

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 13, № 4



2011

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 13, № 4

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

В. Ф. Тишкун (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2011

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 13, № 4

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издаётся в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

Редакционная страница	6
-----------------------------	---

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко

О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с двумерным неблуждающим множеством.	7
1. Введение и формулировка результатов	7
2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов из класса G	9

П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова

О некоторых классах решений уравнений газовой динамики	14
1. Общая схема построения решений типа «бегущая волна ранга r »	14
2. Решения типа «простая волна» уравнений газовой динамики	17
3. Решения простой волны для приближенных уравнений в газовой динамике .	18
4. Построение решений двойной волны уравнений газовой динамики	22

Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко

Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина	25
1. Введение	25
2. Постановка задачи и модель расчета	26
3. Алгоритм и структура программы	28
4. Результаты расчета магнитного поля и петли гистерезиса намагниченности .	29
5. Заключение	32

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

В. А. Атряхин, П. А. Шаманаев

Построение математической модели динамики потока претендентов на поступление в аспирантуру с использованием системы дифференциальных уравнений с запаздыванием	35
1. Введение	35
2. Постановка задачи	36
3. Переход от системы дифференциальных уравнений к вычислительной схеме	37
4. Алгоритм проведения вычислений	38

М. Б. Беляева

Решение экстремальных задач с помощью генетических алгоритмов	40
1. Введение	40
2. Возможности генетических алгоритмов для решения задач оптимизации .	40

3. Постановка задачи	42
4. Реализация алгоритма	43

Е. С. Дюба

Нелинейная управляемая математическая модель экономической системы: генеральная компания - совместное предприятие	46
--	----

1. Введение	46
2. Постановка задачи	47
3. Определение условий, доставляющих максимальную прибыль генеральной компании	47
4. Пример	49

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, В. С. Медведев

О бифуркациях в моделях гиперболического шума	51
---	----

1. Введение	51
2. Предварительные сведения	52
2.1. Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса	52
2.2. Свойства диффеоморфизмов Смейла-Виеториса	53
2.3. Эндоморфизм окружности с канторовым неблуждающим множеством	55
3. Хирургия Смейла	56

Л. Ф. Нурисламова

Математическое моделирование осложнений при бурении скважин	61
---	----

1. Введение	61
2. Постановка задачи	61
3. Вероятностный прогноз поглощений бурового раствора	63
4. Результаты вычислительного эксперимента и основные выводы	64

Г. Ф. Сафина

Сохранение частот колебаний трубопровода при изменении па- метров жидкости	66
---	----

1. Введение	66
2. Влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода	67
3. Задача сохранения заданных частот колебаний	74
4. Заключение	76

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**А. В. Зубов, О. А. Зубова**

Преимущества метода понижения порядка перед другими анало- гичными методами	78
--	----

1. Введение	78
2. Аналог алгоритма Рауса	78

А. Ф. Зубова, М. В. Стрекопытова

Новый метод построения минимального многочлена	80
--	----

1. Введение	80
2. Исследование устойчивости матрицы системы первого приближения	80

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

С. И. Спивак, А. В. Балаев, Д. З. Галин

Численные эксперименты по определению возможности протекания химической реакции	83
---	----

С. И. Спивак, И. Р. Салахов, О. Г. Кантор

О программе, корректирующей систему уравнений	87
---	----

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владилен Александрович Треногин	94
---	----

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	98
---	----

Алфавитный указатель	100
--------------------------------	-----

ОТ РЕДАКЦИИ

Четвёртый номер 13-го тома содержит работы, в основном, участников объединённого семинара Средневолжского математического общества и кафедры прикладной математики Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва. Результаты, содержащиеся в этих работах, развиваются теоретические положения и содержат решения задач, обсуждавшихся на Пятой международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, которая проводилась в Саранске на базе Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва с 1 по 13 июля 2011 года при поддержке РФФИ, грант №10-01-06048-г.

Редакция журнала желает авторам творческих успехов!

УДК 517.9

О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с двумерным неблуждающим множеством.

© В. З. Гринес¹, Ю. А. Левченко²

Аннотация. Рассматривается класс структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит из поверхностных двумерных базисных множеств. При некоторых предположениях на поведение двумерных инвариантных многообразий точек базисных множеств, найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: структурная устойчивость, базисные множества, топологическая классификация

1. Введение и формулировка результатов

В работе рассматриваются структурно устойчивые диффеоморфизмы f , заданные на замкнутых ориентируемых связных 3-многообразиях M^3 . В силу [8], [9], [6], необходимым и достаточным условием структурной устойчивости диффеоморфизма f является выполнение аксиомы A и строгого условия трансверсальности. Напомним, что, согласно С. Смейлу [10], под выполнением аксиомы A для f понимается выполнение следующих условий: 1) множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим; 2) периодические точки плотны в $NW(f)$. Строгое условие трансверсальности предполагает наличие только трансверсальных пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий неблуждающих точек.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [10], неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Пару (a, b) называют *типовом* базисного множества \mathcal{B} диффеоморфизма f , если $a = \dim E_x^s$, $b = \dim E_x^u$, где E_x^s , E_x^u — касательные подрасслоения в точке $x \in \mathcal{B}$.

Базисное множество \mathcal{B} диффеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества \mathcal{B} такая, что $f(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$.

Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f . Аттрактор \mathcal{B} диффеоморфизма f называется *растягивающимся*, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E_{\mathcal{B}}^u)$ неустойчивого подрасслоения $E_{\mathcal{B}}^u$. *Сжимающийся репеллер* диффеоморфизма f является растягивающимся аттрактором для f^{-1} .

Согласно работе [7] имеют место следующие факты:

- Базисное множество \mathcal{B} диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^u(x)$ ($\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$);

¹Заведующий кафедрой высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Старший преподаватель кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com.

- Если базисное множество \mathcal{B} диффеоморфизма f имеет топологическую размерность два, то оно является либо аттрактором либо репеллером;
- Растигивающийся аттрактор коразмерности 1 диффеоморфизма f локально гомеоморфен прямому произведению двумерного евклидова пространства и канторова множества, аналогичную структуру имеет сжимающийся репеллер коразмерности 1.

Базисное множество \mathcal{B} диффеоморфизма f называется *поверхностным*, если оно принадлежит f -инвариантной замкнутой поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$, топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой *носителем* множества \mathcal{B} .

Из работы [1] следует, что любой двумерный аттрактор (репеллер) диффеоморфизма f является либо растигивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером).

В работе [3] получена топологическая классификация диффеоморфизмов f в предположении, что их неблуждающее множество содержит двумерный растигивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Там же доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В [2] доказано, что поверхностный аттрактор (репеллер) \mathcal{B} размерности два диффеоморфизма f имеет тип $(2, 1)$ ($(1, 2)$) и не является, следовательно, растигивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером). Кроме того, в [2] установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору, ручно вложенному в M^3 , а ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.

В работе [5] установлено, что объемлющее многообразие M^3 для диффеоморфизма f , имеющего неблуждающее множество, состоящее в точности из двух двумерных базисных множеств, является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.

В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию структурно устойчивых диффеоморфизмов $f : M^3 \rightarrow M^3$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма $f \in G$ состоит из двумерных поверхностных связных базисных множеств, носитель каждого из которых является гладкой поверхностью;
2. ограничение диффеоморфизма $f \in G$ на носитель базисного множества сохраняет ориентацию носителя;
3. для любых точек x, y таких, что x принадлежит некоторому аттрактору $A \subset NW(f)$, y принадлежит некоторому репеллеру $R \subset NW(f)$ и $W^s(x) \cap W^u(y) \neq \emptyset$, выполняется условие: каждая компонента связности множества $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей ровно две граничные точки, одна из которых принадлежит A , а другая R .

Обозначим \mathcal{A} (\mathcal{R}) объединение всех аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма $f \in G$. Так как диффеоморфизм f является структурно устойчивым, то, в силу [10], каждое из множеств \mathcal{A} , \mathcal{R} не является пустым и устойчивые (неустойчивые) многообразия $W^s(z)$, $z \in \mathcal{A}$ ($W^u(z)$, $z \in \mathcal{R}$) диффеоморфизма f задают двумерное слоение

$N_f^s = \bigcup_{z \in \mathcal{A}} W^s(z)$, ($N_f^u = \bigcup_{z \in \mathcal{R}} W^u(z)$) на множестве $M^3 \setminus \mathcal{R}$ ($M^3 \setminus \mathcal{A}$), при этом слои слоений N_f^s и N_f^u пересекаются трансверсально. В силу условия 3, выделяющего класс G , пересечения слоев слоений N_f^s и N_f^u порождают слоение \hat{N}_f^{su} на множестве $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, каждый слой которого есть простая открытая дуга, одна из граничных точек которой принадлежит \mathcal{A} , а другая — \mathcal{R} .

Обозначим через \hat{N}_f^{su} непрерывное одномерное слоение на многообразии M^3 , полученное из слоения N_f^{su} , добавлением к каждой компоненте связности этого слоения (являющейся простой дугой) ее граничных точек. Зафиксируем любой аттрактор A диффеоморфизма f . Тогда множество $M^3 \setminus A$ допускает расслоение \hat{N}_A^{su} на простые дуги, принадлежащие слоям слоения \hat{N}_f^{su} , каждая из которых есть открытая дуга, граничные точки которой принадлежат аттрактору A . Заметим, что граничные точки такой дуги могут совпадать и в этом случае ее замыкание есть простая замкнутая кривая.

Напомним, что два диффеоморфизма $f, f' : M^3 \rightarrow M^3$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $g : A \rightarrow A'$ такой, что $f' = gfg^{-1}$.

Определение 1.1. Пусть $f, f' \in G$. Назовем аттракторы $A \subset NW(f)$ и $A' \subset NW(f')$ эквивалентными, если существует гомеоморфизм $g : A \rightarrow A'$ такой что

1. $f'|_{A'} = gfg^{-1}|_{A'}$,
2. для любой пары точек $z_1, z_2 \in A$, являющихся граничными точками некоторого слоя l слоения \hat{N}_A^{su} , точки $z'_1 = g(z_1), z'_2 = g(z_2)$ также являются граничными точками некоторого слоя l слоения $\hat{N}_{A'}^{su}$.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1.1. Для того, чтобы диффеоморфизмы $f, f' \in G$ были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы они обладали одинаковым числом базисных множеств и для некоторого аттрактора $A \subset NW(f)$ нашелся эквивалентный ему аттрактор $A' \subset NW(f')$.

2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов из класса G

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.1 работы [4].

Лемма 2.1. Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ диффеоморфизм из класса G и A — аттрактор принадлежащий $NW(f)$. Тогда существует замкнутая окрестность $U(A)$ аттрактора A такая, что

- 1) $U(A)$ гомеоморфна $T \times [-1, 1]$;
- 2) $f(U(A)) \subset intU(A)$;
- 3) $\partial U(A)$ пересекает каждый слой слоения \hat{N}_f^{su} в точности одной точке.

Лемма 2.2. Существует число $n \in N$, нумерации всех аттракторов A_1, \dots, A_n и репеллеров R_1, \dots, R_n из неблуждающего множества $NW(f)$ такие, что

- 1) поверхности A_i, R_i и R_i, A_{i+1} являются границами непересекающихся открытых областей K_{ii} и K_{ii+1} соответственно (где $i = 1, \dots, n$ и $A_{n+1} = A_1$);
- 2) $M^3 = \mathcal{A} \cup \mathcal{R} \cup (\bigcup_{i=1}^n K_{ii}) \cup (\bigcup_{i=1}^n K_{ii+1})$;
- 3) для любой точки $z_{A_1} \in A_1$ существует последовательность точек $z_{R_1} \in R_1, \dots, z_{A_n} \in A_n, z_{R_n} \in R_n$, таких что пара точек z_{A_i}, z_{R_i} является границей слоя $l_{z_{A_i}} \subset K_{ii}$, $i = 1, \dots, n$, а пара $z_{R_i}, z_{A_{i+1}}$ — границей слоя $l_{z_{R_i}} \subset K_{ii+1}$ $i = 1, \dots, n-1$ слоения N_f^{su} .

Доказательство.

Зафиксируем любой аттрактор из множества \mathcal{A} и обозначим его через A_1 . В силу [2] и условия 3), выделяющего класс G , аттрактор A_1 является гладкой поверхностью гомеоморфной тору. Обозначим через U_{A_1} трубчатую окрестность поверхности A_1 . Любая точка $z_{A_1} \in A_1$ является граничной точкой двух непересекающихся открытых дуг слоения N_f^{su} (пересекающихся с различными компонентами связности множества $U_{A_1} \setminus A_1$). Обозначим через $l_{z_{A_1}}$ любую из этих дуг и через z_{R_1} граничную точку дуги $l_{z_{A_1}}$, отличную от точки z_{A_1} , и принадлежащую некоторому репеллеру диффеоморфизма f , который обозначим через R_1 . Из леммы 2.1. следует, что $l_{z_{A_1}}$ принадлежит связному открытому множеству K_{11} , ограниченному поверхностями A_1 и R_1 . Тогда существует аттрактор A_2 (возможно совпадающий с A_1) такой, что объединение $R_1 \cup A_2$ является границей области K_{12} , непересекающейся с K_{11} . Обозначим $l_{z_{R_1}}$ открытую дугу слоения N^{su} , принадлежащую области K_{12} с граничными точками $z_{R_1} \in R_1$ и $z_{A_2} \in A_2$. В случае если аттрактор A_2 не совпадает с A_1 существует репеллер R_2 и открытая дуга $l_{z_{A_2}}$ слоения N^{su} с граничными точками z_{A_2}, z_{R_2} , не совпадающая с $l_{z_{R_1}}$ и принадлежащая области K_{22} не пересекающейся с K_{11} и K_{12} . Продолжая этот процесс и учитывая, что число базисных множеств конечно, получаем утверждение леммы.

Доказательство заканчено.

Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость. Пусть $f, f' \in G$ топологически сопряжены и $g : M^3 \rightarrow M^3$ сопрягающий гомеоморфизм, то есть $f' = gfg^{-1}$. Зафиксируем нумерации аттракторов и репеллеров диффеоморфизма f согласно лемме 2.2. и положим $A'_i = g(A_i), R'_i = g(R_i)$, $K'_{ii} = g(K_{ii}), K'_{ii+1} = g(K_{ii+1})$, $i = 1, \dots, n$. Докажем, что аттракторы A_1 и A'_1 эквивалентны. Условие 1) в определении 1.1. выполняется в силу того, что $A'_1 = g(A_1)$ и $f'|_{A'_1} = gfg^{-1}|_{A'_1}$. Покажем, что выполняется условие 2).

Пусть l любая дуга, принадлежащая слоению \check{N}_f^{su} . Обозначим одну из граничных точек этой дуги z_{A_1} , а другую \tilde{z}_{A_1} таким образом, что замыкание $cl(l)$ представляется в виде $cl(l) = (\bigcup_{i=1}^n l_{z_{A_i}}) \cup (\bigcup_{i=1}^n l_{z_{R_i}}) \cup ((\bigcup_{i=1}^n z_{A_i}) \cup \tilde{z}_{A_1}) \cup (\bigcup_{i=1}^n z_{R_i})$, где точки z_{A_i}, z_{R_i} удовлетворяют условиям леммы 2.2., а дуга $l_{z_{R_n}}$ принадлежит K_{nn+1} с граничными точками z_{R_n} и \tilde{z}_{A_1} . Заметим, что точка \tilde{z}_{A_1} может совпадать с точкой z_{A_1} . Для точек z_{A_i}, z_{R_i} положим $z'_{A'_i} = g(z_{A_i}), z'_{R'_i} = g(z_{R_i})$. Так как g является сопрягающим гомеоморфизмом, то он отображает NW_f в NW'_f и слои слоения N_f^s (N_f^u) в слои слоения $N_{f'}^s$ ($N_{f'}^u$). Поэтому g отображает слои слоения N_f^{su} в слои слоения $N_{f'}^{su}$ и, следовательно, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ образ в силу g дуги $l_{z_{A_i}}$ ($l_{z_{R_i}}$) есть дуга $l'_{z'_{A'_i}}$ ($l'_{z'_{R'_i}}$), причем $g(z_{A_i}) = z'_{A'_i}$ и $g(z_{R_i}) = z'_{R'_i}$. Таким образом, дуга $l' \in \check{N}_{f'}^{su}$ такая, что $cl(l') = (\bigcup_{i=1}^n l'_{z'_{A'_i}}) \cup (\bigcup_{i=1}^n l'_{z'_{R'_i}}) \cup ((\bigcup_{i=1}^n z'_{A'_i}) \cup \tilde{z}'_{A'_1}) \cup (\bigcup_{i=1}^n z'_{R'_i})$ обладает свойством, что ее граничные точки $z'_{A'_1}, \tilde{z}'_{A'_1}$ являются образами граничных точек z_{A_1}, \tilde{z}_{A_1} дуги l соответственно.

Достаточность.

Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G$ обладают одинаковым числом базисных множеств и A, A' эквивалентные аттракторы посредством гомеоморфизма g . Покажем, что существует гомеоморфизм $H : M^3 \rightarrow M^3$ такой, что $H|_{A_1} = g|_{A_1}$ и $f' = gfg^{-1}$.

Зафиксируем нумерацию $A_1, \dots, A_n, R_1, \dots, R_n$ базисных множеств диффеоморфизма f в соответствии с леммой 2.2. и введем соответствующие области K_{ii}, K_{ii+1} , $i = 1, \dots, n$.

Положим $A_1 = A$, $A'_1 = A'$ и введем нумерации базисных множеств диффеоморфизмов f и f' , $A_1, \dots, A_n, R_1, \dots, R_n, A'_1, \dots, A'_n, R'_1, \dots, R'_n$, удовлетворяющие условиям леммы 2.2. с соответствующими множествами $K_{ii}, K_{ii+1}, K'_{ii}, K'_{ii+1}$.

Построение гомеоморфизма H разобьем на 2 шага.

Шаг 1. Положим $\Phi_1 = g$ и для каждого $i = \{1, \dots, n\}$ построим гомеоморфизмы $\Phi_i : A_i \rightarrow A'_i$, $\Psi_i : R_i \rightarrow R'_i$ такие, что выполняются условия:

- 1) $f'|_{A'_i} = \Phi_i f \Phi_i^{-1}|_{A'_i}$, $f'|_{R'_i} = \Psi_i f \Psi_i^{-1}|_{R'_i}$, ($\Phi_1 = g$);
- 2) если z_{A_i}, z_{R_i} - граничные точки слоя l слоения N_f^{su} , то существует слой l' слоения $N_{f'}^{su}$ с граничными точками $\Phi_i(z_{A_i}), \Psi_i(z_{R_i})$.

Построим вначале гомеоморфизм $\Psi_1 : R_1 \rightarrow R'_1$. Пусть z_{R_1} произвольная точка, принадлежащая репеллеру R_1 . Тогда существует слой $l_{z_{A_1}} \subset K_{11}$ слоения N^{su} с граничными точками z_{A_1} и z_{R_1} . Введем проекцию $\nu_{11} : R_1 \rightarrow A_1$ вдоль слоев слоения N^{su} , полагая $\nu_{11}(z_{R_1}) = z_{A_1}$.

Покажем, что $f\nu_{11} = \nu_{11}f$. В силу того, что слоение N_f^{su} является f -инвариантным, существует дуга $l_{f(z_{A_1})} = f(l_{z_{A_1}})$, граничные точки которой являются образами граничных точек z_{A_1}, z_{R_1} дуги $l_{z_{A_1}}$. Тогда $f(\nu_{11}(z_{R_1})) = f(z_{A_1})$, $\nu_{11}(f(z_{R_1})) = f(z_{A_1})$, то есть $f\nu_{11} = \nu_{11}f$.

Для любой точки $x \in R_1$ положим $\Psi_1(x) = \nu_{11}^{-1}(g(\nu_{11}(x)))$. Из условия 3), выделяющего класс G следует, что построенное отображение $\Psi_1 : R_1 \rightarrow R'_1$ является гомеоморфизмом.

Покажем, что выполняется равенство $f'|_{R'_1} = \Psi_1 f|_{R_1} \Psi_1^{-1}$. Возьмем произвольную точку $z_{R_1} \in R_1$. Тогда $f'(\Psi_1(z_{R_1})) = f'(\nu_{11}^{-1}(g(\nu_{11}(z_{R_1})))) = f'(\nu_{11}^{-1}(g(z_{A_1}))) = f'(\nu_{11}^{-1}(z'_{A_1}))$. $\Psi_1(f(z_{R_1})) = \nu_{11}^{-1}(g(\nu_{11}(f(z_{R_1})))) = \nu_{11}^{-1}(g(f(\nu_{11}(z_{R_1})))) = \nu_{11}^{-1}(g(f(z_{A_1}))) = \nu_{11}^{-1}(f'(g(z_{A_1}))) = \nu_{11}^{-1}(f'(z'_{A_1})) = f'(\nu_{11}^{-1}(z'_{A_1})) = f'(\Psi_1(z_{R_1}))$.

Построим теперь гомеоморфизм $\Phi_2 : A_2 \rightarrow A'_2$. Пусть $z_{A_2} \in A_2$ - произвольная точка, тогда существует слой $l_{z_{R_1}} \subset K_{12}$ с граничными точками z_{A_2} и z_{R_1} . Введем проекцию $\nu_{12} : A_2 \rightarrow R_1$ вдоль слоев слоения N^{su} , полагая $\nu_{12}(z_{A_2}) = z_{R_1}$.

Для любой точки $x \in A_2$ положим $\Phi_2 = \nu_{12}^{-1}\Psi_1\nu_{12}(x)$. Аналогично предыдущему рассуждению для гомеоморфизма Ψ_1 устанавливается, что построенное отображение $\Phi_2 : A_2 \rightarrow A'_2$ является гомеоморфизмом и выполняется $f'|_{A_2} = \Phi_2 f|_{A_2} \Phi_2^{-1}$. Заметим, что аттракторы A_1 и A_2 могут совпадать. В этом случае останется доказать, что построенный гомеоморфизм Φ_2 совпадает с g .

Продолжая описанный выше процесс, получим набор гомеоморфизмов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, Ψ_1, \dots, Ψ_n , где $\Phi_i : A_i \rightarrow A'_i$, $\Psi_i : R_i \rightarrow R'_i$ ($i = 1, \dots, n$) задаются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= g, \\ \Psi_i(x) &= \nu_{ii}^{-1}(\Phi_i(\nu_{ii}(x))), \quad x \in R_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ \Phi_i(x) &= \nu_{ii+1}^{-1}(\Psi_{i-1}(\nu_{ii+1}(x))), \quad x \in A_i, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Используя выше описанное построение, зададим гомеоморфизм $\Phi_{n+1} : A_1 \rightarrow A_1$ следующим образом:

$$\Phi_{n+1}(x) = \nu_{nn+1}^{-1}\Psi_n\nu_{nn+1}(x), \text{ для любой точки } x \in A_1.$$

Докажем, что $\Phi_{n+1} = \Phi_1 = g$.

Возьмем произвольную точку $z_{A_1} \in A_1$. По построению существует слой l слоения \check{N}_f^{su} с граничными точками z_{A_1} и \tilde{z}_{A_1} и слой l' слоения $\check{N}_{f'}^{su}$ с граничными точками $z'_{A'_1} = \Phi_1(z_{A_1})$, $\tilde{z}'_{A'_1} = \Phi_{n+1}(\tilde{z}_{A_1})$. Так как $\Phi_1 = g$, то в силу условия 2) определения 1.1. эквивалентности аттракторов A_1 и A'_1 получаем также, что $\Phi_{n+1} = g$.

Шаг 2. Построение сопрягающего гомеоморфизма. Рассмотрим произвольную область K из $(\bigcup_{i=1}^n K_{ii}) \cup (\bigcup_{i=1}^n K_{ii+1})$ с границей $\partial K = A \cup R$. В силу шага 1 на границе области K заданы гомеоморфизмы $\Phi : A \rightarrow A'$ и $\Psi : R \rightarrow R'$ такие что:

$$1) f'|_{A'} = \Phi f \Phi^{-1}|_A, \quad f'|_{R'} = \Psi f \Psi^{-1}|_R;$$

2) если z_A, z_R — граничные точки слоя l слоения N_f^{su} , то существует слой l' слоения $N_{f'}^{su}$ с граничными точками $\Phi(z_A), \Psi(z_R)$.

Для построения искомого гомеоморфизма достаточно построить гомеоморфизм $h_K : cl(K) \rightarrow cl(K')$ такой что:

- 1) $h_K|_A = \Phi|_A, h_K|_R = \Psi|_R;$
- 2) $f'|_{K'} = h_K f(h_K)^{-1}|_{K'}$.

Искомый гомеоморфизм H будет составлен из гомеоморфизмов h_K , заданным на каждом множестве h_K .

Согласно лемме 2.1. существует окрестность аттрактора $U(A)$ гомеоморфная $T^2 \times [-1, 1]$ такая, что $f(U(A)) \subset intU(A)$. Аттрактор A делит окрестность $U(A)$ на две компоненты связности, одна из которых принадлежит области K . Обозначим эту компоненту V , а компоненту границы V , принадлежащую K , обозначим через T . Заметим, что поверхность T гомеоморфна двумерному тору и каждый слой слоения N_f^{su} пересекает T в точности одной точке. В силу свойства 3), выделяющего класс G , $f(V) \subset V$. Положим $\tilde{V} = f(V)$, $\tilde{T} = f(T)$ и $B = V \setminus \tilde{V}$. По построению $\partial B = T \cup \tilde{T}$ и каждый слой слоения $N_{f'}^{su}$, принадлежащий области K пересекается с замыканием множества B по дуге, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит T , а другая \tilde{T} . Обозначим через ν проекцию множества B на аттрактор A вдоль слоев слоения $N_{f'}^{su}$, ставящая в соответствие любой точке $x \in B$ точку $\nu(x) \in A$, являющуюся граничной точкой слоя l_x слоения N_f^{su} , проходящей через точку x .

Проведем аналогичные построения для диффеоморфизма f' и снабдим соответствующие объекты штрихами.

Расслоенная структура построенных множеств B и B' позволяет задать гомеоморфизм $h_1 : B \rightarrow B'$, удовлетворяющий условию:

$$\Phi(\nu(x)) = \nu'((h_1(x))) \text{ для любой точки } x \in B.$$

Построим гомеоморфизм $h_K : K \rightarrow K'$ следующим образом:

для $x \in K$ положим:

$$h_K = f'^{-l}(h_1(f^l(x))), \text{ где } l \text{ - целое число такое, что } f^l(x) \in B.$$

По построению отображение h_K однозначно продолжается до гомеоморфизма $cl(K)$ и удовлетворяет условию:

$$h_K|_A = \Phi|_A, h_K|_R = \Psi|_R.$$

Теорема 1.1. доказана.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках гранта РФФИ № 11-01-12056 офи-м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown A. *Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds.* // Journal of Modern Dynamics (2010), v. 4, 517-548.
2. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В. *О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях.* // Мат. зам. (2005), 78, № 6, 813-826.
3. Grines V., Zhuzhom E. *On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors.* // Trans. Amer. Math. Soc. (2005), 357, № 2, 617-667.
4. Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. *Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds.* Moscow Math. Journal (2009), № 4, 801-821.

5. Гринес В.З., Медведев В.С., Левченко Ю.А. *О структуре 3-многообразия, допускающего A-дiffeоморфизм с двумерным поверхностью неблуждающим множеством.* // Труды СВМО (2010), т. 12, № 2, 7-12.
6. Mane R. *A proof of the C^1 stability conjecture.* // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1987), 66, 161-210.
7. Плыкин Р.В. *О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла.* // Матем. сборник. (1971), т. 84, № 2, 301-312.
8. Robbin J. *A structural stability theorem.* // Ann. of Math. (1971), 94 (2), 447-493.
9. Robinson C. *Structural stability of C^1 diffeomorphisms.* J. Differential Equations (1976), 22, 28-73.
10. Smale S. *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amer. Math. Soc. (1967), 73 (6), 747-817.

On a topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional nonwandering set

© V.Z. Grines³, Y.A. Levchenko⁴

Abstract. A class of structurally stable diffeomorphisms on 3-manifolds is considered under conditions that nonwandering set of any diffeomorphisms consists of surface two dimensional attractors and repellers. Under additional suggesting concerning of behavior of intersection two dimensional manifolds of points of basic sets are founded necessary and sufficient conditions of topological conjugacy of diffeomorphisms from considered class.

Key Words: structural stability, basic sets, topological classification

³Head of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁴Assistant Professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com.

УДК 517.9

О некоторых классах решений уравнений газовой динамики

© П. А. Вельмисов¹, Ю. А. Казакова²

Аннотация. В статье рассматриваются решения типа «бегущая волна» [1] дифференциальных уравнений в газовой динамике. Предложена методика, позволяющая получить решения указанного типа без применения метода дифференциальных связей, требующего анализа совместности переопределенных систем [4-6]. В качестве примера построены решения простых и двойных волн.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, уравнения газовой динамики, бегущие волны, простые волны, двойные волны.

1. Общая схема построения решений типа «бегущая волна ранга r »

Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \{H\}\right) = 0, \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n - независимые переменные, $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - искомая функция, $\{H\}$ - совокупность всевозможных частных производных второго порядка (при этом $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k}$).

С помощью преобразования Ампера от функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перейдем к функции $\omega(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\omega(u_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^r u_k x_k, \quad u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad x_i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i}.$$

При построении решений типа «бегущая волна ранга r » функция ω представляется в виде:

$$\begin{aligned} \omega(u_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) &= \omega_0(u_1, u_2, \dots, u_r) + \sum_{k=1}^{n-r} \omega_{r+k}(u_1, u_2, \dots, u_r) x_{r+k}; \\ x_i &= \frac{\partial \omega_0}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\partial \omega_{r+k}}{\partial u_i} x_{r+k}, \quad i = 1 \div r, \quad r = 1 \div n. \end{aligned}$$

В частности, для построения решения простой волны ($r = 1$) следует перейти от функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к функции $\omega(u, x_2, \dots, x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\omega(u, x_2, \dots, x_n) + x_1 u, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

¹Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

²Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; kazakovaua@mail.ru.

