

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 13, № 3



2011

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 13, № 3

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2011

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 13, № 3

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

Г. И. Казакевич, Л.В. Ключкова, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин	
Применение адаптивных нейросетевых моделей к задачам подземной гидродинамики	8
1. Введение	8
2. Постановка задачи	9
3. Мониторинг — адаптация — прогноз разработки месторождений (обзор ситуации)	11
4. Нейросетевое прогнозное обучение	11
4.1. Первичная адаптация	12
5. Нейросетевое адаптивное обучение и симуляционный прогноз	13
6. Заключение	13

Б. В. Логинов, И. В. Коноплева, Л. В. Миронова	
Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии	15
1. Введение	15
2. Стационарные задачи теории ветвления	16
3. Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации	21

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Ю. А. Гнатенко, М. Т. Карамуллин	
Численное решение задачи оптимального управления с использованием системы распределенных вычислений	31

Е. Я. Гуревич	
О топологии несущего многообразия для диффеоморфизмов Морса-Смейла	35
1. Введение и формулировка результатов	35
2. Топология несущего многообразия M^3	36

Е. В. Жужома, Л. А. Куприна, В. С. Медведев	
О диффеоморфизмах Морса-Смейла с тремя неподвижными точками	40

Д. С. Казакова	
Моделирование мышечной деятельности человеческого организма с применением параллельных вычислительных технологий ..	47
1. Введение	47
2. Постановка задачи	47

-
3. Модель распараллеливания вычислительного процесса и применяемые методы 49
 4. Результаты вычислительного эксперимента и основные выводы 50
-

М. Л. Коломиец, А. Н. Сахаров

- Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодическим возмущением 53
1. Введение 53
 2. Потоки Данжуа 56
 3. S^1 -расширения квазипериодических потоков 57
 4. Проективные потоки, индуцируемые двумерными линейными расширениями 60
 5. Заключение 63
-

А. А. Кулешов

- Численный метод для моделирования малых поперечных колебаний тонких упругих пластин 66
1. Постановка задачи 66
 2. Описание численного метода 67
 3. Сходимость разностных аппроксимаций 69
 4. Результаты расчетов 70
-

В. Г. Малинов

- О версии регуляризованного проекционного двухшагового квази-ньютоновского метода 73
1. Введение 73
 2. Метод решения задачи 74
 3. Вспомогательные утверждения 75
 4. Обоснование сходимости ПОДКРМ 77
 5. Правило останова метода и регуляризирующий оператор 82
 6. Оценка скорости сходимости ПОДКРМ 84
-

М. И. Малкин

- Интервалы вращения счетных топологических марковских цепей с двумя классами состояний 88
1. Введение 88
 2. Интервалы вращения транзитивных топологических марковских цепей . . . 89
 3. Периодические точки, представляющие концы интервала вращения 91
-

Э. Н. Мифтахов, С. А. Мустафина

- Исследование размер-состав распределения продукта сополимеризации бутадиена со стиролом. 94
1. Кинетическая схема процесса сополимеризации 94
 2. Решение прямой задачи 95
 3. Химический размер и состав макромолекул 96
-

А. Ю. Переварюха

- Моделирование популяционных изменений на основе численного решения разрывных ОДУ 101

1.	Введение	101
2.	Гибридная модель с изменяемой правой частью	103
3.	Заключение	105

С. И. Спивак, О. Г. Кантор, И. Р. Салахов	
Оценка параметров моделей системной динамики	107

С. И. Спивак, А. В. Балаев, Д. З. Галин	
Алгоритм расчета возможностей протекания химических реакций при заданных термодинамических условиях	114

Е. В. Степашина, С. А. Мустафина	
Численный алгоритм уточнения механизма химической реакции DRGEP-методом	118
1. Введение	118
2. Постановка задачи	118
3. Вычислительный эксперимент	119
4. Результаты	120

Н. С. Яшагин	
Численный метод решения начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля	122
1. Постановка задачи	122
2. Формулы численного интегрирования и априорные оценки погрешности вычислений	124
3. Итерационная процедура вычисления решений интегрального уравнения. Оценка погрешности и сходимость	128

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. Н. Лизин	
Темпоральная организация данных и метаданных для коллективного управления данными	135
1. Введение	135
2. Нарушение истинности соединений предикатов	137
3. Решение задач управления коллективным доступом к данным	138
4. Темпоральность метаданных и управление совместными данными нескольких информационных систем	142
5. Реализация моделей в СУБД Microsoft SQL Server	144

Б. В. Логинов, В. Е. Поспеев	
Регуляризация задачи с возмущениями линейного уравнения малыми линейными слагаемыми	146

Л. С. Соловарова

	Об одном классе многошаговых методов для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений индекса один	148
1.	Введение	148
2.	Постановка задачи и разностные схемы	148

	Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	152
	Алфавитный указатель	154

ОТ РЕДАКЦИИ

В этом номере публикуются работы ученых, которые докладывали свои результаты на Пятой международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского. Школа-семинар проводилась в г. Саранске на базе Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва с 1 по 13 июля 2011 года при поддержке РФФИ, грант №11-01-06819 моб_г.

Редакция журнала желает авторам творческих успехов!

УДК 51.7:532.546

Применение адаптивных нейросетевых моделей к задачам подземной гидродинамики

© Г. И. Казакевич¹, Л. В. Клочкова², Ю. А. Повещенко³, В. Ф. Тишкин⁴

Аннотация. В работе рассматриваются возможности совместного применения метода опорных операторов и нейросетевого моделирования для построения эффективной методики решения ряда обратных задач подземной гидродинамики.

Ключевые слова: опорные операторы, нейросетевое моделирование, обратные задачи подземной гидродинамики

1. Введение

Исходная система уравнений изотермической двухфазной фильтрации несмешивающихся флюидов в пористой среде с общим давлением имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho_w S_W) = \operatorname{div} \left[(k K_{rw} \rho_w / \mu_w) \left(\operatorname{grad} P - g \rho_w \vec{k} \right) \right] - q_w \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho_g (1 - S_W)) = \operatorname{div} \left[(k K_{rg} \rho_g / \mu_g) \left(\operatorname{grad} P - g \rho_g \vec{k} \right) \right] - q_g \quad (1.2)$$

Здесь \vec{r} — радиус-вектор, g — ускорение силы тяжести, \vec{k} — орт, направленный вертикально вниз, P — давление, S_W — насыщенность водой, q_w и q_g — массовые расходы воды и газа на единицу объема пласта в единицу времени, $k(\vec{r})$ — тензор абсолютной проницаемости, $K_{rw}(S_W)$ и $K_{rg}(S_W)$ — фазовые проницаемости воды и газа соответственно, $\mu_w(P)$, $\mu_g(P)$ — динамические вязкости флюидов, $m(\vec{r}, P)$ — пористость пласта, $\rho_w(P)$, $\rho_g(P)$ — плотности флюидов.

Приток газа к скважинам Q (в единицу времени) моделировался нелинейным двучленным законом фильтрации:

$$P_{nl}^2 - P_s^2 = \alpha Q + bQ^2. \quad (1.3)$$

Здесь P_{nl} , P_s — пластовое и забойное давления соответственно, α и b — коэффициенты фильтрационного сопротивления.

Проведение расчетов в областях, имеющих сложную разноматериальную пространственную структуру, предъявляет специфические требования к численным методам решения. Во-первых, разностная схема должна быть построена в пространственной области на нерегулярных сетках, адаптированных к расчетной области и априорным свойствам решения. Во-вторых, схема должна обладать порядком аппроксимации, согласованным

¹Старший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва; gkazakevich@yandex.ru.

²Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

³Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; poveshchenko@keldysh.ru.

⁴Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

с априорной гладкостью решения, причем порядок аппроксимации определяется в нормах, которые также зависят от априорной гладкости, например в разностных аналогах норм пространства Соболева. В-третьих, схемы должны обеспечивать законы сохранения с погрешностью, которая должна быть ограничена во времени, иначе нельзя рассматривать асимптотические задачи. Таким образом, схема должна удовлетворять требованиям консервативности, введенным А.А.Самарским, а также специальным видам контроля балансов программистского характера, связанных с ошибками округления в процессе вычислений. Одним из подходов к построению полностью консервативных разностных схем для уравнений математической физики, записанных в терминах инвариантных дифференциальных операторов div , grad , rot , на нерегулярных сетках является метод опорных операторов [2]. Идея этого подхода состоит в непосредственной аппроксимации одного из вышеперечисленных операторов и аппроксимации остальных из условия выполнения разностных аналогов определенных интегральных тождеств. Применительно к математическому моделированию фильтрационных и упругопластических процессов в геофизических задачах предлагаемый подход, основанный на методе опорных операторов, позволяет производить расчеты в областях сложной формы на нерегулярных сетках [3].

Сравнительный анализ алгоритмов метода конечных элементов (МКЭ) и метода опорных операторов (МОО) показал, что последний не имеет ряда недостатков, присущих МКЭ (в частности отсутствие непрерывных базисных функций и интегралов в каждом элементе, меньшие шаблоны разностных операторов задачи, эквивалентность разностной схеме в простых ситуациях). Этот факт делает МОО применительно к задачам подземной гидродинамики классическим и инженерную разработку специфических для него классов неструктурированных сеток актуальной.

2. Постановка задачи

Принцип построения конечно-разностного алгоритма основывается на методе опорных операторов, из которого, в частности, вытекает самосопряженность рассматриваемой задачи. В качестве иллюстрации достаточно ограничиться краевой задачей для оператора Лапласа с однородными граничными условиями (Дирихле или Неймана) на внешней границе области.

Построим следующее семейство разностных схем метода опорных операторов.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними ($\sigma(\lambda)$) — границами балансных узловых доменов $d(\omega)$ (см. Рис.1).

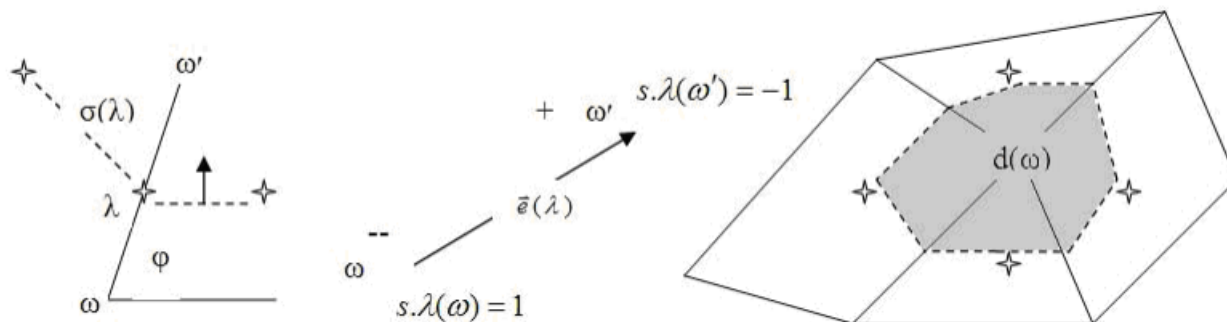


Рис.1

Базисы (φ) создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\vec{e}(\lambda)$, образованных ребрами, исходящими из общего угла треугольной и четырехугольной ячейки Ω . Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω их образующих. Ломаная, через середину ребра соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой векторную линию

$$\vec{\sigma}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \vec{e}'\varphi(\lambda) \quad (2.1)$$

ориентированную в ту же сторону, что и орт $\vec{e}(\lambda)$. Здесь $\vec{e}'\varphi(\lambda)$ — орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\vec{e}(\lambda)$. Базисный объем дается формулой

$$V_{\varphi} = \frac{1}{6} [\vec{e}(\lambda_1) \vec{e}(\lambda_2)] \quad (2.2)$$

для треугольной ячейки Ω содержащей базис φ и

$$V_{\varphi} = \frac{1}{4} [\vec{e}(\lambda_1) \vec{e}(\lambda_2)] \quad (2.3)$$

для четырехугольной ячейки, если $\vec{e}(\lambda_1)$ и $\vec{e}(\lambda_2)$ — ребра образующие базис φ . Наконец, $\sum_{\varphi(\lambda)}$ — суммирование по всем базисам φ , в образовании которых приняло участие ребро

λ . Замкнутые вокруг узла ω векторные линии ($\vec{\sigma}(\lambda(\omega))$) образуют узловые домены $d(\omega)$.

К узлам отнесем искомые скалярные сеточные функции u и v . На ребрах выделим положительные направления (см. Рис.1) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_{\lambda} u = - \sum_{\omega(\lambda)} s_{\lambda}(\omega) u_{\omega} = u_{\omega'} - u_{\omega}. \quad (2.4)$$

Наконец сеточные векторные поля \vec{W} задаются своими представлениями в базисах $\vec{W}\varphi$.

Внутреннюю дивергенцию векторного поля $DIN : (\varphi) \rightarrow (\omega)$ определим из аппроксимации теоремы Гаусса на узловом домене $d(\omega)$ (см. Рис.1):

$$DIN \vec{W} = \sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega) \tau_W(\lambda), \quad \tau_W(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} (\vec{e}'\varphi(\lambda), \vec{W}\varphi). \quad (2.5)$$

$\sum_{\lambda(\omega)}$ — суммирование по всем ребрам λ , имеющим общий узел ω . Обозначая через $\langle \cdot \rangle_{\Delta}$

аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \langle \int_O \vec{W} \operatorname{grad} u \, dV \rangle_{\Delta} &= - \left\langle \int_O u \operatorname{div} \vec{W} \, dV - \int_{\partial O} (u \vec{W}, d\vec{S}) \right\rangle_{\Delta} = \\ &= - \sum_{\omega} \left(u_{\omega} (DIN \vec{W})_{\omega} \right) = \\ &= \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda} u \tau_W(\lambda) = \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda} u \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} (\vec{e}'\varphi(\lambda), \vec{W}\varphi) = \\ &= \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left(\vec{W}\varphi, \sum_{\lambda(\varphi)} u \vec{e}'\varphi(\lambda) \right) = \sum_{\varphi} V_{\varphi} (\vec{W}\varphi, (GRAD u)_{\varphi}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. оператор $GRAD : (\omega) \rightarrow (\lambda)$ задается полем сопряженных (ковариантных) компонент $\Delta_{\lambda} u$ на сетке λ с представлением градиентного векторного поля в локальных базисах φ :

$$(GRAD u)_{\varphi} = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_{\lambda} u \vec{e}'\varphi(\lambda). \quad (2.7)$$

Положив (для скалярного сеточного поля ν на узлах (ω))

$$\vec{W}_\varphi = (GRAD \nu)_\varphi, \quad (2.8)$$

получим

$$-\sum_{\omega} (u_{\omega} (DINGRAD \nu)_{\omega}) = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \left((GRAD \nu)_{\varphi}, (GRAD u)_{\varphi} \right), \quad (2.9)$$

что и доказывает самосопряженность и знакоопределенность оператора $DINGRAD : (\omega) \rightarrow (\omega)$ в подобласти O .

После тождественного преобразования [1] система (1.1)–(1.2) приводится к виду, допускающему непосредственное применение метода опорных операторов.

Технология решения получившихся дискретных систем нелинейных и линейных алгебраических уравнений является более или менее традиционной. В варианте неявной реализации по времени разработаны регуляризаторы, позволяющие увеличивать шаг по времени в нелинейном итерационном процессе (с учетом сжимаемости). Оптимизированы также моменты предварительной декомпозиции матриц при многократном их обращении вариантом метода ORTOMIN [4]. Неструктурированные объекты (нерегулярная разностная сетка, различные виды внутренних баз данных и элементы управления диалоговых ресурсов WINAPI32) поддерживаются системой NECON (см. приложение в [2]).

3. Мониторинг — адаптация — прогноз разработки месторождений (обзор ситуации)

В настоящий момент сеточные детерминированные модели конкретных нефтегазовых залежей и месторождений, основанные на идее универсальности (трехмерность и трехфазность фильтрационного потока, упругость пластов и т.д.) не позволяют решить самую простую и самую главную задачу. Невозможно выполнить проектирование динамики добычи нефти (газа) и жидкости отдельно по каждой добывающей скважине и оптимизацию их режимов. Нет и, по-видимому, не предвидится классической теории (типа метода регуляризации по А.Н.Тихонову), ведущей к реализации эффективных вычислительных алгоритмов для сложных моделей прямых задач (общих уравнений Маскета–Мереса). Разработчики известных крупных пакетов программ (ECLIPSE, MORE, ...) вероятно не планируют предоставления общих универсальных средств решения обратных задач в ближайших версиях (из-за большого количества варьируемых параметров).

В связи с этим методы адаптационного моделирования истории разработки газовых месторождений (обратная задача) являются весьма важными, поскольку через них осуществляется выход на прогнозное проектирование динамики добычи газа отдельно по каждой скважине и оптимизация их режимов для реального месторождения [5].

4. Нейросетевое прогнозное обучение

Применение методик первичной адаптации к нейросетевому прогнозному обучению процесса разработки месторождений и нейросетевой прогноз разработки месторождений обладают тем преимуществом, что в процесс обучения нейросети в качестве полезной вовлекается информация, которая отбрасывается в методе первичной адаптации в процессе сходимости итераций последней. В работе используется методологический подход, называемый нами нейроадаптацией. Чем это отличается от классической постановки задачи нейросетевого моделирования (например, с учителем)? При решении с помощью нейронных

сетей прикладных задач необходимо собрать априори достаточный и представительный объем обучающих данных, которого на практике обычно не хватает. Поэтому оператор-аналитик нейросети, располагаясь тем набором данных, который у него есть (в нашем случае из прямого численного симулятора), может обучать нейросеть не всем избыточным возможностям развития, заложенным в ее архитектуре, а лишь некоторым регуляризованным, предполагая, что дальнейший процесс симуляции обученной нейросети не выйдет из фазовой трубки развития процесса.

Этот процесс, в принципе, носит итеративный характер. Если на поверку (прямым численным симулятором) окажется, что прогнозируемое частично обученное выходное нейросетевое значение (решение обратной задачи) неточно, то на нем просто производится дообучение нейросети. Поскольку вышеописанный процесс манипулирования с экспериментальной информацией происходит в достаточно развитой интерактивной системе (между приложениями Windows), то мы это называем мониторингом.

Сравним два вида моделирования разработки месторождений — первичную адаптацию без привлечения нейросетевого обучения выводу на прогноз и нейросетевое моделирование, обучающий процесс которого связан с адаптацией, а симуляция — выход на прогноз. Проиллюстрируем разницу между ними на примере следующих рассуждений.

4.1. Первичная адаптация

Пусть в нашем распоряжении имеется вектор управлений $\vec{pz} = \{pz_{jk}\}$. Это могут быть забойные давления скважин, нумеруемых индексом j (с учетом их внутри кустовой структуры). k — временной макро индекс для обратной задачи, в одном временном шаге которой (макро моменте) может содержаться много расчетных временных шагов прямой задачи.

Распорядимся управлением \vec{pz} , желая максимально приблизиться расчетными значениями к задаваемому в те же временные макромоменты вектору добычи газа $\vec{Q} = \{Q_{ik}\}$. Здесь i — номера накопителей включающих кусты скважин или их части (отдельные скважины). Физической основой первичной адаптации является так называемый метод инкрементных множителей γ_{ji} (которые слабо зависят от временных макромоментов и определяются уже вначале процесса адаптации), т.е.

$$\delta(pz_{jk}) = \sum_i \gamma_{ji} \delta(Q_{ik}). \quad (4.1)$$

Это позволяет (быть может, итерационно повторяя расчет симулятором макро интервала $[(k-1), k]$) подбирать такое управление вектором забойных давлений

$$pz_{jk}^{S+1} = pz_{jk}^S + \delta(pz_{jk}^S) \quad (4.2)$$

по известному рассогласованию добыч

$$\delta(Q_{ik}^S) = Q_{ik}^S - Q_{ik}, \quad (4.3)$$

чтобы приемлемо минимизировать это рассогласование внутри фазовой трубки решений первичной адаптации. Здесь S — номер нескольких производимых итераций. Разумеется, размер временного макро интервала (внутри которого весь процесс расщепляется на квазинезависимые физические процессы) зависит от конкретной задачи.

5. Нейросетевое адаптивное обучение и симуляционный прогноз

Пусть $\bar{k} = \max k$ — максимальный временной макро момент. Число итераций, за которое не достигнуто точного решения на макро момент k , так же как и само это решение, пусть даже сильно расшатывающее диаметр фазовой трубки решений первичной адаптации, будем отпускать в свободном режиме, не меняя вектор управлений \vec{pz} от макро момента k до \bar{k} . Таким способом создается нейросетевая база данных обучающихся (с учителем \vec{pz} и входным слоем \vec{Q}) прецедентов решения симуляторно-обратной задачи, которая может быть использована для обучения нейросети статической архитектуры с прямым распространением сигнала и обратным распространением ошибки.

Разумеется, обучающая нейросетевая база данных может быть не связана с первичной адаптацией и возникнуть, например, в результате вариаций прямых расчетов вблизи предполагаемой фазовой трубки решений задачи.

6. Заключение

Разработанная методика позволила создать программные комплексы для моделирования истории разработки месторождений и адаптации их фильтрационных параметров, показавшие свою эффективность в решении конкретных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. — М.: Недра, 1982. — 408 с.
2. Колдоба А.В., Самарский А.А., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. — Минск: 1996.
3. Казакевич Г.И., Лобковский Л.И., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А. и др. Математическое моделирование процессов фильтрации углеводородов в осадочных бассейнах // ДАН. 1997. Т. 352, № 4. — С. 527-531.
4. David S. Kershaw. The incomplete cholesky-conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations // Journal of Computational Physics. 1978. 26: — P. 43-65,
5. Лысенко В.Д., Никифоров И.Л. Новая детерминированная математическая модель разработки нефтяной залежи // Нефтяное хозяйство. 2002. № 11. — С. 66-70.

Application of adaptive neural network models to the problems of underground hydrodynamics

© G.I. Kazakevich⁵, L.V. Klochkova⁶, J.A. Poveschenko⁷, V.F. Tishkin⁸

Abstract. We consider the possibility of joint use of the method of support operators and neural network modeling to build an effective technique to address a number of inverse problems of underground hydrodynamics.

Key Words: supporting operators, neural network modeling, inverse problems of underground hydrodynamics.

⁵Senior Researcher of the Institute of oceanology by name P.P.Shirshov of RAS, Moscow; gkazakevich@yandex.ru.

⁶Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁷Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; poveshchenko@keldysh.ru.

⁸Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 517.988.67

Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии

© Б. В. Логинов¹, И. В. Коноплева², Л. В. Миронова³

Аннотация. С целью приложений в теории электромагнитных колебаний доказаны G -инвариантная теорема о неявных операторах и теорема о редукции по числу уравнений вариационных уравнений разветвления и уравнений разветвления в корневых подпространствах для бифуркационных задач со спектром Шмидта в линеаризации. Всюду ниже использована терминология и обозначения работ [1]–[4].

Ключевые слова: стационарные бифуркационные задачи, спектр Э. Шмидта, групповая симметрия, G -инвариантная теорема о неявных операторах, уравнение разветвления в корневых подпространствах вариационного типа.

1. Введение

В цикле работ начала XX века по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [5] Э. Шмидт ввел собственные числа λ_k оператора $B : H \rightarrow H$, учитывая их кратности, и собственные элементы $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$, удовлетворяющие соотношениям $Bu_k = \lambda_k v_k, B^*v_k = \lambda_k u_k$. Это позволило обобщить теорию Гильберта–Шмидта на несимметричные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H [6]–[8]. Некоторые физические приложения спектральных задач Шмидта отмечены в [9]–[10], в [11] дано развитие метода ложных возмущений к спектральным задачам Э.Шмидта, а в [12] доказана фредгольмовость задачи о собственных электромагнитных колебаниях резонаторов без потерь [13], являющейся спектральной задачей Э.Шмидта.

Отмеченные возможные приложения ставят задачу о ветвлении и устойчивости разветвляющихся решений бифуркационных задач, в линеаризации которых содержатся обобщенные спектральные задачи по Э.Шмидту. Целью данной работы является расширение наших результатов [14]–[16] на стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии. Это теоремы о наследовании групповой симметрии соответствующими уравнениями разветвления (УР) и уравнениями разветвления в корневых подпространствах (УРК) со следствиями: **1.** G -инвариантной теоремой о неявных операторах; **2.** теоремой о редукции вариационных УР и УРК для неинвариантных ядер (подпространств нулей) операторов. Авторы предполагают применить полученные результаты к указанным выше задачам теории электромагнитных колебаний при наличии групповой симметрии.

Работа поддержана проектом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" ГК П1122 и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" 2.1.1/11180 Министерства образования и науки РФ.

¹Профессор Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

²Доцент Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск; i.konopleva@ulstu.ru.

³Ассистент Ульяновского высшего авиационного училища гражданской авиации, г. Ульяновск; i.konopleva@ulstu.ru.

2. Стационарные задачи теории ветвления

Случай неинвариантного ядра линеаризованного оператора возникает в задачах о несимметричных локализованных волновых структурах в стратифицированной жидкости [17]–[18], где доказано, что в вариационном случае с инвариантным относительно некомпактных групп симметрий функционалом уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта действием группы может быть редуцировано к системе меньшей размерности. Теоремы о наследовании УР и УРК групповой симметрии общей задачи стационарного ветвления в условиях ее групповой симметрии

$$F(x, \varepsilon) = 0, \quad F(x_0, 0) = 0, \quad K_g F(x, \varepsilon) = F(L_g x, \varepsilon) \quad (2.1)$$

(E_1 и E_2 -банаховы пространства, $L_g(K_g)$ – представления группы G в $E_1(E_2)$) доказаны в [14]–[15] для невариационных нелинейных уравнений. Они позволили доказать теоремы о редукции вариационных УР и УРК, движущихся по орбите точки ветвления x_0 под действием наследуемой группы симметрии, а также G -инвариантную теорему о неявных операторах [16].

Далее предполагается, что нелинейное уравнение (2.1) в окрестности точки ветвления $(x_0, 0)$ допускает линеаризацию

$$\begin{aligned} B_{x_0}(x - x_0) &= B_{x_0}(\varepsilon)(x - x_0) + C_{x_0}(\varepsilon) + \rho(x_0, x - x_0, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv B_{x_0}(\varepsilon)(x - x_0) + R(x_0, x - x_0, \varepsilon), \quad \rho(x_0, 0, \varepsilon) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где B_{x_0} – фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения $D_{B_{x_0}} \subset D_{B_{x_0}(\varepsilon)}$, $N(B_{x_0}) = \text{span}\{\varphi_i\}_1^n$, $\varphi_i = \varphi_i(x_0)$ – подпространство нулей оператора B_{x_0} , $N^*(B_{x_0}) = \text{span}\{\psi_i\}_1^n$, $\psi_i = \psi_i(x_0)$ – подпространство дефектных функционалов, $\{\gamma_i\}_1^n$, $\gamma_i = \gamma_i(x_0) \in E_1^*$, $\{z_i\}_1^n$, $z_i = z_i(x_0)$ – соответствующие биортогональные системы $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$; $B_{x_0}(\varepsilon)$ достаточно гладкий по ε линейный оператор; нелинейный оператор ρ непрерывно дифференцируем по переменным $x_0, x - x_0$ и непрерывен по ε .

О п р е д е л е н и е 2.1. [19]–[21]. Элементы $\varphi_k^{(s)}$, $s = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, n}$ образуют полный канонический обобщенный жорданов набор (ОЖН $\equiv B(\varepsilon)$ –ЖН) оператор-функции $B - B(\varepsilon) : E_1 \rightarrow E_2$, если

$$\begin{aligned} B\varphi_k^{(s)} &= \sum_{j=1}^{s-1} B_j \varphi_k^{(s-j)}, \quad B(\varepsilon) = B_1 \varepsilon + B_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad \langle \varphi_k^{(s)}, \gamma_l \rangle = 0, \quad s = \overline{2, p_k}, \\ D_p &= \det \sum_{j=1}^{p_k} \langle B_j \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \psi_l^{(1)} \rangle \neq 0, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(1)}, \quad \psi_l = \psi_l^{(1)}, \quad k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Этот набор биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $B^* - B^*(\varepsilon)$ и элементов $\{\psi_l\}_1^n$ также канонический, и три-канонический, если кроме того

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \gamma_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} B_s^* \psi_k^{(p_k+2-l-s)}, \quad \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \\ z_i^{(j)} &= \sum_{s=1}^{p_i+1-j} B_s \varphi_i^{(p_i+2-j-s)}, \quad \varphi_i^{(s)} = \varphi_i^{(s)}(x_0), \\ \Phi &= \Phi(x_0) = (\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(p_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

векторы $\gamma = \gamma(x_0)$, $\Psi = \Psi(x_0)$ и $Z = Z(x_0)$ определяются аналогично. Для линейной оператор-функции $B - \varepsilon B_1$ ОЖН всегда может быть выбран три-каноническим. $K = p_1 + \dots + p_k$ – корневое число.

Л е м м а 2.1. Если для фредгольмовой оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ существует полный три-канонический ОЖН, то определены проекторы

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_i^{(j)}(x_0) \rangle \varphi_i^{(j)}(x_0) = \langle \cdot, \gamma \rangle \Phi : E_1 \rightarrow E_1^K = K(B_{x_0}, B_{x_0}(\varepsilon)) = \text{span}\{\varphi_i^{(j)}(x_0)\}, \\ \mathbf{Q}_{x_0} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)}(x_0) \rangle z_i^{(j)}(x_0) = \langle \cdot, \Psi \rangle Z : E_2 \rightarrow E_{2,K} = \text{span}\{z_i^{(j)}(x_0)\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

порождающие разложения E_1 и E_2 в прямые суммы, отвечающие точке x_0

$$E_1 = E_1^K(x_0) + E_1^{\infty-K}(x_0), \quad E_2 = E_{2,K}(x_0) + E_{2,\infty-K}(x_0). \tag{2.6}$$

Оператор $B_0 = B_{x_0}$ сплетается проекторами \mathbf{P}_{x_0} и \mathbf{Q}_{x_0} :

$$B_{x_0} \mathbf{P}u = \mathbf{Q}B_{x_0}u \text{ на } D_{B_{x_0}}, \quad B_{x_0} \Phi = \mathfrak{A}_0 Z, \quad B_{x_0}^* \Psi = \mathfrak{A}_0 \gamma, \quad \mathfrak{A}_0 = \text{diag}(A_1, \dots, A_n), \tag{2.7}$$

где $A_i - (p_i \times p_i)$ - матрицы с единицами вдоль побочной поддиагонали и нулями вне ее и $B_0 : D_{B_0} \cap E_1^{\infty-K}(x_0) \rightarrow E_{2,\infty-K}(x_0)$ является изоморфизмом.

С л е д с т в и е 2.1. Для линейной по ε оператор-функции $B_0 - \varepsilon B_1$ три-канонический ОЖН существует и свойства (2.7) дополнены следующими

$$B_1 \mathbf{P} = \mathbf{Q}B_1 \text{ на } D_{B_1}, \quad B_1 \Phi = \mathfrak{A}_1 Z, \quad B_1^* \Psi = \mathfrak{A}_1 \gamma \tag{2.8}$$

где $\mathfrak{A}_1 = \text{diag}(A^1, \dots, A^n)$ - клеточно-диагональная матрица, $A^i - (p_i \times p_i)$ - матрицы с единицами вдоль побочной диагонали и нулями вне ее. Таким образом, операторы B_0 и B_1 действуют в инвариантных парах подпространств $E_1^K, E_{2,K}$ и $E_1^{\infty-K}, E_{2,\infty-K}$, отвечающих точке x_0 , и $B_0 : D_{B_0} \cap E_1^{\infty-K} \rightarrow E_{2,\infty-K}, B_1 : E_1^K \rightarrow E_{2,K}$ являются изоморфизмами.

Т е о р е м а 2.1. [15]. При существовании полного три-канонического ОЖН задача определения малых решений уравнения (2.2) в окрестности точки x_0 эквивалентна разысканию малых решений УРК А. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.6) полагая $x = u + v$, $v = v(x_0, \xi) = \sum \xi_{ik} \varphi_i^{(k)}(x_0) = \xi \cdot \Phi \in E_1^K(x_0)$, $u = u(x_0) \in E_1^{\infty-K}(x_0)$, запишем уравнение (2.2) в проекциях

$$\begin{aligned} (I - \mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}u &= (I - \mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}(\varepsilon)(u + v) + (I - \mathbf{Q}_{x_0})R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0), \varepsilon), \\ \mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}v &= \mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}(\varepsilon)(u + v) + \mathbf{Q}_{x_0}R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0), \varepsilon). \end{aligned}$$

По теореме о неявных операторах и лемме 2.1 из первого уравнения однозначно определяется $u = u(x_0) = u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)$. Его подстановка во второе уравнение дает УРК А. Ляпунова

$$\begin{aligned} f(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) &= f(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}_0 \xi - \langle B_{x_0}(\varepsilon)(v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)) + \\ &+ R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), \varepsilon), \Psi(x_0) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Введение регуляризатора Э. Шмидта [1] $\Gamma_{x_0} = \Gamma_0 = \widehat{B}_{x_0}^{-1}$, $\widehat{B}_{x_0} = B_{x_0} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_j^{(1)}(x_0) \rangle z_j^{(1)}(x_0)$ и формулы преобразования элементов ОЖЦ оператором Γ_0 дают УРК Э.Шмидта

$$\begin{aligned} t_{s1}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) &\equiv - \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} B_{x_0}(\varepsilon) \varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(1)}(x_0) \rangle - \\ &- \langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), \varepsilon), \psi_s^{(1)}(x_0) \rangle = 0, \\ t_{s\sigma}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) &\equiv \xi_{s\sigma} - \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} B_{x_0}(\varepsilon) \varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0) \rangle - \\ &- \langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), \varepsilon), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0) \rangle = 0, \\ &\sigma = 2, \dots, p_s. \end{aligned} \tag{2.10}$$

С л е д с т в и е 2.1. Пусть $B_{x_0}(\varepsilon) = \varepsilon B_1$. Тогда УРК Э. Шмидта принимает вид

$$\begin{aligned} t_{s1}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) &\equiv \\ -\frac{\varepsilon^{p_s}}{1 - \varepsilon^{p_s}} \xi_{s1} - \langle (I - \varepsilon B_1 \Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) + v(x_0, \xi), \varepsilon), \psi_s^{(1)}(x_0) \rangle &= 0, \\ t_{s\sigma}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) &\equiv \\ \xi_{s\sigma} - \frac{\varepsilon^{\sigma-1}}{1 - \varepsilon^{p_s}} \xi_{s1} - \langle (I - \varepsilon B_1 \Gamma_0)^{-1} R(x_0, w(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) + v(x_0, \xi), \varepsilon), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0) \rangle &= 0, \\ \sigma &= \overline{2, p_s}. \end{aligned}$$

Далее предполагается, что оператор F допускает группу G , т.е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2 , сплетающие оператор F

$$K_g F(x, \varepsilon) = F(L_g x, \varepsilon) \quad (2.11)$$

При этом точка ветвления $(x_0, 0)$ движется по траектории $L_g x_0$ элемента x_0 и для линеаризации (2.2) уравнения (2.1) справедливы соотношения [14]

$$\begin{aligned} K_g B_{x_0} &= B_{L_g x_0} L_g \quad \text{и} \quad K_g B_{x_0}(\varepsilon) = B_{L_g x_0}(\varepsilon) L_g, \\ K_g R(x_0, x - x_0, \varepsilon) &= F(L_g x, \varepsilon) - F(L_g x_0, \varepsilon) - \\ -(B_{L_g x_0} - B_{L_g x_0}(\varepsilon)) L_g(x - x_0) &= R(L_g x_0, L_g(x - x_0), \varepsilon), \\ \varphi_i(L_g x_0) &= L_g \varphi_i(x_0), \gamma_j(L_g) = L_g^{*-1} \gamma_j(x_0), \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

показывающие, что фредгольмов оператор B_{x_0} обладает симметрией только относительно стационарной подгруппы точки x_0 . Для областей значений операторов B_{x_0} и $B_{x_0}(\varepsilon)$ выполнены соотношения $R(B_{x_0}) = R(K_g B_{x_0} L_g^{-1}) = K_g R(B_{x_0})$. Тогда для ядра сопряженного оператора $B_{x_0}^*$ имеем

$$\begin{aligned} N^*(B_{x_0}) &= \text{span}\{\psi_1(x_0), \dots, \psi_n(x_0)\} \implies \\ N^*(B_{L_g x_0}) &= \text{span}\{K_g^{*-1} \psi_1(x_0), \dots, K_g^{*-1} \psi_n(x_0)\}, \quad z_j(L_g x_0) = K_g z_j(x_0), \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (2.13)$$

и можно доказать, что элементы упорядоченных по возрастанию длин цепочек ОЖН преобразуются по формулам

$$\varphi_k^{(s)}(L_g x_0) = L_g \varphi_k^{(s)}(x_0); \psi_k^{(s)}(L_g x_0) = K_g^{*-1} \psi_k^{(s)}(x_0); z_k^{(s)}(L_g x_0) = K_g z_k^{(s)}(x_0). \quad (2.14)$$

В то же время обобщенные жордановы наборы в точках орбиты удовлетворяют условиям биортогональности (2.4). Из (2.12)–(2.14) следует утверждение

Л е м м а 2.2. При существовании три-канонического ОЖН проекторы (2.5) удовлетворяют свойствам сплетения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{L_g x_0} &= L_g \mathbf{P}_{x_0} L_g^{-1} \quad \text{или} \quad L_g \mathbf{P}_{x_0} = \mathbf{P}_{L_g x_0} L_g, \\ \mathbf{Q}_{L_g x_0} &= K_g \mathbf{Q}_{x_0} K_g^{-1} \quad \text{или} \quad K_g \mathbf{Q}_{x_0} = \mathbf{Q}_{K_g x_0} K_g \end{aligned} \quad (2.15)$$

и порождают разложения (2.6) пространств E_1 и E_2 в прямые суммы. Базисы в подпространствах нулей $N(B_{x_0})$ и дефектных функционалов $N^*(B_{x_0})$ и соответствующих корневым подпространствам $E_1^K(x_0)$ и $E_{2,K}(x_0)$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^K(L_g x_0) + E_1^{\infty-K}(L_g x_0), \quad E_1^K(L_g x_0) = L_g E_1^K(x_0), \\ E_1^{\infty-K}(L_g x_0) &= L_g E_1^{\infty-K}(x_0), \quad E_2 = E_{2,K}(L_g x_0) + E_{2,\infty-K}(L_g x_0), \\ E_{2,K}(L_g x_0) &= K_g E_{2,K}(x_0), \quad E_{2,\infty-K}(L_g x_0) = K_g E_{2,\infty-K}(x_0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Т е о р е м а 2.2. [15]. При существовании три-канонического ОЖН УРК А. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10) наследуют групповую симметрию уравнения (2.2)

$$f(L_g x_0, L_g v(x_0, \xi), \varepsilon) = f(L_g x_0, v(L_g x_0, \xi), \varepsilon) = K_g f(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) \quad (2.17)$$

$$t(L_g x_0, L_g v(x_0, \xi), \varepsilon) = t(L_g x_0, v(L_g x_0, \xi), \varepsilon) = L_g t(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) \quad (2.18)$$

З а м е ч а н и е 2.1. При доказательстве теоремы о наследовании симметрии УРК Э. Шмидта предполагаем [2] выполненным условие **I**: подпространство $E_1^{\infty-n}(x_0)$ инвариантно относительно представления L_g , а подпространство $E_{2,n}(x_0)$ инвариантно относительно операторов K_g в прямых суммах $E_1 = E_1^n(x_0) + E_1^{\infty-n}(x_0)$, $E_2 = E_{2,n}(x_0) + E_{2,\infty-n}(x_0)$. Тогда $\Gamma(x_0)K_g = L_g\Gamma(x_0)$ и представления K_g и L_g эквивалентны.

При наличии непрерывной групповой симметрии нелинейных уравнений в банаховых пространствах группа Ли $G_l = G_l(a)$, $a = (a_1, \dots, a_l)$ – ее существенные параметры, предполагается l -мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям [17]–[18]: Пусть **c**₁) представление $a \mapsto L_{g(a)}x_0$, действующее из окрестности единичного элемента $G_l(a)$ в пространство E_1 принадлежит классу C^1 , так что $Xx_0 \in E_1$ для всех производящих операторов $Xx = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [L_{g(a(t))}x - x]$ в касательном к $L_{g(a)}$ многообразии $T_{g(a)}^l$; **c**₂) стационарная подгруппа элемента $x_0 \in E_1$ определяет представление $L(G_s)$ локальной группы Ли $G_s \subset G_l$, $s < l$, с s -мерной подалгеброй $T_{g(a)}^s$ производящих операторов. Это означает, что для стационарной бифуркации элементы $X_k x_0, X_k \in T_{g(a)}^l$ образуют в подпространстве нулей линеаризованного оператора $\kappa = (l - s)$ -мерное подпространство и базисы в нем и в алгебре $T_{g(a)}^l$ можно упорядочить так, что $X_k x_0 = \varphi_k, 1 \leq k \leq \kappa, X_j x_0 = 0$ для $j \geq \kappa + 1$.

Т е о р е м а 2.3. [16]. Пусть задаче стационарного ветвления (2.1) с симметрией непрерывной группы отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$, причем в условии **c**₂) $\kappa = n$ и $G_s, s < l$, является нормальным делителем G_l с соответствующим идеалом $T_{g(a)}^s$ производящих операторов. Тогда при сделанных предположениях о гладкости действия непрерывной группы G_l существует непрерывная функция $v(x_0, \xi, \varepsilon) = v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) : T_{g(a)}^n x_0 \times (-\delta, \delta) \rightarrow E_1$, инвариантная относительно фактор-группы $G_\kappa = G_n = G_l/G_s$ на $T_{g(a)}^n x_0$, такая, что

$$F(x_0 + v(x_0, \xi, \varepsilon)) = 0 \quad \text{при} \quad v(x_0, \xi) \in T_{g(a)}^n x_0, \quad |\varepsilon| < \delta \quad (2.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании свойств сплетения (2.15), (2.16) проекторов \mathbf{P}_{x_0} и \mathbf{Q}_{x_0} существует линейный изоморфизм $B_0 = B_{x_0} : D_{B_0} \cap E_1^{\infty-K}(x_0) \rightarrow E_{2,\infty-K}$, сплетаемый проекторами \mathbf{P}_{x_0} и \mathbf{Q}_{x_0} , т. е. $B_0 \mathbf{P}_{x_0} x = \mathbf{Q}_{x_0} B_0 x, x \in D_{B_0}$ и $B_{L_g x_0} \mathbf{P}_{L_g x_0} x = \mathbf{Q}_{L_g x_0} B_{L_g x_0} x, x \in L_g D_{B_0}$. Якобиан УРК (2.9) и (2.10) по $\xi_{js}, s = \bar{1}, p_j, j = \bar{1}, \bar{n}$ отличен от нуля при $\varepsilon \neq 0$ и теорема о наследовании УРК групповой симметрии дает нам G -инвариантность уравнения (2.19).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 2.1. Теорема 2.3 справедлива для полупростых точек ветвления, т.е. при отсутствии обобщенных жордановых цепочек. При этом в теореме и ее доказательстве речь идет об УР.

О п р е д е л е н и е 2.2. УРК (2.9) (соотв. (2.10)) является уравнением потенциального типа, если в окрестности точки $(x_0; 0)$ для вектора $\mathbf{f}(y, v(y, \xi), \varepsilon) = (f_{11}, \dots, f_{1p_1}, \dots, f_{n1}, \dots, f_{np_n})$ выполняется равенство

$$\mathbf{f}(y, v(y, \xi), \varepsilon) = d \cdot \text{grad}_y U(y, \xi, \varepsilon), \quad (2.20)$$

где d обратимый оператор. Тогда функционал $U(y, \xi, \varepsilon)$ – потенциал УРК (2.9) (соотв. (2.10)), а оператор \mathbf{f} (соотв. \mathbf{t}) – псевдоградиент функционала U .

Далее в п. 2 предполагается условие

с₃) плотные вложения $E_1 \subset E_2 \subset H$ в гильбертово пространство H с оценками $\|u\|_H \leq \alpha_2 \|u\|_{E_2} \leq \alpha_1 \|u\|_{E_1}$, причем отображение $X : E_1 \rightarrow H$ ограничено в $L(E_1, H)$ топологии.

Т е о р е м а 2.4. Пусть в предположениях **с₁**) – **с₃**) УРК (2.9) (соотв. (2.10)) – потенциального типа. Потенциал инвариантен относительно представления $L_{g(a)}$ тогда и только тогда, когда

$$L_g^* d^{-1} K_g = d^{-1} \quad (L_g^* d^{-1} = d^{-1} L_g) \quad (2.21)$$

С л е д с т в и е 2.1. [22], [4]. Пусть точке ветвления $(x_0; 0)$ отвечает инвариантное ядро G -инвариантного уравнения (2.1) и соответствующее УРК A . Ляпунова (2.9) (Э. Шмидта (2.10)) является уравнением потенциального типа с некоторой обратимой матрицей d . Потенциал $U(\xi, \varepsilon)$ является инвариантом представления $\mathcal{A}_{g(a)}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'_{g(a)} d^{-1} \mathcal{B}_{g(a)} = d^{-1}$ для УРК A . М. Ляпунова и $\mathcal{A}'_{g(a)} d^{-1} \mathcal{A}_{g(a)} = d^{-1}$ для Э. Шмидта. Здесь $\mathcal{A}_{g(a)}$ и $\mathcal{B}_{g(a)}$ соответственно блочно-диагональные матрицы действия представлений $L_{g(a)}$ и $K_{g(a)}$ в инвариантных подпространствах $E_1^K, E_{2,K}$ и, тем самым, в K -мерных пространствах коэффициентов разложения произвольных элементов $E_1^K, E_{2,K}$ по соответствующим базисам.

Л е м м а 2.3. Псевдоградиент \mathbf{f} (соотв. \mathbf{t}) инвариантного функционала является (L_g, K_g) – (соотв. (L_g, L_g) –) эквивариантом в смысле (2.11). Для всех $X \in T_{g(a)}^l$ в некоторой окрестности точки бифуркации $(x_0; 0)$ справедливо косимметрическое тождество

$$\begin{aligned} \langle d^{-1} \mathbf{f}(y, v(y, \xi), \varepsilon), X(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon)) \rangle_H &= 0, \\ \langle (d^{-1} \mathbf{t}(y, v(y, \xi), \varepsilon), X(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon)) \rangle_H &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

С л е д с т в и е 2.2. Для случая инвариантного ядра УРК потенциального типа (2.9) и (2.10) удовлетворяют соответственно косимметрическому тождеству,

$$\langle d^{-1} f(\xi, \varepsilon), X_j \xi \rangle_{\Xi^K} = 0 \quad \text{и} \quad \langle d^{-1} t(\xi, \varepsilon), X_j \xi \rangle_{\Xi^K} = 0 \quad (2.23)$$

где $X_j, \overline{1}, \overline{l}$ – инфинитезимальные операторы представления \mathcal{A}_g в K -мерном пространстве коэффициентов $\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1p_1}, \dots, \xi_{n1}, \dots, \xi_{np_n})$ разложения произвольного элемента $\Phi \in K(B_{x_0}, B_{x_0}(\varepsilon))$ по базису $(\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(p_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)})$.

