\| \to 0, \ k_i \to \infty, \\ \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i+1}\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i+1}\| \to 0, \ k_i \to \infty.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Тогда в пределе при $k \to \infty$ из второго и третьего уравнений (3.1) следуют равенства

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \beta\gamma_2\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right], \ \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \lambda\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right],$$

$\beta, \gamma_2, \lambda > 0$, эквивалентные характеристике (1.3) седловой точки в терминах оператора проектирования; следовательно, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ есть седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, то есть решение задачи (1.1).

Положим $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$ и выберем $\forall\varepsilon > 0$ и номер $k_{i_0} = r$ так, чтобы с этого номера выполнялись неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i-1}\|^2 \leq \varepsilon/(3a_4), \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^e\|^2 \leq \varepsilon/3, \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^e\|^2 \leq \varepsilon/3, \tag{4.27}$$

и просуммируем (4.24) при $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$, теперь от $k = m$ до $k = m + N$ при $m + N > m > r$; получим неравенство

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+N+1} - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+N+1} - \mathbf{u}^e\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{m+N+1} - \mathbf{x}^{m+N}\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^e\|^2 + \\ +(a_1 - a_4)\sum_{k=m}^{k=m+N-1}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_1\sum_{k=m}^{k=m+N}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 \leq \\ \leq a_2\|\mathbf{x}^{m+N} - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 + a_4\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + \|\mathbf{u}^r - \mathbf{u}^e\|^2.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Здесь для первого слагаемого в правой части воспользуемся неравенством

$$a_2\|\mathbf{x}^{m+N} - \mathbf{x}^e\|^2 \leq 2a_2\left(\|\mathbf{x}^{m+N} - \mathbf{x}^{m+N+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{m+N+1} - \mathbf{x}^e\|^2\right). \tag{4.29}$$

Подставим (4.29) в (4.28) и, учитывая выкладки после (4.25), неравенства (4.26), (4.27), из (4.28) получим

$$\begin{gathered}(1 - 2a_2)\|\mathbf{x}^{m+N+1} - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+N+1} - \mathbf{u}^e\|^2 \leq \\ \leq a_4\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + \|\mathbf{x}^r - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{u}^r - \mathbf{u}^e\|^2 \leq \varepsilon,\end{gathered}$$

что означает фундаментальность последовательности $\left\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\right\}$. Отсюда следует сходимость из любой начальной точки всей последовательности $\left\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\right\}$ к седловой точке задачи (1.1), то есть $\left\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\right\} \to (\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$, $k \to \infty$, ибо пространство E^{n+m} полное, неравенство (4.24) выполняется для седловой точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$ и последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\right\}$ монотонна и ограничена.

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Поскольку в теореме 1 доказана монотонная сходимость последовательности* $\left\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\right\}$, *то имеют место неравенства*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \leq ..., \\ \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| \leq \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\| \leq ...,\end{gathered}$$

а также

$$\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^k\| \geq \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k+2}\| \geq ...,$$
$$\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^k\| \geq \|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^{k+2}\| \geq ....$$

Примечание 2. Отметим, что: а) в условиях теоремы 1 неопределённое значение γ_1^0 параметра метода может быть выбрано из условия $0 < \gamma_1^0 < 9\alpha_0$; б) при реализации методов выбор точки $\mathbf{z}^k$ и параметра α_k производим с учётом (4.1) и неравенства $g(\mathbf{z}^k) \leq g(\mathbf{x}^{k-1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Оценка скорости сходимости метода (3.1)

Получим оценку скорости сходимости метода (3.1), (4.1) при дополнительном ограничении и условиях на параметры метода.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того: 1) выполнены неравенства (3.10б); 2) параметры метода таковы, что*

$$\begin{gathered}0 < \beta < (1-6\alpha)/(21\gamma_1/2 + Ld\gamma_2), d = 1-8\alpha^2,\\ 5L^0\lambda + 10\alpha + 10\beta\gamma_1 < 1 + 4L\beta\gamma_2,\ 0 < \gamma_2 < (25\gamma_1)/(12L).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Тогда последовательность $\left\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\right\}$ *метода (3.1), (4.1), (5.1) сходится к некоторой седловой точке* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *задачи (1.1) со скоростью геометрической прогрессии,*

$$\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) \leq q^k \rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0), \tag{5.2}$$

где $q = \left[(12 + 5\alpha + 5\beta\gamma_1 - 2L\beta\gamma_2)/(12.5 - 2.5L^0\lambda)\right]^{1/2}$, $0 < q < 1$ *при условиях (4.1), (5.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при условиях теоремы 2 метод сходится и справедливо неравенство (4.24). В (4.24) сначала оценим пятое слагаемое в левой части с помощью левого неравенства (3.3), полученного в лемме 1. При $\varepsilon = 2$ получим оценку

$$a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2 \geq -a_2\|\mathbf{y}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2/2. \tag{5.3}$$

Далее в (4.24) оценим третье слагаемое в левой части с помощью неравенства (3.7), положив $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \mathbf{v} = \mathbf{x}^k, \varepsilon = 3$. Затем умножим на $3a_1/8$. Тогда получим

$$3a_1/8\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \geq 3a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2/4 - a_1\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2/4. \tag{5.4}$$

Аналогично процедуре получения (5.4), положим в (3.7) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{x} = \mathbf{u}^*, \mathbf{v} = \mathbf{u}^k, \varepsilon = 5/4$ и полученное неравенство умножим на b_1. Тогда придём к оценке четвёртого слагаемого в левой части (4.24),

$$b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2 \geq b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2/4 - b_1\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2/5. \tag{5.5}$$

После подстановки (5.3), (5.4) и (5.5), из (4.24) следует,

$$\begin{gathered}(1+3a_1/4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 + 5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8 + (1+b_1/4)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2 \leq\\ \leq a_5\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2 + b_2\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2 + a_6\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k \geq 0,\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $a_5 = a_3 - a_2/2 + a_1/4 < 6/5 + \alpha/2 + \beta\gamma_1/2 - L\beta\gamma_2/5$, $a_6 = a_4 + a_2 = 3\alpha + 5\beta\gamma_1 - 4L\alpha^2\beta\gamma_2$, $b_2 = 1 + b_1/5 = 6/5 - L^0\lambda/5$, $1 + b_1/4 = (5 - L^0\lambda)/4$.

Теперь покажем, что в (5.6) $a_6\|\mathbf{y}^k\|^2 - 5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8 \leq 0$. Действительно, имеют место неравенства: $\|\mathbf{y}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2$ в силу следствия теоремы 1; $a_6 - 5a_1/8 <$

$3\alpha+21\beta\gamma_1/4+Ld\beta\gamma_2/2-1/2<0$ (при $0<\beta<\beta^{21}=(1-6\alpha)/(21\gamma_1/2+Ld\gamma_2)$, $0<\alpha<1/6$); $(a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq 0$; $5a_1/8>a_6-5a_1/8$. Пользуясь этими неравенствами, верными при условиях теоремы, получаем:

$$\begin{gathered}0\geq(a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{y}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2\right)=\\ =a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-a_6\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq\\ \geq a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+(a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq\\ \geq a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8.\end{gathered}\tag{5.7}$$

В (5.6) учтём (5.7) и неравенства: $b_2<a_5$ при $0<\gamma_2\leq 25\gamma_1/(12L)=\gamma_2^{21}$; $1+b_1/4<1+3a_1/4$ при $\beta<\beta^{22}=(7+5L^0\lambda)/(5\gamma_1+12L\gamma_2)$, $\beta<\beta^{21}<\beta^{22}$. Тогда из (5.6) получим

$$(1+b_1/4)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)\leq a_5\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2,\ \ k\geq 0.$$

Это неравенство в обозначении из п.2 запишется в форме

$$\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q^2\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k),\ k\geq 0,\tag{5.8}$$

где $q^2=a_5/(1+b_1/4)<(6/5+\alpha/2+\beta\gamma_1/2-L\beta\gamma_2/5)/(5/4-L^0\lambda/4)$. В силу (5.8), в обозначениях метрики из п.2, имеют место неравенства

$$\rho(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q\rho(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\leq ...\leq q^{k+1}\rho(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0),$$

где $0<q<1$ при $a_5>0$, $b_1>0$, $5L^0\lambda+10\alpha+10\beta\gamma_1<1+4L\beta\gamma_2$. Оценка (5.2) получена.

Теорема 2 доказана.

6. Сходимость метода (3.2)

Далее рассмотрим новый метод (3.2), предпочтительный для решения задачи (1.1) в случае овражности функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ по обоим переменным. О сходимости метода (3.2) для выпукло-вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения а)–г) из п.1 и параметры метода (3.2) таковы, что*

$$\begin{gathered}0<\alpha<1/5,\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\beta<(2-5\alpha)/(11\gamma_1+2Ld\gamma_2), d=1-5\alpha^2\\ 0<\gamma_2<(4-15\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha d),\ 0<\lambda<\alpha/\gamma_1,\ L/2<L^0<3L/2.\end{gathered}\tag{6.1}$$

Тогда найдётся седловая точка $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\in Q_*\times U_*$ функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$, такая, что процесс (3.2), (6.1) по норме пространства $E^n\times E^m$ к ней сходится, то есть $\left\{\mathbf{x}^k\right\}\to\mathbf{x}^*\in Q_*$, $\left\{\mathbf{u}^k\right\}\to\mathbf{u}^*\in U_*$ при $k\to\infty$ для всех $(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0)\in E^{n+m}$.

Доказательство. Представим каждое уравнение из (3.2) в виде вариационного неравенства, тогда этот итерационный процесс запишется в форме:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k-\alpha\mathbf{y}^k,\mathbf{v}-\mathbf{z}^k\right)\geq 0,\\ \left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k-\beta\gamma_1\mathbf{y}^k+\beta\gamma_2\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k),\mathbf{v}-\mathbf{x}^{k+1}\right)\geq 0,\ \mathbf{v}\in Q;\\ \left(\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k-\alpha\mathbf{v}^k,\mathbf{u}-\mathbf{w}^k\right)\geq 0,\ \mathbf{u}\in U;\\ \left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k-\lambda\gamma_1\mathbf{v}^k-\lambda\gamma_2\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}-\mathbf{u}^{k+1}\right)\geq 0.\end{gathered}\tag{6.2}$$

Здесь сначала преобразуем первое и второе неравенства, положив $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$ и $\mathbf{v}=\mathbf{x}^*$ соответственно, пользуясь свойствами скалярного произведения, (3.2), неравенством

Коши-Буняковского и нерасширяющим свойством оператора проектирования ([10], с. 190). Аналогично проведённому в теореме 1, из первого неравенства получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|^2\le\alpha\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\right)\le\alpha\|\mathbf{y}^k\|\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|=\\=\alpha\|\mathbf{y}^k\|\|P_Q\left(\mathbf{x}^k+\alpha\mathbf{y}^k\right)-P_Q(\mathbf{x}^k)\|\le\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2.\end{gathered}\tag{6.3}$$

а из второго неравенства (6.2) получим неравенство, совпадающее с (4.17),

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2\le\\\le a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k\ge0,\end{gathered}\tag{6.4}$$

где $a_1=4(1-L\beta\gamma_2)/5-\beta\gamma_1/3>0$ при $0<\beta<4/(5\gamma_1/3+4L\gamma_2)=\beta^{31}<1/(L\gamma_2)$, $\gamma_2<\gamma_1/(4L\alpha^2)=\gamma_2^{31}$; $a_2=\alpha+\beta\gamma_1$, $a_3=1+a_2$, $a_4=2\alpha+4\beta\gamma_1-4L\alpha^2\beta\gamma_2$.

Далее будем анализировать третье и четвёртое неравенства из (6.2). Из третьего неравенства (6.2), положив $\mathbf{u}=\mathbf{u}^k$, вычислениями, аналогичными проведённым при получении неравенства (6.3), получим:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\|^2\le\alpha\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\right)\le\alpha\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\|=\\=\alpha\|\mathbf{v}^k\|\|P_Q\left(\mathbf{u}^k+\alpha\mathbf{v}^k\right)-P_Q(\mathbf{u}^k)\|\le\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2.\end{gathered}\tag{6.5}$$

Из четвёртого неравенства (6.2) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ следует:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)+\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)-\\-\lambda\gamma_2\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\ge0,\ k\ge0.\end{gathered}\tag{6.6}$$

Здесь первое скалярное произведение преобразуем с помощью (3.4),

$$\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\right)=\left(\|\mathbf{u}^*-\mathbf{w}^k\|^2-\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2\right)/2,\tag{6.7}$$

а скалярное произведение в третьем слагаемом в (6.6) представим в виде суммы

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)=\\\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{w}^k\right)+\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^{k+1}\right),\end{gathered}$$

перенесём в правую часть (6.6) и каждое слагаемое оценим аналогично тому, как это было сделано при выводе неравенства (4.17). Тогда

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\ge\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k)+\\+\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2/2,\end{gathered}$$

где в силу (1.1) $\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\ge0$. С учётом этой оценки, (3.2) и (6.7), неравенство (6.6) запишется в форме

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2+(1-L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2+\\+2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\right)\le\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\ge0.\end{gathered}$$

Его правая часть преобразуется с помощью нерасширяющего свойства оператора проектирования и (3.4):

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^*\|^2=\|P_U(\mathbf{u}^k+\alpha\mathbf{v}^k)-P_U(\mathbf{u}^*)\|^2\le\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*+\alpha\mathbf{v}^k\|^2=\\=\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+2\alpha\left(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^k\right)+\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2,\end{gathered}$$

скалярное произведение оценивается по (3.4),

$$2\alpha\left(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^k\right)=\alpha\left(\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+\|\mathbf{v}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\right),$$

поэтому $\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^*\|^2 \le (1+\alpha)\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+(\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2-\alpha\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2$, $k\ge 0$. Тогда основное неравенство запишется в виде

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2+(1-L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2+2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\right)\le\\ \le(1+\alpha)\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+(\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2-\alpha\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered} \tag{6.8}$$

В (6.8) третье слагаемое в левой части представим в виде суммы

$$2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\right)=\lambda\gamma_1\left[-2(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}^k)-2(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k,\mathbf{v}^k)\right],$$

затем оценим с помощью неравенства (3.7) при $\varepsilon=1$ и равенства (3.4):

$$\begin{gathered}-2(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}^k)\ge-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{v}^k\|^2;\\ -2(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k,\mathbf{v}^k)=\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k\|^2+\|\mathbf{v}^k\|^2-\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k-1}\|^2.\end{gathered}$$

Тогда $2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\right)\ \ge\ \lambda\gamma_1\left(\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)$. Подставив эту оценку в левую часть (6.8), придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+(1-L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2-\lambda\gamma_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+\\ (\alpha-\lambda\gamma_1)\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\le(1+\alpha-\lambda\gamma_1)\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +(\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered} \tag{6.9}$$

Здесь оценим второе слагаемое в левой части. С помощью левого неравенства (3.3) и нерасширяющего свойства оператора проектирования ([10], с. 190) имеем

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2\ge(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{u}^k-\mathbf{w}^k\|^2,\\ \varepsilon>0,\ \|\mathbf{u}^k-\mathbf{w}^k\|^2\ge\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2,\\ \varepsilon=1/5:\ \|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2\ge(4/5)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-4\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2.\end{gathered}$$

С учётом этой оценки (6.9) примет вид

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+b_{32}\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\le\\ \le b_{33}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+b_{34}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k\ge 0,\end{gathered} \tag{6.10}$$

где $b_{31}=4(1-L^0\lambda\gamma_2)/5-\lambda\gamma_1>0$ при $\lambda<4/(5\gamma_1+4L^0\gamma_2)=\lambda^{31}<1/(L^0\gamma_2)$; $b_{32}=\alpha-\lambda\gamma_1>0$ при $0<\lambda<\alpha/\gamma_1=\lambda^{32}<\lambda^{31}$, $\gamma_2<(4-5\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha)=\gamma_2^{31}$; $b_{33}=1+b_{32}$; $b_{34}=2\alpha-4L^0\alpha^2\lambda\gamma_2>0$, $\lambda<\lambda^{32}<1/(2L^0\alpha\gamma_2)$, $\gamma_2<\gamma_2^{31}<\gamma_1/(2L^0\alpha^2)$.

Сложив неравенства (6.4) и (6.10), получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+\\ +b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2+b_{32}\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\le\\ \le a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_{33}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2+b_{34}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered} \tag{6.11}$$

Далее просуммируем (6.11) от $k=0$ до $k=m$, $m\ge 1$, тогда

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^m\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+b_{31}\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m\|^2+\\ \sum_{k=0}^{k=m-1}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(b_{31}-b34)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right]\le\\ \le a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2+b_{32}\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+(1-b_{32})\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2,\end{gathered} \tag{6.12}$$

где первые две слагаемые в правой части преобразуем с помощью правого неравенства (3.3) при $\varepsilon=1$, $a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2+b_{32}\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^*\|^2\ \le\ 2a_2\left(\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^m\|^2+\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2\right)+2b_{32}\left(\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)$; тогда при $a_1-2a_2>a_1-a_4>0$ из (6.12) следует

$$\begin{gathered}(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+(1-2b_{32})\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +\sum_{k=0}^{k=m}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(b_{31}-b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right]\le\\ \le(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+(1-b_{32})\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2,\end{gathered} \tag{6.13}$$

где $0 < \beta \le (2-5\alpha)/(11\gamma_1 + 2Ld\gamma_2) < \beta^{31}$, $d = 1-5\alpha^2$; $b_{31} - 2b_{32} > b_{31} - b_{34} > 0$ при $0 < \gamma_2 < (4-15\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha d) < \gamma_2^{31}$, $0 < \lambda < \lambda^{32} < (4-10\alpha)/(5\gamma_1 + 4L^0 d\gamma_2)$, $0 < \alpha < 4/15$.

Отсюда при $m \to \infty$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right].$$

Следовательно, для (6.13) имеем: $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \to 0$, $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| \to 0$, $k \to \infty$, последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\right\}$ невозрастающая, последовательность $\left\{\mathbf{x}^k; \mathbf{u}^k\right\}$ ограничена; (6.13) эквивалентно неравенству

$$(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1-2b_{32})\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 \le (1-a_2)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + (1-b_{32})\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2$$

и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}^{k_i}; \mathbf{u}^{k_i}\right\} \to (\mathbf{x}^*; \mathbf{u}^*)$, $k_i \to \infty$ и

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^*\| \to 0,\ k_i \to \infty, \\ \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i+1}\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i+1}\| \to 0,\ k_i \to \infty. \end{gathered} \tag{6.14}$$

Тогда в пределе при $k \to \infty$ из второго и четвёртого уравнений (3.2) следуют равенства

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \beta\gamma_2 \nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right],\ \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \lambda\gamma_2 \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right]$$

(β, γ_2, $\lambda > 0$), эквивалентные характеристике (1.3) седловой точки в терминах оператора проектирования; следовательно, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ – седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, то есть решение задачи (1.1).

Положим $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$, выберем $\forall\varepsilon > 0$ и числа $k_{i_0} = r$ и $m > r$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i-1}\|^2 \le \varepsilon/(4a_4 + 4a_2),\ \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i-1}\|^2 \le \varepsilon/(4b_{34} + 4b_{32}), \\ \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 < \varepsilon/(4-2a_2),\ \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2 < \varepsilon/(4-2b_{32}), \end{gathered} \tag{6.15}$$

Просуммируем (6.11) от $k = m$ до $k = N$ при $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$, $N > m > r$:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^e\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^N\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^e\|^2 + b_{31}\|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^N\|^2 + \\ + a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^e\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^e\|^2 + \\ + \textstyle\sum_{k=r}^{k=N-1}\left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right] \le \\ \le \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2 + + a_2\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^e\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^e\|^2 + \\ + a_4\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + b_{34}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Здесь для третьего и четвёртого слагаемых в правой части воспользуемся неравенствами

$$\begin{gathered} a_2\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^e\|^2 \le 2a_2\left(\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^e\|^2\right), \\ b_{32}\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^e\|^2 \le 2b_{32}\left(\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^e\|^2\right), \end{gathered}$$

пятое и шестое слагаемые в левой части (6.16) преобразуем с помощью левого неравенства (3.3) при $\varepsilon = 2$:

$$\begin{gathered} a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^e\|^2 \ge -a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^m\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2/2, \\ b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^e\|^2 \ge -b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^m\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2/2. \end{gathered}$$

Учитывая эти оценки и неравенства $a_1 - 2a_2 > a_1 - a_4 > 0$, $b_{31} - 2b_{32} > b_{31} - b_{34} > 0$, верные при условиях (6.1), из (6.16) с учётом (6.14), (6.15) и рассуждений и выкладок после (6.13), получим:

$$(1 + 2a_2)\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^e\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^N\|^2 + (1 - 2b_{32})\|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^e\|^2 \leq \\ \leq (1 - a_2/2)\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 + (1 - b_{32}/2)\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2 + a_{35}\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + \\ + b_{35}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2 \leq \varepsilon,$$

где $a_{35} = a_4 + a_2$, $b_{35} = b_{34} + b_{32}$. Это неравенство означает фундаментальность последовательности $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$. Отсюда следует сходимость из любой начальной точки всей последовательности $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ к седловой точке задачи (1.1), то есть $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \to (\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$, $k \to \infty$, ибо пространство E^{n+m} полное, неравенства (6.13) выполняются для седловой точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$ и последовательность $\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\}$ монотонна и ограничена.

Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. *В силу теоремы 3 верны все неравенства из следствия теоремы 1.*

7. Оценка скорости сходимости метода (3.2)

Получим оценку скорости сходимости метода (3.2), (6.1) для выпукло вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, при дополнительном ограничении и требованиях к параметрам.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, включая (6.1) и, кроме того: 1) выполнены неравенства (3.10в); 2) параметры метода и функции таковы:*

$$0 < \alpha \leq 1/6,\ 0 < \beta \leq h\lambda/(5\gamma_1 + 12L\gamma_2);\ 3/5 < 2L/3 < L^0 < 6L/5; \\ 0 < \lambda < e(5\gamma_1 + 12L\gamma_2)/(hr);\ 0 < \gamma_2 < 7e\gamma_1/(8L^0); \\ e = 1 - 6\alpha;\ h = 15\gamma_1 + 12L^0\gamma_2;\ r = 21\gamma_1/2 + Ld\gamma_2;\ d = 1 - 8\alpha^2. \tag{7.1}$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ метода (3.2), (6.1) сходится к некоторой седловой точке $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ задачи (1.1) со скоростью геометрической прогрессии с оценкой

$$\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) \leq q^k \rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0), \tag{7.2}$$

где $0 < q < \{[(19/3 + 2.5\alpha + \beta(2\gamma_1 - 4L\gamma_2/3)]/(17 - h\lambda)\}^{1/2} < 1$, при условиях (7.1) на параметры.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в условиях теоремы 4 неравенство (6.11) справедливо. Для получения оценки (7.2) сначала воспользуемся левым неравенством (3.3) и выведем неравенство $\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{v}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$. Положим в нём и в (4.19) $\varepsilon = 2$, получим два неравенства:

$$\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \geq -\|\mathbf{v}^k\|^2 + 0.5\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2, \\ \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \geq -\|\mathbf{y}^k\|^2 + 0.5\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2. \tag{7.3}$$

Чтобы оценить $3/8$ часть третьего слагаемого в левой части (6.11), в (3.7) положим $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\varepsilon = 9$, затем умножим на $3a_1/8$. Тогда получим

$$(3a_1/8)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \geq 3a_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (a_1/3)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2. \tag{7.4}$$

Положив в (3.7) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k$, $\varepsilon = 9$ и умножив на $3b_{31}/8$, для четвёртого слагаемого в левой части (6.11) получим оценку

$$(3b_{31}/8)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 \geq 3b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + (b_{31}/3)\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2. \tag{7.5}$$

После подстановки оценок (7.3), (7.4), (7.5) в (6.11), придём к неравенству

$$\begin{gathered}(1+3a_1)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+(1+3b_{31})\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8\leq\\ \leq a_{43}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_{43}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2+b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k\geq 0.\end{gathered}\tag{7.6}$$

где $a_{43}=a_3-a_2/2+a_1/3<19/15+\alpha/2+2\beta\gamma_1/5-4L\beta\gamma_2/15$; $a_{44}=a_4+a_2=3\alpha+\beta(5\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2)>3\alpha>0$, $b_{43}=b_{33}-b_{32}/2+b_{31}/3=19/15+\alpha/2-5\lambda\gamma_1/6-4L^0\lambda\gamma_2/15$; $b_{44}=b_{34}+b_{32}=3\alpha-\lambda\gamma_1-4L^0\alpha^2\lambda\gamma_2$; $a_{43}>19/15+\alpha/2$ и $b_{43}>0$ при $\gamma_2<(35\gamma_1)/(24L)=\gamma_2^{41}$ и $\lambda\leq(19+8\alpha)/(14\gamma_1+4L^0\gamma_2)=\lambda^{41}$.

Далее покажем, что

$$\begin{gathered}a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8\leq 0,\\ b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8\leq 0.\end{gathered}\tag{7.7}$$

Для доказательства заметим, что в силу следствия теоремы 3

$$\|\mathbf{y}^k\|^2\geq\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2,\ \|\mathbf{v}^k\|^2\geq\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2.\tag{7.8}$$

Пользуясь первым неравенством (7.8), неравенствами $a_{44}-5a_1/8<3\alpha-1/2+\beta(21\gamma_1/4+L\gamma_2/2-4L\alpha^2\gamma_2)<0$ (при $0<\alpha<1/6$, $\beta<e/r=\beta^{41}$, $r>0$, $d=1-8\alpha^2>0$), $5a_1/8\geq a_{44}-5a_1/8$, $(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq 0$, верными при условиях (7.1), получим первое утверждение из (7.7):

$$\begin{gathered}0\geq(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{y}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2\right)=a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-\\ -a_{44}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq\\ \geq a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq\\ \geq a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8.\end{gathered}$$

В силу второго неравенства (7.8) и $b_{44}-5a_1/8=3\alpha-1/2-3\gamma_1\lambda/8+L^0d\gamma_2\lambda/2<-3\gamma_1\lambda/8<0$ (при $\lambda<e/(L^0d\gamma_2)=\lambda^{42}$, $3/4\leq 2L/3<L^0<6L/5$, $\lambda<\lambda^{41}<\lambda^{42}$, $\gamma_2<\gamma_2^{42}=7e\gamma_1/(8L^0)<\gamma_2^{41}$), $5b_{31}/8\geq b_{44}-5b_{31}/8$, $(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{v}^k\|^2\right)\geq 0$, получим вторую оценку (7.7):

$$\begin{gathered}0\geq(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{v}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right)\geq b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-\\ -(5b_{31}/8)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{v}^k\|^2\right)\geq\\ \geq b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8.\end{gathered}$$

Подставим оценки (7.7) в (7.6), тогда

$$\begin{gathered}(1+3a_1)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+(1+3b_{31})\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)\leq\\ \leq a_{43}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_{43}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\geq 0.\end{gathered}\tag{7.9}$$

Учитывая, что $(1+3a_1)\geq(1+3b_{31})$ (при $\beta\leq h\lambda/(5\gamma_1+12L\gamma_2)=\beta^{42}<\beta^{41}$, $0<\lambda<\lambda^{43}=e(5\gamma_1+12L\gamma_2)/(hr)<\lambda^{41}$); $b_{43}<a_{43}$ (при $0<\gamma_2<\gamma_2^{41}$), в обозначениях п.2 из (7.9) получаем $(1+3b_{31})\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq a_{43}\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)$, то есть

$$\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q^2\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k),k\geq 0,$$

где $0<q^2<[19/3+2.5\alpha+\beta(2\gamma_1-4L\gamma_2/3)]/(17-h\lambda)$. Тогда имеем

$$\rho(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q\rho(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\leq...\leq q^{k+1}\rho(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0),\tag{7.10}$$

где $q = [a_{43}/(1+3b_{31})]^{1/2}$, $0 < q < 1$, $0 < \beta < \beta^{42} < (32-8\alpha-3h\lambda)/(6\gamma_1 - 4L\gamma_2)$, $\lambda < [(32-8\alpha)/(5\gamma_1+12L\gamma_2)]/[h(21\gamma_1+32L\gamma_2)] = \lambda^{44}$, $0 < \lambda < \lambda^{43} < \lambda^{44} < 17/h$, $0 < \gamma_2 < \gamma_2^{41}$. Из (7.10) следует оценка (7.2).

Теорема 4 доказана.

Примечание 3. Представляют интерес модификации метода (3.2), со свойствами, не худшими свойств методов (3.1) и (3.2). Это четырёхпараметрический метод

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right],\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_k \mathbf{v}^k\right], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k)\right)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U\left[\mathbf{w}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{v}^k + \gamma_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\right)\right],\ k \ge 0, \end{aligned} \tag{7.11}$$

и метод с восемью параметрами

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_{1k} \mathbf{y}^k\right],\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_{2k} \mathbf{v}^k\right], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k)\right)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U\left[\mathbf{w}^k + \lambda_k\left(\delta_{1k}\mathbf{v}^k + \delta_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\right)\right],\ k \ge 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Эти методы благоприятны для решения задачи (1.1) в случае, когда функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ имеет овражные свойства по переменным $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и $\mathbf{u} \in U \subset E^m$.

Список литературы

1. Демьянов В. Ф., Певный А. Б., “Численные методы решения седловых задач”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **12**:5 (1972), 1099–1127.

2. Корпелевич Г. М., “Экстраградиентный метод для седловых и других задач”, *Экон. и матем. методы*, **12**:4 (1976), 747–756.

3. Антипин А. С., “Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа”, *Экон. и матем. методы.*, **13**:3 (1977), 560–565.

4. Гольштейн Е. Г., “О сходимости градиентного метода отыскания седловых точек модифицированной функции Лагранжа”, *Экон. и матем. методы*, **13**:2 (1977), 322–329.

5. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа*, ВНИИ системн. исследований, М., 1979, 74 с.

6. Корпелевич Г. М., “Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа”, *Экон. и матем. методы*, **19**:4 (1983), 694–703.

7. Антипин А. С., “Градиентные и проксимальные управляемые процессы”, *Вопросы кибернетики. Анализ больших систем*, 1992, № 178, 32 – 67.

8. Антипин А. С., *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании*, Изд-во ВЦ РАН, М., 2002, 131 с.

9. Малинов В. Г., “Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **36**:12 (1996), 48–56.

10. Васильев Ф. П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

11. Карманов В. Г., *Математическое программирование*, Наука, М., 1986, 288 с.

12. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977, 744 с.

13. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Специальный курс*, Физматлит, М., 1960, 388 с.

Projection generalized two-step extragradient methods for equilibrium problems

© V.G. Malinov [2]

Abstract. Projection generalized two-step extragradient methods for solving of equilibrium programming problems are proposed whereby the saddle points are found on convex-concave continuously differentiable function with Lipschitz gradients specified on subset of the Euclidean space. For two methods the convergence and rate of convergence of the method are studied with the aid of tools from convex analysis, without requirement of strongly convexity or strongly monotony.
Key Words: convex concave function, equilibrium problem, projection generalized two-step extragradient methods.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

УДК 534.113

К доказательству единственности решения обратной задачи по изгибным колебаниям трубы с протекающей жидкостью

© **Г.Ф. Сафина**[1]

Аннотация. В работе рассмотрены прямая задача по определению частот изгибных колебаний узкой трубы с несжимаемой жидкостью и обратная задача диагностирования параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью по собственным частотам ее изгибных колебаний. Доказаны теоремы о единственности определения параметров упругих закреплений трубы в случае протекания по ней жидкости. Установлено, что в случае протекания жидкости по трубопроводу необходимо использование из спектра частот колебаний 14 значений для определения параметров упругих закреплений трубы. Разработаны методы восстановления четырех краевых условий обратной задачи. Приведены примеры.

Ключевые слова: труба с протекающей жидкостью, частоты колебаний, краевые условия, параметры упругих закреплений, задача диагностирования, единственность решения

1. Введение

Решения прямой и обратной задач по изгибным колебаниям трубы с протекающей жидкостью продолжают исследования в виброакустической диагностике механических систем [1]–[3].

Задачи вычисления собственных частот изгибных колебаний трубопровода исследовалось в работах [4], [5]. Однако, обратная задача — задача отыскания краевых условий по собственным частотам — в этих работах не изучалась. К тому же, в этих работах рассматривались лишь приближенные методы (например, методы Галеркина и Рэлея-Ритца), которые не применимы для решение поставленной здесь задачи.

Ранее в работах [6]–[10] изучались обратные спектральные задачи диагностирования закреплений струн, мембран, стержней, пластин, валов, полых труб и труб с непротекающей жидкостью по собственным частотам их колебаний. Целью же настоящей работы является доказательство единственности решения обратной задачи диагностирования параметров закреплений трубы в случае протекания по ней жидкости. К тому же, в отличие от работ [6]–[10], в настоящей работе отыскиваются не два краевых условия, а все четыре. Это существенно осложняет задачу отыскания краевых условий и требует иных методов ее решения.

2. Прямая задача определения частот колебаний трубы с жидкостью

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях узкой трубы с несжимаемой жидкостью и приведем некоторые известные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

[1] Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

Уравнение малых свободных колебаний трубопровода с протекающей по нему жидкостью (с учетом несжимаемости жидкости) имеет следующий вид [4], [5]):

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m+\widetilde{m})\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\widetilde{m}V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \widetilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad m = \pi\,(r^2 - r_1^2\,)\rho, \quad \widetilde{m} = \pi\, r_1^2\,\rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и $\widetilde{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки в виде [4] $w = \partial^2 w/\partial x^2 = 0$, принято в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s\,\sin\,\frac{s\,\pi}{l}\,x\,e^{i\,\omega\,t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина [4]. Частотное уравнение представлено в виде бесконечного определителя, из которого находятся приближенные значения собственных частот колебаний трубы с жидкостью. Например, уточненное значение частоты ω_1 можно получить, приравнивая к нулю определитель второго порядка в верхнем левом углу бесконечного определителя. Следующее приближение для ω_1 можно получить, рассматривая определитель третьего порядка и т.д.

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи [8]. Введем безразмерные переменные

$$\widetilde{x} = x/l, \quad \widetilde{w} = w/r, \quad \widetilde{t} = t/\tau,$$

где

$$\tau = l^2\sqrt{\frac{m+\widetilde{m}}{EI}}.$$

Положим выражение для прогиба в виде:

$$\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{t}) = X(\widetilde{x})\,e^{i\,\omega\,\widetilde{t}}$$

и преобразуем уравнение (2.1) к линейному дифференциальному уравнению

$$X^{(4)} + a\,X'' + 2b\,i\,\omega X' - \omega^2\,X = 0, \tag{2.2}$$

в котором $X = X(\widetilde{x})$ и коэффициенты уравнения выражаются следующим образом:

$$a = \frac{\widetilde{m}\,l^2}{E\,I}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right); \quad b = \frac{\widetilde{m}\,V_0\,l}{(E\,I\,(m+\widetilde{m}))^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.2) являются функции

$$X_j = X_j(\widetilde{x},\omega) = e^{\lambda_j \widetilde{x}}, \qquad j = 1,2,3,4,$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — различные корни соответствующего характеристического уравнения.

Для постановки прямой спектральной задачи краевые условия, учитывающие заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку, различные виды упругого закрепления, рассмотрим в виде [11]:

$$
\begin{aligned}
U_1(X) = a_1\, X(0) + a_4\, X'''(0) = 0,\\
U_2(X) = a_2\, X'(0) + a_3\, X''(0) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
U_3(X) = b_1\, X(l) + b_4\, X'''(l) = 0,\\
U_4(X) = b_2\, X'(l) + b_3\, X''(l) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

В рассмотренных обозначениях прямая задача формулируется следующим образом: известны линейные формы $U_1(X)$, $U_2(X)$, $U_3(X)$, $U_4(X)$ краевых условий задачи (2.2), (2.4), (2.5), требуется найти неизвестные собственные частоты ω_k колебаний трубы с жидкостью.

Уравнение частот, необходимое для решения прямой задачи, получаем из условия равенства нулю характеристического определителя [11] $\Delta(\omega) = 0$. (Некоторые приближенные методы вычисления корней характеристического определителя изложены в [12]).

3. Обратная задача по диагностированию параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью

Поставим теперь обратную спектральную задачу – задачу диагностирования параметров закреплений трубы с жидкостью по собственным частотам ее колебаний.

Для математической постановки обратной задачи введем следующие обозначения. Матрицу, составленную из коэффициентов a_j форм $U_1(X_k)$ и $U_2(X_k)$, обозначим через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_j форм $U_3(X_k)$ и $U_4(X_k)$, через B:

$$
A = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{matrix} \right\|.
$$

Миноры второго порядка, образованные из i-го и j-го столбцов матриц A и B, будем для краткости обозначать через A_{ij} и B_{ij}.

Заметим, что отыскание краевых условий не означает восстановление всех коэффициентов a_j и b_j, поскольку, например, краевые условия $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$ и $X(0) - X'(0) = 0$, $X(0) + X'(0) = 0$ эквивалентны, а их соответствующие коэффициенты a_j различны.

Поэтому нашей задачей не является точное распознавание всех коэффициентов a_j и b_j. Цель — отыскание краевых условий, что равносильно нахождению линейных оболочек $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, построенных на векторах

$$
\mathbf{a}_1 = (a_1,\, 0,\, 0,\, a_4)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{a}_2 = (0,\, a_2,\, a_3,\, 0)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{b}_1 = (b_1,\, 0,\, 0,\, b_4)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{b}_2 = (0,\, b_2,\, b_3,\, 0)^{\mathrm{T}}.
$$

В терминах задачи (2.2) – (2.5) обратная задача восстановления краевых условий (2.4), (2.5) может быть сформулирована следующим образом:

Обратная задача. *Коэффициенты a_j и b_j форм $U_i(X_m)$ $(i, j, m = = 1, 2, 3, 4)$ задачи (2.2)–(2.5) неизвестны. Ранги матриц A и B, составленных из этих коэффициентов, равны двум. Известны собственные значения ω_k задачи (2.2)–(2.5). Требуется восстановить линейные оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.*

4. Единственность решения обратной задачи в случае протекания жидкости по трубе

Для дальнейшего изложения введем в рассмотрение новые обозначения.

Обозначим через C следующую матрицу порядка 4×8, составленную из нулевых матриц 0, а также матриц A и B

$$C = \left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right\| \tag{4.1}$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами $k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4$ — через

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = \left| \begin{array}{cccc} c_{1\,k_1} & c_{1\,k_2} & c_{1\,k_3} & c_{1\,k_4} \\ c_{2\,k_1} & c_{2\,k_2} & c_{2\,k_3} & c_{2\,k_4} \\ c_{3\,k_1} & c_{3\,k_2} & c_{3\,k_3} & c_{3\,k_4} \\ c_{4\,k_1} & c_{4\,k_2} & c_{4\,k_3} & c_{4\,k_4} \end{array} \right|.$$

Краевые условия (2.4), (2.5) в новых обозначениях могут быть переписаны в виде:

$$U_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \left[c_{ij} X^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j} X^{(j-1)}(l) \right] = 0, \tag{4.2}$$

$$i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

В новых обозначениях обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты c_{ij} задачи (2.2), (4.2) — неизвестны; ранг матрицы C, составленной из этих коэффициентов, равен четырем; миноры A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23} матриц A и B, из которых составлена матрица C, равны нулю; известны собственные значения ω_k задачи (2.2), (4.2). Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle$, построенную на векторах $\mathbf{c}_i = (c_{i1},\, c_{i2},\, c_{i3},\, c_{i4},\, c_{i5},\, c_{i6},\, c_{i7},\, c_{i8})^{\mathrm{T}}$ $\quad (i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$.

Отметим, что отыскание линейной оболочки $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle$ эквивалентно отысканию матрицы C с точностью до линейной эквивалентности.

Наряду с формами (4.2) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\widetilde{U}_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \left[\widetilde{c}_{ij} X^{(j-1)}(0) + \widetilde{c}_{i,4+j}\, X^{(j-1)}(l) \right] = 0, \tag{4.3}$$

$$i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $\widetilde{c}_{ij}$, через $\widetilde{C}$, а ее миноры — через $\widetilde{M}_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$, а соответствующие миноры второго порядка — через $\widetilde{A}_{k_1\,k_2}$ и $\widetilde{B}_{k_3-4\,k_4-4}$.

Введем в рассмотрение также векторы:

$$\mathbf{c}_i^{+} = (\widetilde{c}_{i1},\, \widetilde{c}_{i2},\, \widetilde{c}_{i3},\, \widetilde{c}_{i4},\, \widetilde{c}_{i5},\, \widetilde{c}_{i6},\, \widetilde{c}_{i7},\, \widetilde{c}_{i8})^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема (о единственности решения обратной задачи). *Пусть* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = 4$. *Если собственные значения* $\{\omega_k\}$ *задачи (2.2), (4.2) и* $\{\widetilde{\omega}_k\}$ *задачи (2.2), (4.3) совпадают с учетом их кратностей, то* $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^{+},\, \mathbf{c}_2^{+},\, \mathbf{c}_3^{+},\, \mathbf{c}_4^{+} \right\rangle$.

Доказательство. Заметим, что характеристический определитель можно представить в следующей форме:

$$\Delta(\omega_k) = \det(C\,D), \qquad \text{где}$$

$$D = \begin{Vmatrix} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(l) & X_2(l) & X_3(l) & X_4(l) \\ X_1'(l) & X_2'(l) & X_3'(l) & X_4'(l) \\ X_1''(l) & X_2''(l) & X_3''(l) & X_4''(l) \\ X_1'''(l) & X_2'''(l) & X_3'''(l) & X_4'''(l) \end{Vmatrix}.$$

Используя формулу Бине-Коши [13], получаем

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_8\le 8} M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}\; f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}, \tag{4.4}$$

где $f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ — миноры четвертого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами $k_1,\,k_2,\,k_3,\,k_4$:

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{vmatrix} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{vmatrix}.$$

Поскольку

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = 0 \qquad \text{при} \quad k_3,\,k_4 \le 4, \quad k_1,\,k_2 \ge 5,$$

то, применяя теорему Лапласа для вычисления определителя и учитывая, что $\Delta(\omega_k) = 0$, получаем:

$$\sum_{\substack{1\le k_1<k_2\le 4\\ 5\le k_3<k_4\le 8}} M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}\; f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}(\omega_k) = 0, \tag{4.5}$$

где

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = A_{k_1,\,k_2}\,B_{k_3-4,\,k_4-4}, \tag{4.6}$$

$$(A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = 0).$$

Из свойств общей теории для линейных дифференциальных операторов следует, что функция $\Delta(\omega)$ является целой функцией порядка $1/2$ [14].

Отсюда следует, что характеристические определители $\Delta(\omega)$ и $\widetilde{\Delta}(\omega)$ задач (2.2), (4.2) и (2.2), (4.3) соответственно связаны соотношением

$$\Delta(\omega) \equiv K\,\widetilde{\Delta}(\omega), \tag{4.7}$$

где K — некоторая отличная от нуля константа.