Тогда частные производные функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пересчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} &= -\omega_{x_k}, \quad k = 2 \div n; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\omega_{uu}}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_1} = -\frac{\omega_{x_k u}}{\omega_{uu}}, \quad k = 2 \div n, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_m} &= \frac{\omega_{x_k x_m} \omega_{uu} - \omega_{ux_k} \omega_{ux_m}}{\omega_{uu}}, \quad k, m = 2 \div n; \quad \omega_{uu} \neq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где нижние индексы у функции $\omega(u, x_2, \dots, x_n)$ обозначают производные. Подставив (1.2) в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение для функции $\omega(u, x_2, \dots, x_n)$. Чтобы получить решение простой волны, функцию $\omega(u, x_2, \dots, x_n)$ следует искать в виде:

$$\omega(u, x_2, \dots, x_n) = \omega_0(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{k+1}(u) x_{k+1}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial u} x_{k+1}.$$

Для построения решения двойной волны ($r = 2$) перейдем от функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к функции $\omega(u, v, x_3, \dots, x_n)$:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\omega(u, v, x_3, \dots, x_n) + ux_1 + vx_2, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad x_2 = \frac{\partial \omega}{\partial v}.$$

Частные производные функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} &= -\omega_{x_k}, \quad k = 3 \div n; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\omega_{vv}}{\Delta}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{\omega_{uu}}{\Delta}; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_k} &= \frac{\omega_{ux_k} \omega_{uv} - \omega_{vx_k} \omega_{uu}}{\Delta}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\omega_{vx_k} \omega_{uv} - \omega_{ux_k} \omega_{vv}}{\Delta}, \quad k = 3 \div n \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_m} &= -\omega_{x_k x_m} - \frac{1}{\Delta} (\omega_{ux_k} (\omega_{vx_m} \omega_{uv} - \omega_{ux_m} \omega_{vv}) + \omega_{vx_k} (\omega_{ux_m} \omega_{uv} - \omega_{vx_m} \omega_{uu})), \quad k = 3 \div n, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\Delta = \omega_{uu} \omega_{vv} - \omega_{uv}^2 \neq 0$, нижние индексы у функции $\omega(u, v, x_3, \dots, x_n)$ обозначают производные. Подставив (1.3) в уравнение (1.1), получим для функции $\omega(u, v, x_3, \dots, x_n)$ дифференциальное уравнение, для которого решение двойной волны отыскивается в виде

$$\begin{aligned} \omega(u, v, x_3, \dots, x_n) &= \omega_0(u, v) + \sum_{k=1}^{n-2} \omega_{k+2}(u, v) x_{k+2}, \\ x_1 &= \frac{\partial \omega_0}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial \omega_{k+2}}{\partial u} x_{k+2}, \quad x_2 = \frac{\partial \omega_0}{\partial v} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial \omega_{k+2}}{\partial v} x_{k+2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай уравнения (1.1), когда искомая функция зависит от координат x, y, z и времени t :

$$L(x, y, z, t, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}) = 0. \quad (1.4)$$

При построении решения простой волны перейдем в уравнении (1.4) от функции $\Phi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, y, z, t)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = -\omega(u, y, z, t) + xu, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad x = \frac{\partial \omega}{\partial u}. \quad (1.5)$$

Частные производные пересчитываются по формулам

$$\begin{aligned}\Phi_y &= -\omega_y; \quad \Phi_z = -\omega_z; \quad \Phi_t = -\omega_t; \quad \Phi_{xx} = \frac{1}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{xt} = -\frac{\omega_{ut}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{xy} = -\frac{\omega_{uy}}{\omega_{uu}}; \\ \Phi_{xz} &= -\frac{\omega_{uz}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{yy} = \frac{\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{yt} = \frac{\omega_{uy}\omega_{ut} - \omega_{yt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{yz} = \frac{\omega_{uy}\omega_{uz} - \omega_{yz}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \\ \Phi_{zz} &= \frac{\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{zt} = \frac{\omega_{uz}\omega_{ut} - \omega_{zt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{tt} = \frac{\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в уравнение (1.4), получим дифференциальное уравнение для функции $\omega(u, y, z, t)$:

$$N(u, y, z, t, \omega, \omega_u, \omega_y, \omega_z, \omega_t, \omega_{uu}, \omega_{ut}, \omega_{uy}, \omega_{uz}, \omega_{tt}, \omega_{yt}, \omega_{zt}, \omega_{yz}, \omega_{yy}, \omega_{zz}) = 0.$$

Для построения решения простой волны функция $\omega(u, y, z, t)$ представляется в виде

$$\omega(u, y, z, t) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y + \omega_2(u)z + \omega_3(u)t.\tag{1.7}$$

Тогда $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)y + \omega'_2(u)z + \omega'_3(u)t$, $\Phi_y = -\omega_1(u)$, $\Phi_z = -\omega_2(u)$, $\Phi_t = -\omega_3(u)$.

В случае построения решения двойной волны перейдем от функции $\Phi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, v, z, t)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = -\omega(u, v, z, t) + xu + yv, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial \omega}{\partial v}.\tag{1.8}$$

Тогда частные производные находятся по формулам:

$$\begin{aligned}\Phi_z &= -\omega_z; \quad \Phi_t = -\omega_t; \quad \Phi_{yt} = \frac{\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu}}{\Delta}; \quad \Phi_{yz} = \frac{\omega_{uz}\omega_{uv} - \omega_{vz}\omega_{uu}}{\Delta}; \\ \Phi_{xx} &= \frac{\omega_{vv}}{\Delta}; \quad \Phi_{xt} = \frac{-\omega_{ut}\omega_{vv} + \omega_{vt}\omega_{uv}}{\Delta}; \quad \Phi_{xy} = \frac{-\omega_{uv}}{\Delta}; \quad \Phi_{xz} = \frac{-\omega_{uz}\omega_{vv} + \omega_{vz}\omega_{uv}}{\Delta}; \\ \Phi_{yy} &= \frac{\omega_{uu}}{\Delta}; \quad \Phi_{zz} = -\omega_{zz} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{uz}(\omega_{vz}\omega_{uv} - \omega_{uz}\omega_{vv}) + \omega_{vz}(\omega_{uz}\omega_{uv} - \omega_{vz}\omega_{uu})); \\ \Phi_{tt} &= -\omega_{tt} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{ut}(\omega_{vt}\omega_{uv} - \omega_{ut}\omega_{vv}) + \omega_{vt}(\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu})); \\ \Phi_{zt} &= -\omega_{zt} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{uz}(\omega_{vt}\omega_{uv} - \omega_{ut}\omega_{vv}) + \omega_{vz}(\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu}));\end{aligned}$$

где $\Delta = \omega_{uu}\omega_{vv} - \omega_{uv}^2 \neq 0$. Для функции $\omega(u, v, z, t)$ получим дифференциальное уравнение:

$$N(u, v, z, t, \omega, \omega_u, \omega_v, \omega_t, \omega_z, \omega_{uu}, \omega_{ut}, \omega_{uv}, \omega_{uz}, \omega_{tt}, \omega_{vt}, \omega_{zt}, \omega_{vz}, \omega_{vv}, \omega_{zz}) = 0.$$

Для построения решения двойной волны функция $\omega(u, v, z, t)$ представляется в виде

$$\omega(u, v, z, t) = \omega_0(u, v) + \omega_1(u, v)z + \omega_2(u, v)t.$$

Замечание. Если уравнение (1.4) представляет собой квазилинейное уравнение, в котором искомая функция зависит от двух переменных:

$$f_1(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xx} + f_2(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xy} + f_3(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{yy} = 0,\tag{1.9}$$

то с помощью преобразования (1.8), которое в данном случае является преобразованием Лежандра:

$$\Phi(x, y) = -\omega(u, v) + xu + yv, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad x = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial \omega}{\partial v},\tag{1.10}$$

для функции $\omega(u, v)$ получим линейное уравнение:

$$f_1(u, v)\omega_{vv} - f_2(u, v)\omega_{uv} + f_3(u, v)\omega_{uu} = 0.$$

Аналогично, уравнение более общего вида

$$\begin{aligned} f_1(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xx} + f_2(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xy} + f_3(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{yy} + f_4(x, y, \Phi_x, \Phi_y)(\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2) &= 0, \\ f_4(x, y, \Phi_x, \Phi_y) &= f_4^0(\Phi_x, \Phi_y) + f_5^0(\Phi_x, \Phi_y)x + f_6^0(\Phi_x, \Phi_y)y \end{aligned}$$

с помощью преобразования (1.10) также приводится к линейному:

$$f_1(u, v)\omega_{vv} - f_2(u, v)\omega_{uv} + f_3(u, v)\omega_{uu} + f_4^0(u, v) + f_5^0(u, v)\omega_u + f_6^0(u, v)\omega_v = 0.$$

2. Решения типа «простая волна» уравнений газовой динамики

Построим решение типа «простая волна» для уравнения, описывающего безвихревые изэнтропические неустановившиеся трехмерные течения газа или жидкости:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + 2\Phi_z\Phi_{zt} + 2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz} + 2\Phi_z\Phi_y\Phi_{zy} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \\ + \Phi_y^2\Phi_{yy} + \Phi_z^2\Phi_{zz} - [a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 + \frac{1}{2}\Phi_z^2)](\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_0 - скорость звука в однородном потоке; V_0 - скорость однородного потока; $\chi = \frac{c_p}{c_v} = const$; c_p, c_v - коэффициенты теплоемкости. Функцию $\Phi(x, y, z, t)$ представим в виде (1.5), тогда для функции $\omega(u, y, z, t)$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2u\omega_{ut} - 2\omega_y(\omega_{uy}\omega_{ut} - \omega_{yt}\omega_{uu}) - 2\omega_z(\omega_{uz}\omega_{ut} - \omega_{zt}\omega_{uu}) + 2u\omega_z\omega_{uz} + \\ + 2\omega_z\omega_y(\omega_{uy}\omega_{uz} - \omega_{yz}\omega_{uu}) + 2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + \omega_z^2(\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}) - \\ - [a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)(-\omega_t + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2)](1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu})) &= 0 \end{aligned}$$

Для построения решения простой волны функция $\omega(u, y, z, t)$ представляется в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$:

$$(\omega_3')^2 - 2u\omega_3' - 2\omega_1\omega_1'\omega_3' - 2\omega_2\omega_2'\omega_3' + 2u\omega_2\omega_2' + 2\omega_1\omega_2\omega_1'\omega_2' + 2u\omega_1\omega_1' + u^2 + \omega_1^2(\omega_1')^2 + \\ + \omega_2^2(\omega_2')^2 - [a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)(-\omega_3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2)](1 + (\omega_1')^2 + (\omega_2')^2) = 0$$

Две из функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$ можно выбрать произвольно, произвольной остается также функция $\omega_0(u)$. Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y + \omega_2'(u)z + \omega_3'(u)t$, $\Phi_y = -\omega_1(u)$, $\Phi_z = -\omega_2(u)$, $\Phi_t = -\omega_3(u)$. Скорость газа V , давление P , плотность ρ , скорость звука a находятся по формулам:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \sqrt{u^2 + \omega_1^2(u) + \omega_2^2(u)}; \\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} &= \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \frac{\chi-1}{2}\frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2}(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2) = \\ &= 1 + \frac{\chi-1}{2}\frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2}(-\omega_3(u) + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2) \end{aligned}$$

В случае, когда течение одномерное ($\Phi_y = 0, \Phi_z = 0$) и нестационарное, уравнение (2.1) принимает вид:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_x^2\Phi_{xx} - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2\right)\right]\Phi_{xx} = 0$$

Для построения решения простой волны перейдем от функции $\Phi(x, t)$ к функции $\omega(u, t)$. Тогда получим уравнение для $\omega(u, t)$:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2u\omega_{ut} + u^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi - 1}{2}V_0^2 - (\chi - 1) \left(-\omega_t + \frac{1}{2}u^2 \right) \right] = 0$$

Задавая функцию $\omega(u, t)$ в виде $\omega(u, t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$:

$$(\omega_3')^2 - 2u\omega_3' + u^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi - 1}{2}V_0^2 - (\chi - 1) \left(-\omega_3 + \frac{1}{2}u^2 \right) \right] = 0.$$

Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной, т.е. получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega_0'(u) + \omega_3'(u)t$.

Если течение двумерное ($\Phi_z = 0$) и стационарное ($\Phi_t = 0$), то уравнение (2.1) примет вид:

$$2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \Phi_y^2\Phi_{yy} - \left[a_0^2 + \frac{\chi - 1}{2}V_0^2 - (\chi - 1) \left(\frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 \right) \right] (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) = 0 \quad (2.2)$$

После перехода от функции $\Phi(x, y)$ к функции $\omega(u, y)$ получим следующее уравнение

$$2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) - \left[a_0^2 + \frac{\chi - 1}{2}V_0^2 - (\chi - 1) \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 \right) \right] (1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu})) = 0$$

Представляя решение простой волны в виде $\omega(u, y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$, получим уравнение для $\omega_1(u)$:

$$2u\omega_1\omega_1' + u^2 + \omega_1^2(\omega_1')^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi - 1}{2}V_0^2 - (\chi - 1) \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 \right) \right] (1 + (\omega_1')^2) = 0$$

Получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$: $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y$.

3. Решения простой волны для приближенных уравнений в газовой динамике

Линейное разложение. Предполагая, что имеют место малые возмущения однородного потока, движущегося со скоростью V в направлении оси Ox , представим $\Phi(x, y, z, t)$ в виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = V_0x + \varepsilon\varphi(x, y, z, t) + \dots, \quad \text{где } \varepsilon \ll 1.$$

Тогда, оставляя в (2.1) старшие члены (порядка ε), получим линейное уравнение для функции $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) - асимптотическое уравнение линейной теории. При построении решения простой волны для уравнения (3.1) перейдем по формуле (1.5) от функции $\varphi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, y, z, t)$. Тогда уравнение для $\omega(u, y, z, t)$ будет иметь вид:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu})) = 0.$$

Решение простой волны отыскивается в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$:

$$(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + V_0^2 - a_0^2(1 + (\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2) = 0.$$

Две из функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$ можно выбрать произвольно. Произвольной также остается функция $\omega_0(u)$. Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)y + \omega'_2(u)z + \omega'_3(u)t$.

Для неустановившегося одномерного течения ($\varphi_y = 0$, $\varphi_z = 0$) уравнение (3.1) принимает вид:

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2\varphi_{xx} = 0. \quad (3.2)$$

При построении решения простой волны этого уравнения необходимо перейти от функции $\varphi(x, t)$ к функции $\omega(u, t)$. Тогда уравнение для $\omega(u, t)$ запишется следующим образом:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2 = 0.$$

Задавая функцию $\omega(u, t)$ в виде $\omega(u, t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + V_0^2 - a_0^2 = 0$, общее решение которого: $\omega_3(u) = (V_0 \pm a_0)u + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega'_0(u) + (V_0 \pm a_0)t$. Тогда

$$u = f(x - (V_0 \pm a_0)t), \quad (3.3)$$

т.е. получено решение, описывающее возмущения, распространяющиеся вниз (знак «+») или вверх (знак «-») по течению. Заметим, что общее решение уравнения (3.2) имеет вид: $\varphi(x, t) = f(x - (V_0 + a_0)t) + g(x - (V_0 - a_0)t)$, где f , g - произвольные функции. Это решение является суммой двух решений, получающихся из (3.3) при выборе знака «-» и знака «+».

Для плоских ($\varphi_z = 0$) установившихся ($\varphi_t = 0$) течений согласно (3.1), имеем уравнение (волновое при $M_0 > 1$; приводящееся к уравнению Лапласа при $M_0 < 1$):

$$(M_0^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \quad (3.4)$$

где $M_0 = \frac{V_0}{a_0}$ - число Маха. После перехода от функции $\varphi(x, y)$ к функции $\omega(u, y)$, получим уравнение для $\omega(u, y)$:

$$M_0^2 - 1 - (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) = 0.$$

Задавая функцию $\omega(u, y)$ в виде $\omega(u, y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$, для $\omega_1(u)$ получим дифференциальное уравнение: $M_0^2 - 1 - (\omega'_1)^2 = 0$, общее решение которого существует при $M_0 > 1$: $\omega_1(u) = \pm u\sqrt{M_0^2 - 1} + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции:

$$x = \omega'_0(u) \pm y\sqrt{M_0^2 - 1}, \quad u = f(x \mp y\sqrt{M_0^2 - 1}). \quad (3.5)$$

Полученное решение можно использовать для описания течения, возникающего при сверхзвуковом ($V_0 > a_0$) обтекании профиля. Общее решение уравнения (3.4) имеет вид: $\varphi(x, y) = f(x - y\sqrt{M_0^2 - 1}) + g(x + y\sqrt{M_0^2 - 1})$, где f , g - произвольные функции. Оно состоит из двух решений, получаемых из (3.5) при выборе знака «+» и знака «-».

Трансзвуковое разложение. а) Для течений, скорость которых близка к скорости звука, рассмотрим трансзвуковое разложение функции $\Phi(x, y, z, t)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = V_0 x + \varepsilon^2 \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \text{ где } x = \varepsilon \bar{x}, y = \sqrt{\varepsilon} \bar{y}, z = \sqrt{\varepsilon} \bar{z}, t = \bar{t}, \varepsilon \ll 1, V_0^2 - a_0^2 \sim \varepsilon.$$

Подставляя в (2.1) и оставляя члены порядка ε , получим нелинейное уравнение трансзвуковой теории движения идеального газа:

$$2V_0 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + V_0^2 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + V_0(\chi + 1) \bar{\varphi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0^2 (\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) описывает течения, содержащие как области с дозвуковой скоростью, так и области со сверхзвуковой скоростью. При построении решения типа "простая волна" для уравнения (3.6) перейдем от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ запишется в следующем виде:

$$-2V_0 \omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2(1 + (\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}} \omega_{uu}) + (\omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}} \omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(V_0^2 - a_0^2) - 2V_0 \omega'_3 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2((\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2) = 0.$$

С учетом того, что $\omega_0(u)$ также произвольная функция, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)\bar{y} + \omega'_2(u)\bar{z} + \omega'_3(u)\bar{t}$.

Построим решение простой волны для нестационарного одномерного течения (в (3.6) $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$). После перехода от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u, \bar{t})$:

$$-2V_0 \omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 = 0. \quad (3.7)$$

Функция $\omega(u, \bar{t})$ задается в виде $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $-2V_0 \omega'_3 + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u = 0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u) = \frac{\chi + 1}{4}u^2 + \frac{V_0^2 - a_0^2}{2V_0}u + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega'_0(u) + \frac{1}{2V_0}(V_0(\chi + 1)u + V_0^2 - a_0^2)\bar{t}$. Заметим, что в этом случае решение простой волны является общим решением уравнения (3.7).

В случае, когда течение двумерное установившееся ($\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0$), уравнение (3.6) будет иметь вид:

$$V_0^2 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + V_0(\chi + 1) \bar{\varphi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0^2 (\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}}) = 0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})$ к функции $\omega(u, \bar{y})$. Тогда для функции $\omega(u, \bar{y})$ получим уравнение:

$$V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2(1 + (\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}} \omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u, \bar{y})$ зададим в виде: $\omega(u, \bar{y}) = \omega_0(u) + \omega_1(u)\bar{y}$. Для $\omega_1(u)$ получим уравнение: $(V_0^2 - a_0^2) + V_0(\chi + 1)u - a_0^2(\omega'_1)^2 = 0$. Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$, будет иметь вид: $x = \omega'_0 + \frac{\bar{y}}{a_0} \sqrt{(V_0^2 - a_0^2) + V_0(\chi + 1)u}$.

б) Рассмотрим частный случай уравнения (3.6), когда скорость однородного потока V_0 равна скорости звука в однородном потоке a_0 . Тогда получим асимптотическое трансзвуковое уравнение:

$$2\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + (\chi + 1) \bar{\varphi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0 (\bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3.8)$$

После перехода к функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ по формуле (1.5) получим уравнение для функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$:

$$-2\omega_{u\bar{t}} + (\chi + 1)u - a_0((\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}) + (\omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}}\omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$-2\omega'_3 + (\chi + 1)u - a_0((\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2) = 0.$$

Так как $\omega_0(u)$ есть произвольная функция, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)\bar{y} + \omega'_2(u)\bar{z} + \omega'_3(u)\bar{t}$.

Для нестационарного одномерного течения (в (3.8) $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$) после перехода от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u, \bar{t})$:

$$-2\omega_{u\bar{t}} + (\chi + 1)u = 0. \quad (3.9)$$

Функция $\omega(u, \bar{t})$ задается в виде $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $-2\omega'_3 + (\chi + 1)u = 0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u) = \frac{\chi + 1}{4}u^2 + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega'_0(u) + \frac{(\chi + 1)}{2}u\bar{t}$. Решение простой волны является общим решением уравнения (3.9).

В случае, когда течение двумерное установившееся ($\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0$), уравнение (3.8) будет иметь вид:

$$(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}}\bar{\varphi}_{\bar{xx}} - a_0\bar{\varphi}_{\bar{yy}} = 0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})$ к функции $\omega(u, \bar{y})$. Тогда для функции $\omega(u, \bar{y})$ получим уравнение:

$$(\chi + 1)u - a_0(\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}) = 0.$$

Функцию $\omega(u, \bar{y})$ зададим в виде: $\omega(u, \bar{y}) = \omega_0(u) + \omega_1(u)\bar{y}$. Для $\omega_1(u)$ получим уравнение: $(\chi + 1)u - a_0(\omega'_1)^2 = 0$. Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$, существует лишь при $u > 0$ и имеет вид: $x = \omega'_0 + \frac{\bar{y}}{a_0}\sqrt{a_0(\chi + 1)u}$.

в) Уточним уравнение (3.6), добавив в него линейный член порядка ε^2 трансзвукового разложения функции $\Phi(x, y, z, t)$. Тогда получим составное уравнение:

$$\bar{\varphi}_{\bar{tt}} + 2V_0\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + V_0^2\bar{\varphi}_{\bar{xx}} + V_0(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}}\bar{\varphi}_{\bar{xx}} - a_0^2(\bar{\varphi}_{\bar{xx}} + \bar{\varphi}_{\bar{yy}} + \bar{\varphi}_{\bar{zz}}) = 0. \quad (3.10)$$

Это уравнение содержит все члены как уравнения (3.1), так и уравнения (3.6). При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.10) перейдем от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ запишется в следующем виде:

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2(1 + (\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}) + (\omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}}\omega_{uu})) = 0.$$

Представляя функцию $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ в виде (1.7), получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + (V_0^2 - a_0^2) + V_0(\chi + 1)u - a_0^2((\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2) = 0.$$

Так как $\omega_0(u)$ является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)\bar{y} + \omega'_2(u)\bar{z} + \omega'_3(u)\bar{t}$.

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.10) $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$). После перехода от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u, \bar{t})$:

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 = 0. \quad (3.11)$$

Функцию $\omega(u, \bar{t})$ зададим в виде $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u = 0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u) = V_0u \mp \frac{2}{3V_0(\chi + 1)}(a_0^2 - V_0(\chi + 1)u)^{\frac{3}{2}} + C$. Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$: $x = \omega'_0(u) + (V_0 \pm \sqrt{a_0^2 - V_0(\chi + 1)u})\bar{t}$.

Если течение двумерное установившееся ($\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0$), то уравнение (3.10) принимает вид уравнения (3.6) в двумерном установившемся случае.

г) Наряду с уравнением (3.10) для описания околозвуковых течений газа используют также следующее составное уравнение:

$$\bar{\varphi}_{\bar{t}\bar{t}} + 2V_0\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + V_0^2\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + [V_0(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}} + (\chi - 1)\bar{\varphi}_{\bar{t}}]\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0^2(\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3.12)$$

При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.12) перейдем от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ запишется в следующем виде:

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + [V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_t] - a_0^2(1 + (\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}) + (\omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}}\omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + (V_0^2 - a_0^2) + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_3 - a_0^2((\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2) = 0.$$

Так как $\omega_0(u)$ является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)\bar{y} + \omega'_2(u)\bar{z} + \omega'_3(u)\bar{t}$.

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.12) $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$, $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$). После перехода от функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$ к функции $\omega(u, \bar{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u, \bar{t})$:

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_t - a_0^2 = 0. \quad (3.13)$$

Задавая функцию $\omega(u, \bar{t})$ в виде $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega'_3)^2 - 2V_0\omega'_3 + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_3 = 0$, общее решение которого можно найти. Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$.

4. Построение решений двойной волны уравнений газовой динамики

а) В качестве примера построим решение двойной волны для уравнения (2.2), описывающего безвихревые изэнтропические двумерные установившиеся течения газа или

жидкости. Заметим, что уравнение имеет вид (1.9), поэтому с помощью преобразования Лежандра (1.10) для функции $\omega(u, v)$ получим линейное уравнение:

$$-2uv\omega_{uv} + u^2\omega_{vv} + v^2\omega_{uu} - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2\right) \right] (\omega_{vv} + \omega_{uu}) = 0. \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) можно искать в виде функции, зависящей от ξ : $\omega = f(\xi)$, где $\xi = u^2 + v^2$. Для функции $f(\xi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\xi f'(\xi) - [2a_0^2 + (\chi-1)(V_0^2 - \xi)](f'(\xi) - \xi f''(\xi)) = 0,$$

$$\text{общее решение которого } f(\xi, C_1, C_2) = \int e^{\int h(\xi)d\xi + C_1} d\xi + C_2, \text{ где } h(\xi) = \frac{2a_0^2 + (\chi-1)V_0^2 - \chi\xi}{\xi[2a_0^2 + (\chi-1)(V_0^2 - \xi)]}.$$

б) Построим решение двойной волны для асимптотического трансзвукового уравнения:

$$2\varphi_{xt} + (\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} - a_0(\varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0. \quad (4.2)$$

Переходя в (4.2) от функции $\varphi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, v, z, t)$ по формулам (1.8), получим уравнение для функции $\omega(u, v, z, t)$:

$$2(\omega_{vt}\omega_{uv} - \omega_{ut}\omega_{vv}) + (\chi+1)u\omega_{vv} - a_0(\omega_{uu} - \omega_{zz}(\omega_{uu}\omega_{vv} - \omega_{uv}^2) - \omega_{uz}(\omega_{vz}\omega_{uv} - \omega_{uz}\omega_{vv}) - \omega_{vz}(\omega_{uz}\omega_{uv} - \omega_{vz}\omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u, v, z, t)$ представим в виде: $\omega(u, v, z, t) = \omega_0(u, v) + \omega_1(u, v)z + \omega_2(u, v)t$. Тогда получим систему уравнений для функций $\omega_0(u, v)$, $\omega_1(u, v)$, $\omega_2(u, v)$:

$$(-2\omega_{2u} + (\chi+1)u + a_0\omega_{1u}^2)\omega_{kvv} + (-a_0 + \omega_{1v}^2)\omega_{kuu} + 2(\omega_{2v} + a_0\omega_{1u}\omega_{1v})\omega_{kuv} = 0, \quad (4.3)$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Для функции $\omega_0(u, v)$ имеем линейное уравнение. Можно показать, что существуют функции $\omega_1(u, v)$, $\omega_2(u, v)$, которые обращают в нуль коэффициенты перед старшими производными в (4.3) (например, $\omega_k(u, v) = b_kv + F_k(u)$, $k = 1, 2$). В этом случае функция $\omega_0(u, v)$ - произвольная.

Следует отметить, что в плоском стационарном случае (в (4.2) $\varphi_z = 0$, $\varphi_t = 0$) получим линейное уравнение для плоских течений:

$$(\chi+1)u\omega_{vv} - a_0\omega_{uu} = 0, \quad (4.4)$$

для которого можно построить широкие классы решений. В частности, решение уравнения (4.4) можно искать в виде: $\omega(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u)(A_n \cos(v\lambda_n) + B_n \sin(v\lambda_n))$, где функции $g_n(u)$ являются решениями уравнения Эйри. Можно также положить $\omega(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u)e^{\lambda_nv}$.

В плоском нестационарном случае (в (4.2) $\varphi_z = 0$) система уравнений для решения типа двойной волны имеет вид:

$$(-2f_2 + (\chi+1)u)g_{kv} - a_0f_{ku} + 2g_2f_{kv} = 0, \quad f_{kv} = g_{ku}, \quad k = 0, 2, \quad (4.5)$$

где $f_k = \omega_{ku}$, $g_k = \omega_{kv}$. Решение замкнутой относительно функций f_2 , g_2 нелинейной системы можно отыскивать в параметрическом виде:

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\gamma} F_k(\xi)\eta^k, \quad g_2 = \sum_{k=0}^{\theta} G_k(\xi)\eta^k, \quad u = \sum_{k=0}^{\alpha} U_k(\xi)\eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} V_k(\xi)\eta^k.$$

Для функций f_0 , g_0 в (4.5) имеем линейную систему.

Аналогичным образом можно построить решения двойных волн для приближенных уравнений в газовой динамике:

- 1) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
- 2) $2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + V_0(\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
- 3) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + V_0(\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
- 4) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + [V_0(\chi + 1)\varphi_x + (\chi - 1)\varphi_t]\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меньших О.Ф. О бегущих волнах для нелинейных уравнений с частными производными второго порядка. – Известия высших учебных заведений. Математика. №4 (119), 1972, с.84-92.
2. Вельмисов П.А., Фалькович С.В. Некоторые классы решений околосзвуковых уравнений и уравнений коротких волн. – Сборник "Избранные проблемы прикладной механики посвященный шестидесятилетию академика В.Н.Челомея. Москва, 1974, с.215-222.
3. П.А. Вельмисов Асимптотические уравнения газовой динамики. Изд-во Сарат. ун-та, 1986, 136 с.
4. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. - 368 с.
5. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. - Новосибирск, Наука, 1984, 272 с.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - Изд. 2-е, перераб. и доп. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» , М., 1978, 687 с.

About some classes of the solutions of gas dynamics equations

© P. A. Vel'misov³, J. A. Kazakova⁴

Abstract. The solutions of the type «traveling wave» [1] are constructed for differential equations in gas dynamics. The method is proposed to obtain solutions of this type without the use of the method of differential relations, requiring the analyze of the compatibility of overdetermined systems [4-6]. For example the solutions of simple and dual waves are constructed.

Key Words: partial differential equations, gas dynamics equations, traveling waves, simple waves, dual waves.

³Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁴Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovau@mail.ru

УДК 519.64;538.945;537.62

Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагнченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина

© Н. Д. Кузьмичев¹ А. А. Федченко²

Аннотация. В работе найдена простая аналитическая зависимость распределения экранирующего сверхпроводящего тока в рамках модели Бина с учетом искривления линий магнитного поля, жестких сверхпроводников второго рода имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток) находящихся в критическом состоянии. На основе найденного распределения рассчитаны полная напряженность магнитного поля и петля гистерезиса намагнченности образцов вышеуказанной формы в разных случаях.

Ключевые слова: жесткий сверхпроводник второго рода, высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, критическая плотность тока, намагнченность, интегральное уравнение первого рода, карта распределения экранирующего сверхтока

1. Введение

Магнитные свойства высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) важны для применений в электро- и радиоизмерительной технике. В связи с этим важно знать отклики различной геометрической формы сверхпроводников на переменное и постоянное магнитные поля. Для этого необходимо иметь карту распределения экранирующего сверхпроводящего тока (сверхтока) и намагнченность образца. Работы по вышеотмеченной тематике, ведутся давно как в отечественной, так и зарубежной литературе, например [1-7]. В простейших расчетах намагнченности жестких сверхпроводников второго рода находящихся в критическом состоянии принималась полная экранировка внешнего поля в центре образца или на его оси, например, цилиндра или пластины. В этом случае распределение поля и сверхтока описывается дифференциальным уравнением. При этом сверхпроводник (цилиндр, пластина) разбивается на замкнутые области прямоугольного сечения с противоположно текущими сверхтоками, экранирующими возрастающие и убывающие внешние магнитные поля, что значительно упрощает расчеты намагнченности.

Точное решение задачи распределения сверхтока для бесконечно тонких дисков найдено Михеенко и Кузовлевым в работе [3]. В работах Брандта, например, в [5] численным методом решения интегрального уравнения 2-го рода получены численные распределения сверхтока в цилиндрах любой длины. Для этого интегральное уравнение первого рода было сведено к уравнению второго рода путем задания явного вида вольтамперной характеристики сверхпроводника с помощью уравнений электродинамики описывающих сверхпроводник. Имеются и другие работы (например, см. список литературы), но наиболее значимые отмечены выше в данном абзаце.