Следуя [17], [18], [14], [15], получаем достаточное условие редукции УРК потенциального типа в условиях групповой симметрии нелинейного уравнения (2.1).

Т е о р е м а 2.5. Пусть выполнены условия **с₁**) – **с₃**), УРК (2.9) (соотв. (2.10)) – потенциального типа, его потенциал принадлежит классу C^2 в некоторой окрестности точки ветвления $(x_0; 0)$ и является инвариантом представления L_g группы $G_l(a)$, s -размерность стационарной подгруппы элемента x_0 , причем $\kappa = l - s > 0$. Тогда

1. если $\kappa = n$, то для всех $(\xi(\varepsilon), \varepsilon)$ или $(v(x_0, \xi(\varepsilon), \varepsilon))$ из некоторой окрестности нуля в \mathbb{R}^{K+1} УРК (2.9) (соотв. (2.10)) выполнено тождественно, т.е. возникает ситуация G -инвариантной теоремы 2.3 о неявных операторах;
2. если $\kappa < n$ и $n \geq 2$, то имеет место частичная редукция УРК: в принятом в условии **с2)** соглашении о нумерации базисных элементов в E_1^K первые $K_\kappa = p_1 + \dots + p_\kappa$ уравнений являются линейными комбинациями остальных $p_{\kappa+1} + \dots + p_n$.

Доказательство. В принятой нумерации (2.20) элементов E_1^K согласно косимметрическому тождеству (2.23) в некоторой окрестности нуля в \mathbb{R}^{k+1} имеем

$$0 = \langle df(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), X_k[x_0 + v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)] \rangle_H = \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{p_s} \{ f_{js}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) [\langle dz_j^{(s)}, \varphi_k^{(1)} \rangle_H + \langle dz_j^{(s)}, X_k(v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)) \rangle_H] \}$$

где $k = \overline{1, \kappa}$, причем ранг $K \times K_\kappa$ – матрицы системы уравнений равен K_κ , а матрицы $[\langle dz_j^{(s)}, \varphi_k^{(1)} \rangle_H]$ ($[\langle d\varphi_j^{(\sigma)}, \varphi_k^{(1)} \rangle_H]$) равен κ в соответствии с видом УРК (2.9) (соотв. (2.10)).
Доказательство закончено.

Следствие 2.1. Пусть точке ветвления $(x_0, 0)$ G -инвариантного относительно непрерывной группы с условиями **с1)**–**с3)** уравнения (2.1) отвечает инвариантное ядро и линеаризация $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ имеет три-канонический ОЖН. Тогда редукция УРК А. Ляпунова или Э. Шмидта осуществляется по полным жордановым цепочкам с помощью полной системы функционально-независимых инвариантов действия группы G .

Замечание 2.2. ¹⁰. Утверждение следствия согласуется с результатами работы [22] в случае ОЖН линейной по ε линеаризации $B - \varepsilon B_1$, для которой ОЖН всегда может быть выбран три-каноническим. ²⁰. Для УР с симметриями $SO(2), O(2), SH(2), H(2)$ инвариантная редукция выполнена в [23].

3. Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации

В банаховых пространствах E_1 и E_2 в предположении **с3)** рассматривается система уравнений

$$F_1(x, y, \lambda) = 0, \quad F_2(x, y, \lambda) = 0, \quad F_k(x_0, y_0, \lambda) \equiv 0, \quad k = 1, 2; \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon; \\ F_{1x}'(x_0, y_0, \lambda) = B_0 + B(\varepsilon), \quad -F_{1y}'(x_0, y_0, \lambda) = A_0 + A(\varepsilon), \\ -F_{2x}'(x_0, y_0, \lambda) = A_0^* + A^*(\varepsilon), \quad F_{2y}'(x_0, y_0, \lambda) = B_0^* + B^*(\varepsilon), \tag{3.1}$$

где A_0 и B_0 плотно заданные ($\overline{D}_A = E_1, D_A = D_{A(\varepsilon)} \supset D_{A_0}, \overline{D}_B = E_1, D_B = D_{B(\varepsilon)} \supset D_{B_0}$) замкнутые линейные операторы. Мы не оговариваем в каждом случае условие подчиненности плотно заданных фредгольмовых операторов, принятые например в [15]. Предполагается также, что операторы A_0 и B_0 не имеют общих нулей, чтобы не вводить сложную технику «незаканчивающихся» ОЖЦ [24].

В указанных условиях система (3.1) допускает локальную запись

$$\begin{aligned} B_0 X - \lambda_0 A_0 Y &= A(\varepsilon)Y - B(\varepsilon)X + R_1(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon), \\ B_0^* Y - \lambda_0 A_0^* X &= A^*(\varepsilon)X - B^*(\varepsilon)Y + R_2(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon), \\ X &= x - x_0, Y = y - y_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $R_j(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0, j = 1, 2, R_{jX}'(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0, R_{jY}'(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0$. Пусть n -кратное собственное значение Шмидта λ_0 является фредгольмовой точкой спектра матричного оператора $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 A_0^* & B_0^* \\ B_0 & -\lambda_0 A_0 \end{pmatrix}$ в прямой сумме \mathcal{H} гильбертовых пространств H , $\Phi_k^{(1)} = (u_k^{(1)}, v_k^{(1)})^T$ и $\Psi_k^{(1)} = (\tilde{u}_k^{(1)}, \tilde{v}_k^{(1)})^T, k = 1, \dots, n$, – собственные элементы прямой и сопряженной

$$(\mathbf{B}^* - \lambda_0 \mathbf{A}^*)\Psi_k^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 A_0 & B_0^* \\ B_0 & -\lambda_0 A_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{(1)} \\ \tilde{v}_k^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

задач. Полагая $\mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A^*(\varepsilon) & -B^*(\varepsilon) \\ -B(\varepsilon) & A(\varepsilon) \end{pmatrix}$, запишем систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \mathbf{A}(\varepsilon) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon) \\ R_1(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A}(\varepsilon) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{R}(x_0, y_0, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь предполагается, что векторный нелинейный оператор может быть представлен в виде достаточно гладкого по $(X, Y)^T$ оператора \mathbf{R} .

О п р е д е л е н и е 3.1. [19]–[21]. Элементы $\Phi_k^{(s)} = (u_k^{(s)}, v_k^{(s)})^T, s = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}$ образуют полный канонический обобщенный жорданов набор (ОЖН $\equiv \mathbf{A}(\varepsilon)$ -ЖН), если

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})\Phi_k^{(s)} &= \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_j \Phi_k^{(s-1)}, \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A}_1 \varepsilon + \mathbf{A}_2 \varepsilon^2 + \dots, \langle \Phi_k^{(s)}, \Gamma_l^{(1)} \rangle_{\mathcal{H}} = 0, s = \overline{2, p_k}; \\ D_p &= \det \left[\sum_{j=1}^{p_k} \langle \mathbf{A}_j \Phi_k^{(p_k+1-j)}, \Psi_l^{(1)} \rangle_{\mathcal{H}} \right] \neq 0, \Psi_l^{(1)} = (\tilde{u}_l^{(1)}, \tilde{v}_l^{(1)})^T, k, l = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Этот набор биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $(\mathbf{B}^* - \lambda_0 \mathbf{A}^*) - \mathbf{A}^*(\varepsilon)$, отвечающий элементам $\{\Psi_l^{(1)}\}_1^n$ также канонический, и три-канонический, если кроме того

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i^{(j)}, \Gamma_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \Gamma_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} \mathbf{A}_s^* \Psi_k^{(p_k+2-l-s)}; \langle Z_i^{(j)}, \Psi_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \\ Z_i^{(j)} &= \sum_{s=1}^{p_k+1-j} \mathbf{A}_s \Phi_i^{(p_k+2-j-s)}, \Phi = \Phi(x_0, y_0) = (\Phi_1^{(1)}, \dots, \Phi_1^{(p_1)}, \dots, \Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(p_n)}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\Phi_i^{(j)} = \Phi_i^{(j)}(x_0, y_0)$, векторы $\Gamma = \Gamma(x_0, y_0), \Psi = \Psi(x_0, y_0)$ и $Z = Z(x_0, y_0)$ определяются аналогично. Для линейной оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \varepsilon \mathbf{A}_1$ ОЖН всегда быть выбран три-каноническим, $K = p_1 + \dots + p_n$ – корневое число.

Л е м м а 3.1. Если для фредгольмовой оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ существует полный три-канонический ОЖН, то определены проекторы

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{P}(x_0, y_0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \Gamma_i^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}} \Phi_i^{(j)} = \langle \cdot, \Gamma \rangle_{\mathcal{H}} \Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^K = \\ &= K(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}; \mathbf{A}(\varepsilon)) = \text{span}\{\Phi_i^{(j)}(x_0, y_0)\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \Psi_i^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}} Z_i^{(j)} = \langle \cdot, \Psi \rangle_{\mathcal{H}} Z : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_K = \text{span}\{Z_i^{(j)}(x_0, y_0)\}$$

порождающие разложения \mathcal{H} в прямые суммы, отвечающие точке (x_0, y_0)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^K + \mathcal{H}^{\infty-K}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_{\infty-K}. \quad (3.7)$$

Оператор $\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}$ сплетается проекторами $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x_0, y_0)$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_0, y_0)$ $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})$ на $D_{\mathbf{B}-\lambda_0 \mathbf{A}}$, $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})\Phi = \mathfrak{A}_0 Z$, $\mathbf{B}^* - \lambda_0 \mathbf{A}^* \Psi = \mathfrak{A}_0 \Gamma$, $\mathfrak{A}_0 = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$, $B_i - (p_i \times p_i)$ -матрица с единицами на подпобочной диагонали и нулями на остальных местах. Оператор $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) : D_{\mathbf{B}-\lambda_0 \mathbf{A}} \cap \mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0) \rightarrow \mathcal{H}_{\infty-K}(x_0, y_0)$ является изоморфизмом.

С л е д с т в и е 3.2. Для линейной по ε оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \varepsilon \mathbf{A}_1$ три-канонический ОЖН существует и свойства сплетения могут быть дополнены следующими $\mathbf{A}_1 \mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{A}_1$ на $D_{\mathbf{A}_1}$, $\mathbf{A}_1 \Phi = \mathfrak{A}_1 \Phi$, $\mathbf{A}_1^* \Psi = \mathfrak{A}_1 \Gamma$, где $\mathfrak{A}_1 = \text{diag}(B^1, \dots, B^n)$ -клеточно-диагональная матрица, $B^i - (p_i \times p_i)$ -матрицы с единицами вдоль побочной диагонали и нулями в остальных местах. Таким образом, операторы $\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}$ и \mathbf{A}_1 действуют в инвариантных парах подпространств $\mathcal{H}^K, \mathcal{H}_K$ и $\mathcal{H}^{\infty-K}, \mathcal{H}_{\infty-K}$, отвечающих точке бифуркации (x_0, y_0) и $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) : D_{\mathbf{B}-\lambda_0 \mathbf{A}} \cap \mathcal{H}^{\infty-K} \rightarrow \mathcal{H}_{\infty-K}$, $\mathbf{A}_1 : \mathcal{H}^K \rightarrow \mathcal{H}_K$ являются изоморфизмами.

Т е о р е м а 3.1. Пусть точке бифуркации $(x_0, y_0, 0)$ отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$. Задача определения малых решений системы (3.1) в окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$ эквивалентна разысканию малых решений уравнений разветвления в корневых подпространствах A . Ляпунова

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) &= f(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}_0 \xi - \langle \mathbf{A}(\varepsilon)(\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)) + \\ &+ \mathbf{R}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon), \Psi(x_0, y_0)) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

и Э.Шмидта

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{s1}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) &\equiv - \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{\Gamma}_0)^{-1} \mathbf{A}(\varepsilon) \Phi_j^{(1)}(x_0, y_0), \Psi_s^{(1)}(x_0, y_0) \rangle_{\mathcal{H}} - \\ &- \langle (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{\Gamma}_0)^{-1} \mathbf{R}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{w}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)), \Psi_s^{(1)}(x_0) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \\ \mathbf{t}_{s\sigma}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) &\equiv \xi_{s\sigma} - \\ &- \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{\Gamma}_0)^{-1} \mathbf{A}(\varepsilon) \Phi_j^{(1)}(x_0, y_0), \Psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0, y_0) \rangle_{\mathcal{H}} - \\ &- \langle (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{\Gamma}_0)^{-1} \mathbf{R}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{w}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)), \Psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0) \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в п. 2 [15], [16] для доказательства первой части теоремы полагаем $x = u + v, v = v(x_0, y_0, \xi) = \sum_{i,k} \xi_{ik} \Phi_i^{(k)}(x_0, y_0) = \xi \cdot \Phi \in \mathcal{H}^K(x_0, y_0), u =$

$u(x_0, y_0) \in \mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0)$ и записываем систему (3.1) в проекциях. Вторая часть доказывается введением регуляризатора Шмидта [1] $\Gamma_0 = \Gamma_0(x_0, y_0) = (\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})^{-1}$, $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) = \mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A} + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \Gamma_j^{(1)}(x_0, y_0) \rangle_{\mathcal{H}} Z_j^{(1)}(x_0, y_0)$.

Доказательство закончено.

Групповая симметрия системы (3.1) означает сплетение представлениями K_g в следующем виде

$$K_g F_1(x, y, \lambda) = F_1(L_g x, L_g y, \lambda), \quad K_g F_2(x, y, \lambda) = F_2(L_g x, L_g y, \lambda) \quad (3.10)$$

Далее действуем по схеме п. 2 [15], [16]. Из равенств (3.10) и условия $F_k(x_0, y_0, \lambda) \equiv 0$ следует

$$\begin{aligned} & K_g \{ F'_{k_x}(x_0, y_0, \lambda_0 + \varepsilon)(x - x_0) + F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0 + \varepsilon)(y - y_0) + \\ & + R_k(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, \lambda_0 + \varepsilon) \} = F'_{k_{L_g x}}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(x - x_0) + \\ & + F'_{k_{L_g y}}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(y - y_0) + R_k(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0), L_g(y - y_0), \lambda_0 + \varepsilon), \\ & k = 1, 2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & K_g F'_{k_x}(x_0, y_0, \lambda_0 + \varepsilon)(x - x_0) = F'_{k_{L_g x}}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(x - x_0), \\ & K_g F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0 + \varepsilon)(y - y_0) = F'_{k_{L_g y}}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(y - y_0), \\ & K_g R_k(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, \lambda_0 + \varepsilon) = R_k(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0), L_g(y - y_0), \lambda_0 + \varepsilon), \\ & k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & K_g [\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] = \begin{pmatrix} -\lambda_0 K_g A_0^* & K_g B_0^* \\ K_g B_0 & -\lambda_0 K_g A_0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -\lambda_0 K_g A_0^*(x_0, y_0) & K_g B_0^*(x_0, y_0) \\ K_g B_0(x_0, y_0) & -\lambda_0 K_g A_0(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 A_0^*(L_g x_0, L_g y_0) L_g & B_0^*(L_g x_0, L_g y_0) L_g \\ B_0(L_g x_0, L_g y_0) L_g & -\lambda_0 A_0(L_g x_0, L_g y_0) L_g \end{pmatrix} = \\ & = [\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)] L_g \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & K_g \mathbf{A}(\varepsilon) = K_g \mathbf{A}(x_0, y_0, \varepsilon) = \\ & = \begin{pmatrix} K_g A^*(\varepsilon) & -K_g B^*(\varepsilon) \\ -K_g B(\varepsilon) & K_g A(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_g A^*(x_0, y_0, \varepsilon) & -K_g B^*(x_0, y_0, \varepsilon) \\ -K_g B(x_0, y_0, \varepsilon) & K_g A(x_0, y_0, \varepsilon) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} A^*(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g & -B^*(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g \\ -B(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g & A_0(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g \end{pmatrix} = [\mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)] L_g, \\ & K_g \mathbf{R}(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, \varepsilon) = \\ & = \begin{pmatrix} F_2(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) - F'_{2_x}(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(x - x_0) - F'_{2_y}(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(y - y_0) \\ F_1(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) - F'_{1_x}(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(x - x_0) - F'_{1_y}(L_g x, L_g y, \lambda_0 + \varepsilon) L_g(y - y_0) \end{pmatrix} = \\ & = \mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0), L_g(y - y_0), \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_i(L_g x_0, L_g y_0) = L_g \Phi_i(x_0, y_0) = (L_g u_k^{(1)}(x_0, y_0), L_g v_k^{(1)}(x_0, y_0))^T, \\ & \Gamma_g(L_g x_0, L_g y_0) = L_g^{-1} \Gamma_j, \quad \Gamma_j = \Gamma_j(x_0, y_0), \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.14)$$

и для областей значений операторов $F'_{k_x}(x_0, y_0, \lambda_0), F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0)$ выполнены соотношения $R(F'_{k_x}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0)) = R(K_g F'_{k_x}(x_0, y_0, \lambda_0) L_g^{-1}) = K_g R(F'_{k_x}(x_0, y_0, \lambda_0))$,

$R(F'_{k_y}(L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0)) = R(K_g F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0) L_g^{-1}) = K_g R(F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0))$. Тогда для ядра сопряженного оператора имеем

$$\begin{aligned} N^*(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) &= \text{span}\{\Psi_k^{(1)}\}_1^n = \text{span}\{\tilde{u}_k^{(1)}(x_0, y_0), \tilde{u}_k^{(1)}(x_0, y_0)\}_1^n = \text{span}\{\tilde{u}_k^{(1)}, \tilde{u}_k^{(1)}\}_1^n \implies \\ \implies N^*(\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)) &= \text{span}\{K_g^{*-1} \Psi_1^{(1)}, \dots, K_g^{*-1} \Psi_n^{(1)}\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

и подобно [2] §1.3 [3], [4], [15],[19]–[21] доказывается, что элементы упорядоченных по возрастанию длин цепочек ОЖН оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ и биортогональных им систем преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \Phi_k^{(s)}(x_0, y_0) = (L_g u_k^{(s)}(x_0, y_0), L_g v_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\ \Psi_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= K_g^{*-1} \Psi_k^{(s)}(x_0, y_0) = (K_g^{*-1} u_k^{(s)}(x_0, y_0), K_g^{*-1} v_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\ \Gamma_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g^{*-1} \Gamma_k^{(s)}(x_0, y_0) = (L_g^{*-1} u_k^{(s)}(x_0, y_0), L_g^{*-1} v_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\ Z_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= K_g Z_k^{(s)}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поэтому ОЖН в точках орбиты $(L_g x_0, L_g y_0)$ также удовлетворяют условиям биортогональности (3.5) и справедливо утверждение

Л е м м а 3.2. *В условиях групповой симметрии и существования три-канонических ОЖН проекционные операторы (3.6) оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ удовлетворяют свойствам сплетения*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \mathbf{P}(x_0, y_0) L_g^{-1} \quad \text{или} \quad L_g \mathbf{P}(x_0, y_0) = \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) L_g \\ \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0) &= K_g \mathbf{Q}(x_0, y_0) K_g^{-1} \quad \text{или} \quad K_g \mathbf{Q}(x_0, y_0) = \mathbf{Q}(K_g x_0, K_g y_0) K_g \end{aligned} \quad (3.17)$$

и порождают разложения пространства \mathcal{H} в прямые суммы, отвечающие точкам бифуркации $(x_0, y_0, 0)$ и $(L_g x_0, L_g y_0, 0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^K + \mathcal{H}^{\infty-K} = \mathcal{H}^K(x_0, y_0) + \mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_{\infty-K} = \mathcal{H}_K(x_0, y_0) + \mathcal{H}_{\infty-K}(x_0, y_0), \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}^K(L_g x_0, L_g y_0) + \mathcal{H}^{\infty-K}(L_g x_0, L_g y_0), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_K(L_g x_0, L_g y_0) + \mathcal{H}_{\infty-K}(L_g x_0, L_g y_0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

При этом базисы в подпространствах нулей $N(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})$ и дефектных функционалов $N^*(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})$ и в соответствующих корневых подпространствах могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^K(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \mathcal{H}^K(x_0, y_0), \quad \mathcal{H}^{\infty-K}(L_g x_0, L_g y_0) = L_g \mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0), \\ \mathcal{H}_K(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \mathcal{H}_K(x_0, y_0), \quad \mathcal{H}_{\infty-K}(L_g x_0, L_g y_0) = L_g \mathcal{H}_{\infty-K}(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (3.19)$$

Доказательство следует из формул (3.11)–(3.18).

Т е о р е м а 3.2. *В условиях существования три-канонического ОЖН оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ УРК А. Ляпунова (3.8) и Э.Шмидта (3.9) наследуют групповую симметрию (3.10) системы (3.1)*

$$f(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = f(L_g x_0, L_g y_0, \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi), \varepsilon) = K_g f(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon), \quad (3.20)$$

$$t(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = t(L_g x_0, L_g y_0, \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi), \varepsilon) = L_g t(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon). \quad (3.21)$$

Доказательство. Согласно (3.7), (3.19) запишем систему (3.1) в точке бифуркации $(L_g x_0, L_g y_0, 0)$ в проекциях на корневые подпространства

$$\begin{aligned} & (I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))[\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]\tilde{\mathbf{u}} = \\ & = (I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))\{\mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)[\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)] + \\ & \quad + \mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi), \varepsilon)\}, \\ & 0 = \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\{\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)\}\tilde{\mathbf{u}} - \\ & - \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)) - \mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi), \varepsilon) \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для сужения $[\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] = (I - \mathbf{Q}(x_0, y_0))(\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0))(I - \mathbf{P}(x_0, y_0))$ оператора $\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)$ на подпространство $\mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0)$ выполнено следующее соотношение симметрии

$$\begin{aligned} & K_g[\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] \stackrel{(3.2), (3.17)}{=} \\ & = (I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))[\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)](I - \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0))L_g = \\ & = [\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g \end{aligned} \quad (3.23)$$

Применяя K_g^{-1} к первому уравнению системы (3.22), получаем

$$\begin{aligned} & K_g^{-1}[\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]\tilde{\mathbf{u}} \stackrel{(3.23)}{=} \\ & \stackrel{(3.23)}{=} [\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)]L_g^{-1}\tilde{\mathbf{u}}, \\ & K_g^{-1}(I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))\mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)[\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)] + \\ & + K_g^{-1}(I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))\mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)) \stackrel{(3.13)}{=} \\ & \stackrel{(3.13)}{=} (I - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0))L_g^{-1}\mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)[\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)] + \\ & + (I - \mathbf{Q}(x_0, y_0))L_g^{-1}\mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)) \implies \\ & [\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g^{-1}\tilde{\mathbf{u}} = \\ & = (I - \mathbf{Q}(x_0, y_0))\mathbf{A}(x_0, y_0, \varepsilon)[L_g^{-1}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)] + \\ & + (I - \mathbf{Q}(x_0, y_0))\mathbf{R}(x_0, y_0, L_g^{-1}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.24)$$

В силу теоремы о неявных операторах находим единственное решение (3.24) в виде $L_g^{-1}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)$, откуда следует, что $\tilde{\mathbf{u}} = L_g \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)$. Подстановка найденного решения во второе уравнение системы (3.22) дает УРК А.Ляпунова (3.8) в точке бифуркации $(L_g x_0, L_g y_0, 0)$ и его групповую симметрию (3.20)

$$\begin{aligned} & f(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) \equiv \\ & \equiv \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0)[\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) - \\ & - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)[L_g \mathbf{u} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)] - \\ & - \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathbf{u} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi), \varepsilon) = \\ & = K_g \mathbf{Q}(x_0, y_0)(\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)) - K_g \mathbf{Q}(x_0, y_0)(\mathbf{A}(x_0, y_0, \varepsilon)(\mathbf{u} + \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi)) - \\ & - K_g \mathbf{R}(x_0, y_0, \mathbf{u} + \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = K_g f(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) \end{aligned}$$

Для доказательства наследования симметрии УРК Э.Шмидта запишем уравнение (3.1) в точке ветвления $(L_g x_0, L_g y_0, 0)$ в виде системы и применяя регуляризатор Шмидта, получим

$$\begin{aligned} & [\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g(x - x_0, y - y_0)^T = \\ & = \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon)L_g(x - x_0, y - y_0)^T + \mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0, y - y_0)^T, \varepsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^n \xi_{i1} Z_i^{(1)}(L_g x_0, L_g y_0), \quad \xi_{jk} = \langle L_g(x - x_0, y - y_0)^T, \Gamma_j^{(k)}(L_g x_0, L_g y_0)^T \rangle_{\mathcal{H}}, \\ & \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p_j. \end{aligned}$$

Полагая $L_g(x - x_0, y - y_0)^T = \tilde{\mathbf{w}} + L_g \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) = \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(L_g x_0, L_g y_0, \xi)$ в силу групповой симметрии операторов $[\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] = [\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \Gamma_k(x_0, y_0) \rangle Z_k(x_0, y_0), \mathbf{A}(x_0, y_0, \varepsilon)$ и $\mathbf{R}(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, \varepsilon)$ (соответственно равенствам (3.12)–(3.13)) находим $\tilde{\mathbf{w}} = L_g(x - x_0, y - y_0)^T$ из первого уравнения $[\mathbf{B}(L_g x_0, L_g y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(L_g x_0, L_g y_0)] \tilde{\mathbf{w}} = K_g [\mathbf{B}(x_0, y_0) - \lambda_0 \mathbf{A}(x_0, y_0)] L_g^{-1} \tilde{\mathbf{w}} = K_g \mathbf{A}(x_0, y_0, \varepsilon) [L_g^{-1} \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi)] + K_g \mathbf{R}(x_0, y_0, L_g^{-1} \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi))$ в виде $L_g^{-1} \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi))$. Тогда из второго уравнения системы получаем УРК Э.Шмидта в точке $(L_g x_0, L_g y_0, 0)$ и его групповую симметрию (3.21)

$$t(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) \tilde{\mathbf{w}} \stackrel{(3.17)}{=} \stackrel{(3.17)}{=} L_g \mathbf{P}(x_0, y_0) \tilde{\mathbf{w}}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = L_g t(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon)$$

Доказательство закончено.

Применяя результаты п. 2, получаем следующее утверждение

Т е о р е м а 3.3. Пусть в условиях групповой симметрии для системы (3.1) выполнены условия $\mathbf{c}_1) - \mathbf{c}_3)$, причем в условии $\mathbf{c}_2)$ $\kappa = n$ и $G_s, s < l$, является нормальным делителем G_l с соответствующим идеалом $T_{g(a)}^s$ производящих операторов, и оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ во фредгольмовой точке λ_0 отвечает полный три-канонический ОЖН $\kappa N(\mathbf{B}_{x_0} - \lambda_0 \mathbf{A}_0)$. Тогда существует непрерывная функция $\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi, \varepsilon) = \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) + \mathbf{u}(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) : T_{g(a)}^n \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{H}$, инвариантная относительно фактор-группы $G_\kappa = G_n = G_l / G_s$ на $T_{g(a)}^n \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right)$, такая, что

$$F_1(x_0, y_0, v_1(x_0, y_0, \xi, \varepsilon), v_2(x_0, y_0, \xi, \varepsilon)) = 0, \quad F_2(x_0, y_0, v_1(x_0, y_0, \xi, \varepsilon), v_2(x_0, y_0, \xi, \varepsilon)) = 0 \tag{3.25}$$

при $\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi) \in T_{g(a)}^n \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right), |\varepsilon| < \delta$.

С л е д с т в и е 3.1. Теорема 3.3 справедлива для полупростых точек ветвления, т.е. при отсутствии обобщенных жордановых цепочек. При этом в теореме и ее доказательстве речь идет об УР.

Т е о р е м а 3.4. Пусть в предположениях $\mathbf{c}_1) - \mathbf{c}_3)$, УРК А. Ляпунова (соотв. Э.Шмидта) – потенциального типа и его потенциал $U(x, y, \xi, \varepsilon)$ принадлежит классу C^2 в некоторой окрестности точки бифуркации $(x_0, y_0; 0)$ и является инвариантом представления L_g группы $G_l(a)$, s -размерность стационарной подгруппы элемента (x_0, y_0) , причем $\kappa = l - s > 0$. Тогда

1. если $\kappa = n$, то для всех $(\xi(\varepsilon), \varepsilon)$ или $(\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi(\varepsilon), \varepsilon))$ из некоторой окрестности нуля в \mathbb{R}^{K+1} УРК (3.8) (соотв. (3.9)) выполнено тождественно, т.е. возникает ситуация теоремы 3.3;
2. если $\kappa < n$ и $n \geq 2$, то имеет место частичная редукция УРК: в принятом в условии $\mathbf{c}_2)$ соглашении о нумерации базисных элементов в \mathcal{H}^K первые $K_\kappa = p_1 + \dots + p_\kappa$ уравнений являются линейными комбинациями остальных $p_{\kappa+1} + \dots + p_n$.

С л е д с т в и е 3.1. Пусть точке бифуркации отвечает инвариантное ядро и линеаризация имеет три-канонический ОЖН. Тогда редукция УРК А.М.Ляпунова и Э.Шмидта осуществляется по полным жордановым цепочкам с помощью полной системы функционально-независимых инвариантов действия группы G_1 .

Рассмотренную в п. 3 абстрактную ситуацию мы предполагаем применить к задачам распространения электромагнитных волн, проходящих через однородный изотропный немагнитный слой с нелинейностью типа Керра, заполняющей шаровой слой или слой между двумя софокусными однополостными гиперблоидами. Диэлектрическая проницаемость ε внутри слоя определяется по закону Керра $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\vec{E}|^2$, где $a > 0$ - коэффициент нелинейности, $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ - константы, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, ε_1 - диэлектрическая проницаемость внутреннего пространства и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$, ε_3 - диэлектрическая проницаемость внешнего пространства, ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.; Wolter Noordorf, Leiden. – 1974.
2. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: Фан, АН УзССР, 1979.
3. Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия// Вестник Самарского университета. –1998. – №4(10). – С. 15-75.
4. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications, MIA, V. 550. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. – 2002.
5. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teilen 1-3// Mathematische Annalen. – 1905-1908. – Bd. 63-65.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, Ч. 2. – Интегральные уравнения. – М.: ОНТИ, 1935.
7. Могилевский Ш.И. О представлении вполне непрерывных операторов в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве// Изв. вузов. Математика. – 1958. – №3(4). – С.183-186.
8. Пустыльник Е.И. Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве Банаха//Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 2(15). – С.149-153.
9. Логинов Б.В. О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве//Доклады АН УзССР. Физ.-мат. науки. – 1965. – № 1. – С.5-8.
10. Логинов Б.В., Поспеев В.Е. О собственных числах и векторах возмущенного оператора//Известия АН УзССР. Физ.-мат. науки. – 1967. – № 6. – С.29-35.
11. Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения//Доклады РАН. Математика. – 2008. – Т. 419, № 2. – С.1-5.

12. Логинов Б.В., Макеева О.В. Спектральная задача Э.Шмидта о собственных колебаниях резонатора без потерь//Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 1. – С.31-38.
13. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. Логинов Б.В., Коноплева И.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность в общей задаче теории ветвления//Известия Вузов. Математика. – 2006. – № 4(527). – С.30-40.
15. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах// Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2009. – Спецвыпуск. – С. 115-124.
16. Логинов Б.В., Коноплева И.В., Русак Ю.Б. Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии//Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С.31-43.
17. Макаренко Н.И. О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений//ДАН. Математика. – 1996. – Т. 348., № 3. – С.302-304.
18. Макаренко Н.И. Симметрия и косимметрия вариационных задач в теории волн//Труды межд. школы-семинара "Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов". – Сочи: Ростов. ун-т. – 2001. – С.109-120.
19. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления//Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Ташкент: Фан АН УзССР. 1978, – С.133-148.
20. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations//Nonlinear Analysis. TMA. – 1991.– V. 17, №. 3. – P.219-231.
21. Loginov B.V. Branching equation in the root subspace//Nonlinear Analysis. TMA. – 1998. –V. 32, №. 3. – P.439-448.
22. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems in nonlinear equations with Fredholm operators//Nonl. Anal. and Appl.: To V.Lakshmikantham on his 80th Birthday. (Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan–eds.) – Kluwer Acad. Publ, Dordrecht. – 2003.– V. 2. – P.617-644.
23. Konopleva I.V., Loginov B.V., Makeev O.V., Rousak Yu.B. Symmetry of $SO(2)$ and $SH(2)$ in Poincare-Andronov-Hopf bifurcation problems with potential branching equations//Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, №.11. – С. 106-112.
24. Русак Ю.Б., Логинов Б.В., Ким-Тян Л.Р. Обобщенные жордановы цепочки специального вида линейной оператор-функции спектрального параметра//Сб. научно-исслед. трудов «Прикладная математика и механика». – УлГТУ, Ульяновск. – 2009. – С. 205-217.

Stationary bifurcation problems with E. Schmidt spectrum in linearization under group symmetry conditions.

© B. V. Loginov⁴; I. V. Konopleva⁵; L. V. Mironova⁶

Abstract. With the aim of applications in electromagnetic oscillations theory G -invariant implicit operator theorem and theorem about reduction of variational type branching equations and branching equations in the root-subspaces on the number of equations are proved for bifurcational problems with E.Schmidt spectrum in the linearization. Terminology and designations of the works [1]-[4] are used.

Key Words: Stationary bifurcation problems, E. Schmidt spectrum, group symmetry, G -invariant implicit operator theorem, variational type branching equations and branching equations in the root-subspaces.

⁴Proffesor, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

⁵Docent, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; i.konopleva@ulstu.ru

⁶Assistent, Ulyanovsk Higher Civil Aviation School, Ulyanovsk; i.konopleva@ulstu.ru

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.97, 519.6

Численное решение задачи оптимального управления с использованием системы распределенных вычислений

© Ю. А. Гнатенко¹, М. Т. Карамуллин²

Аннотация. В работе получено численное решение задачи Майера с помощью системы распределенных вычислений.

Ключевые слова: задача оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, двухточечная краевая задача, система распределенных вычислений.

Основной характерной чертой, присущей всем прикладным задачам оптимального управления, является сложность решения двухточечной краевой задачи, к которой приводит принцип максимума Понтрягина [3]. В большинстве случаев при численном поиске оптимального решения затрачивается много вычислительных ресурсов и, соответственно, времени. Поэтому для ускорения поиска оптимального решения предлагается использовать системы распределенных вычислений, которые способны в несколько раз сократить время, затрачиваемое на поиск.

Систему распределенных вычислений было решено сделать по принципу «управляющий – командный центр – клиенты», где «управляющий» – это рабочая станция, отдающая задания клиентам через «командный центр»; «клиенты» – компьютеры с необходимым программным обеспечением, способные принимать задания от управляющих рабочих станций посредством командного центра, обрабатывать их и возвращать результат. В качестве командного центра используется IRC-сервер [1].

Рассмотрим численное решение задачи оптимального управления на следующем примере.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 1;$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \tag{1.2}$$

а также функционал качества

$$I = x_2(2\pi) \rightarrow \min. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, t \in [0; 2\pi]$.

¹Доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия им.Зайнаб Бишевой, г. Стерлитамак; valieva_julia@mail.ru.

²Студент пятого курса института математики и естественных наук, Стерлитамакская государственная педагогическая академия им.Зайнаб Бишевой, г. Стерлитамак; frostosx@gmail.com.

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t)$ и соответствующую ему оптимальную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$. Задача (1.1)-(1.3) – задача Майера.

Применим принцип максимума Понтрягина. Составим функцию Понтрягина (гамильтониан)

$$H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 [-x_1 + u]. \quad (1.4)$$

Найдем максимум функции Понтрягина. Так как гамильтониан (1.4) линеен по управлению u , а на управление наложены ограничения $|u(t)| \leq 1$, то оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \arg \max H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = 1 \cdot \text{sign}(\psi_2(t)), \quad (1.5)$$

то есть управление является релейным и определяется знаком функции $\psi_2(t)$.

С учетом (1.5) система основных уравнений (1.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) + 1 \cdot \text{sign}(\psi_2(t)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выпишем сопряженные уравнения принципа максимума:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_2(t), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = -\psi_1(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Недостаток граничных условий восполняется условиями трансверсальности, число которых равняется числу недостающих граничных условий для основной и сопряженной системы уравнений (для задачи со свободным правым концом).

$$\psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \quad (1.8)$$

Таким образом, получена следующая двухточечная краевая задача: найти решение канонической системы (1.6), (1.7) с краевыми условиями (1.2), (1.8).

Для численного решения полученной задачи требуется задать начальные значения всех неизвестных функций $x_i(t)$ и $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, а далее численно решать задачу Коши. Недостающие значения

$$\psi_i(0) = \psi_i^{(0)}, i = 1, 2 \quad (1.9)$$

должны задаваться до некоторой степени произвольно и затем уточняться по значениям функций $\psi_i(t)$ в конечной точке траектории (1.8). Оценка несоответствия (невязка) найденной конечной точки $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ с заданной определяется по формуле [2]:

$$r = \sum_{i=1}^2 [\psi_i(2\pi) - \psi_i^{(k)}]^2.$$

При этом важно оценить, насколько удачно выбраны начальные значения (1.9), то есть решить задачу отыскания минимума функции нескольких переменных:

$$\min_{\boldsymbol{\psi}^{(0)}} r(\boldsymbol{\psi}^{(0)}) = 0. \quad (1.10)$$

Задача (1.10) была решена численно с помощью градиентного метода безусловной минимизации функции многих переменных, задача Коши для систем дифференциальных уравнений (1.1), (1.7) с начальными условиями (1.9) – классическим методом Рунге-Кутты. В таблице представлены результаты численного решения – приближенное минимальное значение функционала (1.3) при различных $\psi_i^{(0)}, i = 1, 2$.

N	Начальные приближения	Время счета, ч:мин:с	Невязка	Минимум ф-ла
1	$\psi_1^{(0)} = 0 \quad \psi_2^{(0)} = -1$	00:00:03	0,01956	-3,9919428
2	$\psi_1^{(0)} = 0,023 \quad \psi_2^{(0)} = -0,989$	00:00:16	0,025735	-3,9919418
3	$\psi_1^{(0)} = 0,0456 \quad \psi_2^{(0)} = -0,7856$	00:21:16	0,048467	-3,9845698
4	$\psi_1^{(0)} = 1 \quad \psi_2^{(0)} = 1$	48:58:27	1	-3,8788281

Анализируя результаты, можно сделать вывод: чем дальше начальные приближения, задаваемые произвольно, от аналитических [3], равных $\psi_1^{(0)} = 0, \psi_2^{(0)} = -1$, тем дольше время поиска решения. Аналитическое значение минимума функционала (1.3): $I = -4$.

Для того, чтобы ускорить процесс, предлагается применить систему распределенных вычислений следующим образом: управляющая станция генерирует систему двумерных случайных точек для задания начальных значений $\psi_i^{(0)}, i = 1, 2$; каждый клиент получает одну из случайных точек и начинает независимо от других клиентов решать задачу (1.10). Как только первый из клиентов находит решение задачи (1.10), работа остальных клиентов завершается. Ускорение достигается за счет того, что один из клиентов выбирает случайную точку наиболее «близкую» к искомому решению.

Было разработано программное средство, реализующее данный алгоритм. Случайные точки задавались из промежутка $[0; 10000] \times [0; 10000]$. Зависимость времени счета задачи от количества клиентов представлена в таблице.

число клиентов	время, с
1	3,5
2	2,3
3	1,7

Таким образом, с увеличением числа клиентов время счета уменьшается, при этом численное решение краевой задачи (1.6), (1.7), (1.2), (1.8) согласуется с аналитическим [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианов С.Н., Дегтярев А.Б. Параллельные и распределенные вычисления. Часть 1: Учеб. пособие - СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2007. 61с.
2. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии - М: Химия, 1975, 576 с.
3. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С.- М: Высш. шк., 2003.-583с.:ил.

Numerical solution of the optimal management system using distributed computing

© Y. A. Gnatenko³, M. T. Karamullin⁴

Abstract. In the work the solution of the Maier's problem is obtained with the help of the distributed computing systems.

Key Words: problem of optimal control, Pontryagin's principle of maximum, two points boundary problem, system of distributed computing.

³Associate Professor of Department Mathematical Modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy after Zaynab Biishevoy, Sterlitamak; valieva_julia@mail.ru.

⁴Fifth student degree in mathematics and science, Sterlitamak State Pedagogical Academy after Zaynab Biishevoy, Sterlitamak; frostosx@gmail.com.

УДК 517.938

О топологии несущего многообразия для диффеоморфизмов Морса-Смейла

© Е. Я. Гуревич¹

Аннотация. В работе рассматривается класс $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на связном замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3 таких, что множество неустойчивых сепаратрис любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Устанавливается, что для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.

Ключевые слова: динамические системы Морса-Смейла, топология несущего многообразия.

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком связном замкнутом многообразии M^n размерности n , называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит;
- 2) устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек и периодических орбит из Ω_f пересекаются трансверсально.

Термин “динамическая система Морса-Смейла” закрепился за системами, удовлетворяющими условиям 1)-2) после появления работы [8], в которой С. Смейл доказал, что для потоков, удовлетворяющих условиям 1)-2), справедливы неравенства Морса, устанавливающие взаимосвязь между структурой неблуждающего множества и числами Бетти несущего многообразия. В случае $n = 2$ класс потоков Морса-Смейла совпадает с классом грубых потоков. Диффеоморфизмы (потоки) Морса-Смейла на многообразиях размерности $n \geq 2$ ($n \geq 3$) являются грубыми, но не исчерпывают класс всех грубых диффеоморфизмов (потоков). Однако, изучение систем Морса-Смейла является важной задачей, как с точки зрения приложений, для описания процессов с конечным множеством стационарных режимов, так и с точки зрения теории бифуркаций, для понимания переходных процессов. Кроме того, системы Морса-Смейла обнаруживают глубокую взаимосвязь динамики с топологией фазового пространства, изучению которой посвящена эта статья.

Перечислим наиболее значимые результаты, полученные в этом направлении. В работе [10] получены аналоги неравенств Морса для потоков Морса-Смейла без состояний равновесия. В [1] для таких потоков на многообразиях размерности $n \geq 4$ построено специальное разложение многообразия на круговые ручки и показано, что если многообразие допускает такое разложение, то на нем существует поток Морса-Смейла без состояний равновесия. Топологическая структура трехмерного многообразия, допускающего потоки Морса-Смейла без состояний равновесия исследована в работе [7], где показано,

¹Старший преподаватель кафедры Теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; elena_gurevich@list.ru.

что несущее многообразие представляет собой либо зейфертово недостаточно большое (в терминологии Вальдхаузена, см. [11]) пространство, либо специальное объединение зейфертовых пространств и многообразий, гомеоморфных прямому произведению тора на отрезок.

В работе [2] доказано, что трехмерное многообразие, допускающее диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, диффеоморфно либо сфере, либо связной сумме многообразий, гомеоморфных прямому произведению $S^2 \times S^1$, и дана формула, связывающая число источников, седловых и стоковых точек с топологией несущего многообразия. В работе [6] аналогичная формула получены для n -мерной сферы, где $n \geq 4$. В [3] установлены соотношения между структурой периодических орбит систем Морса-Смейла (потоков и диффеоморфизмов) и родом Хегора несущего многообразия.

В настоящей работе рассматривается класс $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на трехмерном многообразии M^3 и таких, что множество неустойчивых сепаратрис любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Мы показываем, что из условий, определяющих класс $G(M^3)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ содержит в точности 1 источник, и справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно сфере S^3 . Если $k > 0$ — число седловых периодических точек диффеоморфизма f , то число стоковых точек равно $k + 1$.*

Для $n > 3$ аналогичный результат доказан в [4]. Отметим, что техника доказательства теоремы 1.1. базируется на технике и некоторых ключевых результатах работы [2]. Однако, теорема 1.1. не является прямым следствием из работы [2], поскольку соотношение между числом стоковых и седловых точек для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ заранее неизвестно.

Благодарности Автор благодарит В.З. Гринеса, В.С. Медведева и О.В. Починку за плодотворные обсуждения, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант РФФИ № 11-01-12056 офи-м за частичную финансовую поддержку.

2. Топология несущего многообразия M^3

Будем называть n -шаром ($(n - 1)$ -сферой) многообразие, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ (сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$), $n \in \{1, 2, 3\}$.

Обозначим через $\Omega_3(f)$, $\Omega_1(f)$ и $\Omega_0(f)$ множество источников, седловых и стоковых периодических точек диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ соответственно.

Нижеприведенное утверждение следует из [8].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Для любой периодической точки $\sigma \in \Omega_1(f)$ диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ замыкание \bar{l} ($\bar{\Sigma}$) неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы l (Σ) является компактной дугой (2-сферой), состоящей из объединения сепаратрисы l (Σ), точки σ и единственной точки $\omega \in \Omega_0(f)$ ($\alpha \in \Omega_3(f)$).*

Л е м м а 2.1. *Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда неблуждающее множество $\Omega(f)$ содержит ровно один источник.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как f — диффеоморфизм Морса-Смейла, то множество $\Omega_3(f)$ непусто. Предположим, что множество $\Omega_3(f)$ содержит более одной точки. В силу [9] (теорема 2.3) многообразие M^3 можно представить в виде объединения неустойчивых многообразий всех периодических точек диффеоморфизма f . Положим $X^u = (\bigcup_{\sigma \in \Omega_1(f)} W^u(\sigma)) \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega_0(f)} \omega)$. Тогда $M^3 = \bigcup_{\alpha \in \Omega_3(f)} W^u(\alpha) \cup X^u$. Для любых двух различных точек $\alpha_i, \alpha_j \in \Omega_3(f)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, множества $W^u(\alpha_i)$ и $W^u(\alpha_j)$ непусты, открыты и не пересекаются, следовательно множество $\bigcup_{\alpha \in \Omega_3(f)} W^u(\alpha) = M^3 \setminus X^u$ несвязно. Так как, в силу предложения 2.1., множество X^u состоит из конечного числа простых дуг, то его топологическая размерность равна 1. Тогда в силу [5] (гл. 4, теорема 4) множество $M^3 \setminus X^u$ связно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 1.1. Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно сфере S^3 . Если $k > 0$ — число седловых периодических точек диффеоморфизма f , то число стоковых точек равно $k + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не уменьшая общности предположим, что множество $\Omega(f)$ состоит только из неподвижных точек (если это не так, то существует такое $N > 0$, что любая периодическая точка диффеоморфизма f является неподвижной для диффеоморфизма f^N ; тогда докажем теорему для f^N , многообразие M^3 при этом не изменится).