Из (4.4) и (4.7) следует, что

$$
\begin{gathered}
\big[M_{1256} - K\,\widetilde{M}_{1256}\big]\,f_{1256} + \big[M_{1257} - K\,\widetilde{M}_{1257}\big]\,f_{1257} + \\
+\big[M_{1268} - K\,\widetilde{M}_{1268}\big]\,f_{1268} + \big[M_{1278} - K\,\widetilde{M}_{1278}\big]\,f_{1278} + \\
+\big[M_{1356} - K\,\widetilde{M}_{1356}\big]\,f_{1356} + \big[M_{1357} - K\,\widetilde{M}_{1357}\big]\,f_{1357} + \\
+\big[M_{1368} - K\,\widetilde{M}_{1368}\big]\,f_{1368} + \big[M_{1378} - K\,\widetilde{M}_{1378}\big]\,f_{1378} + \\
+\big[M_{2456} - K\,\widetilde{M}_{2456}\big]\,f_{2456} + \big[M_{2457} - K\,\widetilde{M}_{2457}\big]\,f_{2457} + \\
+\big[M_{2468} - K\,\widetilde{M}_{2468}\big]\,f_{2468} + \big[M_{2478} - K\,\widetilde{M}_{2478}\big]\,f_{2478} + \\
+\big[M_{3456} - K\,\widetilde{M}_{3456}\big]\,f_{3456} + \big[M_{3457} - K\,\widetilde{M}_{3457}\big]\,f_{3457} + \\
+\big[M_{3468} - K\,\widetilde{M}_{3468}\big]\,f_{3468} + \\
+\big[M_{3478} - K\,\widetilde{M}_{3457}\big]\,f_{3478} \equiv 0.
\end{gathered} \tag{4.8}
$$

Пусть жидкость течет по трубе. Это означает, что скорость течения жидкости $V_0 \neq 0$, а в уравнении (2.2) коэффициент $b \neq 0$.

Нетрудно показать в пакете Maple, что в последнем тождестве все правые сомножители, за исключением одной функции $f_{1356} = -f_{1257}$, образуют линейно независимую систему. Тогда из линейной независимости функций

$$
\begin{matrix}
f_{1256}(\omega), & f_{1357}(\omega), & f_{2468}(\omega), \\
f_{1256}(\omega), & f_{1378}(\omega), & f_{3457}(\omega), \\
f_{2478}(\omega), & f_{3468}(\omega), & f_{2368}(\omega), \\
f_{2457}(\omega), & f_{1278}(\omega), & f_{3456}(\omega), \\
f_{1268}(\omega), & f_{2456}(\omega), & f_{1257}(\omega)
\end{matrix}
$$

вытекают следующие равенства:

$$M_{1256} = K\,\widetilde{M}_{1256}, \tag{4.9}$$

$$M_{1357} = K\,\widetilde{M}_{1357}, \tag{4.10}$$

$$M_{2468} = K\,\widetilde{M}_{2468}, \tag{4.11}$$

$$M_{3478} = K\,\widetilde{M}_{3478}, \tag{4.12}$$

$$M_{1378} = K\,\widetilde{M}_{1378}, \tag{4.13}$$

$$M_{3457} = K\,\widetilde{M}_{3457}, \tag{4.14}$$

$$M_{2478} = K\,\widetilde{M}_{2478}, \tag{4.15}$$

$$M_{1368} = K\,\widetilde{M}_{1368}, \tag{4.16}$$

$$M_{2457} = K\,\widetilde{M}_{2457}, \tag{4.17}$$

$$M_{1278} = K\,\widetilde{M}_{1278}, \tag{4.18}$$

$$M_{3456} = K\,\widetilde{M}_{3456}, \tag{4.19}$$

$$M_{2456} = K\,\widetilde{M}_{2456}, \tag{4.20}$$

$$M_{1268} = K\,\widetilde{M}_{1268}, \tag{4.21}$$

$$M_{3468} = K\,\widetilde{M}_{3468}, \tag{4.22}$$

$$M_{1257} - M_{1356} = K\,(\widetilde{M}_{1356} - \widetilde{M}_{1257}). \tag{4.23}$$

Далее доказательство разбивается на 15 случаев:

$$
\begin{gathered}
M_{1256} \neq 0; \qquad M_{1357} \neq 0; \qquad M_{2468} \neq 0;\\
M_{1256} \neq 0; \qquad M_{1378} \neq 0; \qquad M_{3457} \neq 0;\\
M_{2478} \neq 0; \qquad M_{3468} \neq 0; \qquad M_{2368} \neq 0;\\
M_{2457} \neq 0; \qquad M_{1278} \neq 0; \qquad M_{3456} \neq 0;\\
M_{1268} \neq 0; \qquad M_{2456} \neq 0;\\
M_{1256} = M_{1357} = M_{2468} = M_{3478} =\\
= M_{1378} = M_{3457} = M_{2478} = M_{3468} =\\
= M_{1368} = M_{2457} = M_{1278} =\\
= M_{3456} = M_{1268} = M_{2456} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.24}
$$

Пусть реализуется один из этих случаев, например, первый. Итак, $M_{1256} = K\widetilde{M}_{1256} \neq 0$. Тогда из равенств

$$
\begin{gathered}
M_{1256} = A_{12}\,B_{12} = a_1\,a_2\,b_1\,b_2,\\
\widetilde{M}_{1256} = \widetilde{A}_{12}\,\widetilde{B}_{12} = \widetilde{a}_1\,\widetilde{a}_2\,\widetilde{b}_1\,\widetilde{b}_2
\end{gathered}
$$

получим, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2, $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$ матриц C и $\widetilde{C}$ отличны от нуля. Разделим 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы C соответственно на a_1, a_2, b_1, b_2, а 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы $\widetilde{C}$ соответственно на $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$.

После этих преобразований матрицы C и $\widetilde{C}$ с точностью до линейной эквивалентности примут вид

$$
C = \left\| \begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0
\end{array} \right\|,
$$

$$
\widetilde{C} = \left\| \begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & \widetilde{a}_4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \widetilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \widetilde{b}_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \widetilde{b}_3 & 0
\end{array} \right\|.
$$

Из этого представления для матриц C и $\widetilde{C}$ и равенства (4.9) следует, что $K = 1$. Из (4.20), (4.21) вытекает, что

$$
a_4 = \widetilde{a}_4, \qquad b_4 = \widetilde{b}_4. \tag{4.25}
$$

Аналогично из равенств (4.18), (4.19) следует, что

$$
a_3\,a_4 = \widetilde{a}_3\,\widetilde{a}_4, \qquad b_3\,b_4 = \widetilde{b}_3\,\widetilde{b}_4.
$$

Или из равенств (4.16), (4.17) следует, что

$$
a_3\,b_4 = \widetilde{a}_3\,\widetilde{b}_4, \qquad b_3\,a_4 = \widetilde{b}_3\,\widetilde{a}_4.
$$

Учитывая (4.25) и последние четыре равенства, получим

$$
\begin{gathered}
a_3 = \widetilde{a}_3, \qquad a_4 = \widetilde{a}_4\\
b_3 = \widetilde{b}_3, \qquad b_4 = \widetilde{b}_4.
\end{gathered}
\tag{4.26}
$$

Таким образом, имеем $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_2^+, \mathbf{c}_3^+, \mathbf{c}_4^+ \right\rangle$.

Пусть теперь из равенств (4.24) реализуется случай $M_{2478} = \; = K\,\widetilde{M}_{2478} \neq 0$.

Равенства $M_{2478} = a_2\, a_4\, b_3\, b_4$, $\widetilde{M}_{2478} = \widetilde{a}_2\, \widetilde{a}_4\, \widetilde{b}_3\, \widetilde{b}_4$ означают, что элементы a_2, a_4, b_3, b_4, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{a}_4$, $\widetilde{b}_3$, $\widetilde{b}_4$ матриц C и $\widetilde{C}$ отличны от нуля.

Разделим 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы C соответственно на a_4, a_2, b_4, b_3, а 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы $\widetilde{C}$ соответственно на $\widetilde{a}_4$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_4$, $\widetilde{b}_3$.

Тогда с точностью до линейной эквивалентности получим матрицы C и $\widetilde{C}$ в виде:

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \widetilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{b}_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{b}_3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С учетом полученного представления для матриц C и $\widetilde{C}$ и равенства (4.15) имеем, что $K = 1$.

Из равенств (4.18), (4.20) вытекает соответственно, что

$$a_1 = \widetilde{a}_1, \qquad b_1 = \widetilde{b}_1. \tag{4.27}$$

А из равенств (4.14), (4.21) следует, что

$$a_3\, b_1 = \widetilde{a}_3\, \widetilde{b}_1, \qquad a_1\, b_2 = \widetilde{a}_1\, \widetilde{b}_2.$$

Последние равенства с учетом (4.27) дают следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_1 &= \widetilde{a}_1, & a_3 &= \widetilde{a}_3, \\ b_1 &= \widetilde{b}_1, & b_2 &= \widetilde{b}_2. \end{aligned}$$

Снова получаем представление для линейных оболочек в виде:

$$\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_2^+, \mathbf{c}_3^+, \mathbf{c}_4^+ \right\rangle.$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что рассмотрение других случаев из равенств (4.24) приводит к таким же результатам.

Таким образом, в случае протекания жидкости по трубопроводу решение обратной задачи единственно. **Теорема доказана**.

5. Метод отыскания параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью

Мы показали, что задача восстановления неизвестных краевых условий по собственным частотам изгибных колебаний трубы в случае протекания по ней жидкости имеет одно решение. Следующий вопрос — как построить это решение?

Можно, как в работе [6], воспользоваться двумя методами построения решения обратной задачи, основанными на представлении характеристического определителя в виде бесконечного произведения: $\Delta(\omega) \equiv K \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k}\right)$. Однако при практической реализации эти методы оказываются неэффективными ввиду значительного накопления ошибок при вычислении соответствующего бесконечного произведения. Поэтому в настоящей работе применен другой метод, основанный на решении системы алгебраических уравнений.

Построим *точное решение* обратной задачи. Итак, пусть жидкость течет по трубе, т.е. в уравнении (2.2) коэффициент $b \neq 0$. В этом случае собственные частоты изгибных колебаний трубы $\{\omega_k\}$ удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{gathered}\Delta(\omega_k) = (M_{1257} - M_{1356})\, f_{1257}(\omega_k) + M_{1268}\, f_{1268}(\omega_k) + \\ +M_{2456}\, f_{2456}(\omega_k) + M_{1368}\, f_{1368}(\omega_k) + M_{2457}\, f_{2457}(\omega_k) + \\ +M_{1278}\, f_{1278}(\omega_k) + M_{3456}\, f_{3456}(\omega_k) + M_{1378}\, f_{1378}(\omega_k) + \\ +M_{3457}\, f_{3457}(\omega_k) + M_{2478}\, f_{2478}(\omega_k) + M_{3468}\, f_{3468}(\omega_k) + \\ +M_{1357}\, f_{1357}(\omega_k) + M_{2468}\, f_{2468}(\omega_k) + M_{1256}\, f_{1256}(\omega_k) + \\ +M_{3478}\, f_{3478}(\omega_k) = 0.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Пусть ω_k — 14 собственных частот задачи (2.2), (4.2). Тогда равенства (5.1) образуют систему 14-ти линейных алгебраических уравнений относительно 15-ти неизвестных левых множителей последнего равенства.

Если $\mathrm{rank} \| \mathrm{f}_{\mathrm{k_1\, k_2\, k_3\, k_4}}(\omega_\mathrm{k}) \|_{15\times 14} = 14$, то, ввиду специального вида соответствующей матрицы C, задача нахождения этой матрицы имеет одно решение.

Покажем, как это делается. Так как $\mathrm{rank}\, C = 4$, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1357} \neq 0$, тогда матрицу C с помощью линейных преобразований можно привести к виду

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

При этом сами миноры M_{ijkl} не поменяются, только, возможно, множитель.

Для полученной матрицы имеем

$$\begin{aligned} M_{1257} &= a_2, & M_{3457} &= -a_4, \\ M_{1356} &= b_2, & M_{1378} &= -b_4. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тогда матрица C может быть записана в виде

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{3457}}{M_{1357}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_{1257}}{M_{1357}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{1378}}{M_{1357}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_{1356}}{M_{1357}} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{5.3}$$

Миноры, в нашем случае

$$M_{1357}, \qquad M_{1257}, \qquad M_{3457}, \qquad M_{1356}, \qquad M_{1378},$$

участвующие в записи (5.3) матрицы C, назовем основными. А основной минор, с которого начинается построение, в нашем случае ненулевой минор M_{1357}, назовем центральным. Так как $\mathrm{rank}\, C = 4$, то нетрудно показать, как в рассмотренном случае, что элементы матрицы C всегда могут быть представлены в виде нулей, единиц и миноров самой матрицы. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2 *Если матрица системы уравнений (5.1) имеет ранг 14, то решение обратной задачи восстановления краевых условий (4.2) единственно.*

Собственные частоты задачи (2.2), (4.2) не всегда задаются точно. Поэтому возникает задача приближенного определения краевых условий. Построим теперь *приближенное решение* обратной задачи.

Пусть собственные частоты ω_k известны лишь приближенно:

$$\omega_k \approx \mu_k \ (k = 1, 2, ..., 14).$$

Ранг системы уравнений (5.1) равен 14. Подставив μ_k в систему уравнений (5.1), найдем неизвестные миноры M_{ijkl} с точностью до константы. Однако значения M_{ijkl}, $(i = = 1, 2, 3, 4, 5; \ \ j = 2, 3, 4, 5, 6; \ \ k = 3, 4, 5, 6, 7; \ l = 4, 5, 6, 7, 8)$, найденные по искаженным μ_k, могут не являться минорами какой-либо матрицы. А, следовательно, по ним невозможно построить матрицу C и соответствующие краевые условия.

Выход из такого затруднения состоит в следующем: из алгебраической геометрии известно, что числа $M_{1...m}$ являются минорами некоторой матрицы тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера или, по-другому, квадратичные ρ — соотношения ([15]

$$\sum_{k=0} (-1)^k M_{i_1 \ldots i_{m-1} j_k} M_{j_0 \ldots j_{k-1} j_{k+1} \ldots j_m} = 0. \tag{5.4}$$

В нашем случае для матрицы C, при $M_{1357} \neq 0$, получаем следующие соотношения (с учетом нулевых миноров):

$$\begin{aligned}
M_{1256}M_{1357} &= M_{1257}M_{1356},\\
M_{1278}M_{1357} &= M_{1257}M_{1378},\\
M_{1368}M_{1357} &= M_{1356}M_{1378},\\
M_{2457}M_{1357} &= M_{1257}M_{3457},\\
M_{3456}M_{1357} &= M_{1356}M_{3457},\\
M_{1378}M_{1357} &= M_{3457}M_{1378},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered}
M_{1268}M_{1357} = M_{1257}M_{1368} = M_{1256}M_{1378},\\
M_{3468}M_{1357} = M_{3457}M_{1368} = M_{3456}M_{1378},\\
M_{2456}M_{1357} = M_{1257}M_{3456} = M_{2457}M_{1356},\\
M_{2478}M_{1357} = M_{1257}M_{3478} = M_{2457}M_{1378},\\
M_{2468}M_{1357} = M_{2457}M_{1368} = M_{1256}M_{3478} =\\
= M_{1278}M_{3456} = M_{1378}M_{2456} = M_{1257}M_{3468} =\\
= M_{3457}M_{1268} = M_{1356}M_{2478}.
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Если числа M_{ijkl} удовлетворяют соотношениям (5.5), (5.6), то они являются минорами некоторой матрицы, т.е. по ним можно восстановить краевые условия задачи (2.2), (4.2).

Если же числа M_{ijkl} не удовлетворяют соотношениям (5.5), (5.6), то можно выразить миноры

$$\begin{matrix}
M_{1256}, & M_{1278}, & M_{1268}, & M_{1368},\\
M_{2456}, & M_{2457}, & M_{2468}, & M_{3456},\\
& M_{3478}, & M_{3468}, & M_{2478}
\end{matrix} \tag{5.7}$$

через основные миноры $M_{1357}, \ M_{1257}, \ M_{3457}, \ M_{1356}, \ M_{1378}$, и условия Плюккера будут выполняться автоматически.

Таким образом, можно в любом случае скорректировать значения M_{ijkl}, найденные из системы уравнений (5.1), так, чтобы они являлись минорами некоторой матрицы, и, следовательно, определить краевые условия.

Применение метода определения краевых условий по 14 собственным частотам колебаний трубы с жидкостью покажем на примерах.

Пример

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + X'' + 2i\,\omega\, X' - \omega^2\, X = 0, \tag{5.8}$$

изгибных колебаний трубы, определяемое следующими параметрами системы (труба – жидкость):

$$\begin{gathered} r_1 = 0,0095\text{м}, \quad r = 0,01\text{м}, \quad l = 5\text{м}, \\ \rho = 2,7\cdot 10^3\text{кг}/\text{м}^3, \quad \rho_0 = 10^3\text{кг}/\text{м}^3, \quad V_0 = 1\text{м}/\text{с}, \\ E = 6,9\cdot 10^9\text{Н}/\text{м}^2, \quad p_0 = 0,5\cdot 10^3\text{Н}/\text{м}^2. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Пусть известны 14 собственных частот ω_k задачи (5.8), (2.4), (2.5):

$$\begin{gathered} \omega_1 = 21,81, \qquad \omega_2 = 61,32, \qquad \omega_3 = 120,58, \\ \omega_4 = 199,56, \qquad \omega_5 = 298,27, \qquad \omega_6 = 416,71, \\ \omega_7 = 554,89, \qquad \omega_8 = 712,86, \qquad \omega_9 = 890,46, \\ \omega_{10} = 1087,86, \qquad \omega_{11} = 1304,99, \qquad \omega_{12} = 1541,86, \\ \omega_{13} = 1798,47, \qquad \omega_{14} = 2074,82. \end{gathered}$$

Найдем краевые условия. С помощью пакета Maple получаем, что ранг матрицы системы (5.1) равен 14, а ее решение имеет вид:

$$M_{1357} = K, \quad M_{3457} = K, \quad M_{1378} = -2\,K,$$

$$M_{3478} = -2\,K, \quad M_{1257} - M_{1356} = 0,$$

остальные миноры M_{ijkl} равны нулю. Здесь $K = \text{const} \neq 0$.

Из равенства $M_{1357} \neq 0$ имеем $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$.

Разделим первую строку матрицы C на a_1, вторую строку на a_3, третью — на b_1, четвертую — на b_3. Тогда получим, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда следует, что $M_{1357} = 1$, т.е. $K = 1$. Тогда из равенств

$$M_{3457} = 1, \quad M_{1378} = -2, \quad M_{3478} = -2$$

получаем, что $a_4 = -1$, $b_4 = 2$, а из равенств

$$M_{1257} - M_{1356} = 0, \quad M_{1256} = 0$$

имеем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$.

Следовательно, матрица C имеет вид:

$$C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Откуда получаем единственное представление для краевых условий:

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0,$$

$$X(1)+2\,X'''(1)=0,\quad X''(1)=0.$$

Таким образом, при рассмотренных 14 собственных частотах колебаний трубы, по которой протекает жидкость, установлено, что левый конец трубы упруго закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной двум.

Заметим, что краевые условия определены верно. Именно эти граничные условия (вид упругого закрепления) и использовались при выборе частот колебаний ω_k.

Рассмотренный пример подтверждает единственность определения упругих закреплений трубы с жидкостью по спектру ее изгибных колебаний.

6. Заключение

ПВ работе показана однозначность решения задачи определения параметров упругих закреплений концов трубы с протекающей жидкостью по известному спектру собственных частот. Найден метод решения этой задачи. Приведен соответствующий пример.

Это можно пояснить не только на основе формул: если жидкость течет по трубопроводу, то концы трубы неравноправны (через один конец жидкость втекает, а через другой вытекает). Поэтому в случаях упругих закрепление концов трубы параметры всех четырех краевых условий определяется однозначно.

От того течет ли жидкость по трубе зависит также количество собственных частот необходимых для определения закреплений концов трубы. Если жидкость не течет по трубе, как было показано нами в работе [8], то достаточно знание 9 собственных частот колебаний для восстановления двойственным образом краевых условий. В данной работе мы показали, что при протекании жидкости по трубе, необходимо знание 14 собственных частот для определения всех четырех краевых условий.

Результаты проведенных исследований могут быть применены для выбора закрепления, при котором колебания трубы с жидкостью имели бы нужный (безопасный) спектр частот. Кроме того они применимы и для акустической диагностики закрепления трубы (правда, в этом случае требуется очень высокая точность приборов, измеряющих собственные частоты).

Список литературы

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., *Введение в акустическую динамику машин*, Наука, М., 1979.

2. Павлов Б. В., *Акустическая диагностика механизмов*, Машиностроение, М., 1971.

3. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

4. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.

5. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.

6. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М., “Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний”, *Прикладная математика и механика*, **65**:2 (2001), 290–298.

7. Сафина Г. Ф., “Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний”, *Контроль. Диагностика*, 2005, № 12, 55–59.

8. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49**:1 (2008), 139–147.

9. Сафина Г. Ф., “Исследования по крутильным колебаниям вала с дисками”, *Дефектоскопия*, 2011, № 3, 51-65.

10. G. F. Safina, “Investigations of the Torsional Vibrations of a Shaft with Disks”, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, **47**:3 (2011), 189-201.

11. *Вибрации в технике: справочник в 6-ти томах*: *Колебания линейных систем*, **1**, ред. Болотин В. В., Машиностроение, М., 1978.

12. Коллатц Л., *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*, Наука, М., 1968.

13. Ланкастер П., *Теория матриц: Пер. с англ.*, Наука, М., 1982.

14. Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

15. Постников М. М., *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1979.

To the proof of uniqueness of the decision of return tasks of the flexural to pipe fluctuations with proceeding liquid

© **G.F. Safina**[2]

Abstract. In work are considered a direct task on to determination of frequencies of flexural fluctuations of a narrow pipe from the incompressible liquid and return problem of diagnosing of parameters of fixing pipes with proceeding liquid on own frequencies of its flexural fluctuations. Theorems of uniqueness of determination of parameters elastic are proved pipe fixing in case of liquid course on it. It is established, that in case of liquid course on the pipeline it is necessary use from a range of frequencies of fluctuations of 14 values for determination of parameters of elastic fixing of a pipe. Methods are developed restoration of four regional conditions of a return task. Are provided examples

Key Words: pipe with proceeding liquid, frequencies of fluctuations, regional conditions, parameters of elastic fixing, task diagnosings, uniqueness of the decision.