Численные зависимости не всегда удобны и их нахождение для конкретных случаев требует на каждом этапе численных решений интегральных уравнений. В связи с этим

¹Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

²Аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; starlightalex@gmail.com.

возникает необходимость иметь в своем арсенале аналитическое выражение распределения экранирующего сверхтока в сверхпроводнике имеющего форму, например, цилиндра любой длины.

2. Постановка задачи и модель расчета

В настоящей работе найдено приближенное аналитическое решение интегрального уравнения, описывающего распределение экранирующего сверхтока, и численно смоделирован процесс проникновения магнитного поля в короткий цилиндр жесткого сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии в рамках модели Бина [1] с учетом искривления силовых линий магнитного поля. Магнитное поле в такие сверхпроводники проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга. Силовые линии магнитного поля как внутри такого сверхпроводника, так и вне него искривлены. Изменение магнитного потока внутри указанного сверхпроводника вызывает в области проникновения нитей Абрикосова электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхток с критической плотностью J_c . В модели Бина величина J_c не зависит от локальной плотности магнитного потока.

Полное магнитное поле (сумма внешнего аксиально-направленного поля и поля созданного экранирующим сверхтоком сверхпроводящего цилиндра) определяется следующими линейными интегральными уравнениями первого рода, записанными в цилиндрической системе координат [2, 8]. Аксиальная составляющая напряженности H_z полного магнитного поля определяется выражением:

$$H_z(r, z) = H_0 + \frac{1}{2\pi} \iint_{D^+} G_z(r, z, r', z') J(r', z') dr' dz'. \quad (2.1)$$

Здесь

$$G_z(r, z, r', z') = \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \left[K(k) + \frac{r'^2 - r^2 - (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k) \right], \quad (2.2)$$

и $k^2 = \frac{4rr'}{(r' + r)^2 + (z - z')^2}$.

Радиальная составляющая H_r полного поля есть:

$$H_r(r, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D^+} G_r(r, z, r', z') J(r', z') dr' dz'. \quad (2.3)$$

Где

$$G_r(r, z, r', z') = \frac{z - z'}{r \sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \left[-K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k) \right]. \quad (2.4)$$

Здесь H_0 – напряженность внешнего аксиально-направленного магнитного поля, $J(r, z)$ – экранирующий сверхток заполняющий область сверхпроводника D^+ , который направлен в силу симметрии вдоль орта $\vec{\varphi}$ и не зависит от полярного угла φ ,

$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta / \sqrt{1 - (k \cdot \sin \theta)^2}$ и $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (k \cdot \sin \theta)^2} d\theta$ – полные эллиптические интегралы.

Для того чтобы найти $J(r, z)$ необходимо, иметь хотя бы приближенные левые части интегральных уравнений (2.1) и (2.3) [9, 10]. Задачи такого рода относятся к классу некорректных задач математической физики (см. например, [9]). Исходя из физических соображений, имеются следующие сведения. Подынтегральные выражения (ядра) уравнений (2.1) и (2.3) описывают напряженность магнитного поля создаваемого бесконечно тонким кольцом радиуса r' несущим силу тока равную $Jdr'dz'$ и являются точными решениями уравнений Максвелла [8]. В силу симметрии осевая H_z (уравнение (2.1)) и радиальная H_r (уравнение (2.3)) составляющие напряженности полного магнитного поля не зависят от угла φ . При $z \rightarrow \infty$ и (или) $r \rightarrow \infty$ составляющие поля $H_z \rightarrow H_0$ и $H_r \rightarrow 0$. В области сверхпроводника, где сверхток отсутствует (экранированная область), т.е. $J(r, z) = 0$ величины $H_z = 0$ и $H_r = 0$. Кроме того, имеется точное решение $J(r)$ для одномерного случая [3] (распределение тока в бесконечно тонком диске радиуса R):

$$J(r) = \begin{cases} J_c \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{r}{R} \left(\frac{R^2 - a^2}{a^2 - r^2} \right)^{1/2} \right], & r < a; \\ J_c, & a < r < R \end{cases} \quad (2.5)$$

Величина a описывает радиус проникновения сверхтока величиной J_c .

Следуя вышеприведенным предпосылкам, в настоящей работе определена приближенная аналитическая зависимость (квазирешение [9, 10]) экранирующего сверхтока $J(r, z)$ в модели Бина для двухмерного случая в цилиндрической геометрии. Найденное выражение имеет вид (рис. 2.1):

$$J(r, z) = \begin{cases} J_c = -|J_c| = \text{const}, & \text{при } r, z \in D^+; \\ 0, & \text{при } r, z \in D^- \end{cases} \quad (2.6)$$

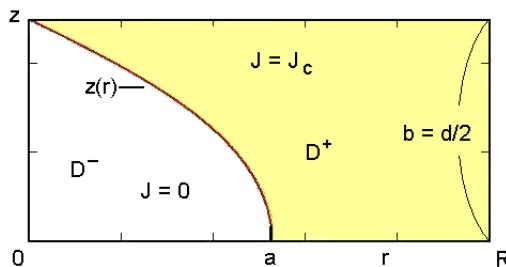


Рисунок 2.1

Сечение четверти сверхпроводящего цилиндра. Закрашенная область D^+ несет ток с критической плотностью J_c и отделена от области D^- поверхностью, заданной уравнением $z(r)$.

Область D^+ проникновения вихрей в цилиндр от области D^- , в которой вихри отсутствуют (т.е. область в которой $J(r, z) = 0$), отделяется поверхностью заданной уравнением:

$$z(r) = b \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{r}{a} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right] \right\}^{p(a)} \quad (2.7)$$

Здесь R – радиус и $d = 2b$ – длина (толщина) цилиндра (диска), a – радиус проникновения поля при $z = 0$ (см. рис. 2.1). Показатель степени $p(a)$ меняется в пределах: $0 < p(a) < 2$ и зависит также от отношения b/R (при $b \rightarrow 0$ величина $p \rightarrow 1$ и не зависит от значения a , а при $b \rightarrow \infty$ следует $p \rightarrow 0$).

В качестве критерия уклонения $\rho(z, z_t)$ приближенного z от точного решения z_t [9, 10] строилась целевая функция S , которая выбиралась следующим образом. Как было отмечено выше, сверхток и магнитное поле в экранированной области сверхпроводника отсутствуют. То есть в области D^- мы знаем точное решение. Учитывая, что в области D^- выполняются равенства $H_z = 0$ и $H_r = 0$, параметр p можно определить из условия минимума целевой функции:

$$S_{z,r}(p) = \frac{1}{N} \sum_{r_i, z_j \in D^-} \left| \frac{H_{z,r}(r_i, z_j, p)}{H_0} \right| < \varepsilon \quad (2.8)$$

Здесь N есть число выбранных точек в области D^- , а величина ε определяет точность найденного решения интегральных уравнений (2.1) и (2.3). В нашем случае она составляла менее 0,01 (1%). В случае точных решений $S = 0$.

3. Алгоритм и структура программы

Для расчёта величины напряжённости магнитного поля во всем объеме сверхпроводящего образца и в окружающем его пространстве, была разработана специальная программа на языке C#. Она позволяет достаточно быстро и с заданной точностью произвести расчет карты распределения аксиальной (2.1) и радиальной (2.3) составляющих напряжённости магнитного поля, а также намагниченности образца в целом.

При вычислении использовалась сетка $L \times K$, в частности на приведенных ниже рисунках сетка размером 100×50 (100 шагов вдоль радиуса r и 50 вдоль оси z). Разработанная программа позволяет использовать сетки больших размеров. Для каждого узла этой сетки рассчитывается соответствующие ей величины H_z и H_r при заданной величине напряжённости H_0 внешнего магнитного поля. Основное “ядро” решения – это вычисление значения двойного интеграла, определяемого уравнениями (2.1) и (2.3). При этом важно было подобрать верный численный метод для решения этой части задачи, обладающей устойчивостью [10, 11]. Также важной частью решаемой задачи было вычисление оптимальной величины параметра p определяемого выражением (2.8). Для его нахождения при помощи программы была решена отдельная задача оптимизации. Применен численный метод поиска экстремума функции известный как метод “золотого сечения” [11]. Он был выбран из-за его достаточно высокой скорости сходимости.

В качестве целевой функции при решении данной задачи оптимизации была выбрана сумма отклонений S (см. (2.8)) для области ($N = 200$ точек), в которой отсутствует магнитное поле (область D^- на рис. 2.1).

Для каждой составляющей H_z и H_r оптимальное значение параметра p было рассчитано отдельно. Однако можно отметить, что параметры для радиальной p_r и аксиальной p_z составляющих поля (рис. 3.1) несколько отличаются при проникновении поля на достаточно большую величину. Данное расхождение обусловлено приближенным характером выражения (2.7).

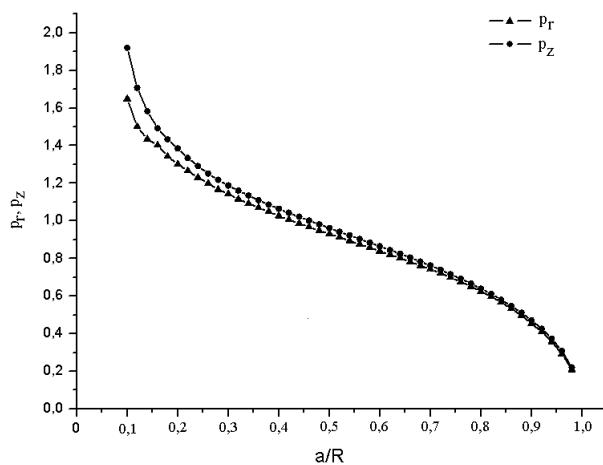


Рисунок 3.1

Зависимость показателя степени p для радиальной и аксиальной составляющих напряженности полного магнитного поля.

4. Результаты расчета магнитного поля и петли гистерезиса на-магниченности

Полученный в итоге двумерный массив представляет собой распределение напряженности магнитного поля в одной четверти фронтального сечения сверхпроводящего образца. Трехмерные графики, демонстрирующие это распределение поля $H_z(z, r)$ для цилиндра с $d/2R = 0,25$, представлены на рис. 4.1 и 4.2.

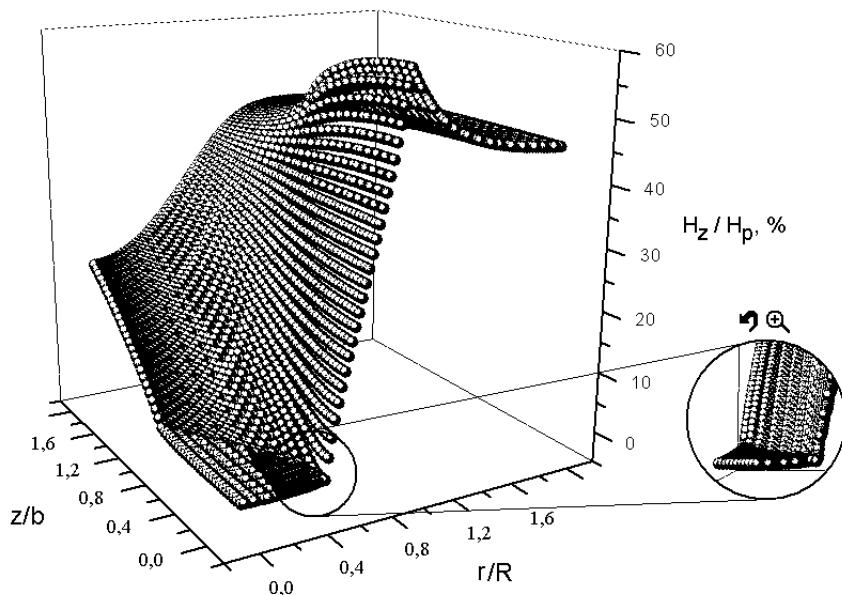


Рисунок 4.1

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля $H_z(r, z)$. Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p . Радиус проникновения поля составляет:

$$a = 0,5R.$$

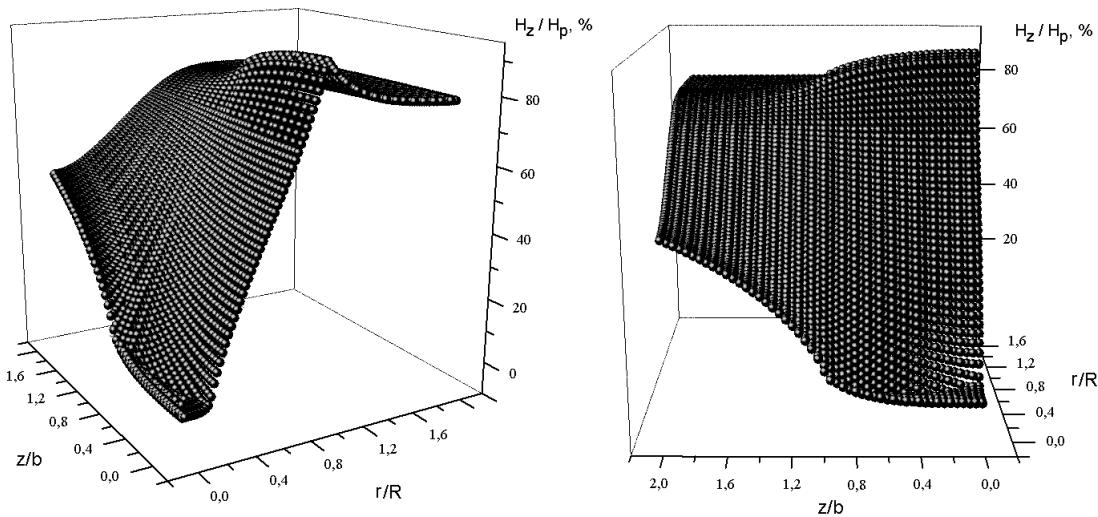


Рисунок 4.2

Трехмерный график карты распределения радиальной составляющей напряженности полного магнитного поля $H_z(r, z)$. Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p . Радиус проникновения поля составляет: $a = 0.8R$. Изометрическая и профильная проекция трехмерной карты.

При этом принималось, что внешнее поле проникло на глубины, определяемые следующими значениями радиуса a : $a = 0.5R$ (рис. 4.1) и $a = 0.8R$ (рис. 4.2). На рисунках величина поля представлена в единицах поля полного проникновения H_p , т.е. минимальной напряженности внешнего поля H_0 , при которой весь объем сверхпроводника будет занят экранирующим сверхтоком. Величина H_p определяется численно или её можно рассчитать по формуле:

$$H_p = J_c b \cdot \ln \left[\frac{R}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{R}{b} \right)^2} \right]. \quad (4.1)$$

Данная формула легко получается из решения дифференциального уравнения критического состояния в модели Бина в приближении экранировки поля в центре короткого цилиндра радиуса R и полутолщины b :

$$\frac{dH_z}{dr} = \frac{J_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2}}, \quad H_z(R) = H_0 \quad (4.2)$$

Решением задачи Коши (4.2) есть выражение для аксиальной составляющей поля:

$$H_z(r) = \begin{cases} H_0, & \text{при } r > R; \\ H_0 - J_c b \left[\operatorname{Arsh} \left(\frac{R}{b} \right) - \operatorname{Arsh} \left(\frac{r}{b} \right) \right], & \text{при } a < r < R; \\ 0, & \text{при } 0 < r < a = b \cdot \operatorname{sh} \left[\operatorname{Arsh} \left(\frac{R}{b} \right) - \frac{H_0}{J_c b} \right]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Из этого выражения вытекает формула для H_p . Отметим, что при $H_0 = H_p$ задачи в постановках (2.1) – (2.3) и (4.2) приводят к одинаковым результатам, так как экранированная область сверхпроводника стягивается в точку, находящуюся в центре на оси цилиндра.

Из рисунков 4.1 и 4.2 видно, что внутренняя область образца D^- , не затронутая магнитным полем, образует почти ровную поверхность, контур которой определяется уравнением (2.7). В тоже время в остальной области напряженность поля отлична от нуля, а на границе сверхпроводника наблюдается значительный острый “скачок” напряженности. При большом удалении от образца значение поля стремится к величине внешнего поля H_0 , как было отмечено в п. 1.

Аналогичные графики для другой составляющей $H_r(z, r)$ представлены на рис. 4.3 ($a = 0,5R$) и рис. 4.4 ($a = 0,85R$). Вне объема сверхпроводника вдали от него напряженность радиальной составляющей близится к нулю, так как вектор напряженности внешнего магнитного поля направлен вдоль оси вращения образца.

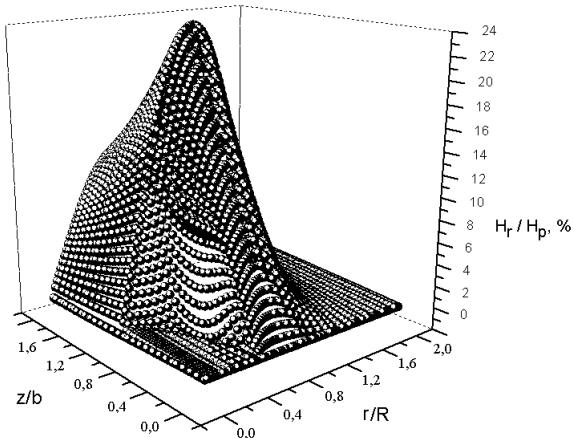


Рисунок 4.3

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля $H_r(r, z)$. Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p . Радиус проникновения поля составляет:

$$a = 0,5R.$$

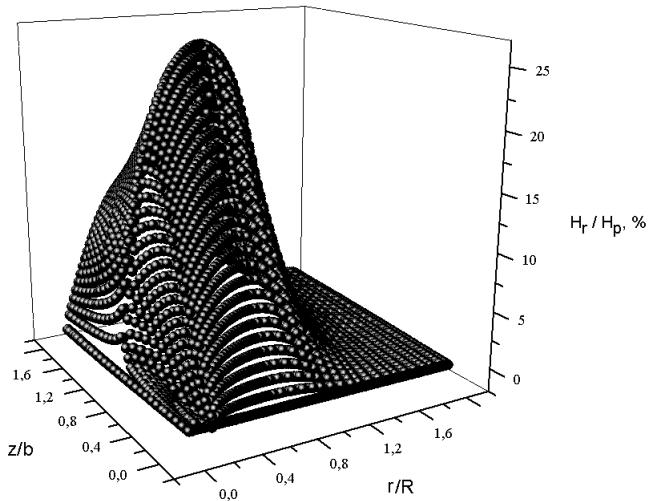


Рисунок 4.4

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля $H_r(r, z)$. Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p . Радиус проникновения поля составляет:

$$a = 0,8R.$$

Начальная кривая и петля гистерезиса намагниченности приведены на рис. 4.5. Расчет производился по найденному распределению экранирующего сверхтока. Намагниченность M цилиндрического сверхпроводника вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [8] учитывая, что экранирующий сверхток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2V} \iint_{D^+} [\mathbf{r}, \mathbf{J}_c] dV. \quad (4.4)$$

Здесь V – объем сверхпроводника, D^+ – область внутренней части цилиндра, занятая сверхтоком. Интеграл (4.4) разбивается на сумму нескольких интегралов с противоположно текущими сверхtokами. На рис. 4.5 приведены кривые намагниченности для разных величин максимальных полей циклов намагничивания. По оси абсцисс отложена напряженность магнитного поля в единицах поля полного проникновения H_p . По оси ординат отложена намагниченность цилиндра в единицах намагниченности насыщения $M_0 = J_c R / 3$ (иначе в единицах $M(H_p)$), которая получается из выражений (4.2) и (4.4) путем несложных вычислений.

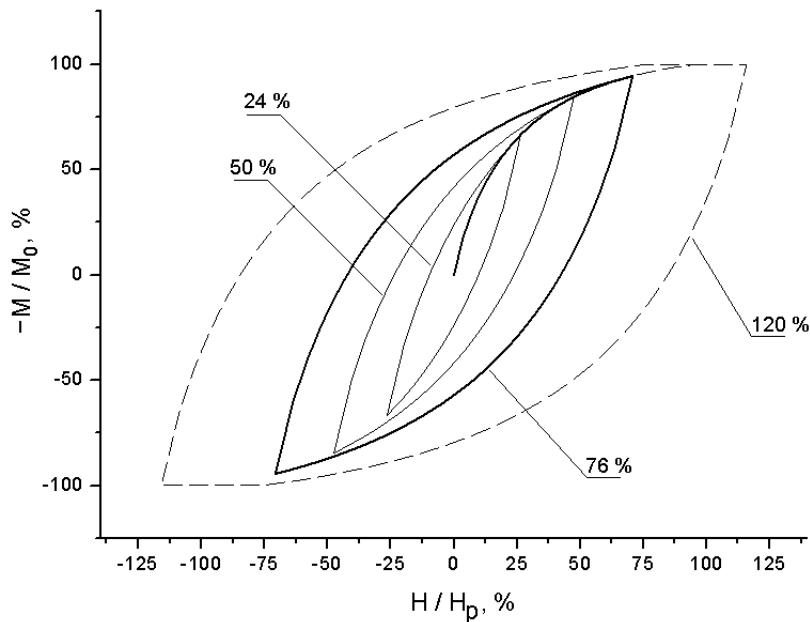


Рисунок 4.5

Начальная кривая намагниченности и петли гистерезиса намагниченности для разных значений максимальных полей цикла намагничивания H_{max} . Значение поля указано в процентах от H_p , а величина намагниченности указана единицах намагниченности насыщения.

5. Заключение

Результатами работы являются карта распределения экранирующего сверхтока (2.6) в жестких сверхпроводниках второго рода имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток) в рамках модели Бина и простое уравнение (2.7) поверхности отделяющей области цилиндра (диска) с током и без тока (см. рис. 2.1). Данные уравнения получены с учетом искривления силовых линий магнитного поля. Формула (2.7) включает единственный параметр p (показатель степени), который легко определяется нахождением минимума целевой функции (2.8). Целевая функция строится на экранированной

области цилиндра и является по своей сути отклонением точного значения поля от приближенного. Расчеты радиальной и аксиальной составляющих поля показали правильность выбора методики. Разработанную методику можно применять и в случае полевой зависимости критической плотности тока. В этом случае интегральные уравнения (2.1) и (2.3) будут нелинейными. В качестве начального приближения можно использовать полученные в работе выражения. Результаты работы можно использовать, например, при разработке магнитометра слабых магнитных полей [13] на основе ВТСП поликристаллов. Как было показано в работах [14, 15] экранирующий сверхток в таких системах в слабых магнитных полях не зависит от величины поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bean C.P. Magnetization of hard superconductors// Phys. Rev. Lett. – 1962. – V. 8. – P. 250-251.
2. Frankel D. Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors// J. Appl. Phys. – 1979. – V. 50. – P. 5402-4849.
3. Mikheenko P.N., Kuzovlev Yu.E. Inductance measurements of HTSC films with high critical currents// Physica C. – 1993. – P. 229-236.
4. Clem J.R., Sanchez A. Hysteretic ac losses and susceptibility of thin superconducting disks// Phys. Rev. B. – 1994. – V. 50. – P. 9355-9362.
5. Brandt E.H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves// Phys. Rev. B. – 1998. – V. 58. – P. 6506-6522.
6. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников// ЖТФ. – 1994. – Т. 64., Вып. 12. – С. 63-74.
7. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Гармоники намагниченности текстурированных поликристаллов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние// ФТТ. – 2007. – Т. 49. – С. 1549-1553.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред// М.: Наука – 1982. – 620 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач// М.: Наука – 1986. – 228 с.
10. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы// Киев: Наукова думка – 1986. – 544 с.
11. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп.// М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы// М.: Наука – 1989. – 284 с.
13. Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Формирование гармоник с помощью высокотемпературных сверхпроводящих поликристаллов иттриевого купрата// ЖТФ. – 2008. – Т. 78. – С. 59-62.

14. Кузьмичев Н.Д. Критическое состояние среды Джозефсона// Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 74., Вып. 5. – С. 291-295.
15. Кузьмичев Н.Д. Проникновение магнитного поля в систему слабых связей гранулярного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ // ФТТ. – 2001. – Т. 43., Вып. 11. – С. 1934-1938.

Mathematical modeling of the distribution of screening current and magnetization hysteresis of the hard type II superconductors in the form of short cylinders in Bean approximation.

© N. D. Kuzmichev³ A. A. Fedchenko⁴

Abstract. Work finds simple analytic dependence of distribution of screening superconducting current and calculates magnetization within restriction of Bean model and taking into account the curvature of the magnetic field lines for hard type II superconductors in the form of finite length cylinders and discs (tablets). On the basis of the found distribution were calculated total magnetic field intensity and magnetic hysteresis loop for these samples in different cases

Key Words: hard superconductor of the second kind, high-temperature superconductor, critical current density, magnetization, integral equation of the first kind, distribution map of the screening supercurrent.

³Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru

⁴Postgraduate student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; starlightalex@gmail.com

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 519.862.7

Построение математической модели динамики потока претендентов на поступление в аспирантуру с использованием системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

© В. А. Атряхин¹, П. А. Шаманаев²

Аннотация. В работе описывается процесс построения потока претендентов на поступление в аспирантуру. В качестве математической модели используется система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для отыскания оценок неизвестных параметров системы используется метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод наименьших квадратов, прогнозирование, интегро-интерполяционный метод.

1. Введение

В данной статье описывается модель прогнозирования изменения потока претендентов на поступление в аспирантуру среди учащихся заведений ВПО с помощью системы дифференциальных уравнений. Данная задача является подзадачей задачи прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров [1]. В основу формирования модели положены механизмы, многие годы использующиеся для прогнозирования социодемографического поведения населения, например, прогнозирования миграции городского населения [2].

Для построения прогноза всё множество студентов разбьем на два подмножества: подмножество претендентов на поступление в аспирантуру и остальные студенты. Сделать это можно, например, взяв за критерий некую фиксированную величину среднего балла на последних экзаменах. Состав группы претендентов на поступление в аспирантуру будет меняться два раза в год по итогам очередной сессии. Какие-то студенты будут выбывать из данной группы, а какие-то в неё вливаться. Очевидно, что приток (или отток) студентов в группу претендентов на поступление в аспирантуру во многом зависит от набора преподавателей и от сложности изучаемых предметов на рассматриваемом отрезке времени. Зачастую данные факторы остаются постоянным из года в год. А значит, каждый поток студентов из года в год оказывается в похожих обстоятельствах. В основу данной модели положена гипотеза о том, что численные значения потоков влияющих в группу претендентов на поступление в аспирантуру (и выбывающих из нее) определяются статистической информацией по данным показателям за некоторый отрезок времени, предшествующий прогнозируемому, количественным составом этой группы в данный момент времени и материальной заинтересованностью студентов в хороших оценках.

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

² Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

2. Постановка задачи

Очевидно, что никакое влияние в описываемой системе взаимосвязей не осуществляется мгновенно. Вся система в целом достаточно консервативна и не может сразу же реагировать на те, или иные импульсы. Рассмотрим отдельные связи. Во-первых, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с суммой капиталовложений в то, чтобы повысить материальную заинтересованность студентов в хороших оценках. Во-вторых, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с интенсивностью потока претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом. В-третьих, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с численностью претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент времени.

Таким образом, изменение потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент ставится в зависимость от численности претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент, интенсивности потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом. А значит, изменение потока присоединяющихся к претендентам на поступление в аспирантуру в момент времени t описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \quad (2.1)$$

где $w(t)$ - численность претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t ; $y(t)$ - интенсивность потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t ; $x(t)$ - сумма капиталовложений в повышение материальной заинтересованности студентов в хороших оценках в момент времени t .

Обратимся теперь к потоку покидающих группу претендентов на поступление в аспирантуру. Изменение потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент ставится в зависимость от численности претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент, интенсивности потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом.

Таким образом, изменение потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \quad (2.2)$$

где $z(t)$ - интенсивность потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t . Последнее, что нам необходимо - это балансовое уравнение, связывающее прирост и отток численности претендентов на поступление в аспирантуру с количеством людей в данной группе:

$$\dot{w}(t) = y(t) - z(t), \quad (2.3)$$

Итак, мы сформулировали модель в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \\ \dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Ставится задача отыскания коэффициентов $a', a'', b', b'', c', c''$, при которых решение системы дифференциальных уравнений (2.4) наименьшим образом «отклоняется» от известных статистических данных. Мы предполагаем, что коэффициенты дифференциальных уравнений постоянны и не зависят от времени t .

3. Переход от системы дифференциальных уравнений к вычислительной схеме

Чтобы экспериментально проверить правильность сформулированной модели, необходимо перейти от системы дифференциальных уравнений к некоторой вычислительной схеме, позволяющей оценить величины численности претендентов на поступление в аспирантуру и «миграционных» потоков в реальном масштабе времени с ориентацией на существующие методы учета. Заметим, что в системе (2.4) мы имели дело с «мгновенными» значениями численности претендентов на поступление в аспирантуру, капиталовложений, потоков вливающихся в эту группу и выбывающих из неё. На практике же мы располагаем лишь данными годового учета. Поэтому нам необходимо перейти от системы (2.4) к системе, в которой фигурируют интегралы от соответствующих функций.

Пусть длина отрезка времени $[t_0, T]$, за который можно получить информацию, равна $T - t_0 = N\delta$, где δ - шаг интегрирования. Предположим, что с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициенты системы (1) постоянны на каждом интервале $((i-1)\delta, i\delta)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Проинтегрировав систему (2.4) по интервалу $((i-1)\delta, i\delta)$ получим новую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{y}(\tau) d\tau = a' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau + b' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau + c' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau, \\ \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{z}(\tau) d\tau = a'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau + b'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau + c'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau, \\ \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{w}(\tau) d\tau = \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Поскольку практически значения величин Y, Z, w, X, R известны лишь в конечном числе точек отрезка $[t_0, T]$, то число δ удобно считать минимальным расстоянием между точками отрезка $[t_0, T]$, в которых и заданы значения этих величин.

Предположим далее, что функция $w(t)$ слабо меняется на интервале $((i-1)\delta, i\delta)$, $i = 1, 2, \dots, N$ и что значения $w(t)$ известны нам лишь на границах этого интервала. Тогда правомерна замена $\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau$ в системе (3.1) на выражение $[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Аппроксимируем конечными разностями $[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau) d\tau]/\delta$, $[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau) d\tau]/\delta$ - соответствующие производные из (3.1). С учетом этих замечаний, получим следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau) d\tau \right] / \delta = a' [w((i-1)\delta) + w(i\delta)] \delta / 2 + \\ \quad + b' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau + c' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau + d', \\ \left[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau) d\tau \right] / \delta = a'' [w((i-1)\delta) + w(i\delta)] \delta / 2 + \\ \quad + b'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau + c'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau + d'', \\ \left[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} w(\tau) d\tau \right] / \delta = \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Поскольку мы не имеем никакой информации в точках, отличных от начала (конца) года, то полагаем $\delta = 1$. Пренебрегая также погрешностями d' , d'' , получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_j^i = a_j^i [w((i-1)\delta) + w(i\delta)] / 2 + (b_j^i + 1) \bar{y}_{j-1}^i + c_j^i \bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k_j^i [w((i-1)\delta) + w(i\delta)] / 2 + (l_j^i + 1) \bar{z}_{j-1}^i + m_j^i \bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

где \bar{y}_j^i - количество студентов j -го потока, присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру после i -ой сессии, \bar{z}_j^i - количество студентов j -го потока, выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру после i -ой сессии, \bar{w}_j^i - численность группы претендентов на поступление в аспирантуру j -го потока студентов после i -ой сессии, \bar{x}_j^i - сумма капиталовложений в повышение материальной заинтересованности студентов j -го потока в хороших оценках после i -ой сессии.