Для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f сфера $\Sigma = \overline{W^s(\sigma)} \setminus \sigma$ является топологическим репеллером, следовательно, существует окрестность $U(\sigma) \in M^3$ и целое положительное число $r(\sigma)$ такое, что $U(\sigma) \subset \text{int } f^{r(\sigma)}(U(\sigma))$. Положим что $r(\sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f , при этом многообразии M^3 останется прежним).

Из работы [2] (Proposition 0.1) следует, что для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(\sigma) \subset U(\sigma)$ сферы Σ , ограниченная гладко вложенными сферами S_1^2, S_2^2 и гомеоморфная прямому произведению $S^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через l_1 и l_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ , через ω_1 и ω_2 — стоковые точки, принадлежащие замыканиям l_1 и l_2 соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\bar{l}_1 \cap V(\sigma)$ и $\bar{l}_2 \cap V(\sigma)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(\sigma) \setminus \Sigma$.

Удалим из многообразия M^3 внутренность окрестности $V(\sigma)$. Многообразие $M^3 \setminus \text{int } V(\sigma)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S_1^2, S_2^2 . Обозначим через M_1^3 компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus \text{int } V(\sigma)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых шаров B_1^3 и B_2^3 . Зададим диффеоморфизм $\tilde{f}_1 : M_1^3 \rightarrow M_1^3$ таким образом, что:

- 1) $\tilde{f}_1|_{M_1^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)} = \tilde{f}|_{M_1^3 \setminus (B_1^3 \cup B_2^3)}$;
- 2) $\tilde{f}_1|_{B_1^3 \cup B_2^3}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B_1^3, \alpha_2 \in B_2^3$, каждая из которых является отталкивающей.

Неблуждающее множество $\Omega(\tilde{f}_1)$ диффеоморфизма \tilde{f}_1 содержит в точности две отталкивающие точки и $(k - 1)$ седловых точек, при этом общее количество неподвижных точек диффеоморфизма \tilde{f}_1 совпадает с числом неподвижных точек диффеоморфизма f .

Так как неблуждающее множество $\Omega(\tilde{f}_1)$ содержит два источника, то из леммы 2.1. следует, что многообразие M_1^3 состоит из двух компонент связности N_1^3 и N_2^3 . Так как $\bar{l}_i \setminus U_\sigma \subset N_i^3$, то $\omega_i \subset N_i^3, i = 1, 2$.

Проделаем описанную процедуру еще $(k - 1)$ раз. В результате получим компактное многообразие без края M_k^3 и диффеоморфизм $\tilde{f}_k : M_k^3 \rightarrow M_k^3$ со следующими свойствами.

Многообразие M_k^3 состоит из $k+1$ компонент связности N_1^3, \dots, N_{k+1}^3 , каждая из которых содержит 1 источник и 1 сток диффеоморфизма \tilde{f}_k . Следовательно, каждое многообразие N_i^3 гомеоморфно 3-сфере, а многообразие M^3 является связной суммой $(k+1)$ экземпляров 3-сфер². Поэтому M^3 гомеоморфно 3-сфере.

Неблуждающее множество диффеоморфизма \tilde{f}_k содержит только притягивающие и отталкивающие неподвижные точки, и их общее количество равно числу неподвижных точек диффеоморфизма f . Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит $2k+2$ точки: 1 источник, k седловых точек и $k+1$ стоков.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Asimov D. Round handles and non-singular Morse-Smale flows// Ann. of Math. (2) – 1975. – V.102. – P. 41-54.
2. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topology and its Applications. – 2002. – V. 111. – P. 335-344.
3. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами// Мат. сб. – 2003. – Т. 194, № 7. – С. 25–56.
4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности большей трех// Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 61-86.
5. Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности (пер. с англ.). – М.: Издательство иностранной литературы, 1948. – 232 с.
6. Гуревич Е.Я. О диффеоморфизмах Морса–Смейла на многообразиях размерности большей 3// Труды Средневолжского математического общества. – 2003. – Т.1. – С. 162-167.
7. Morgan J. W. Non-singular Morse-Smale flows on 3-manifold// Topology. – 1979. – V. 18, №1. – P. 41-53.
8. Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems// Bull. Am. math. Soc. – 1960. – V. 66. – P. 43-49. [Русский перевод: сб. Математика. – 1967. – Т. 11, №4. – С. 79-87.]
9. Smale S. Differentiable dynamical systems.// Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – № 6. – P. 747-817 (Пер. на рус. яз.: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы.// Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – № 1. – С. 113-185.)
10. Franks J. The period structure of non-singular Morse-Smale flows// Comment. Math. Helv. – 1978. – V.53. – P. 279-294.

²Связной суммой $M_1^3 \# M_2^3$ двух ориентируемых связных 3-многообразий M_1^3 , M_2^3 называется многообразие $M_1^3 \# M_2^3$, полученное следующим образом:

1) выберем шары B_1^3 , B_2^3 так, что $B_i^3 \subset M_i^3$; 2) склеим многообразия $M_1^3 \setminus \text{int}B_1^3$ и $M_2^3 \setminus \text{int}B_2^3$ при помощи гомеоморфизма $\varphi : \partial B_1^3 \rightarrow \partial B_2^3$, обращающего естественную ориентацию $\partial B_1^3, \partial B_2^3$.

-
11. Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I // Invent. Math. – 1967. – V. 3. – P. 308-333.

On topology of ambient manifold for Morse-Smale diffeomorphisms.

© E.Y. Gurevich³

Abstract. In this article is considered the class $G(M^3)$ of orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms on connected closed orientable 3-manifolds such that for any $f \in G(M^3)$ the set of unstable separatrices is one-dimensional and does not contain any heteroclinic intersection. It is proved that for any $f \in G(M^3)$ its' ambient manifold M^3 is diffeomorphic to 3-sphere.

Key Words: Morse-Smale dynamical systems, topology of the ambient manifold.

³Assistant Professor of Chair of Theory of Control and Dynamic of Machines, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; elena _ gurevich@list.ru.

УДК 517.938

О диффеоморфизмах Морса-Смейла с тремя неподвижными точками

© Е. В. Жужома¹, Л. А. Куприна², В. С. Медведев³

Аннотация. Изучается топологическая структура сепаратрис диффеоморфизма Морса-Смейла n -мерного многообразия ($n \geq 4$), неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек.

Ключевые слова: Многообразие, узлы, диффеоморфизм Морса-Смейла, сепаратрисы седла.

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], [21]) замкнутого n -мерного ($n \geq 3$) многообразия M^n , и σ - седловая периодическая точка диффеоморфизма f с k -мерным ($1 \leq k \leq n - 1$) устойчивым $W^s(\sigma)$ или неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $Sep^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s , либо u). Если $Sep^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седловых периодических точек, то $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой узловой периодической точки, скажем N . Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $Sep^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n k -сферой [5]. Возможность дикого вложения такой k -сферы впервые была доказана в [18] для многообразия, являющегося 3-сферой $M^3 = S^3$, при $k = 1, 2$ (аналогичные примеры были построены в [2] - [5], [12], [14], где рассматривались также вопросы классификации). Более точно, в [18] был построен градиентно-подобный диффеоморфизм 3-сферы с одним седлом и тремя узлами. Из [13] вытекает, что не существует ориентируемых замкнутых 3-многообразий, допускающих диффеоморфизм Морса-Смейла с тремя периодическими точками. Поскольку на любом замкнутом многообразии диффеоморфизм Морса-Смейла имеет, по крайней мере, одну источниковую и одну стоковую периодические точки [21], то получается, что в случае $n = 3$ минимальное число периодических точек с указанным эффектом дикого вложения замыкания сепаратрисы равно четырем.

В [17] было доказано существование замкнутых n -многообразий (и исследование таких многообразий), допускающих функции Морса ровно с тремя критическими точками при $n \geq 4$. Как следствие получаем, что в случае $n \geq 4$ существуют диффеоморфизмы Морса-Смейла ровно с тремя периодическими точками. Такой диффеоморфизм имеет ровно одно седло (лемма 1.4.). Поэтому естественно рассмотреть вопрос о возможности дикого вложения топологического замыкания сепаратрисы у (единственного) седла. Настоящая статья посвящена изучению данного вопроса. Основной результат содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла замкнутого многообразия размерности $n \geq 4$, и неблуждающее множество диффеоморфизма состоит из трех неподвижных точек: стока ω , источника α и седла s_0 . Тогда

¹Профессор кафедры математики, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

²Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

³Старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

- M^n ориентируемое;
- сепаратрисы седла s_0 имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);
- замыкания неустойчивой $Sep^u(s_0)$ и устойчивой $Sep^s(s_0)$ сепаратрис являются топологически вложенными $\frac{n}{2}$ -мерными сферами $W^u(s_0) \cup \{\omega\} = S_\omega$, $W^s(s_0) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$ соответственно.
- если $n \geq 6$, то сферы S_ω и S_α локально плоские;

Авторы благодарят участников семинара В.З. Гринеса за плодотворные обсуждения.

Сперва напомним некоторые основные определения. Диффеоморфизм f гладкого многообразия M^n (размерности $n \geq 3$) называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = Per(f)$), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in NW(f)$.

Индекс Кронекера-Пуанкаре есть число $Ind_p(f) = (-1)^{\dim W^u(p)} \Delta$, где Δ суть $+1$ или -1 в зависимости от того сохраняет или меняет ориентацию отображение $f|_{W^u(p)}$. Обозначим через $tr(f_{*k})$ след (линейного) отображения $f_{*k} : H_k(M, \mathbb{R})$, которое индуцируется диффеоморфизмом f в k -мерной группе гомологий $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M)$, $0 \leq k \leq \dim M$. Если множество $Fix(f)$ неподвижных точек диффеоморфизма f состоит из гиперболических точек, то для такого диффеоморфизма имеет место следующая формула Лефшеца

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k tr(f_{*k}) = \sum_{p \in Fix(f)} Ind_p(f).$$

Дадим определение дикого и локально плоского вложений подмногообразий в некоторое многообразие. Для натуральных $1 \leq m \leq n$ мы рассматриваем евклидово пространство \mathbb{R}^m вложенным в \mathbb{R}^n так, что последние $(n - m)$ координат точек из \mathbb{R}^m равны 0. Пусть $e : M^m \rightarrow N^n$ - вложение замкнутого m -многообразия M^m во внутренность n -многообразия N^n . Тогда $e(M^m)$ *локально плоско в точке* $e(x)$, $x \in M^m$, если существует окрестность $U(e(x)) = U$ точки $e(x)$ и гомеоморфизм $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $h(U \cap e(M^m)) = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. В противном случае $e(M^m)$ *дику вложено в* $e(x)$. Аналогичные определения вводятся в случае компактного M^m с краем (в частности, $M^m = [0; 1]$).

В [5] доказано утверждение, которое мы сформулируем для ссылок в виде леммы.

Лемма 1.2. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, у которого сепаратриса $Sep^\tau(\sigma)$ некоторого седла σ не пересекается с сепаратрисами других седел. Тогда $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой стоковой периодической точки, скажем N , ее топологическое замыкание равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n сферой соответствующей размерности.

Доказательство ориентируемости многообразия M^n будет вытекать из следующей леммы, которая имеет самостоятельный интерес.

Лемма 1.3. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, у которого нет одномерных сепаратрис и все сепаратрисы не имеют гетероклинических пересечений. Тогда многообразие M^n ориентируемое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными (в противном случае мы перейдем к некоторой итерации). Известно, что существует двулистное накрытие $\widehat{\pi} : \widehat{M}^n \rightarrow M^n$, где \widehat{M}^n - ориентируемое многообразие. Покажем, что существует поднятие \widehat{f} диффеоморфизма f относительно накрытия $\widehat{\pi}$. Положим $\widehat{f} = id$ во всех точках $\widehat{\pi}^{-1}(Fix f)$. Возьмем произвольную точку $\widehat{x} \in \widehat{M}^n$, $\widehat{x} \notin \widehat{\pi}^{-1}(Fix f)$. Тогда $\widehat{\pi}(\widehat{x})$ принадлежит либо устойчивому многообразию $W^s(\omega)$ некоторого стока ω , либо устойчивой сепаратрисе $Sep^s(\sigma)$ некоторого седла σ . В первом случае, поскольку $W^s(\omega)$ односвязно и, следовательно, полный прообраз $\widehat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$ состоит из попарно непересекающихся односвязных областей, существует единственная компонента \widehat{W}^s полного прообраза $\widehat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$, содержащая \widehat{x} . Отметим, что существует также единственная точка $\widehat{\omega} \in \widehat{\pi}^{-1}(\omega)$, принадлежащая той же компоненте. Положим

$$\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{y} \in \widehat{\pi}^{-1}(f(\widehat{\pi}(\widehat{x}))) \cap \widehat{W}^s.$$

Во втором случае, когда $\widehat{\pi}(\widehat{x}) \in Sep^s(\sigma)$, согласно лемме 1.2., замыкание сепаратрисы $Sep^s(\sigma)$ есть k -сфера S_0^k . По условию, $k \geq 2$. Поэтому S_0^k односвязна и, следовательно, полный прообраз $\widehat{\pi}^{-1}(S_0^k)$ состоит из попарно непересекающихся k -сфер, одна из которых, скажем \widehat{S}_0^k , содержит \widehat{x} . Положим

$$\widehat{f}(\widehat{x}) = \widehat{y} \in \widehat{\pi}^{-1}(f(\widehat{\pi}(\widehat{x}))) \cap \widehat{S}_0^k.$$

Непосредственно проверяется, что построенное отображение \widehat{f} является диффеоморфизмом Морса-Смейла, удовлетворяющим равенству $\widehat{\pi} \circ \widehat{f} = f \widehat{\pi}$.

Ясно, что \widehat{f} не имеет одномерных сепаратрис. В работе [6] показано, что из отсутствия одномерных сепаратрис вытекает, что диффеоморфизм Морса-Смейла имеет ровно один источник и ровно один сток. Так как f имеет хотя бы один источник и хотя бы один сток, то \widehat{f} должен иметь не менее двух источников и двух стоков. Полученное противоречие показывает, что многообразие M^n ориентируемое.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Следуя [10], будем говорить, что седло σ имеет тип (μ, ν) , если $\mu = \dim W^u(\sigma)$, $\nu = \dim W^s(\sigma)$. Число μ (ν) называется неустойчивым (устойчивым) индексом Морса.

Л е м м а 1.4. Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из трех неподвижных точек. Тогда

- $NW(f)$ состоит из стока, источника и седла, сепаратрисы которого имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);
- M^n ориентируемое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним неравенства Морса-Смейла [20]. Обозначим через M_j число периодических точек p диффеоморфизма f , у которых устойчивое многообразие имеет размерность $j = \dim W^s(p)$. Пусть $\beta_i(M^n) = \beta_i$ - i -е число Бетти многообразия M^n , т.е. $\beta_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n, \mathbb{Z})$. Тогда имеют место следующие соотношения [20]:

$$M_0 \geq \beta_0, \quad M_1 - M_0 \geq \beta_1 - \beta_0, \quad \dots, \quad M_{n-1} - M_{n-1} + \dots \geq \beta_{n-1} - \beta_{n-1} + \dots \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i. \quad (1.2)$$

Поскольку для связного многообразия $\beta_0 = 1$, то из (1.1) вытекает, что f имеет по крайней мере один сток и по крайней мере один источник. Если предположить, что f имеет два стока ω_1, ω_2 и один источник α , то получим, что связное множество $M^n \setminus \{\alpha\}$ является объединением двух непересекающихся открытых множеств $W^s(\omega_1)$ и $W^s(\omega_2)$. Аналогично показывается, что f не может иметь два источника и сток. Таким образом, $NW(f)$ состоит из стока ω , источника α и седла σ . Пусть σ имеет тип $(n-k, k)$. Тогда $M_0 = M_n = M_k = 1$. Для диффеоморфизма f^{-1} имеем $M_0 = M_n = M_{n-k} = 1$. Остальные $M_j = 0$ ($j \neq 0, n, k, n-k$). Приравнивая левые части (1.2) для f и f^{-1} , получаем $(-1)^k = (-1)^{n-k}$ и, следовательно, число $n = 2m$ четное. Более того, $n \geq 4$.

Покажем, что $k \neq 1$. Предположим противное. Так как многообразия $W^s(\sigma), W^u(\sigma)$ не имеют гетероклинических пересечений, то их топологические замыкания равны $W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\alpha^1, W^u(\sigma) \cup \{\omega\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\omega^{n-1}$ и являются топологически вложенными окружностью и $(n-1)$ -сферой соответственно [5]. Из $n \geq 4$ и того, что S_ω^{n-1} гладко вложена за исключением быть может одной точки вытекает, что S_ω^{n-1} имеет окрестность U_ω , гомеоморфную $S_\omega^{n-1} \times (-1; +1)$ [15]. Более того, U_ω можно построить так, чтобы $f(U_\omega) \subset U_\omega$. Поскольку S_ω^{n-1} и S_α^1 пересекаются только в одной точке σ , то S_ω^{n-1} не разбивает M^n . Поэтому множество $M_1^n = M^n \setminus U_\omega$ является связным многообразием с двумя граничными компонентами, гомеоморфными S_ω^{n-1} . Приклеив к этим компонентам непересекающиеся n -мерные шары, получим замкнутое многообразие M_2^n . Из $f(U_\omega) \subset U_\omega$ следует, что можно продолжить f на M_2^n до диффеоморфизма с одним источником и двумя стоками. Выше было показано, что такого диффеоморфизма не существует. Полученное противоречие доказывает неравенство $k \neq 1$. Применяя этот результат к f^{-1} , получаем $k \neq n-1$. Таким образом, $M_1 = M_{n-1} = 0$.

Так как у диффеоморфизма Морса-Смейла сепаратрисы одного седла не пересекаются, то обе сепаратрисы (единственного) седла диффеоморфизма f не имеют гетероклинических пересечений. Отсюда и леммы 1.3. следует, что многообразие M^n ориентируемое.

Покажем, что $k = m$. Предположим противное, и для определенности предположим, что $k > m$ (в противном случае, перейдем к диффеоморфизму f^{-1}). Из (1.1) вытекает $\beta_1 = \dots = \beta_{n-k-1} = 0$, поскольку $M_1 = \dots = M_{n-k-1} = 0$. Из двойственности Пуанкаре для ориентируемых многообразий (см. например, [8], стр. 145) следует $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$. Тогда $\beta_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Равенство (1.2) принимает вид $1 + (-1)^k + (-1)^n = 1 + (-1)^n$, чего не может быть.

Равенство $k = m$ можно доказать другим способом, который не использует ориентируемость M^n . Снова предположим противное, и для определенности предположим, что $k < m$. В этом случае коразмерность многообразия $W^s(\sigma)$ не менее двух. Поэтому достаточно близким к тождественному диффеоморфизмом $\kappa : M^n \rightarrow M^n$ можно перевести объединение $W^s(\sigma) \cup \alpha$ в $\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha)$ с $\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha) \cap (W^s(\sigma) \cup \alpha) = \emptyset$. При этом можно считать, что κ равен тождественному диффеоморфизму в некоторой окрестности стока ω . Диффеоморфизм $\kappa^{-1} \circ f \circ \kappa = \kappa'$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, у которого есть сток ω , и замыкание сепаратрисы седла не пересекается с $W^s(\sigma) \cup \alpha$. Тогда устойчивые многообразия стока ω диффеоморфизмов f и κ' покрывают все многообразие M^n . Так как устойчивое многообразие стока гомеоморфно открытому n -шару, то M^n является n -сферой S^n [7]. Перейдя, если необходимо к некоторой итерации, можно считать, что f и ограничение $f|_{W^u(\sigma)}$ сохраняют ориентацию. Поскольку для n -мерной сферы S^n имеем $H_0(S^n) = H_n(S^n) = 1, H_k(S^n) = 0, 1 \leq k \leq n-1$, то формула Лефшеца для диффеоморфизма Морса-Смейла сферы S^n принимает следующий вид:

$$1 + (-1)^n = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}_p(f). \tag{1.3}$$

Ясно, что $Ind_\alpha(f) = (-1)^n$, $Ind_\omega(f) = 1$. Тогда из (1.3) получаем $Ind_\sigma(f) = 0 = (-1)^{\dim W^u(\sigma)}$, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает равенство $k = m$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Для диффеоморфизма f , удовлетворяющего условиям основной теоремы, выше было доказано, что $n = 2k$, $k \geq 2$, и неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из стока ω , источника α и седла s_0 с типом (k, k) . Из леммы 1.2. следует следующее утверждение.

Л е м м а 1.5. Пусть $f : M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω , источника α и седла s_0 типа (k, k) . Тогда замыкания неустойчивого $W^u(s_0)$ и устойчивого $W^s(s_0)$ многообразий являются топологически вложенными k -мерными сферами $W^u(s_0) \cup \{\omega\}$, $W^s(s_0) \cup \{\alpha\}$ соответственно.

Положим $S_\omega^k = W^u(s_0) \cup \{\omega\}$, $S_\alpha^k = W^s(s_0) \cup \{\alpha\}$. Непосредственно из [9] (см. также [19], [16]) вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 1.6. Пусть $f : M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω , источника α и седла s_0 . Если $k \geq 3$, то S_ω^k , S_α^k суть плоские k -сферы.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $e : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вложение k -мерного многообразия (возможно, с краем) в \mathbb{R}^n . В [15] и [16] доказано, что при $n \geq 5$, $k \neq n - 2$ вложение e не имеет изолированных точек дикого вложения. Поскольку неустойчивое и устойчивое многообразия являются гладко вложенными подмногообразиями, то k -сферы S_ω^k , S_α^k могут иметь точки дикого вложения только в узлах. Если взять окрестность узла, гомеоморфную \mathbb{R}^n , то можно применить результаты из [9]. Отсюда следует, что S_ω^k , S_α^k являются локально плоскими топологически вложенными k -сферами.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках гранта РФФИ № 11-01-12056 офи-м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д.В. Исходные понятия. Элементарная теория. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы – 1 (под ред. Д. В. Аносова), том 1, 1985. С. 156–204.
2. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е. О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях. – Доклады РАН. 2001. Т. 377, № 2. С. 151–155.
3. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е. О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях. – Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 66–78.
4. Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях. – Труды МИАН. 2005. Т. 250. С. 5–53.

5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях. – Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 369–386.
6. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла. – Труды МИАН. 2010. Т. 271. С. 1–23.
7. Келдыш Л.В. Топологические вложения в евклидово пространство. – Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. Москва. «Наука». 1966.
8. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – М. «Наука». 1989.
9. Чернавский А.В. Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток. – Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 528–530.
10. Abraham R., Smale S. Nongeneracy of Ω -stability. Global Analysis. – Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 5–8.
11. Andrews J., Curtis M. Knotted 2-spheres in the 4-sphere. – Annals of Math. 1959. V. 70, no. 3. P. 565–571.
12. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . – Journal of Dyn. and Control Syst. 2000. V. 6. P. 579–602.
13. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. – Topology and Appl. 2002. V. 117. P. 335–344.
14. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds. – Topology. 2004. V. 43. P. 369–391.
15. Cantrell J. C. Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n . – Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 716–718.
16. Cantrell J., Edwards C. Almost locally flat imbeddings of manifolds. – Michigan Math. Jour. 1965. V. 12. P. 217–223.
17. Eells J., Kuiper N. Manifolds which are like projective planes. – Publ. Math. IHES. 1962. V. 14. P. 5–46.
18. Pixton D. Wild unstable manifolds. – Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
19. Stallings J. On topologically unknotted spheres. – Annals of Math. 1963. V. 77. P. 490–503.
20. Smale S. Morse inequalities for a dynamical system. – Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 43–49.
21. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, no. 1. P. 741–817. Имеется перевод: Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. С. 113–185.

On the Morse-Smale diffeomorphisms with three fixed points

© E.V. Zhuzhoma⁴, L.A. Kuprina⁵, V.S. Medvedev⁶

Abstract. We study the topological structure separatrices of Morse-Smale diffeomorphisms of n -dimensional manifold ($n \geq 4$) with non-wandering set consisting of three fixed points.

Key Words: Manifolds, knots, Smale-Vietoris diffeomorphism, saddle separatrices

⁴Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

⁵Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

⁶Senior Staff Scientist Department of differential equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

УДК 004.94

Моделирование мышечной деятельности человеческого организма с применением параллельных вычислительных технологий

© Д. С. Казакова¹

Аннотация. Разработана и реализована математическая модель мышечного сокращения, представляющая собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. На основе разработанной модели с использованием интерфейса MPI создан комплекс программ, позволяющий исследовать молекулярные механизмы мышечного сокращения.

Ключевые слова: механизм мышечного сокращения, скелетные мышцы, математическое моделирование, параллельные вычисления.

1. Введение

В настоящее время одной из самых актуальных задач в биомеханике является изучение комплекса физико-химических процессов, лежащих в основе механизма мышечного сокращения. Это связано с тем, что вся жизнедеятельность человеческого организма основана на работе мышц, которые кроме двигательной функции, отвечают за работу сердца, перемещение крови в организме, дыхание, образование звуков речи и терморегуляцию организма. Поэтому от исправной работы мышц зависит не только подвижность организма, но и функционирование всех физиологических процессов в организме человека; какие-либо нарушения в работе мышц приводят к различным патологиям, а прекращение работы мышц - вообще к летальному исходу.

При этом современный уровень техники не позволяет проследить за механизмом мышечного сокращения непосредственно в мышце, однако, его можно смоделировать, основываясь на знаниях о молекулярной конструкции саркомера и его физико-химических свойствах. Таким образом, для понимания молекулярных механизмов мышечного сокращения математическое моделирование составляет существенную часть исследований.

В настоящее время отсутствует единая математическая модель, которая могла бы описать все стадии процессов сокращения и расслабления в мышце, т.к. расчеты по такой модели требуют большого объема вычислений. Поэтому в литературе описаны только модели, представленные в предельно простом варианте [1]. Рассмотрение более сложной, более полной модели мышечного сокращения становится возможным благодаря технологии высокопроизводительных вычислений с использованием распараллеливания вычислительного процесса на многопроцессорных вычислительных системах (суперкомпьютерах).

2. Постановка задачи

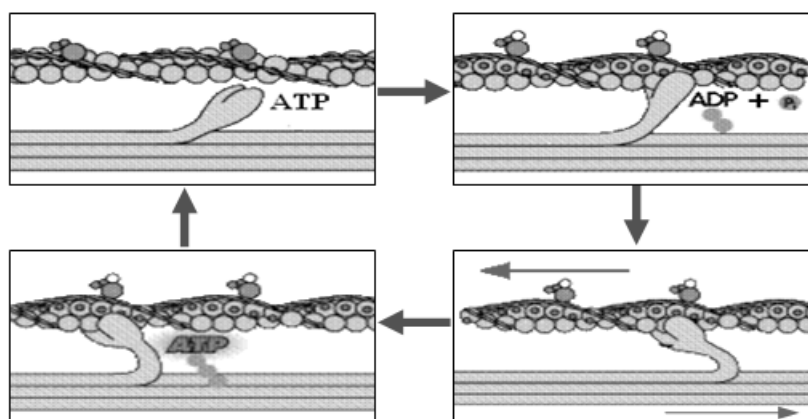
При моделировании мышечной активности организма человека объектом исследования является скелетная поперечно-полостная мышца. Сокращение этой мышцы основано на взаимодействии двух сократительных белков - актина и миозина. Энергия для этого

¹Магистрант второго года обучения кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; Kazakova_D_S@mail.ru.

взаимодействия высвобождается при расщеплении молекулы АТФ до АДФ и фосфорной кислоты [2].

Процесс сокращения мышцы (рис. 2.1) - это циклический процесс, при этом один цикл можно разделить на четыре стадии:

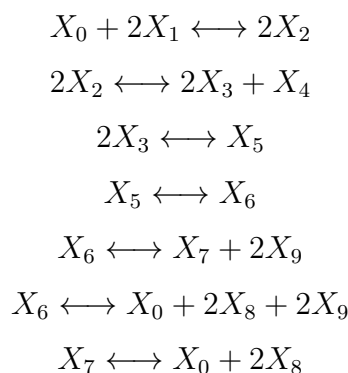
1. Свободная головка миозина связывается с АТФ.
2. Головка миозина гидролизует АТФ до АДФ и фосфора и слабо связывается со следующей субъединицей актина, фосфат отделяется, и это приводит к прочному связыванию головки миозина с актиновым филаментом. Эта реакция уже необратима.
3. Головка претерпевает конформационное изменение, производящее продвижение миозина относительно актина.
4. Отделяется АДФ, за счёт этого головка отделяется от актинового филамента. Присоединяется новая молекула АТФ.



Р и с у н о к 2.1

Механизм мышечного сокращения

Этот механизм может быть описан сложной химической реакцией [3]:



В данной реакции принимают участие 10 веществ:

- X_0 - актинмиозиновый комплекс,
- X_1 - АТФ,
- X_2 - миозин + АТФ,
- X_3 - миозин + АДФ + фосфор,
- X_4 - ион водорода,

- X_5 – актинмиозиновый комплекс + АДФ + фосфор,
- X_6 – энергетически активная конформация миозина,
- X_7 – актинмиозиновый комплекс + АДФ,
- X_8 – АДФ,
- X_9 – фосфор.

Приведенная химическая реакция описывает следующие процессы:

- (1) – присоединение АТФ к «головкам» миозина с образованием АТФ-миозинового комплекса;
- (2) – гидролиз АТФ-миозинового комплекса с образованием АТФ-миозин-фосфорного комплекса и ионов Н, уходящих затем в водную среду;
- (3) – продвижение головок миозина к актину за счет образования из АТФ-миозин-фосфорного комплекса АТФ-актинмиозин-фосфорного комплекса;
- (4) – образование энергетически активной конформации актинмиозина;
- (5) – изменение конформации легкой части актинмиозина и развитие тянущего усилия «головкой» миозина;
- (6) – распад энергетически активной конформации актинмиозина с мгновенным выделением энергии;
- (7) – распад АДФ-актинмиозинового комплекса с выделением энергии.

Для этой реакции на основе закона действующих масс построена математическая модель – задача Коши для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_0/dt = -k_1x_0(x_1)^2 + \bar{k}_1(x_2)^2 + k_6x_6 - \bar{k}_6x_0(x_8)^2(x_9)^2 + k_7x_7 - \bar{k}_7x_0(x_8)^2; \\ dx_1/dt = -2k_1x_0(x_1)^2 + 2\bar{k}_1(x_2)^2; \\ dx_2/dt = 2k_1x_0(x_1)^2 - 2\bar{k}_1(x_2)^2 - 2k_2(x_2)^2 + 2\bar{k}_2(x_3)^2x_4; \\ dx_3/dt = 2k_2(x_2)^2 - 2\bar{k}_2(x_3)^2x_4 - 2k_3(x_3)^2 + 2\bar{k}_3x_5; \\ dx_4/dt = k_2(x_2)^2 - \bar{k}_2(x_3)^2x_4; \\ dx_5/dt = k_3(x_3)^2 - \bar{k}_3x_5 - k_4x_5 + \bar{k}_4x_6; \\ dx_6/dt = k_4x_5 - \bar{k}_4x_6 - k_5x_6 + \bar{k}_5x_7(x_9)^2 - k_6x_6 + \bar{k}_6x_0(x_8)^2(x_9)^2; \\ dx_7/dt = k_5x_6 - \bar{k}_5x_7(x_9)^2 - k_7x_7 + \bar{k}_7x_0(x_8)^2; \\ dx_8/dt = 2k_6x_6 - 2\bar{k}_6x_0(x_8)^2(x_9)^2 + 2k_7x_7 - 2\bar{k}_7x_0(x_8)^2; \\ dx_9/dt = 2k_5x_6 - 2\bar{k}_5x_7(x_9)^2 + 2k_6x_6 - 2\bar{k}_6x_0(x_8)^2(x_9)^2. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

с начальными условиями:

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (2.2)$$

В системе (2.1)-(2.2) x_i , $i = 1, \dots, 9$ – концентрации веществ, участвующих в акте мышечного сокращения, k_i и \bar{k}_i , $i = 1, \dots, 7$ – соответственно, кинетические константы скоростей прямой и обратной стадий, t – время протекания реакции; t_0 – начальное время.

3. Модель распараллеливания вычислительного процесса и применяемые методы

Исследование механизма мышечного сокращения включает рассмотрение как прямой задачи, то есть решения системы дифференциальных уравнений с заданными значениями

кинетических параметров, так и обратной – восстановление параметров модели по имеющемуся экспериментальному материалу. Решение обратной кинетической задачи сводится к рассмотрению серии прямых задач и минимизации критерия отклонения расчета от эксперимента [4]:

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_{ij}^{exp}} |x_{ij}^{calc} - x_{ij}^{exp}| (x_{ij}^{exp} > 0). \quad (3.1)$$

где x_{ij}^{calc} – расчетные значения; x_{ij}^{exp} – экспериментальные данные; N – количество точек эксперимента; n – количество веществ, участвующих в реакции.

Разработана модель распараллеливания вычислительного процесса, позволяющая эффективно решать обратные кинетические задачи большого вычислительного объема. Для решения рассматриваемой задачи наиболее эффективным оказался параллельный вариант генетического алгоритма (рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Генетический алгоритм

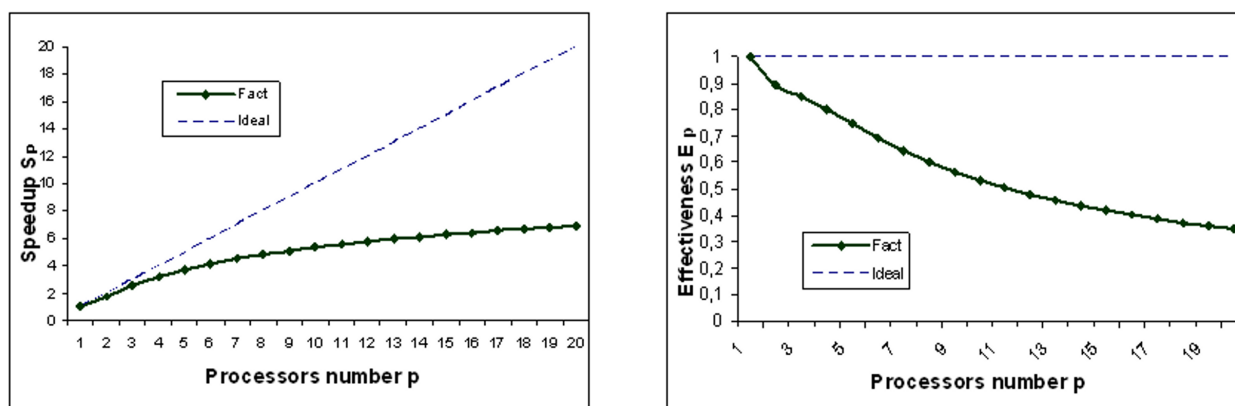
Распараллеливание вычислительного процесса производится на стадии начального заполнения, когда заданные псевдослучайно точки в пространстве параметров распределяются по процессорам МВС, а также на стадии формирования нового поколения, когда выбранные точки опять распределяются между процессорами, каждый из которых формирует новое поколение точек вокруг доставшихся ему. Время автономной работы процессоров значительно превышает время межпроцессорных взаимодействий на этапе селекции, что обуславливает эффективность данного алгоритма.

4. Результаты вычислительного эксперимента и основные выводы

Произведено тестирование разработанной программы на модельных данных, рассчитанных при $k_1 = 10$, $k_2 = 0,1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 5$, $k_5 = 1$, $k_6 = 1$, $k_7 = 1$, $\bar{k}_1 = 1$, $\bar{k}_2 = 1$, $\bar{k}_3 = 1$, $\bar{k}_4 = 0,5$, $\bar{k}_5 = 1$, $\bar{k}_6 = 1$, $\bar{k}_7 = 0,5$ (значения кинетических констант взяты из физико-химических соображений). Получены следующие результаты:

Кол-во проц. МВС	Погрешность решения	Время, сек
1	0,025	316
2	0,020	177
3	0,020	124
4	0,019	98
5	0,019	85
6	0,018	76
7	0,018	70
8	0,018	66
9	0,017	62
10	0,017	59
11	0,017	57
12	0,016	55
13	0,016	53
14	0,016	52
15	0,016	50
16	0,015	49
17	0,015	48
18	0,015	47
19	0,015	46
20	0,015	45

На основе анализа времени расчёта при использовании разного числа процессоров МВС проведена оценка ускорения и эффективности параллельной программы (рис. 4.1), которая показала, что наиболее эффективным на данном этапе является использование 8-9 процессоров МВС.



Р и с у н о к 4.1

а) Ускорение параллельной программы

б) Эффективность параллельной программы

Планируется расширить рассматриваемую модель с целью установления зависимости мышечной активности организма человека от его состояния (температуры тела и давления, содержания в организме воды, минералов и питательных веществ и т.п.) и внешних факторов (температуры окружающей среды, концентрации в воздухе кислорода, прикладываемой к мышцам нагрузки и т.п.). Разработанный программный продукт планируется внедрить в работу как медицинских учреждений с целью нормализации

состояния организма человека на основе улучшения его мышечной активности, так и спортивно-оздоровительных организаций с целью выработки комплекса мероприятий по коррекции мышечного тонуса спортсменов в зависимости от требований вида спорта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория и практика применения дидактики развивающего обучения в подготовке специалистов по физическому воспитанию: Труды сотрудников проблемной научно-исследовательской лаборатории. — М: Физкультура, образование и наука, 1996. — 106с.
2. Волков Н.И., Несен Э.Н., Осипенко А.А., Корсун С.Н. Биохимия мышечной деятельности. — Киев, «Олимпийская литература», 2000. — 503с.
3. Быстрой Г.П., Охотников С.А. Термодинамика нелинейных биологических процессов. Переход к хаосу. — Екатеринбург: Изд-во Урал ун-та, 2008, — 154 с.
4. Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. — М.: Знание. — 1977. — 64 с.

Modeling of Human Organism Muscle Activity with the Use of Parallel Computational Technologies

© D. S. Kazakova²

Abstract. A mathematical model of a muscle contraction has been developed and implemented. It represents a system of ordinary nonlinear differential equations. On the base of developed model software for investigation of molecular mechanisms of muscle contraction has been developed with the use of interface MPI.

Key Words: mechanism of muscle contraction, skeletal muscles, mathematical modeling, parallel computations.

²Undergraduate of Mathematical modeling chair, Bashkir State University, Ufa; Kazakova_D_S@mail.ru.

УДК 517.956.2

Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодическим возмущением

© М. Л. Коломиец¹, А. Н. Сахаров²

Аннотация. Дается обзор результатов о топологической структуре минимальных множеств динамических систем, являющихся одномерными расширениями квазипериодических потоков на m -мерном торе. Устанавливается, что в таких системах минимальные множества либо торы, либо связные, но не локально связные множества. Последние могут играть роль странных нехаотических аттракторов.

Ключевые слова: Аттракторы, минимальные множества, проективные потоки, топологическая эквивалентность

1. Введение

Одно из наиболее обсуждаемых понятий в теории динамических систем является понятие странного аттрактора. *Аттрактор* – компактное инвариантное подмножество фазового пространства, которое асимптотически устойчиво, т.е. все траектории из некоторой его окрестности стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Множество точек, асимптотических к аттрактору, называется его *бассейном притяжения*. Аттракторы системы при обращении времени $t \rightarrow -t$ называются *репеллерами*. Как правило, предполагается, что аттрактор – транзитивное множество динамической системы. Приведенное определение является, очевидно, чисто топологическим.

Термин «странный», введенный Рюэлем и Такенсом [1], используется для описания класса аттракторов, движение на которых хаотично, то есть имеет экспоненциальную чувствительность к начальным условиям. Большинство известных странных аттракторов имеют фрактальную геометрию и описываются спектром сингулярных (по отношению к естественной лебеговой мере фазового пространства) инвариантных мер. Обнаруженные, главным образом, в исследованиях физического характера, странные аттракторы не являлись грубыми (гиперболическими инвариантными множествами). К моменту выхода работы [1] уже было известно, что гиперболические системы (системы Аносова, системы, удовлетворяющие аксиоме А) не плотны в пространстве всех динамических систем. Стало ясно, что необходимо ослабить условия гиперболичности и расширить понятие аттрактора. Появились понятия частичной и неравномерной гиперболичности и аттрактора Милнора [2].

Все эти понятия в полной мере применимы к построенным в середине 80-х годов примерам динамических систем (см., например, [3]) с аттракторами, которые явно имеют фрактальную структуру, но не являются хаотическими. Наибольший показатель Ляпунова, измеряющий скорость расхождения траекторий с близкими начальными значениями, либо равен нулю, либо отрицателен. С другой стороны, благодаря фрактальной структуре аттрактора, динамика на нем похожа на хаотическую. Эти объекты – *странные нехаотические аттракторы* (СНА), находятся последние несколько лет в центре внимания как

¹Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

²Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

теоретических, так и экспериментальных исследований. Целью данной заметки является описание простейшего класса динамических систем, в которых могут возникать СНА.

Так как существует несколько формальных определений СНА (см. [4]), то будем считать синонимом СНА аттрактор Милнора.

Пусть X – многообразие с непрерывным потоком на нем, μ_0 – мера, эквивалентная мере Лебега на X . *Странный нехаотический аттрактор* \mathcal{A} – замкнутое множество фазового пространства такое, что

1. бассейн притяжения $B(\mathcal{A}) := \{x : \omega(x) \subset \mathcal{A}\}$ имеет положительную меру Лебега и не существует замкнутого подмножества $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ такого, что мера Лебега $\mu_0(B(\mathcal{A}'))$ положительна;

2. \mathcal{A} не является ни конечным множеством точек, ни кусочно-гладким многообразием;

3. \mathcal{A} – нехаотический: множество точек из бассейна притяжения, у которых показатели Ляпунова положительны, имеет нулевую меру Лебега.

В подавляющем большинстве работ, посвященным СНА, рассматриваются неавтономные динамические системы с квазипериодической зависимостью от времени. Такие системы можно рассматривать как автономные расширения квазипериодического потока на торе \mathbb{T}^m , $m \geq 1$. Ограничимся рассмотрением простейшего случая – потоков на произведении $\mathbb{T}^m \times S^1$ (S^1 -расширений квазипериодических потоков).

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – угловые координаты на торе \mathbb{T}^m , ω – вектор, компоненты которого линейно независимы над полем \mathbb{Q} . Определим поток f^t на $\mathbb{T}^m \times S^1$ равенством $f^t(\varphi, \theta) = (\varphi_t, f_\varphi^t(\theta))$, где $\varphi_t = \varphi + \omega t \pmod{2\pi}$ – квазипериодический поток на базе, $\theta \in S^1$, а f_φ^t – гомеоморфизм слоя $\{\varphi\} \times S^1$ в слой $\{\varphi_t\} \times S^1$ для всех t и φ . Будем считать, что этот поток порождается векторным полем

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta). \quad (1.1)$$

Стандарная программа исследования аттракторов в таких потоках включает решение двух задач:

(1) топологическая классификация аттракторов;

(2) строгое обоснование типичных бифуркаций, приводящих к рождению аттракторов.

В литературе описано несколько сценариев рождения СНА в системах с квазипериодическим возмущением, обоснованных численными методами. Поэтому иногда “странность” наблюдаемых объектов иногда объясняется ошибками эксперимента [5].

Ниже описывается ряд результатов, связанных с решением задачи (1). Непосредственно с этой задачей связана и задача топологической классификации потоков, порождаемых (1.1). Так как поток на базе фиксирован, то для классификации используется отношение *послойной топологической эквивалентности*, т.е. два таких потока $(\varphi_t, f_\varphi^t(\theta))$ и $(\varphi_t, g_\varphi^t(\theta))$ топологически эквивалентны, если существует непрерывное семейство гомеоморфизмов $h_\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ такое, что $h_{\varphi_t} \circ f_\varphi^t = g_\varphi^t \circ h_\varphi$.

Кандидатами в аттракторы являются связные замкнутые инвариантные множества потока f^t . Пусть \mathcal{A} – такое множество. Тогда сужение g^t потока f^t на \mathcal{A} является расширением квазипериодического потока на базе, т.е. существует непрерывное отображение $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ g^t = \varphi_t \circ p$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (гомоморфизм потоков). Ясно, что $p = \pi|_{\mathcal{A}}$, где $\pi : \mathbb{T}^m \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^m$ – естественная проекция. Из минимальности потока на базе следует, что \mathcal{A} имеет непустое пересечение с любым слоем: $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A} \cap (\{\varphi\} \times S^1) \neq \emptyset$. Поэтому структура \mathcal{A} определяется топологией слоев \mathcal{A}_φ .

Поток f^t может иметь как хаотические, так и нехаотические странные аттракторы. Очевидно, любые аттракторы содержатся в связных компонентах цепно-рекуррентного³

³Цепно-рекуррентное множество потока f^t на компактном метрическом пространстве X строит-

множества \mathcal{R} потока f^t . В цепно-рекуррентном множестве естественно выделить инвариантные замкнутые множества, обладающие полноценной рекуррентностью. В данном случае – это минимальные множества.

Пусть f^t и g^t – потоки на компактных метрических пространствах X и Y соответственно, $p : Y \rightarrow X$ – гомоморфизм потоков. Поток g^t называется *почти однолистным расширением* потока f^t , если множество $D = \{x \in X : \text{слой } p^{-1}(x) \text{ состоит из одной точки}\}$ является множеством второй категории в X .

Если поток f^t – почти периодический, то почти однолистное расширение называется *почти автоморфным*. Точки $x \in D$ в этом случае называются почти автоморфными точками. Минимальное множество почти автоморфного расширения называется *почти автоморфным минимальным множеством*.

Напомним, что траектории почти периодического потока – равномерно почти периодические функции $f^t(x)$. Замыкание почти периодической траектории $X = \overline{\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}}$ является пространством компактной абелевой группы: это либо m -мерный тор, либо m -мерный соленоид⁴.

Пусть g^t – почти автоморфное расширение почти периодического потока f^t . Траектории точек $y, y' \in Y$ называются *дистальными*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varrho(g^t(y), g^t(y')) > \varepsilon$ для любого t (ϱ – метрика на Y). В противном случае эти траектории называются *проксимальными*. Определим отношение проксимальности $\mathcal{P}(Y)$, индуцируемое потоком g^t : точки $y \sim y'$ тогда и только тогда, когда их траектории проксимальны. Согласно структурной теореме теории почти автоморфных потоков ([8], § 3) множество дистальных точек потока g^t – это прообраз множества почти автоморфных точек при гомоморфизме p , отношение проксимальности $\mathcal{P}(X)$ является отношением эквивалентности и $X = Y/\mathcal{P}(Y)$.

Поток на торе \mathbb{T}^{m+1} , определяемый (1.1), обладает топологическим инвариантом – *числом вращения слоя*

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \bar{\theta}(t, \varphi_0, \theta_0),^5$$

которое не зависит от $(\varphi_0, \theta_0) \in \mathbb{T}^{m+1}$ [9], [10]. Вектор (ω, ρ) называется *вектором вращения* потока f^t . Число вращения слоя позволяет ввести следующую характеристику рассматриваемых потоков. Поток называется *регулярным*, если существует траектория $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ и число $c > 0$ такие, что

$$|\bar{\theta}(t, \varphi_0, \theta_0) - \theta_0 - \rho t| \leq c \quad (1.2)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. В противном случае он называется *нерегулярным*⁶. Выполнение неравенства (1.2) для одной траектории влечет его выполнение для всех траекторий потока.