[2] Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university, Neftekamsk; Safinagf@mail.ru

УДК 519.71

Об устойчивости решений систем с переменной структурой в областях неоднозначности функции управления

© **В.И. Сафонкин**[1]

Аннотация. В данной статье изучается поведение системы с переменной структурой, при котором вектор состояния из областей однозначности в некоторый момент попадает в δ - окрестность многообразия разрыва правой части системы и определенное время остается в этой окрестности. Оказывается таким поведением при $\delta \to 0$ можно моделировать в реальных системах режимы, близкие к идеальному режиму скольжения, которого в действительности, как известно, не существует.

Ключевые слова: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель.

1. Введение

Описание поведения систем с переменной структурой приводит к необходимости построения и дальнейшему исследованию многозначных дифференциальных соотношений. Известно, такая задача возникает вследствие учета в реальных системах либо малых параметров, либо переключающих элементов релейного типа. В других случаях такие системы используются для обеспечения в физических устройствах оптимальных режимов в процессе их функционирования. В первом и втором случаях приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений, в которых функции правых частей претерпевают разрыв на одном или нескольких многообразий. Вопрос устойчивости движений в таких системах является основным. Как известно, обладая такими свойствами, в системах с переменной структурой можно синтезировать режимы, гарантирующие решение многих практических задач. На это указывается во многих источниках, в том числе [3], [2] и других. Основным средством при исследовании систем с переменной структурой является ее доопределение на множестве разрыва управляющей функции. В работе [4] указывается на важность выбора такого метода доопределения, которое обеспечивало бы устойчивое движении в некоторой окрестности упомянутых выше многообразий переключения данной системы в течение некоторого времени.

Существующие методы доопределения систем с переменной структурой на многообразиях разрыва, так или иначе, приводят к необходимости рассмотрения дифференциального включения вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x,u), \tag{1.1}$$

где $t \in [t_0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U(t,x)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ – компакт.

Предположим, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям:

а) $F(t,x,u)$ - выпуклый компакт при всех $(t,x,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$;

б) многозначное отображение $(t,x,u) \mapsto F(t,x,u)$ непрерывно в точке p по совокупности аргументов в хаусдорфовой метрике, если $\alpha(F(p'),F(p)) \to 0$ при $p' \to p$, где $\alpha(A,B) = \max(\sup\rho(a,B), \sup\rho(b,A)), a \in A, b \in B$, A и B - множества;

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

в) множество $F(t,x,u)$ непустое, ограниченное и замкнутое для всех $(t,x,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Как известно [3] дифференциальные включения вида (1.1) получаются при доопределении систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u(t,x)), \tag{1.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x,u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция $u(t,x), u \in \Re^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности S в пространстве переменных $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n$, задаваемой уравнением $s(t,x_1,...,x_n) = 0$ и представляет собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s(x) > 0$ и $s(x) < 0$. Таким образом, функция $f(t,x,u(t,x))$ фактически является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Области s(t,x) > 0, s(t,x) < 0 будем называть областями однозначности. В них, соответственно, $u(t,x) = u^{(1)}(t,x)$ при $s(x) > 0$ и $u(t,x) = u^{(2)}(t,x)$ при $s(x) < 0$. Функции $u^{(1)}(t,x)$ и $u^{(2)}(t,x) \in C([t_0,+\infty)) \times \mathbb{R}^n$.

Наряду с соотношениями (1.1) и (1.2) будем рассматривать последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u^k(t,x)), k = 1,2,..., u^k(t,x) \in U(t,x), \tag{1.3}$$

где функции $u^k(t,x)$ равномерно ограничены в областях их определения.

Обозначим через $x^k(t:t_0,x_0)$ последовательность решений системы (1.3), заведомо существующих и определенных на интервале $[t_0,T]$. Тогда частичный предел этой последовательности $x(t:t_0,x_0) = \lim x^k(t:t_0,x_0)$, $k = 1,2,...$ будем понимать в том смысле, что из последовательности $x^k(t:t_0,x_0)$ будет выбрана равномерно сходящаяся подпоследовательность. Как известно, такая подпоследовательность существует согласно теоремы [4].

Заметим также, что для каждой функции $u_i(t,x)$ можно выделить бесконечно много последовательностей $u_i^k(t,x)$, на которых строится множество последовательностей решений $\{x^\nu(t)\}, \nu = 1,2,...$, а соответственно и множество их пределов $\{x(t)\}$. Множество пределов равномерно сходящихся последовательностей обозначим $X(t)$.

Определение 1.1. *Решение системы* (1.2), *а, следовательно, и дифференциального включения* (1.1) *называется любая абсолютно непрерывная функция* $x(t) \in X(t)$. *Само множество* $X(t)$ *называется множеством решений включения* (1.1).

Прежде, чем сформулировать задачу, сделаем несколько замечаний. Во многих работах, например [4], [1], и в др. высказываются утверждения в том, что в системах с переменной структурой наиболее характерным режимом является режим скольжения по поверхности разрыва функции управления $u(t,x)$. В тоже время известно, что в природе такого идеального движения не существует. Это обусловлено тем, что в срабатывании реальных элементов присутствует запаздывание. В силу чего, вектор состояния, попав на поверхность разрыва, при определенных условиях либо покидает ее, либо может совершать колебательные движения в ее окрестности. Чаще всего последний случай представляет наибольший интерес для практики. Обеспечение такого режима требует попадание траекторий из областей однозначности s(t,x) > 0, s(t,x) < 0 в δ- окрестность многообразия $S(t)$ переключения функции $u(t,x)$ и сохранения движения для всех $t > t_p$, где t_p- момент падения изображающей точки на поверхность S^δ. В работе [6] такие условия показаны относительно дифференциального включения (1.1). В частности, при выполнении этих условий любое решение включения достигает границы окрестности многообразия $S(t)$ из областей однозначности.

В дальнейшем также будем предполагать, что решения дифференциального включения (1.1) непрерывны по начальным данным, т.е. для любых последовательностей $x_0^k \to x_0$, $t_0^k \to t_0$ и любых решений $x_k(t) = x(t : x_0^k, t_0^k)$, $x_k(t_0) = x_0^k$, $k = 1, 2, ...$ таких, что

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f(x_k(t), u_k(t)), t \in [t_0, T],$$

найдется такая последовательность k_j, $j = 1, 2, \ldots$, что $u_{k_j} \to u(t) \in U$, $x_{k_j}(t) \to x(t : t_0, x_0)$, где $x(t : t_0, x_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2).
В дальнейшем также будем предполагать, что многозначное отображение $U(t, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ полунепрерывно сверху относительно включения. Последнее означает, что при $x_k \to x$, $u_k \to u$, $t_k \to t$ и $u_k \in U(t_k, x_k)$, $k \to \infty$ справедливо включение $u \in U(t, x)$.

При выше сделанных предположениях и замечаниях сформулируем задачу.

2. Постановка задачи

Во введении было замечено, что в природе идеального режима «скольжения» фактически не существует в силу запаздывания в срабатывании управляющего органа системы при переходе движений из одной области однозначности в другую. В этом случае под режимом «скольжения» целесообразно понимать устойчивые движения системы, описываемые уравнением (1.2), в δ - окрестности многообразия относительно его точек. Обеспечение такого режима предполагает выполнение условий попадание траекторий из областей однозначности на оболочку множества S^δ и дальнейший их переход во внутрь δ - окрестности, где сохраняется их устойчивость относительно многообразия $S(t)$ при всех $t > t_p$, $t_p \in [t_0, T]$.

Такой режим, как будет показано ниже, позволяет оценить протекание процесса по времени. Фактически, обеспечение отмеченных выше условий и составляет предмет исследования решений дифференциального включения (1.1). Т.е. необходимо определить условия на правую часть включения, гарантирующие попадание траекторий из областей однозначности в окрестность многообразия разрыва управляющей функции $u(t, x)$ и их устойчивое движение в этой области для всех $t > t_p$.

Вторая сторона изучаемого вопроса состоит в оценке фактической скорости протекания «скользящего» процесса в зависимости от значения величины δ.

3. Решение задачи

Прежде приведем несколько определений.

Определение 3.1. *Множество S^δ будем называть инвариантным по отношению к системе* (1.2)*, а, следовательно, и дифференциального включения* (1.1)*, если оно состоит из траекторий этой системы, т.е.* $(t, x) \in S^\delta$.

При значениях $t > t_0$ множество S^δ называется положительным инвариантом. Как известно [1] замыкание $\overline{S^\delta}$ такого множества также является инвариантным множеством.

Определение 3.2. *Точка фазовогo g пространства называется ω - предельной точкой для точки p, если существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая, что $g = \lim f(t_n, p)$.*

Введем в рассмотрение функцию $V(t,x,s(t,x))$, характеризующую обобщенное расстояние вектора состояния $x(t:t_0,x_0) \in S^\delta \subset R^n$ до многообразия $S(t)$. В отношении введенной функции будем предполагать:
а) $V(t,x,0) = 0$ лишь для $(t,x) \in S$, в других точках $(t,x) \in S^\delta$ функция $V(t,x,s) > 0$;
б) на множестве $\|s\| > r$, $r \leq \delta$ функция $V(t,x,s)$ имеет точную верхнюю и точную грань: $\inf V(t,x,s) = \alpha_r$, $\sup V(t,x,s) = \beta_r$, где α_r и β_r - положительные числа;
в) функция $\frac{dV}{dt}$ существует и имеет отрицательное значение в силу (1.1) или (1.2) в точках шара $\|s(r) \leq r\|$ кроме точек, принадлежащих многообразию $S(t)$. На множестве $\|s\| = r$ функция $\frac{dV}{dt} < 0$ и имеет точную верхнюю грань, т.е. $\sup\limits_{\|s\|=r} \dot{V} = m_r$, $m_r > 0$.

Теорема 3.1. *Если функция $V(t,x,s)$ обладает выше указанными свойствами а) - б), а в δ - окрестности многообразия $S(t)$ система не содержит целых полутраекторий включения (1.1) и на оболочке $\overline{S^\delta}$ имеет место правая единственность, то окрестность S^δ содержит траектории системы, устойчивые относительно многообразия $S(t)$.*

Доказательство. Во-первых, при выполнении условия правой единственности [6] любое решение, попавшее на границу δ - окрестности, продолжимо в нее единственным образом. Выберем в δ - окрестности множества $S(t)$ точки x_p и x_q. Будем предполагать, что точка x_q является ω- предельной для точки x_p, т.е. имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n,x_p) = x_q$. Определим на поверхности многообразия $s(x) = 0$ точку x^*, в которой $V(t,x^*,0) = 0$ и рассмотрим замкнутый шар $B(x^*,r) \subset R^n$ с центром в точке x^* радиуса r. Поместим точки x_p и x_q в данный шар, в котором, как известно, функция $V(t,x,s)$ существует и наделенна свойствами а), б) и в). Тогда согласно леммы 5.1 [7] все траектории не будут выходить из данного шара. Кроме того, все $\omega-$ предельные точки для точек шара находятся либо внутри его, либо на его поверхности.

Следуя схеме доказательства теоремы Барбашина-Красовского [7] покажем устойчивость состояния $x^* \in S(t)$. Исключим из рассмотрения ту часть поверхности S, которая принадлежит шару $B(x^*,r) \subset R^n$. Как известно, на этой части поверхности функция $u(t,x)$ не определена. Для других точек шара точка x^* является либо $\omega-$ предельной, либо имеет место $\rho(\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n,x_p),x^*) \leq r$. Покажем справедливость сделанного заключения. Пусть на внешней оболочки шара $B(x^*,r) \subset R^n$ наименьшее значение функции V равно l. Рассмотрим шар $B(x^*,\lambda) \subset R^n$ и поместим его в шар $B(x^*,r) \subset R^n$ $(\lambda < r)$, в точках которого $V(t:t_0,x_0,s(t_0)) < l$, $(t_0,x_0) \in B(x^*,\lambda)$. Если допустить, что траектория $x(t:t_0,x_0)$ в некоторый момент времени пересечет оболочку шара радиуса r в некоторой точке q, то в силу свойства $\dot{V} \leq 0$ функция не должна возрастать вдоль любого решения, проходящего в шаре. Тогда должно выполняться соотношение $V(q) \leq V(p) < l$. С другой стороны, по условию $V(t,x,s)$ на внешней оболочке шара $B(x^*,r) \subset R^n$ принимает наименьшее значение, равное l. Тогда должно выполняться неравенство $V(q) \geq l$. Полученное противоречие и доказывает справедливость выше сделанного утверждения.

Замечание 3.1. *Обращает внимание функция $V(t,x,s)$, где независимой переменной является функция $s(t,x)$. Ее введение позволяет рассматривать устойчивость движения не для всего движения, а лишь на подпространство, координатами которого являются многообразия разрыва вектора функции $u(t,x)$. Если функция $u(t,x)$ - скалярная функция, то таким подпространством является одно многообразие $S(t)$. Использование функции $V(t,x,s)$ демонстрируется ниже в примерах.*

Как выше было замечено вопрос об устойчивости движения в δ - окрестности многообразия в некотором смысле остается открытом в случае, когда движение проходит строго по многообразию $S(t)$. Такое предположение имеет смысл для идеальных характеристик элементов, осуществляющих управляемый режим в реальной системе. На практике же вектор состояния совершает колебания в цилиндре, образованного замыканием δ – окрестности.

Если, что движения могут проходить строго по многообразию $S(t)$, то становится очевидным, что на функцию управления $u(t,x)$ следует наложить дополнительные условия. Чаще всего (например, в работах [3],[5] и др.) значения $u(t,x)$ «зажимают» между ее предельными значениями, которые может принимать управление при неограниченном приближении вектора состояния из областей однозначности к многообразию $S(t)$.

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим систему, находящуюся под двухмерным управлением*

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1), s_1 = x_1 + x_2; \frac{dx_2}{dt} = 2b_2 Sign(s_2), s_2 = 2x_1 - 0,5x_2, \tag{3.1}$$

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 - Const, b_2 - Const. s^T(x) = (x_1, x_2).$$

Переходя в пространство $((s_1, s_2)$, *будем иметь*

$$\frac{ds_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2), \frac{ds_2}{dt} = -2b_1 Sign(s_1) - b_2 Sign(s_2). \tag{3.2}$$

Выберем функцию V *в виде* $V = |s_1| + |s_2|$. *Тогда в силу системы* $\dot V = Sign(s_1)(-b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2) + Sign(s_2)(-2b_1 Sign(s_1) + b_2 Sign(s_2) = -(b_1 + b_2) < 0$. *Таким образом, при заданных значениях* b_1 *и* b_2 *функция* $\dot V$ *в областях однозначности функций* $s_1(x)$ *и* $s_2(x)$ *принимает отрицательное значение.*

Рассмотрим поведение траекторий системы в областях однозначности и вблизи многообразий $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$. *Прежде заметим, что в первой четверти плоскости* (s_1, s_2) $s_1 < 0, s_2 > 0$, *во второй четверти* $s_1 > 0, s_2 > 0$, *в третьей* $s_1 > 0, s_2 < 0$, *в четвертой* $s_1 > 0, s_2 > 0$. *Такие соотношения устанавливаются с учетом значений* $\dot s_1$ *и* $\dot s_2$ *в областях однозначности. Тогда при выполнении соотношения* $b_1 > 2b_2$ *траектории в области* $s_2 > 0$ *будут переходить через многообразие* $S_1(t)$ *из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Действительно, при указанном соотношение имеет место* $\lim\limits_{s \to +0} \dot s_1 = -b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$ *в области* $s_1 > 0$, *а в области* $s_1 < 0$ *имеет место неравенство* $\lim\limits_{s_1 \to -0} \dot s_1 = b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$. *Это означает, что выполнено условие «прошиваемости» многообразия траекториями движения. Таким же образом устанавливаются соотношения между значениями* b_1 *и* b_2, *обеспечивающие необходимые условия «прошивания» траекториями многообразия* $S_1(t)$ *при переходе из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Аналогичным образом показывается «прошиваемость» многообразия* $S_2(t)$ *при переходе траекторий из области* $s_2 > 0$ *в область* $s_2 < 0$. *Т.е. траектория, выпущенная из точки, находящейся на одном из многообразий* $S_1(t)$ *или* $S_2(t)$, *в силу выполнения утверждения теоремы возвращается на это многообразие в точке, расположенной более близкой к началу координат, чем предыдущая (см. рис. 1).*

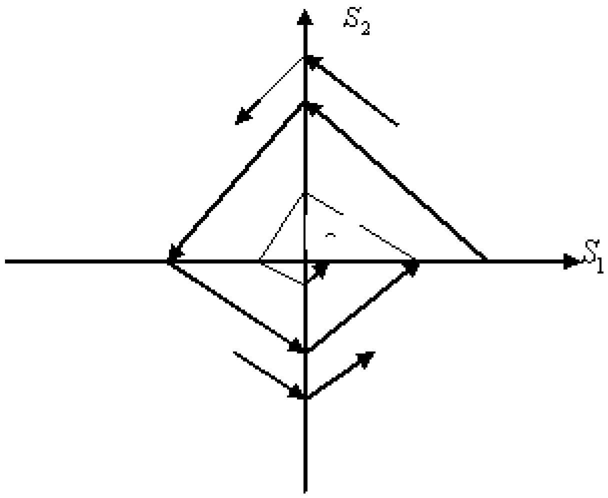


Рисунок **3.1**

Поведение траекторий системы (3.1) в окрестности пересечения многообразий переключения

Замечание. В этом примере было принято соглашение нормального переключения при переходе траекторий из одной области однозначности в другую. В другом случае должно быть выполнено соглашение, указанное в замечании к теореме 1.
Функция управления $u(t,x)$ типа «гистерезис»

Пусть: $u(t,x) = u^+(t,x)$ при $s(x) > \delta$; $u(t,x) = u^-(t,x)$ при $s(x) < \delta$, $\delta > 0$. В зоне нечувствительности $(-\delta, +\delta)$ $u(t,x)$ сохраняет то значение, которое она имела накануне предыдущего переключения. Фактически во время неоднократного перехода решения $x(t : t_0, x_0)$ из одной области однозначности в другую имеем дело с двумя многообразиями $S^+(t)$ и $S^-(t)$, на которых функция управления $u(t,x)$ претерпевает разрыв.

Определение 3.3. *Для уравнения* (1.2) *имеет место правая единственность в области D, если для $\forall(t_0, x_0)$ каждые два решения, удовлетворяющие условию $x(t_0) = x_0$, совпадают на отрезке $t_0 \le t \le t_1$, $t_1 \le T$ в предположении, что они оба существуют и проходят в этой области.*

В отношении уравнения (1.2) будем предполагать, что оно доопределено тем или иным способом (например, [3]) на многообразиях $S^+(t)$ и $S^-(t)$. В работе [6] указаны условия на правую часть дифференциального включения (1.1) и правые части уравнения (1.2), при которых для уравнения существует правая единственность его решения.

Введем в рассмотрение $R(t,x)-$ вектор разрыва на многообразиях $S^+(t)$ и $S^-(t)$ как разность предельных значений f^+ и f^- функции $f(t,x,u)$ при приближении вектора состояния $x^*(t)$ к точке $(t,x) \in S^+$ (либо $(t,x) \in S^-$) из областей однозначности. Сформулируем теорему.

Теорема 3.2. *Если в окрестности точки $x_0 \in S^\delta$ имеет место правая единственность, а вектор разрыва $R(t_0,x_0) = f^+(t,x) - f^-(t,x)$ лежит в области S^- от поверхности в область $s^+(x) < 0$, то через точку x_0 проходит единственное решение из области $s^+(x) > 0$ в область $s^-(x) < 0$, т.е. траектория через точку x_0 переходит из области однозначности в область, заключенную многообразиями $S^+(t)$ и $S^-(t)$.*

Доказательство. Пусть вектор $f_0(t_0,x_0) \in S^+$ определен как элемент множества $F(t_0,x_0,u(t_0,x_0))$, полученного при доопределении (1.2). Поскольку вектор $R(t_0,x_0)$

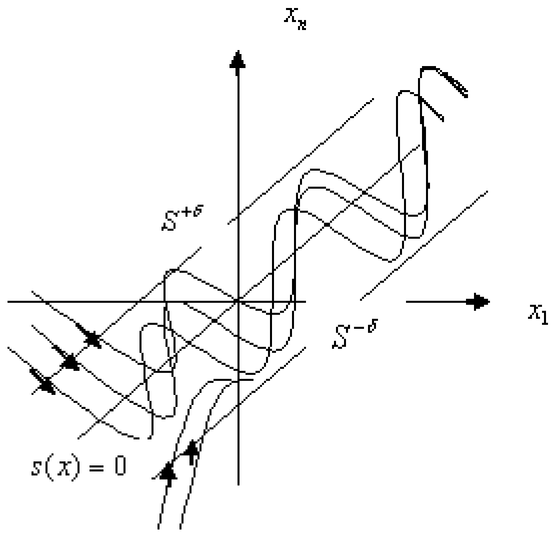
лежит в области $s^-(x) > 0$, то вектор фазовой скорости в точке (t_0, x_0) будет направлен в туже область. Существование правой единственности обеспечивает продолжимость решений через точку (t_0, x_0) из области $s^+(x) > 0$ в область $s^+(x) < 0$. Что и требовалось доказать.

Аналогичным образом показывается переход траекторий через многообразие S^- из области $s^-(x) < 0$ в область $s^-(x) > 0$. Здесь следует потребовать, чтобы проекции f_N^+ и f_N^- векторов $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x, u)$ лежали в области положительных значений, т.е. $f_N^+ > 0$ и $f_N^- > 0$ одновременно, а вектор $R(t, x)$ полностью лежал в области однозначности.