4. Алгоритм проведения вычислений

Рассмотрим алгоритм проведения вычислений по предложенной модели на примере учащихся заведений ВПО категории «специалист». За весь срок обучения они 10 раз преодолевают учет знаний. Условно изменения, которые происходят за это время в группе J -ого потока претендентов на поступление в аспирантуру, представлены на рисунке 4.1.

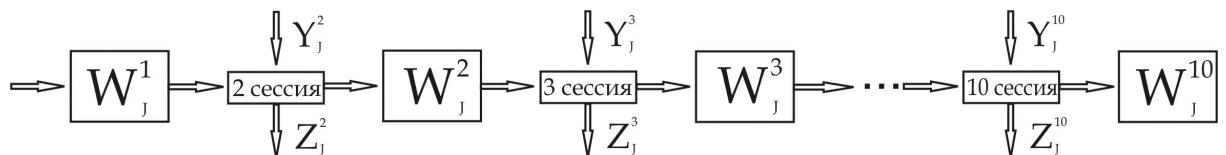


Рисунок 4.1

Предположим, что у нас есть данные о результатах первой сессии. По ним мы можем выяснить количество студентов, которые принадлежат к группе претендентов на поступление в аспирантуру w_j^i . Кроме того нам известна вся статистическая информация по N потокам, предшествующим рассматриваемому J -ому потоку: $y_j^i, z_j^i, w_j^i, x_j^i, j = \overline{J-N, J}, i = \overline{2, 10}$. Главная цель вычислений w_j^{10} . Промежуточные значения, которые

для этого придется вычислить $w_j^i, i = \overline{2, 9}$ Переобозначив коэффициенты в системе (3.3), получим систему (4.1), которой будем пользоваться для вычислений:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^i = a_j^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + b_j^i\bar{y}_{j-1}^i + c_j^i\bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k_j^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + l_j^i\bar{z}_{j-1}^i + m_j^i\bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Вычисления проводятся поэтапно для каждого i от 2 до 10. Коэффициенты $a_j^i, b_j^i, c_j^i, k_j^i, l_j^i, m_j^i$ находятся из системы (4.1) по статистическим данным. Если статистические данные доступны за три года, то система относительно коэффициентов решается численно (три уравнения - три неизвестных). Если статистические данные доступны за большее число лет, то система относительно коэффициентов решается методом наименьших квадратов. Затем w_j^i находится по формуле:

$$\bar{w}_j^i = \frac{(1 + a_j^i/2 - k_j^i/2)\bar{w}_j^{i-1} + (b_j^i - m_j^i)\bar{y}_{j-1}^i + (c_j^i - l_j^i)\bar{z}_{j-1}^i}{1 + k_j^i/2 - a_j^i/2}$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет найдено w_j^{10} .

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2010-2013 гг.» Государственный контракт № 14.740.11.0225.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаманаев П. А., Атряхин В.А. Численное моделирование динамики потока научных и научно-педагогических кадров на основе статистических данных по МГУ им. Н.П.Огарева - Саранск: Журнал СВМО, 2011. - Т. 13, №1. - с. 84-90.
2. Бородкин Ф. М., Соболева С. В. Прогнозирование численности населения и миграции системой дифференциальных уравнений - Новосибирск: Математические методы в социологии, 1974. с. 99-145.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы - М.: «Наука», 1973. 272 с.

Building of mathematical models of the dynamics stream of applicants for graduate school with system of differential equations with delay

© V.A. Atryahin³, P.A. Shamanaev⁴

Abstract. The article describes the process of constructing the flow of applicants for graduate school. As a mathematical model uses a system of ordinary of differential equations. To find the estimates unknown parameters of the method of least-squares.

Key Words: system of ordinary differential equations, least squares, forecasting, integro-interpolation method.

³Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

⁴Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

УДК 519.67

Решение экстремальных задач с помощью генетических алгоритмов

© М. Б. Беляева¹

Аннотация. В работе рассматриваются способы решения оптимизационных задач генетическими алгоритмами. Описываются правила кодирования и определения необходимой длины хромосомы. Приведен вычислительный эксперимент, подтверждающий работоспособность ГА.

Ключевые слова: генетический алгоритм, задачи оптимизации.

1. Введение

Основной механизм эволюции - это естественный отбор. Он представляет собой процесс, приводящий к выживанию и преимущественному размножению наиболее приспособленных к данным условиям среды особей, которые приносят больше потомства, чем плохо приспособленные. А так как потомки наследуют генетическую информацию своих родителей, то потомки более сильных индивидуумов так же будут более приспособленными. Таким образом, увеличивается количество особей, обладающих наиболее полезными для выживания в данных условиях признаками, а значит, приспособленность вида в целом будет с течением времени возрастать[1] [2]. Именно на таких генетических процессах биологических организмов основаны генетические алгоритмы, предназначенные для решения задач функциональной оптимизации. Генетический алгоритм (ГА) представляет собой эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию [4].

Генетические алгоритмы являются хорошо известными на данный момент представителями эволюционных алгоритмов и по своей сути являются алгоритмами для нахождения глобального экстремума многоэкстремальной функции. ГА заключается в параллельной обработке множества альтернативных решений. При этом поиск концентрируется на наиболее перспективных из них. Это говорит о возможности использования генетических алгоритмов при решении любых задач искусственного интеллекта, оптимизации, принятия решений. Откуда следует широкое практическое применение ГА в менеджменте и управлении для решения задач поиска оптимальных решений, формирования моделей и прогнозирования значений различных показателей [3].

2. Возможности генетических алгоритмов для решения задач оптимизации

Как уже было отмечено выше, эволюция - это процесс постоянной оптимизации биологических видов. Задачи оптимизации - наиболее распространенный и важный для практики класс задач. Конечно, математики издавна занимались подобными задачами и разработали множество методов их решения. В случае, если целевая функция достаточно гладкая и имеет только один экстремум (унимодальна), то оптимальное решение можно

¹Доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; Beljaeva_mb@rambler.ru.

получить, например, методом градиентного спуска. Недостатком градиентного алгоритма являются слишком высокие требования к функции - на практике унимодальность встречается крайне редко, а для «неправильной» функции градиентный метод часто приводит к неоптимальному ответу. Аналогичные проблемы возникают и с применением других математических методов.

Таким образом, возникает необходимость в каком-либо новом методе оптимизации, пригодном для практики. Одним из решений данной проблемы является применение механизмов эволюционного процесса. Фактически ГА организуют искусственную эволюцию в специально построенном мире.

Стандартный генетический алгоритм начинает свою работу с формирования начальной популяции $I_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ - конечного набора допустимых решений задачи. Эти решения могут быть выбраны случайным образом или получены с помощью вероятностных жадных алгоритмов. Выбор начальной популяции не имеет значения для сходимости процесса в асимптотике, однако формирование «хорошей» начальной популяции (например из множества локальных оптимумов) может заметно сократить время достижения глобального оптимума.

На каждом шаге эволюции с помощью вероятностного оператора селекции выбираются два решения, родители i_1, i_2 . Оператор скрещивания по решениям i_1, i_2 строит новое решение i' , которое затем подвергается небольшим случайным модификациям, которые принято называть мутациями. Затем решение добавляется в популяцию, а решение с наихудшим значением целевой функции удаляется из популяции.

Среди операторов селекции наиболее распространены два вероятностных оператора случайной и турнирной селекции. Турнирная селекция имеет определенные преимущества перед случайной, так как не теряет своей избирательности, когда в ходе эволюции все элементы популяции становятся примерно равными по значению целевой функции. Операторы селекции строятся таким образом, чтобы с ненулевой вероятностью любой элемент популяции мог бы быть выбран в качестве одного из родителей. Более того, допускается ситуация, когда оба родителя представлены одним и тем же элементом популяции. Как только два решения выбраны, к ним применяется вероятностный оператор скрещивания (crossover).

Существует много различных версий этого оператора [7], среди которых простейшим, по видимому, является однородный оператор. По решениям i_1, i_2 он строит решение i' , присваивая каждой координате этого вектора с вероятностью 0,5 соответствующее значение одного из родителей. Если вектора i_1, i_2 совпадали скажем по первой координате, то вектор i' «унаследует» это значение. Геометрически оператор скрещивания случайным образом выбирает в гиперкубе вершину i' , которая принадлежит минимальной грани, содержащей вершины i_1, i_2 . Можно сказать, что оператор скрещивания старается выбрать новое решение i' где-то между i_1, i_2 полагаясь на удачу. Более аккуратная процедура скрещивания состоит в выборе такого i' , которое является оптимальным решением исходной задачи на соответствующей грани гиперкуба. Отметим, что модификация решения i' может состоять не только в случайной мутации, но и в частичной перестройке решения алгоритмами локального поиска.

Применение локального спуска позволяет генетическому алгоритму сосредоточиться только на локальных оптимумах. Множество локальных оптимумов может оказаться экспоненциально большим, и на первый взгляд кажется, что такой вариант алгоритма не будет иметь больших преимуществ. Однако экспериментальные исследования распределения локальных оптимумов свидетельствуют о высокой концентрации их в непосредственной близости от глобального оптимума [6], [8]. Это наблюдение известно как гипотеза о существовании «большой долины» для задач на минимум или «центрального горного мас-

сива» для задач на максимум. Основное предположение заключается в том, что в среднем локальные оптимумы расположены гораздо ближе к глобальному оптимуму, чем к случайно выбранной точке. Их распределение в области допустимых решений не является равномерным. Они концентрируются в районе глобального оптимума, занимая область небольшого диаметра.

Эта гипотеза отчасти объясняет работоспособность генетических алгоритмов. Если в популяции собираются локальные оптимумы, которые согласно гипотезе сконцентрированы в одном месте, и очередное решение i' выбирается где-то между двумя произвольными локальными оптимумами, то такой процесс имеет много шансов найти глобальный оптимум. Аналогичные рассуждения объясняют работоспособность и других локальных алгоритмов. В связи с этим проверка и теоретическое обоснование данной гипотезы представляет несомненный интерес.

3. Постановка задачи

Рассмотрим пример применения генетического алгоритма для нахождения оптимального значения нелинейной целевой функции с ограничениями:

$$f(x_1, x_2) = (-2 * x_2^3 + 6 * x_2^2 + 6 * x_2 + 10) * \sin(\ln(x_1) * \exp(x_1^2)) \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

$$0.5 \leq x_1 \leq 1.1; 1 \leq x_2 \leq 4.6; \quad (3.2)$$

Точность вычислений $\varepsilon = 10^{-5}$.

Поверхность целевой функции представлена на рисунке 3.1. Про анализе поведения функции видно, что ее можно отнести к классу овражных функций, для которых градиентные методы, как правило, приходят в точки локальных экстремумов.

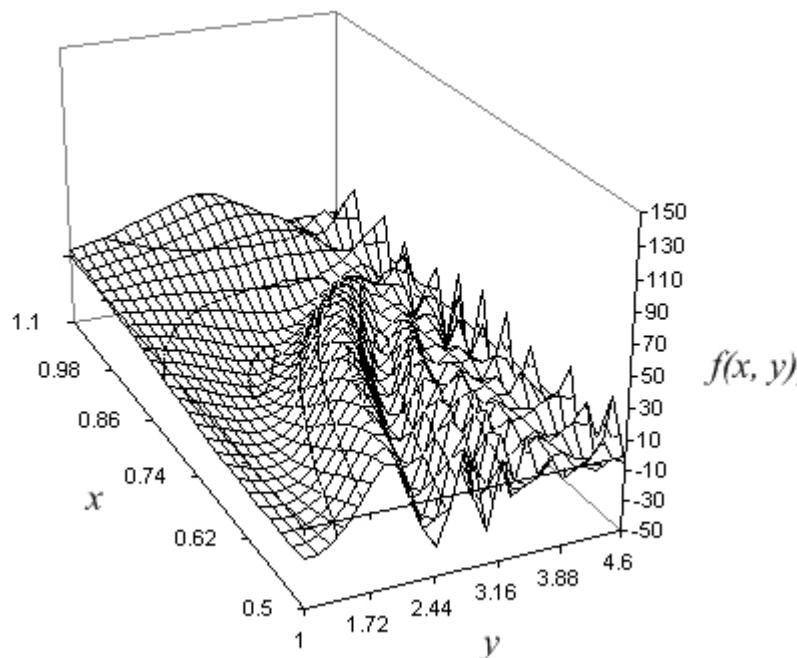


Рисунок 3.1

Поверхность целевой функции

Максимальное значение целевая функция принимает в точке:

$$x_1^* = 0.657208; x_2^* = 2.418399; \max f(x_1, x_2) = 31.31355.$$

Для реализации генетического алгоритма необходимо закодировать оптимизируемые параметры в двоичные строки. Длина строки зависит от требуемой точности. Например, пусть переменная x_j имеет интервал изменения $[a_j; b_j]$. В этом случае интервал изменения переменной должен быть разбит как минимум на $(b_j - a_j) \cdot 10^5$ квантов. Требуемое число битов находится по формуле: $2^{m_i-1} \leq (b_j - a_j) \cdot 10^5 \leq 2^{m_i} - 1$. Обратное преобразование строки битов в действительное значение переменной x_j выполняется по формуле:

$$x_j = a_j + \text{десятичное число (строка битов } j) \cdot \frac{b_j - a_j}{2^{m_i} - 1},$$

где *десятичное число (строка битов j)* представляет собой десятичное значение, закодированное в бинарной строке.

Найдем число битов, необходимых для кодирования переменных x_1 и x_2 задачи (3.1)–(3.2).

$$(1.1 - 0.5) * 100000 = 60000; 2^{15} < 60000 < 2^{16} - 1; \Rightarrow m_1 = 16;$$

$$(4.6 - 1) * 100000 = 360000; 2^{18} < 360000 < 2^{19} - 1; \Rightarrow m_2 = 19;$$

$$m = m_1 + m_2 = 16 + 19 = 35.$$

Суммарная длина хромосомы составляет 35 битов.

4. Реализация алгоритма

Исходная популяция генерируется случайно из n -го количества битовых строк.

Оценка функции соответствия хромосомы выполняется в три шага [5]:

1. Преобразовать генотип хромосомы в фенотип. В данной задаче это означает преобразование двоичной строчки в соответствующее действительное значение $x^k = (x_1^k, x_2^k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, где n – число вариантов в исходной популяции.

2. Вычислить целевую функцию $f(x^k)$.

3. Преобразовать целевую функцию в значение функции соответствия. Для решаемой задачи оптимизации функция соответствия эквивалентна целевой функции. $\text{eval}(v^k) = f(x^k), k = 1, 2, \dots, n$.

Функция соответствия играет роль среды и оценивает хромосомы по степени их приспособленности к выполнению критерия оптимизации. Далее из сформированной популяции производится случайный или турнирный отбор родительских пар для скрещивания, так как новые члены популяции образуются в результате скрещивания и мутации начального набора значений. Для скрещивания хромосом используем метод с одной точкой обмена. Мутация состоит в изменении одного или большего числа генов с вероятностью, равной коэффициенту мутации. Проделав p подобных итераций, находим наилучшее решение.

Для реализации алгоритма был составлен программный комплекс средствами визуального программирования Delphi 7 для решения различных оптимизационных задач методом ГА с применением случайного и турнирного отборов.

Вычислительный эксперимент проводился при следующих параметрах:

–размер начальной популяции: 50;

–количество скрещиваний: 100;

–процент мутаций: 0,1;

–длина хромосомы: 35.

Результат работы программы приведен в таблице 1

Таблица 1. Результаты вычислений.

Параметры	ГА случайны отбор		ГА турнирный отбор	
Номер опыта	1	2	1	2
Вероятность совпадений, %:	95	100	95	100
Количество итераций	22	61	5	33
Время счета	0 с 40 мс	0 с 111 мс	0 с 130 мс	0 с 691 мс
Полученное решение:	x=1,09985 y=2,71380 f(x,y)=30,22124	x=0,68047 y=2,50293 f(x,y)=31,24433	x=0,63828 y=2,34954 f(x,y)=31,27805	x=0,64530 y=2,37812 f(x,y)=31,30063
Относительная ошибка, %:	3,49	0,22	0,11	0,04

Анализируя данные таблицы 1, можно сделать следующие выводы:

- за 100 итераций оба метода получили приближенное решение задачи (3.1)–(3.2);
- ГА турнирный находит более точное решение за 61 итерацию, затрачивая при этом 0с. 691 мс. с относительной ошибкой 0,04%;
- ГА случайный находит решение за 33 итерации, время счета - 111 мс., допустив при этом 0,22% относительной ошибки.

Таким образом можно отметить, что в данном случае ГА с турнирным отбором находит решение задачи оптимизации более эффективно.

Генетические алгоритмы являются достаточно мощным средством и могут с успехом применяться для широкого класса прикладных задач, включая те, которые трудно, а иногда и вовсе невозможно, решить другими методами. Однако, генетические алгоритмы, как и другие методы эволюционных вычислений, не гарантирует обнаружения глобального решения за полиномиальное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейчиков, А. В. Интеллектуальные информационные системы / А. В. Андрейчиков. – Москва. – 2006. – 422 с.
2. Батищев, Д.И. Генетические алгоритмы. Решения экстремальных задач.: учеб. пособие //Воронеж, 1995. – 65 с.
3. Береснев, В. Л. Экстремальные задачи стандартизации / В. Л. Береснев, Э. Х. Гимади, В. Т. Дементьев. – Новосибирск: Наука. – 1998. – 382 с.
4. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Вороновский [и др.]. – Томск: ТГУ, 1997. – 373 с.
5. Еремеев А. В. Разработка и анализ генетических и гибридных алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации // Омск. – 2000. – 240 с.
6. Boese K. D., Kahng A. B., Muddu S. A new adaptive multi-start technique for combinatorial global optimizations. Oper. Res. Lett. v16 (1994), N2, pp 101-114.
7. Goldberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Reading, MA: Addison-Wesley. 1989.

8. Kirkpatrick S., Toulouse G. Configuration space analysis of traveling salesman problems.
J. de Phys. v46 (1985) , pp 1277-1292.

The decision of extreme problems by means of genetic algorithms

© M. B. Beljaeva²

Abstract. In work ways of the decision of optimising problems are considered by genetic algorithms. Rules of coding and definition of necessary length are described Chromosomes. Computing experiment confirming is resulted Working capacity of GA.

Key Words: genetic algorithm, optimisation problems.

²The senior lecturer of chair of mathematical modelling, Sterlitamaksky state pedagogical academy, Sterlitamak; Beljaeva_mb@rambler.ru

УДК 517.938

Нелинейная управляемая математическая модель экономической системы: генеральная компания - совместное предприятие

© Е. С. Дюба¹

Аннотация. Построена математическая модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие, которая описывается системой дифференциальных уравнений. Определены условия существования вектора управления u , доставляющего максимальное значение функционалу управления $\pi(x, u)$.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, доля рынка, прибыль, управляемость, функционал, экстремум.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается математическая модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие. Совместным предприятием является компания, работающая под маркой генеральной компании. Данная модель развития является выгодной формой ведения бизнеса. Ею пользуются во многих странах с развитой рыночной экономикой. Не так давно подобные предприятия появились и в России, и их количество растет с каждым годом. Эта система ведения бизнеса позволяет генеральной фирме расти быстрее и с меньшими капитальными затратами, чем при традиционном способе организации предприятий. В то же время предприниматель, присоединившийся к такой системе, снижает свой риск, так как покупает уже готовый бизнес, занявший определенную нишу, технологии которого были всесторонне опробованы на практике.

Подобную систему рассматривали в своей работе Рудашевский В.Д. и Фурщик М.А.[1].

Рассмотрим математическую модель развития экономической системы, состоящую из генеральной компании и $n-1$ совместного предприятия. Предположим, что финансовый рынок может быть разделен между совместными предприятиями и генеральной компанией в любой пропорции. Пусть x_1 - доля рынка, занятая генеральной компанией, x_i $i \in \{2, n\}$ - доля рынка, занятая i -ым совместным предприятием.

Символом \dot{x}_1 будем обозначать темп изменения доли финансового рынка генеральной компании. Он зависит от занимаемой доли рынка самой генеральной компании и всех её совместных предприятий в момент времени t . Также будут оказывать влияние управляющие воздействия, то есть вложения в рекламу и развитие качества товаров или услуг. Для успешного развития своей марки генеральной компании приходится поддерживать совместные предприятия. Она выделяет либо часть своих средств, либо часть средств других совместных предприятий, либо оказывает поддержку в виде дополнительных управляющих воздействий.

Таким образом, темп изменения доли финансового рынка генеральной компании определяется равенством $\dot{x}_1(t) = \sum_{i=1}^n a_{1i}(t)x_i + \sum_{j=1}^m b_{1j}(t)u_i + \bar{f}_1(t, x, u)$, где $u = (u_1, \dots, u_m)$ - вектор-управление, $\bar{f}_1(t, x, u)$ включает все нелинейные слагаемые.

¹ Аспирант кафедры математики и МПМД, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; dyuba-lisa@rambler.ru.

Изменение доли финансового рынка, занимаемого первым совместным предприятием, \dot{x}_2 зависит от долей рынка, которые занимают генеральная компания и остальные совместные предприятия, от выбранных этой компанией управлений действий (вложение средств в исследование рынка, оптимальная организация работы компании). Если этой компании необходима поддержка, её может оказать генеральная компания из своих средств или из средств одного или нескольких совместных предприятий, либо в виде организации дополнительных управляющих воздействий.

Темп изменения доли финансового рынка первого совместного предприятия определяется равенством $\dot{x}_2(t) = \sum_{i=1}^n a_{2i}(t)x_i + \sum_{j=1}^m b_{2j}(t)u_i + \bar{f}_2(t, x, u)$. Для второго совместного предприятия аналогично получим $\dot{x}_3(t) = \sum_{i=1}^n a_{3i}(t)x_i + \sum_{j=1}^m b_{3j}(t)u_i + \bar{f}_3(t, x, u)$.

В общем случае получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \bar{f}(t, x, u), \quad (1.1)$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - доли рынка, занятые генеральной компанией и $n-1$ совместным предприятием, \dot{x}_i , $i \in \{1, n\}$ - темп изменения каждой из этих величин при $t \in [0, T]$, T - некоторое положительное число, $u = (u_1, \dots, u_m)$ - вектор-управление. $A(t)$ - $n \times n$ -матрица, $B(t)$ - $n \times m$ -матрица, коэффициенты которой учитывают вложения в управляющие воздействия. Вектор-функция $\bar{f}(t, x, u)$ имеет порядок выше первого по x и u одновременно и учитывает влияние нелинейных членов на темп изменения величин $x_i(t)$.

Цель исследования состоит в том, чтобы найти управление экономической системы, при котором генеральная компания получит наибольшую прибыль за исследуемый период времени.

Прибыль генеральной компании за время $t \in [0, T]$ определяется функционалом $\pi(x, u) = \int_0^T \Phi(t, x, u)dt$, где $\Phi(t, x, u)$ - некоторая нелинейная функция, в которой учитываются доход от деятельности генеральной компании и совместных предприятий, приносимый вложениями в управляющие воздействия, расходы на инвестиции в развитие сети.

2. Постановка задачи

Предположим, что $x = x(t, \alpha, u_0)$, $x(0, \alpha, u_0) = \alpha$ известное решение системы (1.1), при фиксированном α , определённое на сегменте $[0, T]$, $\alpha \in E_n$, $u_0 \in E_m$. Обозначим его $x = x(t, u_0)$.

Ставится задача найти управление u , при котором решение системы (1.1), определённое на сегменте $[0, T]$, приносит генеральной компании максимальную прибыль, т.е. доставляет максимум функционалу $\pi(x, u)$.

3. Определение условий, доставляющих максимальную прибыль генеральной компании

Заменой переменных $y = x - x(t, u_0)$, $v = u - u_0$ система (1.1) сводится к системе

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + f(t, y, v), \quad (3.1)$$

где $f(t, y, v) = \bar{f}(t, y + x(t, u_0), v + u_0) - \bar{f}(t, x, u)$.

Функционал $\pi(x, u)$ в новых переменных определится равенством $\pi(y, v) = \int_0^T \Phi(t, y + x(t, u_0), v + u_0)dt$.

Введём следующие обозначения: $D(\delta_0) = \{(t, y, v) : t \in [0, T], y \in E_n, |y| \leq \delta_0, v \in E_m, |v| \leq |\delta_0|\}$, $C(\delta_0) = \{c : c \in E_n, |c| \leq \delta_0\}$, $V(\delta_0) = \{v : v \in E_m, |v| \leq \delta_0\}$, $\delta_0 < 0$ - некоторое число, $z = (y, v)$, $|z| = \max \{|y|, |v|\}$, $\gamma = (c, v)$, $|\gamma| = \max \{|c|, |v|\}$.

Будем предполагать, что на множестве $D(\delta_0)$ матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $f(t, y, v)$ определены, непрерывны, $|f(t, y_1, v) - f(t, y_2, v)| \leq L |y_1 - y_2|$, $L > 0$ - некоторое число, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(t, y, v)}{|z|} = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T]$.

Непосредственно подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением системы (3.1) при $v = 0$. Тогда существует $\delta \in (0, \delta_0]$ такое, что при любых $c \in C(\delta)$ и $v \in V(\delta)$ система (3.1) имеет решение $y = \bar{y}(t, c, v)$, $\bar{y}(0, c, 0) = c$, определённое на сегменте $[0, T]$, непрерывное на множестве $[0, T] \times C(\delta) \times V(\delta)$ и удовлетворяющее на этом множестве неравенству $|\bar{y}(t, c, v)| \leq \delta_0$.

Одновременно с системой (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + f(t, \bar{y}(t, c, v), v). \quad (3.2)$$

Т е о р е м а 3.1. *Решение $y = \bar{y}(t, c, v)$ системы (3.1) является решением системы (3.2), а решение $y(t) = X(t)c + R(t)v + P(t, \bar{y}(t, c, v), v)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица системы $\dot{y} = A(t)y$, $X(0) = E$, $R(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$, $P(t, \bar{y}(t, c, v), v) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau, \bar{y}(\tau, c, v), v)d\tau$, системы (3.2) является решением системы (3.1) и справедливо равенство $y(t) = \bar{y}(t, c, v)$ при любом $t \in [0, T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что решение $y = \bar{y}(t, c, v)$ системы (3.1) является решением системы (3.2), проверяется непосредственной подстановкой $\bar{y}(t, c, v)$ в равенство (3.2).

Решением системы (3.2) является и вектор-функция $y(t) = X(t)c + R(t)v + P(t, \bar{y}(t, c, v), v)$, принимающая значение c при $t = 0$ и $v = 0$.

Таким образом, система (3.2) имеет два решения с одинаковыми начальными данными. По теореме существования и единственности решений линейных систем дифференциальных уравнений получим, что при любом $t \in [0, T]$ $\bar{y}(t, c, v) = X(t)c + R(t)v + P(t, \bar{y}(t, c, v), v)$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. *Решение $\bar{y}(t, c, v)$ системы (3.1) представимо в виде $\bar{y}(t, c, v) = X(t)c + R(t)v + o(|\gamma|)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $\bar{y}(t, c, v) = c + \int_0^t (A(\tau)\bar{y}(\tau, c, v) + B(\tau)v + f(\tau, \bar{y}(\tau, c, v), v))d\tau$, следует, что $|\bar{y}(t, c, v)| \leq |c| + \|B(\cdot)\| |v| T + (\|A(\cdot)\| + L) |\bar{y}(\tau, c, v)|$, $\|A(\cdot)\|$, $\|B(\cdot)\|$ - нормы соответственно матриц $A(t)$ и $B(t)$. Тогда по лемме Гронуолла-Беллмана [2] $|\bar{y}(t, c, v)| \leq (|c| + \|B(\cdot)\| |v| T) \exp(\|A(\cdot)\| + L)T$. Поэтому $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \bar{y}(t, c, v) = 0$, а следовательно, учитывая, что $z(t, c, v) = (y(t, c, v), v)$, и $\lim_{\gamma \rightarrow 0} z(t, c, v) = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T]$.

Так как $|z(t, c, v)| \leq |\bar{y}(t, c, v)| + |c|$, $\frac{|\bar{y}(t, c, v)|}{|\gamma|} \leq (1 + \|B(\cdot)\| T) \exp(\|A(\cdot)\| + L)T$ на множестве $[0, T] \times C(\delta) \times V(\delta)$, то на этом множестве величина $\frac{|z(t, c, v)|}{|\gamma|}$ ограничена.

По предположению $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(t, y, v)}{|z|} = 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Поэтому $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(t, \bar{y}(t, c, v), v)}{|\gamma|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{|f(t, \bar{y}(t, c, v), v)|}{|z(t, c, v)|} \cdot \frac{|z(t, c, v)|}{|\gamma|} = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Отсюда в силу ограниченности матриц $X(t)$, $X^{-1}(t)$ на сегменте $[0, T]$ получим $P(t, \bar{y}(t, c, v), v) = o(|\gamma|)$, а $\bar{y}(t, c, v) = X(t)c + R(t)v + o(|\gamma|)$ на множестве $[0, T] \times C(\delta) \times V(\delta)$.

Теорема доказана.

Предположим, что в окрестности точки $(c, v) = (0, 0)$ функционал имеет вид $\pi(y, v) = \bar{\Phi}(u_0) + \bar{D}(u_0)\gamma + \bar{Q}_l(u_0, \gamma) + o(|\gamma|^l)$, где $\bar{\Phi}(u_0) = \int_0^T \Phi(t, x(t, u_0), u_0)dt$, $\bar{D}(u_0)$ - известная матрица, $\bar{Q}_l(u_0, \gamma)$ - вектор-форма порядка l , $l \geq 2$, относительно координат вектора γ .

Справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 3.3. Необходимым условием существования точки экстремума функционала $\pi(x, u)$ является выполнение равенства $\bar{D}(u_0) = 0$.

Т е о р е м а 3.4. Пусть вектор u_0 таков, что $\bar{D}_1(u_0) = 0$. Тогда:

1. если форма $\bar{Q}_l(u_0, \gamma)$ знакопределенная, то на решении $x = x(t, u_0)$ системы (1.1) функционал $\pi(x, u)$ имеет экстремум, минимум при $\bar{Q}_l(u_0, \gamma) > 0$, максимум при $\bar{Q}_l(u_0, \gamma) < 0$.
2. если форма $\bar{Q}_l(u_0, \gamma)$ знакопеременная, то функционал $\pi(x, u)$ на решении $x = x(t, u_0)$ системы (1.1) экстремума не имеет.

Таким образом, теоремы 3.3 и 3.4 определяют условия существования вектора u_0 , при котором функционал $\pi(x, u)$ имеет максимум на решении $x = x(t, u_0)$ и, следовательно, определяют существование стартового состояния системы «генеральная компания – совместное предприятие» и её управление, при которых генеральная компания получает наибольшую прибыль.