ся следующим образом. Пусть $x, y \in X$, $\varepsilon, T > 0$, тогда (ε, T) -цепь от x к y – это множество точек $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_r = y\}$ и последовательность моментов времени $t_0, t_1, \dots, t_{r-1} > T$ такие, что $\varrho(x_k, f^{t_k}(x_{k+1})) < \varepsilon$ для $k = 0, 1, \dots, r-1$ (ϱ – метрика на X). Точка $x \in X$ называется *цепно-рекуррентной*, если для любых $\varepsilon, T > 0$ существует (ε, T) -цепь от x до x . Множество \mathcal{R} всех цепно-рекуррентных точек потока называется цепно-рекуррентным множеством. \mathcal{R} – замкнутое инвариантное множество, содержащее неблуждающее множество потока [6].

⁴Соленоидом \mathcal{S} называется обратный предел $\varprojlim (\mathbb{T}^m, \alpha_k)$ последовательности групповых гомоморфизмов $\alpha_n : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$. На универсальном накрытии тора каждому такому гомоморфизму соответствует линейное преобразование $A_n \in \text{GL}(m, \mathbb{Z})$. Гомоморфизм α_n является q_n -листным накрытием \mathbb{T}^m , где $q_n = \det A_n$. Почти периодический поток – линейный поток на соленоиде [7].

⁵Здесь $\bar{\theta}$ – поднятие траектории на универсальное накрытие тора.

⁶Простой пример нерегулярного потока – поток, порождаемый векторным полем $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\theta} = v(\varphi)$, для которого интеграл $I(t, \varphi) = \int_0^t (v(\varphi + \omega s) - \rho) ds$, где $\rho = \int_{\mathbb{T}^m} v(\varphi) d\varphi$, неограничен.

Если $R_{(\omega, \rho)}^t$ – линейный поток на торе \mathbb{T}^{m+1} , определяемый вектором вращения, то условие (1.2) означает, что траектория на универсальном накрытии имеет конечное отклонение от прямой $(\omega t + \varphi_0, \rho t + \theta_0)$, являющейся поднятием на универсальное накрытие траектории линейного потока $R_{(\omega, \rho)}^t$.

2. Потоки Данжуа

Простейшим примером почти автоморфного минимального множества является континуум Данжуа – минимальное множество потока Данжуа на торе \mathbb{T}^2 . Этот пример замечателен тем, что допускает прозрачное геометрическое описание.

При $m = 1$ система (1.1) определяет неособый поток на торе \mathbb{T}^2 – S^1 -расширение периодического потока (детальное описание таких потоков и подробный список первоисточников имеется в обзоре [11]).

Отметим, что такой поток всегда регулярен. Предположим, что число вращения слоя ρ (называемое в этом случае числом вращения А. Пуанкаре) иррационально. Тогда поток имеет единственное минимальное множество, которое либо совпадает с тором \mathbb{T}^2 (поток называется *транзитивным*), либо является континуумом Данжуа \mathcal{D}_ρ (поток называется *поток Данжуа*). По теореме Пуанкаре транзитивный поток топологически сопряжен линейному потоку $R_{(1, \rho)}^t$, в случае потока Данжуа сопряженность заменяется полусопряженностью (гоморфизмом потоков).

Локально все континуумы Данжуа одинаковы: они являются локально тривиальными расслоениями с базой S^1 и канторовским множеством \mathcal{C} в качестве слоя. Однако, существует несчетное множество негомеоморфных континуумов Данжуа: два множества \mathcal{D}_ρ и $\mathcal{D}_{\rho'}$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует линейное преобразование $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ такое, что $\rho' = \frac{a\rho + b}{c\rho + d}$, т.е. это преобразование переводит прямую в \mathbb{R}^2 с наклоном ρ в прямую с наклоном ρ' [12].

Т е о р е м а 2.1. *Поток Данжуа является почти автоморфным расширением квазипериодического потока $R_{(1, \rho)}^t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любой поток Данжуа может быть получен из транзитивного потока операцией раздутия⁷ некоторого множества траекторий. Обратная операция называется операцией сдутия. Более точно: существует непрерывное гомотопное тождественное отображение $p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ (отображение сдутия) со свойствами:

- (1) $p \circ f^t = R_{(1, \rho)}^t \circ p$;
- (2) $p(\mathcal{D}_\rho) = \mathbb{T}^2$;
- (3) пусть Δ – компонента множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$, тогда
 - (a) Δ односвязна;
 - (b) граница Δ состоит в точности из двух траекторий $O_1, O_2 \subset \mathcal{D}_\rho$;
 - (c) $p(\Delta \cup O_1 \cup O_2)$ является одной траекторией потока $R_{(1, \rho)}^t$.

⁷Неформально эту операцию можно описать следующим образом: делается разрез вдоль траектории на поверхности тора и к его краям приклеивается (бесконечная) полоса конечной площади. Так как полоса имеет конечную площадь, то получаем поверхность, гомеоморфную тору. В полосе поток доопределяется заданием слоения бесконечных кривых. Очевидно, на вклеенной полосе траектории полученного потока будут обладать свойством проксимальности.

Траектории, принадлежащие компоненте связности Δ , обладают свойством проксимальности по построению. Так как число компонент связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ не более чем счетно, то образ множества дистальных траекторий потока Данжуа – множество 2-ой категории в \mathbb{T}^2 . Поэтому сужение $f^t|_{\mathcal{D}_\rho}$ является почти автоморфным расширением квазипериодического потока $R_{(1,\rho)}^t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Пусть $\Delta(f^t) = \bigcup_k \Delta_k$, где Δ_k – компонента связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ потока Данжуа f^t . Два множества $R, S \subset \mathbb{T}^2$ называются *соизмеримыми*, если их прообразы \bar{T}, \bar{S} на универсальном накрытии аффинно эквивалентны: $S = L(R)$, где $Lx = Ax + b$, $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Два потока Данжуа f_1^t и f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества $\Delta(f_1^t)$ и $\Delta(f_2^t)$ соизмеримы. Таким образом, полным топологическим инвариантом потока Данжуа является пара чисел (ρ, σ) , где σ – кардинальное число множества компонент связности $\Delta(f^t)$.

Множество \mathcal{D}_ρ является единственным аттрактором потока Данжуа, цепно-рекуррентное множество которого – весь тор. Этот аттрактор – негрубый: в любой ε -окрестности потока Данжуа найдется транзитивный поток, имеющий то же самое число вращения слоя ρ . Чтобы это показать, заметим, что непрерывный поток Данжуа топологически эквивалентен C^1 -гладкому потоку. Известно, что в любой достаточно малой C^1 -окрестности гладкого гомеоморфизма окружности можно найти транзитивный гомеоморфизм с тем же самым числом вращения ([13], теорема 12). Теперь наше утверждение доказывается применением конструкции надстройки над найденным транзитивным гомеоморфизмом.

Континуум Данжуа допускает описание с помощью обратного предела последовательности вложений [14]. Пусть $d_\rho : S^1 \rightarrow S^1$ – гомеоморфизм Данжуа с числом вращения ρ , ℓ – прямая $y = \rho x \subset \mathbb{R}^2$, $Q_r \subset \ell$ – открытый интервал радиуса $r > 0$ с центром в начале координат. Пусть $\bar{\ell}$ и \bar{Q}_r обозначают их проекции на \mathbb{T}^2 . Так как для любых компонент $\delta, \delta' \subset S^1 \setminus \mathcal{C}_\rho$ существует n такое, что $d_\rho^n(\delta) = \delta'$, то $\Delta \equiv \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ – открытый топологический диск. Рассмотрим последовательности $0 < r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$, $r_n \rightarrow \infty$, и $\Delta_n = \Delta \cap p^{-1}(\bar{Q}_{r_n})$ (p – отображение сдвигания). Тогда Δ_n – открытый топологический диск, $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ и $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \Delta$. Таким образом, $\mathcal{D}_\rho = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}^2 \setminus \Delta_n)$ является пересечением вложенных компактных множеств, так что \mathcal{D}_ρ гомеоморфно обратному пределу $\lim_{\leftarrow} i_n$, где $i_n : \mathbb{T}^2 \setminus \Delta_n \rightarrow \mathbb{T}^2 \setminus \Delta_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, – вложения.

3. S^1 -расширения квазипериодических потоков

Для S^1 -расширений квазипериодических потоков существует классификация, похожая на классификации Пуанкаре потоков на двумерном торе. Она основана на топологических свойствах минимальных множеств таких потоков.

Пусть $\mathcal{A} \neq \mathbb{T}^{m+1}$ – минимальное множество потока f^t , $\mathcal{A}_\varphi = p^{-1}(\varphi)$ – слой над точкой φ . Так как множество \mathcal{A}_φ замкнуто, то $S^1 \setminus \mathcal{A}_\varphi = \bigcup_{k=1}^N B_k$, где $1 \leq N \leq +\infty$, B_k – открытая дуга окружности S^1 (дополнительная дуга). Пусть α_k, β_k – концевые точки дуги B_k . Имеет место очевидное утверждение.

Л е м м а 3.1. *Траектории точек $(\varphi, \alpha_k), (\varphi, \beta_k) \in \{\varphi\} \times S^1$ послойно проксимальны.*

Определим отображение $u : \mathbb{T}^m \rightarrow 2^{\mathbb{T}^{m+1}}$ формулой⁸ $u(\varphi) = \mathcal{A}_\varphi$. Это отображение полунепрерывно сверху, множество точек его непрерывности является множеством 2-ой категории в \mathbb{T}^m .

Т е о р е м а 3.1. *Если $\mathcal{A} \neq \mathbb{T}^{m+1}$ – минимальное множество регулярного потока, порождаемого (1.1), то оно является почти автоморфным расширением квазипериодического потока на торе \mathbb{T}^m .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что существует, по крайней мере, одна точка φ_0 такая, что $\text{card } \mathcal{A}_{\varphi_0} = 1$. Допустим противное. Определим функции

$$u^+(\varphi) = \sup_{\theta} \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}, \quad u^-(\varphi) = \inf_{\theta} \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}.$$

Эти функции полунепрерывны сверху и снизу, соответственно, и удовлетворяют условию инвариантности $u^\pm(\varphi_t) = \tilde{F}_\varphi^t(u^\pm(\varphi))$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $u^-(\varphi) < u^+(\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Пусть U_-, U_+ – точечные множества соответствующие графикам функций $u^-(\varphi)$, $u^+(\varphi)$. Тогда множества \bar{U}_-, \bar{U}_+ компактны, инвариантны и $\bar{U}_- \cap \bar{U}_+ = \emptyset$, что противоречит минимальности \mathcal{A} . Следовательно, существует точка φ_0 такая, что $u^+(\varphi_0) = u^-(\varphi_0)$.

Слои \mathcal{A}_φ содержатся в некотором компактном интервале I . Рассмотрим отображение $u : \mathbb{T}^m \rightarrow 2^I : u(\varphi) = \mathcal{A}_\varphi$. Как отмечалось выше, множество точек непрерывности является множеством 2-ой категории. Пусть φ_0 – точка непрерывности u . Если $u(\varphi_0)$ содержит более одной точки, то существует окрестность $B(\varphi_0) \subset \mathbb{T}^m$ и $\delta > 0$ такие, что из соотношения $\varphi \in B(\varphi_0)$ следует $\text{diam } u(\varphi) \geq \delta > 0$. Найдем $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\mathbb{T}^m = B(\varphi_0) \cup B(\varphi_{t_1}) \cup \dots \cup B(\varphi_{t_r})$. Из инвариантности \mathcal{A} получаем существование числа $\delta' > 0$ такого, что

$$\text{diam } u(\varphi) \geq \delta' > 0$$

для любого $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Полученное противоречие показывает, что $\text{card } \mathcal{A}_\varphi = 1$ для любой точки непрерывности u .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 3.1. *Типичный слой \mathcal{A}_φ – замкнутое множество одного из следующих трех типов: \mathcal{A}_φ – конечное множество точек S^1 , $\mathcal{A}_\varphi = S^1$, $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{C}$, где \mathcal{C} – канторово множество.*

Аналог классификации А. Пуанкаре для S^1 -расширений квазипериодических потоков содержится в следующем утверждении (Т. Джагер, Я. Старк, [15]⁹).

Т е о р е м а 3.2. *Пусть поток f^t с вектором вращения (ω, ρ) регулярен, тогда*
 (1) *если вектор вращения нерезонансный, то поток f^t полусопряжен линейному потоку $R_{(\omega, \rho)}^t$, причем единственное минимальное множество \mathcal{A} – минимальное множество почти автоморфного расширения потока $R_{(\omega, \rho)}^t$.*

(2) *если вектор вращения резонансный, то любое минимальное множество потока является почти автоморфным расширением потока φ_t .*

Если поток f^t нерегулярен, то он транзитивен и имеет единственное минимальное множество.

⁸Если X – метрическое пространство с метрикой d , то 2^X – пространство всех компактных подмножеств X с метрикой Хаусдорфа d_H на 2^X , которая определяется так: если A, B компактные подмножества X , то $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}$.

⁹В работе Т. Джагера и Я. Старка рассматривался не поток, а гомеоморфизм, являющийся расширением иррационального поворота окружности. Перенос этого результата на потоки проделан в [16], [17].

Пусть F^t обозначает поднятие потока f^t на накрытие $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$. Преобразование координат (не гомотопное тождественному) $(\varphi, \theta) \rightarrow (\varphi, \langle k | \varphi \rangle + n\theta + u(\varphi))$ преобразует любое компактное инвариантное множество потока f^t в гомотопное нулевому сечению инвариантное множество потока на косом произведении с базой, являющейся n -листным накрытием тора \mathbb{T}^m . Это позволяет свести изучение структуры инвариантных множеств потока f^t к изучению структуры инвариантных компактных множеств потока F^t .

Определим теперь *показатель Ляпунова* траектории системы (1.1) равенством

$$\lambda(\varphi, \theta) = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t v'_\theta(\varphi + \omega s, f_\varphi^s(\theta)) ds.$$

Спектром показателей Ляпунова инвариантного множества \mathcal{A} называется объединение $\Lambda(\mathcal{A}) = \bigcup_{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}} \lambda(\varphi, \theta)$. Если выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{A})} \{\lambda\} = \alpha < 0 \quad \left(\inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{A})} \{\lambda\} = \alpha > 0 \right), \quad (3.1)$$

то инвариантное множество \mathcal{A} называется *гиперболическим*.

Покажем, что в качестве гиперболических инвариантных множеств потока f^t могут быть только инвариантные торы.

Т е о р е м а 3.3. *Если \mathcal{A} – компактное гиперболическое инвариантное множество потока F^t , то \mathcal{A} – m -мерный тор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что $\rho = 0$. Покажем, что система (1.1) имеет решение $\theta = u(\varphi)$, где $u(\varphi)$ – функция на торе \mathbb{T}^m .

Определим функции

$$u_+(\varphi) = \sup_{\theta} \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}, \quad u_-(\varphi) = \inf_{\theta} \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}.$$

Эти функции полунепрерывны сверху и снизу, соответственно, и удовлетворяют условию инвариантности $u_\pm(\varphi_t) = F_\varphi^t(u_\pm(\varphi))$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|\theta - u_-(\varphi)| < \delta$ следует неравенство

$$|F_\varphi^t(\theta) - u_-(\varphi_t)| < \varepsilon$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t) = F_\varphi^t(\theta) - u_-(\varphi_t)$. Функция $\xi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} = v'_\theta(\varphi_t, u_-(\varphi_t))\xi + r(t, \varphi_t, u_-(\varphi_t), \xi), \quad (3.2)$$

где $r(t, \varphi_t, u_-(\varphi_t), \xi) = O(|\xi|^2)$. Так как нулевое решение линейного уравнения

$$\dot{\xi} = v'_\theta(\varphi_t, u_-(\varphi_t))\xi$$

экспоненциально асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), то нулевое решение нелинейного уравнения также асимптотически устойчиво. Отсюда следует существование требуемого $\delta(\varepsilon)$.

Пусть $(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}$ и $\tilde{\varphi}$ – точка непрерывности $u_-(\varphi)$. Пусть $t_k \rightarrow \infty$ – последовательность такая, что $\tilde{\varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{-t_k}$. Рассмотрим последовательности $\{(\varphi_{-t_k}, F_\varphi^{-t_k}(\theta))\}$ и $\{(\varphi_{-t_k}, F_\varphi^{-t_k}(u_-(\varphi)))\}$, тогда существует подпоследовательность $t_j \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{(\varphi_{-t_j}, F_\varphi^{-t_j}(\theta))\} = \lim_{j \rightarrow \infty} \{(\varphi_{-t_j}, F_\varphi^{-t_j}(u_-(\varphi)))\} = (\tilde{\varphi}, u_-(\tilde{\varphi})),$$

так как $\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}} = \{u_-(\tilde{\varphi})\}$. Отсюда следует, что можно найти такое $s \in \mathbb{R}_-$, что $|F_{\tilde{\varphi}}^{-s}(\theta) - F_{\tilde{\varphi}}^{-s}(u_-(\tilde{\varphi}))| < \delta$. Сделав сдвиг по траекториям потока на время s , получаем $|\theta - u_-(\tilde{\varphi})| < \varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности ε , $\mathcal{A}_{\varphi} = \{u_-(\varphi)\}$, так что $u_-(\varphi)$ непрерывна в точке φ .

Доказательство закончено.

Отличительное свойство нетривиальных минимальных множеств описывается в следующем утверждении (для регулярных систем доказательство имеется в [25], утверждение 3.11, для нерегулярных – в [17], теорема 8.5).

Теорема 3.4. *Если минимальное множество не является тором, то оно связное, но не локально связное множество.*

Задача о существовании и числе гиперболических инвариантных торов для системы (1.1) является открытой проблемой. По этой причине мы сузим класс изучаемых систем.

4. Проективные потоки, индуцируемые двумерными линейными расширениями

Важным примером S^1 -расширений являются проективные потоки, индуцированные двумерными линейными расширениями квазипериодических потоков на торе. Будем считать, что линейное расширение задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) - c(\varphi) \\ b(\varphi) + c(\varphi) & -a(\varphi) \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

Проективный поток, индуцированный этим линейным расширением, порождается векторным полем на $\mathbb{T}^m \times S^1$:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta) = 2c(\varphi) + 2b(\varphi) \cos \theta - 2a(\varphi) \sin \theta. \quad (4.2)$$

Цепно-рекуррентное множество \mathcal{R} такого проективного потока имеет не более двух связных компонент (Дж. Селгрейд, [18]), которые являются инвариантными подрасслоениями $\mathbb{T}^m \times S^1$ и образуют наилучшее разложение Морса¹⁰. Разложению Морса соответствует разложение в инвариантную сумму Уитни пространства $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^2$. В данном случае это разложение либо тривиально, либо сумма одномерных расслоений $W^s \oplus W^u$.

Спектр показателей Ляпунова Λ , соответствующий разложению Морса (и называемый спектром Ляпунова-Морса), определяется также формулой (3.1). Заметим, что спектр Ляпунова-Морса проективного потока (т.е. систем в вариациях для траекторий потока) с

¹⁰Пусть $\omega(x)$, $\alpha(x)$ – множества предельных точек при $t \rightarrow \pm\infty$ траектории потока f^t на компактном пространстве X , начинающейся в точке $x \in X$. *Разложение Морса* для потока g^t – конечный набор $\{M_1, \dots, M_k\}$ непустых, дизъюнктивных, изолированных инвариантных множеств, удовлетворяющих условиям:

1. $\alpha(x), \omega(x) \subset \bigcup_{k=1}^r M_k$ для любого $x \in X$;
2. если $M_{k_0}, M_{k_1}, \dots, M_{k_m}$ – различные множества из указанного и точки $x_1, \dots, x_m \in X \setminus \bigcup_{i=1}^m M_i$ таковы, что $\alpha(x_i) \subset M_{k_{i-1}}$, $\omega(x_i) \subset M_{k_i}$, то $M_{k_0} \neq M_{k_m}$.

Элементы разложения Морса называются *множествами Морса*. Разложение Морса $\{M_1, \dots, M_k\}$ *лучше* $\{M'_1, \dots, M'_n\}$, если для любого $1 \leq j \leq k$ существует $1 \leq l \leq n$ такое, что $M_j \subseteq M'_l$. Если существует наилучшее разложение Морса, то каждый его элемент является максимальным цепно-рекуррентным множеством (связной компонентой цепно-рекуррентного множества).

точностью до постоянного множителя совпадает со спектром линейного расширения, что позволяет разделить пространство проективных потоков на четыре класса. Итак, поток f^t , порождаемый системой (4.1) называется

1. *гиперболическим*, если $\Lambda = \{-\alpha, \alpha\}$, где $\alpha > 0$;
2. *эллиптическим*, если $\Lambda = \{0\}$ и поток f^t послойно дистальный;
3. *параболическим*, если $\Lambda = \{0\}$ и есть пары проксимальных траекторий;
4. *неравномерно гиперболическим*, если $\Lambda = [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$.

Теория Селгрейда дает также оценку кардинального числа σ множества минимальных множеств проективного потока, порождаемого (4.2): $\sigma = 1, 2, \infty$ ([18], следствие 5.4).

Следующее утверждение уточняет теорему 3.2. для проективных потоков.

Т е о р е м а 4.1. *Проективный поток, индуцированный двумерным линейным расширением, не может иметь минимальных множеств Данжуа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что можно ограничиться случаем нерегулярного потока. Пусть \mathcal{A} – единственное минимальное множество регулярного потока. Тогда вектор вращения потока нерезонансный и он полусопряжен линейному $h_{\varphi_t} \circ f_{\varphi}^t = R_{(\omega, \rho)}^t \circ h_{\varphi}$. Так как поток проективный, то полусопряженность h_{φ} порождается отображением Мёбиуса $A : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ¹¹. Поэтому единственная инвариантная мера эквивалентна мере Лебега на \mathbb{T}^{m+1} , откуда следует, что проективный поток минимален. Таким образом, можно считать, что поток нерегулярен и транзитивен.

Пусть \mathcal{A} – единственное минимальное множество, R – множество, определяемое следующими условиями: отображение $\varphi \rightarrow \mathcal{A}_{\varphi}$ непрерывно при $\varphi \in R$, слой $\{\varphi\} \times S^1$ содержит множество 2-ой категории такое, что траектории, начинающиеся в этом множестве, транзитивны. Очевидно, множество R является множеством 2-ой категории. Пусть $\varphi_0 \in R$ такая точка, что $\mathcal{A}_{\varphi_0} = \mathcal{C}$, (a, b) – дополнительный интервал \mathcal{A}_{φ_0} . Пусть M – произвольное преобразование из группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ такое, что точки a и b являются неподвижными точками M . Так как $\varphi_0 \in R$, существует $\theta_0 \in (a, b)$ такую, что траектория точки (φ_0, θ_0) – транзитивна.

Рассмотрим точку $(\varphi_0, M(\theta_0))$. Существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow \infty$, такая, что $f_{\varphi_0}^{t_k}(\theta_0)$ стремится к $(\varphi_0, M(\theta_0))$ при $t_k \rightarrow \infty$. Тогда $f_{\varphi_0}^{t_k}(\mathcal{A}_{\varphi_0})$ сходится к \mathcal{A}_{φ_0} . Отсюда следует, что $f_{\varphi_0}^{t_k}(a)$ сходится к a , $f_{\varphi_0}^{t_k}(b)$ сходится к b . Поэтому $f_{\varphi_0}^{t_k}$ сходится к M и $M(\mathcal{A}_{\varphi_0}) = \mathcal{A}_{\varphi_0}$. С другой стороны, $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ действует транзитивно на упорядоченных тройках $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, откуда следует, что интервал $[b, a]$ целиком должен содержаться в \mathcal{A}_{φ_0} . Получили противоречие.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 4.2. *Гиперболический проективный поток имеет два минимальных множества, которые являются конечнолистным накрытием базы \mathbb{T}^m .*

Эллиптический проективный поток послойно дистален, т.е. для любых $\theta, \theta' \in S^1$, $\theta \neq \theta'$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|\bar{\theta}(t, \varphi, \theta) - \bar{\theta}(t, \varphi, \theta')| > \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Кроме того, он либо минимален, либо существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{T}^m \times S^1$ представляет собой слоение минимальных множеств, являющихся n -листным накрытием базы \mathbb{T}^m .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3.3. следует, что гиперболический проективный поток имеет экспоненциально устойчивый инвариантный тор (аттрактор). Меняя

¹¹Это следствие теоремы Ф. Тилена [20]: линейное двумерное расширение строго эргодического гомеоморфизма компактного метрического пространства измеримым преобразованием Мёбиуса приводится к одной из четырех нормальных форм, соответствующих четырем выделенным классам.

знак времени, получаем существование экспоненциально неустойчивого инвариантного тора (репеллера). Оба они являются минимальными множествами потока и, следовательно, других минимальных множеств нет. Очевидно, вектор вращения потока – резонансный, т.е. $\langle k | \omega \rangle + n\rho = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}^m$ и $n \in \mathbb{N}$. Минимальное n , удовлетворяющее этому соотношению будет кратностью накрытия базы.

Вторая часть этого утверждения – следствие теоремы Р. Камерона [19]: дистальный проективный поток порождается линейным расширением, которое послойно линейно эквивалентно потоку

$$(\varphi, \theta) \mapsto \left(\varphi_t, \exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta - \rho t - I(t, \varphi) \\ \theta + \rho t + I(t, \varphi) & 0 \end{pmatrix} x \right), \quad I(t, \varphi) = \int_0^t [v(\varphi_s) - \rho] ds.$$

Следовательно, проективный поток эквивалентен потоку $(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi_t, \theta + \rho t + 2I(t, \varphi))$. Если он регулярен (интеграл $I(t, \varphi)$ ограничен), то поток либо минимален (вектор вращения (ω, ρ) нерезонансный), либо фазовое пространство – несчетное объединение инвариантных m -мерных торов, являющихся n -листными накрытиями базы для некоторого целого $n \geq 1$ (вектор вращения резонансный). Если поток нерегулярен, то он минимален: поток сохраняет меру Лебега на \mathbb{T}^{m+1} , поэтому согласно теореме Пуанкаре о возвращении существует множество точек 2-ой категории, траектории которых транзитивны. Если существует непустое множество интранзитивных траекторий, то его замыкание является компактным инвариантным собственным подмножеством \mathbb{T}^{m+1} , содержащим минимальное множество \mathcal{A} . Из предыдущей теоремы следует, что \mathcal{A} – почти конечнолистное расширение потока на базе. Так как поток дистален, то из существования слоя \mathcal{A}_φ состоящего из n точек следует, что \mathcal{A} – конечнолистное накрытие базы, т.е. m -мерный тор [21], и фазовое пространство \mathbb{T}^{m+1} – объединение инвариантных m -мерных торов. Следовательно, проективный поток регулярен. Полученное противоречие показывает, что интранзитивных траекторий нет, т.е. поток минимален.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Таким образом, нетривиальные почти автоморфные минимальные множества могут иметь только неравномерно гиперболические и параболические проективные потоки.

В классе параболических проективных потоков пример потока с почти автоморфным минимальным множеством построен Р. Джонсоном [22]¹². Позже Дж. Селл показал [23], что если проективный поток, порождаемый системой

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = b(\varphi)(\cos \theta - 1) - 2a(\varphi) \sin \theta, \quad \int_{\mathbb{T}^m} a(\varphi) d\varphi = 0,$$

имеет два минимальных множества \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 (\mathcal{A}_1 – это инвариантный тор $\theta = 0$), то \mathcal{A}_2 будет почти автоморфным тогда и только тогда, когда интеграл $\int_0^t a(\varphi_s) ds$ неограничен.

В 1969 г. В.М. Миллионщиков построил пример двумерного линейного расширения квазипериодического потока на торе [24], индуцированный проективный поток которого неравномерно гиперболический. Позднее Р.Э. Виноград построил аналитический вариант системы Миллионщикова [27]. Р. Джонсон установил, что проективный поток, индуцируемый системами Миллионщикова и Винограда имеет единственное нетривиальное почти автоморфное минимальное множество [25]. Кроме того, любая инвариантная эргодическая мера проективного потока в этом случае сингулярна относительно меры Лебега на

¹²В указанной работе рассматривается проективный поток, индуцированный линейным расширением почти периодического потока на одномерном солениоиде.

\mathbb{T}^3 , однако, мера Лебега асимптотических к \mathcal{A} точек положительна [26]. Для дискретных аналогов проективных потоков (в форме отображения Мёбиуса)

$$(\varphi, z) \rightarrow \left(\varphi + \omega, \frac{a(\varphi)z + b(\varphi)}{c(\varphi)z + d(\varphi)} \right), \quad a(\varphi)d(\varphi) - b(\varphi)c(\varphi) = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.3)$$

существование минимальных множеств, обладающих такими же свойствами, что и в примере В.М. Миллионщикова, доказано М. Эрманом [5].

Пример минимального проективного потока, индуцированного неравномерно гиперболическим двумерным линейным расширением, построен К. Бъркклофом [28].

5. Заключение

Изложенные результаты показывают, что странные нехаотические аттракторы появляются только в неравномерно гиперболических проективных потоках. Они рождаются в результате бифуркации слияния двух гиперболических инвариантных торов с образованием нетривиального минимального множества. Структура такого минимального множества \mathcal{A} полностью определяется как структурой множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, так и динамикой на нем. Результаты в этом направлении будут приведены в другой публикации.

Второй автор благодарит РФФИ РАН за финансовую поддержку (грант № 11-01-12056 офи-м).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. // *Comm. Math. Phys.* – 1971. – V. 20. – P. 167–192.
2. Milnor J. On the Concept of Attractor. // *Commun. Math. Phys.* – 1985. – V. 99. – P. 177–195.
3. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A. Strange Attractors that are not chaotic. // *Physica.* – 1984. – D 13. – P. 261–268.
4. В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников Теория бифуркаций. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. – ВИНТИ. М. 1986.
5. Haro A., Simo C. To be or not to be a SNA: That is the question. – preprint. 2005. 13 p.
6. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы. – Итоги науки и техники. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы 1). ВИНТИ. 1985. т. 1.
7. Clark A. Linear flows on κ -solenoids. // *Topology and its Applications.* – 1999. – V. 94. – P. 27–49.
8. Veech W.A. Almost Automorphic Functions on Groups. // *Amer. J. Math.* – 1965. – V. 87, n. 3. – P. 719–751.

9. Веремеиук В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью. // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1073–1076.
10. Herman M. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore dimension 2. // Comm. Math. Helv. – 1983. – V. 58. – P. 453–502.
11. S. Aranson, E. Zhuzhoma Qualitative theory of flows on surfaces (a review). // J. Amer. Math. Sci. – 1998. – V. 90, n. 3. – P. 2051–2110.
12. Fokking R. The structure of trajectories. – Thesis. Technische Universiteit Delft. 1991.
13. Арансон С.Х., Жужома Е.В., Малкин М.И. О взаимосвязи между гладкими и топологическими свойствами преобразований окружности (теоремы типа Данжуа). – ВИНТИ. № 3052–84 деп. 1984.
14. Barge M., Williams R.F. Classification of Denjoy continua. // Topology and its Appl. – 2000. – V. 106, iss. 1. – P. 77–89.
15. Jäger T., J. Stark Towards a Classification for Quasiperiodically Forced Circle Homeomorphisms. // J. London Math. Soc. – 2006. – V. 73. – P. 727–744.
16. Сахаров А.Н. Минимальные множества расширений квазипериодических потоков. // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 321–329.
17. Huang W., Yi Y. Almost periodically forced circle flows. // J. Func. Anal. – 2009. – V. 257, i. 3. – P. 832–902.
18. Selgrade J. Isolated invariant sets for flows on vector bundles. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 203. – P. 359–390.
19. Cameron R. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. // J. Math. Phys. – 1936. – V. 15. – P. 73–81.
20. Thieullen P. Ergodic reduction of random products of two by two matrices. // J. d'Analyse Mathématique. – 1997. – V. 73. – P. 19–64.
21. Sacker R.J., Sell G.R. Lifting properties in skew-product flows with applications to differential equations. – Mem. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 11(190).
22. Johnson R.A. A linear, almost periodic equation with an almost automorphic solution. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 82, n. 2. – P. 199–205.
23. Sell G.R. A remark on an example of R.A Johnson. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 82, n. 2. – P. 206–208.
24. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 11. – С. 1979–1983.
25. Johnson R.A. On almost periodic linear differential systems of Millionščikov and Vinograd. // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – V. 85, n. 2. – P. 452–460.

26. Novo S., Obaya R. Bidimensional linear systems with singular dynamics. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124, n. 10. – P. 3163–3172.
27. Виноград Р.Э. К проблеме Еругина. // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 4. – С. 636–638.
28. Bjerklöv K. Positive Lyapunov Exponent and Minimality for the Continuos 1-d Quasi-Periodic Schrödinger Equation with Two Basic Frequencies. // Ann. HenriPoincaré. – 2007. – V. 8. – P. 687–730.

Strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced systems

© M. L. Kolomiets¹³, A. N. Sakharov¹⁴

Abstract. We give a review of results about topological structure for the minimal sets of dynamical systems which are the one-dimensional extensions of the quasi-periodic flows on m -dimensional torus. We show that in these systems minimal sets are or invariant tori, or the connected, but not locally connected sets. Latest can play the role of strange nonchaotic attractors.

Key Words: Attractors, minimal sets, proective flows, tological equivalence

¹³Assistant professor of department of higher mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

¹⁴Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.

УДК 517.958

Численный метод для моделирования малых поперечных колебаний тонких упругих пластин

© А. А. Кулешов¹

Аннотация. Рассматривается численный метод для решения задачи о малых поперечных колебаниях тонких упругих пластин переменной толщины с заданными на контуре пластины изгибающим моментом и перерезывающей силой. Приведены результаты расчетов колебаний плавающего на воде ледяного покрова под действием техногенных динамических нагрузок.

Ключевые слова: модель тонкой упругой пластины, численный метод, результаты расчетов

Введение

Задача о поперечных колебаниях тонких упругих пластин имеет практические приложения в различных областях науки и техники. В частности, она применима к задаче о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды при воздействии различных динамических нагрузок [1] и к задаче о поперечных колебаниях океанических литосферных плит [2]. Применима она также к задаче об определении прочности материала пластины на изгиб. Однако, несмотря на достаточно широкие приложения, численные методы решения для этой задачи ранее были разработаны недостаточно. В работе рассматривается предложенный автором численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на сведении исходной начально-краевой задачи к задаче для системы уравнений первого порядка по времени с аппроксимацией этой системы неявной двухслойной разностной схемой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую упругую изотропную пластину переменной толщины $h(x, y)$, лежащую на упругом винклеровском основании и совершающую малые поперечные колебания под действием начального отклонения или внешней силы. Задача о колебаниях такой пластины с общими условиями на криволинейном контуре имеет вид [3]

$$\rho h W_{tt} + \Delta(D\Delta W) - (1 - \sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) + aW = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.1)$$

граничные условия на криволинейном контуре пластины:

$$-D\Delta W - D(1 - \sigma) [\sin 2\theta W_{xy} - \sin^2 \theta W_{xx} - \cos^2 \theta W_{yy}] = M_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (1.2)$$

$$-\frac{\partial(D\Delta W)}{\partial \mathbf{n}} - (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial l} \{D [\sin \theta \cos \theta (W_{yy} - W_{xx}) + \cos 2\theta W_{xy}]\} + \quad (1.3)$$

$$+(1 - \sigma) [\sin \theta D_y W_{xx} + \cos \theta D_x W_{yy} - (\sin \theta D_x + \cos \theta D_y) W_{xy}] = N_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

¹Главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; kuleshov@imamod.ru.

где $W(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластины, отсчитываемый по оси OZ , направленной вниз от срединной плоскости, совмещенной с плоскостью XY и разделяющей толщину пластины $h(x, y)$ пополам, ρ — плотность материала пластины, $D = Eh^3/[12(1 - \sigma^2)]$ — жесткость пластины при изгибе (цилиндрическая жесткость), E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона материала пластины, \mathbf{n} — внешняя нормаль к контуру Γ , \mathbf{l} — касательная к контуру, θ — угол между нормалью \mathbf{n} и положительным направлением оси OX , aW — реакция упругого основания, F — внешняя сила, действующая на поверхности пластины, M_Γ — изгибающий момент и N_Γ — перерезывающая сила, заданные на контуре пластины.

Начальные условия:

$$W|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad W_t|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (1.4)$$

2. Описание численного метода

Уравнение (1.1) можно записать в другой форме

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \quad (2.1)$$

где M_x, M_y — изгибающие моменты, M_{xy} — крутящий момент

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = (1 - \sigma) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Уравнение (2.1) с помощью замены переменных $S = W_t$, сводится к системе уравнений с первым порядком по времени, неизвестными в которой являются поперечный прогиб пластины, скорость прогиба и изгибающие моменты:

$$\rho h \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S, \quad (2.5)$$

и для нее выписываются соответствующие граничные условия.

Для исходной области Ω рассматривается прямоугольная сетка $\omega_h = \{(x_i, y_j), i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}\}$ и вводятся разностные аналоги $w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n, h_{ij}, D_{ij}, f_{ij}^n$ функций $W, S, M_x, M_y, M_{xy}, h, D, F$ соответственно. На сетке ω_h для системы (2.2-2.5) балансным методом строится неявная двухслойная разностная схема [4]

— внутренняя ячейка

$$\rho h_{ij} s_{t,ij}^n = u_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - 2r_{\circ\circ,xy,ij}^{n+1/2} + v_{\bar{y},ij}^{n+1/2} - a w_{ij}^{n+1/2} + f_{ij}^{n+1/2},$$

$$u_{t,ij}^n = -D_{ij} s_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - \sigma D_{ij} s_{\bar{y},ij}^{n+1/2}, \quad v_{t,ij}^n = -\sigma D_{ij} s_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - D_{ij} s_{\bar{y},ij}^{n+1/2};$$

— краевая левая ячейка

$$\rho h_{1j} s_{t,1j}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,1j}^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta x} r_{y,3/2,j}^{n+1/2} + v_{yy,1j}^{n+1/2} - aw_{1j}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}j}}^{n+1/2}}{\Delta x} + f_{1j}^{n+1/2},$$

$$u_{1j}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}j}}^{n+1}, \quad v_{t,1j}^n = -(1 - \sigma^2) D_{1j} s_{yy,1j}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{L}t,j}}^n;$$

— краевая правая ячейка

$$\rho h_{N_{1j}} s_{t,N_{1j}}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x},N_{1j}}^{n+1/2} + \frac{2}{\Delta x} r_{y,N_{1-1/2,j}}^{n+1/2} + v_{yy,N_{1j}}^{n+1/2} - aw_{N_{1j}}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{R}j}}^{n+1/2}}{\Delta x} + f_{N_{1j}}^{n+1/2},$$

$$u_{N_{1j}}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{R}j}}^{n+1}, \quad v_{t,N_{1j}}^n = -(1 - \sigma^2) D_{N_{1j}} s_{yy,N_{1j}}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{R}t,j}}^n;$$

— краевая верхняя ячейка

$$\rho h_{i1} s_{t,i1}^n = u_{\bar{x},i1}^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta y} r_{x,i,3/2}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,i1}^{n+1/2} - aw_{i1}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}^i}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{i1}^{n+1/2},$$

$$u_{t,i1}^n = -(1 - \sigma^2) D_{i1} s_{\bar{x},i1}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{G}^t,i}}^n, \quad v_{i1}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}^i}}^{n+1};$$

— краевая нижняя ячейка

$$\rho h_{iN_2} s_{t,iN_2}^n = u_{\bar{x},iN_2}^{n+1/2} + \frac{2}{\Delta y} r_{x,i,N_2-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{y,iN_2}^{n+1/2} - aw_{iN_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{H}^i}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{iN_2}^{n+1/2},$$

$$u_{t,iN_2}^n = -(1 - \sigma^2) D_{iN_2} s_{\bar{x},iN_2}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{H}^t,i}}^n, \quad v_{iN_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{H}^i}}^{n+1};$$

— угловая верхняя левая ячейка

$$\rho h_{11} s_{t,11}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,11}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,11}^{n+1/2} - aw_{11}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}1}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}1}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{11}^{n+1/2},$$

$$u_{11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}1}}^{n+1}, \quad v_{11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}1}}^{n+1};$$

— угловая нижняя левая ячейка

$$\rho h_{1N_2} s_{t,1N_2}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,1N_2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{y,1N_2}^{n+1/2} - aw_{1N_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}N_2}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{H}1}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{1N_2}^{n+1/2},$$

$$u_{1N_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}N_2}}^{n+1}, \quad v_{1N_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{H}1}}^{n+1};$$

— угловая верхняя правая ячейка

$$\rho h_{N_{11}} s_{t,N_{11}}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x},N_{11}}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,N_{11}}^{n+1/2} - aw_{N_{11}}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{R}N_{11}}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}N_{11}}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{N_{11}}^{n+1/2},$$

$$u_{N_{11}}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{R}N_{11}}}^{n+1}, \quad v_{N_{11}}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}N_{11}}}^{n+1};$$

— угловая нижняя правая ячейка

$$\rho h_{N_1 N_2} s_{t, N_1 N_2}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x}, N_1 N_2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{\bar{y}, N_1 N_2}^{n+1/2} - a w_{N_1 N_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma np}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma \mathcal{H} N_1}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{N_1 N_2}^{n+1/2},$$

$$u_{N_1 N_2}^{n+1} = M_{\Gamma np}^{n+1}, \quad v_{N_1 N_2}^{n+1} = M_{\Gamma \mathcal{H} N_1}^{n+1};$$

аппроксимация последнего уравнения системы (2.5) для всех ячеек имеет вид

$$w_{t, ij}^n = s_{ij}^{n+1/2}.$$

Заданы $\rho, a, D_{ij}, h_{ij}, f_{ij}^n, (i, j) \in \omega_h, M_{\Gamma ij}^n, N_{\Gamma ij}^n, (i, j) \in \Gamma_h; w_{ij}^0, s_{ij}^0, u_{ij}^0, v_{ij}^0, r_{ij}^0, f_{ij}^0, M_{\Gamma ij}^0, N_{\Gamma ij}^0$.

В приведенной аппроксимации используются обозначения

$$\Phi_{ij}^{n+1/2} = (\Phi_{ij}^{n+1} + \Phi_{ij}^n)/2, \quad \Phi_{ij}^n = (w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n, f_{ij}^n, N_{\Gamma ij}^n)^T,$$

а также стандартные обозначения разностных производных [5].

Полученная разностная схема значительно проще для численной реализации, чем громоздкая трехслойная разностная схема, которая получилась бы при непосредственной разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения. Для решения системы разностных уравнений применялся метод расщепления по пространственным переменным.

3. Сходимость разностных аппроксимаций

В исходной задаче функции $F, M_{\Gamma}, N_{\Gamma}$ могут быть разрывными, и, в силу этого, решения задачи (1.1)–(1.4) рассматриваются как обобщенные решения из соответствующих функциональных пространств. Для разработанного метода в [6] была доказана сильная сходимость решения разностной задачи к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи и получена оценка скорости сходимости. При условии, что входные данные $f_{ij}^n, M_{\Gamma ij}^n, N_{\Gamma ij}^n$ в разностной задаче аппроксимируют соответствующие функции исходной задачи с порядком не ниже $O((\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2})$, решения разностной задачи сходятся к обобщенному решению дифференциальной задачи со скоростью $O((\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2})$ и оценка скорости сходимости имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| [s_{ij}^n - W_{t, ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [w_{ij}^n - W_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} \leq (\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2} C \left(\left\| F \right\|_{H^1(0, T; L_2(\Omega))} + \right. \\ & + \left\| M_{\Gamma} \right\|_{H^2(0, T; L_2(\Gamma))} + \left\| N_{\Gamma} \right\|_{H^2(0, T; L_2(\Gamma))} + \left\| M_{\Gamma} \right\|_{H^1(0, T; H^{3/2}(\Gamma))} + \left\| N_{\Gamma} \right\|_{H^1(0, T; H^{1/2}(\Gamma))} + \\ & + \left\| \varphi \right\|_{H^4(\Omega)} + \left\| \psi \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| [f_{ij}^n] \right\|_{H^1(L_2(\omega_h))} + \left\| [M_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \left\| [N_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \\ & + \left\| [u_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [v_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [r_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [w_{ij}^0] \right\|_{L_2(\omega_h)} + \left\| [s_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} \Big). \end{aligned}$$

4. Результаты расчетов

Для численной реализации разработанного метода автором совместно с В.В.Мымриным был создан программный комплекс, с помощью которого были проведены расчеты некоторых прикладных задач, описываемых моделью тонких упругих пластин. В качестве иллюстрации работы метода приведем результаты расчетов волновой динамики плавающего на воде ледяного покрова при посадке тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде. При этом была также численно исследована прочность ледяного покрова под действием возникающих напряжений.

В расчетах рассматривался ледяной покров с линейными размерами $2500 \text{ м} \times 250 \text{ м}$. Размеры сетки — 5000×500 узлов при одинаковых шагах сетки $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ м}$ — позволили учитывать давление на лед каждого колеса шасси самолета. Значения физических параметров ледяного покрова: модуль упругости $E = 5 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$, коэффициент Пуассона $\sigma = 0.33$, прочность льда на растяжение $0.5\text{--}1,0 \text{ МПа}$, прочность льда на сжатие $2\text{--}3 \text{ МПа}$. В качестве критериев разрушения льда выбирались минимальные значения прочности на растяжение и сжатие. Моделировалась задача о колебаниях ледяного покрова постоянной толщины со свободным краем ($M_\Gamma = 0$, $N_\Gamma = 0$). Результаты расчета значений прогиба (см. рис.1 слева) сравнивались с результатами моделирования посадки самолета C130 на ледовый аэродром McMurdo Sound в Антарктиде, полученными в работе канадских ученых [7] на основе аналитического метода решения и аппроксимации полученного интеграла квадратурной формулой. Максимальная расчетная величина прогиба составила 1.3 мм , а в работе [7] приблизительно 3.5 мм . Однако можно утверждать, что результаты, полученные с помощью предложенного метода точнее, так как более точно задается нагрузка на лед при посадке самолета, как по форме задания, так и по распределению нагрузки по площади. Так, в рассматриваемом методе с шагами сетки 0.5 м учитывается реальная нагрузка и от передних, и от задних стоек шасси, а в работе [7] нагрузка задается грубо с помощью δ -функции вида $P\delta(x - vt)$, и равномерно распределена на площади $1.5 \text{ м} \times 2.5 \text{ м}$.