З а м е ч а н и е 3.2. *В этом пункте сделана попытка смоделировать процесс, в котором вектор состояния не выходит за пределы некоторых окрестностей многообразий $S^+(t)$ и $S^-(t)$, на которых, как замечено выше, функция управления $u(t, x)$ претерпевает разрывы первого рода. Если такой режим обеспечен, то он является близким к идеальному режиму скольжения при $\delta \to 0$ и наилучшим образом отвечает реальному процессу в системах управления.*

Такой подход замены идеального «скольжения» по многообразию $S(t)$ движениями, близкими к нему. К тому же позволяет получить усредненную количественную характеристику перехода из одного состояние в другое регулируемое состояние, находящееся на этом многообразии переключения. Последнее замечание оказывается важным при решении практических задач.

Действительно, если предположить, что изображающая точка $x(t)$ совершает колебательное движение внутри области, заключенной многообразиями $S^+(t)$ и $S^-(t)$, а расстояние между ними по направлению нормали к ним равно 2δ, то за период колебания $T = \Delta t_1 + \Delta t_2$ изображающая точка вдоль многообразия $S(t)$ пройдет расстояние, равное значению выражения $f^-(t, x)\Delta t_1 + f^+(t, x)\Delta t_2$. Здесь Δt_1 - время прохождения изображающей точки в колебательном движении от поверхности $S^-(t)$ до поверхности $S^+(t)$, а Δt_2 - время прохождения от поверхности $S^+(t)$ до поверхности $S^+(t)$. Конечно, такую оценку расстояния, а, следовательно, и оценку время следует считать усредненными (см. рис.2).



Р и с у н о к **3.2**

Поведение траекторий в зоне «нечувствительности»

П р и м е р 3.2. *Рассмотрим систему, находящуюся под двухмерным управлением*

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1), s_1 = x_1 + x_2; \frac{dx_2}{dt} = 2b_2 Sign(s_2), s_2 = 2x_1 - 0,5x_2, ()$$

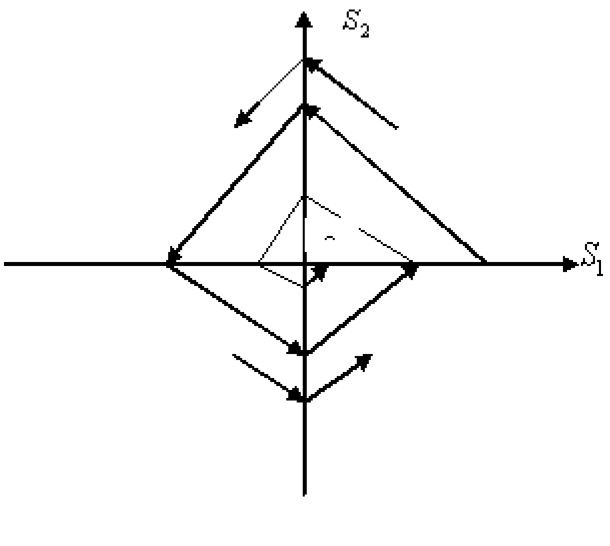
$b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 - Const, b_2 - Const$. *Переходя в пространство* $((s_1, s_2)$, *будем иметь*

$$\frac{ds_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2), \frac{ds_2}{dt} = -2b_1 Sign(s_1) - b_2 Sign(s_2).()$$

Выберем функцию V *в виде* $V = |s_1| + |s_2|$. *Тогда* $\dot{V} = Sign(s_1)(-b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2) + Sign(s_2)(-2b_1 Sign(s_1) + b_2 Sign(s_2) = -(b_1 + b_2) < 0$. *Таким образом, при заданных значениях* b_1 *и* b_2 *функция* $\dot{V}$ *в областях однозначности функций* $s_1(x)$ *и* $s_2(x)$.

Рассмотрим поведение траекторий системы в областях однозначности и в близи многообразий $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$. *Прежде заметим, что в первой четверти плоскости* (s_1, s_2) $s_1 < 0, s_2 > 0$, *во второй четверти* $s_1 > 0, s_2 > 0$, *в третьей* $s_1 > 0, s_2 < 0$, *в четвертой* $s_1 > 0, s_2 > 0$. *Такие соотношения устанавливаются с учетом значений* s_1 *и* s_2 *в областях однозначности. Тогда при выполнении соотношения* $b_1 > 2b_2$ *траектории в области* $s_2 > 0$ *будут переходить через многообразие* $S_1(t)$ *из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Действительно, при указанном соотношение имеет место* $\lim\limits_{s \to +0} \dot{s}_1 = -b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$ *в области* $s_1 > 0$, *а в области* $s_1 < 0$ *имеет место неравенство* $\lim\limits_{s_1 \to -0} \dot{s}_1 = b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$. *Это означает, что выполнено условие «прошиваемости». Таким же образом устанавливаются соотношения между значениями* b_1 *и* b_2, *обеспечивающие необходимые условия «прошивания» траекториями многообразия* $S_1(t)$ *при переходе из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Аналогичным образом показывается «прошиваемость» многообразия* $S_2(t)$ *при переходе траекторий из области* $s_2 > 0$ *в область* $s_2 < 0$. *Т.е. траектория, выпущенная из точки, находящейся на одном из многообразий* $S_1(t)$ *или* $S_2(t)$, *в силу* $\dot{V} < 0$ *возвращается на это многообразие в точке, расположенной более близко к началу координат, чем предыдущая.*

Замечание. В этом примере было принято соглашение нормального переключения при переходе траекторий из одной области однозначности в другую. В другом случае должно быть выполнено соглашение, указанное в замечании к теореме 3.1.



Р и с у н о к **3.3**

Поведение траекторий системы (3.1) в окрестности пересечения многообразий переключения

П р и м е р 3.3. [4] *Рассмотрим систему*

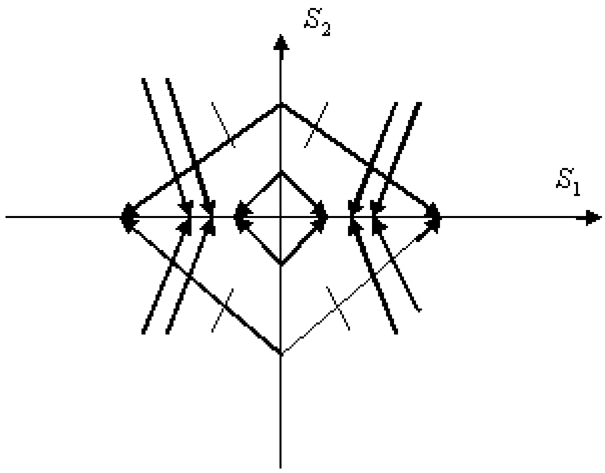
$$\frac{dx_1}{dt} = Sign(x_1), \frac{dx_2}{dt} = -2Sign(x_2),$$

которая в пространстве (s_1, s_2) *имеет вид* $\frac{ds_1}{dt} = Sign(s_1)$, $\frac{ds_2}{dt} = -2Sign(s_2)$.

Как и в примере 1 функцию V возьмем в виде $V = |s_1| + |s_2|$. *Тогда в силу системы* $\dot{V} = Sign(s_1) \cdot Sign(s_2) + Sign(s_2) \cdot (-2Sign(s_2) = 1 - 2 = -1$. *Таким образом, начало координат является устойчивым в отношении поведения траекторий в областях однозначности, а следовательно, и в* δ *- областях многообразий* $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$. *Однако из окрестности многообразия* $S_1(t)$ *изображающая точка удаляется от начала координат, а в окрестности многобразии* $S_2(t)$ *приближается к нему.*

Доопределяя систему методом эквивалентного управления [4], *видим, что точки многообразия* $S_2(t)$ *являются устойчивыми, а точки многообразия* $S_1(t)$ *неустойчивыми относительно началу координат. В достаточно малой его окрестности имеет место:* $\dot{s}_1 > 0$ *в области* $s_1 > 0$ *и* $\dot{s}_1 < 0$ *в области* $s_1 < 0$ *(см. рис. 3.4).*

Таким образом, на приведенных примерах мы показали, что устойчивость движения в δ *- окрестности многообразий* $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$ *еще не гарантирует устойчивость в целом. Оказывается, необходимо наложить дополнительные условия на управляющую функцию* $u(t, x)$ *в областях точек многообразий, которые гарантировали бы устойчивость начала координат. Такие условия сформулированы для специальной системы в* [3].



Р и с у н о к *3.4*

Поведение траекторий в системе (3.1)

Список литературы

1. Барбашин Е.А., Алимов Ю.И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Известия вузов, сер. Матем.*, 1962, №1, 3–13.

2. Емельянов С.В., *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 592 с.

3. Уткин В.И., *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., М., 1981, 368 с.

4. Филиппов А.Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 223 с.

5. Пятницкий Е.С., *Избранные труды (теория управления)*, **1**, Физматлит, М., 2004, 382 с.

6. Сафонкин В.И., “Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой”, *Труды Средневолжского математического общества*, **7**:1 (2005), 251–256.

7. Барбашин Е.А., *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 241 с.

About stability of decisions of systems with variable structure in areas of ambiguity of function of management

© **V.I. Safonkin**[2]

Abstract. In this article the behavior of system with variable structure at which the condition vector from unambiguity areas gets to some moment in δ- vicinities of variety of a rupture of the right part of system is studied and certain time remains in this vicinity. It appears such behavior at values it is possible to model the modes close to an ideal $\delta \to 0$ mode of sliding which actually, as we know, doesn't exist in real systems.

Key Words: extension of a definition, uniqueness, insert, variable structure, model.

[2] senior lecturer of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk

УДК 517.958:536.242

Трехчастичные термодинамические взаимодействия

© А.О. Сыромясов[1]

Аннотация. Рассматриваются три сферические частицы произвольных радиусов и теплопроводностей, помещенные в безграничную среду. Вдали от частиц задан постоянный градиент температуры. Исследуется температурное поле вне и внутри частиц. Указаны его общие свойства, рассмотрены частные случаи и предельные переходы к двухчастичной задаче.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сферическая частица, межчастичное взаимодействие, симметрия решения.

1. Постановка задачи о конечном числе частиц

Будем рассматривать среду (например, жидкость) с теплопроводностью κ_f, в которую помещены N_0 сферических частиц $\Omega(N)$. Их радиусы и теплопроводности равны a_N и κ_N, индекс N нумерует частицы. Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ и будем задавать положение произвольной точки пространства вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Радиус-векторы центров сфер относительно точки O равны $\vec{r}_N$.

Обозначим через $T_f(\vec{x})$ и $T_p(N, \vec{y})$ температуры в непрерывной среде и внутри N-й частицы; здесь и далее $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_N$. Пусть в среде и частицах нет источников тепла, а вдали от частиц задано стационарное поле температуры $T_\infty(\vec{x})$. Тогда T_f и T_p не зависят от времени, а значит, все упомянутые функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta T_\infty(\vec{x}) = 0, \ \Delta T_f(\vec{x}) = 0, \ \Delta T_p(N, \vec{y}) = 0 \tag{1.1}$$

Свойства распределения температуры таковы. Вдали от взвешенных сфер возмущения, вызванные ими, затухают, а внутри сфер $T_p(N)$ не имеет особенностей:

$$T_f(\vec{x}) \to T_\infty(\vec{x}), \ |\vec{x}| \to \infty, \tag{1.2}$$

$$|T_p(N, \vec{y})| < \infty, \ \vec{y} \in \Omega(N) \tag{1.3}$$

На границах раздела “жидкость-частица” температура и тепловой поток непрерывны:

$$T_p = T_f, \ \kappa_N \frac{\partial T_p(N)}{\partial n} = \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n}, \ \vec{y} \in \partial\Omega(N) \tag{1.4}$$

Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы $\partial\Omega(N)$.

Итак, требуется найти функции T_f и T_p, удовлетворяющие соотношениям (1.1)–(1.4).

2. Общее решение задачи о термодинамическом взаимодействии

Будем искать неизвестные функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &= T_\infty(\vec{x}) + \sum_{N=1}^{N_0} \Big[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{x} - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \\ &\quad + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}_N) + D_{jklm}^{\text{ext}}(N) L_{jklm}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \ldots \Big], \\ T_p(N, \vec{y}) &= T_\infty(\vec{r}_N) + A_0^{\text{int}}(N) + H_j^{\text{int}}(N) L_j(\vec{y}) |\vec{y}|^3 + F_{jk}^{\text{int}} L_{jk}(\vec{y}) |\vec{y}|^5 + \\ &\quad + G_{jkl}^{\text{int}}(N) L_{jkl}(\vec{y}) |\vec{y}|^7 + D_{jklm}^{\text{int}}(N) L_{jklm}(\vec{y}) |\vec{y}|^9 + \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

[1] Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syal1@yandex.ru.

Гармонические мультиполи $L_{j\cdots k}$ задаются формулами:

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|},\ L_{j\cdots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\cdots\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{1}{|\vec{x}|}\Big)$$

Очевидно, $L_{j\cdots k}(\vec{x}) \to 0$ при $|\vec{x}| \to \infty$; функция $L_{j_1\cdots j_n}(\vec{y})|\vec{y}|^{2n+1}$ регулярна при $\vec{y} = \vec{0}$.

В зависимости от точности, с которой требуется решить задачу, в разложение (2.1) могут входить мультиполи сколь угодно высокого порядка.

Коэффициенты A_0, H_j, F_{jk},... не зависят от $\vec{x}$ и $\vec{y}$, по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до 3. Обозначения "ext" или "int" указывают, что коэффициент относится к представлению температуры вне или внутри частицы.

Таким образом, функции (2.1) удовлетворяют условиям (1.1)–(1.3). Остается подобрать величины A_0, H_j, F_{jk}...., чтобы на поверхности всех частиц выполнялись граничные условия (1.4). Эти коэффициенты являются компонентами некоторых тензоров $\vec{H}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ и т.д. С учетом своей симметрии, указанные тензоры (вне зависимости от того, описывают они поле T_f или T_p) имеют такой общий вид:

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= H_1\vec{e}_1 + H_2\vec{e}_2 + H_3\vec{e}_3,\\
\vec{F} &= F_{11}\vec{e}_1^{\,2} + F_{22}\vec{e}_2^{\,2} + F_{12}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + F_{13}(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + F_{23}(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2),\\
\vec{G} &= G_{111}\vec{e}_1^{\,3} + G_{222}\vec{e}_2^{\,3} + G_{112}(\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_2 + \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_1^{\,2}) + G_{113}(\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_3 + \vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + \\
&\quad +\vec{e}_3\vec{e}_1^{\,2}) + G_{221}(\vec{e}_2^{\,2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_1\vec{e}_2^{\,2}) + G_{223}(\vec{e}_2^{\,2}\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_2^{\,2}) + \\
&\quad +G_{123}(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1 + \vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь и далее $\vec{e}_i$ – единичный вектор, сонаправленный с осью Ox_i. Симметрия $\vec{F}$, $\vec{G}$ и т.д. объясняется тем, что свертка симметричного по своим индексам мультиполя $L_{j\cdots k}$ с любым антисимметричным тензором была бы равна нулю.

В выражения (2.2) не включены произведения вектора $\vec{e}_3$ на себя. Это связано с тем, что в силу гармоничности мультиполей свертка их с символом Кронекера $\vec{\delta} = \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2}$ равна нулю: $\delta_{jk}L_{jkl_1\cdots l_m} = 0$. Поэтому произведение любого мультиполя $L_{jkl_1\cdots l_m}$ на $\vec{e}_3^{\,2}$ может быть выражено через его свертки с $\vec{e}_1^{\,2}$ и $\vec{e}_2^{\,2}$. Такое соображение сокращает число неизвестных компонент тензоров и упрощает решение задачи.

Отметим, что $A_0^{\mathrm{int}}(N)$ представляет собой средний нагрев N-й частицы относительно среды "без частиц". Действительно, осредним выражение $T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)$ по поверхности $\partial\Omega(N)$. Используя свойство ортогональности сферических гармоник [1], получим, что

$$\oint_S L_{j_1\cdots j_n}(\vec{x})dS = 0$$

для любой сферы S с центром в точке O, от которой откладывается вектор $\vec{x}$. Поскольку на поверхности N-й частицы $|\vec{y}| = a_N = \mathrm{const}$, то, используя представление (2.1), найдем

$$\langle T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)\rangle_{\partial\Omega(N)} = \frac{1}{4\pi a_N^2}\oint_{\partial\Omega(N)}[T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)]dS = A_0^{\mathrm{int}}(N)$$

Аналогично можно осреднить выражение $T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)$ и по объему $\Omega(N)$:

$$\langle T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)\rangle_{\Omega(N)} = \frac{1}{4\pi a_N^3/3}\int_{\Omega(N)}[T_p(N,\vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)]dV = A_0^{\mathrm{int}}(N),$$

т.е. и при осреднении по объему N-я частица нагревается относительно жидкости, не содержащей включений, на величину $A_0^{\mathrm{int}}(N)$.

Далее ограничимся изучением трех сферических частиц. Помимо этого, будем считать, что градиент температуры на бесконечности $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ постоянен:

$$T_\infty(\vec{x}) = T_j x_j + T_0 \tag{2.3}$$

Таким образом, T_0 есть температура в начале координат.

3. Решение задачи об одиночной частице и электростатические аналогии

В случае, когда в неограниченной среде находится одиночная частица с теплопроводностью κ_1 и радиусом a_1, а внешнее поле задается формулой (2.3), задача решена в [2]:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &= T_0 + T_j x_j + \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} a_1^3 T_j L_j(\vec{x}), \\ T_p(1, \vec{y}) &= T_0 + \frac{3\kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} T_j y_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь предполагается, что начало координат совпадает с центром сферы. Тем самым,

$$H_j^{\text{ext}}(1) = \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} a_1^3 T_j, \; H_j^{\text{int}}(1) = -\frac{3\kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} T_j, \tag{3.2}$$

остальные коэффициенты равны нулю. Поскольку $A_0^{\text{int}}(1) = 0$, то одиночная частица, взвешенная в жидкости с заданным на бесконечности постоянным градиентом температуры, не нагревается и не охлаждается относительно окружающей среды.

Проанализируем предельные случаи (3.1). При $\kappa_1 = \kappa_f$ эти равенства принимают вид $T_p = T_f = T_\infty$. Таким образом, когда частица с точки зрения термодинамики неотличима от окружающей ее среды, она не вносит возмущений в поле температуры. При $a_1 \to 0$ возмущение вне сферы стремится к нулю – из-за своих малых размеров она не влияет на распределение температуры. Поле внутри сферы определяется прежним выражением.

В [3] изучен диэлектрический эллипсоид, помещенный в однородное электрическое поле. С математической точки зрения эта задача аналогична задаче о распределении температуры в среде с одиночным эллипсоидальным включением и заданным на бесконечности градиентом температуры. Действительно, роль температуры играет потенциал поля, вместо теплопроводностей рассматриваются диэлектрические проницаемости частицы и среды. На удалении от частицы задается напряженность поля (градиент потенциала), нормальная компонента электрической индукции на поверхности частицы непрерывна.

В [3] получено, что поле внутри эллипсоида однородно и не зависит от его размеров. Обращаясь к равенству (3.1), легко видеть, что решение термодинамической задачи обладает аналогичными свойствами: внутри сферы градиент температуры постоянен и не зависит от радиуса a_1.

4. Решение задачи о трех частицах и его общие свойства

Выше было сказано, что тензорные коэффициенты, входящие в равенство (2.1), должны быть найдены из граничных условий (1.4). Поскольку эти условия линейны относительно температуры, то зависимость коэффициентов от $\vec{T}$ также должна быть линейной.

Обозначим через $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ вектор, началом которого является центр i-й частицы, а концом – центр j-й частицы. Поскольку инородные частицы, помещенные в среду, не перекрываются, то для любых i и j должно выполняться условие

$$|\vec{r}_{ij}| \leq a_i + a_j \tag{4.1}$$

Для удобства выберем систему координат так, что центры всех трех частиц лежат в плоскости Ox_1x_2, а центр первой частицы находится в точке O. Далее, будем считать, что вектор $\vec{r}_{12}$ сонаправлен с осью Ox_1, а вектор $\vec{r}_{13}$ образует с ней угол φ (рис. 4.1).

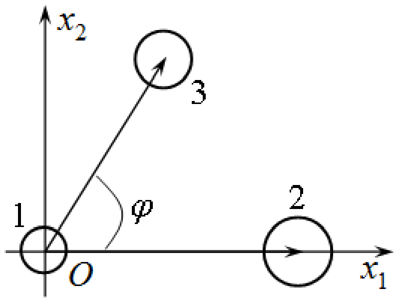


Рисунок **4.1**

Вместо $|\vec{r}_{12}|$ будем писать r и обозначим отношение $|\vec{r}_{13}|/|\vec{r}_{12}|$ через ρ_{23}. Тогда

$$\vec{r}_{12} = r\vec{e}_1,\ \vec{r}_{13} = \rho_{23} r(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2),\ \vec{r}_{23} = r[(\rho_{23}\cos\varphi - 1)\vec{e}_1 + \rho_{23}\sin\varphi\vec{e}_2]$$

Величины $A_0^{\text{int}}(N)$, $H_j^{\text{ext}}(N)$, $H_j^{\text{int}}(N)$, $F_{jk}^{\text{ext}}(N)$,... будем искать в виде разложения по параметру $\varepsilon = a_1/r$. Из требования (4.1) следует, что этот параметр меньше 1.

Поставленная задача была решена с точностью до ε^5. Полученные выражения для искомых величин оказались весьма громоздкими и далее не приводятся. Однако ниже будут указаны наиболее существенные свойства решения задачи.

Оказалось, что для достижения заданной точности достаточно в (2.1) учитывать тензоры не выше третьего ранга, причем они имеют следующие порядки малости:

$$\vec{H}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^0,\ A_0^{\text{int}}(N) \propto \varepsilon^2,\ \vec{F}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^4,\ \vec{G}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^5$$

Кроме того, тензоры $\vec{H}(N)$ содержат слагаемые порядка ε^3, а скаляры $A_0^{\text{int}}(N)$ – ε^5.