4. Пример

Пусть в системе (1.1) x_1 - доля рынка, занятая генеральной компанией, x_2 – доля рынка, занятая совместным предприятием. Предположим, что изменение доли рынка генеральной компании зависит лишь от доли рынка, занимаемой ей в момент времени t с коэффициентом 0,6, а для совместного предприятия с коэффициентом 0,3. Генеральная компания несет расходы на управляющие воздействия, равные -0,6. Таким образом, в системе (1.1) $A = (\text{colon}(0, 6; 0), \text{colon}(0; 0, 3))$, $B = (\text{colon}(-0, 6; 0))$. Нелинейные слагаемые опишутся вектором $\bar{f}(t, x, u) = (\text{colon}(-x_1^2 - 1, 5x_1x_2 + 0, 3x_1u + 1, 5x_2u + 0, 7u^2 + 2, 5x_1^2x_2 - 0, 5x_1^2u - 2, 5x_2u^2 + 0, 5u^3), (-0, 5x_1x_2 - 0, 75x_2^2 - 0, 35x_2u - 0, 25x_1x_2u + 1, 25x_1x_2^2 + 1, 25x_2^2u - 0, 25x_2u^2))$. Исследуем эту модель за время $t \in [0, 1]$. Функционал прибыли описывается равенством $\pi(x, u) = \int_0^1 \Phi(x, u) dt$, в котором $\Phi(x, u) = 0, 4x_1u - 0, 16x_1^2 - 0, 25u^2 - 0, 15x_1x_2 + 0, 2u$.

Решением системы дифференциальных уравнений является вектор-функция $x(u) = (\text{colon}(0, 6 - u), (0, 4 - 0, 2u))$. Определим условия существования управления u_0 , при котором генеральная компания получит максимальную прибыль.

Заменой переменных $y = x - x(u_0)$, $v = u - u_0$ система (1.1) сводится к системе

$$\dot{y} = f(y, v), \quad (4.1)$$

в которой $f(y, v)$ – известная вектор-функция, второго и выше порядка. Таким образом, по теореме 3.2 решение системы (4.1) записывается так $y(t, c) = c + o(|\gamma|)$.

Функционал в новых переменных примет вид $\pi(y, v) = \bar{\Phi}(u_0) + \bar{D}(u_0)\gamma + \bar{Q}_2(u_0, \gamma) + o(|\gamma|^2)$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при $u_0 = 0, 42$ $\bar{\Phi}(u_0) = 0, 056$, $\bar{D}(u_0) = 0, 71 - 1, 68u_0 = 0$ и $\bar{Q}_2(u_0, \gamma) = -0, 0936v^2$. Следовательно, выполнены условия теорем 3.3 и 3.4. Это значит, что в точке $u_0 = 0, 42$ функционал принимает максимальное значение. Если расход генеральной компании на управление составит $u_0 = 0, 5$, то её прибыль уменьшится и будет равна $\pi(x, u) = 0, 051$.

Таким образом, в точке $u_0 = 0, 42$ функционал $\pi(x, u)$ имеет максимум, генеральная компания получит прибыль $\pi(x, u) = 0, 056$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудашевский В.Д., Фурщик М.А. Проблемы предприятий. Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы. // Экономика и математические методы. - 1998. - Том 34. №2. - С. 89-104.
2. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.

Nonlinear control mathematical model of the economic system: general company - joint enterprise.

© E. S. Dyuba²

Abstract. A mathematical model of the economic system: the General Company - a joint enterprise, described by a system of differential equations has been made. The conditions for the existence of vector control u , delivering maximum significance to the functional management I have been defined.

Key Words: system of the differential equations, market share, profits, control, functional, extremum.

REFERENCES

1. Rudashevsky V.D., Furschik M.A. Problems of enterprises. The optimal strategy for the development of a franchising system. // Economics and Mathematical Methods. - 1998. - V. 34. , №2. - P. 89-104.
2. Demidovich B.P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability – M.: Nauka, 1967. – 472 p.

²A post graduate student Char of Mathematics and MTMD, Ryazan State University after A.S. Esenin, Ryazan; dyuba-lisa@rambler.ru.

УДК 517.938

О бифуркациях в моделях гиперболического шума

© Е. В. Жужома¹, Н. В. Исаенкова², В. С. Медведев³

Аннотация. В работе доказывается, что сколь угодно малым (в C^0 -топологии) возмущением отображения Смейла можно получить отображение с нетривиальным нульмерным гиперболическим множеством. Полученное отображение можно использовать в системах передачи информации с полной хаотической синхронизацией.

Ключевые слова: гиперболические неблуждающие множества, диффеоморфизмы Смейла-Вильямса, хирургия Смейла, синхронизация хаотических генераторов

1. Введение

Одной из основных задач коммуникации при передаче сообщений является конфиденциальность. Для ее решения в начале 90-ых годов прошлого века было предложено использовать шум. Применение шума основано на следующей идее. Вместе с полезным сообщением передается более «громкий», шум. Для тех, кому данное сообщение не предназначено, воспринимают сигнал как шум. Предположим, что на приемном пункте могут синхронно воспроизвести этот шум (данный метод называется полной хаотической синхронизацией [3]). Тогда естественно предположить, что на приемном пункте могут и убрать эту хаотическую «маску», выделив полезное сообщение. Впервые, видимо, синхронизируемый хаос был предложен Л. Пекорой, Т. Кэрроллом [15] и реализован К.Куомо, А. Оппенгеймом [8], см. [18]. Отметим, что один из первых примеров простой электрической схемы, в которой целенаправленно реализовался режим хаотических автоколебаний, был предложен А.С. Пиковским и М.И. Рабиновичем [6].

Первые радиотехнические реализации синхронизируемого хаоса были основаны на генераторах, которые описывались системами дифференциальных уравнений, аналогичными системе Лоренца. Известно, что неблуждающее множество системы Лоренца не является равномерно гиперболическим, и не обладает, следовательно, присущей гиперболическим системам устойчивостью (грубостью). Это приводило к тому, что передача сигнала в канале связи была слишком чувствительна к помехам. Ситуация изменилась в лучшую сторону, когда С.П.Кузнецовым и его соратниками была предложена серия радиотехнических генераторов, в фазовом пространстве которых были реализованы равномерно гиперболические неблуждающие множества [4], [5], [11]-[13]. Большая часть примеров содержала (динамическую) надстройку над отображением (последования Пуанкаре), переводящего полноторий в себя так, что его образ прокручивался вдоль оси полнотория не менее двух раз. Известно, что если отображение последования Пуанкаре является отображением Смейла полнотория в себя (сжатие в направлении, перпендикулярном оси полнотория, и равномерное растяжение вдоль оси полнотория), то оно имеет соленоидальный гиперболический аттрактор (аттрактор Смейла). Поскольку топологически он локально гомеоморфен произведению канторова множества на отрезок, то аттрактор Смейла относят в список странных аттракторов.

¹Профессор кафедры математики, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhom@ mail.ru.

²Аспирант кафедры математического анализа, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@ mail.ru

³Старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

Анализ некоторых работ, в частности, работы [5], показывает, что отображение вдоль оси полнотория не всегда является равномерно растягивающим. Поэтому возникла необходимость исследовать более общий класс диффеоморфизмов полнотория в себя. В [2] был введен такой класс диффеоморфизмов (диффеоморфизмы Смейла-Виеториса), существенная часть которых составляла диффеоморфизмы полнотория в себя (в параграфе 2. мы приводим точное определение). В предположении, что неблуждающее множество имеет гиперболическую структуру, было показано, что кроме соленоидального аттрактора Смейла может быть совокупность конечного набора изолированных периодических орбит и нетривиального нульмерного базисного множества. Возникает естественный вопрос о возможности плавного перехода от одного случая к другому, и о возможности реализации нетривиальных (соленоидальных) базисных множеств в реальных системах.

Цель данной статьи показать, что сколь угодно малым (в C^0 -топологии) возмущением отображения Смейла можно получить отображение с нетривиальным нульмерным гиперболическим множеством (см. теорему 3.1.). Построенное возмущение напоминает хирургию Смейла при построении ДА-диффеоморфизма из диффеоморфизма Аносова. Отметим, что оба диффеоморфизма полнотория в себя (как диффеоморфизма Смела, так и его возмущение) Ω -устойчивы. Поэтому не существует аналогичного возмущения, которое будет сколь угодно малым в C^1 топологии.

2. Предварительные сведения

В данном параграфе мы напоминаем необходимые определения и вводим диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, включающие классический пример Смейла с гиперболическим соленоидальным аттрактором (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1]).

2.1. Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом [19] в 1927 году и независимо Ван Данцигом [9] в 1930 году, и изучались ими с различных точек зрения. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [17], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом. Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория. Отображение, индуцируемое на оси полнотория, есть растягивающийся эндоморфизм окружности, который является Ω -устойчивым (даже структурно устойчивым) отображением [16]. Известно [7], что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия. Этот результат и пример Смейла естественным образом приводят к следующему обобщению конструкции Смейла.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0; 1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, заданная естественной параметризацией $[0; 1] \rightarrow S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y) . Сюръективное C^1 отображение $g : S^1 \rightarrow S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной Dg . Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу d -накрытий (т.е., отображений окружности

в себя степени d , которые являются локальными гомеоморфизмами). Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу SV ⁴, если существует вложенный в M^3 полноторий \mathcal{B}^3 (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathcal{B}^3 \subset M^3$, базовым полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^3} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^3 \rightarrow F(\mathcal{B}^3) \subset \mathcal{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид

$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^2, \quad (2.1)$$

где $g : S^1 \rightarrow S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\} \times D^2} : \{t\} \times D^2 \rightarrow \mathcal{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1 вложением

$$\{t\} \times D^2 \rightarrow \text{int}(\{g(t)\} \times D^2) \quad (2.2)$$

т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что

$$\text{diam}(F^n(\{t\} \times D^2)) \leq C\lambda^n \text{diam}(\{t\} \times D^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

В классическом примере Смейла [17] эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d : S^1 \rightarrow S^1$ вида $E_d(x) = dx \bmod 1$ степени $d \geq 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathcal{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\cap_{n \geq 0} F^n(\mathcal{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1 . В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним [2]. Именно, соленоид может содержать ровно одно нетривиальное нульмерное гиперболическое множество, а также конечное (ненулевое) число стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число седловых изолированных периодических точек.

2.2. Свойства диффеоморфизмов Смейла-Виеториса

Обозначим через \mathfrak{M} множество преобразований $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям (2.1)-(2.3). Обозначим через $\text{End}_0^1(S^1)$ наделенное C^0 топологией пространство сохраняющих ориентацию неособых C^1 -эндоморфизмов окружности.

Л е м м а 2.1. *Пусть $F(t, z) = (g(t), w(t, z)) \in \mathfrak{M}$. Тогда в C^0 топологии существует окрестность $U(g)$ отображения g в пространстве $\text{End}_0^1(S^1)$ такая, что для любого $g' \in U(g)$ преобразование $F' = (g', w)$ принадлежит \mathfrak{M} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Якобиан J отображения F равен $|Dg \cdot J_w|$ и отличен от нуля, так как F – C^1 диффеоморфизм, где J_w – якобиан $w(t, z)$. Поскольку $g' \in \text{End}_0^1(S^1)$ имеет положительную производную, то преобразование $F' = (g', w)$ также имеет отличный от нуля якобиан и, следовательно, является локальным диффеоморфизмом. Осталось показать, что в некоторой окрестности $U(g)$ отображения g преобразования $F' = (g', w)$, $g' \in U(g)$, взаимно однозначны.

⁴Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale, Vietoris

Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geq 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \dots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (2.4)$$

т.е. диски $F(t_1, D^2), \dots, F(t_d, D^2)$ попарно не пересекаются. Положим

$$\alpha_g(t) = \min_{i \neq j} \{ |w_i - w_j| : w_i \in F(\{t_i\} \times D^2), w_j \in F(\{t_j\} \times D^2) \}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) вытекает, что $\alpha_g(t) > 0$ для любого $t \in S^1$. Покажем, что существует $\alpha_g^* > 0$ такое, что $\alpha_g(t) \geq \alpha_g^*$ для всех $t \in S^1$.

Предположим противное. Тогда существует последовательность t_k такая, что $\alpha(t_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку функция $w(t, z)$ непрерывна, то минимум в правой части (2.5) достигается. Поэтому для каждой точки t_k существуют $t_i^k, t_j^k \in S^1$ и точки $z_i^k, z_j^k \in D^2$ такие, что $\alpha(t_k) = |w(t_i^k, z_i^k) - w(t_j^k, z_j^k)|$, где $g(t_i^k) = g(t_j^k) = t_k$. Не уменьшая общности, можно считать, что последовательности t_k, t_i^k сходятся, $t_k \rightarrow t_*, t_i^k \rightarrow t_1^*$, так как индекс $i = i(k)$ может принимать только значения от 1 до d . Пересядя, если необходимо к подпоследовательности, можно считать, что соответствующие последовательности t_j^k, z_i^k, z_j^k также сходятся, $t_j^k \rightarrow t_2^*, z_i^k \rightarrow z_1^*, z_j^k \rightarrow z_2^*$. Ясно, что $t^* = g(t_1^*) = g(t_2^*)$.

В силу того, что производная Dg строго положительна и отделена от нуля некоторой положительной константой, число

$$\beta(t) = \min_{t_k, t_j} \{ |t_k - t_j| : g(t_k) = g(t_j) = t, t_k \neq t_j \}$$

положительно для любого $t \in S^1$ и непрерывно зависит от t . Поскольку S^1 – компакт, то существует $\beta_* > 0$ такое, что $\beta(t) \geq \beta_*$ для всех t . Поэтому $|t_i^k - t_j^k| \geq \beta_*$ и, следовательно, $t_1^* \neq t_2^*$. Имеем

$$|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)| \leq |w(t_1^*, z_1^*) - w(t_1^k, z_1^k)| + |w(t_1^k, z_1^k) - w(t_2^k, z_2^k)| + |w(t_2^k, z_2^k) - w(t_2^*, z_2^*)|. \quad (2.6)$$

Так как функция $w(t, z)$ равномерно непрерывна, то $|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_1^k, z_1^k)|$ и $|w(t_2^*, z_2^*) - w(t_2^k, z_2^k)|$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поскольку в силу предположения о противном, $|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)|$ также стремится к нулю, то правая часть (2.6) может быть сколь угодно малой. Из $\alpha(t^*) \leq |w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)|$ вытекает, что $\alpha(t^*) = 0$, что противоречит тому, что $\alpha_g(t) > 0$ для любого $t \in S^1$.

Учитывая, что точки w_i, w_j в (2.5) имеют вид $w(t_i, z_1), w(t_j, z_2)$, получаем, что

$$|w(t_i, z_1) - w(t_j, z_2)| \geq \alpha_g^*, \quad i \neq j \quad \forall z_1, z_2 \in D^2. \quad (2.7)$$

Так как отображение w непрерывно и задано на компактном множестве $S^1 \times D^2$, то w равномерно непрерывно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство $|t - s| < \delta$ влечет неравенство $|w(t, z) - w(s, z)| < \varepsilon$ для любых $t, s \in S^1$ и любой точки $z \in D^2$. Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_g^*}{3}$. Соответствующее $\delta > 0$ обозначим через δ_* . Таким образом,

$$|t - s| < \delta_* \Rightarrow |w(t, z) - w(s, z)| < \frac{\alpha_g^*}{3}. \quad (2.8)$$

Поскольку g – неособый эндоморфизм, то существует константа $\beta > 0$ такая, что $Dg \geq \beta$. Поэтому существует окрестность $U(g)$ отображения g в пространстве $End_0^1(S^1)$

такая, что для любого $g' \in U(g)$ и любого $t \in S^1$ выполняется следующее свойство. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ попарно различны и такие, что $t = g(t_1) = \dots = g(t_d)$. Тогда полный прообраз $(g')^{-1}(t)$ состоит из d точек $t'_1, t'_2, \dots, t'_d \in S^1$, которые можно так перенумеровать, что выполняются неравенства $|t_i - t'_i| < \delta_*$ для всех $i = 1, \dots, d$.

Покажем, что окрестность $U(g)$ является искомой. Предположим, что для $g' \in U(g)$ преобразование $F' = (g', w)$ не является взаимно однозначным, то есть $(g'(s_1), w(s_1, z_1)) = (g'(s_2), w(s_2, z_2))$ для некоторых $s_1, s_2 \in S^1, z_1, z_2 \in D^2$. Тогда $g'(s_1) = g'(s_2) = t'$. В силу выбора окрестности $U(g)$, существуют t_1, t_2 такие, что $|t_1 - s_1| < \delta_*$, $|t_2 - s_2| < \delta_*$, $g(t_1) = g(t_2) = t'$. Точки $F(t_1, w(t_1, z_1)), F(t_2, w(t_2, z_2))$ принадлежат одному диску $\{t'\} \times D^2$. Отсюда и (2.8) вытекает

$$|w(t_1, z_1) - w(s_1, z_1)| < \frac{\alpha_g^*}{3}, \quad |w(t_2, z_2) - w(s_2, z_2)| < \frac{\alpha_g^*}{3}.$$

Тогда

$$|w(t_1, z_1) - w(t_2, z_2)| \leq |w(t_1, z_1) - w(s_1, z_1)| + |w(s_2, z_2) - w(t_2, z_2)| \leq \frac{2}{3}\alpha_g^*,$$

что противоречит (2.7). Лемма доказана.

Доказательство закончено.

2.3. Эндоморфизм окружности с канторовым неблуждающим множеством

Первый пример непрерывного эндоморфизма окружности с канторовым неблуждающим множеством был построен Шубом [16]. Хирш [10] указал на то, что подобный эндоморфизм можно сделать аналитическим (но не указал явную формулу). Здесь мы приводим в виде явной формулы 2-параметрическое семейство C^∞ эндоморфизмов с канторовым неблуждающим множеством.

Пусть U_δ – так называемая бамп-функция, то есть функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- $U_\delta(x) = 1$ при всех $x \in [-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}]$, $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$;
- $U_\delta(x) = 0$ при всех $|x| \geq \delta$;
- $U'_\delta(x) \geq 0$ при всех $x \in [-\delta; -\frac{\delta}{2}]$, и $U'_\delta(x) \leq 0$ при всех $x \in [\frac{\delta}{2}; \delta]$.

Зафиксируем натуральное число $d \geq 2$, и положим

$$f_{\varepsilon, \delta}(x) = dx + (-d + \varepsilon)xU_\delta(x) \bmod 1,$$

где $\varepsilon \in (0; 1)$. Ясно, что $f_{\varepsilon, \delta} : S^1 \rightarrow S^1$ определяет 2-параметрическое семейство отображений окружности, которое можно рассматривать как возмущение линейного растягивающего эндоморфизма $E_d(x) = dx \bmod 1$.

Теорема 2.1. *Отображение $f_{\varepsilon, \delta} : S^1 \rightarrow S^1$, $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$, $\varepsilon \in (0; 1)$, является структурно устойчивым неособенным эндоморфизмом окружности степени d с канторовым неблуждающим множеством. Более того, $f_{\varepsilon, \delta} \rightarrow E_d$ в C^0 топологии при $\delta \rightarrow 0$.*

Доказательство. Вне δ -окрестности $V_\delta(0)$ точки $x_0 = 0$ отображение $f_{\varepsilon, \delta}$ совпадает с E_d . Поскольку $f_{\varepsilon, \delta}(V_\delta(0)) = E_d(V_\delta(0))$, то $f_{\varepsilon, \delta}$ является эндоморфизмом степени d .

Покажем, что $f_{\varepsilon,\delta}$ есть неособый эндоморфизм. Для этого найдем его производную

$$f'_{\varepsilon,\delta}(x) = d + (-d + \varepsilon)[xU_\delta(x)' + U_\delta(x)] = d + (-d + \varepsilon)xU_\delta(x)' + (-d + \varepsilon)U_\delta(x).$$

Из свойств функции U_δ вытекает, что $xU_\delta(x)' \leq 0$. Ясно, что $d + (-d + \varepsilon)U_\delta(x) \geq \varepsilon$. Поэтому $f'_{\varepsilon,\delta}(x) \geq \varepsilon$.

Так как $f'_{\varepsilon,\delta}(0) = \varepsilon \in (0; 1)$, то $x_0 = 0$ является гиперболической притягивающей точкой эндоморфизма $f_{\varepsilon,\delta}$. Решая уравнение $dx + (-d + \varepsilon)xU_\delta(x) = x$, получаем, что в δ -окрестности $V_\delta(0)$ имеются две неподвижные точки $\pm x_*$ таких, что $U_\delta(\pm x_*) = \frac{d-1}{d-\varepsilon}$, где $\frac{\delta}{2} < x_* < \delta$. При этом, интервал $(-x_*; x_*)$ принадлежит области притяжения точки x_0 (в частности, ω -предельное множество любой точки из $(-x_*; x_*)$ совпадает с x_0). Отсюда вытекает, что неблуждающее множество отображения $f_{\varepsilon,\delta}$ равно

$$NW(f_{\varepsilon,\delta}) = \{x_0\} \bigcup (S^1 \setminus \cup_{k \geq 0} f_{\varepsilon,\delta}^{-k}(-x_*; x_*)),$$

и является канторовым множеством.

Покажем, что множество $NW(f_{\varepsilon,\delta})$ гиперболическое, то есть производная $f'_{\varepsilon,\delta}(x)$ на неблуждающем множестве отлична от единицы. В интервале $|x| < x_*$ имеется только одна точка неблуждающего множества $x_0 = 0$, и она гиперболическая. Вне δ -окрестности $V_\delta(0)$ отображение $f_{\varepsilon,\delta}$ совпадает с E_d и, следовательно, $f'_{\varepsilon,\delta}(x) = d \geq 2$. Осталось проверить гиперболичность в δ -окрестности при $|x| \geq x_*$. В $V_\delta(0)$ при $x \geq x_*$ функция $(-d + \varepsilon)U_\delta(x)$ возрастающая, а при $x \leq -x_*$ – убывающая (здесь мы учитывали, что $-d + \varepsilon < 0$). Поэтому при $|x| \geq x_*$ имеем

$$\begin{aligned} f'_{\varepsilon,\delta}(x) &= d + (-d + \varepsilon)xU'_\delta(x) + (-d + \varepsilon)U_\delta(x) \geq d + (-d + \varepsilon)U_\delta(x_*) + (-d + \varepsilon)xU'_\delta(x) = \\ &= 1 + (-d + \varepsilon)xU'_\delta(x) > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, на неблуждающем множестве производная $f'_{\varepsilon,\delta}(x)$ строго больше единицы.

В силу [16], отображение $f_{\varepsilon,\delta}$ полусопряжено эндоморфизму E_d , у которого неблуждающее множество совпадает со всей окружностью. Поэтому периодические точки отображения $f_{\varepsilon,\delta}$ всюду плотны в $NW(f_{\varepsilon,\delta})$. Согласно [14], из гиперболичности $NW(f_{\varepsilon,\delta})$ следует, что эндоморфизм $f_{\varepsilon,\delta}$ структурно устойчивый.

Осталось проверить C^0 -близость к E_d при $\delta \rightarrow 0$. При этом достаточно проверить это только для $x \in V_\delta(0)$. Имеем

$$|f_{\varepsilon,\delta}(x) - E_d(x)| = |(-d + \varepsilon)xU_\delta(x)| \leq \delta d \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство закончено.

3. Хирургия Смейла

Пусть $f_{\varepsilon,\delta} : S^1 \rightarrow S^1$ – неособый эндоморфизм, удовлетворяющий теореме 2.1.. Положим

$$m = \min_{x \in NW(f_{\varepsilon,\delta})} Df_{\varepsilon,\delta}(x).$$

Согласно теореме 2.1., $m > 1$.

Наряду с декартовыми координатами (x, y) на \mathbb{R}^2 будем использовать комплексную переменную $z = x + iy$. Эта переменная в единичном диске $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ будет использоваться для задания отображений базового полнотория $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть*

$$F_0(t, z) = \left(E_d(t), \lambda z + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \right) \quad (3.1)$$

есть линейный диффеоморфизм Смейла полнотория в себя, где

$$0 < \lambda < \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi}{d} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \lambda \leq \frac{m}{8}. \quad (3.2)$$

Тогда существует SV диффеоморфизм вида

$$F_\delta(t, z) = \left(f_{\varepsilon, \delta}(t), \lambda z + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \right) \quad (3.3)$$

с гиперболическим нульмерным неблуждающим множеством такой, что $F_\delta \rightarrow F_0$ в C^0 -топологии при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1., для достаточно малого δ отображение F_δ является диффеоморфизмом полнотория в себя из класса SV , и мы далее будем предполагать такую малость δ . Для простоты обозначим $F_\delta = F$.

Непосредственно из построения вытекает, что для любой точки $y \in S^1$ минимальное расстояние между различными точками из ее прообраза $t_k, t_j \in f_{\varepsilon, \delta}^{-1}(y)$ относительно $f_{\varepsilon, \delta}$ не превосходит $\frac{d+4}{4d}$ (напомним, что $\delta < \frac{1}{4}$),

$$\min_{t_k, t_j} \{|t_k - t_j| : g_d(t_k) = g_d(t_j), t_k \neq t_j\} \leq \frac{1}{d} + \delta \leq \frac{1}{d} + \frac{1}{4} \leq \frac{d+4}{4d}.$$

Непосредственно из (3.1) вытекает, что t -сечение $D_t^2 = \{t\} \times D^2$ под действием F отображается в круглый диск, который мы обозначим через B_t , принадлежащий $D_{f_{\varepsilon, \delta}(t)}^2$. Из (3.1) также следует, что диск B_t имеет радиус λ с центром, лежащим на окружности $|z| = \frac{1}{2}$. Поскольку $\lambda < \frac{1}{4}$, то $B_t \subset \text{int } D_{f_{\varepsilon, \delta}(t)}^2$. Поэтому $F(\mathcal{B}) \subset \text{int } \mathcal{B}$. В координатах (t, z) на $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$ отображение F имеет якобиан

$$DF(t, z) = \begin{pmatrix} Df_{\varepsilon, \delta}(t) & 0 \\ \pi i \exp 2\pi i t & \lambda I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где I_2 – тождественная матрица на \mathbb{C} (или \mathbb{R}^2). Так как $Df_{\varepsilon, \delta} > 0$ и $\lambda > 0$, то F есть локальный диффеоморфизм. Для доказательства того, что F есть (глобальный) диффеоморфизм рассмотрим попарно различные $t_1, t_2, \dots, t_d \in S^1$ такие, что $f_{\varepsilon, \delta}(t_1) = \dots = f_{\varepsilon, \delta}(t_d)$. Центры O_1, \dots, O_d дисков B_{t_1}, \dots, B_{t_d} соответственно лежат на окружности $|z| = \frac{1}{2}$. Минимальный угол между лучами, проведенными из центра диска $D_{f_{\varepsilon, \delta}(t_k)}^2$ и точками O_1, \dots, O_d , равен $2\pi \frac{d+4}{4d}$. Поэтому минимальное расстояние между O_1, \dots, O_d равно $\sin(\pi \frac{d+4}{4d})$. Радиусы дисков B_{t_1}, \dots, B_{t_d} равны λ . Отсюда и из (3.2) следует, что диски B_{t_1}, \dots, B_{t_d} попарно не пересекаются. Учитывая (3.1), получаем, что F является диффеоморфизмом $\mathcal{B} \rightarrow F(\mathcal{B})$, удовлетворяющий условиям (2.1)-(2.3). Таким образом, $F \in \mathfrak{M}$. Осталось доказать, что на $NW(F)$ имеется гиперболическая структура.

Касательное пространство $T(\mathcal{B}) = T(S^1 \times D^2)$ полнотория \mathcal{B} естественным образом представимо в виде суммы $T(\mathcal{B}) = T(S^1) \oplus T(D^2)$. В каждой точке $(t, z) \in \mathcal{B}$ касательная плоскость $T_{(t,z)}(\mathcal{B})$ есть сумма одномерного $T_t(S^1) = \mathbb{E}^1 \cong \mathbb{R}$ и двумерного $T_z(T^2) = \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{R}^2$ линейных пространств. Из (3.4) вытекает, что подрасслоение \mathbb{E}^2 инвариантно относительно DF :

$$DF_p \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix},$$

где $\vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2$. Более того, поскольку $|\lambda| < 1$, то \mathbb{E}^2 является устойчивым подрасслоением, $E^s = \mathbb{E}^2$.

Отметим, что подрасслоение \mathbb{E}^1 не инвариантно относительно DF . Покажем, что, тем не менее, на множестве $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру. Пусть $q = (t, z) \in NW(F)$. Тогда $t \in NW(f_{\varepsilon, \delta})$. Известно, неблуждающее множество $NW(f_{\varepsilon, \delta})$ есть объединение канторова множества $\Sigma_{f_{\varepsilon, \delta}}$ с изолированной притягивающей (гиперболической) неподвижной точкой $x_0 \in S^1 \setminus \Sigma_{f_{\varepsilon, \delta}}$. Возможны два случая: 1) $t = x_0$; 2) $t \in \Sigma_{f_{\varepsilon, \delta}} = \Omega$. В случае 1), точка q является изолированной (неподвижной) точкой неблуждающего множества $NW(F)$. Из (3.4) вытекает, что q – гиперболическая притягивающая неподвижная точка.