В ходе численных экспериментов было также проведено исследование предельной толщины ледяного покрова, при которой не происходит его разрушения. На рис. 1 справа виден локальный максимум напряжений от давления передней стойки шасси самолета и глобальный — от задних стоек. Для самолета C-130H Hercules массой 50 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 1.7 м .

Заключение

Разработанный и обоснованный численный метод решения рассматриваемой задачи и созданная компьютерная программа позволяют моделировать волновую динамику поперечных колебаний тонких упругих пластин, а также делать выводы о возможности разрушения материала пластин под действием возникающих напряжений.

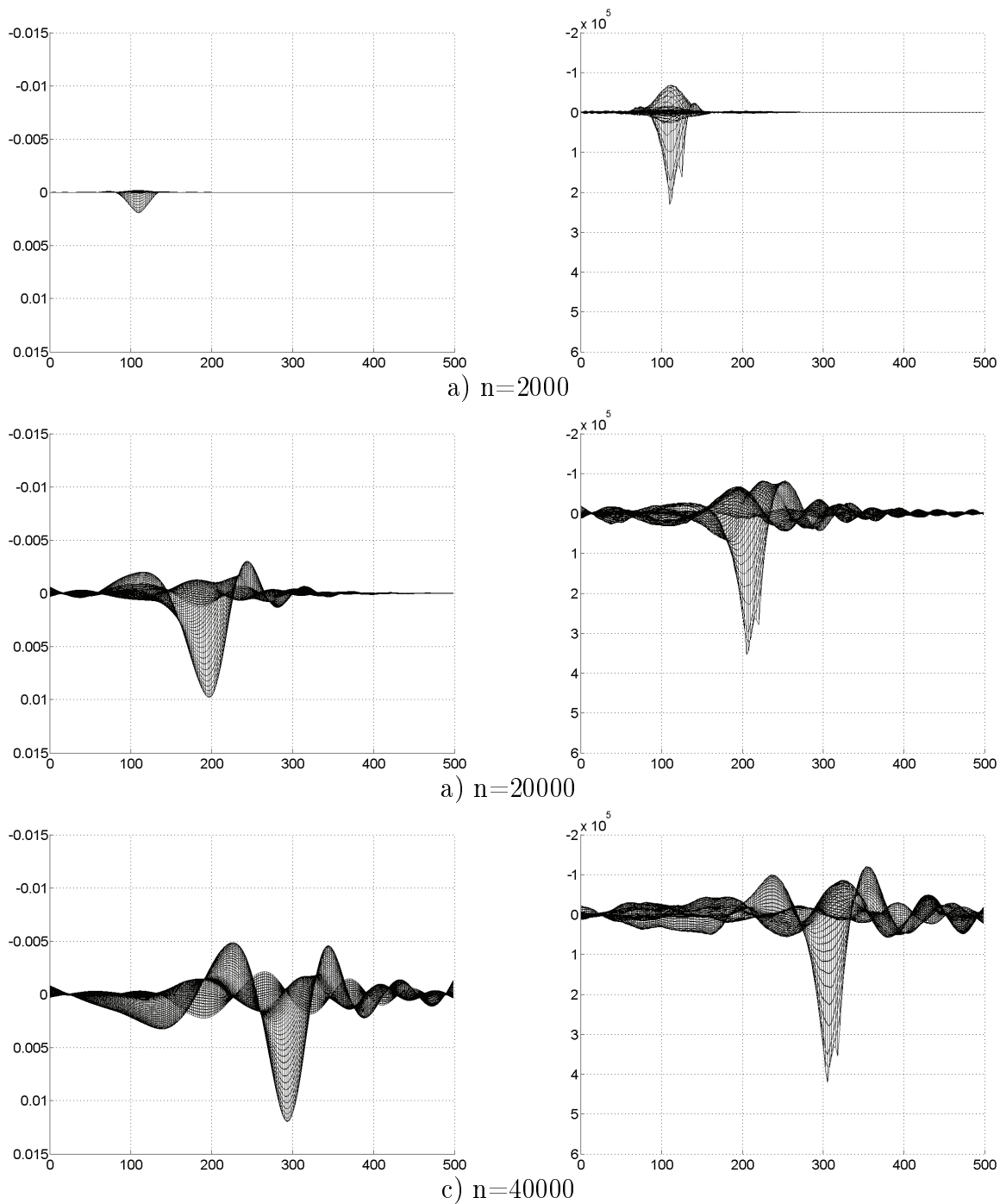


Рис. 1: Результаты расчета значений поперечных прогибов льда W [м] (слева) и нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} [Па] (справа) при посадке самолета С-130 (в разрезе по направлению движения центра масс). Параметры расчета: масса самолета — 50 т; начальная скорость — 50 м/с; толщина льда — 2.5 м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. Тёркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. – М.: Мир, 1985, Т.1.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматлит, 1963.
4. Кулешов А.А. О численном методе решения задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Матем. моделирование, 2005. – Т. 17, № 4. – С. 11-26.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
6. Кулешов А.А., Мырзин В.В., Разгулин А.В. О сильной сходимости разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // ЖВМ и МФ, – 2009. – Т. 49, № 1. – С.152-177.
7. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J.Fluid Mech, – 199. – Vol. 287. – P.173-197.

Numerical method for modeling of small transverse vibrations in thin elastic plates

© A.A. Kuleshov²

Abstract. The numerical method for problem of small transverse vibrations in a thin elastic plates of variable thickness with a bending moment and a shearing force on the plate contour is considered. The results of numerical simulation of floating ice vibrations caused by moving loads are shown.

Key Words: model of a thin elastic plate, numerical method, results of numerical simulation

²Main Researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; kuleshov@imamod.ru.

УДК 519.853.62

О версии регуляризованного проекционного двухшагового квазиньютоновского метода

© В. Г. Малинов¹

Аннотация. В работе исследуется регуляризованный по Тихонову метод на основе новой версии проекционного обобщенного двухшагового двухэтапного метода переменной метрики для решения задач минимизации с неточными исходными данными на выпуклом замкнутом множестве в сепарабельном гильбертовом пространстве. Метод является одним из возможных итеративных аналогов исследованного непрерывного метода второго порядка с переменной метрикой. Доказывается сходимость для выпуклых гладких функций с Липшицевыми градиентами и оценка скорости сходимости метода – при дополнительном требовании сильной выпуклости функций. Построено правило останова и указан регуляризирующий оператор. Метод отличается от своего предшественника в данном классе методов лучшей точностью и вычислительной устойчивостью.

Ключевые слова: минимизация на простом множестве, неустойчивая задача, регуляризованный проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный, метод переменной метрики, сходимость, скорость сходимости.

1. Введение

В сепарабельном гильбертовом пространстве H , нормированном скалярным произведением, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ $\mathbf{x} \in H$, будем рассматривать задачу минимизации на выпуклом замкнутом множестве Q ,

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \quad (1.1)$$

где выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$. Предполагаем, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет гиперповерхности уровней овражной структуры и ограничена снизу, множество её минимумов не пусто,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

исходные данные задачи (1.1), градиенты $\nabla f(\mathbf{x})$, имеют погрешности, т.е. задача относится к классу некорректных (см. [1] – [5]).

Новые методы решения задач с неточными исходными данными, с «овражными» функциями, исследованы за предыдущие десятилетия; развиты как новые непрерывные [6] – [9], так и новые итеративные методы. Поскольку здесь предпочтительно применение проекционных многошаговых регуляризованных методов, то были предложены и исследованы двухшаговый, трёхшаговый [10] – [13], четырёхшаговый методы проекции градиента (МПП) и обобщенный двухшаговый [14] регуляризованные методы, которые обладают многими известными достоинствами. Но для МПП обнаруживается факт возрастания вычислительной погрешности в окрестности минимума вследствие использования градиента функции на «дне оврага» гиперповерхности уровня, где его величина мала. Проекционным обобщенным многошаговым регуляризованным методам решения задачи (1.1), простейшими из которых являются двухшаговые, этот недостаток не присущ.

Поэтому разработаны методы регуляризации на основе нового класса методов – *проекционных обобщенных двухшаговых двухэтапных* (ПОДМ), предназначенных главным образом для минимизации функций с «овражными» гиперповерхностями уровней. Методы этого класса для построения минимизирующей последовательности $\{\mathbf{x}^k\} \longrightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$

¹Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

используют прогнозные точки $\mathbf{z}^k = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})$ на «склоне» оврага гиперповерхности уровня функции $f(\mathbf{x})$ (где α_k – параметр методов класса) и производят поиск в направлении, являющемся линейной комбинацией антиградиента $-\nabla f(\mathbf{z}^k)$ и вектора $\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$. ПОДМ мало чувствительны к овражности функций и ошибкам округлений [15].

У разработанных методов не исключено явление замедления сходимости в окрестности точки минимума, а попытка его устранения привела к разработке нового класса проекционных методов минимизации переменной метрики; первоначально в случае непрерывных моделей оптимизации – это регуляризованные непрерывные МПГ с переменной метрикой (РНМПГПМ) первого и второго порядков (см., например, [16], [17]). Они минимизируют функцию путём решения обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующих порядков с оператором проектирования в переменной метрике в правой части уравнения. Для построения РНМПГПМ, согласно их основной идее, сначала строится пространство с новым скалярным произведением.

Идея оснащения пространства новой метрикой в РНМПГПМ, в случае математических моделей для итеративных методов, распространена на ПОДМ квазиньютоновские регуляризованные (ПОДКРМ) (см. [18], [19]). Здесь предлагается и исследуется новый ПОДКРМ. Теоретическая основа базового для него метода имеется в работе [20].

2. Метод решения задачи

Для построения метода регуляризации в сепарабельном гильбертовом пространстве H , наряду с существующей метрикой и оператором $P_Q(\mathbf{v})$ проектирования вектора $\mathbf{v} \in H$ на множество Q , введём новую метрику с помощью нового скалярного произведения $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H$ и оператор $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$ проектирования в новой метрике в точке $\mathbf{x} \in H$ вектора $\mathbf{v} \in H$ на множество Q , аналогично проведённому в работе [20]. Критерий проекции $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}] \in Q$ в метрике $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ есть неравенство

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q. \quad (2.1)$$

Эта проекция существует и единственна как решение квадратичной задачи

$$g(\mathbf{u}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in Q, \quad (2.2)$$

в силу выпуклости множества Q и сильной выпуклости функции $g(\mathbf{u})$. Полученное гильбертово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками, обозначим H_1 . Далее рассмотрим методы в этом пространстве, при этом для простоты часто пользуемся старым обозначением H для этого пространства.

Примечание 1. Поскольку сепарабельные гильбертовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны ([22], с. 156), в новом пространстве H_1 сохраняются все соотношения и теоремы из исходного H , связанные со скалярным произведением (\mathbf{x}, \mathbf{x}) . В пространстве H_1 по самому его построению наряду с (2.1) имеет место критерий

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q \quad (2.3)$$

проекции $\mathbf{w} \in Q$ вектора $\mathbf{v} \in H_1$ на выпуклое замкнутое множество Q ([21], с. 189).

В H_1 для решения поставленной в п.1 задачи рассмотрим ПОДКРМ:

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k); \quad (2.4)$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla t_k(\mathbf{z}^k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где \mathbf{x}^0 - произвольная начальная точка из H_1 ; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ - последовательность положительно определённых самосопряжённых линейных операторов;

$$\nabla t_k(\mathbf{z}^k) = \nabla f_k(\mathbf{x}) + \tau_k \mathbf{z}^k \text{ ---} \quad (2.6)$$

приближение в точке \mathbf{z}^k точного градиента $\nabla T(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{x}$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \tau \|\mathbf{x}\|^2/2$; приближённые градиенты $\nabla f_k(\mathbf{x})$ таковы, что

$$\max \|\nabla f_k(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \delta_k(1 + \|\mathbf{x}\|), \forall \mathbf{x} \in Q, \quad k \geq 0; \quad (2.7)$$

$\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k$ - параметры метода (2.4)–(2.7).

Оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq M\|\mathbf{u}\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1. \quad (2.8)$$

В силу условий, наложенных на функцию $f(\mathbf{x})$, функция $T(\mathbf{x})$ дифференцируема по Фреше на множестве Q ; полагаем, что выполнено свойство её непрерывной дифференцируемости на Q . Отметим, что базовый метод для ПОДКРМ отличается от метода из работы [19] наличием операции проектирования на первом этапе, что препятствует «выбросу из оврага» на первом этапе метода и способствует увеличению скорости сходимости метода. Отметим также, что операция $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$ проектирования вектора в новой метрике в новом методе не выполняется, то есть задача (2.2) квадратичной минимизации не решается. Эта проекция играет вспомогательную роль и наряду с неравенством (2.1) используется для установления связи между условиями оптимальности в исходной и новой метриках пространства H_1 .

Регуляризованный метод (2.4)–(2.6) есть один из возможных итеративных аналогов исследованного в [19] непрерывного регуляризованного метода переменной метрики

$$\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q [\mathbf{x}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}(t))\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{x}(t), t)], \\ t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1,$$

где $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H$ - начальные точки; векторные производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{x}''(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ функции $\mathbf{x}(t)$, $t > 0$; со значениями в гильбертовом пространстве H ;

$$\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t), t) + \tau(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) \in H, \quad t \geq 0 \text{ ---}$$

приближение градиента $\nabla T(\mathbf{x}(t), t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\mathbf{x}(t)$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}(t), t) = f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\|\mathbf{x}(t)\|^2/2$; $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \tau(t), \delta(t)$ - параметры метода; $\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t), t)$ - приближённый градиент функции $f(\mathbf{x}(t))$; решение $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши существует на полуоси $[0; +\infty)$ при любых начальных точках.

Примечание 2. Итерационными формулами (2.4), (2.5) задается целое семейство ПОДКРМ. В зависимости от выбора последовательности операторов \mathbf{B}_k и способов выбора параметров метода, из (2.4), (2.5) получаем различные ПОДКРМ или, при $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \nabla^2 f(\mathbf{z}^k)$, регуляризованный ПОДМ второго порядка. Ввиду выполнения (2.8) существует $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = I$, где I - тождественный оператор.

3. Вспомогательные утверждения

Приведём сначала в леммах 1,2,3 необходимые здесь вспомогательные утверждения, доказательства которых даны в работе [20].

Л е м м а 1. Пусть выпуклые функции $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ класса $C^{1,1}(H_1)$ таковы, что

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in H_1 \quad (3.1)$$

и множество точек минимума функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ не пусто, $Q_* \neq \emptyset$.

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ в пространстве H_1 имеет место неравенство

$$(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in Q. \quad (3.2)$$

Л е м м а 2. Пусть выпуклое замкнутое множество $Q \subset H_1$, выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$, точка $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$.

Тогда для точки $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q$ равенство

$$\mathbf{x}^* = P_Q [\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)] \quad (3.3)$$

в пространстве H_1 эквивалентно неравенству (3.2).

Следующая лемма выражает связь между необходимыми условиями оптимальности точки \mathbf{x}^* в исходной и новой метриках пространства H .

Л е м м а 3. Пусть: 1) множество $Q \subset H_1$ выпукло и замкнуто; 2) выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$; 3) выполнено неравенство (3.2).

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$ равенство $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)} [\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)]$ в H_1 эквивалентно неравенству $(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0$, $\forall \mathbf{u} \in Q$.

Примечание 3. Классы операторов и функций, удовлетворяющих условию (3.1), не пусты. В самом деле, в класс таких операторов входят тождественный оператор (и скалярная матрица) и оператор (матрица) вторых производных $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$, а также существуют удовлетворяющие ему другие самосопряженные положительно определённые линейные операторы (симметричные матрицы). В класс функций, удовлетворяющих условию (3.1), например, входят выпуклые дважды гладкие функции. Некоторые примеры таких функций и операторов приведены в [20].

Возникает интересная, пока еще нерешённая, проблема полной характеристики классов функций $\varphi(\mathbf{x})$ и операторов $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1).

Л е м м а 4. В гильбертовом пространстве H_1 имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1. \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|a - b\|^2 = \|a - c\|^2 + 2(a - c, c - b) + \|c - b\|^2, \quad \forall a, b, c \in H_1. \quad (3.5)$$

при $a = \mathbf{u}$, $c = \mathbf{v}$, $b = \mathbf{w}$, запишем его в форме

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1. \quad (3.6)$$

и второе слагаемое в его правой части оценим с помощью неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2, \quad a, b, \varepsilon > 0, \quad (3.7)$$

то есть $2|(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2$, $\varepsilon > 0$. Тогда из (3.6) получим $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon^{-1}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$. Отсюда следует неравенство (3.4).

Лемма 4 доказана.

4. Обоснование сходимости ПОДКРМ

Нормальным решением задачи (1.1) называют её решение с минимальной нормой. Исследуем достаточные условия сильной сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ ПОДКРМ (2.4)-(2.7) к нормальному решению.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) множество $Q \in H$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1.1}(Q)$ выпуклая и выполнены соотношения (1.2); 3) для приближений $\nabla f_k(\mathbf{x})$ точного градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ выполнено (2.7); 4) оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in H$ таков, что выполнены неравенства (2.8); 5) выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1.1}(Q)$ такова, что имеет место равенство (3.1); 6) параметры $\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k$ метода семейства (2.4)-(2.7) таковы, что:

$$\begin{aligned} \alpha_k \geq \alpha_{k+1} > 0, \beta_k \geq \beta_{k+1} > 0, \tau_k \geq \tau_{k+1} > 0, \delta_k \geq 0, k \geq 0; \\ (\tau_k - \tau_{k+1})^2 [\beta_{k-1} \tau_{k-1}]^{-1} \tau_k^{-2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \tau_k - \tau_{k+1} \rightarrow 0, \quad \beta_k (\delta_k + \tau_k) (\beta_{k-1} \tau_{k-1})^{-1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая ПОДКРМ (2.4)-(2.7), (4.1), из любой начальной точки $\mathbf{x}^0 \in H$, равномерно относительно выбора приближённых градиентов $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в (2.7), по норме H сходится к точке $\mathbf{x}^* \in Q_*$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \tag{4.2}$$

где $\|\mathbf{x}^*\| = \inf_{\mathbf{x} \in Q_*} \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}^* \in Q_*$ - нормальное решение задачи (1.1).

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях теоремы в построенном пространстве множество Q_* минимумов задачи выпукло и замкнуто, нормальное решение задачи (1.1) и минимум функции $T(\mathbf{x})$ существуют. На множестве $Q \in H$ существует точка $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}(k)$ такая, что имеют место соотношения:

$$T(\mathbf{v}^k) = \inf_{\mathbf{x} \in Q} T(\mathbf{x}), k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^*\| = 0, \tag{4.3}$$

$$(\nabla T(\mathbf{v}^k), \mathbf{u} - \mathbf{v}^k) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q, \tag{4.4}$$

$$\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \leq C \tau_k^{-1} |\tau_k - \tau_{k+1}|, \quad k \geq 0, \tag{4.5}$$

$$C = \sup_{k \geq 0} \max \{ \|\mathbf{v}^k\|; \|\nabla f(\mathbf{v}^k)\| \}. \tag{4.6}$$

Отметим, что соотношения (4.3)-(4.6) верны, с разными точками $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}(k)$, в пространствах с исходной и новой метриками.

Обосновывая (4.2), оценим правую часть неравенства

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| + \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^*\|, \quad k \geq 0. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.3), для правой части (4.7) остаётся обосновать соотношения

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \rightarrow 0, \quad \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \tag{4.8}$$

Из характеристического свойства оператора проектирования (2.3) ([5], с. 72) и из (2.4), (2.5), пользуясь идеей из работы [15], получаем вариационные неравенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{z}^k) \geq 0, \\ (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k + \beta \mathbf{B}_k^{-1} \nabla t_k(\mathbf{z}^k), \mathbf{u} - \mathbf{x}^{k+1}) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q. \end{aligned}$$

(Здесь и далее индекс k у параметров метода для краткости почти везде опускаем.) Сложим оба вариационных неравенства и, пользуясь свойствами скалярного произведения, представим полученное неравенство в форме

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 + (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{u}) + \alpha (\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{z}^k) \leq \\ & \leq \beta (\mathbf{B}_k^{-1} \nabla t_k(\mathbf{z}^k), \mathbf{u} - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее оценим второе и третье слагаемые в левой части (4.9). Для второго слагаемого $(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{u}) = (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) + (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{u})$ правые части оцениваются с помощью (3.5), $(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) = 0.5 (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2)$, $(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{u}) = 0.5 (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{u}\|^2)$, поэтому

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{u}) = \\ & = 0.5 (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{u}\|^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для третьего слагаемого в левой части (4.9)

$$(\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{z}^k) = (\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{x}^k) + (\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k)$$

первое скалярное произведение оценивается с помощью (3.5),

$$(\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{x}^k) = 0.5 (\|\mathbf{u} - \mathbf{x}^{k-1}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2),$$

а второе – с помощью неравенства (3.7) при $\varepsilon = 1$,

$$(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k) = -(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) \geq -0.5 (\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{y}^k\|^2),$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \alpha (\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{z}^k) \geq \\ & \geq 0.5\alpha (\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2) - \alpha \|\mathbf{y}^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подставим оценки (4.10) и (4.11) в левую часть (4.9):

$$\begin{aligned} & 0.5 [\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 + (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2] - \\ & - 0.5(1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{u}\|^2 + 0.5\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{u}\|^2 - \alpha\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \\ & \leq \beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla t_k(\mathbf{z}^k), \mathbf{u} - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Теперь воспользуемся леммами 1 и 2. Неравенство (3.2), умноженное на $\beta > 0$, запишем при $\mathbf{x}^* = \mathbf{v}^k$, $f(\mathbf{x}^*) = T(\mathbf{v}^k)$:

$$\beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k) \nabla T(\mathbf{v}^k), \mathbf{u} - \mathbf{v}^k) \geq 0 \quad \forall k \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Положим здесь $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, а в (4.12) положим $\mathbf{u} = \mathbf{v}^k$, полученные неравенства сложим и, умножив на 2, придём к неравенству

$$a \leq 2\beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla t_k(\mathbf{z}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k) \nabla T(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}) \quad k \geq 0,$$

где $a = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 + (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 - 2\alpha\|\mathbf{y}^k\|^2$. Это неравенство, пользуясь выражениями для точного и приближённого градиентов функции Тихонова, представим в форме

$$\begin{aligned} & a \leq 2\beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) (\nabla f_k(\mathbf{z}^k) - \nabla f(\mathbf{z}^k)), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}) + \\ & + 2\beta (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k) \nabla f(\mathbf{v}^k) + \tau \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) (\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}) + \\ & + 2\beta \tau ([\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k)] \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Преобразуем (4.13), используя (2.7), (4.5), неравенство Коши-Буняковского, и вытекающие из (2.8) неравенства

$$(1/M)\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|^2/m, \quad \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1, \quad (4.14)$$

где M и m из (2.8), нерастягивающим свойством оператора проектирования ([21], с. 190), следующей из (4.14) оценкой $\|\mathbf{B}^{-1}\| \leq 1/m$. Получим неравенство

$$\begin{aligned} & a + 2\beta\tau (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)(\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k) \leq \\ & \leq 2\beta [\delta(1 + \|\mathbf{z}^k\|)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|/m + (\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \varphi(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1})] + \\ & + 2\beta\tau (\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + 2\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|) / m, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

К скалярному произведению в левой части применим левое неравенство (4.14), к первому, третьему и четвёртому слагаемым в правой части - неравенство (3.7), и (4.6):

$$\begin{aligned} 2(1 + \|\mathbf{z}^k\|)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| & \leq 2(1 + \|\mathbf{v}^k\| + \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|) \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \leq \\ & \leq 2(1 + C)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + 2\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \leq \\ & \leq (1 + C)^2 + 2\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2; \\ 2\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| & \leq \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2; \\ 2\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| & \leq 6C^2/5 + 5\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/6; \end{aligned}$$

тогда придём к неравенству

$$\begin{aligned} a + 2\beta\tau\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2/M & \leq 2\beta (\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \nabla\varphi(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}) + \\ & + \beta(2\delta + 11\tau/6)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/m + \beta(\delta + \tau)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2/m + g_1, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $g_1 = \beta[\delta(1 + C)^2 + 12C^2\tau/5]/m$. Здесь оценим: в правой части - квадрат нормы во втором слагаемом, с помощью известного неравенства

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H. \quad (4.16)$$

при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^k$, $\varepsilon = 1/2$, то есть $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 \leq 3\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/2 + 3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2$; в первом слагаемом в левой части - получаемым из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$ неравенством

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 \quad (4.17)$$

при $\varepsilon = 5/12$, то есть $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq 7\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/12 - 7\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2/5$. И здесь второе слагаемое в правой части, учитывая слагаемое в левой части (4.15) и что $-7/5 = 2/5 - \alpha - (1 - \alpha)$, представим в виде суммы двух слагаемых, тогда

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq 7\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/12 - (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 + (2/5 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2,$$

где последнее слагаемое с множителем $2/5$ оценим с помощью неравенства

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}^k - \mathbf{z}^k\|^2, \quad \varepsilon > 0,$$

получаемого из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$, положив в нём $\varepsilon = 1 + 10\alpha$,

$$2\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2/5 \geq -4\alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + 4\alpha\|\mathbf{v}^k - \mathbf{z}^k\|^2/(1 + 10\alpha);$$

последнее слагаемое с множителем $-\alpha$ оценим с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования,

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{x}^k)\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2; \quad (4.18)$$

$$-\alpha \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 \geq -\alpha^3 \|\mathbf{y}^k\|^2.$$

Тогда получим оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 &\geq 7\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/12 - (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 - \\ &- 4\alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + 4\alpha\|\mathbf{v}^k - \mathbf{z}^k\|^2/(1 + 10\alpha) - \alpha^3\|\mathbf{y}^k\|^2. \end{aligned}$$

Подставив её и оценку для слагаемого из правой части (4.15), с учётом неравенств для коэффициентов $2\beta\tau/M > 0$, $4\alpha/(1 + 10\alpha) > 0$, преобразуем (4.15) к виду

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 - (1 + 5\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + \\ &+ [7/12 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m]\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - \\ &- (2\alpha + \alpha^3)\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq 2\beta(\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \nabla\varphi(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}) + \\ &+ \beta[(6\delta + 11\tau/2)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + (\delta + \tau)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2]/m + g_1, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь для скалярного произведения в правой части воспользуемся оценкой (см. [21], с. 188) $(\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{z}) \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2/4$, $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z} \in Q$ для выпуклых функций $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$, положив $\mathbf{x} = \mathbf{z}^k$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}^k$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{k+1}$. Затем оценим квадрат нормы с помощью неравенства (4.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$, $\varepsilon = 1/7$ и (4.18):

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq 8\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/7 + 8\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 \leq 8\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/7 + 8\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2;$$

Следовательно, $(L\beta/2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq 4L\beta\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/7 + 4L\alpha^2\beta\|\mathbf{y}^k\|^2$. После подстановки этого результата в (4.19) получим

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 - (1 + 5\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ &+ \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - a_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \\ &\leq \beta(6\delta + 11\tau/2)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_0\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + g_1, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где $a_0 = \beta(\delta + \tau)/m$, $a_2 = 7/12 - 4L\beta/7 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m$; $a_{41} = \alpha^3 + 4L\alpha^2\beta + 2\alpha$. Здесь оценим квадрат нормы во втором слагаемом в правой части с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования и (4.16) при $\varepsilon = 1/2$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2 &= \|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{v}^k)\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{v}^k\|^2 \leq 3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2/2 + 3\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2. \end{aligned}$$

Тогда придём к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 - a_1\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq \\ &\leq a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 + g_1, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $a_1 = a_{1k} = 1/6$; $a_3 = a_{3k} = 5/6 + 5\alpha + \beta[6\delta + 11\tau/2 + 3(\delta + \tau)/2]/m$; $a_4 = a_{4k} = 2\alpha + \alpha^3 + 4L\alpha^2\beta + 3\alpha^2\beta(\delta + \tau)/m$.

Обозначим $s_k = \beta_{k-1}\tau_{k-1}$, левую часть (4.20) через u_{k+1} , разность между правой частью (4.20) без g_1 и выражением $(1 - s_k)u_k$ обозначим w_k . Тогда из (4.20) имеем

$$u_{k+1} \leq (1 - s_k)u_k + w_k + g_1, \quad k - 1 \geq N. \quad (4.21)$$

Покажем равномерную сходимость последовательности $\{u_k\}$ относительно выбора приближённых градиентов в (2.7). Сначала заметим, что существует число $k_0 > 1$ такое, что $\forall k - 1 \geq k_0$ с учетом (4.1) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} 15\beta_k(16Lm/7 + 12\delta_k + 11\tau_k) &\leq 23m, \\ \beta_k(15\delta_k + 14\tau_k) &< 2m\alpha_k, \\ \alpha_k^2 + 4L\alpha_k\beta_k + 3\alpha_k\beta_k(\delta_k + \tau_k)/m &< 1, \quad 0 < s_k < 1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ввиду которых имеем $a_{2k} \geq 1/5$; $a_{3k} < 5/6 + 6\alpha_k$; $a_{4k} < 3\alpha_k \quad \forall k - 1 \geq k_0$.

Теперь оценим u_{k+1} снизу. Из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^k$, следует,

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2,$$

откуда при $\varepsilon = 6/5$ следует оценка снизу для левой части (4.21),

$$u_{k+1} \geq (1/6 - a_1)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + (a_2 - 1/5)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \geq 0, \quad (4.23)$$

поскольку $a_1 = 1/6$ и выполнены (4.22). Обозначим $a_{11} = a_{1(k-1)}$, $a_{21} = a_{2(k-1)}$.

Далее оценим w_k сверху. В выражении $w_k = a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - (1 - s_k)[\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 - a_{11}\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + a_{21}\|\mathbf{y}^k\|^2]$ воспользуемся получаемыми с помощью (4.16) при $\varepsilon = s_k$ неравенствами

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 &\leq (1 + s_k)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + (1 + s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2, \\ \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 &\leq (1 + s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 + (1 + s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} w_k &\leq [a_3 + a_{11}(1 - s_k)](1 + s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 + a_5\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - \\ &\quad - [(1 - s_k) - a_3(1 + s_k)]\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 - [a_{21}(1 - s_k) - a_4]\|\mathbf{y}^k\|^2, \end{aligned}$$

где $a_5 = a_{11}(1 - s_k^2) - \alpha$. Отсюда, с учетом неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 \leq (1 + s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + (1 + s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} w_k &\leq a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - [1 - s_k - a_3(1 + s_k)]\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 - \\ &\quad - [a_{21}(1 - s_k) - a_4]\|\mathbf{y}^k\|^2 + a_5(1 + s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $a_6 = [a_3 + a_{11}(1 - s_k) + a_5](1 + s_k^{-1})$. Для последнего слагаемого в (4.24) с помощью (4.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k-1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^{k-1}$, $\varepsilon = 4$ получим неравенство $\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 \leq 5\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (5/4)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2$. Пользуясь им в (4.24), придём к неравенству

$$w_k \leq a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - a_7\|\mathbf{y}^k\|^2 - a_8\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2, \quad k \geq 0, \quad (4.25)$$

где $a_7 = a_{21}(1 - s_k) - a_4 - 5a_5(1 + s_k)$; $a_8 = 1 - s_k - (a_3 + 5a_5/4)(1 + s_k)$.

Заметим, что существует число $N > 1$ такое, что $\forall k - 1 > N \geq k_0$ с учётом (4.1) наряду с (4.22) выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} a_{11}(1 - s_k) &< a_{11}(1 - s_k^2) \leq 1/7; \\ a_{21}(1 - s_k) &\geq 7/12 - \alpha_k; \quad a_3(1 + s_k) \leq 5/6 + 7\alpha_k - s_k; \\ a_5(1 + s_k) &\leq 1/9 + \alpha_k; \quad a_5 \leq 1/9; \quad 0 < \alpha < 1/324. \end{aligned} \quad (4.26)$$

С учетом (4.1), (4.22) и (4.26) в (4.25) для коэффициентов имеют место оценки:

$$\begin{aligned} a_6 &\leq (5/6 + 6\alpha_k + 1/7 + 1/9)(1 + s_k^{-1}) = (23/21 + 6\alpha_k)(1 + s_k^{-1}); \\ a_7 &\geq 7/12 - 4\alpha_k - 5(1/9 + \alpha_k) = 1/36 - 9\alpha_k > 0; \\ a_8 &\geq 1 - s_k - 5/6 - 7\alpha_k + s_k - 5(1/9 + \alpha_k)/4 = 1/36 - 33\alpha_k/4 > 0. \end{aligned}$$

Учитывая эти оценки и (4.5), из (4.25) с учётом (4.1), (4.22), (4.23) и (4.26) получим:

$$\begin{aligned} w_k &\leq a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 \leq (23/21 + 6\alpha_k)C^2(1 + s_k^{-1})\tau_k^{-2}|\tau_{k+1} - \tau_k|^2; \\ u_{k+1} &\leq (1 - s_k)u_k + d_k, \quad k - 1 \geq N, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $d_k = w_k + g_1 = C^2(23/21 + 6\alpha_k)(1 + s_k^{-1})\tau_k^{-2}|\tau_{k+1} - \tau_k|^2 + 12C^2\beta_k\tau_k/(5m)$. Здесь, ввиду (4.1) и (4.27), имеют место соотношения $\sum_{k=0}^{k=\infty} s_k = \infty$, $d_k/s_k = (w_k + g_1)/s_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Последовательность $\{u_k\}$, обладающая такими свойствами, удовлетворяющая (4.23), (4.27), стремится к нулю (см., например, [21], с. 96). Сходимость $\{u_k\}$ равномерная относительно выбора приближений $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в (2.7), т.к. s_k и d_k в (4.27) не зависят от этих приближений. Отсюда следует равномерная сходимость в (4.8). Из (4.3), (4.7) и (4.8) следует (4.2).

Теорема 1 доказана.

Следствие. Из теоремы 1 следует монотонность сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ и справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| &\leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \leq \dots \leq \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|, \\ \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| &\leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^{k-2}\| \leq \dots \end{aligned}$$

Примечание 4. В качестве параметров метода (2.4)–(2.7), (4.1), удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут быть выбраны, например, следующие:

$$\alpha_k = c_1(1+k)^{-2}; \quad \beta_k = c_2(1+k)^{-1}; \quad \tau_k = c_3(1+k)^{-2}; \quad \delta_k = c_4(1+k)^{-5/2},$$

где числа $c_i > 0$, $i \in [1:4]$; $c_1 \geq c_2 > c_3 > c_4$.

5. Правило останова метода и регуляризирующий оператор

Правило останова метода (2.4)–(2.7), (4.1) строим аналогично тому, как это сделано, например, в работах [6] – [12], [14]. Согласно теореме 1, градиент $\nabla f(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ может быть вычислен в задаче (1.1) в каждой фиксированной точке $\mathbf{x}^0 \in Q$ с некоторой ошибкой δ_k , такой, что $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и выполняется (2.7). Однако, в конкретных задачах ошибка начальных данных не обязательно стремится к нулю, а обычно больше некоторого фиксированного числа $w > 0$. Предположим, что для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in H$, вместо вычисления точного градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ возможно вычислить его аппроксимацию $\nabla f_w(\mathbf{x})$ для заданного числа $w > 0$, что

$$\max \|\nabla f_w(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq w(1 + \|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{x} \in H, \quad k \geq 0. \quad (5.1)$$

Тогда, заменяя приближённый градиент $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в методе (2.4)–(2.7), (4.1) на $\nabla f_w(\mathbf{x})$ из (5.1), вместо (2.4)–(2.5) приходим к методу

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k);$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\{\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)[\nabla f_w(\mathbf{z}^k) + \tau_k \mathbf{z}^k]\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

Однако, для метода (5.2) условия (4.1) согласования параметров α_k , β_k , τ_k с параметром погрешности $\delta_k \equiv w > 0$, $k \geq 0$ будут очевидно нарушены, так что процесс (5.2) может расходиться и его использование для больших значений k будет неверно. С помощью теоремы 1 можно построить *правило останова метода* (5.2) и определить количество $k \geq 1$ необходимых итераций для получения приближения \mathbf{x}^{k+1} к нормальному решению \mathbf{x}^* задачи (1.1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$, $\|\mathbf{x}^{k(w)+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon$, при выбранной погрешности $w > 0$. Для этого фиксируем некоторую начальную точку $\mathbf{x}^0 \in H$ и последовательности параметров метода

$$\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k, \quad (5.3)$$

удовлетворяющие условиям (4.1). Могут быть выбраны параметры, указанные выше в примечании и $w < \delta_0$. Поскольку выполнение условий (4.1) здесь не предполагается, то $w = w_k$, $k \geq 0$, теперь является параметром метода (5.2), совершенно не связанным с условиями (4.1). Для каждого фиксированного w , $0 < w < \delta_0$ в (5.1), процесс (5.2) с выбранными параметрами (5.3) будем продолжать до номера итерации $k_0 \geq 1$, определённого из условия

$$\delta_k \geq w, k = 0, 1, 2, \dots, k(w). \tag{5.4}$$

Так как $\delta_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$, $\delta_0 > w$, то требуемый номер итерации $k(w) \geq 1$ будет конечным и найдется для каждого фиксированного $w > 0$. В теореме 2 дается обоснование критерия (5.4) останова процесса (5.2).

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) приближения $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ градиентов $\nabla f(\mathbf{x})$ удовлетворяют условию (5.1); 3) множество точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k(w)}$ получено методом (5.2), где номер итерации $k = k(w) \geq 1$ определён в соответствии с правилом останова (5.4). Тогда

$$\|\mathbf{x}^{k(w)} - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0 \text{ при } w \rightarrow +0, \tag{5.5}$$

в том смысле, что для сколь угодно малых заданных $w > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется номер $k(w(\varepsilon))$ такой, что $\|\mathbf{x}^{k(w)} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon$.

Доказательство. В условиях теоремы 2 из (5.1) и правила останова (5.4) следует, что

$$\max \|\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \delta_k(1 + \|\mathbf{x}\|), \mathbf{x} \in Q, k = 0, 1, 2, \dots, k(w). \tag{5.6}$$

Следовательно, $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ из (5.1) и (5.6) удовлетворяет условию (2.7) $\forall k = 0, 1, 2, \dots, k(w)$. Отсюда с учетом условия $\delta_k \rightarrow 0$ имеем, $k(w) \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow +0$, т.е. останов метода будет осуществляться при очень больших номерах $k(w)$.

При условиях теоремы 1 последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ метода (5.2) сходится по норме H к решению \mathbf{x}^* задачи (1.1), поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists$ номер $k(\varepsilon)$, не зависящий от приближенных градиентов $\nabla \mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ в (2.7) и \mathbf{x}^{k+1} из (5.2), такой, что

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \forall k > k(\varepsilon). \tag{5.7}$$

(Здесь $\varepsilon > 0$ – заданная точность вычисления минимума, т.е. решения задачи (1.1).)

Ввиду соотношения $k(w) \rightarrow \infty$ существует число $w(\varepsilon) > 0$ такое, что $k(w(\varepsilon)) > k(\varepsilon) \forall w \in (0, w(\varepsilon)]$. Поэтому точки $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k(w)}$ соответствуют, с учетом (5.7), точкам метода (2.4)-(2.7), (4.1) при $\nabla \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x}), k = 1, 2, \dots, k(w)$. Поскольку $k(w(\varepsilon)) > k(\varepsilon)$, из (5.7) следует неравенство $\|\mathbf{x}^{k(w)} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, которое выполняется $\forall \varepsilon > 0$ и поэтому влечет (5.5). Теорема 2 доказана.

Регуляризирующий оператор задачи (1.1) строим способом, аналогичным использованному в работе [14]. Предположим, что погрешность $w > 0$ фиксирована и выполнено правило останова (5.4). Соотношение (5.5) соответствует правилу останова (5.4) и сформулировано для фиксированного уровня ошибки $w > 0$ в (5.1). При таком уровне погрешности в (5.1), выполнении правила останова (5.4) и теоремы 2, регуляризирующим будет оператор $\mathbf{R}_w = \mathbf{R}_w(\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x}^{k(w)}), w)$, сопоставляющий всякому набору своих аргументов, т.е. числу $w \in (0, w(\varepsilon)]$ и приближению $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ градиента функции $f(\mathbf{x})$ из (5.1), точке $\mathbf{x}^{k(w)}$ метода (5.2), (5.4). Входящие в определение регуляризирующего оператора \mathbf{R}_w , $0 < w \leq w(\varepsilon)$ параметры метода (5.2) удовлетворяют условиям (4.1), (5.1), а в остальном произвольны.

6. Оценка скорости сходимости ПОДКРМ

Оценку скорости сходимости ПОДКРМ (2.4)–(2.7) получим при более строгих предположениях, чем при доказательстве сходимости в теореме 1.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того:

- 1) функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ сильно выпуклая с константой сильной выпуклости $\kappa > 0$;
- 2) для параметров $\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k$, метода (2.4)–(2.7) выполнены (4.1) и, кроме того, наряду с выполнением (4.1), существует номер итерации k_2 такой, что при $k \geq k_2 \geq 1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_k < 1/4, \quad \tau_k < mc_1 - \delta_k, \quad \delta_k < mc_1; \\ \beta_k [\alpha_k^2 (mc_2 + 5mc_1 - 5\delta_k - 5\tau_k) + mc_2/5 + 3\delta_k + 11\tau_k/4] &\leq \\ \leq m(7/12 - 2\alpha_k - \alpha_k^2); \quad 4\alpha_k < 5\beta_k (mc_1 - \delta_k - \tau_k)/(6m) < 1 + 4\alpha_k, \\ 0 < \beta_k (4mc_2 + 60\delta_k + 55\tau_k)/(20m) < 7/12, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $c_1 = 4L\kappa/(L + 2\kappa)$; $c_2 = 3(L + 2\kappa)$.

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая методом (2.4)–(2.7), (4.1), (6.1), из произвольной начальной точки $\mathbf{x}^0 \in H$, начиная с номера $k \geq k_2$ равномерно относительно выбора приближённых градиентов в (2.7) сходится к решению \mathbf{x}^* задачи (1.1) с оценкой

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq [q_k \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + g_{1k}]^{1/2}, \quad (6.2)$$

где $q_k = 1 + 4\alpha_k - 5\beta_k (mc_1 - \delta_k - \tau_k)/(6m)$, $0 < q_k < 1$ при условиях (6.1), (4.1); $g_{1k} \rightarrow 0$ при $\delta_k \rightarrow 0$, $\tau_k \rightarrow 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду доказанной теоремы 1, в условиях теоремы 3 метод сходится $\forall \mathbf{x}^0 \in Q$ равномерно относительно выбора приближённых градиентов из (2.7). Далее, в правой части неравенства (4.19) оценим скалярное произведение с помощью неравенства (см. [21], с. 188)

$$(\nabla\varphi(\mathbf{u}) - \nabla\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{v} - \mathbf{w}) \leq (L + \mu)\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2/4 - L\mu\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2/(L + \mu),$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in Q$, $\mu = 2\kappa$, справедливого для сильно выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}Q$. Полагая здесь $\mathbf{u} = \mathbf{z}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^{k+1}$, и в (4.19) $\mathbf{v}^k = \mathbf{x}^*$, от (4.19) придём к неравенству

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - (1 + 5\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{11}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ + b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq b_{31}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ + b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + g_1, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $b_{11} = 7/12 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m$; $b_{21} = \beta(mc_1 - \delta - \tau)/m$; $b_{31} = \beta(6\delta + 11\tau/2)/m$; $b_{41} = 2\alpha + \alpha^3$; $b_{51} = (L + \mu)\beta/2 = c_2\beta/6$.

В (6.3) сначала оценим квадрат нормы в третьем слагаемом в правой части. Для этого заметим, что в силу следствия теоремы 1 имеют место неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \dots,$$

поэтому

$$-\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq -\alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2. \quad (6.4)$$

Теперь в (6.3) оценим квадраты норм: в четвёртом слагаемом в левой части – с помощью неравенства

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad \varepsilon > 0,$$

получаемого из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{z}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$, $\varepsilon = 6$, тогда

$$b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq -5b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + 5b_{21}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/6; \quad (6.5)$$

в четвёртом слагаемом в правой части – с помощью неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2, \quad \varepsilon > 0$$

, следующего из (4.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$, полагая в нём $\varepsilon = 5$, то есть

$$b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 \leq 6b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + 6b_{51}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5, \quad (6.6)$$

а затем в нём воспользуемся следующим из свойства оператора проектирования неравенством (4.18). Тогда, с учётом оценок (6.4), (6.5), (6.6), от (6.3) придём к неравенству

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - b_1\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 &\leq \\ &\leq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 + g_1, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $b_1 = 1 + 4\alpha - 5b_{21}/6 = 1 + 4\alpha - 5\beta(mc_1 - \delta - \tau)/(6m)$; $b_2 = b_{11} - 6b_{51}/5 = 7/12 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m - c_2\beta/5$; $b_3 = 2\alpha + \alpha^3 + \alpha^2\beta(mc_2 + 5c_1 - 5\delta - 5\tau)/m$;

$g_1 = \beta[5\delta(1 + C)^2 + 12C^2\tau]/(5m)$; $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 2\alpha + \alpha^3$ при условиях (4.1), (6.1).

Далее заметим, что для исследуемого метода в силу следствия теоремы 1 имеет место неравенство $\|\mathbf{y}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2$. Воспользуемся этим неравенством, неравенством $b_3 - b_2 < 0$, справедливым при условиях теоремы 3, и, с учётом неравенств $-b_3 > -b_2$, $b_2 \geq b_3 - b_2$, $(b_3 - b_2)(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq 0$, последовательно получим:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (b_3 - b_2)(\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2) = \\ &= b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_3\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_2(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq \\ &\geq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_3 - b_2)(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq \\ &\geq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Учитывая оценку (6.8) в (6.7) и упростив, придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq q_k\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + g_{1k}, \quad k \geq 0, \quad (6.9)$$

где $q_k = 1 + 4\alpha_k - 5\beta_k(mc_1 - \delta_k - \tau_k)/(6m)$, $0 < q_k < 1$ при условиях (6.1), (4.1); $g_{1k} \rightarrow 0$ при $\delta_k \rightarrow 0$, $\tau_k \rightarrow 0$. Из (6.9) следует (6.2).

Теорема 3 доказана.