При $\varepsilon \to 0$ величины $\vec{H}^{\text{ext}}(N)$ и $\vec{H}^{\text{int}}(N)$ принимают вид (3.2) с заменой a_1 и κ_1 на a_N и κ_N; остальные коэффициенты обращаются в нуль. Это означает, что при увеличении относительного удаления частиц друг от друга происходит предельный переход к решению задачи об одиночной сфере. При $\varepsilon \neq 0$ вид коэффициентов $\vec{H}$ не совпадает с (3.2), а другие тензоры, входящие в (2.1), отличны от нуля. Значит, сумма возмущений, вносимых в распределение температуры отдельными частицами, не равна возмущению, вносимому их совокупностью. Этот факт и говорит о термодинамическом взаимодействии частиц.

Отметим, что найденные тензорные коэффициенты имеют такой же порядок малости, как и в задаче о двухчастичном взаимодействии, решенной в [4]. Это можно объяснить, изучая симметрию задачи и привлекая теорию нелинейных тензорных функций [5].

Если инородная частица в среде единственна, то прямая, проходящая через ее центр в направлении градиента температуры, является поворотной осью бесконечного порядка; любая плоскость, проходящая через эту ось, будет зеркальной. Эти элементы симметрии определяют точечную группу $\infty\cdot m$, базисом которой могут быть выбраны $\vec{T}$ и $\vec{\delta}$. Символ Кронекера при свертке с мультиполями дает нуль и далее не учитывается, поэтому с помощью данного базиса можно построить лишь вектор $\vec{H} = C\vec{T}$, линейный по $\vec{T}$. Константа C определяется из граничных условий; так, для $\vec{H}^{\text{int}}$ она равна $-3\kappa_f/(\kappa_1 + 2\kappa_f)$.

Добавление второй частицы резко снижает симметрию. В общем случае мы получим точечную группу 1 с базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, а с его помощью можно построить тензоры произвольного ранга. Поэтому уже при $N_0 = 2$ в разложение (2.1) входят мультиполи сколь угодно высокого порядка. Добавление третьей (четвертой и т.д.) частицы уже не сможет существенно «ухудшить» ситуацию: выражения для компонент тензоров, найденные из граничных условий, станут сложнее, но будут иметь тот же порядок.

Если градиент температуры перпендикулярен плоскости, в которой лежат центры частиц, то частицы не нагреваются относительно окружающей среды. Действительно, геометрия задачи определяется векторами $\vec{T}$ и $\vec{r}_{ij}$. С учетом линейности по $\vec{T}$ это означает, что каждый из скаляров $A_0^{\text{int}}(N)$ имеет структуру

$$A_0^{\text{int}}(N) = A_{12}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{12} + A_{13}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{13} + A_{23}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{23}$$

Если $\vec{T}$ ортогонален векторам $\vec{r}_{ij}$, то $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Отсюда и вытекает отсутствие нагревания взвешенных в жидкости частиц. Этот факт, установленный с помощью теории нелинейных тензорных функций, подтверждается и полученным в ходе решения задачи асимптотическим разложением тензорных коэффициентов. Поле температуры, образующееся в среде с двумя инородными включениями, обладает аналогичным свойством: если градиент температуры перпендикулярен линии, соединяющей центры частиц, то их средний нагрев относительно среды равен нулю [4].

Наконец, из решения следует, что тензоры, относящиеся к представлению температуры внутри N-й сферы, не зависят от ее радиуса, а только лишь от радиусов других сфер. Так, $\vec{H}^{\text{int}}(1)$, $\vec{F}^{\text{int}}(1)$ и $\vec{G}^{\text{int}}(1)$ зависят от a_2 и a_3, но не от a_1. Исключение составляют лишь $A_0^{\text{int}}(N)$, зависящие от a_N. Следовательно, как и в случае одиночной частицы, размеры *самой* частицы на градиент температуры внутри нее не влияют; правда, теперь этот градиент уже не будет постоянным.

5. Предельные переходы к двухчастичной задаче

Если из рассматриваемой конфигурации тем или иным способом “удалить” сферу $\Omega(3)$, то найденные выражения должны переходить в решение задачи о двух частицах. Можно указать три способа такого “удаления”:

1. Отодвинуть $\Omega(3)$ на большое расстояние от первых двух частиц, т.е. предположить, что $\rho_{23} \to \infty$ при произвольных a_3 и κ_3.

2. Сделать $\Omega(3)$ неотличимой от окружающей среды, т.е. принять $\kappa_3 = \kappa_f$, не выдвигая никаких предположений относительно a_3 и ρ_{23}.

3. Стянуть $\Omega(3)$ в точку, т.е. принять, что $a_3 \to 0$ при произвольных ρ_{23} и κ_3.

В любом из этих случаев полученные асимптотические разложения $T_p(1)$, $T_p(2)$ и T_f (вблизи первой и второй частиц) совпадают с выражениями, полученными для двух сфер в [4]. Однако распределения $T_p(3)$ и T_f вблизи $\Omega(3)$ ведут себя по-разному в зависимости от того, какой способ “удаления” третьей сферы выбрать.

В случае 1 тензоры $\vec{H}(3)$ принимают вид (3.1) с заменой a_1, κ_1 на a_3, κ_3, соответственно; остальные коэффициенты, относящиеся к третьей частице, зануляются. Следовательно, в окрестности $\Omega(3)$ температура распределена так, как возле одиночной частицы. Это значит, что если третью частицу удалить на большое расстояние от первых двух, то взаимовлияния $\Omega(3)$ и пары $\Omega(1)$, $\Omega(2)$ вообще нет.

В случае 2 получается, что $\vec{H}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$, $\vec{F}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$, $\vec{G}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$. Коэффициенты $A_0^{\text{int}}(3)$,..., $\vec{G}^{\text{int}}(3)$ имеют такой вид, что разложения по степеням $\vec{y}$ функций $T_p(3, \vec{y})$ и

$$T_\infty(\vec{x}) + \sum_{N=1}^{2} \Big[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{x} - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}_N) + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \ldots \Big]$$

при $\vec{x} = \vec{r}_3 + \vec{y}$ совпадают. Это понятно: если включение по своим термодинамическим свойствам не отличается от внешней неподвижной среды, то оно не вносит возмущение в распределение температуры, зато возмущения от первых двух частиц проникают внутрь этого включения, не искажаясь.

В случае 3 коэффициенты $\vec{H}^{\text{ext}}(3)$, $\vec{F}^{\text{ext}}(3)$ и $\vec{G}^{\text{ext}}(3)$ также обращаются в нуль, т.е. бесконечно малая частица не влияет на распределение температуры в окружающей среде. Тензоры $\vec{H}^{\text{int}}(3)$, $\vec{F}^{\text{int}}(3)$ и $\vec{G}^{\text{int}}(3)$ в пределе при $a_3 \to 0$ не меняются, ибо, как было отмечено выше, градиент температуры внутри частицы от ее размеров не зависит. Скаляр $A_0^{\text{int}}(3)$ принимает вид

$$\sum_{N=1}^{2} \Big[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + \ldots \Big],$$

причем фигурирующие в этом разложении тензорные коэффициенты должны быть найдены из решения двухчастичной задачи. Тем самым, нагрев бесконечно малой сферы относительно окружающей среды определяется значениями возмущений, вызванных другими частицами, в центре этой сферы.

Все изложенные выводы справедливы при произвольном угле φ.

6. Частные конфигурации системы из трех частиц

Рассмотрим частные случаи, в которых изучаемая задача обладает высокой симметрией. Они получаются из общего решения специальным выбором радиусов частиц, относительных расстояний между ними, угла φ и координат $\vec{T}$.

6.1. Симметричная цепочка

Предполагается, что центры всех трех частиц лежат на одной прямой, причем расстояния между центрами соседних частиц одинаковы: $\varphi = 0$, $\rho_{23} = 2$. Кроме того, считается, что крайние частицы одинаковы: $a_3 = a_1$, $\kappa_3 = \kappa_1$; их свойства могут отличаться от свойств средней (второй) частицы.

При такой симметрии вне зависимости от того, какой угол с цепочкой составляет вектор $\vec{T}$, тензоры, фигурирующие в (2.1), подчиняются преобразованиям:

$$\vec{H}(3) = \vec{H}(1), \ \vec{F}(3) = -\vec{F}(1), \ \vec{G}(3) = \vec{G}(1)$$

Эти соотношения аналогичны тем, что были получены ранее для двух частиц, и справедливы независимо от того, относятся тензоры к разложению температуры вне или внутри инородных сфер.

Если $\vec{T}$ перпендикулярен цепочке, то, как и следовало ожидать, все величины $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Если же внешний градиент температуры приложен параллельно линии центров трех частиц, то $A_0^{\text{int}}(3) = -A_0^{\text{int}}(1)$ и $A_0^{\text{int}}(2) = 0$. Тем самым, две крайние частицы образуют своеобразный “диполь” и нагреваются противоположно, а средняя частица вовсе не нагревается относительно окружающей жидкости.

6.2. Равнобедренный треугольник

Сферы $\Omega(1)$ и $\Omega(2)$ считаются одинаковыми: $a_2 = a_1$, $\kappa_2 = \kappa_1$; отрезок, соединяющий их центры, является основанием треугольника. Расстояние от центра $\Omega(3)$ до центров первых двух сфер одинаково, что приводит к соотношению $\rho_{23} = 1/(2\cos\varphi)$. Кроме того, градиент температуры перпендикулярен основанию треугольника: $T_1 = 0$.

В силу симметрии данной конкретной конфигурации, первая и вторая сферы нагреваются одинаково: $A_0^{\text{int}}(1) = A_0^{\text{int}}(2)$. Можно утверждать, что сам этот нагрев обусловлен присутствием третьей частицы: если так или иначе "убрать" ее, то в полученной двухчастичной задаче $\vec{T}$ окажется перпендикулярным линии центров.

Более того, при некоторых условиях в задаче о трех частицах выполнено соотношение

$$A_0^{\text{int}}(1) + A_0^{\text{int}}(2) + A_0^{\text{int}}(3) = 0 \tag{6.1}$$

С точностью до ε^5 эта сумма равна

$$8T_2\cos^2\varphi\sin\varphi\{r^{-2}(K_3 - K_1) + r^{-5}K_1[K_1 - 2K_3\cos^2\varphi(3 + 10\cos\varphi + 6\cos 3\varphi)]\},$$

где $K_N = a_N^3(\kappa_N - \kappa_f)/(\kappa_N + 2\kappa_f)$. Условие (6.1) выполняется, если $K_1 = K_3$ и $\varphi = \pi/3$.

Вне зависимости от координат $\vec{T}$ и от угла φ остальные коэффициенты подчиняются следующим преобразованиям. У тензоров $\vec{H}(1)$ и $\vec{H}(2)$, $\vec{F}(1)$ и $\vec{F}(2)$, $\vec{G}(1)$ и $\vec{G}(2)$ равны компоненты, соответствующие четному числу векторов $\vec{e}_1$. Например, $F_{11}^{\text{ext}}(1) = F_{11}^{\text{ext}}(2)$, $G_{223}^{\text{int}}(1) = G_{223}^{\text{int}}(2)$. Слагаемые с нечетным количеством $\vec{e}_1$ у этих тензоров противоположны, а у тензоров, относящихся к третьей частице, они равны нулю. Эти преобразования обусловлены симметрией задачи относительно плоскости, перпендикулярной Ox_1. Как следствие, возмущения температуры должны быть четны по x_1, если выбрать начало координат не в центре $\Omega(1)$, а в середине отрезка, соединяющего первую и вторую сферу.

6.3. Равносторонний треугольник

Все три частицы будем считать одинаковыми: $a_1 = a_2 = a_3$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$. Предположим, что их центры лежат в вершинах равностороннего треугольника, т.е. $\varphi = \pi/3$, $\rho_{23} = 1$. Кроме того, будем считать, что внешний градиент температуры перпендикулярен плоскости Ox_1x_2, в которой лежат эти вершины.

Из последнего условия сразу следует, что все $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Другие тензоры, входящие в разложение (2.1), удовлетворяют таким ограничениям. Все $\vec{H}^{\text{ext}}(N)$ равны между собой, то же относится и к $\vec{H}^{\text{int}}(N)$. У коэффициентов $\vec{H}(N)$ только компонента $H_3(N) \neq 0$.

Далее, у тензоров $\vec{F}^{\text{ext}}(N)$ не равны нулю лишь компоненты $F_{13}^{\text{ext}}(N)$ при $N = 1,2$ и $F_{23}^{\text{ext}}(N)$ при $N = 1,2,3$. В добавление к соотношениям, справедливым для частиц в вершинах равнобедренного треугольника, для равностороннего треугольника получается

$$F_{23}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}F_{13},\ F_{23}(3) = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_{13}(1) \tag{6.2}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и $\vec{F}^{\text{int}}(N)$.

Таким же образом, компоненты $\vec{G}(N)$ удовлетворяют общим соотношениям, выведенным для равнобедренного треугольника. Кроме того, у тензоров $\vec{G}^{\text{ext}}(N)$ не равны нулю только компоненты $G_{113}(N)$ и $G_{223}(N)$ при $N = 1,2,3$ и $G_{123}(N)$ при $N = 1,2$. Для них справедливы соотношения

$$G_{223}(1) = \frac{3}{5}G_{113}(1),\ G_{123}(1) = \frac{\sqrt{3}}{5}G_{113}(1),\ G_{113}(3) = \frac{2}{5}G_{113}(1),\ G_{223}(3) = \frac{6}{5}G_{113}(1) \tag{6.3}$$

Компоненты $\vec{G}^{\rm int}(N)$ удовлетворяют таким же ограничениям.

Казалось бы, в данном частном случае задача обладает симметрией $3\cdot m$. Действительно, прямая, проходящая через центр треугольника параллельно Ox_3, есть поворотная ось бесконечного порядка; проходящая через нее плоскость, параллельная Ox_2x_3, будет зеркальной. Базис группы $3\cdot m$ образуют тензоры $\vec{e}_3$, $\vec{\delta}$ и $\vec{D}_{3h}=\vec{e}_1^{\,3}-\vec{e}_1^{\,2}\vec{e}_2-\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_1^{\,2}$ [5]; символ Кронекера, как и ранее, не играет роли. Так как $\vec{T}$ коллинеарен Ox_3, то функции T_f и $T_p(N)$ нечетны по x_3, а значит, $\vec{e}_3$ должен входить в разложения всех тензоров только в нечетных степенях. Тогда разложения $\vec{H}(N)$, $\vec{F}(N)$, $\vec{G}(N)$ по этому базису должны выглядеть так:

$$\vec{H}(N)=H_3(N)\vec{e}_3,\ \vec{F}(N)=\vec{0},\ \vec{G}(N)=G_1(N)\vec{D}_{3h}+G_3(N)\vec{e}_3^{\,3},$$

причем, как говорилось выше, можно считать $G_3(N)=0$.

Однако искомые тензоры имеют другой вид. Например, из (2.2) и (6.2) следует, что

$$\vec{F}(1)=F_{13}(1)\Big[(\vec{e}_1\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_2)\Big] \tag{6.4}$$

Чем можно объяснить такое расхождение?

Дело в том, что ивариантной относительно группы $3\cdot m$ должна быть лишь T_f; каждый из тензоров $\vec{H}(N)$, $\vec{F}(N)$, $\vec{G}(N)$ в отдельности может не подчиняться указанным преобразованиям. Ведь компоненты тензоров находятся из граничных условий на поверхностях $\partial\Omega(N)$, а там симметрия будет другой. Так, граничные условия на $\partial\Omega(1)$ инвариантны при зеркальной симметрии относительно плоскости $-x_1+\sqrt{3}x_2=0$: ее проекция на Ox_1x_2 является биссектрисой угла между $\vec{r}_{12}$ и $\vec{r}_{13}$ (рис. 6.1).

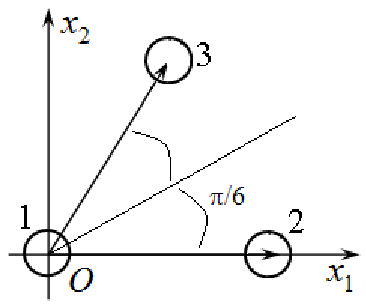


Рисунок **6.1**

Это зеркальное отражение определяет преобразование базиса

$$\vec{e}_1\mapsto\vec{e}_1'=\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2,\ \vec{e}_2\mapsto\vec{e}_2'=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1-\frac{1}{2}\vec{e}_2 \tag{6.5}$$

Легко убедиться, что тензор $\vec{F}(1)$, определенный равенством (6.4), не изменяется при заменах (6.5), т.е.

$$F_{13}(1)\Big[(\vec{e}_1\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_2)\Big]=F_{13}(1)\Big[(\vec{e}_1'\vec{e}_3'+\vec{e}_3'\vec{e}_1')+\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2'\vec{e}_3'+\vec{e}_3'\vec{e}_2')\Big]$$

Аналогично можно показать, что соотношения (6.3) обеспечивают инвариантность $\vec{G}(1)$ относительно преобразований (6.5).

Убедимся теперь, что поле $T_f(\vec{x})$, в представлении которого тензоры удовлетворяют ограничениям (6.2) и (6.3), не меняется при преобразованиях, определяющих группу $3\cdot m$.

Для этого перенесем начало координат в центр треугольника. Тогда зеркальная симметрия и поворот на $2\pi/3$ против часовой стрелки отвечают следующим заменам переменных:

$$x_1 \mapsto -x_1;$$
$$x_2 \mapsto -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2,\ x_1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \tag{6.6}$$

В новой системе координат радиус-векторы центров сфер таковы:

$$\vec{r}_1 = R\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\Big),\ \vec{r}_2 = R\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\Big),\ \vec{r}_3 = R\vec{e}_2,$$

где $R = r/\sqrt{3}$. Подставив эти $\vec{r}_N$ в (2.1) и раскладывая полученное выражение по степеням $\vec{x}$, получим:

$$x_3\Big\{\Big[-\frac{3}{R^3}H_3^{\rm ext}(1) + \frac{12\sqrt{3}}{R^4}F_{13}^{\rm ext}(1) - \frac{594}{5R^5}G_{113}^{\rm ext}(1)\Big] + \Big[\frac{9}{2R^5}H_3^{\rm ext}(1) - \frac{30\sqrt{3}}{R^6}F_{13}^{\rm ext}(1) + \\ + \frac{459}{R^7}G_{113}^{\rm ext}(1)\Big]P_2(\vec{x}) + \Big[\frac{105}{8R^6}H_3^{\rm ext}(1) - \frac{105\sqrt{3}}{R^7}F_{13}^{\rm ext}(1) + + \frac{6993}{4R^8}G_{113}^{\rm ext}(1)\Big]P_3(\vec{x}) + \ldots\Big\},$$

где $P_2(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 - 5(x_1^2 + x_2^2)/2$ и $P_3(\vec{x}) = 3x_1^2x_2 - x_2^3$. Легко проверить, что эти многочлены инвариантны относительно замен (6.6), а значит, температура $T_f(\vec{x})$ инвариантна относительно группы $3 \cdot m$.

Список литературы

1. Кузнецов Д. С., *Специальные функции*, 2-е, испр. и доп., Высш. шк., М., 1965, 424 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика.* Т. 6: *Гидродинамика*, 3-е, перераб., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1986, 736 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Электродинамика сплошных сред*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1959, 532 с.
4. Сыромясов А. О., “Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры”, *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011, № 4, ч. 3, 1158–1160.
5. Лохин В. В., Седов Л. И., “Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов”, *Прикладная математика и механика*, **27**:3 (1963), 393–417.

Three-particle thermodynamic interactions.

© **A.O. Syromyasov**[2]

Abstract. We consider three spherical particles with arbitrary radii and heat conductivities immersed in an infinite medium. The temperature gradient far from spheres is supposed to be constant. Temperature field inside and outside the particles is explored, and its general properties are listed. Passages to the limit of two-particle problem and some particular cases are considered, too.

Key Words: heat conduction equation, spherical particle, interparticle interaction, symmetry of solution.

[2] Reader of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University named after N. P. Ogaryov, Saransk; syal1@yandex.ru.

УДК 517.95

О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

© **Т.К. Юлдашев**[1]

Аннотация. В данной работе изучается однозначная разрешимость смешанной задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего суперпозицию параболического и гиперболического операторов в линейной части уравнения. С помощью метода разделения переменных получается счетная система нелинейных интегральных уравнений. Используется метод последовательных приближений. Доказывается сходимость полученных рядов.

Ключевые слова: смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка, суперпозиция параболического и гиперболического операторов, метод разделения переменных, метод последовательных приближений.

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)u(\beta_j s,x)ds\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_1(x),\quad u_t(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_2(x),\quad u_{tt}(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_3(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)\mid_{x=0}=u(t,x)\mid_{x=l}=u_{xx}(t,x)\mid_{x=0}=u_{xx}(t,x)\mid_{x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $0<K_j(t,s)\in C(D_T^2)$, $0<\beta_j<1$, $j=\overline{1,m}$, $\varphi_i(x)\in C(D_l)$, $\varphi_i(x)\mid_{x=0}=\varphi_i(x)\mid_{x=l}=\varphi_i''(x)\mid_{x=0}=\varphi_i''(x)\mid_{x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Отметим, что смешанные и краевые задачи были рассмотрены в работах многих авторов, в частности, в [1]-[6]. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков, в частности, уравнения четвертого порядка. Задачи геометрии и физики приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Изучение многих задач газовой динамики приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков [7].

Решение смешанной задачи (1.1)-(1.3) разыскивается в виде ряда:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\quad (t,x)\in D. \tag{1.4}$$

Применение метода разделения переменных в виде (1.6) и использование интегрального тождества позволяет отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru.

уравнения (1.1). Кроме того, такой подход позволяет свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ).

Пусть $b_n(x)$ – собственные функции дифференциального оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$b_n(0) = b_n(l) = b_n^{''}(0) = b_n^{''}(l) = 0$$

и обладающие свойством $b_n^{''}(x) = -\lambda_n^2 b_n(x)$, где λ_n^2 – соответствующие собственные значения данного оператора.

Линейное множество $\{a(t) = (a_n(t)) \mid a_n(t) \in C[0,T], n = 1, 2, \ldots\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_p(T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_n(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1$$

становится банаховым пространством $B_p(T)$.