В случае 2) рассмотрим в $T_{NW(F)}(\mathcal{B}) \subset T(\mathcal{B}) = \mathbb{E}^1 \oplus \mathbb{E}^2$ семейство конусов

$$C_q^u = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} : \vec{v}_1 \in T_t(S^1), \vec{v}_{23} \in \mathbb{E}_z^2, |\vec{v}_1| \geq \frac{m}{4} |\vec{v}_{23}| \right\}.$$

Сперва покажем, что $DF(C_q^u) \subset C_{F(q)}^u$. Пусть $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} \in C^u$. В силу (3.4),

$$DF \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_{\varepsilon, \delta}(t)\vec{v}_1 \\ \pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi it + \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix}.$$

Тогда $|\vec{v}'_{23}| \leq |\pi i \exp 2\pi it \vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}| = \pi |\vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}|$. Учитывая неравенство $\lambda \leq \frac{m}{8}$, получаем

$$\begin{aligned} |\vec{v}'_1| &= Df_{\varepsilon, \delta}(t)|\vec{v}_1| \geq \frac{m}{4}(4|\vec{v}_1|) \geq \frac{m}{4} \left(\pi |\vec{v}_1| + \frac{1}{2} |\vec{v}_1| \right) \geq \\ &\geq \frac{m}{4} \left(\pi |\vec{v}_1| + \frac{m}{8} |\vec{v}_{23}| \right) \geq \frac{m}{4} (\pi |\vec{v}_1| + \lambda |\vec{v}_{23}|) \geq \frac{m}{4} |\vec{v}'_{23}|. \end{aligned}$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_{23} \end{pmatrix} \in C_{F(q)}^u$. Отсюда

$$DF^k(C_{F^{-k}(q)}^u) \subset DF^{k-1}(C_{F^{-k+1}(q)}^u) \subset \dots \subset DF(C_{F^{-1}(q)}^u) \subset C_q^u \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы показать, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть прямая, рассмотрим

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix} \in C_{F^{-k}(q)}^u, \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_1^k \\ \vec{v}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{w}_1^k \\ \vec{w}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix}.$$

Положим $|\vec{v}_1^j| = v_1^j$, $|\vec{w}_1^j| = w_1^j$, $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$, $\vec{w}_1 = (w_1, 0)$, $v_1 > 0$, $w_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{v}_{23}^1}{v_1^1} - \frac{\vec{w}_{23}^1}{w_1^1} \right| &= \left| \frac{\pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi it + \lambda \vec{v}_{23}}{Df_{\varepsilon, \delta}(t)v_1} - \frac{\pi i \vec{w}_1 \exp 2\pi it + \lambda \vec{w}_{23}}{Df_{\varepsilon, \delta}(t)w_1} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\pi i \exp 2\pi it (w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1)}{Df_{\varepsilon, \delta}(t)v_1 w_1} + \frac{\lambda}{m} \left(\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right) \right| = \frac{\lambda}{m} \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|, \end{aligned}$$

так как $w_1 \vec{v}_1 - v_1 \vec{w}_1 = |\vec{w}_1| \vec{v}_1 - |\vec{v}_1| \vec{w}_1 = 0$. Поэтому

$$\left| \frac{\vec{v}_{23}^k}{v_1^k} - \frac{\vec{w}_{23}^k}{w_1^k} \right| = \left(\frac{\lambda}{m} \right)^k \left| \frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1} \right|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, поскольку $\frac{\lambda}{m} < 1$ в силу (3.2). Поэтому последовательность $\frac{\vec{v}_{23}^k}{v_1^k}$ является фундаментальной и, следовательно, имеет предел,

скажем \vec{V} . Не уменьшая общности, для простоты можно считать, что $v_1 = |\vec{v}_1| = 1$, $v_{23} = |\vec{v}_{23}| = 1$. Тогда единичный вектор $\vec{n}_k = \frac{\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k}{|\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k|}$, который определяет направление вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k = v_1^k \vec{v}_1 + v_{23}^k \vec{v}_{23}$ имеет предел $\frac{\vec{v}_1 + \vec{V}}{|\vec{v}_1 + \vec{V}|}$. Отсюда вытекает, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть одномерное подпространство \mathbb{E}^u . Так как проекция вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k$ на вектор \vec{v}_1 равна $v_1^k \geq m^k v_1$, то \mathbb{E}^u является неустойчивым подрасслоением, трансверсальным $E^s = \mathbb{E}^2$. Отсюда следует, что на $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках гранта РФФИ № 11-01-12056 офи-м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д.В. Исходные понятия. В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), том 1. – 1985. Динамические системы – 1 (под ред. Д. В. Аносова), 156–178.
2. Жужкома Е.В., Исаенкова Н.В. О нульмерных соленоидальных базисных множествах. – Матем. сб. 2011. 202, № 3. – 47–68.
3. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. – УФН. 2009. 179, № 12. – 1281–1310.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. – УФН. 2011. 181, № 2. – 121–149.
5. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием. – Письма в ЖТФ. 2008. 34, вып. 18. – 1–8.
6. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением. – ДАН СССР. 1978. 239, № 2. – 301–304.
7. Bothe H. The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds. – Math. Nachr. 1983. 112. – 69–102.
8. Cuomo K.M., Oppenheim A.V. Synchronized chaotic circuit and systems for communications. – MIT Reserch Laboratory of Electronic Technical Report. 1992. no. 575.
9. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – 102–105.
10. Hirsch M.W. A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets. – Lect. Notes in Math. 1875. 468. – 9–10.
11. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type. – Physical Rev. Lett. 2005. 95. – 144101.
12. Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. – Physical D. 2007. 232. – 87–102.

13. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones. – Physical Letters A. 2007. 365. – 97–104.
14. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – 203–220.
15. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems. – Phys. Rev. Lett. 1990. 64. – 821.
16. Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. – Amer. Journ. Math. 1969. 91. – 175–199.
17. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – 747–817. Имеется перевод: УМН. 1970. 25. – 113–185.
18. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. – Perseus Books, Massachusetts.
19. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – 454–472.

On bifurcation in models of hyperbolic noise

© E. V. Zhuzhoma⁵, N. V. Isaenkova⁶, V. S. Medvedev⁷

Abstract. We prove that arbitrarily small (in C^0 -topology) perturbation maps of Smale can get a map with a non-trivial zero-dimensional hyperbolic set. The resulting map can be used in information transmission systems with complete chaotic synchronization.

Key Words: hyperbolic non-wandering sets, Smale-Williams diffeomorphisms, Smale surgery, synchronization of chaotic oscillators

⁵Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

⁶Aspirant faculty of mathematical analysis, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; nisaenkova@mail.ru.

⁷Senior Staff Scientist Department of differential equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

УДК 38.01.77

Математическое моделирование осложнений при бурении скважин

© Л. Ф. Нурисламова¹

Аннотация. Разработана и реализована методика построения прогноза поглощений буровых растворов с использованием теории вероятностных моделей. На основе разработанной модели создан комплекс программ, позволяющий составлять вероятностный прогноз возникновения поглощений, по результатам которого производится установка ограничений на свойства бурового раствора и характеристики проводимых технологических операций.

Ключевые слова: бурение скважин, вероятностная модель, прогнозирование поглощений, функция принадлежности, комплекс программ, база промысловых данных.

1. Введение

Бурение нефтяных и газовых скважин на месторождениях республики Башкортостан отличается рядом особенностей, обусловленных сложными горно-геологическими условиями и тем, что многие месторождения находятся на поздних стадиях разработки. Это является основной причиной возникновения различного рода осложнений в процессе бурения скважин, которые сопровождаются значительными затратами средств на ликвидацию их последствий, поэтому задача прогнозирования и предупреждения возможных осложнений становится важной и актуальной. Надежность решения этой задачи зависит как от полноты и достоверности промысловой информации, так и от уровня методического обеспечения прогнозирования.

Моделирование осложнений и применение этих моделей затруднено вследствие того, что геологические параметры меняются от скважины к скважине и измерению доступно лишь небольшое их число, а технологические параметры, измеряемые на дневной поверхности, могут служить лишь оценками. Поэтому задача прогнозирования осложнений носит вероятностный характер.

2. Постановка задачи

Все месторождения республики Башкортостан разбиты на геологические образования в пределах крупных тектонических элементов, формирование горных пород на которых можно считать протекающим в идентичных условиях [1]. Это обуславливает то, что для эффективного прогнозирования и своевременного предупреждения осложнений необходимо проводить всесторонний анализ промысловой информации по ранее пробуренным скважинам. С этой целью создана база данных и СУБД по буровым растворам и осложнениям на месторождениях республики Башкортостан (объем выборки составляет 27 тыс. скважин), которая позволяет для всех массивов подбирать составы буровых и тампонажных растворов, максимально соответствующие условиям конкретной скважины [2].

¹Магистрант первого года обучения кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; Nurislamova_LF@mail.ru.

База данных имеет реляционную структуру, удобную для хранения и отображения промысловой информации, и состоит из 11 взаимосвязанных таблиц, 9 из которых являются справочниками, а две (таблица буровых растворов и таблица осложнений) являются основными (рис. 2.1).

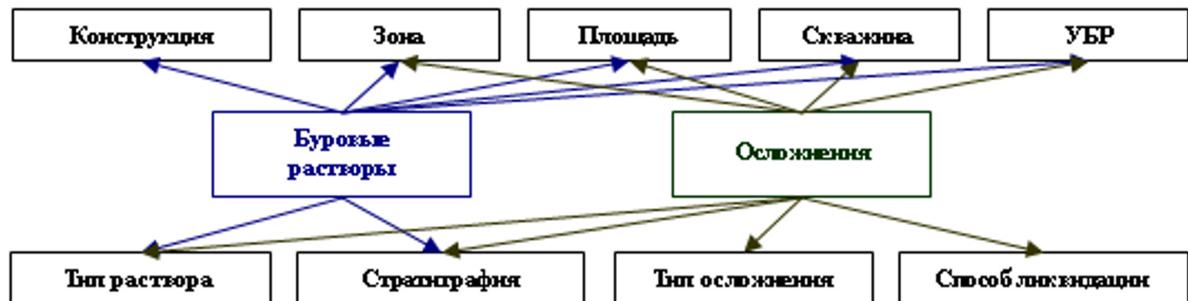


Рисунок 2.1

Структура базы данных по буровым растворам и осложнениям

На основании анализа промыслового материала, содержащегося в базе данных, производится разработка и реализация математического аппарата по прогнозированию возможных осложнений при строительстве новых скважин.

Основным видом осложнений при бурении нефтяных и газовых скважин на месторождениях Республики Башкортостан являются поглощения буровых и тампонажных растворов. Возникновение поглощений характеризуется нарушением гидродинамического равновесия в системе "скважина-пласт" и появлением градиента давления возникновения поглощения (ГВП), т.е. того значения градиента давления, превышение которого ведет к поглощению бурового или тампонажного раствора [3]. Поэтому эффективность предупреждения поглощений во многом определяется точностью и надежностью прогноза величин ГВП.

Значение ГВП вычисляется по формуле

$$\text{grad}[p] = \rho g + \text{grad}\Delta p, \quad (2.1)$$

где ρ - плотность бурового раствора в момент возникновения поглощения, $\text{grad}\Delta p$ - градиент изменения гидродинамического давления в результате проведения технологической операции, при которой возникло поглощение. Формула (2.1) включает две составляющие: гидростатическую (ρg), т.е. давление столба бурового раствора на стенки скважины, и гидродинамическую ($\text{grad}\Delta p$), возникающую при проведении технологических операций, таких как механическое бурение, спуск бурильной колонны в скважину, запуск бурового насоса и т.п.

Расчет величины $\text{grad}\Delta p$ осуществляется по следующим формулам:

- для механического бурения:

$$\text{grad}\Delta p = \frac{(\rho_{\text{ГП}} - \rho)gV_{\text{мех}}f\Delta z}{Q_H - V_0f_{\text{КП}} - \Phi} + [a_{\text{КП}}\eta(Q_H - \Phi) + b_{\text{КП}}\tau_0]\frac{L}{z}, \quad (2.2)$$

где $\rho_{\text{ГП}}$ – плотность разбуриваемых горных пород, $V_{\text{мех}}$ – механическая скорость проходки, f и $f_{\text{КП}}$ – площадь, соответственно, забоя и поперечного сечения кольцевого пространства, Q_H – производительность буровых насосов, Φ – объемная скорость фильтрации жидкости через забой и вновь образовавшиеся стенки скважины, $a_{\text{КП}}$ и $b_{\text{КП}}$ – коэффициенты гидравлического сопротивления в кольцевом пространстве, определяемые

экспериментально, V_0 – скорость оседания выбуруемых частиц в потоке бурового раствора, определяемая экспериментально;

-для спуска бурильной колонны в скважину:

$$\text{grad} \Delta p = \frac{1}{z} (l_H + 0.5l_{\text{CB}}) \left(k A u_{\max} \sin \varphi_0 + B + k C \frac{\pi u_{\max}}{2t_p} \cos \varphi_0 \right), \quad (2.3)$$

$$A = \frac{16\eta}{D^2(1+d^2)\ln(1/d) - (1-d^2)}, \quad B = \frac{4\tau_0}{D(1-d)}, \quad C = \frac{\rho d^2}{1-d^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{2\pi A(l_H + 0.5l_{\text{CB}}t_p)}{\pi^2 C(l_H + 0.5l_{\text{CB}} - 4Bt_p^2)}, \quad u_{\max} = \frac{\pi \Delta l_{\text{CB}}}{2t_p}, \quad k = \frac{t_C}{t_{\text{Ц}}},$$

где l_H – длина бурильной колонны, находящейся в скважине перед началом спуска, l_{CB} – длина труб бурильной свечи, u_{\max} – максимальная скорость спуска в конце фазы разгона, t_p – продолжительность фазы разгона, t_{C} и $t_{\text{Ц}}$ – продолжительность соответственно спуска свечи и циркуляции жидкости на устье, z – значение длины бурильной колонны, при котором произошло поглощение.

3. Вероятностный прогноз поглощений бурового раствора

Вероятностный прогноз основан на использовании фактического промыслового материала по пробуренным скважинам на конкретном месторождении или площади. Промысловую выборку для конкретного пласта составляют по всем скважинам (в том числе и непоглощающим). Выборка должна включать следующую информацию: номер скважины, пласт, глубину залегания пласта, сведения о поглощении при бурении скважины, давление на пласт, при котором возникло поглощение, максимальное давление при проходке без поглощения.

Вероятностный прогноз ГВП представляется в виде совокупности упорядоченных пар $\{\text{grad } p, \mu_{\text{п}}(\text{grad } p)\}$, где $\mu_{\text{п}} : \text{grad } p \rightarrow \mu_{\text{п}} \in [0, 1]$ – функция принадлежности, характеризующая степень возможности возникновения поглощения при данном значении $\text{grad } p$. Функция принадлежности находится на основе обработки фактического промыслового материала по пробуренным скважинам на конкретном месторождении или площади.

При найденных значениях градиента давления производится построение функции принадлежности для этих значений. Алгоритм определения функции принадлежности состоит в следующем:

1. Обработка промыслового материала и установление области изменения градиента гидравлического давления при разбуривании пласта: $[a, b]$.
2. Разбиение интервала $[a, b]$ на k (обычно k принимается равным 4-5) равномерных интервалов градаций с шагом Δ .
3. Определение функции принадлежности для j -го интервала по формуле:

$$\mu_j^l = \frac{\sum_{i=1}^j n_i^+}{\sum_{i=1}^j n_i^+ + \sum_{i=j}^k n_i^-}, \quad j = 1, \dots, k,$$

4. Результаты вычислительного эксперимента и основные выводы

Рассмотрим построение функции принадлежности на примере Северо-Табынской площади. Особенность составления прогноза $grad[p]$ состоит в том, что промысловая выборка включает информацию и по скважинам, в которых не было поглощений (рис. 4.1).

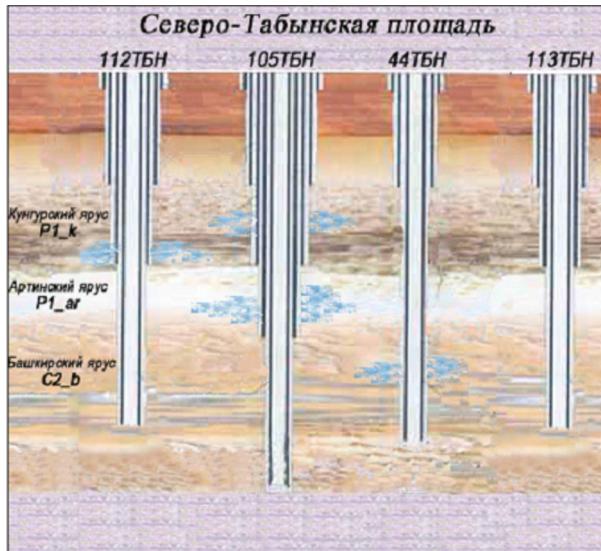


Рисунок 4.1
Обработка промыслового материала

Результаты расчета функции принадлежности вероятностного прогноза ГВП показаны в таблице 1.

Таблица 1: Вероятностный прогноз возникновения поглощений
для Северо-Табынской площади

Объект поглощения	Градиент давления, 10^{-2} МПа/м	Вероятностный прогноз
Кунгурский ярус	1,12-1,29	0,02
	1,29-1,46	0,2
	1,46-1,80	0,5
Артинский ярус	1,12-1,26	0,01
	1,26-1,33	0,03
	1,33-1,40	0,06

Вероятностный прогноз ГВП представляется в виде совокупности упорядоченных пар интервалов значений градиента давления и вероятности возникновения поглощения в данном пласте при таком значении градиента давления. С помощью вероятностного прогноза производится назначение соответствующих ограничений на градиент давления при разбурывании объекта поглощения.

Ограничения на градиент гидравлического давления позволяют свести к минимуму число возможных поглощений при проходке конкретного пласта на множестве типовых скважин или степень риска возникновения поглощения в одной скважине. Знание величины ГВП позволяет заранее спланировать работу по ликвидации поглощений.

На основе построенной вероятностной модели автором разработан комплекс программ, реализующий вероятностный прогноз градиента давления возникновения поглощения, по результатам которого производится установка ограничений на свойства бурового раствора и характеристики проводимых технологических операций [4]. Полученные рекомендации позволяют значительно снизить вероятность возникновения поглощений в условиях буровой и сэкономить дорогостоящие химические реагенты, приводя тем самым к повышению технико-экономических показателей бурения. Планируется также разработка программных комплексов по прогнозированию остальных видов осложнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясов В.Г., Мыслюк М.А. Осложнения в бурении. Справочное пособие. – М.: Недра, 1991. – 334 с.
2. Линд Ю.Б., Файзуллин М.Р., Хафизов А.Ф. База данных и реляционная система управления базой по поглощающим горизонтам и применяемым буровым растворам на месторождениях ОАО АНК «Башнефть» // Сборник трудов VIII Международной научно-технической конференции «Информационно-вычислительные технологии и их приложения». – Пенза. 2008. С. 13 – 17.
3. Казакова Д.С., Нурисламова Л.Ф., Юнусов А.А., Линд Ю.Б. Компьютерное моделирование при строительстве нефтяных и газовых скважин // Материалы XVIII Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновации. Интеллект. Культура». – Тюмень: БИК ТюмГНГУ. 2010. С. 83 – 86.
4. Кабирова А.Р., Нурисламова Л.Ф., Губайдуллин И.М., Линд Ю.Б., Мулюков Р.А., Кузнецова Н.Ю. Прогнозирование поглощений буровых растворов при строительстве нефтегазовых скважин // «Нефтяное хозяйство». – №2, 2011. С. 32 – 34.

Mathematical modeling of troubles taking place during drilling.

© L. F. Nurislamova²

Abstract. The method of constructing the forecast of drilling fluids loss by using the theory of probability models has been developed and implemented. The software for prediction of drilling fluid loss by regulation of drilling fluid characteristics and processing operations has been created on the bases the developed model.

Key Words: Drilling, probability model, prediction of drilling fluid loss, membership function, software, database.

²Graduate of the first year the Department of mathematical modelling, Bashkir State University, Ufa; Nurislamova_LF@mail.ru.

УДК 534.113

Сохранение частот колебаний трубопровода при изменении параметров жидкости

© Г. Ф. Сафина¹

Аннотация. В статье исследовано влияние параметров жидкости на частоты его изгибных. Предложен метод, с помощью которого можно определять закрепления трубопровода, позволяющие сохранять заданные частоты его колебаний.

Ключевые слова: колебания, закрепления, трубопровод с жидкостью, собственные частоты, сохранение частот.

1. Введение

Решение проблемы сохранения заданных частот колебаний трубопровода с жидкостью важно в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. Исследования подобной проблемы тесно связаны с прямой задачей определения влияния характеристик жидкости и закреплений трубопровода на частоты его колебаний и обратной задачей по диагностированию закреплений трубопровода.

Часто колебания трубопроводов могут приводить к дребезжанию, лишнему шуму, вибрациям, что связано с нахождением спектра частот в опасном для здоровья человека диапазоне. Для изменения частот колебаний трубопровода не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких закреплений трубопровода, которые обеспечивали бы безопасный диапазон частот его колебаний. Именно подобному вопросу сохранения безопасных частот колебаний трубопровода и посвящена представленная работа.

Прямые задачи по колебательным процессам в механических системах рассмотрены во многих классических учебниках, таких как [1], [2]. Влияние ряда краевых условий на величины собственных значений свободных колебаний полых труб рассмотрено, например, в работе [1]. Аналогичные зависимости собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью от таких краевых условий, как защемления, шарнирные опирания, исследованы в работах [2], [4]. Однако обратное влияние — влияние собственных частот на краевые условия — в этих работах не исследовалось. К тому же в них рассматриваются лишь приближенные методы (например, методы Галеркина и Рэлея-Ритца), которые не применимы для решения поставленной здесь задачи сохранения частот колебаний трубопровода.

Задачам диагностирования также посвящено много работ, например, работа [5].

В отличие от всех этих работ по диагностике, в данной работе отыскиваются не форма области или местоположение объекта, а определяются вид и параметры закрепления, сохраняющие безопасные частоты колебаний трубопровода. Причем на вид закрепления, соответствующего данному диапазону частот колебаний трубы, влияют такие параметры протекающей жидкости, как скорость, плотность, внутреннее давление.

Отличается рассматриваемая в работе задача и от обратных задач, в которых требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий и в

¹Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; Safinagf@mail.ru

качестве данных восстановления краевых условий используется не один спектр (как в данной работе), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля или так называемые весовые числа). К тому же основной целью обратных задач является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях.

Цель же настоящей работы состоит в восстановлении краевых условий задачи с известными коэффициентами в уравнении по одному спектру. Подобные обратные задачи акустической диагностики (по известному спектру частот колебаний) закреплений струн, мембран, стержней, пластин, полых труб, труб с жидкостью, валов рассматривались во многих работах автора статьи. В продолжение исследований работ [2], [3], [4] в данной работе исследовано влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода, и решена задача сохранения безопасных частот колебаний при изменениях параметров жидкости.

2. Влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода

Задача о свободных колебаниях узкого трубопровода, заполненной несжимаемой жидкостью сводится к дифференциальному уравнению в частных производных [2]:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \tilde{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \tilde{m} V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\ + \tilde{m} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad \tilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и \tilde{m} — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости, x — координата вдоль оси трубы, t — время.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубы в виде [4] $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$, принято в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s \sin \frac{s\pi}{l} x e^{i\omega t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина.

В работе [3] нами рассмотрен другой подход к решению данной задачи. С помощью безразмерных переменных

$$\tilde{x} = x/l, \quad \tilde{w} = w/r, \quad \tilde{t} = t/\tau,$$

где $\tau = l^2 \sqrt{\frac{m+\tilde{m}}{EI}}$, уравнение (1) сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + a \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + 2b \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} = 0. \quad (2.2)$$

Рассматривая выражение для прогиба в виде $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x}) e^{i\omega \tilde{t}}$, последнее уравнение разделено относительно переменных \tilde{x} и \tilde{t} . Получено линейное дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + a X'' + 2b i \omega X' - \omega^2 X = 0, \quad (2.3)$$

линейно независимыми решениями которого являются функции

$$X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = e^{\lambda_j \tilde{x}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — различные корни характеристического уравнения, ω — безразмерная собственная частота колебаний. В работе [3] рассмотрены краевые условия, учитывающие любые закрепления трубы. Здесь мы рассмотрим различные виды упругого закрепления и примем краевые условия к уравнению (2.3) в виде:

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - c_1 X'''(0) = 0, \\ U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(l) + c_2 X'''(l) = 0, \\ U_4(X) &= X''(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 линейных форм $U_1(X)$, $U_3(X)$ характеризуют величины относительной жесткости на изгиб пружин, с которыми упруго закреплены соответственно левый и правый концы трубопровода.

Подставляя решения уравнения (2.3) в краевые условия (2.4), получим систему уравнений, характеристический детерминант которой примет вид:

$$D = \begin{vmatrix} 1 - c_1 \lambda_1^3 & 1 - c_1 \lambda_2^3 & 1 - c_1 \lambda_3^3 & 1 - c_1 \lambda_4^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ e^{\lambda_1}(1 + c_2 \lambda_1^3) & e^{\lambda_2}(1 + c_2 \lambda_2^3) & e^{\lambda_3}(1 + c_2 \lambda_3^3) & e^{\lambda_4}(1 + c_2 \lambda_4^3) \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4} \end{vmatrix}.$$

Приравнивая определитель к нулю, получим следующее частотное уравнение

$$c_1 f_1(\lambda_j) - c_2 f_2(\lambda_j) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j) + f_4(\lambda_j) = 0, \quad (2.5)$$

где функции $f_k(\lambda_j)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) выражаются в виде произведений, сумм и разностей $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ и показательных функций от $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$. Из уравнения (2.5) при различных значениях параметров c_1 , c_2 краевых условий (2.4) определяются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода.

Исследуем влияние на значения собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметров жидкости, таких, как внутреннее давление, скорость и плотность.

Рассмотрим зависимость собственных частот колебаний трубы от изменения внутреннего давления в трубопроводе при условии не протекания жидкости (т.е. при $V_0 = 0$). В этом случае в дифференциальном уравнении (2.3) коэффициент $b = 0$. Зададим следующие параметры системы (трубопровод – жидкость):

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0095 \text{ м}, & r &= 0,01 \text{ м}, & l &= 5 \text{ м}, \\ \rho &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & V_0 &= 0 \text{ м/с}, & \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E &= 6,9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь в качестве материала трубы рассматривается металлопластик, а в качестве жидкости — вода. Найдем максимальное значение внутреннего давления p_0 , которое может привести к разрыву трубы. Это значение определяется формулой [5]:

$$p_{\max} = \sigma (r - r_1)/r. \quad (2.7)$$

Для принятых выше параметров

$$r - r_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \sigma = 1800 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

тогда значение максимально допустимого давления равно $p_{\max} = 90 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Поставим к уравнению (2.3) краевые условия в виде

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) + X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти краевые условия, как было сказано, означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными единице. Будем вычислять значения собственных частот колебаний трубопровода, меняя давление p_0 , которое оказывает жидкость на стенки трубы, оставляя остальные параметры системы неизменными. Как изменятся при этом собственные частоты изгибных колебаний трубопровода?

Результаты решений уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$ при параметрах системы (2.6) и краевых условиях (2.8) рассмотрим на графиках и таблицах.

На рисунке 2.1 (а) дана зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от внутреннего давления жидкости. Видно, что с увеличением давления, первая собственная частота ω_1 уменьшается. На рисунке 2.1 (б) подобная зависимость рассмотрена для второй собственной частоты колебаний трубопровода.

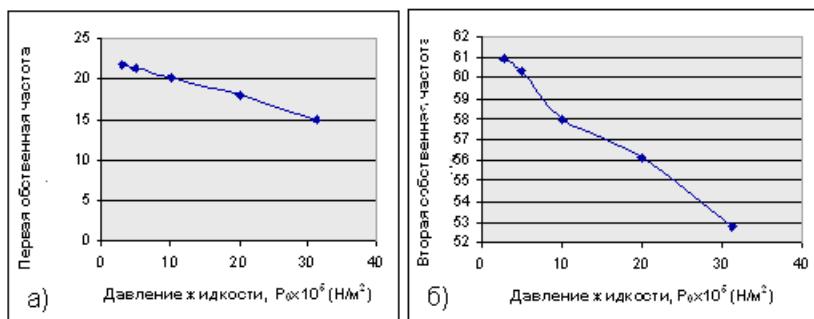


Рисунок 2.1

Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот колебаний от давления жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

Такое изменение касается не только первых двух собственных частот, но и всех последующих частот изгибных колебаний трубопровода. В таблице 2.1 приведены значения пяти собственных частот колебаний трубы, соответствующие увеличивающимся значениям внутреннего давления жидкости в трубе для рассматриваемой выше задачи.

Установлено, что подобная зависимость собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости справедлива при любых параметрах системы (трубопровод – жидкость). Кроме того, увеличение внутреннего давления жидкости ведет к уменьшению частот колебаний трубы не только при упругих закреплениях трубы, но и при других видах закреплений (свободных опорах, плавающих заделках и т. п.). На рисунке 2.2 (а, б), например, показаны зависимости первой и второй собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости при шарнирных опорах трубы

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таблица 2.1 – Зависимость частот изгибных колебаний трубы от давления жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$p_0 = 2,9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,82	60,92	120,08	199,00	297,67
$p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,39	60,35	119,46	198,35	297,00
$p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	20,35	58,00	118,00	198,83	295,44
$p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	18,04	56,14	114,99	193,71	292,25
$p_0 = 31,3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	15,03	52,78	111,53	190,18	288,66

и при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,01 \text{ м}, \quad r = 1,08 r_1, \quad l = 1 \text{ м}, \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

системы (трубопровод – жидкость). Параметры (2.10) определяют в качестве материала трубы – сталь, в качестве жидкости – воду. Максимальное значение давления, которое может привести к разрыву трубы равно $p_{\max} = 422 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ (при $r - r_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$).

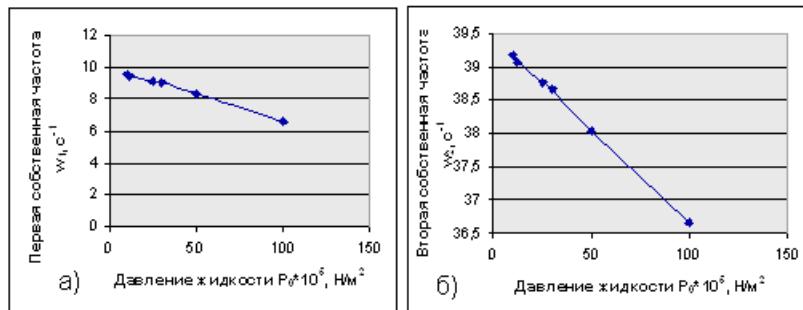


Рисунок 2.2

Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот от давления жидкости для задачи (2.3), (2.9) при параметрах (2.10) системы (трубопровод – жидкость)

Заметим также, что обратная зависимость значений собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления справедлива и в случае протекания жидкости по трубопроводу.

Исследуем теперь зависимость частот колебаний трубы от таких параметров жидкости, как скорость и плотность потока. Для этого рассмотрим задачу с дифференциальным уравнением (2.3) и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - 3X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) + 3X'''(1) = 0, \quad U_4(X) = X''(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

которые означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными трем. Пусть имеются параметры (2.10) системы при давлении жидкости $p_0 = 170 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Рассмотрим влияние скорости потока жидкости на собственные формы колебаний трубы при неизменных значениях остальных параметров системы.

Исследования прямой спектральной задачи показывают, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений ω_k собственных частот изгибных колебаний цилиндрической оболочки.

Известно, что если для какой-либо собственной частоты, мнимая часть равна нулю, и одновременно действительная часть равна нулю, то это отвечает порогу дивергенции, т.е. наличию статической потери устойчивости [4]. Исследуя изменения действительной и мнимой частей собственных частот ω_k можно также установить порог флаттера для данной упругой системы.

На рисунке 2.3 представлены значения $\operatorname{Re} \omega_k$ и $\operatorname{Im} \omega_k$ для первых трех тонов колебаний системы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.11) при параметрах системы (2.6) и внутреннем давлении жидкости $p_0 = 0.5 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$. На оси ординат рисунка 2.3 (а) отложены значения $\operatorname{Re} \omega_k$ системы (трубопровод – жидкость) при упругих закреплениях (2.11) в отсутствии течения жидкости $\omega_1 = 21,203$, $\omega_2 = 61,502$, $\omega_3 = 120,729$.