Вывод. Предлагаемый регуляризованный проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод предпочтителен в сравнении со своими предшественниками, поскольку имеет преимущество в точности решения задачи и вычислительной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипин А.С. Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. – 1973. – № 2. – С. 60-67.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

3. Васильев Ф.П. Методы решения неустойчивых экстремальных задач с неточно заданными исходными данными. Дисс. ... д.ф.-м.н. – М., 1985. – 340 с.
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Регуляризация, аппроксимация. – М. 1981. – 400 с.
6. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 2. С. 3-11.
7. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 12. – С. 2033-2042.
8. Vasiljev F.P., Nedic A. A regularised continuous projection gradient method of the fourth order // Yugoslav J. of Operations research. – 1995. – V. 5. – № 2. – P. 195-209.
9. Малинов В.Г. Регуляризованный проекционный непрерывный метод для задач минимизации с ограничениями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2002. – № 11. – С. 1646-1656.
10. Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А. Об одном регуляризованном варианте двухшагового метода проекции градиента // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 1996. – № 1. – С. 35-42.
11. Васильев Ф.П., Недич А. О трехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для решения задач минимизации с неточными исходными данными // Изв.вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 35-43.
12. Васильев Ф.П., Недич А. О четырехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными // Mathematica montisnigri. – 1995. – V. 4. – P. 83-101.
13. Рязанцева И.П. Об одном методе итеративной регуляризации для выпуклых задач минимизации // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2000. – Т. 40. – № 2. – С. 181-187.
14. Малинов В.Г. Четырехпараметрический двухшаговый регуляризованный проекционный метод минимизации // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1999. – Т. 39. – № 4. – С. 567-572.
15. Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы кибернетики. Вычислит. вопросы анализа больших систем. – М.: Научн. совет по комплексн. проблеме "Кибернетика" АН СССР, 1989. – С. 5-43.
16. Амочкина Т.В., Антипин А.С., Васильев Ф.П. Регуляризованный непрерывный метод минимизации с переменной метрикой при неточно заданных исходных данных // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 1996. – № 4. – С. 5-11.

17. Малинов В.Г. О регуляризованном непрерывном проекционном методе минимизации с переменной метрикой и его итеративном аналоге // Труды СВМО. – 2006. – Т. 8. – № 1. – С. 263-271.
18. Малинов В.Г. Регуляризованный проекционный двухшаговый метод второго порядка с переменной метрикой для задач минимизации с ограничениями // Математическое программирование: Труды 13-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их применения". – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – Том 1. – С. 245-251.
19. Malinov V.G. On regularized projection two-step variable metric minimization method // 5th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2007). Moscow. April 10-14, 2007. Proceedings. – Moscow. MAKS Press, 2007. – P. 171-173.
20. Малинов В.Г. О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата // Журнал СВМО. – 2010. – Т. 12. – № 4. – С. 37-48.
21. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

On version of regularized projection two-step two-stage quasinewton minimization method

© V. G. Malinov ²

Abstract. In the work regularized method for solving minimization problems with inaccurate initial data on the convex closed set of separable Gilbert variable metric space, based on the new version of projection generalised two-step two-stage Quasinewton method in conjunction with the Tikhonov function method is proposed. For continuously differentiable convex functions with a Lipschitz gradients the convergence of the method and estimates of the rate of convergence of the method on the supplementary requirement of strongly convexity functions are proved. Stop rule is constructed and regularizing operator is described. Distinction of the proposed method from preceding method of the considering class is superior accuracy also calculating stability.

Key Words: minimization on the simple set, regularized projection generalized two-step two-stage, variable metric method, convergence, rate of convergence.

²Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

УДК 517.938

Интервалы вращения счетных топологических марковских цепей с двумя классами состояний

© М. И. Малкин¹

Аннотация. Рассматриваются конечные и счетные топологические марковские цепи, у которых пространство состояний разбито на два класса; такие марковские цепи возникают при символическом описании систем типа геометрической модели Лоренца. Для марковских цепей с указанным разбиением пространства состояний множество вращения вводится как множество индивидуальных статистических средних частот посещения одного из выделенных классов состояний. Доказано, что в случае транзитивности множество вращения топологической марковской цепи представляет собой замкнутый интервал, причем в случае топологического перемешивания интервал вращения нетривиален. Доказано также, что для конечных топологических марковских цепей концы интервала вращения — рациональные числа, которые достигаются как числа вращения периодических точек.

Ключевые слова: Топологические марковские цепи, гиперболические системы, множества вращения

1. Введение

Топологические марковские цепи (ТМЦ) играют роль символических моделей для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, когда фазовое пространство системы допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие аксиоме А.С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [7], [2], [6]). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_P, σ) с матрицей переходов P , такую, что $f : I \rightarrow I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_P \rightarrow \Omega_P$ (точнее говоря, сопряженность имеет место для всех точек, кроме, возможно, так называемого «малого множества», т.е. такого множества, которое не содержит периодических точек и обладающего тем свойством, что любая сосредоточенная на нём инвариантная мера имеет нулевую энтропию Колмогорова-Синая). Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В данной статье рассматриваются конечные и счетные топологические марковские цепи, у которых пространство состояний разбито на два фиксированных подмножества. Такие марковские цепи естественно возникают при моделировании систем типа системы Лоренца или её одномерной модели в виде кусочно-монотонного отображения с двумя интервалами монотонности. Для топологических марковских цепей с фиксированным разбиением пространства состояний множество вращения вводится как множество индивидуальных статистических средних частот посещения одного из выделенных классов состояний. В следующем параграфе мы показываем (см. теорему 1), что множество вращения топологической марковской цепи представляет собой замкнутый интервал, причем в

¹Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

случае топологического перемешивания интервал вращения нетривиален. Далее будет показано (см. теорему 2), что для конечных транзитивных ТМЦ концы интервала вращения представляют собой рациональные числа, являющиеся числами вращения периодических точек. В теореме 2 установлено также, что при определении интервала вращения можно ограничиться орбитами, для которых статистическая частота существует и без перехода к верхнему пределу. Данные результаты отражают характерную природу множества вращения хаотических систем — оно представляет собой интервал, величина которого соответствует степени хаотичности системы (нетривиальность интервала вращения уже указывает на сильные хаотические свойства: положительность топологической энтропии, наличие периодических точек всех периодов за исключением, возможно, конечного числа). Известно, что подобные результаты имеют место и для других классов систем: эндоморфизмов окружности степени 1 и лоренцевских отображений интервала (см. [9], [8]).

2. Интервалы вращения транзитивных топологических марковских цепей

Введем понятие множества вращения топологической марковской цепи (ТМЦ), у которой пространство состояний разбито на два подмножества.

Пусть (L, P, σ) — односторонняя ТМЦ с конечным или счетным пространством состояний L и матрицей переходов P (ее элементами которой являются нули или единицы). Фазовое пространство ТМЦ (L, P, σ) есть

$$\Omega_P := \{\underline{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty} : p_{x_i, x_{i+1}} = 1\},$$

$\sigma : \Omega_P \rightarrow \Omega_P$ — отображение одностороннего сдвига.

Предполагается, что пространство состояний L представлено в виде объединения непесекающихся подмножеств L_1 и L_2 . Тогда $\Omega_P = B(L_1) \cup B(L_2)$, где $B(L_i)$ — цилиндрическое множество вида $B(L_i) = \{\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : x_0 \in L_i\}$, $i = 1, 2$. Будем считать, что для ТМЦ (L, P, σ) разбиение $L = L_1 \cup L_2$ фиксировано. Обозначим χ_{L_2} индикатор множества $L_2 \subset L$. Для произвольной точки $\underline{x} = \{x_n\}_0^{\infty} \in \Omega_P$ число вращения $\rho(\underline{x})$ определяется следующим образом:

$$\rho(\underline{x}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n) \quad (2.1)$$

Таким образом, $\rho(\underline{x})$ есть верхний предел среднего числа попаданий орбиты точки \underline{x} в цилиндрическое множество $B(L_2)$ за время от нуля до $k-1$. Множество вращения $\rho(\sigma|\Omega_P)$ ТМЦ (L, P, σ) относительно разбиения $L_1 \cup L_2$ определяется как замыкание множества значений $\rho(\underline{x})$ для периодических точек \underline{x} :

$$\rho(\sigma|\Omega_P) = \text{clos}\{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \text{Per}(\sigma|\Omega_P)\} \quad (2.2)$$

Пусть (L, P, σ) и (L', P', σ) — две топологически сопряженные ТМЦ, $L = L_1 \cup L_2$, $L' = L'_1 \cup L'_2$ — разбиения пространств состояний, и $h : \Omega_P \rightarrow \Omega_{P'}$ — гомеоморфизм, осуществляющий сопряженность, причем $h(B(L_1)) = B(L'_1)$, $h(B(L_2)) = B(L'_2)$. Тогда из определения множества вращения следует, что $\rho(\sigma|\Omega_P) = \rho(\sigma|\Omega_{P'})$.

Напомним некоторые определения. Непрерывное отображение $\varphi : X \rightarrow X$ называется *топологически транзитивным*, если для любой пары V, V' открытых подмножеств X найдется n такое, что $V \cap \varphi^{-n}V' \neq \emptyset$. Непрерывное отображение $\varphi : X \rightarrow X$ называется *топологически перемешивающим*, если для любой пары V, V' открытых подмножеств X

найдется n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ выполнено $V \cap \varphi^{-n}V' \neq \emptyset$. Заметим, что для конечных и счетных ТМЦ топологическая транзитивность $\sigma|_{\Omega_P}$ равносильна неразложимости, а топологическое перемешивание равносильно неразложимости и аperiodичности матрицы переходов.

Т е о р е м а 2.1. *Если $\sigma|_{\Omega_P}$ топологически транзитивно, то $\rho(\sigma|_{\Omega_P})$ представляет собой замкнутый интервал (возможно, тривиальный). Если $\sigma|_{\Omega_P}$ топологически перемешивает, то $\rho(\sigma|_{\Omega_P})$ — нетривиальный интервал.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неразложимости ТМЦ (L, P, σ) следует, что $Per(\sigma|_{\Omega_P}) \neq \emptyset$. Пусть $\rho_1 = \inf \rho(\sigma|_{\Omega_P}) \neq \sup \rho(\sigma|_{\Omega_P}) = \rho_2$. Очевидно, что $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти периодические точки \underline{x} и \underline{y} , такие что $\rho(\underline{x}) - \rho_1 < \varepsilon$, $\rho_2 - \rho(\underline{y}) < \varepsilon$. Пусть \underline{x} и \underline{y} имеют периоды q_1 и q_2 соответственно и $\rho(\underline{x}) = \frac{p_1}{q_1}$, $\rho(\underline{y}) = \frac{p_2}{q_2}$. Обозначим через b_1 и b_2 блоки (x_0, \dots, x_{q_1-1}) и (y_0, \dots, y_{q_2-1}) соответственно. Пусть $c = (z_0, \dots, z_q)$ -непустой блок (т.е. $(z_i, z_{i+1}) \in P$ для $i = 0, \dots, q-1$); будем называть c периодическим блоком, если $(z_q, z_0) \in P$.

Для периодического блока c и натурального числа n обозначим через c^n непустой периодический блок, получающийся n -кратным повторением c , а в случае $n = \infty$ определим периодическую точку $c^\infty \in Per(\sigma|_{\Omega_P})$, получающуюся бесконечным повторением c . Для произвольного конечного блока c обозначим через \hat{c} блок, получающийся из c удалением последнего символа.

Поскольку (L, P, σ) — неразложимая ТМЦ, то найдется непустой блок c_1 (соответственно, c_2), начинающийся символом x_0 (соответственно, y_0) и кончающийся символом y_0 (соответственно, x_0). Пусть $c_1 = (x_0, v_1, \dots, v_t, y_0)$, $c_2 = (y_0, w_1, \dots, w_s, x_0)$, тогда $\hat{c}_1 = (x_0, v_1, \dots, v_t)$, $\hat{c}_2 = (y_0, w_1, \dots, w_s)$. Для произвольных $m, n \in \mathbf{N}$ построим периодическую точку $\underline{z} = (b_1^n, \hat{c}_1, b_2^m, \hat{c}_2)^\infty$. Тогда

$$\rho(\underline{z}) = \frac{np_1 + mp_2 + t_1 + s_1 + \chi_{L_2}(x_0) + \chi_{L_2}(y_0)}{nq_1 + mq_2 + t + s + 2},$$

где

$$t_1 = \sum_{i=1}^t \chi_{L_2}(v_i), s_1 = \sum_{i=1}^s \chi_{L_2}(w_i).$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ так, что $\frac{n}{m} \rightarrow \lambda$, где $0 \leq \lambda \leq \infty$, получим, что $\rho(\underline{z})$ стремится к $\frac{\lambda p_1 + p_2}{\lambda q_1 + q_2}$. В силу произвольности λ , получаем, что значения $\rho(\underline{z})$, когда $m, n \in \mathbf{N}$, плотны в интервале $[\rho(\underline{x}), \rho(\underline{y})]$. Поскольку $\rho(\underline{x}), \rho(\underline{y})$ можно выбрать сколь угодно близкими к ρ_1, ρ_2 , то отсюда следует первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\sigma|_{\Omega_P}$ топологически перемешивает. Докажем, что $\rho(\sigma|_{\Omega_P})$ не может быть тривиальным. Действительно, в противном случае $\rho(\sigma|_{\Omega_P}) = \{\frac{p}{q}\}$ для некоторых несократимых $p \in \mathbf{Z}^+, q \in \mathbf{N}$. Тогда период любой точки $\underline{x} \in Per(\sigma|_{\Omega_P})$ делится на q . С другой стороны, для любого символа $i \in L$ в силу перемешивания найдутся $n \in \mathbf{N}$ и непустые блоки c_1, c_2 длины n и $n+1$ соответственно, начинающиеся и кончающиеся в i . Тогда точки $(\hat{c}_1)^\infty, (\hat{c}_2)^\infty$ периодические и их периоды равны n и $n+1$ соответственно. Отсюда следует, что НОД периодов периодических точек равен единице. Таким образом, $\rho(\sigma|_{\Omega_P})$ есть либо $\{0\}$, либо $\{1\}$. Пусть для определенности $\rho(\sigma|_{\Omega_P}) = 0$, тогда все символы любой периодической точки должны принадлежать L_1 , но это противоречит неразложимости ТМЦ (т.к. $L_2 \neq \emptyset$).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Периодические точки, представляющие концы интервала вращения

В этом параграфе мы показываем, что для конечных транзитивных ТМЦ концы интервала вращения представляют собой рациональные числа, являющиеся числами вращения периодических точек. Кроме того, будет показано, что множество вращения представляет собой набор чисел вращения тех точек, для которых статистическое среднее существует (т.е. тех точек, для которых верхний и нижний пределы при подсчете частоты посещения выделенного класса совпадают).

Т е о р е м а 3.1. Пусть (L, P, σ) - неразложимая конечная ТМЦ. Тогда концы интервала вращения $\rho(\sigma|\Omega_P)$ - рациональные числа. Интервал вращения может быть представлен в виде:

$$\rho(\sigma|\Omega_P) = \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Omega_P\} = \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\},$$

где Λ - подмножество, состоящее из таких точек Ω_P , для которых существует предел в (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конечного непустого блока $c = (x_0, \dots, x_{q-1})$ определим число вращения

$$\rho(c) = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} \chi_{L_2}(x_i)}{q}.$$

Очевидно, число вращения периодической точки $\underline{x} = (x_n)_0^\infty$ периода q равно $\rho(c)$, где $c = (x_0, \dots, x_{q-1})$. Поэтому $\inf \rho(\sigma|\Omega_P) = \inf \rho(c)$, где нижняя грань берется по периодическим блокам c . Если предположить, что эта нижняя грань не достигается, то для любого N найдется периодический блок c длины большей N такой, что $\rho(c) < \rho(d)$ для любого периодического блока d , длина которого меньше длины блока c . Пусть $N = \text{card } L$ и блок $c = (x_0, \dots, x_{q-1})$, $q > N$, обладает указанным свойством. Среди символов блока c есть хотя бы два совпадающих, т.к. $q > N$. Пусть $x_i = x_j$, $0 \leq i < j \leq q-1$. Обозначим $d = (x_i, \dots, x_{j-1})$ и $c' = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_{q-1})$. В силу свойств блока c имеем: $\rho(c) < \rho(d) = \frac{p_1}{j-i}$, $\rho(c) < \rho(c') = \frac{p_2}{q-j+i}$ для некоторых $p_1, p_2 \in \mathbf{N}$. С другой стороны, число $\rho(c) = \frac{p_1+p_2}{(j-i)+(q-j+i)}$ должно принадлежать интервалу $[\rho(d), \rho(c')]$. Полученное противоречие показывает, что $\inf \rho(c)$ достигается на некотором периодическом блоке c . Тогда для периодической точки $\underline{x} = c^\infty$ имеем $\rho(\underline{x}) = \inf \rho(\sigma|\Omega_P)$. Аналогично находится периодическая точка \underline{y} , для которой $\rho(\underline{y}) = \sup \rho(\sigma|\Omega_P)$.

Покажем теперь, что для произвольного γ из интервала вращения можно найти точку $\underline{x} \in \Omega_P$ такую, что предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n)$$

существует и равен γ . Действительно, из доказательства предыдущей теоремы следует, что для произвольного $i_0 \in L$ значения $\rho(c)$, когда c пробегает периодические блоки с началом в i_0 , плотны в интервале вращения (в обозначениях теоремы 12 в качестве c_1 можно взять блок, содержащий символ i_0 и затем сдвинуть в i_0 начало периодического блока $b_1^n \hat{c}_1 b_2^m \hat{c}_2$). Таким образом, найдется последовательность c_n периодических блоков периода q_n с началом в точке i_0 , такая что $\rho(c_n) = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, возьмем последовательность натуральных чисел l_n такую, что $\frac{l_n}{q_{n+1}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и рассмотрим точку $\underline{x} \in \Omega_P$ вида $\underline{x} = c_1^{l_1} c_2^{l_2} c_3^{l_3} \dots$.

Покажем, что $\rho(\underline{x}) = \gamma$. Действительно, любое $k \in \mathbf{N}$ однозначно представляется в виде $k = \sum_{i=1}^m l_i q_i + j q_{m+1} + s$, где $0 \leq j < l_{m+1}, 0 \leq s < q_{m+1}$. Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^m l_i p_i + j p_{m+1}}{\sum_{i=1}^m l_i q_i + (j+1) q_{m+1}} \leq \frac{\sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n)}{k} \leq \frac{\sum_{i=1}^m l_i p_i + (j+1) p_{m+1}}{\sum_{i=1}^m l_i q_i + j q_{m+1}} \quad (3.1)$$

Очевидно, что $m \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому, учитывая стремление $\frac{p_m}{q_m} \rightarrow \gamma$, получим, что правая и левая части последнего двойного неравенства сходятся к γ при $k \rightarrow \infty$ (эта сходимость доказывается непосредственно с использованием теоремы Штольца).

Таким образом, имеем $\rho(\sigma|\Omega_P) \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\} \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Omega_P\}$. Покажем, что $\{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\} \subset \rho(\sigma|\Omega_P)$. Пусть $\gamma = \rho(\underline{x})$ для некоторой точки $\underline{x} = (x_n)_0^\infty \in \Omega_P$ и пусть $c_n = (x_0, \dots, x_{q_n-1})$ -последовательность конечных блоков точки такая, что $q_n \rightarrow \infty, \rho(c_n) \rightarrow \gamma$. Поскольку (L, P, σ) -конечная неразложимая ТМЦ, то для любой пары $i, j \in L$ найдется блок длины не более $N = \text{card } L$, начинающийся в i и кончающийся в j . Таким образом, для любого $n \in \mathbf{N}$ имеется непустой блок $(x_{q_n-1}, y_1^{(n)}, \dots, y_{t_n}^{(n)}, x_0)$ длины не более N , и можно определить периодический блок $d_n = (x_0, \dots, x_{q_n-1}, y_1^{(n)}, \dots, y_{t_n}^{(n)})$ длины не более $q_n + N$. Легко видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(d_n) = \gamma$ и поэтому $\gamma \in \rho(\sigma|\Omega_P)$.
 Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Как следует из доказательства теоремы, включение $\rho(\sigma|\Omega_P) \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\}$ справедливо также и для счетных ТМЦ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-12056 офи-м, и гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes Math., **470** (1975). Springer-Verlag.
2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai. *Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards*, Uspekhi Matem. Nauk, **45** (1990), 97-134.
4. Y. Guivarch, J. Hardy. *Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. **24** (1988), 73-98.
5. F. Hofbauer. *On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy*, Israel J. Math. **34** (1979), 213-236.
6. M. Malkin, *On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval*, Selecta Mathematica Sovietica, **8** (1989), 131-139.
7. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, *О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца*, Труды ММО, **44** (1982), 150-212.
8. М.-С.Ли, М.Малкин. *Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps*. Int. Jour. of Bifurcation and Chaos. **13** (2003), 3353-3372.

9. М.И.Малкин. *Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности*. Украинский мат. журнал. **35** (1983), 327-332.

The intervals of rotation of denumerable topological Markov chains with two classes of states

© M.I. Malkin²

Abstract. We consider finite and countable topological Markov chains whose states are partitioned into two classes; such Markov chains occur as symbolic description of systems like geometric Lorenz models. The rotation set for such a Markov chain is defined as the set of individual mean frequencies of visiting the chosen class of the partition. We prove that for transitive topological Markov chain, the rotation set is a closed interval, which is nontrivial provided that the chain is topologically mixing. We also prove that for a finite transitive topological Markov chain, the endpoints of the rotation interval are rational and represent the rotation numbers of two periodic points.

Key Words: Topological Markov chain, hyperbolic systems, the set of rotation

²Assistant professor of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

УДК 517.977.5

Исследование размер-состав распределения продукта сополимеризации бутадиена со стиролом.

© Э. Н. Мифтахов¹, С. А. Мустафина²

Аннотация. В работе построена математическая модель кинетической схемы процесса сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии. Решена прямая задача и исследовано размер-состав распределение сополимера.

Ключевые слова: сополимеризация, кинетическая схема, размер-состав распределение.

1. Кинетическая схема процесса сополимеризации

Производство эмульсионных бутадиен-стирольных каучуков занимает одно из ведущих мест в промышленности СК. В основе получения сополимеров лежит свободно-радикальный цепной процесс, заключающийся в многократном присоединении молекул мономеров к активным центрам растущей полимерной цепи.

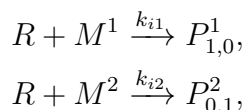
Кинетический метод моделирования полимеризационных процессов заключается в составлении и численном решении кинетических уравнений для концентрации всех типов частиц, участвующих в процессе. При построении модели сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии будем считать, что реакционная способность активного центра на конце растущей цепи определяется лишь природой концевого звена [1]. Рассмотрим по четыре элементарных реакции роста и обрыва цепи с участием двух мономеров M^1 и M^2 и двух типов растущих цепей, отличающихся природой концевого звена. Тогда кинетическую схему сополимеризации бутадиена со стиролом можно описать в виде следующих стадий:

1. Иницирование. На стадии иницирования образуются свободные радикалы. Их образование происходит в два этапа. На первом этапе распадаются молекулы инициатора (I), содержащиеся в исходной смеси:



где k_d - константа скорости распада инициатора, R - иницирующий (первичный) радикал.

На втором этапе иницирования в результате взаимодействия первичного радикала и мономеров M^1 и M^2 образуются мономерные радикалы, отличающиеся природой концевого звена:

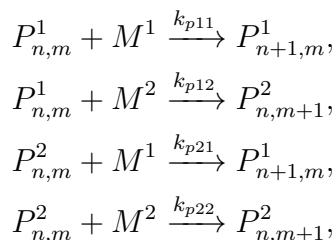


где k_i - константа скорости реакции иницирования.

¹Аспирант Стерлитамакской государственной педагогической академии им.Зайнаб Бишевой, г. Стерлитамак; promif@mail.ru.

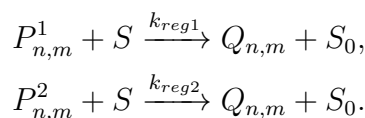
²Заведующая кафедрой математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академии им.Зайнаб Бишевой, г. Стерлитамак; mustafina_sa@mail.ru

2. Рост цепи:

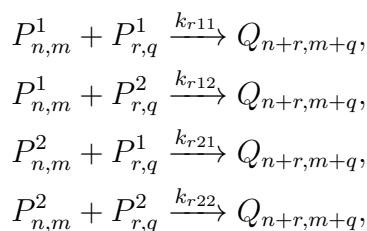


где k_p - константа скорости реакции роста цепи, $P_{n,m}$ - активная ("растущая") цепь сополимера длиной $n + m$, содержащая n звеньев мономера M^1 и m звеньев мономера M^2 .

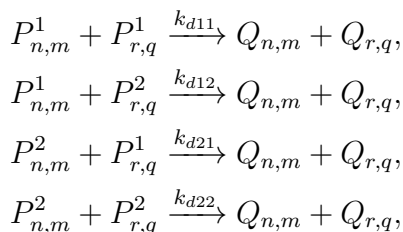
3. Передача цепи в результате взаимодействия с регулятором S :



4. Обрыв цепи в результате рекомбинации:



и диспропорционирования:



где k_r, k_d - константы скоростей реакций рекомбинации и диспропорционирования.

2. Решение прямой задачи

Составляя матрицу стехиометрических коэффициентов и умножая ее на вектор-столбец скоростей реакции, получим бесконечную (порядка 10^6) систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую процесс сополимеризации бутадиена со стиролом. Существует различные подходы к решению полученной системы, один из которых предлагает использование прямых численных методов решения такого рода систем, однако даже с помощью современных ЭВМ расчет может занять довольно длительное время.

Один из методов, нашедших широкое применение в последнее время, является метод моментов [2], позволяющий перейти от бесконечной системы дифференциальных уравнений к конечной [3]. Кроме того, систему можно существенно упростить за счет принятия

следующих допущений: 1) скорость изменения концентраций радикалов в системе много меньше скорости их образования и гибели, т.е. в полимеризационной системе устанавливается квазистационарность по радикалам (принцип квазистационарности); 2) реакционная способность макрорадикала не зависит от его длины (принцип Флори).

На основе решения системы строится кривая молекулярно-массового распределения (ММР). Для анализа усредненных характеристик ММР вводятся понятия моментов активных:

$$\begin{aligned}\psi_k^{M^1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (nw_a + mw_b)^k P_{n,m}^1, \\ \psi_k^{M^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (nw_a + mw_b)^k P_{n,m}^2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

и неактивных цепей:

$$\psi_k^Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (nw_a + mw_b)^k Q_{n,m},\tag{2.2}$$

где $k = 0, 1, \dots, \infty$; w_a, w_b - молекулярные массы, участвующих в сополимеризации мономеров M^1 и M^2 . На основании моментов рассчитываются среднечисленная M_n и среднемассовая M_w молекулярные массы:

$$\begin{aligned}M_n^Q &= \frac{\psi_1^Q}{\psi_0^Q}, \\ M_w^Q &= \frac{\psi_2^Q}{\psi_1^Q}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Выражения для моментов активных цепей получим в явном виде с использованием производящих функций вида [4]:

$$\begin{aligned}G(s, u) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} s^{n+m} u^{nw_a + mw_b} P_{n,m}^1, \\ F(s, u) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} s^{n+m} u^{nw_a + mw_b} P_{n,m}^2.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Применяя численный метод Адамса-Мултона для конечной системы дифференциальных уравнений, получим зависимость расхода реагентов, а также значений моментов неактивных цепей от времени [5], которые используются для расчета усредненных молекулярных характеристик по формулам (2.3).

3. Химический размер и состав макромолекул

Поскольку рассматриваемый процесс является сополимеризационным с участием двух мономеров (бутадиен, стирол), то важно уметь прогнозировать состав сополимера и распределение звеньев в цепи. Это обусловлено тем, что свойства сополимеров в большей степени определяются именно составом и распределением звеньев того или иного мономера, т.е. композиционной неоднородностью. На композиционную неоднородность существенное влияние оказывают активности мономеров и различные физические факторы.

Если взять произвольную молекулу сополимера, то охарактеризовать ее можно заданием чисел m и n , входящих в нее мономерных звеньев M^1 и M^2 . Эти числа рассматривают как компоненты некоторого вектора I , характеризующего химический размер $l = m + n$ и состав $\zeta_1 = m/l$, $\zeta_2 = n/l$ молекулы.

Помимо полученного выше ММР, для сополимеров важное значение приобретает размер-состав распределение (РСР) [6], числовое или весовое. Числовое РСР $f_N(I)$ равно доле молекул в образце полимера, характеризуемого вектором I . Весовое РСР $f_W(I)$ равно доле всех звеньев в этих молекулах. Последнее определяется соотношением:

$$f_W(I) = f_W(l)W(l|\zeta), \quad (3.1)$$

где $f_W(l)$ - распределение по размеру, $W(l|\zeta)$ - фракционное композиционное распределение.

Для получения РСР продуктов сополимеризации, имеющих в реакционной среде при заданной конверсии p , следует усреднить мгновенное РСР по p :

$$\langle f_W(l, \zeta) \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p f_W(l; p') W(l|\zeta; p') dp'. \quad (3.2)$$

В силу того, что продукт сополимеризации имеет высокий молекулярный вес, основная часть мономерных звеньев будет входить в состав достаточно длинных цепей. В рамках этого приближения пренебрегают мгновенной составляющей композиционного распределения по сравнению с его конверсионной составляющей. РСР факторизуется на произведение распределений по размеру и составу:

$$\langle f_W(l, \zeta) \rangle = f_W(l; p') \langle f_W(\zeta; p) \rangle. \quad (3.3)$$

Первое из них описывается выражением:

$$f_W(l) = \left[\frac{(1-\lambda)l}{2} \theta + \lambda \right] \theta^2 l e^{-\theta l}, \quad (3.4)$$

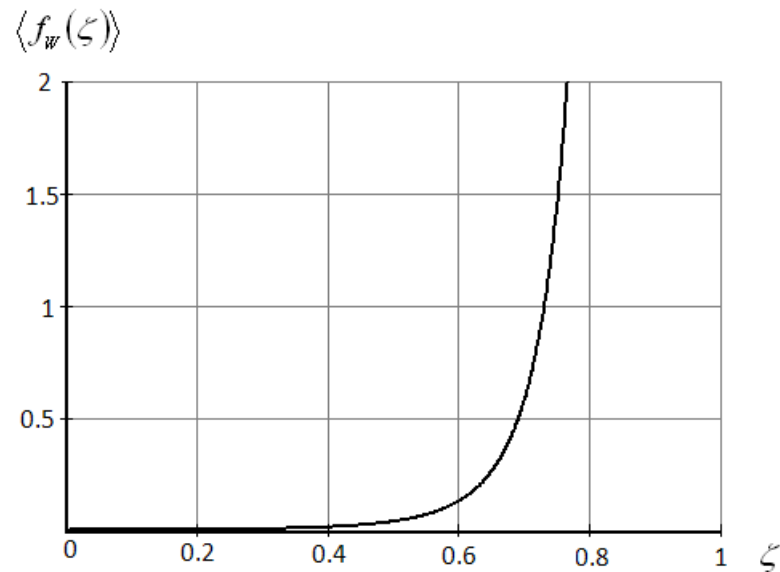
где λ - доля радикалов, гибнущих по механизму диспропорционирования, а параметры берутся при том значении конверсии, где мгновенный состав сополимера X равен ζ . Второе распределение имеет вид:

$$\langle f_w(\zeta, p) \rangle = \frac{1}{p} \left| \frac{dX}{dp} \right|_{X=\zeta}^{-1}. \quad (3.5)$$

Для построения распределения (3.5) используется зависимость мгновенного состава сополимера X от конверсии p в параметрическом виде:

$$X = X(x), x = x(p), \quad (3.6)$$

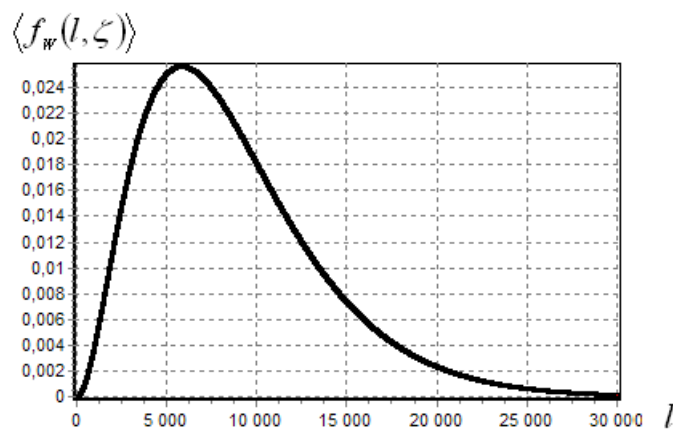
где x представляет собой мольную долю мономеров.



Р и с у н о к 3.1

Кривая композиционного распределения продуктов бинарной сополимеризации бутадиена со стиролом, полученных при конверсии 70%.

Найденное распределение (3.5) при конверсии 70% имеет вид, изображенный на рисунке 3.1. Распределение продуктов сополимеризации по размеру и составу изображено на рисунке 3.2.



Р и с у н о к 3.2

Распределение продуктов сополимеризации бутадиена со стиролом по размеру и составу при конверсии 70%.

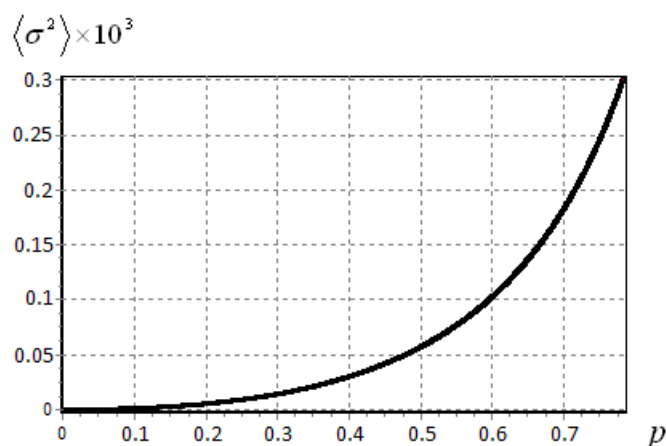
В целях повышения качества продукта сополимеризации важно знать условия сополимеризации, при которых могут образовываться неоднородные по составу продукты, чтобы избежать нежелательной композиционной неоднородности. Количественной характеристикой этой неоднородности служит дисперсия композиционного распределения:

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p \sigma^2(p') dp' = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad (3.7)$$

где $\langle X \rangle$ представляет собой средний состав, полученный путем усреднения его мгновенного значения X по всем степеням превращения p' , меньшим p :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p X dp' \quad (3.8)$$

Для нахождения значений дисперсии композиционного распределения, выражаемой в виде разности двух интегралов, был применен численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Полученная конверсионная зависимость приведена на рисунке 3.3. Дисперсия возрастает в ходе сополимеризации, достигая в правой точке (конверсия более 70%) своего наибольшего значения.



Р и с у н о к 3.3

Конверсионная зависимость дисперсии композиционного распределения продуктов сополимеризации бутадиена со стиролом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семчиков Ю.Д. Высокомолекулярные соединения. – М.: Издательский центр "Академия", 2003. – 368 с.
2. Подвальный С.Л. Моделирование промышленных процессов полимеризации. – М.: Химия, 1979. – 256 с.
3. Мифтахов Э.Н., Насыров И.Ш., Мустафина С.А. Математическая модель процесса эмульсионной сополимеризации. //Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010, – Т. 5.
4. Мифтахов Э.Н., Насырова Л.И. Математическое моделирование технологической схемы процесса сополимеризации. //Труды Средневолжского математического общества, Саранск, – 2010, – Т. 12, № 3. – С. 127-131
5. Мифтахов Э.Н., Насыров И.Ш., Мустафина С.А. Моделирование процесса эмульсионной сополимеризации бутадиена со стиролом. Башкирский химический журнал, – 2011, – Т. 16, № 1.
6. Хохлов А.Р., Кучанов С.И. Лекции по физической химии полимеров. – М.: Мир, – 2000. – 192 с.

Investigation of the size-composition distribution of the product of copolymerization of butadiene with styrene.

© E. N. Miftakhov³ S. A. Mustafina⁴

Abstract. In this paper, a mathematical model of the kinetic scheme of the copolymerization of butadiene and styrene in emulsion. Solved the direct problem and made analysis of the size-composition distribution of the copolymer.

Key Words: copolymerization, kinetic scheme, size-composition distribution.

³Post-graduate student, Sterlitamak Teacher Training Academy after Z. Biyisheva, Sterlitamak; promif@mail.ru.

⁴Head of Chair of Mathematical Modelling, Sterlitamak Teacher Training Academy after Z. Biyisheva, Sterlitamak; mustafina_sa@mail.ru

УДК 629.075

Моделирование популяционных изменений на основе численного решения разрывных ОДУ

© А. Ю. Переварюха¹

Аннотация. В работе описана разработанная модель на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и исследованная в вычислительной среде с применением гибридного представления модельного времени. Модель имеет интерпретацию в теории скачкообразных изменений в раннем онтогенезе рыб и разработана для задачи исследования эффективности воспроизводства осетровых рыб в Волге. Численное исследование ОДУ показало наличие локально-несвязной границы $\partial\Omega_1$ областей притяжения двух аттракторов.

Ключевые слова: моделирование динамики популяций, гибридные вычислительные системы.

1. Введение

В основе математической модели биологического процесса всегда лежит некоторая гипотеза о его функционировании. Как правило, при построении модели, практически как в учебных физических задачах, пользуются весьма упрощенным представлением о процессе. Полагается, что учет не кажущихся основными факторов и явлений внесет незначительные количественные поправки в результат моделирования, который в случае популяционных процессов и так будет весьма приблизительным. Однако, как показано в настоящей статье, учет дополнительных явлений изменяет качественное поведение динамической системы.

Для динамики численности биологических сообществ характерно саморегулирование. Внутрипопуляционным механизмом регуляции, влияющим на динамику популяций осетровых рыб Волго–Каспия, является сложная зависимость между нерестующим запасом и формирующимся пополнением. В ихтиологии предлагались математические модели для формализации зависимости пополнения R от запаса S (stock–recruitment), в частности, известна модель У. Рикера:

$$R = aSe^{-bR},$$

где a — безразмерный параметр, характеризующий репродуктивный потенциал популяции; b — отражает влияние лимитирующих зависящих от плотности факторов. Рикер в работе [4] обосновал на богатом фактическом материале теорию формирования пополнения популяций рыб. Однако использование модели на практике оказалось связано с противоречивыми результатами.

Проблема несоответствия прогнозов и данных наблюдений связана с тем, что не анализировались свойства динамической системы $M \langle \Omega, t, \psi \rangle$, где оператор эволюции $\psi(R; \mathbf{a})$ есть формализация некоторой параметрической зависимости между основными величинами, характеризующими развитие популяционного процесса, и в случае итераций модели Рикера: $R_{n+1} = aR_n \exp(-bR_n)$ для M наблюдается возникновение топологически неэквивалентных фазовых портретов.

Условие первого метаморфоза поведения M определяется тем, когда производная в неподвижной точке x^* перестанет удовлетворять критерию устойчивости $|\psi'(x^*)| < 1$,

¹Младший научный сотрудник лаборатории Информационных технологий с системным анализе и моделировании, Санкт–Петербургский институт информатики и автоматизации РАН; madelf@pisem.net

следующему из теоремы Гробмана–Хартмана [1]. Для однопараметрического семейства отображений $\psi : I \rightarrow I$ класса гладкости C^2 с условиями: $\psi'_x(x^*) = v(a)$, $\psi'(x) \neq 0$ если $x \neq c$, $\psi''(c) \neq 0$ при $a = \bar{a}$ таком что $\psi'(x^*) = -1$ наблюдается следующая ситуация для $\psi^2(x)$ в теряющей устойчивость x^* :

$$\frac{d\psi^2(x^*)}{dx} = 1, \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2\psi^2(x)}{dx^2} = \psi''(\psi(x))(\psi'(x))^2 + \psi'(\psi(x))\psi''(x),$$

$$\frac{d^2\psi^2(x^*)}{dx^2} = 0. \quad (1.2)$$

Следовательно, $d\psi^2(x)/dx$ при $a = \bar{a}$ имеет в x^* локальный экстремум, который при выполнении $d^3\psi^2(x)/dx^3 < 0$ будет максимумом и тогда с появлением двух неподвижных точек x_1^*, x_2^* для $\psi^2(x)$ возникает бифуркация удвоения периода.

Дифференциальный инвариант Шварца:

$$H_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2.$$

обладает свойством сохранять знак при итерациях, если $H_f < 0$ то $H_{f^n} < 0$, а с учетом (1.1) и (1.2) получаем:

$$H_{\psi^2(x^*)} = \frac{d^3\psi^2(x)}{dx^3}.$$

Легко показать, что для модели Рикера $H < 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

При плавном увеличении бифуркационного параметра в области значений $a > e^2$ происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Изменение поведения системы через бесконечный каскад бифуркаций известно как сценарий М. Фейгенбаума [5]. Подобный переход к хаосу реализуется в дифференцируемых одномерных отображениях при выполнении критериев теоремы Д. Сингера [6] доказавшего, что отображение унимодальной функции с сохраняющим знак $H_\psi < 0$ (критерии Сингера) может иметь не более одной устойчивой периодической траектории и эта траектория является ω -предельным множеством для точки $c : \psi'(c) = 0$.

Общепринятого математического определения явления хаоса не существует. Известно несколько предложенных определений понятия «хаос». Для одномерных отображений $f : I \rightarrow I$ воспользуемся результатами М. Веллекупа и Р. Берглунда [7],

О п р е д е л е н и е 1.1. *Отображение $f : I \rightarrow I$ обладает хаотической динамикой, если для f выполняется свойство транзитивности: для всех открытых $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ и $Y \subseteq V, Y \neq \emptyset \exists n \geq 0$, что $f^n(U) \cap Y \neq \emptyset$.*

Известны попытки популяционной интерпретации перехода к хаосу. Однако, возможность применения странных аттракторов к проблемам динамики популяций значительно переоценивается. Существует немало функциональных итераций, не имеющих отношения к моделированию природных процессов, для которых возможно возникновение хаотических аттракторов фрактальной структуры, традиционно называемых «странными».

2. Гибридная модель с изменяемой правой частью

Автором ранее была разработана модель воспроизводства [2] в виде системы ОДУ, отражающая динамику убыли численности поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta) N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}, \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где: S – величина нерестового запаса; $w(t)$ – отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; g – параметр, учитывающий ограниченность количества доступных кормовых объектов; убывающая функция $\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$, слабо влияет на вычисление итогового пополнения $N(T)$, если численность запаса достаточно велика и введена для моделирования резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации популяции, важного для благополучия осетровых; ζ – параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; $k \in [\frac{1}{2}, 1)$; c – параметр, характеризующий степень выраженности эффекта Олли; α – мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β – мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности; $t \in [0, T]$ – специфичный для биологического вида интервал уязвимости.

График зависимости, полученный при численном решении задачи Коши с начальными условиями $w(0) = w_0, N(0) = \lambda S$, где λ – средняя плодовитость особей, представляет унимодальную кривую с уменьшающимся наклоном ниспадающей правой ветви (рис. 1, при параметрах $\alpha = 0.8 \times 10^{-14}$, по средней плодовитости волжской севрюги за время наблюдений $\lambda = 227 \times 10^3, c = 2.5 \times 10^{-3}, T = 55$ сут.). Кривая имеет ненулевую горизонтальную асимптоту, две точки перегиба и две нетривиальные точки пересечения с биссектрисой координатного угла и согласуется с данными наблюдений о лабораторных популяциях.

Однако, данная зависимость не согласовывалась с данными о воспроизводстве волжской популяции севрюги, для которой наблюдалось наличие двух локальных экстремумов и это явление определило цель построения модифицированной модели воспроизводства популяций рыб.

Изучение биологических особенностей осетровых привело к выводам о существенном влиянии быстрых изменений в их онтогенезе, имеющем экспериментальное подтверждение в работах по исследованию смены этапов развития организмов. В современных условиях развития вычислительной математики для решения задачи создания модели, учитывающей метаморфозы в жизненном цикле, целесообразно воспользоваться представлением модельного времени:

$$\tau = \{ \{Gap_pre_1, [0, T_1], Gap_post_1\}_1, \dots, \{Gap_pre_n, [T_{n-1}, T_n], Gap_post_n\}_n \}.$$

где Gap_pre – «временная щель» для вычисления согласованных начальных условий и проверки предиката на левом конце промежутка очередного длительного поведения; Gap_post – аналогичная «щель», где определяются новые начальные условия на правом конце текущего промежутка τ_i для решения следующей по порядку или выбранной по условиям предиката задачи Коши. T_i – время срабатывания перехода: в которой становится истинным предикат события, приводящего к смене поведения. Таким образом, модельное гибридное (тождественный термин непрерывно-дискретное) время определяется пронумерованной и упорядоченной последовательностью кадров, в которых непрерывная составляющая времени сменяется дискретными отсчетами.

При достижении особых состояний в пространстве переменных состояния (событий) могут изменяться значения параметров в правых частях, форма правой части или число уравнений. События описываются предикатами, определенными на решениях дифференциальных уравнений и позволяющими вычислительное среде выделять из всего множества состояний системы то, которое приводит к изменению поведения. Конечное множество интервалов между событиями и будут соответствовать моделируемым стадиями развития. Для их исследования гибридных систем разработаны специальные алгоритмы [3]. Удобной формой представления непрерывно-дискретных систем является гибридный автомат, расширение идеи дискретных карт состояний с условными переходами, где узлам графической формы сопоставлены процессы, описываемые дифференциальными уравнениями.

Уравнение из (2.1) для текущей численности поколения N заменяется уравнением с дважды изменяемой правой частью с указанием предикатов для таких изменений:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)N(t), 0 < t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau) + \beta)N(t), t > \tau, w(t) < w_{k1} \\ -(\alpha_2 w(t)N(t))N(t - \varsigma), w_{k1} < w(t) < w_k \end{cases} \quad (2.2)$$

где $[0, \tau)$ – длительность периода развития D_0 , определяемая биологическими особенностями вида (для осетровых в среднем 8 суток); w_k – интерпретируется как уровень развития, при достижении которого изменяется характер действия факторов смертности (из-за смены спектра питания или выхода из под пресса доминирующего хищника) и определяющий длину интервала уязвимости. Для осетровых рыб были выделены две важные смены стадий в раннем онтогенезе. Первый переход D_1 связан с началом экзогенного питания, к которому личинки переходят после рассасывания желточного мешка, или незадолго до полного использования мешка. Второй переход D_2 определен началом активной миграции молоди севрюги в пресноводную акваторию Северного Каспия².

Дополнительно введено уравнение с отклоняющимся аргументом для старшей стадии. Величина ς учитывает запаздывающее действие физиологических процессов усвоения пищи на скорость убыли численности поколения.

Зависимость запас-пополнение модели (2.2) обладает двумя критическими точками $\psi'(c_1) = \psi'(c_2) = 0$ (c_1 – максимум, c_2 – минимум), а график четыре раза пересекает биссектрису $R = S$, соответственно, множеством нетривиальных особых точек для траектории динамической системы будет последовательность $\Phi = \{R_1^*, R_2^*, R_3^*, R_4^*\}$. Траектория системы зависит от расположения устойчивых точек.