Для каждого $a(t) \in B_p(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x).$$

Через $E_p(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_p(T) \to E_p(D)$ и $E_p(D) \subset L_p(D)$.

Определение 1.1. *Если функция* $u(t,x) \in E_p(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству* $\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ u(t,y) \left[\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) - \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right] + f\Phi \right\} dydt = \int\limits_0^l \varphi_1 \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0} dy - \int\limits_0^l \varphi_2 \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right]_{t=0} dy + \int\limits_0^l \varphi_3 [\Phi]_{t=0} dy$ *для любого* $\Phi(t,x) \in W_p^{(k)}(D)$, *то функция* $u(t,x)$ *называется обобщенным решением смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Коэффициенты разложения $a_n(t)$ обобщенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) удовлетворяют следующей ССНИУ:

$$a_n(t) = \Psi_n(t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\left(s, y, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s) \cdot b_\nu(y), \int\limits_0^s \sum_{j=1}^{m} K_j(s,\theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_j\theta) \cdot b_\nu(y) d\theta\right) \times$$
$$\times b_n(y) G_n(t,s) dyds, \quad t \in D_T, \tag{1.5}$$

где

$$\Psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos\lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1+\lambda_n^2)\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s) = \mu_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \lambda_n \sin\lambda_n(t-s) - \cos\lambda_n(t-s)\right], \quad \mu_n = \frac{1}{\lambda_n^2(1+\lambda_n^2)}.$$

Действительно, если $\Phi = \Phi_m(t,x) = g(t) b_m(x) \in W_p^{(k)}(D)$, $0 \neq g(t) \in C^3(D_T)$, то из определения обобщенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) следует, что

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cdot b_n(y) \left[-g^{'''}(s) + \lambda_m^2 g^{''}(s) - \lambda_m^2 g^{'}(s) + \lambda_m^4 g(s)\right] - \right.$$
$$-f\left(s, y, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s) \cdot b_\nu(y), \int\limits_0^s \sum_{j=1}^{m} K_j(s,\theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_j\theta) \cdot b_\nu(y) d\theta\right) \times \tag{1.6}$$
$$\left. \times g(s) b_m(y) \right\} dyds = 0.$$

Так как система функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_p(D_l)$, то интегрированием по частям из (1.6) можно получить, что

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T g(t)\left[a_n^{'''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{'}(t)+\lambda_m^4 a_n(t)-\right.\\ -\int\limits_0^l f\left(t,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j s)\cdot b_\nu(y)ds\right)\times\\ \left.\times b_n(y)dy\right]dt=0.\end{gathered}\tag{1.7}$$

Поскольку $g(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (1.7) следует

$$\begin{gathered}a_n^{'''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{'}(t)+\lambda_m^4 a_n(t)=\\ =\int\limits_0^l f\left(t,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j s)\cdot b_\nu(y)ds\right)b_n(y)dy.\end{gathered}\tag{1.8}$$

Система (1.8) решается методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{gathered}a_n(t)=C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t}+C_{2n}\cos\lambda_n t+C_{3n}\sin\lambda_n t+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^s\sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j\theta)\cdot b_\nu(y)d\theta\right)\times\\ \times b_n(y)G_n(t,s)dyds,\quad t\in D_T.\end{gathered}\tag{1.9}$$

Для определения коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,3})$ в (1.9) используются условия (1.2), т.е.

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\quad a_n^{'}(0)=\varphi_{2n},\quad a_n^{''}(0)=\varphi_{3n},$$

где $\varphi_{1n}=\int\limits_0^l\varphi_i(y)b_n(y)dy$, $i=\overline{1,3}$. Тогда из (1.9) следует ССНИУ (1.5).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\int\limits_0^t\left\|f\left(t,x,Q\psi(t),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)Q\psi(\beta_j s)ds\right)\right\|_{L_p(D_l)}dt\le\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\{F(t,x)_{|u,\vartheta}\}$, *где* $\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds<\infty;$

3. $\|\psi(t)\|_{B_p(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (1.5) *имеет единственное решение в пространстве* $B_p(T)$. *Кроме того, имеет место оценка*

$$\begin{gathered}\|a^{k+1}(t)-a^k(t)\|_{B_p(T)}\le\\ \le\frac{\delta_1}{k!}\left[\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k exp\left\{\delta_2\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right\},\end{gathered}\tag{1.10}$$

где δ_1 *и* δ_2 *– некоторые положительные постоянные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим итерационный процесс метода последовательных приближений

$$\begin{cases}a_n^0(t)=\psi_n(t),t\in D_T,\\ a_n^{k+1}(t)=\psi_n(t)+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Qa^k(s),\int\limits_0^s\sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^k(\beta_j\theta)d\theta\right)b_n(y)G_n(t,s)dyds,\\ k=0,1,2,3,\dots,t\in D_T.\end{cases}\tag{1.11}$$

Согласно условиям теоремы для первой разности из (1.11) следует

$$\|a^1(t)-a^0(t)\|_{B_p(T)} \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \int_0^t \int_0^l \left| f\left(s,y,Qa^0(s),\int_0^s \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^0(\beta_j\theta)d\theta\right)\right| \cdot |b_n(y)|\cdot |G_n(t,s)|dyds \le$$
$$\le M_1M_2 l^{\frac{1}{q}} \int_0^T \|f\|_{L_p(D_l)}dt \le M_1M_2 l^{\frac{1}{q}}\Delta, \tag{1.12}$$

где $M_1=\|b(x)\|_{B_q(l)}$, $M_2=\|G(t,s)\|_{B_p(T)}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Второе условие теоремы при учете (1.12) дает оценку для второй разности

$$\|a^2(t)-a^1(t)\|_{B_p(T)} \le M_1^2M_2 \int_0^t \int_0^l F(s,y)\left(\|a^1(s)-a^0(s)\|_{B_p(T)}+\right.$$
$$\left.+\int_0^s \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)\|a^1(\beta_j\theta)-a^0(\beta_j\theta)\|_{B_p(T)}d\theta\right)dyds \le$$
$$\le \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^2 M_1^3\Delta\gamma_0 \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds, \tag{1.13}$$

где $\gamma_0=1+\max\limits_{(t,s)}\int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(t,s)ds$.

Подобно (1.13) для любого натурального k справедлива оценка

$$\|a^{k+1}(t)-a^k(t)\|_{B_p(T)} \le$$
$$\le \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} \gamma_0^k M_1^{2k+1}\Delta \frac{\left[\int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k}{k!} \tag{1.14}$$

и далее, в силу (1.14)

$$\|a(t)-a^{k+1}(t)\|_{B_p(T)} \le$$
$$\le \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} \gamma_0^k M_1^{2k+1}\Delta \frac{\left[\int_0^t \|F(s,y)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k}{k!}+$$
$$+M_1^2M_2\gamma_0 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}\|a(s)-a^{k+1}(s)\|_{B_p(T)}ds. \tag{1.15}$$

Оценка (1.10) получается теперь применением к (1.15) неравенства Гронуолла-Беллмана. Существование решения ССНИУ (1.5) следует из оценки (1.14), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a(t)\in B_p(T)$. Предполагая, что ССНИУ (1.5) имеет два решения, для их разности $a(t)$ и $\vartheta(t)\in B_p(T)$ имеем оценку

$$\|a(t)-\vartheta(t)\|_{B_p(T)} \le M_1^2M_2\gamma_0 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}\|a(s)-\vartheta(s)\|_{B_p(T)}ds.$$

Из применения неравенства Гронуолла-Беллмана к последней оценке следует, что $\|a(t)-\vartheta(t)\|_{B_p(T)}=0$, т.е. единственность решения ССНИУ (1.5) в пространстве $B_p(T)$.

Подстановка решения ССНИУ (1.5) в ряд (1.4) дает формальное решение смешанной задачи (1.1)-(1.3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n(t)+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Qa(s),\int_0^s\sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^0(\beta_j\theta)d\theta\right)\times \\ \times b_n(y)G_n(t,s)dyds]\cdot b_n(y). \tag{1.16}$$

Т е о р е м а 1.2. *В условиях теоремы* (1.1.) *подстановка решения* $a(t)\in B_p(T)$ *ССНИУ* (1.5) *в* (1.16) *дает единственное обобщенное решение смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства следует установить, что $\lim_{k\to\infty}P_k=0$, где

$$P_k=\int_0^T\int_0^l\{u^k(t,y)[-\Phi_{ttt}-\Phi_{ttyy}-\Phi_{tyy}+\Phi_{yyyy}]- \\ -f\left(t,y,u^k(t,y),\int_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s,y)ds\right)\Phi(t,y)\Big\}dydt+ \\ +\int_0^l\varphi_1^k\left[\Phi_{tt}+\Phi_{tyy}+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_2^k\left[\Phi_t+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy+\int_0^l\varphi_3^k\left[\Phi\right]_{t=0}dy. \tag{1.17}$$

Учет начальных условий $a_n(0)=\varphi_{1n}$, $a_n^{'}(0)=\varphi_{2n}$, $a_n^{''}(0)=\varphi_{3n}$ и условий теоремы при интегрировании по частям отдельных слагаемых в (1.17) дает

$$P_k=\int_0^l\left(\varphi_1(y)-\sum_{n=1}^k\varphi_{1n}b_n(y)\right)\left[\Phi_{tt}+\Phi_{tyy}+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy- \\ -\int_0^l\left(\varphi_2(y)-\sum_{n=1}^k\varphi_{2n}b_n(y)\right)\left[\Phi_t+\Phi_{yy}\right]_{t=0}dy+\int_0^l\left(\varphi_3(y)-\sum_{n=1}^k\varphi_{3n}b_n(y)\right)\left[\Phi\right]_{t=0}dy+ \\ +\int_0^T\int_0^l\Phi(t,y)\sum_{n=1}^k\left\{\int_0^l f\left(t,y,u^k(t,y),\int_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s,y)ds\right)b_n(y)dy-\right. \\ \left.-f\left(t,z,u^k(t,z),\int_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s,z)ds\right)\right\}\cdot b_n(y)dydt. \tag{1.18}$$

Поскольку $\varphi_i(x)\in L_p(D_l)$, первые три интеграла в (1.18) стремятся к нулю при $k\to\infty$. Сходимость разности двух последних интегралов (1.18) при $k\to\infty$ следует из условия теоремы, т.е. $\lim_{k\to\infty}P_k=0$,что и требовалось.

Список литературы

1. Гордезиани Д. Г., Авалашвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделир.*, **12**:1 (2000), 94–103.

2. Дмитриев В. Б., “Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения”, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2006, № 2(42), 15–27.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

4. Пулькина Л. С., “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

5. Самарский А. А., “О некоторых проблемах теории диффренциальных уравнений”, *Дифференц. уравн.*, **16**:11 (1980), 1925–1935.

6. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988, 336 с.

7. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

On a mixed value problem for one nonlinear partial integro-differential equation of the fourth order.

© T.K. Yuldashev[2]

Abstract. In this article it is studied the solvability of one initial boundary value problem for a nonlinear partial integro-differential equation containing the superposition of parabolic and hyperbolic operators in the linear left-hand side of the equation. By the method of separation variables the countable system of nonlinear integral equation is obtained. The successive approximations method is used. Convergence of obtained series is proved.

Key Words: integro-differential equation of the fourth order, superposition of parabolic and hyperbolic operators, initial boundary value problem, separation variables, successive approximations methods.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru.

Краткие сообщения

УДК УДК 517.929

Орбитальная устойчивость равновесного решения

© **А.В. Зубов[1], О.С. Стрекопытова[2], С.А. Стрекопытов[3]**

Аннотация. В настоящей статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящие движения.

Ключевые слова: собственное число, элементарный делитель, переменная, устойчивость, функция, степень.

При изучении динамики управляемых систем важнейшим вопросом является характер предельного поведения решений. Существование предельного режима в виде инвариантного множества является основой для построения управляемых систем, обладающих целевым множеством фазовых состояний. Обеспечение существования ограниченного предельного режима является основной задачей конструирования инженерных систем. В приложениях также требуется обеспечение выполнения ограничений на геометрические размеры предельного режима. Другим важнейшим аспектом является рассмотрение широкого класса уравнений динамики с достаточно простой структурой, так как именно структура уравнений определяет возможность их инженерной реализации [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0, \mu$ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$.

Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (1.1) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt,$$

представляющее плоскость в $(N + 1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функцтй F, h следующее:

1) функции $f_1, \ldots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_N$ равномерно сходящимся относительно z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$;

[1] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

3) имеет место оценка $|h| < k_0|z|^b(\sum_{j=1}^{N}|x_j|)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Рассмотрим случай нескольких нулевых корней. Система вида (1.1) с матрицей P размерности $N \times N$, $N = k + n$, у которой собственные числа таковы, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0, \quad Re\lambda_{k+i} < 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

и нулевым корням отвечают простые элементарные делители, может быть приведена к виду

$$\begin{gathered} \dot{x}_s = \mu X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \dot{y}_i = \sum p_{ji}y_i + \mu Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \dot{z} = r + \mu h(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ s = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь X_s, Y_j - голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z$, разложения которых при достаточно малых $|x_s|, |y_j|$ не содержат членов, линейных относительно величин $x_1, y_1, \ldots, y_n$; $(n \times n)$ - матрица $\{p_{ij}\}$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями; μ - малый параметр.

Пусть при $x_1 = \ldots = x_k = y_1 = \ldots = y_n = 0$ функции X_s, Y_j, h обращаются в нуль. Тогда система (1.3) будет иметь семейство равновесных решений $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_n = 0$, $z = z + rt$, представляющее собой прямую в $(k+n+1)$ - мерном пространстве. Задача состоит в изучении свойств этих решений.

Посмотрим, как ведут себя переменные x_s, y_j в качестве функции z.

Разделим первые $n + k$ уравнений системы (1.3) на последнее уравнение:

$$\begin{gathered} \frac{dx_s}{dz} = \mu\bar{X}_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}y_i + \mu\bar{\bar{V}}_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Собственные числа матрицы $\{\bar{p}_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части относительно функций $\bar{X}_s, \bar{Y}_j$ мы будем предполагать, что они разлагаются в сходящиеся при достаточно малых $|x_s|$, $|y_j|$ ряды по целым положительным степеням x_s, y_j. Причем эти ряды сходятся равномерно по z.

С помощью замены, не нарушающей [2] устойчивости,

$$y_j = u_j + \eta_j,$$

где u_j - решение системы уравнений, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ji}u_i + \mu\bar{V}_j(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, z) = 0.$$

Систему (1.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered} \frac{dX_s}{dz} = \mu\bar{X}_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z) = 0, \\ \frac{d\eta_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\eta_i + \mu V(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta, \ldots, z) \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$V_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}u + \mu\bar{\bar{V}}_j(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, z) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\bar{X}_i(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, u_n + \eta_n, z).$$

Ясно, что при достаточно малых η_j функции V_j обладают свойствами функций $\bar{X}_s$, $\bar{Y}_s$.

Если $\bar{X}_s(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,z)\equiv 0$, то у системы (1.4) имеется k не зависящих от z голоморфных интегралов

$$c_s = x_s+\varphi_s(x_1,\dots,x_k,y_1-\eta_1,\dots,y_n-\eta_n),\quad s=1,\dots,k.$$

С помощью замены $x_s=c_s+f_s$, где f_s - решения системы

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial\eta_j}(\sum_{i=1}^{n}(p_{ji}+c_{ji})\eta_i+\mu V_j')=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{si}\eta_i+\mu u_s(f_1,\dots,f_k,\eta_1,\dots,\eta_n,c_1,\dots,c_k),$$

в которую переходит система в частных производных [3]

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial\eta_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial z}=\mu\bar{X}_s,\quad s=1,\dots,k,$$

где c_{ij},γ_{si} - голоморфные по $c_1,\dots,c_k$ функции, а c_s - достаточно малые произвольные постоянные, получим из второй группы уравнений (1.5)

$$\frac{d\eta_j}{dz}=\sum(p_{ji}+c_{ji})\eta_i+V_j'(c_1,\dots,c_k,\eta_1,\dots,\eta_n). \tag{1.6}$$

Нулевое решение (1.6) асимптотически устойчиво по отношению к величинам $c_1,\dots,c_k$. Так как функции f_s таковы, что

$$f_s\equiv 0\quad\text{при}\quad \eta_1=0,\dots,\eta_n=0,$$

$$f_s\equiv 0\quad\text{при}\quad c_1=0,\dots,c_k=0,$$

имеем

$$\eta_j(t,\eta_1^0,\dots,\eta_n^0)\to 0\,\text{при}\,t\to\infty.$$

Следовательно, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Если* $X_s(x_1,\dots,x_k,u_1,\dots,u_n,z)\equiv 0$*, то нулевое решение системы* (1.6) *устойчиво по Ляпунову относительно переменной* z*. При этом любое решение этой системы*

$$x_s=c_s,\quad y_j=u_j(c_1,\dots,c_k),\quad s=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n,$$

условно асимптотически устойчиво.

Вернемся теперь к последнему уравнению системы (1.4)

$$\dot{Z}=Z+\mu h.$$

По сделанному выше предположению справелива оценка

$$h\le k_0(\sum_{s=1}^{k}|X_s^0|+\sum_{j=1}^{n}|Y_j^0|)^a z^b,$$

где $k_0 > 0$.

При каких же условиях $z \to \infty$ при $t \to \infty$? Возможны случаи $b \leq 0$ и $b > 0$. При $b \leq 0$ можно сделать $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \to \infty$ при $t \to \infty$. При $b > 0$ можно показать [4], что для любого конечного $\bar{z}$ найдется μ_0 такое, что для μ, не превосходящего по модулю μ_0 для любого $\varepsilon > 0$, любое движение, начинающееся в области $|x_s^0| < \delta$, $|y_j^0| < \delta$, будет оставаться в области $|x_s| < \varepsilon$, $|y_j| < \varepsilon$ при возрастании z от 0 до $\bar{z}$. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Если при сделанной замене переменных функции $\bar{X}_s \equiv 0$, функции $\bar{Y}_j$ разлагаются в равномерно сходящиеся по z ряды относительно величин x_s, y_j, начиная со степеней этих величин не ниже второй, то при $b \leq 0$ равновесное решение системы* (1.4) *орбитально устойчиво.*

Теорема 1.3. *Если выполнены условия теоремы 1.2., но $b > 0$, то для любого конечного $\bar{z}$ за счет выбора x_s^0, y_j^0, μ величины $|x_s|$, $|y_j|$ будут оставаться малыми при возрастании от 0 до $\bar{z}$.*

2. Выводы

Результаты, полученные в настоящем параграфе, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \to \infty$ при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. М. В. Стрекопытова, *Принципы управления движением заряженных частиц*, СПбГУ, СПб, 2003, 86 с.

2. А. В. Зубов, *Стабилизация и управление в динамических системах.*, СПбГУ, СПб, 2007, 132 с.

3. Л. Д. Блистанова, И. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

4. В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, *Робастная устойчивость по части координат*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 234 с.

The orbital stability of equally measure solution

© **A.V. Zubov**[4], **O.S. Strecopitova**[5], **S.A. Strecopitov**[6]

Abstract. In giving article is learning theoretical bases of investigation motions systems, is not have limiting points. Is opening new region - going motions.

Key Words: own number, elementary divider, variable, stability, function, degree.

[4] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК УДК 517.929

Анализ систем с неограниченными решениями

© И.В. Зубов[1], С.В. Зубов[2]

Аннотация. В данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящие движения. Изучаются неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного.

Ключевые слова: равновесное решение, координата, матрица, асимптотическая устойчивость, положение равновесия.

При решении обратной задачи динамики, характерной для задач управления, заключающейся в том, чтобы по заданным или желаемым кинематическим характеристикам движения построить систему дифференциальных уравнений динамики, методы А.М. Ляпунова имеют уже более практическое применение, так как при построении уравнений динамики учитывается требование устойчивости желаемых кинематических характеристик и уравнения возмущенного движения строятся легко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X). \tag{1.1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)^*$ - вектор фазовых переменных, P, Q - постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $F = (f_1, \ldots, f_n)^*$ - векторная функция, μ - малый параметр.

Равновесным решение (движением) мы будем называть такое решение (движение)

$$X(t, X_0) = (x_1(t, X_0), \ldots, x_n(t, X_0))^*$$

в n-мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \to \infty$, а остальные постоянны, например,

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0,\ j = 1, \ldots, n-1;\ x_n \to \infty\ \text{при}\ t \to \infty.$$

Поставим вопрос о существовании равновесного решения системы (1.1) и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения.

Пусть выполнены условия: собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы P таковы, что $\lambda_n = 0$, $Re\lambda_j < 0$ для $j = 1, \ldots, n-1$, $F(\bar{X})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица [1].

Сделаем замену $X = SY$, где S - вырожденная матрица размерности $n \times n$, и подставим это выражение в (1.1):

$$\dot{Y} = S^{-1}PSY + S^{-1}Q + \mu S^{-1}F(SY). \tag{1.2}$$

[1] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Отметим, что $x_i = (S_i^*, Y)$, где $S_i - i-$ я строка матрицы S. Матрица S выбирается так, чтобы матрица $A = S^{-1}PS$ имела последнюю строку и последний столбец нулевыми. Существование такой матрицы очевидно. Например, в качестве S можно взять хотя бы матрицу, составленную из корневых векторов матрицы P; в этом случае матрица A будет жордановой.