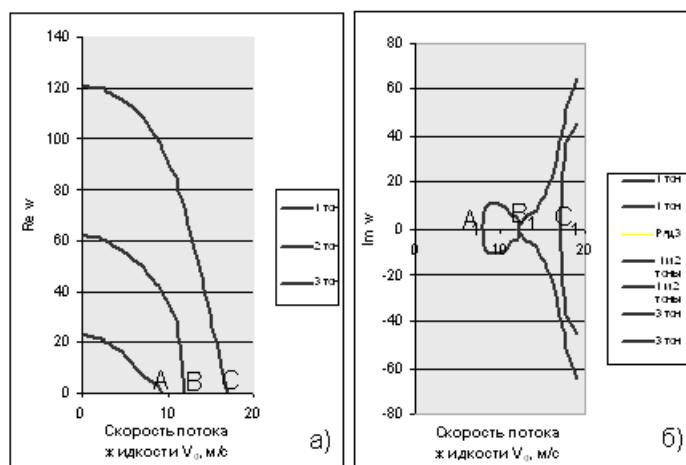


Рисунок 2.3

Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.11) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

Остановимся на частотных годографах рисунка 2.3 подробнее. Видим, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот. При достижении значения скорости $V_0 = 9,4 \text{ м/с}$ находим, что $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$ (точка A), кроме того по рисунку 2.3 (б) значение $\operatorname{Im} \omega_1 = 0$ (точка A₁).

Таким образом, мы имеем порог дивергенции для первой формы колебаний ω_1 , (точки A и A₁). При дальнейшем возрастании скорости потока жидкости можно отметить на оси абсцисс точки, отвечающие порогу дивергенции для второй формы (точки B и B₁) и третьей формы (C и C₁) колебаний трубы.

Дальнейшее же увеличение скорости потока за точкой B приводит к флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний. Таким образом, здесь мы имеем классический флаттер для рассматриваемой задачи при увеличении скорости потока жидкости. Собственные частоты ω_k становятся комплексно сопряженными, что и отражено на рисунке 2.3 (б).

Если, как и в работе [4], рассматривать безразмерную скорость U и считать внутреннее давление p_0 жидкости равным нулю, то для трубы с защемленными концами и на свободных опорах получаются те же результаты, что и в указанной работе. А именно, для трубы с защемленными концами порог дивергенции для первого тона колебаний отвечает значению $U = 2\pi$, а порог флаттера соответствует величине U , чуть меньшей 3π .

Причем при отсутствии течения жидкости имеем

$$\omega_1 = 22,373, \quad \omega_2 = 61,673, \quad \omega_3 = 120,903,$$

что отвечает квадратам соответствующих собственных значений задачи для балки с защемленными концами [6].

Для трубы же, как балки с шарнирно опертыми концами порог дивергенции отвечает значениям $U = \pi k$, где $k = 1, 2, 3$ и т.д., а порог флаттера соответствует величине U , несколько превышающей 2π .

Обратные зависимости значений собственных частот колебаний трубы с жидкостью при упругих закреплениях аналогичны подобной зависимости при защемлениях и шарнирных опорах указанной выше работы с разницей в значениях порогов дивергенций и флаттера. Например, для задачи (2.3), (2.11) при параметрах (2.6) системы имеем: порог дивергенции для первой формы колебаний соответствует величине U , чуть большей 2π , а порог флаттера соответствует U , несколько превышающей 3π .

Аналогичные результаты получены в исследованиях спектра частот колебаний трубопровода при упругих закреплениях трубы пружинами с другими относительными жесткостями на изгиб.

Проведенные вычисления позволяют сделать вывод о том, что при различных видах упругих закреплений пороги дивергенции отвечают следующим значениям U безразмерной скорости: $2\pi < U < 3\pi$ — порог дивергенции для первой собственной частоты, $3\pi < U < 4\pi$ — для второй собственной частоты, $4\pi < U < 5\pi$ — для третьей собственной частоты и т.д.; порог флаттера соответствует значению U , несколько превышающей 3π .

Проведены также исследования по влиянию скорости потока жидкости на частоты изгибных колебаний трубы при таких закреплениях, как свободные опоры, заделки. Получено, что и при этих видах закреплений увеличение скорости потока жидкости ведет к уменьшению значений форм колебаний трубы. Например, на рисунке 2.4 (а, б) приведены частотные годографы для трубы со свободными концами

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

при параметрах (2.6) системы (трубопровод — жидкость).

Здесь точками A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 отмечены пороги дивергенции соответственно для первой, второй, третьей форм колебаний. Этим же порогам отвечают соответственно следующие значения скорости потока жидкости $V_0 = 4,1 \text{ м/с}$, $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$, $V_0 = 11,3 \text{ м/с}$. Флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний отвечает скорость $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$.

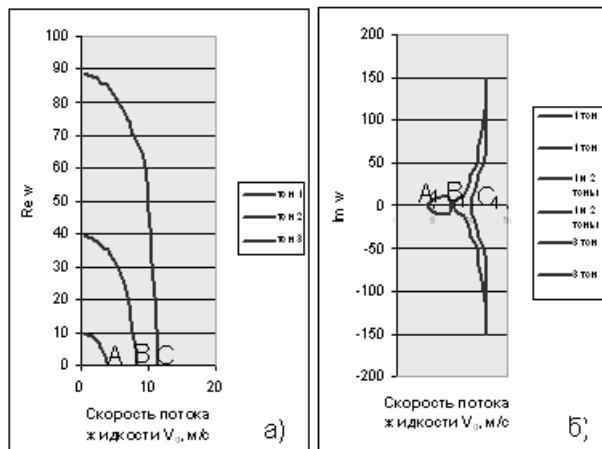


Рисунок 2.4

Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.12) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

Таким образом, увеличение скорости потока жидкости при любых закреплениях концов трубопровода ведет к уменьшению собственных частот его изгибных колебаний.

Исследуем теперь влияние на частоты колебаний трубы плотности жидкости. Рассмотрим задачу (2.3), (2.8) при следующих параметрах системы

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0095 \text{ м}, \quad r = 0,01 \text{ м}, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 &= 5 \text{ м/с}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad l = 5 \text{ м}, \\ p_0 &= 1,78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Будем вычислять собственные значения частот колебаний при увеличении плотности жидкости и неизменных значениях остальных параметров системы. Результаты, полученные по решениям прямых задач, продемонстрируем снова на графиках и таблицах. Для указанной выше задачи на рисунке 2.5 (а) показан график зависимости значений первой собственной частоты ω_1 колебаний трубопровода от различных значений ρ_0 плотности жидкости.

По графику видно, что при увеличении плотности жидкости первая собственная частота колебаний трубопровода уменьшается. Вычисления показывают, что увеличение плотности жидкости ведет к уменьшению не только первой собственной частоты колебаний трубопровода, но и всех значений из спектра частот его колебаний.

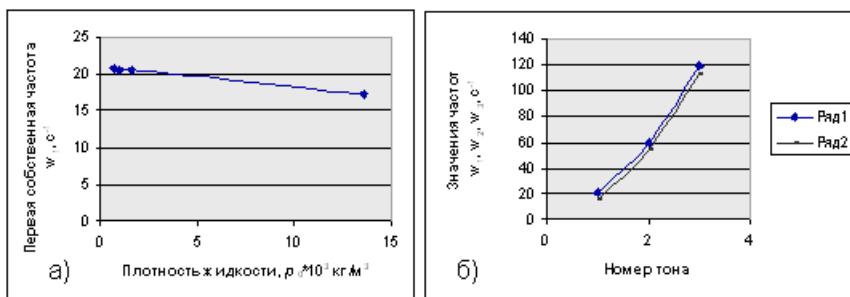


Рисунок 2.5

Зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от плотности жидкости (а) и изменение значений первых трех тонов колебаний трубы при различных значениях плотности жидкости (б)

На рисунке 2.5 (б), например, рассмотрен график изменения значений первых трех собственных частот колебаний трубы в зависимости от плотности потока жидкости. Здесь ряду 1 соответствуют значения первых трех частот при $\rho_0 = 0,71 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, ряду 2 — при $\rho_0 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Если же увеличивать одновременно скорость потока жидкости и плотность, то темп падения частот колебаний будет резче. Например, для задачи (2.3), (2.8) при параметрах системы (2.13) будем увеличивать не только плотность жидкости, но и ее скорость. Результаты вычислений прямых задач представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Зависимость частот колебаний от скорости и плотности потока жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.13) системы

	ω_1	ω_2	ω_3
$\rho_0 = 0,71 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, V_0 = 1 \text{ м}/\text{с}$	20,92	59,94	119,05
$\rho_0 = 1,59 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, V_0 = 10 \text{ м}/\text{с}$	18,82	57,56	116,89

Таким образом, установлено, как на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. По решению прямой спектральной задачи (2.3), (2.9) при различных параметрах системы (трубопровод — жидкость) установлено, что на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. Результаты вычислений показывают, что при увеличении как скорости потока жидкости, так и ее плотности значения собственных частот колебаний трубопровода уменьшаются.

Проведенное исследование важно для решения проблемы сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы при изменениях параметров жидкости.

3. Задача сохранения заданных частот колебаний

Обратная задача диагностирования закреплений трубопровода по спектру частот его колебаний, впервые поставлена и решена в работе [3]. В ней рассмотрен общий метод восстановления любых краевых условий задачи по 9-ти значениям из спектра частот колебаний трубопровода с непротекающей жидкостью. В продолжение исследований поставим к прямой задаче задачу сохранения частот: по известным параметрам системы (трубопровод-жидкость) и собственным частотам свободных изгибных колебаний трубы найти параметры ее упругих закреплений, сохраняющие заданные частоты колебаний. В терминах задачи (2.3), (2.4) имеем: по известным ненулевым частотам ω_j , а значит значениям λ_j уравнения (2.3), найти неизвестные коэффициенты c_1, c_2 краевых условий (2.4), сохраняющих заданный диапазон частот колебаний трубопровода.

Пусть известны значения двух собственных частот ω_1 и ω_2 спектральной задачи (2.3), (2.4) и соответствующие им значения λ_j^1 и λ_j^2 . Тогда равенства (2.5) представляют собой систему двух уравнений от двух неизвестных c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 f_1(\lambda_j^1) - c_2 f_2(\lambda_j^1) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^1) &= 0, \\ c_1 f_1(\lambda_j^2) - c_2 f_2(\lambda_j^2) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^2) + f_4(\lambda_j^2) &= 0, \\ (j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Преобразуя последнюю систему уравнений, получим следующие аналитические формулы для коэффициентов относительной жесткости на изгиб:

$$c_1 = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MR}}{2M}, \quad c_2 = \frac{f_4(\lambda_j^1) + c_1 f_1(\lambda_j^1)}{f_2(\lambda_j^1) + c_1 f_3(\lambda_j^1)}, \quad (3.2)$$

в которых

$$\begin{aligned} M &= f_1(\lambda_j^2)f_3(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2)f_1(\lambda_j^1); \\ N &= f_1(\lambda_j^2)f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2)f_1(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2)f_4(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^2)f_2(\lambda_j^1); \\ K &= f_4(\lambda_j^2)f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2)f_4(\lambda_j^1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. Если известны две ненулевые собственные частоты ω_1 и ω_2 задачи (2.3), (2.4), а значит, соответствующие им значения λ_j^1 и λ_j^2 , ранг матрицы системы (3.1) равен двум, то коэффициенты c_1 , c_2 краевых условий (2.4), сохраняющие заданные частоты колебаний трубы при изменениях параметров жидкости определяются по формулам (3.2), (3.3).

Итак, известны частоты колебаний трубопровода. Необходимо, изменив параметры жидкости, сохранить прежние частоты его колебаний. Эту задачу предлагаем решить с помощью необходимых изменений в закреплениях трубы с жидкостью. Рассмотрим использование найденного алгоритма на конкретном примере. Данна задача (2.3), (2.4) при параметрах при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,068\text{м}, \quad r = 0,07\text{м}, \quad l = 6\text{м}, \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad V_0 = 0\text{м/с}, \\ \rho_0 &= 0,68 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

системы (трубопровод-жидкость). Для принятых параметров

$$r - r_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

и значение максимально допустимого давления, вычисленного по формуле [12] $p_0 = \sigma(r - r_1)/r$ равно $p_0 = 163 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

В ходе решения прямой задачи (2.3), (2.4) с коэффициентами относительной жесткости $c_1 = 9,5$, $c_2 = 9,5$ и внутреннем давлении $p_0 = 55,268311 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ получены собственные частоты колебаний трубы:

$$\omega_1 = 20,33; \quad \omega_2 = 58,99; \quad \omega_3 = 118 \quad \text{и т.д.} \quad (3.5)$$

Пусть требуется уменьшить внутреннее давление в трубопроводе до $p_0 = 55,268271 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Тогда для сохранения спектра частот (3.5), необходимо по формулам (3.2), (3.3), например, увеличить жесткость закреплений на левом конце трубы с $c_1 = 9,5$ до $c_1 = 18,82$, а на правом конце трубы уменьшить жесткость закреплений с $c_2 = 9,5$ до $c_2 = 6,35$. Такой же спектр частот при изменении давления жидкости сохранится и при других жесткостях на изгиб упругих закреплений трубы. В таблице 3.1 показаны, например, соответствующие значения коэффициентов упругих закреплений при изгибных колебаниях трубопровода, обеспечивающие частоты колебаний трубы для рассмотренной выше задачи.

Проведенные исследования показывают, что при уменьшении внутреннего давления для сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы с жидкостью, необходимо увеличить жесткость закрепления на левом конце и уменьшить жесткость закрепления на правом конце трубы. Формулы (3.2), (3.3) для коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений трубы позволяют диагностировать такие закрепления трубопровода, которые позволяют сохранять частоты его колебаний неизменными при изменении давления жидкости.

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов c_1 , c_2 , обеспечивающие заданные частоты колебаний для задачи (2.3), (2.4) при параметрах (3.4) системы (труба-жидкость) при изменении внутреннего давления системы (трубопровод-жидкость)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$B_0 = 1, B_l = 1$	1,5641	4,7488	7,8573	10,9971	14,1378
$B_0 = 1, B_l = 2$	1,7501	4,7583	7,8594	10,9978	14,1379
$B_0 = 1, B_l = 5$	2,1249	4,7869	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 1, B_l = 7$	2,2908	4,8062	7,8698	11,0016	14,1400
$B_0 = 1, B_l = 10$	2,4779	4,8355	7,8769	11,0039	14,1410
$B_0 = 1, B_l = 20$	2,8661	4,9348	7,8975	11,0115	14,1446
$B_0 = 1, B_l = 30$	3,0903	5,0347	7,9194	11,0192	14,1482

4. Заключение

По решению прямой задачи исследовано влияние на спектр частот колебаний трубы давления жидкости, и показано, что увеличение давления жидкости на стенки трубы ведет к уменьшению собственных частот изгибных колебаний трубопровода. Такие изменения касаются колебаний трубы при любых ее закреплениях.

Разработанный метод решения задачи сохранения спектра частот позволяют обеспечивать заданный безопасный диапазон частот колебаний трубопровода при изменении давления жидкости. Полученные формулы позволяют определять значения коэффициентов относительной жесткости пружин, с которыми упруго закреплены края трубопровода, обеспечивающие заданный спектр частот его колебаний.

Построенный алгоритм решения задачи сохранения спектра частот при упругих закреплениях трубы может быть применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются трубопроводы с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М: Наука, 1969.
3. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
4. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука – 1979.
5. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука – 1986. – 560 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение – 1968. Т. 1. 831 с.

Preservation of frequencies of fluctuations of the pipeline at change of parameters of a liquid

© G F. Safina²

Abstract. In article influence of parameters of a liquid on its frequencies is investigated. The flexural. The method with which help it is possible to define is offered the pipeline fastenings, allowing to keep its set frequencies fluctuations.

Key Words: fluctuations, fastenings, the pipeline with a liquid, own frequencies, preservation of frequencies.

²The senior lecturer of chair Mathematical modelling of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

Преимущества метода понижения порядка перед другими аналогичными методами

© А. В. Зубов¹, О. А. Зубова²

Аннотация. В этой статье показан один из способов использования метода понижения порядка в случае, когда при его применении встречается многочлен, у которого коэффициент при первой степени аргумента равен нулю.

Ключевые слова: многочлен, операция сдвига, множество, корень, полу平面кость.

1. Введение

Метод понижения порядка (МПП), являясь аналогом алгоритма Рауса в вычислительном плане, будет более производительным критерием асимптотической устойчивости, чем аналитические критерии Гурвица и Льенара-Шипара, требующих вычисления ($n^2/2$ в первом случае и $n^4/4$, во втором) определителей порядка от 2 до n (главных миноров матрицы Гурвица) [1].

Нетрудно видеть, что МПП можно применять к многочленам $F(z)$, не являющихся многочленами Гурвица. Применение МПП к такому многочлену требует, чтобы свободный член и коэффициент при втором слагаемом этого многочлена были не равны нулю $A_0 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ [2]. Если на каждом шагу МПП эти условия выполняются, то в конечном итоге будет получен или многочлен первого порядка, или многочлен, имеющий только кососимметрические корни. Очевидно, что количество корней исходного многочлена $F(z)$, лежащих в левой полу平面кости, равно сумме положительных величин α_i , получаемых в результате многократного применения МПП ($\alpha_i = 2A_{1i}/A_{0i} > 0$), и количества корней, лежащих в левой полу平面кости у остатка - многочлена первой степени или многочлена, имеющего только кососимметрические корни [3].

2. Аналог алгоритма Рауса

Т е о р е м а 2.1. (аналог алгоритма Рауса). Для абсолютно устойчивого многочлена $F(z)$ (многочлена Гурвица) степени $n + 1$ существует единственный многочлен Гурвица первого порядка, который может быть построен за $n(n + 2)$ элементарных арифметических операций.

¹Доцент факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

²Преподаватель факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

Доказательство. Пусть $F(z)$ является многочленом Гурвица, тогда в силу теоремы Стодолы все его коэффициенты положительны. Используя МПП за $2n + 1$ арифметическую операцию, можно построить порождающий его многочлен $f(z)$ степени n , который также будет являться многочленом Гурвица, т. к. он порождает многочлен Гурвица и $\alpha = 2A_1/A_0 > 0$.

Действуя и далее таким же образом, в результате многократного применения МПП (n -раз) получим многочлен Гурвица первого порядка за число арифметических операций равное $\sum_{k=1}^n (2k + 1) = n(n + 2)$.

Доказательство закончено.

Замечание 2.1. МПП является более производительным критерием оценки числа корней многочлена, лежащих в левой и правой полуплоскости, чем критерий Михайлова, т.к. он не требует локализации действительных корней двух многочленов, являющихся действительной и минимой частью годографа Михайлова, и может применяться к многочленам, имеющим чисто минимые корни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Блистанова Л.Д., Зеленков Г.А., Стрюк Е.В. Необходимые и достаточные условия существования выпуклой области устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического многочлена. Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Технические науки. № 3. Ростов - на - Дону. РГУ, 2005, с. 17-21.
- Зубов А.В., Зубов Н.В., Зубов С.В., Зубова А.Ф. Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. Уч. пособие. - СПб: ВВМ, 2011. - 362 с.
- Зубов А.В., Зубов Н.В., Зубов Н.И. Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления. Монография. - СПб.: Мобильность плюс, 2010, 319 с.

Advantage the method of low to order before another analogies methods

© A. V. Zubov³, O. A. Zubova⁴

Abstract. In this article is shows one from measures of using method of low to order in case, when by this application is meeting polynom, by that coefficient by first degree argument equivalent zero.

Key Words: polynom, operation to displacement, multitude, root, semi-plane.

³Lecture of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

⁴Teacher of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

УДК 517.929

Новый метод построения минимального многочлена

© А. Ф. Зубова¹, М. В. Стрекопытова²

Аннотация. В статье представлен метод построения минимального многочлена, который позволяет находить коэффициенты этого многочлена в пределах точности представления чисел в компьютере и свободен от ошибок округления.

Ключевые слова: матрица, столбец, минимальный многочлен, вещественное число, линейная независимость, эквивалентность.

1. Введение

Зная коэффициенты минимального многочлена легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка.

Рассмотрим прямоугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = B, \quad (1.1)$$

где матрица A размера $n \times m$ ($m \leq n$) и вектор B размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными [6].

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы A равен m , то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \rightarrow C^T C = X^T A^T A X = \|C\|^2 > 0 \rightarrow A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица A размера $n \times m$, $n \geq m$ имеет ранг равный m ,

$$\dot{X} = -A^T A X + A^T B. \quad (1.2)$$

2. Исследование устойчивости матрицы системы первого приближения

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 2.1. Положение равновесия системы (1.2) является решением системы (1.1) или ее псевдорешением.

¹Профессор факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

²Доцент факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г.Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

Доказательство. Так как матрица - $A^T A$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T AC + A^T B = 0 \quad \text{или} \quad C = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad (2.1)$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (1.1) получено [5].

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор B в виде разложения по подпространствам, одно из которых L_1 , является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы A , а второе L_2 , является ортогональным дополнением первого, т.е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (2.1) примет вид:

$$-A^T AC + A^T (B_1 + B_2) = -A^T AC + A^T B_1 = 0$$

или

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad (2.2)$$

Покажем, что найденная величина C , является псевдорешением уравнения (1.1), т.е. имеет место неравенство [4]

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|, \quad X \neq C,$$

где $\|\cdot\|$ - евклидова норма. Это будет и означать, что квадратичное отклонение $\|AX - B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [1].

Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX, \quad U + V = B - AX,$$

тогда,

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2.$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т.е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (1.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A)X_k + hA^T B, \quad (2.3)$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (1.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления точности чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки [3]

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|,$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|, k = 1, 2, \dots$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (2.3) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Доказательство закончено.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (1.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (1.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большего порядка (Рунге-Кутта и т.д.) не является необходимым, т.к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, Н.И.Зубов. Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления. Монография. СПб.: Мобильность плюс, 2010, 319 с.
2. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, С.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2011. 362 с.
3. Н.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Автоматизация проектирования устойчивости и надежности колебательных систем. Учебное пособие. СПб.: Мобильность плюс, 2010. 355 с.
4. Н.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Безопасность функционирования технических систем. Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2009, 343 с.
5. А.В.Зубов, Н.В.Зубов. Динамическая безопасность управляемых систем. Монография. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.
6. А.В.Зубов, Н.В.Зубов. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. Учебное пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2010. 102 с.

The new method of building minimum polynom

© A. F. Zubova³, M. V. Strecopitova⁴

Abstract. In this article is proposes the new method of building minimum polynom with help solving of systems linear algebraical equations, that is allows to find coefficients minimum polynom in limits accurate proposition numbers in computing and is frees from mistakes of roundedness.

Key Words: matrix, column, minimum polynom, material number, linear independent, equivalence.

³Professor of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

⁴Lecture of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 519.876.5

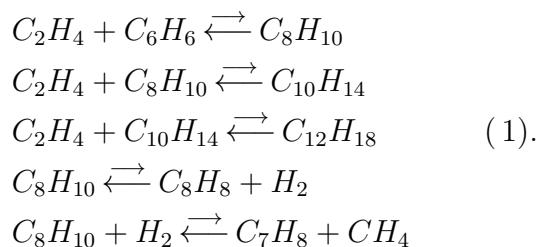
Численные эксперименты по определению возможности протекания химической реакции

© С. И. Спивак¹, А. В. Балаев², Д. З. Галин³

Аннотация. Данная статья является продолжением статьи «Алгоритм расчета возможностей протекания химических реакций при заданных термодинамических условиях» и приведен пример численного эксперимента по расчету термодинамических характеристик системы химических реакций.

Ключевые слова: энтропия, энтальпия, удельная мольная теплоемкость, энергия Гиббса, константа равновесия, конверсия, доля прореагировавшего вещества.

В данной статье рассматривается численный эксперимент по определению возможностей протекания химической реакции. Рассмотрим систему химических реакций:



На рисунке приведены графики конверсии в заданном температурном интервале и при давлениях 1 и 25 ат.

Рассмотрим результаты расчетов математической модели, которые приведены в таблице 1.

Таблица 1. концентрации веществ химической реакции при заданных термобарических условиях.

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

²Ведущий научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, abalaev@gmail.com.

³Аспирант кафедры математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский Государственный Университет» danilaq-complex@ya.ru

Концентрация компонентов %, моль. Т=400 °C, Р=5 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0	0	0	0	0	0	0
0,2770%	85,7539%	13,9692%	0	0	0	0	0	0
0,2394%	85,7862%	13,9368%	0,0377%	0	0	0	0	0
0,2388%	85,7867%	13,9369%	0,0371%	0,0006%	0	0	0	0
0,2388%	85,7869%	13,9367%	0,0371%	0,0006%	0,0002%	0,0002%	0	0
0,2388%	85,7871%	13,9365%	0,0370%	0,0006%	0,0002%	0	0,0002%	0,0002%
Концентрация компонентов %, моль. Т=400 °C, Р=25 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0	0	0	0	0	0	0
0,0564%	85,7223%	14,2212%	0	0	0	0	0	0
0,0484%	85,7292%	14,2144%	0,008%	0	0	0	0	0
0,0483%	85,7293%	14,2144%	0,0079%	0	0	0	0	0
0,0483%	85,7294%	14,2143%	0,0079%	0,0001%	0,0001%	0,0001%	0	0
0,0483%	85,7295%	14,2142%	0,0078%	0,0001%	0,0001%	0	0,0001%	0,0001%
Концентрация компонентов %, моль. Т=440 °C, Р=5 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,7064%	85,8152%	13,4784%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,6186%	85,8911%	13,4018%	0,0885%	0%	0%	0%	0%	0%
0,6172%	85,8923%	13,4020%	0,0871%	0,0014%	0%	0%	0%	0%
0,6172%	85,8928%	13,4015%	0,0871%	0,0014%	0,0006%	0,0006%	0%	0%
0,6172%	85,8933%	13,4010%	0,0871%	0,0013%	0,0006%	0%	0,0006%	0,0006%
Концентрация компонентов %, моль. Т=440 °C, Р=25 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0,0000%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,1481%	85,7354%	14,1165%	0,0000%	0%	0%	0%	0%	0%
0,1275%	85,7531%	14,0988%	0,0206%	0%	0%	0%	0%	0%
0,1272%	85,7534%	14,0988%	0,0203%	0,0003%	0%	0%	0%	0%
0,1272%	85,7537%	14,0985%	0,0203%	0,0003%	0,0003%	0,0003%	0%	0%
0,1272%	85,7539%	14,0982%	0,0203%	0,0003%	0,0003%	0%	0,0003%	0,0003%
Концентрация компонентов %, моль. Т=460 °C, Р=5 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
1,0688%	85,8670%	13,0642%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,9457%	85,9738%	12,9561%	0,1244%	0%	0%	0%	0%	0%
0,9439%	85,9754%	12,9563%	0,1226%	0,0018%	0%	0%	0%	0%
0,9439%	85,9762%	12,9555%	0,1226%	0,0018%	0,0009%	0,0009%	0%	0%
0,9439%	85,9770%	12,9547%	0,1226%	0,0018%	0,0009%	0%	0,0009%	0,0009%
Концентрация компонентов %, моль. Т=460 °C, Р=25 ат.								
Э	Б	ЭБ	ДЭБ	ТЭБ	Ст	Водород	Толуол	Метан
12,5%	87,5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,2298%	85,7471%	14,0231%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,1984%	85,7741%	13,9961%	0,0315%	0%	0%	0%	0%	0%
0,1979%	85,7745%	13,9961%	0,0310%	0,0005%	0%	0%	0%	0%
0,1979%	85,7749%	13,9957%	0,0310%	0,0005%	0,0005%	0,0005%	0%	0%
0,1979%	85,7753%	13,9954%	0,0310%	0,0005%	0,0005%	0%	0,0004%	0,0004%

Данные, приведенной выше, таблицы при производстве этилбензола при заданных термобарических условиях, и процентных соотношением исходных веществ (этилена и бензола) образуются вещества со следующими концентрациями. Из таблицы видно, что при росте давления конечная концентрация этилбензола растет. Это вызвано тем, что с ростом давления падает константа равновесия для реакции разложения этилбензола в стирол и водород, следовательно, падает концентрация водорода в системе, для последней реакции в системе (1), несмотря на то, что значение константы равновесия, последнее реакции системы, имеет большое значение, концентрации толуола и метана будут малы, ввиду того что концентрации водорода близка к нулю.

Как можно увидеть из приведенной выше таблицы с ростом температуры падает концентрация этилбензола. Вызвано это тем, что значения констант равновесия реакций, с ростом температуры тоже падают. В таблицах приведены значения концентраций системы для начальной концентрации Б:Э=7:1. Однако растет концентрация толуола и метана (продукты последней реакции системы). Вызвано это ростом значения константы равновесия, с ростом температуры, для реакции разложения этилбензола в стирол и водород. Получаем повышенную концентрацию водорода, исходного компонента последней реакции системы, а значение константы равновесия для реакции $C_8H_{10} + H_2 \rightleftharpoons C_7H_8 + CH_4$ очень велико, следовательно, весь водород прореагирует с этилбензолом в равном количестве. Чем больше водорода образуется в реакции: $C_8H_{10} \rightleftharpoons C_8H_8 + H_2$ тем больше мы получим толуола и метана в последней реакции (побочных продуктов).

Данная математическая модель позволяет провести численные эксперименты, по результатам которых можно сделать выводы не только о возможности или не возможности, но и рассчитать теоретические концентрации химических веществ в системе химических реакций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Рид. Дж. Праусниц. Т. Шервуд. Свойства газов и жидкостей 3-е издание. Л.: Изд. Химия Ленинградское отделение. 1982. – 592с.
2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий.– М.:Высш. шк., 2002. – 840с.
3. Бут, Э.Д. Численные методы / Э.Д. Бут – М.: Физматгиз, 1959.
4. Клибанов, М.В., С.И. Спивак, В.И. Тимошенко, М.Г. Слинько // ДАН СССР. – 1973. – Т.208, -№6.
5. Царева, З.М. Теоретические основы химтехнологии / З.М. Царева, Е.А.Орлова. – Киев: Высшая школа, 1986. – 271 с.
6. Вант Гофф, Я.Т. Очерки по химической динамике / Я.Т. Вант Гофф. –Л.: ОНТИ ХИМТЕОРЕТ, 1936. – 178с

Numerical experiments to determine the possibility of chemical reactions

© Spivak S.⁴, Balaev A.⁵, Galin D.⁶

Abstract. This article is a continuation of "The algorithm of calculating capacity of chemical reactions under specified thermodynamic conditions." and an example of a numerical experiment on the calculation of the thermodynamic characteristics of chemical reactions.

Key Words: entropy, enthalpy, specific molar heat capacity, Gibbs energy, equilibrium constant, conversion, percentage of reacted substance.

⁴Managing chair of the mathematical Modelling, GOU VPO "the Bashkir state university Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

⁵Leading Researcher, Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Academy of Sciences, abalaev@gmail.com.

⁶Postgraduate Department of Mathematical Modelling, «Bashkir StateUniversity», Ufa, danilaq-complex@ya.ru

УДК 517.9

О программе, корректирующей систему уравнений

© С. И. Спивак¹, И. Р. Салахов², О. Г. Кантор³

Аннотация. Разработана программа, позволяющая осуществлять трехэтапную процедуру корректировки систем уравнений, при условии достижения приемлемого значения критерия точности. Апробация разработанного программного продукта осуществлялась применительно к модели системной динамики численности населения Российской Федерации.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод Рунге-Кутты, метод Симпсона, модели системной динамики, оценка параметров модели.