Анализ устойчивости неподвижных точек M исследуемой в инструментальной среде *AnyLogic* целесообразно проводить, определяя при численном решении уравнений свойства второй итерации $\psi^2(x)$. Необходимым и достаточным условием устойчивости неподвижной точки x^* отображения $\psi : I \rightarrow I, \psi \in C^2$ является выполнение неравенств $\psi^2(x) > x$ при $x < x^*$ и $x < x^*$ при $\psi^2(x) < x$ при $x > x^*$.

Проблема множественности стабильных «состояний» у пресноводных экосистем неоднократно обсуждалась в литературе и в том числе с применением идей теории катастроф [8], но ранее не рассматривалась возможность наличия множества неустойчивых стационарных точек.

В случае M с оператором эволюции в виде решения модели (2.2), как показал анализ свойств второй итерации, устойчивые и неустойчивые особые не будут чередоваться. Интервал между неустойчивыми первой и третьей особыми точками не содержит устойчивой

²Физиологи определяют порядка десятка коротких стадий у личинок и молоди рыб, но увеличение правых частей модели чрезмерно усложнит параметрическую идентификацию.

точки. Множество аттракторов, как и в случае M на основе (2.1), так же ограничено парой: в данном случае $\{R_4^*, R^0 \equiv (0, 0)\}$. Однако, вычислительные эксперименты показали:

- 1) Ω_1 и Ω_2 не имеют гладкой границы и не образуют непрерывных подпространств в фазовом пространстве: область притяжения аттрактора R_4^* прерывается вкраплениями, принадлежащими области притяжения тривиального равновесия R^0 .
- 2) ω -пределным множеством для экстремума c_1 является устойчивое равновесие R_4^* : $\omega(c_1) = R_4^*$ тогда как $\omega(c_2) = R^0$.

Граница областей притяжения $\partial\Omega_1 \notin \Omega_1 \cup \Omega_2, \psi(\partial\Omega_1) \in \partial\Omega_1$ локально-несвязна («locally disconnected basin boundaries» по классификации фрактальных границ в [9], где эффект рассматривался для отображения, являющегося третьей итерацией $f^3(x)$ для $f(x) = 4ux(1-x)$ при значении u , соответствующего циклу с $p = 3$). Множество $\partial\Omega_1$ есть «странный» по описанию в [10], гомеоморфный канторовскому множеству репеллер. В области Ω_3 , ограниченной R_1^* и R_3^* такой, что:

$$\Omega_3 \setminus (\Phi \cup \partial\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \Omega_1$$

траектория при $R_0 \notin \Phi \cup \partial\Omega_1$ заполняет область фазового пространства, но $\exists i \in \mathbb{Z}, R_{i+1} \notin \Omega_3$. Траектория не остаётся внутри, как в странном аттракторе, а покинет Ω_3 , по направлению к одному из существующих регулярных аттракторов (как в эксперименте на рис. 6). Рассматриваемая область является одной из разновидностей непритягивающих хаотических множеств, а тип поведения траектории определяется в современных работах термином переходный хаос «chaotic transient» [11].

3. Заключение

Очевидно, что возникновение сложной границы областей притяжения аттракторов влияет на изменение характера поведения траектории M . В случае гладких границ малое изменение начальных условий не приводило к выходу фазовой траектории на альтернативный аттрактор. Так как для всех начальных условий $R_0 \in \Omega_3 \setminus (\Phi \cup \partial\Omega_1) \exists i \in \mathbb{Z}$ такое, что $\psi^i(R_0) > R_3^*$ и $\exists j \in \mathbb{Z}, \psi^j(R_0) < R_1^*$, следовательно, траектория может оказаться находящейся в подмножестве фазового пространства $\Omega_1 \setminus \Omega_3$ при $j < i$ так и в подмножестве $\Omega_2 \setminus \Omega_3$ и $j > i$. Динамическая система при наличии странного репеллера характеризуется чувствительной зависимостью от начальных условий соответствии с определением в §1, но это другой вид чувствительности, чем в хаотическом аттракторе.

Под действием промысла популяция может переходить в режим аperiodических колебаний, происходящих на существенно меньшем диапазоне численности. Аperiodический режим неблагоприятен для промыслового использования биоресурсов так как резко возрастает действие случайных факторов среды. Следовательно, популяция севрюги является сложным и чувствительным объектом управления. Гипотеза, объясняющая сложность зависимости в воспроизводстве севрюги заключается в том, что высокий процент выживаемости икры приводит к недостаточной обеспеченности кормовой базой молоди, к замедлению скорости роста, увеличению продолжительности периода уязвимости. Действие этих факторов приводит к замедлению выхода поколения из-под пресса доминирующих хищников.

В современных условиях восстановление деградировавшего в результате хищнической промысловой эксплуатации нерестового стада севрюги представляется не возможным без

выращивания в искусственных условиях рыб до полвозрелого возраста так при низкой численности эффективность естественного воспроизводства на нерестилищах Нижней Волги резко снижается из-за малой вероятности встречи особей в момент нереста.³

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинецкий Г. Г, Потапов А. Б. Нелинейная динамика и хаос. М.: изд-во КомКнига, 2006, 240 с.
2. Переварюха А. Ю. Нелинейные модели и особенности оптимизации в задаче системного анализа динамики популяций // Информационные технологии. 2009. №1. С.77–82.
3. Сениченков Ю. Б. Численное моделирование гибридных систем. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004.– 206 с.
4. Ricker W. Stock and recruitment // Journal Fisheries research board of Canada. 1954. Vol. 11. №5. P. 559–623.
5. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. №1-3. P. 16–39.
6. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math. 1978. V. 35. P. 260–268.
7. Vellekoop M., Berglund R. On intervals, transitivity = chaos // The American Mathematical Monthly. 1994. Vol. 101. №.4. P. 353–355.
8. Scheffer M. Multiplicity of stable states in freshwater systems // Hydrobiologia Vol. 200–201. № 1. P. 475–486
9. MacDonald S., Grebogi C., Ott E., Yorke J. Fractal basin boundaries // Physica D. 1985. Vol. 17. №2. P. 125–153.
10. Grebogi C., Ott E., Yorke J. Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics // Science. 1987. Vol. 238. № 4827. P. 632–638.
11. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 181–200.

Simulation of population changes based on the the numerical solution of bursting ordinary differential equations.

© A. U. Perevarukha⁴

Abstract. The paper describes the developed model based on differential equations with discontinuous right-hand side and analyzed in computing environments using a hybrid representation model time. The model has an interpretation in the theory of jumplike changes in early ontogeny of fish. Numerical investigation of the model showed the existence of a locally disconnected basin boundary *partial Omega*₁ of attractors.

Key Words: Simulation of population dynamics, hybrid computing systems.

³Работа выполнена в рамках междисциплинарного проекта **РФФИ 11–01–12069–офи-м–2011**.

⁴Researcher of St.–Petersburg Institute of Informatics and Automation of RAS; madelf@pisem.net.

УДК 517.9

Оценка параметров моделей системной динамики

© С. И. Спивак¹, О. Г. Кантор², И. Р. Салахов³

Аннотация. Разработан подход, позволяющий осуществлять поэтапную корректировку моделей системной динамики и обеспечивающий приемлемую точность. Осуществлена его апробация при построении модели системной динамики численности населения Российской Федерации.

Ключевые слова: модели системной динамики, оценка параметров модели, вычислительный эксперимент.

Системная динамика – метод изучения сложных систем с нелинейными обратными связями, разработанный в середине XX века профессором Массачусетского технологического института Дж. Форрестером – одним из крупнейших специалистов в области теории управления

Изначально системная динамика разрабатывалась для решения проблем управления в промышленности [6], но в дальнейшем ее стали применять для анализа более широкого класса динамических систем (экономических, социальных и др.). В моделях системной динамики используются переменные двух типов: системные уровни и темпы. Системные уровни полностью описывают состояние системы в произвольный момент времени. Изменение системных уровней вызвано соответствующими темпами, которые в свою очередь зависят от одного или нескольких системных уровней (но не от других темпов).

В методе системной динамики предполагается, что для всех системных уровней пишутся уравнения одного и того же типа [2]:

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-, \quad (1.1)$$

где y^+ и y^- – положительный и отрицательный темпы скорости системного уровня y , каждый из которых включает в себя все факторы, вызывающие соответственно рост и убывание y . Предполагается, что y^+ и y^- являются функциями только системных уровней.

Основными этапами системной динамики являются

- концептуализация, в рамках которой происходит выделение главных тенденций изучаемого процесса и, как следствие, основных характеристик – системных уровней;
- математическое описание изучаемого процесса посредством составления уравнений типа (1.1);
- численное решение системы полученных уравнений (1.1).

На основании моделей системной динамики возможно осуществлять прогноз для изучаемой системы, т.е. определять значений системных уровней в последующие моменты

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

²Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

³Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; salah-off@mail.ru.

времени, а также исследовать различные состояния системы. При этом очевидно, что от того, насколько качественно будут составлены уравнения (1.1), зависит и точность прогнозных оценок, и результаты дальнейших исследований.

В некоторых случаях уравнения (1.1) составляются на основе очевидных логических связей между системными уровнями и темпами. Именно такого рода зависимости использовал Дж. Форрестер при построении моделей мировой динамики [5]. В более сложных ситуациях, например, когда исследователю до конца не ясно каким образом выбранные для анализа системные уровни и темпы взаимодействуют друг с другом, а увеличение размерности моделируемой системы является нежелательным, определение зависимостей (1.1) представляет собой самостоятельную задачу.

Пожалуй, самым разработанным инструментом для моделирования уравнений (1.1) имеющимся исходным данным является эконометрический анализ, позволяющий определять зависимости, качество которых контролируется совокупностью критериев: индексом (коэффициентом) детерминации (R^2), F -критерием Фишера, t -критерием Стьюдента, средней ошибкой аппроксимации (\bar{A}) и т.д. Однако в ходе применения данного подхода при построении моделей системной динамики может возникать ряд проблем, к числу которых относятся следующие.

1. При проведении эконометрических исследований качество модели, как и ее тип, контролируется исследователем, который принимает решение о том, достаточна достигнутая точность или нет, основываясь на своих субъективных оценках. В дальнейшем это может привести к существенным погрешностям на этапах численного решения системы полученных уравнений и построения прогноза.
2. Исходные данные могут быть малочисленными, что может отразиться на качестве определяемых зависимостей (1.1), и, как следствие, на точности реализации последующих этапов.

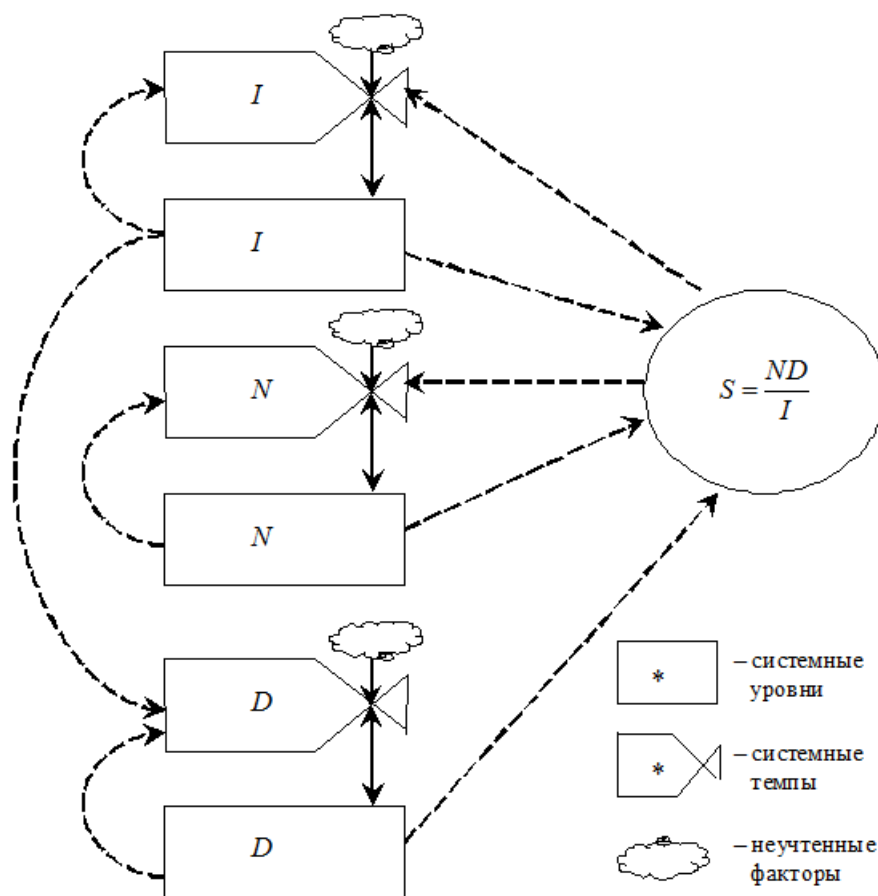
Столкнувшись с такого рода трудностями в своих исследованиях, авторы настоящей работы разработали подход, позволяющий осуществлять оценку параметров моделей системной динамики, нивелирующий перечисленные выше проблемы.

Известно, что в Российской Федерации на протяжении достаточно длительного периода времени происходит сокращение численности населения. Проблеме моделирования численности населения РФ посвящено большое число научных работ [1], [3], [4]. Авторы настоящей работы подошли к данной проблеме с позиций системной динамики, и поставили цель осуществить моделирование численности населения РФ не как обособленного параметра, а с учетом влияния определенных факторов. В качестве уровней, на которых строится структура системы, были выбраны следующие три:

- N - численность населения РФ, чел.;
- D - душевые доходы за год, руб./чел. в год;
- I - индекс потребительских цен, %.

Каждый из этих уровней является основной переменной моделируемой системы. Также в модель была включена вспомогательная переменная $S = \frac{ND}{I}$, которая по своей сути представляет реальный денежный доход, которым обладало население страны за год с учетом изменяющихся цен. Очевидно, что все переменные модели оказывают друг на друга влияние. При построении модели были учтены предположения, что рост величин D и S положительно сказывается на численности населения, в то время как величины I и N находятся в обратной зависимости.

Диаграмма анализируемой модели представлена на рис. 0.1.



Р и с у н о к 1.1

Диаграмма модели системной динамики численности населения Российской Федерации.

На основании имеющейся официальной статистической информации за период с 1998 по 2009 гг. с помощью методов эконометрического моделирования были определены следующие зависимости выбранных для анализа системных уровней и системных темпов.

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 64,01 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.2)$$

$$(R^2 = 0.797; F = 17,63; T = \{8,08; -15,60\}; \bar{A} = 20,2\%)$$

$$\frac{dD}{dt} = 108,17 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.3)$$

$$(R^2 = 0.882; F = 33,71; T = \{8,91; -2,90\}; \bar{A} = 11,3\%)$$

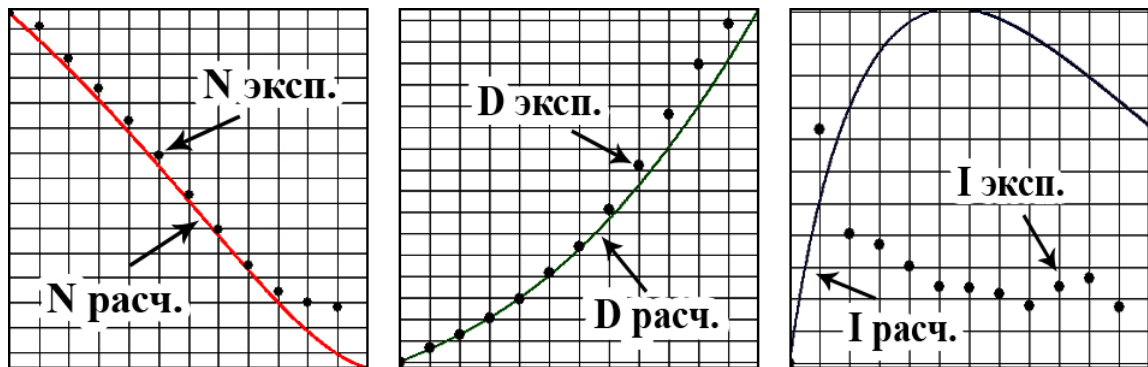
$$\frac{dI}{dt} = 1,23 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.4)$$

$$(R^2 = 0.796; F = 17,58; T = \{6,71; -5,83\}; \bar{A} = 23,0\%)$$

Заметим, что при построении данных зависимостей экзогенными факторами считались произведения системных уровней в соответствующих степенях. Полученные результаты свидетельствуют о достаточно хорошем качестве подобранных моделей, их статистической значимости в целом и значимости всех коэффициентов. К сожалению, на данном этапе

не удалось получить приемлемый (не более 10%) уровень средней ошибки аппроксимации \bar{A} , что может объясняться незначительным временным периодом выборки (данные более ранних периодов использовать не представлялось возможным ввиду несопоставимости величин D в результате осуществления денежной реформы 1998 г.).

Для численного интегрирования системы (1.2)-(1.4) был выбран метод Рунге-Кутты в силу его высокой точности и меньшей склонности к возникновению неустойчивости решения. В качестве основного критерия для оценки качества полученных результатов был принят показатель средней ошибки аппроксимации, численно равный среднему отклонению расчетных значений от экспериментальных. Общепринято, что допустимый уровень данного показателя должен составлять не более 8-10%. Результаты проведенных расчетов по методу Рунге-Кутты (рис. 0.2) показали низкую точность, что выразилось в первую очередь в высоком значении средней ошибки аппроксимации \bar{A}_I .



Р и с у н о к 1.2

$$\bar{A}_N = 0,19\%$$

$$\bar{A}_D = 4,81\%$$

$$\bar{A}_I = 27,40\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.2)-(1.4) методом Рунге-Кутты.

Для корректировки самой проблемной зависимости (1.4) был использован следующий подход. Коэффициенты при переменных поочередно полагались неизвестными. Затем, используя очевидные соотношения для первого и второго коэффициентов соответственно

$$I(12) - I(0) = \int_0^{12} (aI^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08}) dt \quad (1.5)$$

и

$$I(12) - I(0) = \int_0^{12} (108,171 \cdot I^{-0,5} - b \cdot S^{0,08}) dt \quad (1.6)$$

интегралы в правых частях заменялись приближенными выражениями, рассчитанными по методу Симпсона. Так, выражение для вычисления параметра a приняло вид

$$a \approx \frac{6(I(12) - I(0)) + 0,0933(S(0)^{0,08} + 2 \sum_{k=1}^{11} S(k)^{0,08} + 4 \sum_{k=1}^{12} S(k)^{0,08} + S(12)^{0,08})}{I(0)^{-0,5} + 2 \sum_{k=1}^{11} I(k)^{-0,5} + 4 \sum_{k=1}^{12} I(k)^{-0,5} + I(12)^{-0,5}} \quad (1.7)$$

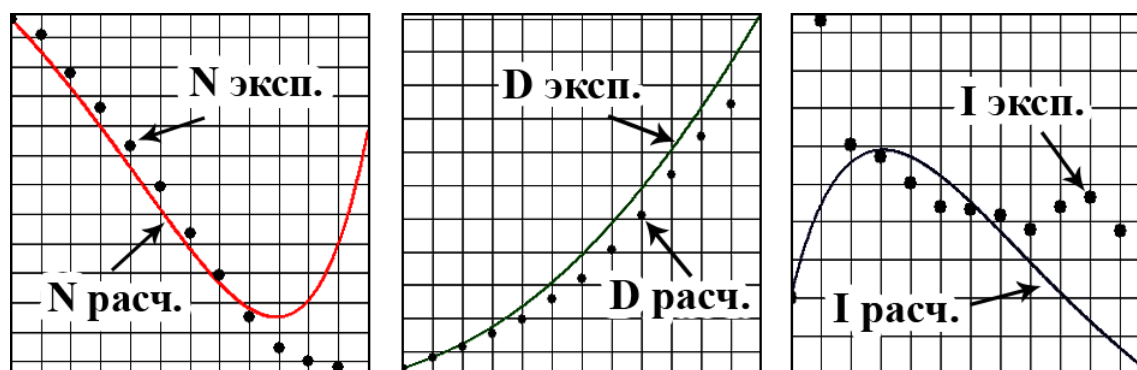
откуда следует

$$a \approx 1,0619 \quad (1.8)$$

Аналогичные расчеты, проведенные для вычисления параметра b , не изменили соответствующий коэффициент уравнения (1.4). Таким образом, после проведенной корректировки уравнение (1.4) приняло вид:

$$\frac{dI}{dt} = 1,06 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08}. \quad (1.9)$$

Анализ результатов применения метода Рунге-Кутты для системы уравнений (1.2), (1.3), (1.9) (рис. 0.3) показал существенное улучшение средней ошибки аппроксимации по третьему уравнению.



Р и с у н о к 1.3

$$\bar{A}_N = 0,34\%$$

$$\bar{A}_D = 13,84\%$$

$$\bar{A}_I = 6,08\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.2), (1.3), (1.9) методом Рунге-Кутты.

Однако, несмотря на возросшую точность решения, полученная модель осталась непригодной для построения прогноза ввиду резкого роста переменной N , что противоречит высокой инерционности показателя численности населения. Данное обстоятельство обусловило необходимость корректировки модели (1.2), (1.3), (1.9) с позиций обеспечения допустимого уровня Δ вариации значений переменной N . В дальнейших расчетах полагалось равным 1000000, что приблизительно соответствует максимальному значению в рамках наблюдаемого временного интервала данного системного темпа, увеличенному на 25%.

Дальнейшая корректировка модели (1.2), (1.3), (1.9) осуществлялась посредством очередного расчета диапазона значений всех параметров модели (коэффициентов и показателей степеней переменных), обеспечивающих выполнение условия

$$|N_{\text{расчетное}} - N_{\text{экспериментальное}}| \leq \Delta \quad (1.10)$$

Учитывая специфику уравнений системной динамики, для каждого параметра такой диапазон значений существует и единственен, а задача определения границ данных диапазонов сводится к ряду задач вычислительного эксперимента (табл. 1).

З а м е ч а н и е 1.1. $a_i, i = \overline{1,6}$ и $k_j, j = \overline{1,8}$, – занумерованные в порядке появления в уравнениях (1.2), (1.3), (1.9) коэффициенты и показатели степеней переменных соответственно.

Данные таблицы 1 явились основой организации вычислительного эксперимента для определения окончательного вида модели системной динамики численности населения РФ. Любой вычислительный эксперимент по своей сути представляет последовательность однотипных расчетов при различных значениях параметров модели, а принципиальное различие кроется в способах организации перебора этих значений. Такого рода способы

Таблица 1: Границы диапазонов вариации параметров модели системной динамики численности населения РФ (1.2), (1.3), (1.9)

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение	Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
a_1	$6 \cdot 10^{-22}$	$9,9 \cdot 10^{-22}$	k_2	1,990	2,006
a_2	60,2	72,2	k_3	0,025	0,034
a_3	72,0	107,8	k_4	0,297	0,302
a_4	571	948	k_5	0,298	0,355
a_5	1,05	1,53	k_6	0,228	3,009
a_6	0,057	0,096	k_7	-5,000	0,175
k_1	0,034	0,601	k_8	0,063	0,092

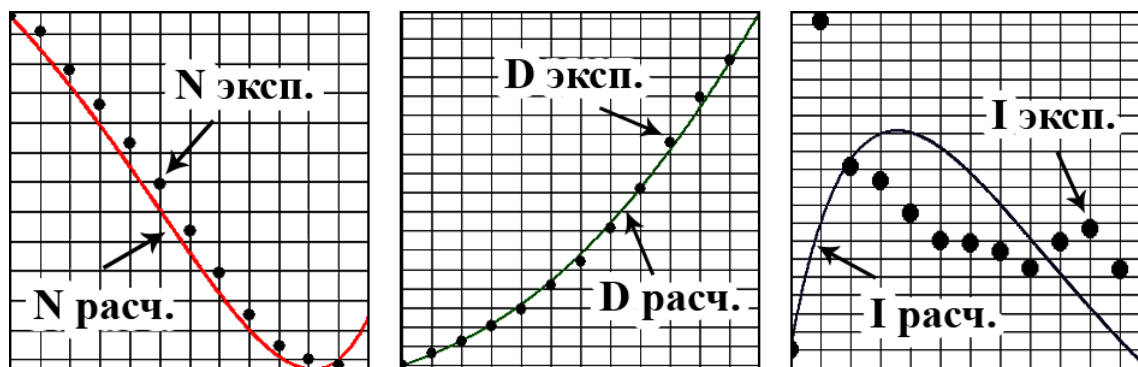
можно разделить на две большие группы: системные и случайные. В настоящей работе на данном этапе был использован метод случайного выбора значений параметров модели. В качестве критериев для оценки качества получаемой модели были использованы средние ошибки аппроксимации ($\bar{A}_N, \bar{A}_D, \bar{A}_I$) и критерий (1.10). По результатам серии вычислительных экспериментов на основании экспертных мнений о значениях критериев качества был определен окончательный вид модели системной динамики численности населения РФ:

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 66,5 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.11)$$

$$\frac{dD}{dt} = 103,41 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.12)$$

$$\frac{dI}{dt} = 1,08 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.13)$$

Результаты применения метода Рунге-Кутты для системы уравнений (1.11)-(1.13) (рис. 0.4) подтвердили достаточно высокую степень точности полученной модели, что в свою очередь дает возможность осуществлять прогнозные оценки системных уровней и проводить дальнейшие исследования.



Р и с у н о к 1.4

$$\bar{A}_N = 0,18\%$$

$$\bar{A}_D = 2,95\%$$

$$\bar{A}_I = 5,95\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.12)-(1.13) методом Рунге-Кутты.

На примере решения приведенной задачи, очевидно, что далеко не всегда применение только одного метода позволяет получать удовлетворительные результаты в силу того,

что, либо невозможно учесть влияние всех факторов на переменные модели, либо попросту недостаточно данных. В этой связи целесообразным является применение комплекса различных методов математического моделирования в сочетании с вычислительными алгоритмами и программными продуктами. Сказанное в полной мере относится к моделированию динамических систем. Предложенный в настоящей работе подход, основанный на использовании методов эконометрического моделирования, приближенных и численных методов интегрирования, серии вычислительных экспериментов и использовании ЭВМ позволяет исследователю осуществлять поэтапный процесс корректировки модели системной динамики с позиций адекватного описания экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. История человечества: Под ред. А.Н. Сахарова. Т.1-8. – М.: ЮНЕСКО, 2003.
2. Махов С.А. Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2005. – № 6 – 24 с.
3. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М. Наука. 1997.
4. Капица С.П. Общая теория роста человечества. – М. Наука. 1999.
5. Форрестер Дж. Мировая динамика.– М. Наука. 1978. 168 с.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М. Прогресс. 1971. 340 с.

Evaluation of model parameters the system dynamics.

© S. I. Spivak⁴, O. G. Kantor⁵, I. R. Salakhov⁶

Abstract. The approach, allow for the gradual adjustment of the system models dynamics and provides an acceptable accuracy. carried his testing in the model number of system dynamics population of the Russian Federation.

Key Words: system dynamics models, estimate the model parameters, computational experiment

⁴Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

⁵Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.

⁶Postgraduate of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; salah-off@mail.ru.

УДК 519.876.5

Алгоритм расчета возможностей протекания химических реакций при заданных термодинамических условиях

© С. И. Спивак¹, А. В. Балаев², Д. З. Галин³

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос возможности протекания химической реакции при определенных термобарических условиях. В частности приведенный в статье алгоритм анализа позволяет делать выводы о возможности или невозможности протекания химической реакции, по следующим термодинамическим характеристикам: энтропия, энтальпия, удельная мольная теплоемкость, энергия Гиббса, константа равновесия, конверсия, доля прореагировавшего вещества, доля отгона.

Ключевые слова: энтропия, энтальпия, удельная мольная теплоемкость, энергия Гиббса, константа равновесия, конверсия, доля прореагировавшего вещества.

Во многих прикладных науках при проведении опытов с реальными объектами требуется построить математическую модель реального объекта изучения, и его свойств при некоторых условиях. В частности для того, что бы выяснить возможность протекания реакции в заранее заданных термодинамических условиях необходимо построить математическую модель и провести численные эксперименты. По результатам численных экспериментов сделать выводы о возможности или невозможности протекания конкретной химической реакции.

Рассмотрим химическую реакцию общего вида:



Одной из основных энергетических функций химических систем – энтальпия (ΔH^0 , кал/моль). Значения энтальпий индивидуальных веществ при $P=1$ ат и $T=298$ К (ΔH^0_{298}) табулированы. Значения ΔH^0 используются для расчета тепловых эффектов реакций (Q): $Q = -(\Delta H^0_T)_\Sigma$. Согласно закону Гесса:

$$(\Delta H^0)_\Sigma = \left[\sum (v_j \Delta H^0_j) \right]_{\text{продуктов реакции}} - \left[\sum (v_i \Delta H^0_i) \right]_{\text{исходных веществ}}. \quad (1.2)$$

Возможность и глубина протекания реакции определяется знаком и величиной энергии Гиббса (ΔG , кал/моль),

$$\Delta G^0_T = \Delta H^0_T - T \Delta S^0_T \quad (1.3)$$

Где ΔS^0_T – энтропия химической системы, ΔS^0_{298} кал/(моль*К). Значения табулированы. Термодинамическая возможность самопроизвольного протекания химической реакции определяется знаком и абсолютной величиной энергии Гиббса ΔG_T .

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

²Ведущий научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, abalaev@gmail.com.

³Аспирант кафедры математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский Государственный Университет» danilaq-complex@ya.ru

При температуре, отличной от 298 К, энтальпия и энтропия рассчитываются по следующим формулам:

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{298}^0 + \int_{298}^T C_p dT; \quad (1.4)$$

$$\Delta S_T^0 = \Delta S_{298}^0 + \int_{298}^T \frac{C_p}{T} dT. \quad (1.5)$$

Где C_p – удельная мольная теплоемкость, кал/(моль*К).

C_p – функция аддитивная и рассчитывается, используя состав реакционной смеси. (x_n мольные доли)

$$C_p = \sum_{n=1}^N x_n C_{pn} \quad (1.6)$$

Для расчета C_{pn} используются эмпирические формулы:

$$C_p = a + bT + cT^2; \quad (1.7)$$

$$C_p = a + bT + cT^2 + dT^3; \quad (1.8)$$

$$C_p = a + bT + cT^2 + \frac{d}{T}. \quad (1.9)$$

В наших расчетах, как правило, используется зависимость (8). Подставив (8) в (4) и (5), получим выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta H_T^0 &= \Delta H_{T_0}^0 + \Delta T \left(a + \frac{b}{2} \Delta T + \frac{c}{3} \Delta T^2 + \frac{d}{4} \Delta T^3 \right); \\ \Delta S_T^0 &= \Delta S_{T_0}^0 + \Delta T \left(a \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + b \Delta T + \frac{c}{2} \Delta T^2 + \frac{d}{3} \Delta T^3 \right). \end{aligned}$$

Константа равновесия, определяющая конверсию исходных веществ для реакции (1), имеет вид:

$$K_p = \frac{\prod_{j=1}^J p_j^{v_j}}{\prod_{i=1}^I p_i^{\vartheta_i}}. \quad (1.10)$$

Где p_i и p_j – парциальные давления компонентов реакционной смеси.

Для изобарных систем: $\sum_{i=1}^I p_i = \sum_{j=1}^J p_j = p_{>1155} = P$.

С термодинамической точки зрения константа равновесия равна:

$$K_p = \exp \left(- \frac{\Delta G_T}{RT} \right). \quad (1.11)$$

Где ΔG_T – стандартная энергия образования Гиббса (кал/моль) R – универсальная газовая постоянная (1,987 кал/моль*К), T – температура (К).

Заменим парциальное давление концентрациями $x_n = p_n/P$ или $p_n = x_n P$. Подставив в (10) получим:

$$K_p = \left[\frac{\prod_{j=1}^J x_j^{v_j}}{\prod_{i=1}^I x_i^{\vartheta_i}} \right] P^{-\Delta n}, \quad (1.12)$$

где $\Delta n = \sum_{j=1}^J \nu_j - \sum_{i=1}^I \nu_i$.

Для любой химической реакции $x_i = x_i^o$, а $x_j^o = 0$.

Выберем компонент в качестве опорного со стехиометрическим коэффициентом, равным 1, и введем долю прореагировавшего компонента (X). Тогда, используя стехиометрические соотношения для реакции (1) и комбинируя (11) и (12), получаем:

$$K_r = \exp(-\Delta G/RT)p^{\Delta n} = f_1(\bar{x}^o, x)/f_2(\bar{x}^o, x). \quad (1.13)$$

Для расчетов концентраций компонентов системы (12), решаются уравнения вида:

$$\chi_i = \frac{(x)^{\nu_{i3}}(x)^{\nu_{i4}}}{(x_{i1}^0 - x)^{\nu_{i1}}(x_{i2}^0 - x)^{\nu_{i2}}} * \frac{1}{(1 - \Delta n_i x)^{-\Delta n_i}}.$$

Где $\chi_i = K_r * P^{-\Delta n}$, i - номер уравнения реакции в системе, x_{i1}, x_{i2} - начальный концентрации исходных компонентов i -ой реакции, ν_{i1-4} стехиометрические коэффициенты i -ой реакции, $\Delta n = \nu_{i4} + \nu_{i3} - \nu_{i2} - \nu_{i1}$.

На основе данной математической модели была написана и испытана компьютерная программа, результаты расчетов, на примере системы химических реакций, приведены в статье: «Численные эксперименты по определению возможности протекания химической реакции».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. Свойства газов и жидкостей 3-е издание. Л.: Изд. Химия Ленинградское отделение. 1982. – 592с.
2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий.– М.:Высш. шк., 2002. – 840с.
3. Бут, Э.Д. Численные методы / Э.Д. Бут – М.: Физматгиз, 1959.
4. Клибанов, М.В., С.И. Спивак, В.И. Тимошенко, М.Г. Слинько // ДАН СССР. – 1973. – Т.208, -№6.
5. Царева, З.М. Теоретические основы химтехнологии / З.М. Царева, Е.А.Орлова. – Киев: Высшая школа, 1986. – 271 с.
6. Вант Гофф, Я.Т. Очерки по химической динамике / Я.Т. Вант Гофф. –Л.: ОНТИ ХИМТЕОРЕТ, 1936. – 178с

Algorithm For calculating capacity chemical reactions given the thermodynamic Conditions

© S. I. Spivak ⁴, A. V. Balaev ⁵, D. Z. Galin ⁶

Abstract. This article discusses the possibility of chemical reaction under certain temperature and pressure conditions. In particular, given in the article analysis algorithm allows to draw conclusions about the ability or inability of the chemical reaction, the following thermodynamic characteristics: entropy, enthalpy, specific molar heat capacity, Gibbs energy, equilibrium constant, the conversion, the percentage of reacted material, the proportion of distillate.

Key Words: entropy, enthalpy, specific molar heat capacity, Gibbs energy, equilibrium constant, conversion, percentage of reacted material.

⁴Managing chair of the mathematical Modelling, GOU VPO "the Bashkir state university Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

⁵Leading Researcher, Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Academy of Sciences, abalaev@gmail.com.

⁶Postgraduate Department of Mathematical Modelling, «Bashkir State University», Ufa, danilaq-complex@ya.ru

УДК 544.4

Численный алгоритм уточнения механизма химической реакции DRGEP-методом

© Е. В. Степашина¹, С. А. Мустафина²

Аннотация. В работе построен численный алгоритм уточнения механизма химической реакции на основе DRGEP-метода. Проведен вычислительный эксперимент для процесса получения фталевого ангидрида. Получен сокращенный механизм схемы реакции.

Ключевые слова: граф реакции, механизм реакции, уточнение схемы реакции.

1. Введение

Одной из главных трудностей, возникающих при исследовании механизма сложных реакций, является их большая размерность. Необходимость учета большого количества веществ и реакций между ними делает громоздким математическое описание и усложняет анализ кинетических и термодинамических моделей сложных реакций. Поэтому возникает задача сокращения механизма реакции до минимально возможного размера, сохраняющее при этом динамику изменения концентраций выбранных веществ.

В настоящее время широко применяется геометрическая трактовка механизма реакции. Одним из методов, реализующий графовый подход к механизму реакции, является метод анализа графа прямых связей с распространением ошибки (Direct Relation Graph with Error Propagation (DRGEP))[1], учитывающий косвенное влияние веществ друг на друга, т.е. случай, когда вещества связаны через промежуточные вещества.

2. Постановка задачи

Для сокращения схемы химической реакции используется коэффициент зависимости между веществами r_{AB} [1]:

$$r_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^m |\nu_{Ai}\omega_i\delta_{Bi}|}{\sum_{i=1}^m |\nu_{Ai}\omega_i|} \quad (2.1)$$

где ω_i – скорость i -й реакции; ν_{Ai} – стехиометрический коэффициент вещества A в i -й реакции (стехиометрический коэффициент положительный, если A – продукт, и отрицательный, если A – реагент); $\delta_{Bi} = 1$, если вещество B участвует в i -й реакции, $\delta_{Bi} = 0$, в противном случае; m – количество реакций в системе.

Коэффициент зависимости между каждой парой веществ является элементом матрицы. Каждый ее элемент удовлетворяет соотношению $0 \leq r_{AB} \leq 1$.

Если вещество A связано с веществом C косвенно (реакция вида $A \rightarrow B \rightarrow C$), то коэффициент зависимости между веществами A и C рассчитывается по формуле:

$$r_{AC} = r_{AB} \cdot r_{BC}. \quad (2.2)$$

¹Аспирант кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; zhenja05@rambler.ru.

²Заведующая кафедрой математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак.

Если в схеме реакций вещество A связано с веществом C как прямо, так и косвенно, то определяется обобщенный коэффициент зависимости между веществами A и C :

$$R_{AC} = \max\{r_{AC_j}\}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (2.3)$$

где p – количество путей, соединяющих вершины A и C .

Каждое вещество связано с другими веществами с различными обобщенными коэффициентами зависимости. Любое вещество X будет выбрано в качестве вещества, связанного с целевым веществом A , если $R_{AX} \geq \varepsilon$, где ε является определенным пороговым значением ($0 < \varepsilon < 1$).

Результирующими веществами сокращенного механизма является объединение веществ из всех подмножеств каждого целевого вещества. Остальные вещества на данный момент являются избыточными по отношению к целевым веществам и могут быть безопасно удалены из списка продуктов химической реакции. Следовательно, все стадии, которые потребляют избыточные вещества, могут быть удалены.

3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим химическую реакцию получения фталевого ангидрида [2]:



где A_1 – исходное вещество – нафталин, A_2 – нафтохинон, A_3 – целевой продукт – фталевый ангидрид, A_4 – углекислый газ, A_5 – малеиновый ангидрид.

Система дифференциальных уравнений, описывающих кинетику реакции, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -k_1C_1 - k_3C_1 - k_4C_1, \\ \frac{dC_2}{dt} = k_1C_1 - k_2C_2 - k_5C_2, \\ \frac{dC_3}{dt} = k_3C_1 + k_5C_2 - k_6C_3, \\ \frac{dC_4}{dt} = k_2C_2 + k_4C_1, \\ \frac{dC_5}{dt} = k_6C_3, \end{cases} \quad (3.2)$$

где C_i – концентрация i -го вещества ($i = \overline{1, 5}$) (мольная доля), k_i – константа скорости i -й реакции, принимается в соответствии с литературными данными [2]:

$$k_i = e^{k_{i0} - \frac{B_i}{T}}, \quad (3.3)$$

i	1	2	3	4	5	6
k_{i0}	11,514	9,227	14,32	13,01	7,48	32,428
B_i	6400	6000	8500	8500	4000	22150

Начальные концентрации веществ были приняты $C_1 = 1$, $C_i(0) = 0$ ($i = \overline{1, 5}$).

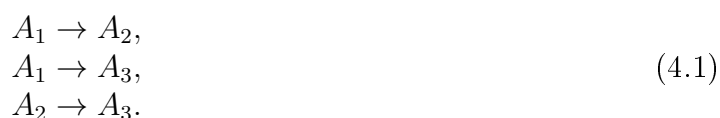
Первоначально была решена прямая задача химической кинетики. Исходя из полученного решения рассчитаны коэффициенты зависимости r_{AB} для всех веществ. Сокращение схемы реакции проводилось с точностью $\varepsilon = 0,001$ в момент времени $t = 0,1$ ч. В качестве

целевого вещества было выбрано вещество A_3 . Для представления связей между веществами построен ориентированный граф, отражающий зависимость веществ друг от друга. Вершины графа соответствуют веществам, участвующим в реакции. Ребро, направленное от i -й вершины к j -й вершине, соответствует образованию вещества A_j из A_i .

На основе алгоритма поиска графа в глубину определены все пути, соединяющие каждое целевое вещество с остальными. По найденным путям рассчитаны обобщенные коэффициенты связи веществ.

4. Результаты

Исходя из полученных значений обобщенных коэффициентов связей и точности расчета из схемы реакции были исключены вещества A_4 и A_5 . В соответствии с этим сокращенная схема реакции имеет вид:



На рис.1 представлена динамика концентраций веществ сокращенного механизма и концентраций этих же веществ в исходном механизме. Как видно из рисунка, уточнение механизма реакции (3.1) не изменило общую динамику изменения концентраций веществ во времени.

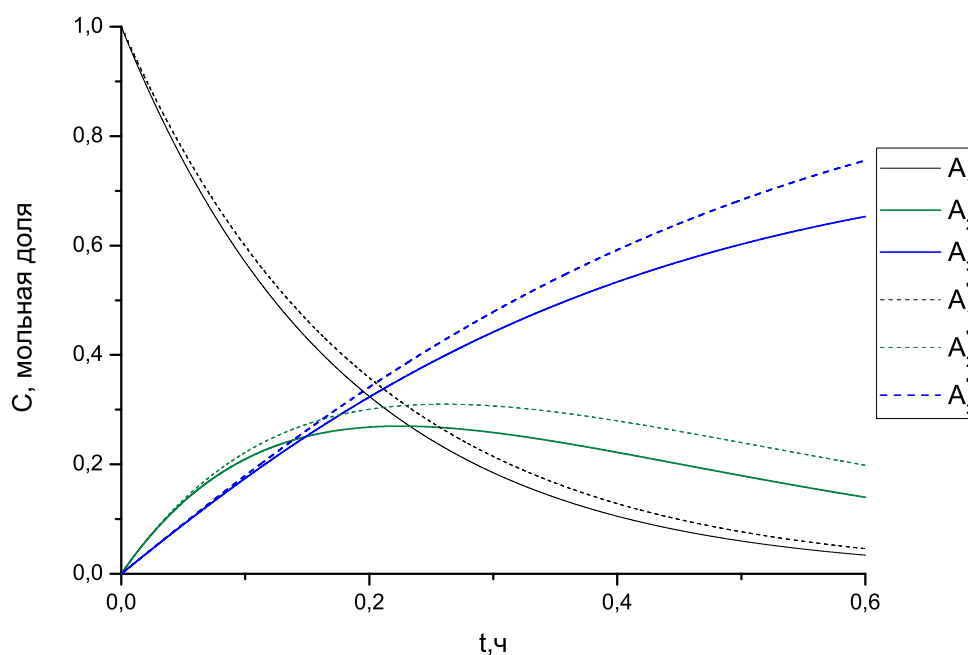


Рис.1. Изменение концентраций веществ (A_i — вещества исходного механизма, A'_i — вещества сокращенного механизма, $i = 1, 2, 3$)

Исследуем системы дифференциальных уравнений, описывающих кинетику исходной и сокращенной схем реакции, качественными и асимптотическими методами.

Система (3.2) имеет два стационарных состояния $C^*(0, 0, 0, C_1(0), C_3(0))$, $C^*(0, 0, 0, C_2(0), C_3(0))$. Определим характер особых точек. Для этого перейдем к новым переменным (отклонениям от координат стационарной точки): $u_i = C_i - C_i^*$, и подставим их в кинетическую модель схемы реакций (3.2). Получаем новую систему дифференциальных уравнений, для которой определяем собственные значения ее матрицы коэффициентов. Получаем вектор собственных значений $\lambda = (-k_1 - k_3 - k_4, -k_2 - k_5, -k_6, 0, 0)^T$.

Аналогично исследуем схему реакции (4.1). Кинетическая модель системы (4.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -k_1 C_1 - k_3 C_1, \\ \frac{dC_2}{dt} = k_1 C_1 - k_5 C_2, \\ \frac{dC_3}{dt} = k_3 C_1 + k_5 C_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Система (4.2) имеет также два стационарных состояния $C^*(0, 0, C_1(0))$, $C^*(0, 0, C_2(0))$. После преобразования системы (4.2) получаем вектор собственных значений $\lambda = (0, -k_5, -k_1 - k_3)^T$.

Если имеются равные нулю собственные значения матрицы коэффициентов, то стационарное состояние является нейтральным: при отклонении от него не появляются ни возвращающие, ни отклоняющие силы. Так как характер поведения систем (3.2) и (4.2) в целом не изменяется, то для анализа кинетических и термодинамических моделей реакции (3.1) можно использовать схему реакции (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xia A.G., Michelangeli D.V., Makar P.A. Mechanism reduction for the formation of secondary organic aerosol for integration into a 3-dimensional regional air quality model: α -pinene oxidation system // Atmospheric Chemistry and Physics. Vol.9. 2009. P. 4341-4362.
2. Плауль П.А., Фукс И.С. К вопросу расчета оптимальной температурной последовательности реактора идеального вытеснения методом динамического программирования // Труды III Всесоюзной конференции по химическим реакторам. Ч.II. Новосибирск-Киев. 1970. С.244-246.

The numerical algorithm the refine of the mechanism of chemical reactions by the DRGEP method

© E. V. Stepashina³, S. A. Mustafina⁴

Abstract. In this paper the numerical algorithm the refine of the mechanism of chemical reactions based on the DREGEP method was designed. A computer experiment for the process of obtaining phthalic anhydride is conducted. Obtained reduced mechanism of reaction scheme.

Key Words: graph of the reaction, mechanism of the reaction, refinement of reaction scheme.

³Graduate student of mathematical modeling, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; zhenja05@rambler.ru.

⁴Head of Mathematical Modelling Chair, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak.

УДК 517.96:519.64

Численный метод решения начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля

© Н. С. Яшагин¹

Аннотация. В работе получены формулы численного интегрирования для некоторых интегральных операторов с ядром Абеля и априорные оценки погрешности для них. Разработана итерационная процедура вычисления решений начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля и доказана её сходимость.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля, интегральные уравнения Вольтерры второго рода, метод квадратур.