Перепишем систему (1.2) в виде

$$\dot{Y} = AY + R + \mu\Phi(Y), \tag{1.3}$$

где $R = S^{-1}Q = (y_1, \ldots, y_n)^*$,

$$\Phi(Y) = S^{-1}F(SY) = (\varphi_1(Y), \ldots, \varphi_n(Y))^*.$$

Разделим систему (1.3) на две группы уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n-1}y_{n-1} + r_1 + \mu\varphi_1(Y),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{y}_{n-1} = a_{n-1\,1}y_1 + a_{n-1\,2}y_2 + \ldots + a_{n-1\,n}y_{n-1} + r_{n-1} + \mu\varphi_{n-1}(Y),$$

$$\dot{y}_n = r_n + \mu\varphi_n(Y). \tag{1.4}$$

При $\mu = 0$ у системы (1.4) существует положение равновесия $Y_0 = (Y_1^0, \ldots, Y_{n-1}^0)$ в силу того, что матрица $\{a_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, n-1)$ невырожденная. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции у системы (1.4) есть положение равновесия $Y(\mu)$ и при любом μ, которое по модулю должно быть меньше некоторого положительного μ_0. Это прямо следует из теоремы о существовании неявной функции, если учесть, что якобиан совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Отметим, что если правые части $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ не будут зависеть от y_n, то положение равновесия системы (1.4) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову и y_n будет меняться по линейному закону

$$y_n = y_{n_0} + (r + \mu\varphi_n(Y_\mu))t.$$

Следовательно, равновесное решение системы (1.3) будет устойчиво по Ляпунову.

Посмотрим, какие ограничения на систему (1.1) наложит условие независимости Φ от y_n, т.е.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_n} = (\nabla\varphi_i, S_n),$$

где $S_n - n$ - й столбец матрицы S, то (1.5) эквивалентно уравнению

$$(\nabla\varphi_i, S_n) = 0. \tag{1.6}$$

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P, т.е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P, и так как

$$\nabla\varphi_i = \sum \sigma_{ij}\nabla f_i,$$

где σ_{ij} - элементы матрицы S^{-1}, то выполнено (1.6), а следовательно, будет справедливо и соотношение (1.5), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P [2].

Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ - расстояние от точки M до траектории $X(t)$: $\rho(M, X(t)) = \min\limits_{\tau \geq t_0} \|M - X(\tau)\|$.

Определение 1.1. *Равновесное решение $X(t)$ называется орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться* [3]

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \quad \textit{при} \quad t \geq 0 (\rho(X(t, X_0), X(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть для системы* (1.1) *собственные числа матрицы P таковы, что $Re\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\lambda_n = 0$, векторы ∇f_j $(j = 1, \ldots, n)$ существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P. Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для любого μ, по модулю превосходящего μ_0, существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы* (1.1), *устойчивое по Ляпунову.*

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

в которую переходит система вида (1.1), если матрица P имеет хотя бы одно нулевое собственное число. Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$.

Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (1.7) существует семейство неограниченных равновесных решений [1.3]

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt, \tag{1.8}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ [4]. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать, относительно функций F, h следующее:

1) функции $f_1, \ldots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_N$, равномерно сходящимся относительно z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$;

3) имеет место оценка $|h| \leq k_0 |z|^b (\sum_{j=1}^N |x_j|)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Выводы

Таким образом в данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходяшие движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем*, Изд-во «ВВМ», СПб, 2009, 343 с.
2. М. В. Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.
3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 319 с.
4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, С. А. Стрекопытов, *Теория устойчивости и теория квазипериодических систем*, АООТ «Мобильность-рлюс», СПб, 2010, 206 с.

The analysis of systems with no limits solutions

© **I.V. Zubov**[3], **S.V. Zubov**[4]

Abstract. In giving article is learns theoretical bases of investigation motions systems, is not have limiting points. Is opens new region of investigation - going motions. Is learns no limiting solutions of systems ordinary differential equations. Is supposes conditions of stability no limiting solutions and estimates on velocity approaches of trajectories indignant motion to trajectory no indignant.

Key Words: equally measure solution, coordinate, matrix, asymptotical stability, position of equally weight.

[3] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[4] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК УДК 517.929

Задача о существовании равновесного решения системы

© С.В. Зубов[1], М.В. Стрекопытова[2]

Аннотация. В данной статье решается вопрос о существовании равновесного решения системы дифференциальных уравнений и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения.

Ключевые слова: линейное преобразование, ряд, степень, нулевое решение, коэффициент, переменная, устойчивость, функция.

Задача пронозирования поведения моделируемых систем в количественном плане сводится к численному интегрированию уравнений динамики. В качественном плане - к аналитическому исследованию системы для установления структурных особенностей моделируемой системы - наличия инвариантных множеств, характера предельного поведения решений [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X,z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X,z). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X,z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$.

Если $F(0,z) \equiv 0$, $h(0,z) \equiv 0$, то у системы (1.1) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt, \tag{1.2}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функций F, h следующее:

1) функции $f_1, \ldots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$;

3) имеет место оценка $|h| < k_0|z|^b(\sum_{i=1}^N x_j)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Рассмотрим следующий случай. Случай нескольких пар чисто мнимых корней [2].

Система (1.1) линейным преобразованием приводится к виду

$$\begin{gathered} \dot{x}_s = -\lambda_s y_s + \mu F_s, \quad \dot{y}_s = \lambda_s x_s + \mu G_s, \\ \dot{\xi}_j = \sum_{i=1}^n p_{ji}\xi_i + \mu g_i, \quad \dot{z} = r + \mu h, \\ s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь N - мерный $(2k + n = N)$ вектор X перешел в вектор $(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Собственные числа матрицы $\{p_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части.

[1] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

[2] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

А.М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации отмечал, что, если вместо времени взять какую-либо непрерывную частную функцию, вместе со временем возрастающую, то последняя при решении вопроса об устойчивости может играть такую же роль, как и время [3].

Исследуем, как ведут себя переменные x_k, y_k, ξ_j в качестве функции z. Разделим первые $2k+n$ уравнений системы (1.3) на последнее уравнение:

$$\begin{gathered} \tfrac{dx_s}{dz} = -\bar{\lambda}_s y_s + \mu \bar{F}_s, \quad \tfrac{dy_s}{dz} = \bar{\lambda}_s x_s + \mu \bar{G}_s, \\ \tfrac{d\xi_j}{dz} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\xi_i + \mu \bar{g}_j. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\bar{\lambda}_s > 0$. Собственные числа матрицы $\{p_{ji}\}$ имеют отрипцательные вещественные части, и у системы (1.4) имеется нулевое решение. Функции $\bar{F}_s$, $\bar{G}_s$, $\bar{g}_j$ удовлетворяют следующим условиям:

1) они разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин x_k, y_k, ξ_j равномерно сходящиеся относительно z при долстаточно малых $|x_k|$, $|y_k|$, $|\xi_j|$;

2) разложения функций $\bar{F}_s$, $\bar{G}_s$, $\bar{g}_s$ не содержат членов, линейных относительно x_k, y_k, ξ_j.

Если мы имеем дело с общим по классификации А.М. Ляпунова случаем, то с помощью преобразований Ляпунова

$$x_s = r_s \cos\theta_s, \quad y_s = r_s \sin\theta_s,$$

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^{m} r_s^i(\theta_1, \ldots, \theta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k, z),$$

а затем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} r_s^{(i)}(\theta_1, \ldots, \theta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k, z) + \eta_i,$$

не нарушающих вопроса об устойчивости, где $r_j^{(i)}$, $\xi_j^{(i)}$ - однородные формы относительно $\rho_1, \ldots, \rho_k$ степени l с периодическими коэффициентами относительно $\theta_1, \ldots, \theta_k, m$ - положительное целое число, система (1.4) в общем случае приводима к виду

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R_s, \ \frac{d\theta_s}{dz} = \bar{\lambda}_s + \mu\theta_s, \ \frac{d\eta_j}{dz} = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}\eta_i + \mu p_j. \tag{1.5}$$

Напомним, что m определяется как наинизшая степень форм относительно $\rho_1, \ldots, \rho_k$, обладающих периодическими по $\theta_1, \ldots, \theta_k$ коэффициентами, вычисляемыми подстановкой в систему (1.4) выражений

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^{m} r_s^{(i)}(\theta_1, \ldots, \theta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k, z)$$

и приравниванием членов одного порядка в получившихся выражениях [4].

Разложение функций R_s в ряды по степеням $\rho_1, \ldots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$ начинается с форм степени m, которые обладают не зависящими от $theta_s$ коэффициентами. Разложение функций p_j по степеням $\rho_1, \ldots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$ начинаются с форм степени $\nu \geq m+1$. Ряды, в которые разлагаются функции R_s, θ_s, p_j, сходятся равномерно относительно z.

Обозначим $R^{(0)}$ форму порядка m, с которой начинается разложение функции R_s при $\eta_1 = 0$, $\ldots$, $\eta_n = 0$.

Т е о р е м а 1.1. *Если нулевое решение системы*

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{1.6}$$

асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (1.4) *также асимптотически устойчиво. При этом имеют место оценки при* $z \geq 0$

$$|\rho_s| \leq \psi(z), \quad |\eta_j| \leq \psi(z),$$

где

$$\psi(z) = c_1(\sum_{s=1}^{k}(\rho_s^{(0)} + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s^{(0)}| + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|)^{m-1}z)^{-1/m-1}).$$

Здесь c_1, c_2 *- положительные постоянные,* $\rho_s^{(0)}$ *,* $\eta_j^{(0)}$ *- значения* ρ_s, η_j *,* $z = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.6) существуют положительно определенные функции V и W, обладающие свойствами:

1) функция V имеет порядок $l + 1 - m$, функция W имеет порядок l;

2) $\frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} - R_s^{(0)} = -W$.

Построим положительно определенную квадратичную форму, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ji}\eta_i = -\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2.$$

Рассмотрим полную производную функции $U = V + V_1$ в силу системы (1.6):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dz} + \frac{dV_1}{dz} = -W - \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} \times (R_s - R_s^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} p_j.$$

В малой окрестности начала координат справедливы оценки

$$|\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s}(R_s - R_s^{(0)})| \leq a[\sum_{s=1}^{k}|\rho_s|]^{i+1}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial n_j} p_j| \leq a[\sum_{s=1}^{k}|p_s|]^{m+1} \sum_{s=1}^{k}|\eta_j| + b\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^2 \sum_{s=1}^{k}|\rho_s|,$$

где $a > 0, b > 0$.

Функция U является положительно определенной, а её производная dU/dt, вычисленная в силу системы (1.6), является отрицательно определенной функцией при $l = m + 1$. Следовательно, решение

$$\rho_1 = \ldots = \rho_k = 0, \quad \eta_1 = \ldots = \eta_m = 0,$$

$$\theta_1 = \lambda_1 z, \, \theta_2 = \lambda_2 z, \ldots, \theta_k = \lambda_k z$$

системы (1.6) асимптотически устойчиво при $l = m + 1$, и U удовлетворяет неравенствам

$$a_1(\sum_{j=1}^{k}|\rho_s|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^2)\le U\le a^2(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta+j|^2), \qquad (1.8)$$

где $a_1>0$, $a_2>0$.

В малой окрестности начала координат справедливы неравенства

$$-b_1U\le\frac{dU}{dz}\le -b_2U^{(m+1)/2}, \qquad (1.9)$$

где $b_1>0$, $b_2>0$.

Отсюда следует

$$U\le U_0(1+\frac{m-1}{2}b_2U_0^{(m-1)/2}z)^{-2/(m-1)}. \qquad (1.10)$$

Из (1.8), (1.9) следует

$$U\le a_2(\sum_{j=1}^{k}|\rho_s^{(0)}|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|^2)\times$$

$$\times(1+\frac{m+1}{2}b_2a_1\times(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s^{(0)}|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|^2)^{(m-1)/2}z)^{-2/(m-1)}.$$

Отсюда и из неравенства (1.10) и следуют доказываемые оценки (1.7).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. *Из теоремы и определения величин ρ_s, η_j следует, что при $z\ge 0$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}|x_s|\le\bar\psi(z),\ |y_s|\le\bar\psi(z),\\ |\xi_j|\le\bar\psi(z),\ s=1,\dots,k,\ j=1,\dots,k,\end{gathered} \qquad (1.11)$$

где

$$\bar\psi(z)=c_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)\times$$

$$\times(1+c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x+s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)^{m-1}z)^{-1/(m-1)};$$

параметры c_1,c_2 в функции $\bar\psi(z)$ будут зависеть от коэффициентов в разложениях r_s, $\bar\xi_j$. Получив оценки для $|x_s|$, $|y_s|$, $|\xi_j|$, вернемся к уравнению $\dot z=r+\mu h$. Оценим величину h:

$$h\le k_0z^bc_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)\times$$

$$\times(1+c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{0}|)^{m-1}z)^{-\alpha/(m-1)}.$$

Исследуем, при каких условиях $z\to\infty$ при $t\to\infty$. Возможны три случая:

1) $D = b - a/(m-1) = 0$ *;*
2) $D < 0$ *;*
3) $D > 0$.

В первых двух случаях за счет выбора $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$, $\xi_j^{(0)}$, μ *можно сделать* $|\mu h| < r/2$. *Тогда* $z \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *В третьем случае можно показать, что для любого конечного* $\bar{z}$ *найдется такое* μ_0 , *что при* $|\mu| \leq \mu_0$ *на любом движении, начинающемся в области* $|x_s^{(0)}| < \delta$, $|y_s^{(0)}| < \delta$, $|\xi_j^{(0)}| < \delta$, *будут сохраняться неравенства* (1.11), *а* z *будет постоянно возрастать от 0 до* $\bar{z}$ *при возрастании времени.*

2. Выводы

Результаты, полученные в настоящем работе, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \to \infty$ при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Автоматизация проектирования устойчивости и надежности колебательных систем*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 355 с.

2. С. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб, 2010, 446 с.

3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, О. В. Мутлу, М. В. Стрекопытова, *Расчет устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с приложениями*, СПбГУ, СПб, 1999, 184 с.

4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 319 с.

The task about existing equally measure solution of system

© **S.V. Zubov**[3], **M.V. Strecopitova**[4]

Abstract. In giving article is solves the question about existing equally weight solution of system differential equations and about behavior solutions this system equations, is beginning in same region equally weight solution.

Key Words: linear transformation, row, degree, zero solution, variable, stability, function.

[3] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[4] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК УДК 517.929

Устойчивость неограниченных решений по первому приближению

© **А.Ф. Зубова**[1], **В.И. Зубов**[2], **И.В. Зубов**[3], **С.В. Зубов**[4], **М.В. Стрекопытова**[5]

Аннотация. В настоящей статье изучаются свойства инвариантных множеств динамических периодических систем, определяющих уходящие движения.

Ключевые слова: система, семейство, теорема, интеграл, собственное число, оценка, предел.

Изучим неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и получим условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + F(X, Z), \\ \dot{Z} &= R + G(X, Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$X = (x_1, \ldots, x_n)^*,\ Z = (z_1, \ldots, z_k)^*,\ R = (r_1, \ldots, r_k)^*,$$

$$F(0, z) = 0, \quad G(0, Z) = 0.$$

Пусть для достаточно малых величин $\delta > 0$ при $\|X\| < \delta$ имеют место оценки

$$\forall Z \in E_k \quad \|F(X, Z)\| \leq c_1 \|X\|^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0,\ c_1 > 0).$$

Здесь $\|X\| = \sqrt{X^* X}$. Пусть $r_i > 0$. Пусть также $\|G\| \leq c_2 \|X\|^a \|Z\|^b$ $(a, b, c_2 > 0)$.

Тогда система (1.1) имеет семейство равновесных движений

$$X = 0, \quad Z = Rt + Z_0. \tag{1.2}$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX, \quad \dot{Z} = R, \tag{1.3}$$

которую назовем *системой первого приближения.* Система (1.3) имеет семество решений (1.2). Поведение системы (1.3) по отношению к устойчивости семейства (1.2) определяется свойствами собственных чисел матрицы A. Естественно ожидать, что требование к собственным числам матрицы A, обеспечивающие устойчивость или неустойчивость

[1] Д.т.н., профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[5] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

семейства (1.2) системы (1.3), обеспечивают устойчивость или неустойчивость семейства равновесных решений (1.2) системы (1.1). Покажем это.

Пусть $Re\lambda_j < 0$, где $\lambda_j \quad (j = 1, \dots, n)$ - собственные числа матрицы A. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $V(X)$, удовлетворяющая уравнению

$$(\nabla V(X), AX) = W(X), \tag{1.4}$$

где $W(X)$ - отрицательно определенная квадратичная форма [1].

Пусть a_1, a_2 - соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы квадратичной формы $V(X), b_1, b_2$ - аналогичные значения для $W(X)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{array}{c} a_1\|X\|^2 \le V(X) \le a_2\|X\|^2, \\ b_1\|X\|^2 \le W(X) \le b_2\|X\|^2, \\ b_1 \le b_2 \le 0 \le a_1 \le a_2. \end{array} \tag{1.5}$$

Отметим, что при малых $\|X\|$ справедливы оценки $\forall Z \in E_k$

$$(b_1 - \mu)\|X\|^2 W(X) + (\nabla V(X), F(X, Z)) = (b_2 + \mu)\|X\|^2, \tag{1.6}$$

где μ - малое положительное число [2].

Продифференцируем $V(X)$ в силу системы (1.1). Имеем

$$\frac{dV}{dt}|_{(2)} = W + (\nabla V(X), F(X, Z)). \tag{1.7}$$

Разделим обе части этого выражения на V и проинтегрируем в пределах от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{V} = \int_{t_0}^{t} (W + (\nabla V, F(X, Z)))V^{-1} d\tau.$$

Отсюда

$$V = V_0 \exp(\int_{0}^{t} (W + (\nabla V, F(X, Z))))V^{-1} d\tau.$$

Если заменить числитель и знаменатель дроби под интегралом на большее соответственно меньшее значения из (1.5), (1.6), то получим неравенство [3]

$$V \le V_0 \exp(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)).$$

Таким образом,

$$a_1\|X\|^2 \le a_2\|X_0\|^2 \exp(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)).$$

Очевидно, что $\|X\| \to 0$ при $t \to 0$ (так как $b_2 > 0$).

Подставив оценку для $\|X\|$ в оценку $\|G\|$, получим

$$\|G(X, Z)\| \le c_2\|X_0\|^a \exp(\frac{a}{2a_1}(b_2 + \mu)(t - t_0))\|Z\|^b, \tag{1.8}$$

где $c_2 > 0$. Отсюда видно, что за счет выбора X_0 мы всегда обеспечим неравенства

$$|g_i(X, Z)| < \frac{r_i}{2}.$$

Тогда

$$z_i \le \frac{3}{2} r_i (t - t_0) + z_i^0,$$

и выражение (1.8) будет справедливо при $t \ge 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть для системы* (1.1) *собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части,* $F(0, Z) = 0$, $G(0, Z) = 0$, *компоненты вектора* R *положительны,* $\forall Z \in E_k$ *справедливы оценки:*

1) $\|F(X, Z)\| \le c_1 \|X\|^{1+\alpha}$ *при малых* $\|X\|$, *где* $c_1, \alpha > 0$;

2) $\|G\| \le c_2 \|X\|^a \|Z\|^b$ $(a, b, c_2 > 0)$.

Тогда равновесное решение (1.2) *системы* (1.1) *орбитально асимптотически устойчиво* [4].

2. Выводы

Одной из целей настоящей статьи является изучение уходящих движений динамических систем. В основаном это системы, определяемые системами дифференциальных уравнений. Отметим, что далеко не каждая система дифференциальных уравнений определяет динамическую систему. При выполнении условий теоремы существования и единственности одним из основных вопросов, возникающих здесь, является вопрос о продолжаемости решений на бесконечном интервале. Можно рассматривать системы дифференциальных уравнений, которые формально не определяют динамической системы, но имеют продолжаемые решения, которые и можно изучать как уходящие движения некоторой динамической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. В. И. Зубов, “Каноническая структура векторного силового поля”, *Проблемы механики твердого деформируемого тела*, Судостроение, Л., 1970, 167-170.

2. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.

3. А. В. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Мобильность плюс, СПб., 2010, 319 с.

4. А. В. Зубов, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

The stability of no limits solutions on first approximation

© A.F. Zubova[6], V.I. Zubov[7], I.V. Zubov[8] S.V. Zubov[9]; M.V. Strecopitova[10]

Abstract. In giving article is learning measures invariant multitudes of dynamical periodical systems, is define going motions.

Key Words: system, family, theorem, integral, own number, estimate, limit.

[6] D.t.n., professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[9] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[10] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

\input{voskresensky.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

\sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул $\textrm{Г}_i$, $\textit{Д}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

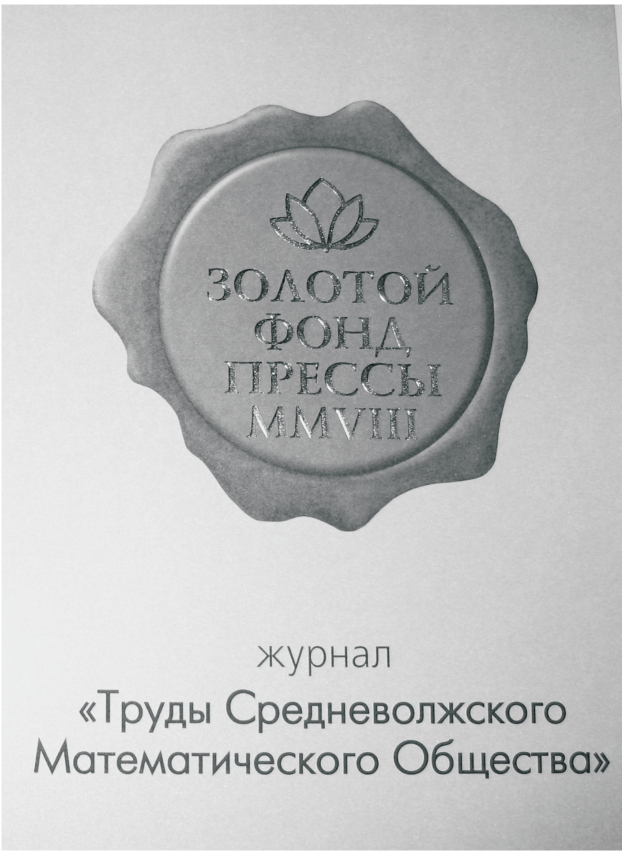
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTEX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.