Описание поведения динамических систем достаточно часто сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots, \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

при условиях

$$x_0(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n. \tag{1.2}$$

Решить систему (1.1) при условиях (1.2) означает найти зависимости вида

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t). \tag{1.3}$$

В тех случаях, когда зависимости (1.1) известны точно, например, на основании очевидных физических или химических законов [2], процесс получения решений (1.3) может быть реализован посредством одного из численных методов решения краевых задач (например, метода Рунге-Кутты, Чаплыгина и пр.) [1]. Однако при исследовании социально-экономических систем зависимости (1.1) априори неизвестны, вследствие чего их вид определяется посредством обработки эмпирических данных в ходе проверки той или иной гипотезы о непосредственном виде функций $f_i, i = \overline{1, n}$. В таких случаях результаты численного решения системы (1.1) могут существенно отличаться от фактических данных. Традиционный выход из этой ситуации заключается в возврате на этап определения зависимостей. При этом, очевидно, что и новые зависимости могут не обеспечить приемлемого соответствия численного решения системы (1.1) фактическим данным.

Таким образом, целесообразным является разработка метода «корректировки» вида функциональных зависимостей $f_i, i = \overline{1, n}$, обеспечивающего приемлемую точность.

В соответствии с поставленной целью в среде Delphi был разработан программный продукт, реализующий трехэтапную процедуру корректировки функций $f_i, i = \overline{1, n}$, при условии достижения приемлемого значения критерия точности, в качестве которого был выбран показатель средней ошибки аппроксимации \bar{A} , значения которого не должны превышать 10%. На первом этапе посредством применения метода Рунге-Кутты строилось

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

²Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; salah-off@mail.ru.

³Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

решение системы (1.1) при условии (1.2) [3]. На втором – для корректировки проблемных зависимостей применялся метод Симпсона: один из коэффициентов полагался неизвестным, после чего интегрируя обе части уравнения, правая часть заменялась приближенным выражением, рассчитанными по методу Симпсона. Из полученного соотношения определялся неизвестный параметр. На третьем этапе путем вариации значений параметров системы (1.1) исследовались окрестности каждого из них, в результате чего выявлялись диапазоны значений параметров, обеспечивающие необходимую точность, и определялись наиболее подходящие значения каждого из параметров.

Апробация разработанного программного продукта осуществлялась применительно к модели системной динамики численности населения Российской Федерации

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 64,01 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.4)$$

$$\frac{dD}{dt} = 108,17 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.5)$$

$$\frac{dI}{dt} = 1,23 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.6)$$

при условиях $N_0 = 147802133, D_0 = 1010,2, I_0 = 1$.

Для реализации первого этапа был разработан модуль, позволяющий посредством активации размещенной на рабочем поле программы кнопки Calc, осуществлять вызов функции Runge_Kutt, реализующей метод Рунге-Кутты 4-го порядка для решения практически неограниченных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и обеспечивающей получение результатов и сообщений о возможных ошибках [3].

Функция Runge_Kutt решения ОДУ и систем ОДУ:

```
Function Runge_Kutt (FunArray: TFunArray; First: Extended; Last: Extended; Steps: Integer; InitArray: TInitArray; var Res: TResArray):Word;
```

Здесь:

FunArray - вектор функций (правых частей уравнений системы);

First, Last - начальная и конечная точки расчетного интервала;

Steps - число шагов по расчетному интервалу;

InitArray - вектор начальных значений;

var Res - матрица результатов включая независимую переменную.

В модуле описаны типы:

```
TVarsArray = array of Extended; // вектор переменных, включая независимую переменную
```

TInitArray = array of Extended; // вектор начальных значений

TFunArray = array of function(VarsArray: TVarsArray):Extended; // вектор функций

TResArray = array of array of Extended; // матрица результатов

TCoefsArray = array of Extended; // вектор коэффициентов метода Рунге-Кутты

Функция возвращает коды ошибок:

0 – нет ошибок;

100 - число уравнений не равно числу начальных условий.

Решение уравнений или систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержится в переменной-матрице Res. Первый индекс матрицы относится к переменной (0 – независимая переменная, 1 – первая зависимая и т.д.), второй – к номеру расчетной точки (0 – начальная точка).

Для удобства ввода и редактирования данных, а также анализа результатов расчетов рабочее поле программы было поделено на область задания системы, начальных данных

и область отображения полученного решения и результатов реализации разработанных алгоритмов.

$dN/dt =$	<input type="text" value="8,1386"/>	$* 10$	$* N$	$* S$	$-$	<input type="text" value="64,0046"/>	$* N$	$* S$
			<input type="text" value="0,35"/>			<input type="text" value="1"/>		
$dD/dt =$	<input type="text" value="108,17"/>	$* D$	$-$	<input type="text" value="638,868"/>	$* I$			
			<input type="text" value="-0,5"/>			<input type="text" value="0,08"/>		
$dI/dt =$	<input type="text" value="1,23"/>	$* I$	$-$	<input type="text" value="0,0933"/>	$* S$			
							<input type="text" value="147802133"/>	Graph
							<input checked="" type="radio"/> N(t)	
							<input type="radio"/> D(t)	
							<input type="radio"/> I(t)	
							<input type="text" value="12"/>	t =
							<input checked="" type="checkbox"/> Э.Д.	

Рисунок 1.1

Поле программы для задания системы и начальных данных.

Каждое уравнение описано как отдельная функция программы, и является соответствующим элементам вектора FunArray. Для удобства корректировки системы в ходе работы с программой коэффициенты и показатели степеней уравнений берутся из значений соответствующих полей TEdit рабочего поля. Данная опция дает возможность проследить динамику изменения рассчитываемого решения и его соответствие экспериментальным данным при изменении любого показателя.

Вектор начальных значений задается в полях, обозначенных «N0», «D0», «I0», и также может корректироваться, что обеспечивает возможность использования программного продукта для решения других задач, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичной структуры. Число шагов по расчетному интервалу составляло 1200, начало расчетного интервала было принято за 0, а конец соответствует количеству периодов в имеющихся фактических данных и может задаваться исследователем в соответствующем поле t.

Для облегчения принятия решения и более полной оценки работы модуля результат полученного решения представлен в виде графиков, которые реализуются с помощью компоненты Delphi TChart. Свойства данной компоненты предоставляют возможность одновременно прорисовывать на одном поле и полученное решение, и экспериментальные показатели уравнений системы, что позволяет исследователю наглядно отслеживать результаты в ходе процесса решения задачи.

Панель «Graph» позволяет выбрать график необходимой для отображения функции. Выбрать сразу два графика нельзя, так как области полученных значений функций могут быть несоразмерными. Маркер «Э.Д.» позволяет отображать на графике заданные экспериментальные значения для визуального анализа полученного решения.

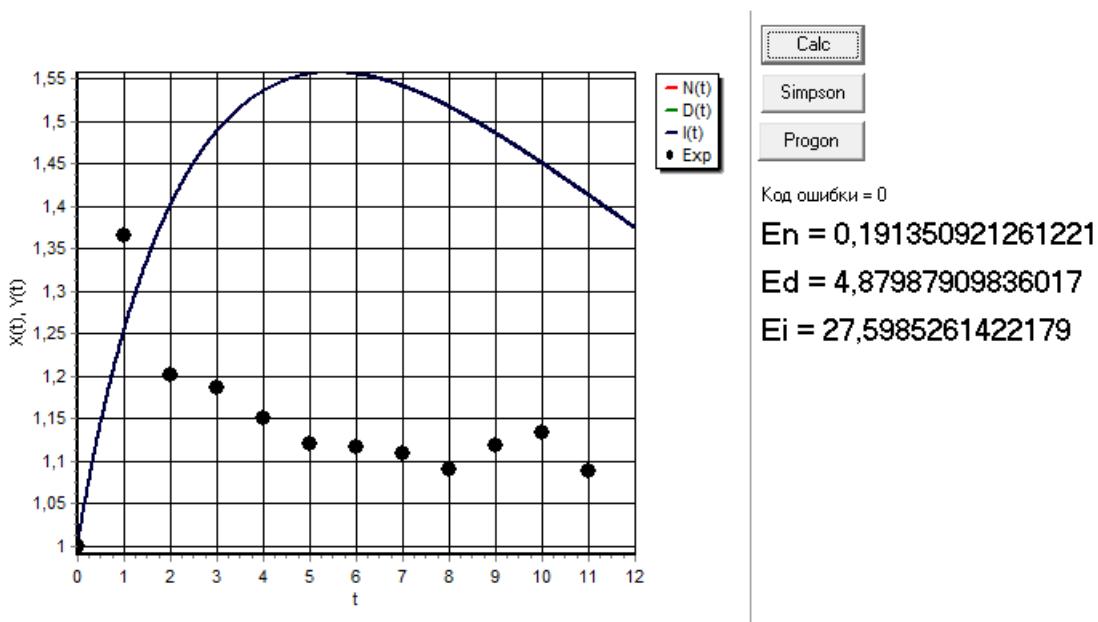


Рисунок 1.2
Результаты работы процедуры Runge_Kutt для переменной I.

Лейблы «En», «Ed», «Ei», отображающие значения средних ошибок аппроксимации для уравнений (1.4), (1.5), (1.6) соответственно, были выведены на рабочее поле также для удобства контроля за процессом получения решения. Как следует из рис. 2 на первом этапе не удалось достичь приемлемой точности для переменной I.

Реализация второго этапа, предназначенногодля корректировки проблемных зависимостей, обеспечивается вызовом разработанного алгоритма, посредством активацией кнопки «Simpson». В результате работы данного алгоритма посредством использования метода Симпсона уточняется определенный параметр, значение которого отображается в лейблах $f_1 - f_6$ рабочего поля, благодаря чему новое решение системы (1.4) - (1.6) более точно описывает экспериментальные данные.

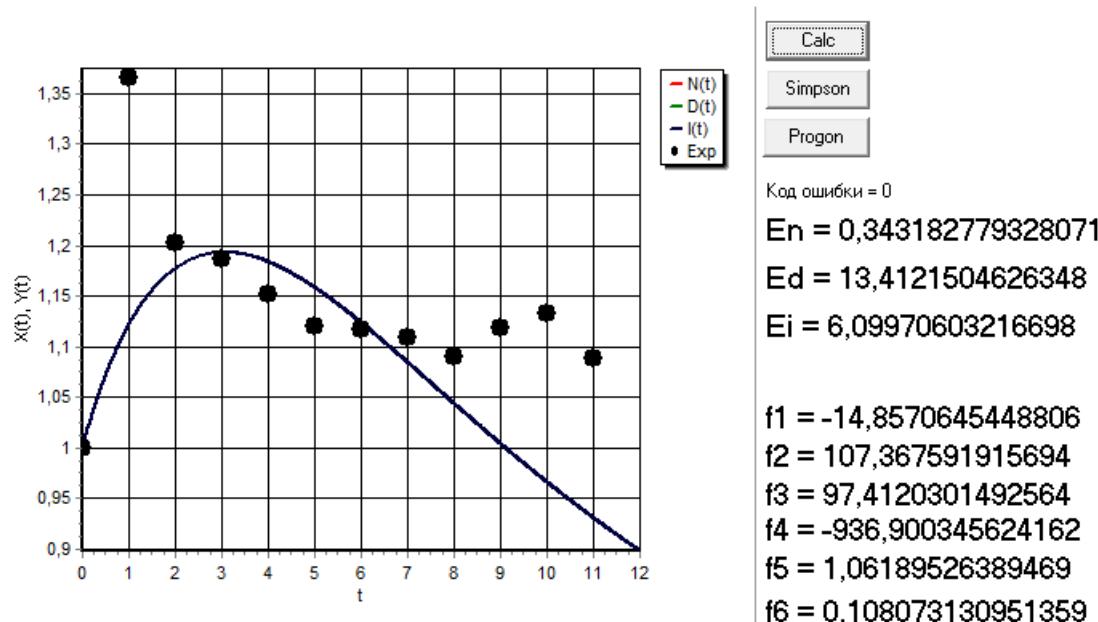


Рисунок 1.3
Результат работы процедуры Simpson.

Из рис. 3 видно, что после запуска процедуры Simpson точность построенной зависимости для переменной I улучшилась, а для переменной D – напротив, стала хуже.

Для определения наиболее подходящих значений параметров системы, обеспечивающих приемлемую точность, является целесообразным выявить диапазоны их вариации. Для этого и был разработан третий этап процедуры корректировки, вызываемый активацией кнопки «Progon». Реализованный алгоритм позволяет исследовать окрестность любого показателя степени или коэффициента на поиск более подходящего значения, пошагово «пробегая» анализируемый интервал.

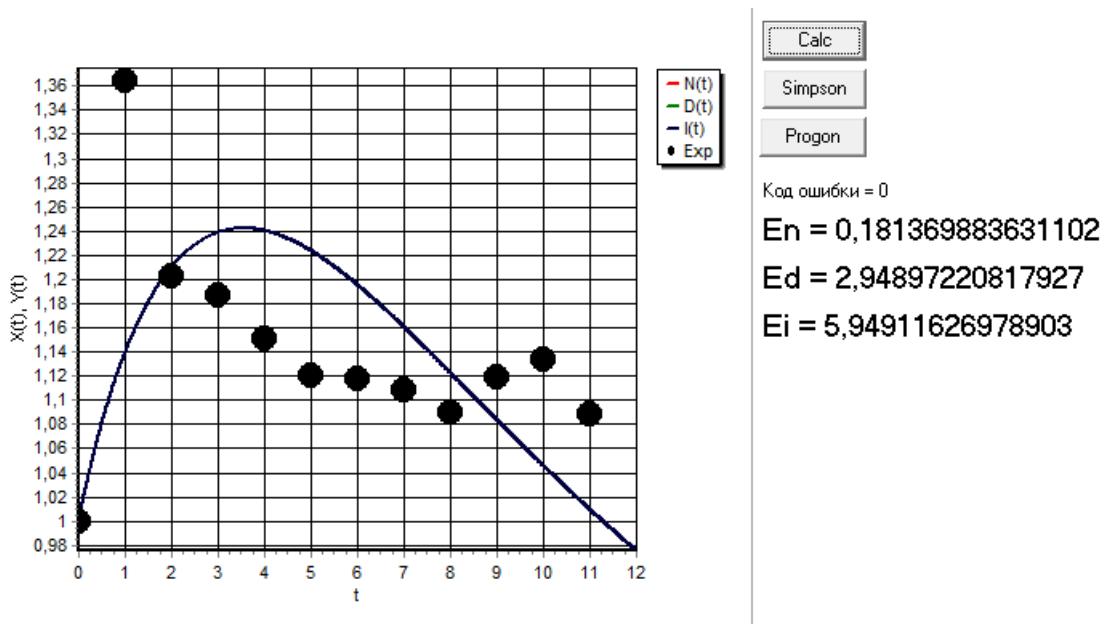


Рисунок 1.4

Результат работы процедуры Progon.

В результате реализации третьего этапа были достигнуты приемлемые точности по всем трем зависимостям. Таким образом, описанная выше трехэтапная процедура позволила получить такие параметры системы (1.4) - (1.6), которые обеспечивают адекватное описание исходных данных с позиций достижения приемлемых значений средних ошибок аппроксимации:

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 66,5 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.7)$$

$$\frac{dD}{dt} = 103,41 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = 1,08 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.9)$$

Данный программный продукт и разработанный комплекс методов математического моделирования и вычислительных алгоритмов позволяет исследователю осуществлять поэтапный процесс корректировки модели, добиваясь необходимой точности. Он прост в применении, а получаемый результат дает четкую картину динамики поведения всей системы, при этом контроль результатов осуществляется как визуально, так и численно, посредством наблюдения погрешностей получаемого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.С. Чаплыгин. Исследования по динамике неголономных систем. - М.: ЛКИ, 2007.
2. Н.Н. Моисеев. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.
3. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа, 3-е изд. - М.: Наука, 1967.

About the program, correcting the system of equations

© S. I. Spivak⁴, I. R. Salakhov⁵, O. G. Kantor⁶

Abstract. The program, which allows for a three-stage adjustment procedure for systems of equations, subject to achieving an acceptable value of the criterion of accuracy. Testing of the developed software product was carried out with respect to system dynamics models population of the Russian Federation.

Key Words: differential equations, Runge-Kutta method, Simpson's rule, system dynamics models, estimation of model parameters.

⁴Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

⁵Postgraduate, Bashkir State University, Ufa; salah-off@mail.ru.

⁶Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ВЛАДИЛЕН АЛЕКСАНДРОВИЧ ТРЕНОГИН (К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

12 августа 2011 г. исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося ученого-математика и педагога, Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, доктора физико-математических наук, профессора В.А. Треногина. Он родился 12 августа 1931 г. в г. Кыштым Челябинской области. Его мать, Евгения Яковлевна, была дочерью священника, председателя пермского хорового общества. После окончания Пермского госуниверситета работала преподавателем, а позднее доцентом истории СССР в вузах, была участницей и инвалидом Великой отечественной войны. Отец, Треногин Александр Федорович, потомок уральских мастеров, был Уполномоченным Цветметзолота на Урале по охране от хищений золота и драгоценных металлов, позднее был председателем Свердловского горисполкома. С 1941 г. он участвовал в Великой отечественной войне и погиб под Сталинградом в 1942 году.

В 1950 году В.А. Треногин окончил в г. Ужгороде среднюю школу с золотой медалью и был награжден грамотой ЦК ВЛКСМ, как лучший ученик школ Ужгорода в период 1945-1950 гг. В 1950 году он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. В то время на мехмате преподавали выдающиеся советские ученые-математики П.С. Александров, А. Г. Курош, Л.А. Люстерник, Н.К. Бари, В.В. Немыцкий, И.М. Гельфанд, А.И. Маркушевич, Н.Г. Четаев, Е.Б. Дынкин, С.А. Яновская. Среди сокурсников юбиляра учились будущие академики и членкоры АН СССР Н.С. Бахвалов, М.М. Лаврентьев, Д.М. Климов, О.В. Бесов, О.Б. Лупанов, Н.В. Кардашев, А.А. Куликовский, Ю.А. Парицкий и многие доктора наук. Являясь участником семинара профессора А.Г. Куроша, Владилен Александрович на втором курсе выполнил курсовую работу, посвященную различным способам введения метрики в линейных пространствах. Дав высокую оценку этой работе, А. Г. Курош лично представил и рекомендовал его к члену-корреспонденту АН СССР Лазарю Ароновичу Люстернику, под руководством которого Владилен Александрович выполнил курсовые и дипломную работу «Об однозначности представления функции многих переменных суперпозицией функций меньшего числа переменных в банаховых пространствах», опубликованную ДАН СССР.

Закончив с отличием в 1955 году мехмат МГУ В. А. Треногин был распределен на работу на кафедру высшей математики МФТИ в коллективе которой работали многие выдающиеся ученые Математического Института им. В. А. Стеклова и Вычислительно-го Центра АН СССР, в их числе академики В.С. Владимиров, С.М. Никольский, Л.Д. Кудрявцев, Е.Ф. Мищенко, Л.В. Овсянников, В течение 17 лет работы в МФТИ, В. А.



Треногин прошёл путь от ассистента до профессора, ведущего лектора по курсам математического анализа, функционального анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. В 1960 году он защитил кандидатскую диссертацию «Разветвление решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах», а в 1967 году докторскую диссертацию «Некоторые вопросы теории функциональных и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах».

В 1972 году В. А. Треногин был направлен Министерством в Московский институт стали и сплавов (МИСиС) на должность заведующего кафедрой математики. В этой должности он работал до 1993 года, с тех пор является профессором той же кафедры, а в 2010 году получил более высокий ранг профессора-исследователя. Под его руководством эта кафедра стала одной из наиболее квалифицированных кафедр математики технических вузов, большинство сотрудников кафедры активно занимались наукой.

Математическая общественность СССР, СНГ и западных государств знакома с математическим творчеством профессора В. А. Треногина ещё с 60-х годов. В 1962 году в Успехах математических наук (том 17, №2) публикуется работа М. М. Вайнберга и В. А. Треногина «Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие», составившая основу их монографии «Теория ветвления решений нелинейных уравнений» (М., Наука, 1969), в основе которой содержится «принцип конечномерности» В. А. Треногина исследования нелинейных явлений, сочетания алгебраических, асимптотических, вариационных, топологических, а в дальнейшем приближенных и теоретико-групповых методов в применении к эквивалентным уравнениям разветвления и отражено современное состояние теории ветвления и бифуркаций в естественно-научных дисциплинах. Эта монография, написанная по трудам В.А. Треногина, является и в наши дни базой современных исследований по теории бифуркаций, она переведена на немецкий (1973) и английский (1974) языки. Результаты более поздних исследований в этом направлении отражены в коллективной монографии «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения» (М., Физматлит, 2003), научным редактором и одним из авторов, которой является В. А. Треногин. В 1970 году публикуется его работа «Развитие и применения асимптотического метода Люстерника-Вишника» (Успехи математических наук, том 25, №4), содержащая современное развитие методов малого параметра, а в 1971 году - работа «Приближения на семействах банаховых пространств и разрешимость нелинейных уравнений» (ДАН СССР, 201, №6), являющаяся основой абстрактной теории разностных схем, отраженной в главе VII его замечательной монографии «Функциональный анализ» (М., Наука, 1980). Эта монография 1991, 1993, 2002, 2005 в комплекте с книгой «Задачи и упражнения по функциональному анализу» (в соавторстве с Б. М. Писаревым и Т. С. Соболевой, М., Наука, 2002, 2005), получившая гриф МинВУЗа как учебника (переведен на французский язык) и соответственно как учебного пособия (переведено на французский и испанский языки) является лучшим руководством для аспирантов и специалистов по прикладной математике, в которой кроме традиционных частей, - изложенной нестандартным способом теории интеграла и спектральной теории линейных операторов, - представлены методы малого параметра и продолжения по параметру, приближенные, в частности разностные, методы решения функциональных уравнений, метод Галеркина и метод конечных элементов (приближение сплайнами), элементы выпуклого анализа и метод монотонных операторов. За создание курса функционального анализа для студентов технических вузов на основе этих книг их авторы были удостоены в 1990 году первой премии ГК СССР по народному образованию «За лучшую методическую работу». Далее следуют монографии «Методы математической физики» (Москва-Ижевск, 2002, институт компьютерных исследований), написанная на основе вышедших ранее в издательстве МИСиС двух учебных пособий и «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (М.,

Физматлит, 2009, гриф НМС как учебника). В книге «Воспоминания» в яркой нестандартной форме содержатся непосредственные впечатления автора от встреч со своими учителями, друзьями и коллегами.

В 1972 году профессор В. А. Треногин был включен в состав Научно-методического Совета по математике Министерства образования и науки РФ приказом министра и поныне является членом его Президиума. В Научно-методическом совете он сразу же возглавил комиссию по приему в вузы СССР и многие годы являлся автором программы по математике для поступающих в вузы. По вопросам приема в вузы он выступал в периодической печати и по телевидению. С назначением председателем НМС академика А.Н. Тихонова профессор В.А. Треногин стал членом бюро президиума НМС в составе шести человек, заместителем председателя секции НМС технических, сельскохозяйственных и экономических вузов и возглавил еще комиссию по работе подготовительных отделений. НМС вел огромную научно-методическую работу в регионах России и в союзных республиках, проводя совещания-конференции лекторов и ведущих преподавателей. В. А. Треногин руководил такими совещаниями во Владивостоке, в Иваново, в Батуми, в Сыктывкаре, в Ленинграде и в Пскове. Его работа в НМС в этот период отражена в книгах: «О совещании-семинаре преподавателей вузов Северо-Западного региона СССР», сборник научно-методических статей по математике (Сыктывкар, 1988, под редакцией Треногина В.А., Яголы А.Г.), «Помощь поступающим в вузы и начинающим студентам», «Регулярная и хаотическая динамика» (Москва-Ижевск 2005, под редакцией и при соавторстве Треногина В.А.). Он также был одним из авторов программы по математике объемом в 510 часов для технических специальностей и автором программы по математике для поступающих в вузы СССР.

От своего учителя профессора Л. А. Люстерника В. А. Треногин перенял постоянный интерес к прикладным задачам. Здесь следует отметить совместную с Г. А. Тирским работу по определению температурного поля охлаждаемой лопатки газовой турбины (1959) и автомодельной задачи вязкого гиперзвукового ударного слоя (1974), изучение явления выпучивания гибких пластин, исследования по длинным и уединенным волнам с приложениями в гидродинамике и самоорганизации (1964, 1967, 1986, 2006). Проведенная на кафедре математики МИСиС под руководством В. А. Треногина исследовательская работа по унификации и стандартизации марок сталей и сплавов была удостоена третьей премии министерства «за лучшую научную работу».

За 55 лет научной и педагогической деятельности профессором В. А. Треногиным внесен огромный вклад в подготовку инженеров, ученых и прикладников высшей классификации. В аспирантуре МФТИ и МИСиС он подготовил ряд специалистов в области нелинейного анализа и асимптотических методов, успешно работающих в России и за рубежом. В 1968 году В. А. Треногин выполнил совместно со старшим научным сотрудником Института математики им. В. И. Романовского АН СССР Б. В. Логиновым несколько перспективных работ, создавших теорию ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности - новое направление в теории нелинейных уравнений, составившее предмет их дальнейших совместных исследований (1971 - 1990) и докторскую диссертацию Б. В. Логинова (1982). В 1972 г. В.А. Треногин и Н.А. Сидоров (Иркутский гос. Университет). доказывают самую общую теорему существования точек бифуркации от собственного значения нечетной алгебраической кратности линеаризации, а в дальнейшем, в течение 70-х годов, разрабатывают теорию регуляризации задач теории ветвления, послужившую основой для создания устойчивых алгоритмов решения этих задач составившую основу докторской диссертации Н. А. Сидорова (1983). Сотрудничество В. А. Треногина с Н. А. Сидоровым и Б. В. Логиновым, создавших свои математические школы в Иркутске, Ташкенте и Ульяновске продолжается до настоящего времени (1993,

1996, 1997, 2003, 2007, 2010).

Исследования В.А. Треногина в функциональном анализе, асимптотических и приближенных методах, дифференциальных уравнениях и математической физике отражены более чем в 250 научных и методических работах в центральных и зарубежных журналах, монографиях переведенных на иностранные языки. Развиваемые им научные направления - теория ветвления и бифуркаций, теория пограничного слоя в нелинейных уравнениях с частными производными, методы регуляризации и симметрийные (групповые) методы в нелинейном анализе, исследования по длинным и уединенным волнам и теории самоорганизации (предпринятые еще в период написания докторской диссертации) оказали значительное и плодотворное влияние на развитие математики в этих направлениях; они были использованы во многих приложениях к механике и физике, вычислительной математике. В последние годы В.А. Треногин разрабатывает аспекты нелинейного анализа в слабо метрических пространствах, методы продолжения по параметру, предлагает новое определение оператора сопряженного к нелинейному, рассматривает вопросы локальной и глобальной обратимости нелинейных операторов, в совместных работах с К.А. Хасseinовым (Казахстан) исследует многоточечные задачи для ОДУ, предлагает теорию абстрактных граничных задач в связи с изучением нелокальных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений и задач для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, не оставляя своих основных направлений в линейном и нелинейном функциональном анализе. Направления работ В.А. Треногина последних четырех лет - теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявных операторах. О широте научных интересов юбиляра можно судить по редактированной им коллективной монографии «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения» М. Физматлит, 2003.

В.А. Треногин - активный участник международных конференций и симпозиумов различного ранга. Был членом делегации СССР на международной конференции по сингулярным возмущениям и турбулентности в Лионе, Франция, 1979 (публикация в Lecture Notes in Mathematics). Среди них симпозиумы GAMM (Международное общество прикладной математики и механики) Гамбург 1993, 1995, Фрейбург -2000 (Германия), Падуя - 2003 (Италия), Цюрих - 2007(Швейцария), Грац 2011 (Австрия); ICIAM (Международный конгресс промышленной и прикладной математики) - Гамбург 1995 (Германия), Эдинбург - 1999 (Великобритания), Цюрих - 2007 (Швейцария), Ванкувер 2011 (Канада); ICM (Международный конгресс математиков) Москва 1965, Варшава и Берлин 1998; EuroMech в Копенгагене в 2001, он выступал в качестве приглашенного лектора на конференциях организованных IFNA (Международная Федерация нелинейных аналитиков) в Греции, Италии и Турции, был приглашенным профессором в Лейпцигском университете (ГДР 1973 и Алжире Университет Аннаба 1979) принимал участие в ежегодных конференциях CAIM (Международная конференция по прикладной и промышленной математике) в Румынии: Питешти 2002, Миовени 2006 и Орадея 2007, конгрессы ISAAC в Канаде 1999 г., Японии 2002, Сицилии 2005 г. и Москве 2011 г.) , конференции и школы-семинары в Мордовском государственном университете с 2004 года и многих других, часто с грантами оргкомитетов на участие. Он является членом Московского математического общества, Средневолжского математического общества, ROMAI (Румынского математического общества), AMS (Американского математического общества), GAMM и ISAAC, входит в редколлегии математических журналов: ROMAI Journal, Журнал Средневолжского математического общества, Известия Иркутского государственного университета, серия «Математика».

Творческая активность и научные связи профессора Треногина В.А. в странах СНГ (Узбекистан, Казахстан, Грузия) и дальнего зарубежья (Румыния, Польша, Германия)

характеризуют его как профессора международного уровня.

Библиографические сведения о профессоре В. А. Треногине приведены в изданиях «Математика в СССР», «Механика в СССР», «Who's Who in the World» (1999-2001), «Знаменитые русские» (1999), УМН (2001), Soviet Mathematical surveys 2001, электронный ресурс: <http://misis.ru/ru/5717>.

Профессор В. А. Треногин имеет многочисленные правительственные, ведомственные и научные награды, он интенсивно продолжает свою научную и педагогическую деятельность, ведет большую научно-организационную работу в Научно-методическом совете по математике Министерства образования и науки РФ. Пожелаем ему здоровья, счастья и новых творческих свершений.

*C. Н. Алексеенко, Е. М. Бронштейн, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. П. Жабко, Е. Б. Кузнецов,
Б. В. Логинов, Т. Ф. Мамедова, О. В. Починка, В. И. Сафонкин,
С. И. Спивак, Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин, И. И. Чучаев,
П. А. Шаманаев, Т. А. Шемякина.*

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе ТЕХ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой \input в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду \headerRus. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду \headerEn. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду \headerFirstEn с такими же параметрами, как для команды \headerRus.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtou{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , Δ_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`.

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\bibitem`, имеющих один параметр:

`\bibitem{метка для ссылки на источник}`

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcitem` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiK_EX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Атряхин В. А.	35	Казакова Ю. А.	14
Балаев А. В.	83	Кантор О. Г.	87
Беляева М. Б.	40	Кузьмичев Н. Д.	25
Вельмисов П. А.	14	Левченко Ю. А.	7
Галин Д. З.	83	Медведев В. С.	51
Гринес В. З.	7	Нурисламова Л. Ф.	61
Дюба Е. С.	46	Салахов И. Р.	87
Жукома Е. В.	51	Сафина Г. Ф.	66
Зубов А. В.	78	Спивак С. И.	83, 87
Зубова А. Ф.	80	Стрекопытова М. В.	80
Зубова О. А.	78	Треногин В. А.	94
Исаенкова Н. В.	51	Федченко А. А.	25
Шаманаев П. А. 35			