1. Постановка задачи

В работе [1] рассмотрено дифференциальное уравнение

$$\ddot{u}(t) + \sum_{k=1}^n a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=0}^m b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t), \quad (1.1)$$

где $u = u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$, $t \in [0, T]$; $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \in (0, 1)$, $\beta_k \in [0, 2)$; $D_{0t}^{\alpha_k}$, $D_{0t}^{\beta_k}$ — левосторонние дробные производные Римана—Лиувилля [2] порядка α_k и β_k соответственно, определяемые равенством

$$D_{0t}^{\alpha} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{0t}^{n-\alpha} f, \quad n = [\alpha] + 1,$$

для любых $\alpha > 0$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α , а

$$I_{0t}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (1.2)$$

— левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля [2] порядка α . Уравнение (1.1) можно рассматривать как модельное уравнение дробных осцилляторов (см. [3, 4] и библиографию к [3, 4]). Основное внимание уделено двум частным случаям (1.1):

$$\ddot{u}(t) + p D_{0t}^{\beta} \dot{u} + q D_{0t}^{2\beta} u = f(t), \quad (1.3)$$

$$\ddot{u}(t) + p D_{0t}^{1+\beta} u + q D_{0t}^{2\beta} u = f(t), \quad (1.4)$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, $f(t) \in L(0, T)$, для которых формулируются принципиально разные постановки начальных задач:

- для (1.3)

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0; \quad (1.5)$$

¹Аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет, г. Самара; nik.yashagin@gmail.com.

- для (1.4)

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} [\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u] = \bar{u}_0. \quad (1.6)$$

В [1] доказана корректность этих постановок в классах функций $u(t) \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T]$ и $u(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T]$ соответственно, предъявлены аналитические решения, полученные путём факторизации интегральных уравнений, к которым редуцируются соответствующие начальные задачи.

В данной работе будем рассматривать дифференциальные уравнения более общего вида:

$$\ddot{u}(t) + pD_{0t}^\alpha \dot{u} + qD_{0t}^\beta u = f(t), \quad (1.7)$$

$$\ddot{u}(t) + pD_{0t}^{1+\alpha} u + qD_{0t}^\beta u = f(t), \quad (1.8)$$

где $\alpha, \beta \in [0, 1)$. После двукратного интегрирования с учётом начальных данных (1.5) и (1.6) соответственно, эти уравнения редуцируются эквивалентным образом к интегральным уравнениям типа Вольтёрры

$$u(t) + pI_{0t}^{1-\alpha} u + qI_{0t}^{2-\beta} u = F(t), \quad (1.9)$$

где для задачи (1.7), (1.5) $F(t) = I_{0t}^2 f + u_0 + \dot{u}_0 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} p u_0 t^\alpha$, а для задачи (1.8), (1.6) — $F(t) = I_{0t}^2 f + u_0 + \bar{u}_0 t$.

Если для уравнения (1.9) выполняются условия $\beta = 2\alpha$, то оно допускает факторизацию и на основе аппарата предложенного в [1] выписываются аналитические решения начальных задач в терминах функции типа Миттаг—Леффлера и её обобщений. Вычисления базируются на использовании интегральных представлений и асимптотических формул разработанных в [5-7]. В противном случае предлагается применять приближённые методы решения интегрального уравнения, например, метода квадратур, основанный на замене входящих в левую часть уравнения интегралов формулами численного интегрирования. Однако при использовании известных подходов для решения (1.9) возникают проблемы, связанные с сингулярностью ядер интегральных операторов. Чтобы избежать этих трудностей, предлагается определить аналоги формул численного интегрирования для интегрального оператора (1.2).

Также необходимо получить формулы численного интегрирования для интегрального оператора, введённого в [8],

$$E_{0t; \lambda}^{\alpha, \sigma} u = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_\sigma[\lambda(t - \tau)^\sigma; \alpha] u(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

где $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$, $u(t) \in L(0, T)$, а $E_\alpha(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$ — функция типа Миттаг—Леффлера [5], в терминах которой обычно удаётся выписывать аналитические решения интегральных уравнений типа (1.9). Оператор (1.10) будет использован в данной работе при построении сходящейся итерационной процедуры вычисления приближённого решения данного интегрального уравнения.

Таким образом, в работе поставлены следующие задачи:

1. Разработать формулы численного интегрирования для интегральных операторов дробного порядка, а также априорные оценки погрешности приближённого вычисления с помощью этих формул.
2. Построить итерационную процедуру вычисления решений интегрального уравнения (1.9), доказать её сходимость и провести оценку погрешности.

2. Формулы численного интегрирования и априорные оценки погрешности вычислений

В настоящее время хорошо разработан математический аппарат и формализован алгоритм приближённого вычисления «классических» интегралов [9], основанный на замене подынтегральной функции такой аппроксимирующей функцией, чтобы интеграл от неё вычислялся в элементарных функциях достаточно просто. Один из способов вычисления интеграла заключается в разбиении отрезка интегрирования на n частичных отрезков и аппроксимации подынтегральной функции на каждом из этих отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) её разложением в ряд Тейлора в окрестности точек t_k . Вычисление интеграла при этом практически не вызывает затруднений, а его значение выражается через значения подынтегральной функции в узлах t_k . В зависимости от количества членов ряда Тейлора, взятого для аппроксимации подынтегральной функции, получаются формулы известные под названиями: «формула прямоугольников», «формула трапеций» и «формула Симпсона», а также их модификации.

Построим аналогичные формулы для интегрального оператора I_{0t}^α . Пусть $\alpha > 0$. Для фиксированного $t \in [0, T]$ выберем разбиение отрезка $[0, t]$ на n равных частей, длина которых $h = \frac{t}{n}$, т.е. $t_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$), в частности $t_0 = 0$, $t_n = t$. Представим дробный интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[t_k, t_{k+1}]$, а подынтегральную функцию в виде ряда Тейлора, при этом ограничиваясь двумя членами разложения

$$\begin{aligned} I_{0t}^\alpha u &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(\tau) d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(t_k) + \dot{u}(\xi_k)(\tau-t_k) d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(t_i-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \dot{u}(\xi_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau-t_k) d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) [(t_n-t_k)^\alpha - (t_n-t_{k+1})^\alpha] + R(h) = \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) [(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha] + R(h), \end{aligned}$$

где $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$, $u(t) \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$, а $R(h)$ — остаток, для которого выполняется следующая оценка

$$|R(h)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \dot{u}(\xi_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau-t_k) d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} \right| \leq \frac{h |\dot{u}(\xi)|}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| \leq \frac{ht^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |\dot{u}(\xi)|,$$

где $\xi \in (0, t)$. Исходя из этого аналог первой (левой) формулы прямоугольников для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ имеет вид

$${}_{\text{пр}}^{(1)} I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u_k [(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha] + o(h), \quad (2.1)$$

где $u_k = u(t_k)$, а априорная оценка погрешности для вычисления дробного интеграла по формуле (2.1) выглядит следующим образом:

$$|I_{0t}^\alpha u - {}^{(1)}_{\text{np}} I_{0t}^\alpha u| \leq \frac{Mht^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (2.2)$$

где M — константа независимая от h , в частности $M = \max_{\xi \in [0, t]} |\dot{u}(\xi)|$ при $u(t) \in C^1[0, T]$.

Действуя таким же образом, легко получить аналог второй (правой) формулы прямоугольников для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ и априорную оценку погрешности для приближённого вычисления значения интеграла по ней

$${}^{(2)}_{\text{np}} I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} [(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha] + o(h), \quad (2.3)$$

$$|I_{0t}^\alpha - {}^{(2)}_{\text{np}} I_{0t}^\alpha| \leq \frac{hMt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (2.4)$$

Для получения аналога формулы трапеций для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ возьмём три члена ряда Тейлора в разложении подынтегральной функции. Заменяя производную выражением $\dot{u}(t_k) = \frac{1}{h} [u(t_{k+1}) - u(t_k)] - \frac{h}{2} \ddot{u}(\xi_{k1})$ ($\xi_{k1} \in (t_k, t_{k+1})$), имеем

$$\begin{aligned} I_{0t}^\alpha u &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(\tau) d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k) d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} - \\ &\quad - \frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{u}(\xi_{k1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k) d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{u}(\xi_{k2}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k)^2 d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) [(n-k)^\alpha - (n-k-1)^\alpha] + \\ &+ h^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} [u(t_{k+1}) - u(t_k)] \left\{ \frac{(n-k)^{\alpha+1} - (n-k-1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{(n-k-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\} + R(h) = \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(2 + \alpha)} u(t_0) [(1 + \alpha)n^\alpha - n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}] + \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(2 + \alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} u(t_k) [(n-k+1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1}] + u(t_n) + R(h), \end{aligned}$$

где $\xi_{k2} \in (t_k, t_{k+1})$, $u(t) \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T)$. Оценим остаток $R(h)$

$$|R(h)| = \left| -\frac{h}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{u}(\xi_{k1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k) d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{u}(\xi_{k2}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k)^2 d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{h^2 |\ddot{u}(\xi)|}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| = \frac{h^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |\ddot{u}(\xi)|,$$

где $\xi \in (0, t)$. Итак, аналог формулы трапеций для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ может быть записан в виде

$$\text{тргп} I_{0t}^\alpha u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{k=0}^n \omega_k u_k + o(h^2), \quad (2.5)$$

где

$$\omega_k = \begin{cases} (1+\alpha)n^\alpha - n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}, & k=0; \\ (n-k+1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1}, & k=1, 2, \dots, n-1; \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

что соответствует результату, опубликованному в работе [10], или в виде удобном нам для дальнейшего использования

$$\begin{aligned} \text{тргп} I_{0t}^\alpha u &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \left\{ u_0 [(1+\alpha)i^\alpha - i^{\alpha+1} + (i+1)^{\alpha+1}] + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{i-1} u_k [(i-k+1)^{\alpha+1} - 2(i-k)^{\alpha+1} + (i-k-1)^{\alpha+1}] + u_i \right\} + o(h^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Получена также априорная оценка погрешности, которая выглядит следующим образом:

$$|I_{0t}^\alpha u - \text{тргп} I_{0t}^\alpha u| \leq \frac{h^2 M t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (2.7)$$

где M — константа независящая от h , в частности $M = \max_{\xi \in [0, t]} |\ddot{u}(\xi)|$ при $u(t) \in C^2[0, T]$.

Увеличение числа членов в тейлоровском разложении подынтегральной функции ведёт к дальнейшему повышению точности вычислений, с одной стороны, и к увеличению количества вычислений подынтегральной функции и коэффициентов квадратурной формулы, с другой. Это объясняется как возрастанием порядка производных, которые при формировании формул численного интегрирования выражаются через значения функции в узловых точках, так и сложностями связанными с дробным порядком интегрирования. Например, столь простой формулы Симпсона как для интегрального оператора порядка единица («классического» интеграла) получить не удаётся. Это связано с тем, что для разложения функции $u(t)$ в ряд Тейлора, при разбиении отрезка $[0, t]$ на $i = 2j$ частей равной длины $h = \frac{t}{i}$

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_{2k+1}) + \dot{u}(t_{2k+1})(t - t_{2k+1}) + \frac{\ddot{u}(t_{2k+1})(t - t_{2k+1})^2}{2!} + \\ &+ \frac{\ddot{u}(t_{2k+1})(t - t_{2k+1})^3}{3!} + \frac{\ddot{u}(\xi_k)(t - t_{2k+1})^4}{4!} \end{aligned}$$

коэффициенты при первой и третьей производных от $u(t)$ не обнуляются при интегрировании

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} \frac{(\tau - t_{2k+1}) d\tau}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} \neq 0,$$

в отличие от построения формулы Симпсона для «классического» интеграла

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} (\tau - t_{2k+1}) d\tau = \frac{(\tau - t_{2k+1})^2}{2} \Big|_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} = 0.$$

С другой стороны, целью данной работы является поиск решения интегрального уравнения в классах $C^1[0, T] \cap C^2(0, T]$ и $C[0, T] \cap C^2(0, T]$, определяемых постановками начальных задач (1.7), (1.5) и (1.8), (1.6). В связи с этим аналоги формул прямоугольников и трапеций являются исчерпывающими для нас.

К тому же, как показывает практика, уже формула трапеций даёт достаточно хороший результат, поэтому ограничимся полученными формулами численного интегрирования (2.1), (2.3) и (2.5).

Воспользовавшись определениями оператора $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ и функции типа Миттаг—Леффлера, нетрудно получить аналоги первой и второй формул прямоугольников, а также аналог формулы трапеций для этого оператора:

1) аналог первой формулы прямоугольников и оценка погрешности для вычисления значения оператора, применённого к функции, по ней:

$$\begin{aligned} {}_{\text{пр}}^{(1)} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u &= \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) h^\alpha \{ (n-k)^\alpha E_\sigma [\lambda(n-k)^\sigma h^\sigma; \alpha+1] - \\ &- (n-k-1)^\alpha E_\sigma [\lambda(n-k-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+1] \} + o(h), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$|E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u - {}_{\text{пр}}^{(1)} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u| \leq h t_n^\alpha E_\sigma (\lambda t_n^\sigma; \alpha+1) \max_{\xi \in [0,t]} |\dot{u}(\xi)|; \quad (2.9)$$

2) аналог формулы трапеций и оценка погрешности:

$$\begin{aligned} {}_{\text{трп}} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u &= u_0 h^\alpha \{ n^\alpha E_\sigma [\lambda n^\sigma h^\sigma; \alpha+1] - n^{\alpha+1} E_\sigma [\lambda n^\sigma h^\sigma; \alpha+2] + \\ &+ (n-1)^{\alpha+1} E_\sigma [\lambda(n-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2] \} + \sum_{k=1}^{n-1} u(t_k) h^\alpha \{ (n-k+1)^{\alpha+1} E_\sigma [\lambda(n-k+1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2] - \\ &- 2(n-k)^{\alpha+1} h^\alpha E_\sigma [\lambda(n-k)^\sigma h^\sigma; \alpha+2] + (n-k-1)^{\alpha+1} E_\sigma [\lambda(n-k-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2] \} + \\ &+ u_n h^\alpha E_\sigma [\lambda h^\sigma; \alpha+2] + o(h^2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$|E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u - {}_{\text{трп}} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u| \leq h^2 t_n^\alpha E_\sigma [\lambda t_n^\sigma; \alpha+1] \max_{\xi \in [0,t]} |\dot{u}(\xi)|. \quad (2.11)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Полученные аналоги формул численного интегрирования (2.8) и (2.10) для оператора $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ и априорные оценки погрешностей этих формул (2.9) и (2.11) в предельном случае (при $\lambda \rightarrow 0$) переходят соответственно в формулы численного интегрирования для интегрального оператора Римана—Лиувилля (2.1) и (2.6) и оценки погрешностей для них (2.2) и (2.7).

З а м е ч а н и е 2.2. При устремлении показателя α (показателя дробности) к единице в аналогах формул численного интегрирования для дробного интеграла (2.1), (2.3) и (2.6) получаются формулы численного интегрирования для «классического» интеграла: «первая формула прямоугольников», «вторая формула прямоугольников» и «формула трапеций» соответственно. При $\alpha \rightarrow 0$ в априорных оценках погрешностей (2.2), (2.4) и (2.7) приближённых вычислений по формулам (2.1), (2.3) и (2.6) получаются оценки для классических формул.

3. Итерационная процедура вычисления решений интегрального уравнения. Оценка погрешности и сходимость

Рассматривается приближённый метод решения интегрального уравнения (1.9), основанный на замене входящих в уравнение интегральных операторов квадратурными формулами, в частности, формулами численного интегрирования. Пусть на конечном отрезке $[0, T]$ имеется разбиение $t_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) с шагом $h = \frac{T}{n}$. Точные значения функций $u(t)$ и $F(t)$ в узловых точках $t = t_i$ обозначим за u_i и F_i соответственно, приближённое значение функции $u(t)$ за \tilde{u}_i . Положим $t = t_i$ в интегральном уравнении (1.9), в результате чего получим систему равенств

$$u_0 = F_0, \quad (3.1)$$

$$u_i + pI_{0t_i}^{1-\alpha}u + qI_{0t_i}^{2-\beta}u = F_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Воспользуемся квадратурными формулами в следующем виде

$$I_{0t_i}^\alpha u = h^\alpha \sum_{k=0}^i c_{ik}^{(\alpha)} u_k + R_i^{(\alpha)}(h), \quad (3.3)$$

где $c_{ik}^{(\alpha)}$ — коэффициенты квадратурной формулы для дробного интеграла порядка α в точке $t = t_i$ не зависящие от h , $R_i^{(\alpha)}(h)$ — погрешность приближённого вычисления дробного интеграла порядка α в точке $t = t_i$. Как видно, частными случаями (3.3) являются формулы (2.1) и (2.5). Заменяем в каждом равенстве (3.2) дробные интегралы квадратурными формулами (3.3), при этом выразив u_i в явном виде

$$u_i = \frac{F_i - ph^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} u_k - pR_i^{(1-\alpha)}(h) - qh^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} u_k - qR_i^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)}} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.4)$$

где u_0 определяется из (3.1). Ясно, что необходимо требовать в (3.4) выполнение следующего условия

$$1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} \neq 0.$$

Для малых h это означает, что

$$\left| -ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} - qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} \right| < 1,$$

или

$$\left| ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} \right| \leq C_h < 1.$$

В виду того, что точно может быть вычислено только значение u_0 , (3.4) переписывается в виде

$$u_i = \frac{1}{1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)}} \left[F_i - ph^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} \tilde{u}_k - pR_i^{(1-\alpha)}(h) - \right. \\ \left. - ph^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} R_k - qh^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} \tilde{u}_k - qh^{2-\beta} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} R_k - qR_i^{(2-\beta)}(h) \right],$$

где R_k — полная погрешность вычисления значения $u(t)$ в точке $t = t_k$. В результате получаем систему из i равенств для вычисления приближённого решения в точке $t = t_i$

$$\tilde{u}_j = \frac{F_j - ph^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(1-\alpha)} \tilde{u}_k - qh^{2-\beta} \sum_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(2-\beta)} \tilde{u}_k}{1 + ph^{1-\alpha} c_{jj}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{jj}^{(2-\beta)}}, \quad (j = 1, 2, \dots, i) \quad (3.5)$$

а также систему равенств для погрешностей

$$R_1 = \frac{-pR_1^{(1-\alpha)}(h) - qR_1^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha} c_{11}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{11}^{(2-\beta)}},$$

$$R_j = \frac{-h^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{j-1} [pc_{jk}^{(1-\alpha)} + qh^{1+\alpha-\beta} c_{jk}^{(2-\beta)}] R_k - pR_j^{(1-\alpha)}(h) - qR_j^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha} c_{jj}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{jj}^{(2-\beta)}} \quad (j = 2, 3, \dots, i).$$

Оценим погрешность метода с обеих сторон, с учётом малости h и следующих обозначений

$$\max_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \left\{ \left| c_{jk}^{(1-\alpha)} \right|, \left| c_{jk}^{(2-\beta)} \right| \right\} = C_{\max}, \quad \min_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \left\{ \left| c_{jk}^{(1-\alpha)} \right|, \left| c_{jk}^{(2-\beta)} \right| \right\} = C_{\min},$$

$$\max_{k=1,2,\dots,i} \left\{ \left| R_k^{(1-\alpha)}(h) \right|, \left| R_k^{(2-\beta)}(h) \right| \right\} = h^s R_{\max}, \quad \min_{k=1,2,\dots,i} \left\{ \left| R_k^{(1-\alpha)}(h) \right|, \left| R_k^{(2-\beta)}(h) \right| \right\} = h^s R_{\min},$$

где s — порядок точности метода численного интегрирования (для аналога формулы прямоугольников $s = 1$, трапеций $s = 2$). Причём будем брать $C_{\min} > 0$, чему вполне удовлетворяют используемые нами формулы численного интегрирования (2.1), (2.3) и (2.5). А также $R_{\min} > 0$ — это означает, что мы не будем брать «простых» решений: $u(t) = c$ или $u(t) = kt + c$, где k и c — константы. Теперь запишем систему двойных неравенств для погрешностей

$$(|p| + |q|) h^s R_{\min} \leq |R_1| \leq \frac{(|p| + |q|) h^s R_{\max}}{1 - C_h};$$

$$h^{1-\alpha} C_{\min} |p| \sum_{k=1}^{j-1} |R_k| + (|p| + |q|) h^s R_{\min} \leq |R_j| \leq \frac{h^{1-\alpha} C_{\max} (|p| + |q|) \sum_{k=1}^{j-1} |R_k| + (|p| + |q|) h^s R_{\max}}{1 - C_h} \quad (j = 2, 3, \dots, i).$$

Ясно, что необходимым условием сходимости приближённого решения интегрального уравнения к точному является равенство нулю предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{1-\alpha} C_{\min} |p| \sum_{k=1}^{j-1} |R_k| + (|p| + |q|) h^s R_{\min} = 0.$$

Для вычисления предела рассмотрим следующий набор величин

$$R_1 = (|p| + |q|) h^s R_{\min},$$

$$R_j = h^{1-\alpha} C_{\min} |p| \sum_{k=1}^{j-1} R_k + (|p| + |q|) h^s R_{\min}, \quad (j = 2, 3, \dots, i)$$

которые минорируют соответствующие оценки погрешностей, т.е. $R_j \leq |R_j|$. Легко видеть, что каждое R_j ($j = 2, 3, \dots, i$) может быть выражено через R_1 по формуле

$$R_j = R_1 (1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|)^{j-1},$$

или

$$R_j = (|p| + |q|) h^s R_{\min} (1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|)^{j-1}.$$

Найдём предел от полученного выражения учитывая, что $j = \frac{t}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} R_j &= \lim_{h \rightarrow 0} (|p| + |q|) h^s R_{\min} (1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|)^{\frac{t}{h}-1} = \\ &= (|p| + |q|) R_{\min} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^s}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} (1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|)^{\frac{t}{h}} = \\ &= (|p| + |q|) R_{\min} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^s}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} \left[(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|)^{\frac{1}{h^{1-\alpha} C_{\min}|p|}} \right]^{\frac{t h^{1-\alpha} C_{\min}|p|}{h}} = \\ &= (|p| + |q|) R_{\min} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^s e^{\frac{t C_{\min}|p|}{h^\alpha}}}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} = \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, итерационная процедура построения приближённого решения интегрального уравнения (3.5) расходится.

Для получения приближённого решения сходящегося к точному сделаем следующую замену переменных

$$v(t) = u(t) + p I_{0t}^{1-\alpha} u. \quad (3.6)$$

Выразим u через v , для чего решим уравнение (3.6). В результате имеем

$$u(t) = v(t) - p E_{0t; -p}^{1-\alpha, 1-\alpha} v. \quad (3.7)$$

Подставим (3.7) в (1.9)

$$v(t) + q I_{0t}^{2-\beta} \{v(t) - p E_{0t; -p}^{1-\alpha, 1-\alpha} v\} = F(t),$$

и преобразуем, используя свойство композиции операторов (1.2) и (1.10) [8],

$$v(t) + q I_{0t}^{2-\beta} v - pq E_{0t; -p}^{3-\alpha-\beta, 1-\alpha} v = F(t). \quad (3.8)$$

Обозначая точное решение интегрального уравнения (3.8) $v(t)$ в точках $t = t_i$ за v_i , а приближённое за \tilde{v}_i на разбиении $t_i = ih$ отрезка $[0, T]$ имеем систему равенств

$$v_0 = F_0, \quad (3.9)$$

$$v_i + p I_{0t_i}^{2-\beta} v - pq E_{0t_i; -p}^{3-\alpha-\beta, 1-\alpha} v = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.10)$$

Для дробного интеграла будем пользоваться формулой (3.3), а для оператора $E_{0t; \lambda}^{\alpha, \sigma}$ —

$$E_{0t_i; \lambda}^{\alpha, \sigma} u = h^\alpha \sum_{k=0}^i c_{ik}^{(\alpha, \sigma)} u_k + R_i^{(\alpha, \sigma)}(h), \quad (3.11)$$

где $c_{ik}^{(\alpha, \sigma)}$ — коэффициенты квадратурной формулы для оператора (1.10) с верхними параметрами α и σ в точке $t = t_i$ не зависящие от h , $R_i^{(\alpha, \sigma)}(h)$ — погрешность приближённого

вычисления оператора с верхними параметрами α и σ в точке $t = t_i$. Заменяем в каждом равенстве (3.10) интегральные операторы квадратурными формулами (3.3) и (3.11), при этом выразив v_i в явном виде

$$v_i = \frac{F_i - ph^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} v_k - pR_i^{(2-\beta)}(h) + qh^{3-\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} v_k + qR_i^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}(h)}{1 + ph^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{ii}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.12)$$

где v_0 определяется из (3.9). Для (3.12) должно выполняться следующее условие:

$$1 + ph^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{ii}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \neq 0.$$

Для малых h это означает, что

$$\left| ph^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{ii}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \right| < 1,$$

или

$$\left| ph^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{ii}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \right| \leq C_h < 1. \quad (3.13)$$

С учётом того, что при вычислении v_i по формуле (3.12) используются приближённые значения, формула переписывается в виде

$$v_i = \frac{1}{1 + ph^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{ii}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}} \left[F_i - ph^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} \tilde{v}_k - ph^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} R_k - \right. \\ \left. - pR_i^{(2-\beta)}(h) + pqh^{3-\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \tilde{v}_k + pqh^{3-\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} R_k + pqR_i^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}(h) \right],$$

где R_k — полная погрешность вычисления значения $v(t)$ в точке $t = t_k$. В результате получаем систему из i равенств для вычисления приближённого решения в точке $t = t_i$

$$\tilde{v}_j = \frac{F_j - ph^{2-\beta} \sum_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(2-\beta)} \tilde{v}_k + pqh^{3-\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \tilde{v}_k}{1 + ph^{2-\beta} c_{jj}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{jj}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}}, \quad (j = 1, 2, \dots, i) \quad (3.14)$$

а также систему равенств для погрешностей

$$R_1 = \frac{-pR_1^{(2-\beta)}(h) + pqR_1^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}(h)}{1 + ph^{2-\beta} c_{11}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{11}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}},$$

$$R_j = \frac{1}{1 + ph^{2-\beta} c_{jj}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta} c_{jj}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}} \left\{ pqR_j^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}(h) - pR_j^{(2-\beta)}(h) - \right. \\ \left. - h^{2-\beta} p \sum_{k=1}^{j-1} \left[c_{jk}^{(2-\beta)} - qh^{1-\alpha} c_{jk}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \right] R_k \right\}. \quad (j = 2, 3, \dots, i)$$

Оценим погрешность метода, с учётом малости h и следующих условий

$$\max_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \left\{ \left| c_{jk}^{(2-\beta)} \right|, \left| c_{jk}^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)} \right| \right\} = C,$$

$$\max_{k=1,2,\dots,i} \left\{ \left| R_k^{(2-\beta)}(h) \right|, \left| R_k^{(3-\alpha-\beta, 1-\alpha)}(h) \right| \right\} = h^s R,$$

где s — порядок точности метода численного интегрирования. Теперь запишем систему неравенств для погрешностей

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \frac{(1+|q|)|p|h^s R}{1-C_h}, \\ |R_j| &\leq \frac{h^{2-\beta} C |p|(1+|q|) \sum_{k=1}^{j-1} |R_k| + (1+|q|)|p|h^s R}{1-C_h} \quad (j = 2, 3, \dots, i). \end{aligned}$$

Рассмотрим набор величин

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(1+|q|)|p|h^s R}{1-C_h}, \\ R_j &= \frac{h^{2-\beta} C |p|(1+|q|) \sum_{k=1}^{j-1} |R_k| + (1+|q|)|p|h^s R}{1-C_h} \quad (j = 2, 3, \dots, i), \end{aligned}$$

для которых, как видно, выполняется условие $|R_j| \leq R_j$. Ясно, что каждое R_j ($j = 2, 3, \dots, i$) может быть выражено через R_1 по формуле

$$R_j = R_1 h^s \left(1 + \frac{C |p|(1+|q|) h^{2-\beta}}{1-C_h} \right)^{j-1}$$

или

$$R_j = \frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h} h^s \left(1 + \frac{C |p|(1+|q|) h^{2-\beta}}{1-C_h} \right)^{j-1}. \quad (3.15)$$

При устремлении h к нулю в (3.15), с учётом $j = \frac{t}{h}$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} R_j &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h} h^s \left(1 + \frac{C |p|(1+|q|) h^{2-\beta}}{1-C_h} \right)^{\frac{t}{h}-1} = \\ &= \frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^s e^{\frac{C |p|(1+|q|) h^{1-\beta}}{1-C_h}}}{1 + \frac{C |p|(1+|q|) h^{2-\beta}}{1-C_h}} = 0. \end{aligned}$$

По результатам рассуждений сформулируем теорему.

Т е о р е м а 3.1. При выполнении условия (3.13) приближённое решение (3.14) сходится к точному решению интегрального уравнения (3.8), а априорная оценка погрешности вычисления приближённого решения в точке $t = t_i$ имеет вид

$$|v_i - \tilde{v}_i| \leq \frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h} h^s \left(1 + \frac{C |p|(1+|q|) h^{2-\beta}}{1-C_h} \right)^{i-1}.$$

После того как найдено решение вспомогательного уравнения (3.8), искомое решение интегрального уравнения (1.9) вычисляется по формуле (3.7), с использованием любой из квадратурных формул для обобщения интегрального оператора Римана—Лиувилля (1.10), например (2.8) или (2.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(20). – С. 24-36.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит. – 2003. – 272 с.
3. Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши// Тр. шестой Всерос. научн. конф. с междунар. участием: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2009. – Ч. 1. – С. 177-181.
4. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля// Тр. седьмой Всерос. научн. конф. с междунар. участием: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2010. – Ч. 3. – С. 225-232.
5. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области Наука. – М: Наука. – 1966. – 672 с.
6. Gorenflo R., Loutchko J., Luchko Y.F. Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2002. – №5(4). – P. 491-518.
7. Яшагин Н.С. Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщения функции типа Mittag—Леффлера на случай двух переменных// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №5(21). – С. 229-236.
8. Огородников Е.Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей// Труды десятой межвузовской конференции: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2000. – Ч. 3. – С. 119-126.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М: Наука. – 1975. – 632 с.
10. Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D., Luchko Y.F. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods// Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. – 2005. – №194. – P. 743-773.

Numerical method of Solution Initial problems for Second Order Differential Equations with Riemann–Liouville fractional derivates

© N. S. Yashagin²

Abstract. The numerical integration formulas for some integral operators with Abel kernel are obtained. The prior estimate for this formulas are presented. The iteration procedure for solving initial problem for second order differential equations with Riemann–Liouville fractional derivates are developed. Convergence are proved for this iteration procedure.

Key Words: differential equations with Riemann–Liouville fractional derivates, Volterra integral equation of the Second Kind, method of quadratures.

²Postgraduate Student of chair «Applied Mathematics and Informatics», Samara State Technical University, Samara; nik.yashagin@gmail.com.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

Темпоральная организация данных и метаданных для коллективного управления данными

© С. Н. Лизин¹

Аннотация. Производители СУБД и корпоративных платформ активно соревнуются в разработке новых функциональных возможностей своих продуктов. Однако многие проблемы, такие как совместная обработка данных или управление их жизненным циклом, могут быть решены проще и эффективнее посредством технологий управления данными.

Ключевые слова: Базы данных, данные, темпоральные, транзакционные, СУБД, информационные системы.

1. Введение

Возрастающие объемы информации требуют изменения бизнес-процессов предприятий и организаций. На смену традиционному бумажно-ориентированному взаимодействию, где информационные системы лишь обрабатывают сведения из бумажных документов-первоисточников, приходят электронно-ориентированные системы, в которых первоисточником являются операции, совершаемые пользователями в информационной системе.

Большинство современных корпоративных информационных систем — это многопользовательские автоматизированные информационные системы на основе реляционных баз данных. Коллективная обработка данных в таких системах предполагает наличие конфликтов доступа к данным. В настоящее время глубоко развито научное направление управления конкурентным доступом к данным (on-line transactions processing, OLTP), изучающее обеспечение согласованности данных при их параллельной обработке.

Пусть I — информационная система, задачей которой является поддержание в ее базе данных Z сведений об объектах множества X . Состояние множеств X и Z в момент времени t будем обозначать $X(t)$ и $Z(t)$ соответственно. Управление конкурентным доступом предполагает недопущение ситуаций, при которых одна транзакция читает данные, изменяемые другой транзакцией до ее завершения. Положим r — некоторая транзакция, $W_r(t)$ — некоторое подмножество базы данных $Z(t)$, на основании содержания которого выполняется транзакция r . Пусть также t_r — время чтения транзакцией r данных множества $W_r(t)$, а t_t — время записи результата транзакции r . Тогда, если $W_r(t_r) = W_r(t_t)$, то результат транзакции r фиксируется во множестве $Z(t)$. Если же $W_r(t_r) \neq W_r(t_t)$, то результат транзакции r откатывается. Такой подход называется сериализацией транзакций.

Однако в клиент-серверных системах чтение и запись обычно производятся в разных хранилищах: чтение из локального кэша, а запись — в СУБД. В результате подмножество W_r не всегда может быть достаточно просто выделено. Данная проблема может

¹Доцент, ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева», г. Саранск; sergey.lizin@gmail.com.

быть решена посредством использования полных транзакций, то есть транзакций, в состав операций которых операций входит проверка неизменности множества W_r . Однако далеко не все выполняемые операции представляют собой полные транзакции. Зачастую программными средствами просто невозможно определить последовательность чтений и записей пользователем данных, составляющих атомарную транзакцию. В результате ее невозможно откатить при изменении данных чтения.

Альтернативой обеспечению гарантированной согласованности данных за счет сериализации транзакций является обеспечение возможности восстановления данных чтения для каждой транзакции (причем в распределенных системах требуется восстановление данных локального кэша/реплики) с сохранением сведений об авторстве изменений. Базы данных, обеспечивающие версионность данных, как в разрезе действительного, так и транзакционного времени, называются битемпоральными. Однако разработанные технологии использования темпоральной организации данных для целей управления коллективным доступом к данным в настоящее время отсутствуют.

Управление коллективным доступом не ограничивается отслеживанием авторства изменений. Электронно-ориентированные информационные системы требуют обеспечения юридической значимости информации с разграничением ответственности между пользователями за внесенные изменения. Для этого необходимо сохранение доказательств авторства изменений, которое обычно реализуется средствами электронной цифровой подписи.

Также следует учитывать тот факт, что не все изменения в базу данных могут вноситься по решению одного пользователя. Зачастую необходимо согласование изменений несколькими пользователями. Данная задача решается, как правило, посредством взаимодействия вне базы данных посредством обмена сообщениями. Недостатком данного подхода является невозможность восстановления данных чтения. Таким образом, более целесообразно информацию о согласовании изменений также сохранять в базе данных.

Отдельного изучения заслуживают случаи, когда обработка данных осуществляется не в одной, а в нескольких информационных системах. При этом далеко не всегда коллективное управление совместными данными несколькими информационными системами предполагает обработку единой распределенной базы данных. Количественный состав элементов, подлежащих обработке в каждой информационной системе, может значительно различаться, а обработка требоваться только в отношении совместных элементов. Кроме того, одни и те же сущности в разных информационных системах могут иметь различные значения атрибутов, причем задача синхронизации не ставится. В отношении таких элементов, как правило, требуется лишь поддержание информации о связях между сущностями. При этом требуется учитывать возможность не только таких событий как появление или исчезновение (прекращение существования) сущностей, но и их объединение, присоединение, разделение и т. п., что требует расширения множества допустимых операций над сущностями.

Существенным ограничением для решения перечисленных задач является изменчивость не только самих данных, но и используемых структур данных (метаданных). Изменение структуры таблиц — добавление и удаление, объединение и разделение столбцов — приводят к нарушению целостности электронной цифровой подписи, так как по сути исходные данные теряются. Следовательно, в отношении метаданных также должна обеспечиваться темпоральность, причем данные каждого периода должны быть доступны в соответствующей структуре. При взаимодействии информационных систем сложность представляет асинхронность используемых метаданных, а также их изменение с течением времени. Таким образом, в дополнение к поддержанию связей между сущностями, требуется поддержание связей между элементами метаданных — классами (таблицами) и атрибутами.

2. Нарушение истинности соединений предикатов

Пусть C — множество классов базы данных Z . Каждому классу $c \in C$ взаимнооднозначно соответствует некоторое реляционное отношение R_c . Множество всех реляционных отношений будем обозначать R . Схемой отношения R_c будем называть конечное множество атрибутов A_c :

$$A_c = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_c}}\}.$$

Множество всех атрибутов базы данных Z будем обозначать A :

$$A = \bigcup_{c \in C} A_c.$$

Пусть D — множество доменов, используемых в базе данных Z . Каждому атрибуту $a \in A$ ставится в соответствие некоторый домен $D_i \in D$, причем один и тот же домен может соответствовать нескольким различным атрибутам. Домен атрибута a будем обозначать $\text{dom}(a)$. Объединение доменов атрибутов класса c обозначим $\text{dom}(A_c)$:

$$\text{dom}(a_{i_1}) \cup \text{dom}(a_{i_2}) \cup \dots \cup \text{dom}(a_{i_{n_c}}) = \bigcup_{a_i \in A_c} \text{dom}(a_i) = \text{dom}(A_c).$$

Декартово произведение доменов атрибутов класса c обозначим $\prod \text{dom}(A_c)$:

$$\text{dom}(a_{i_1}) \times \text{dom}(a_{i_2}) \times \dots \times \text{dom}(a_{i_{n_c}}) = \prod_{a_i \in A_c} \text{dom}(a_i) = \prod \text{dom}(A_c).$$

Реляционная модель данных предполагает, что каждая база данных представляет собой структурированное множество истинных высказываний. Высказывания сгруппированы в отношения, каждое из которых задается некоторым предикатом. Каждому классу $c \in C$ сопоставим n_c -местный предикат P_c :

$$P_c(v_1, v_2, \dots, v_{n_c}),$$

где $v_i \in \text{dom}(a_i)$, $a_i \in A_c$. Кортеж $r = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_c} \rangle$ принадлежит отношению R_c тогда и только тогда, когда предикат $P_c(v_1, v_2, \dots, v_{n_c})$ является истинным. Другими словами, кортежи отношений представляют собой значения переменных, которые при подстановке в предикат превращают его в истинное высказывание. Соответственно, отношение R_c представляет собой:

$$R_c = \{\langle v_1, v_2, \dots, v_{n_c} \rangle \in \prod \text{dom}(A_c) \mid P_c(v_1, v_2, \dots, v_{n_c}) = 1\}.$$

Архитектура современных систем управления базами данных (СУБД) и общий подход к управлению данными в значительной степени определяется историческими причинами. Существовавшие во времена появления первых СУБД компьютеры имели небольшую память, обеспечивали относительно низкую производительность и использовались в основном для проведения различного рода расчетов. В этих условиях очевидным способом повышения эффективности СУБД воспринималась возможность следующих допущений:

- соединение в одной таблице множества различных данных;
- хранение в базе данных только актуальных в данный момент сведений.

Соединение в одной таблице множества различных данных заключается в том, что в каждой отдельно взятой таблице хранятся значения соединенного предиката. Например, пусть $P_1(v_1, v_2)$ и $P_2(v_1, v_3)$ — два предиката. Для хранения значений параметров, на которых данные предикаты превращаются истинные высказывания, может использоваться две таблицы — для каждого предиката, либо одна таблица для соединенного по параметру v_1 предиката: $P_1 \bowtie P_2(v_1, v_2, v_3)$.

Второй способ позволяет сократить место, необходимое для хранения значений, а также повысить скорость обработки данных за счет отсутствия необходимости выполнения операций соединения при выборке данных. В то же время, если для некоторого значения v'_1 известно значение v'_2 , при котором является истинным предикат $P_1(v_1, v_2)$, но при этом не известно значение v'_3 при котором $P_1(v'_1, v'_3) = 1$, то данная информация не может быть корректно отражена в базе данных, поскольку соединение предикатов $P_1 \bowtie P_2(v'_1, v'_2, ?)$, где ? — неизвестное значение, очевидно, не будет являться истинным высказыванием.

З а м е ч а н и е 2.1. На практике наиболее частый подход к решению этой проблемы основан на применении неопределенных значений (*NULL*) на основе трехзначной логики. Данный подход подвергается широкой критике так как нарушает реляционную модель [1].

Второе допущение — хранение в базе данных только актуальных значений — не представляет сложности в условиях, когда базы данных используются исключительно для проведения различного рода расчетов. Однако в современных автоматизированных информационных системах СУБД используются преимущественно для целей длительного хранения данных. Особенно это важно в электронно-ориентированных системах. В частности, современное законодательство требует хранения финансовой информации не менее 3-5 лет.

Пусть $P_1(v_1, v_2)$ и $P_2(v_2, v_3)$ — два предиката. Также пусть в момент времени t' данные предикаты истинны на значениях v'_1, v'_2, v'_3 :

$$P_1(v'_1(t'), v'_2(t')) = 1, \quad P_2(v'_2(t'), v'_3(t')) = 1.$$

Тогда в момент времени t' на данных значениях истинным также будет высказывание на основе соединения предикатов по v_1 :

$$P_1 \bowtie P_2(v'_1(t'), v'_2(t'), v'_3(t')) = 1.$$

Положим в момент времени t'' значения параметра v'_3 изменены: $v'_3(t'') \neq v'_3(t')$. Остальные же параметры остались прежними: $v'_1(t'') = v'_1(t')$, $v'_2(t'') = v'_2(t')$. При этом сохраняется истинность предикатов:

$$P_1(v'_1(t''), v'_2(t'')) = 1, \quad P_2(v'_2(t''), v'_3(t'')) = 1.$$

В то же время истинность соединения предикатов может быть нарушена:

$$P_1 \bowtie P_2(v'_1(t''), v'_2(t''), v'_3(t'')) = 0.$$

3. Решение задач управления коллективным доступом к данным

В классической реляционной теории важное место занимает понятие ключа отношения. Ключом отношения R_c будем называть подмножество $K_c \subset A_c$, для которого следствием предиката P_c является:

$$\forall r_1, r_2 \in R_c : (r_1(A_c) \neq r_2(A_c)) \rightarrow (r_1(K_c) \neq r_2(K_c)).$$

Ключ представляет собой некоторый набор атрибутов, значения которых уникально идентифицируют кортеж. При этом в одном отношении может быть несколько потенциальных ключей.

Однако такая трактовка ключа не лишена недостатков. Во-первых, задача идентификации сущностей (как между X и Z , так и между Z^1 и Z^2) зачастую гораздо сложнее и не всегда может быть сведена к простому сравнению ключевых атрибутов: часть информации может отсутствовать, либо же несовпадение ключевых атрибутов не обязательно может означать различность сущностей. Характерным примером здесь может служить задача идентификации людей. Фамилия, имя, отчество и дата рождения являются недостаточной информацией для однозначной идентификации, а их различие — не основанием для того, что это разные люди. Часть информации о человеке может быть неизвестна. Во-вторых, ключевые атрибуты могут меняться с течением времени. Для людей примером может служить смена фамилии (реже имени и отчества), паспорта и т. п. В-третьих, использование ключей из нескольких атрибутов усложняет использование ссылок из других сущностей.

Качество реляционных моделей определяется соответствием входящих в них отношений (предикатов) критериям нормальных форм [2]. В качестве минимального уровня, обеспечивающего достаточную независимость данных, как правило, рассматривается нормальная форма Бойса-Кодда. Данная форма предполагает, что детерминанты всех ее функциональных зависимостей являются потенциальными ключами. Что в свою очередь означает, что каждый кортеж отношения описывает одну и только одну сущность, выделенную во множестве X .

С учетом этого, произведем некоторое расширение реляционной модели. Множество всех сущностей в базе данных Z обозначим E . Множество сущностей класса $c \in C$ будем обозначать E_c , причем:

$$\bigcup_{c \in C} E_c = E.$$

Тот факт, что некоторый элемент $x \in X$ в базе данных Z идентифицируется сущностью $e \in E$, будем обозначать: $\text{id}(x) = e$.

Используя введенные обозначения введем новое определение отношения R_c :

$$R_c = \left\{ \langle e, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}} \rangle \in E_c \times \prod \text{dom}(A_c) \mid P_c(e, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}}) \right\}.$$

Предикат P_c в данном случае может быть сформулирован относительно определенно:

$$P_c(e, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}}) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \in X : (\text{id}(x) = e) \wedge (x(a_1) = v_{a_1}) \wedge \dots \wedge (x(a_{n_c}) = v_{a_{n_c}}).$$

Обрабатываемые сущности и данные можно разделить на две большие категории: транзакционные и нетранзакционные. Транзакционные сущности — сущности во множестве X , каждая из которых характеризуется относительно некоторого фиксированного (точечного) момента времени, все ее характеристики также относятся к данному моменту времени и не изменяются в последующем. Транзакционные данные — это данные во множестве Z , непосредственно содержащие сведения о транзакционных сущностях множества X . Сущности множества X , не являющиеся транзакционными, называются нетранзакционными. Нетранзакционные сущности относятся к некоторому временному интервалу (возможно неограниченному), в течение которого его характеристики могут изменяться. Аналогично, данные непосредственно хранящие сведения о нетранзакционных сущностях называются нетранзакционными данными. Как правило, в транзакционных данных часто используются ссылки на нетранзакционные данные. Изменение (актуализация) записи

нетранзакционных данных, на которую уже имеются ссылки из записей транзакционных данных, приводит к появлению в базе данных ложных высказываний на основе соединенных предикатов. Решение этой проблемы лежит в необходимости использования только транзакционных данных. Для этого необходимо решить проблему представления нетранзакционных сущностей транзакционными данными.

Для решения проблемы нарушения истинности соединенных предикатов обычно применяется следующая полнотемпоральная реляционная модель:

$$R_c^{fv} = \left\{ r = \langle e, t_{v_b}, t_{v_e}, t_{t_b}, t_{t_e}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}} \rangle \in E_c \times T^4 \times \prod \text{dom}(A_c) \mid \right. \\ \left. P_c^f(e, t_{v_b}, t_{v_e}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}}) \wedge (\forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_e}] r \in Z(t_t)) \right\}.$$

Предикат $P_c^f(e, t_{v_b}, t_{v_e}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}})$ имеет вид:

$$P_c^f(e, t_{v_b}, t_{v_e}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}}) \stackrel{def}{=} \exists x \in X \forall t_v \in [t_{v_b}, t_{v_e}] : \\ Q_c(x, e, t_v) \wedge (x(a_1, t_v) = v_{a_1}) \wedge \dots \wedge (x(a_{n_c}, t_v) = v_{a_{n_c}}),$$

где $Q_c(x, e, t_v) = (x \in X(t_v)) \wedge (e \in E_c(t_v)) \wedge (\text{id}(x) = e)$.

Полнотемпоральная модель не относится к транзакционным данным, поскольку t_{v_e} и t_{t_e} являются значениями, обновляемыми после создания записи. Кроме того, для данной модели характерно наличие проблемы отсутствующих значений, так как t_{v_e} и t_{t_e} до некоторого момента являются неизвестными параметрами. Взамен полнотемпоральной модели может быть предложена простая полутемпоральная модель, обладающая свойством транзакционности:

$$R_c^{s1} = \left\{ r = \langle e, t_{v_b}, t_{t_b}, f, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}} \rangle \in E_c \times T^2 \times \prod \text{dom}(A_c) \mid \right. \\ \left((f \wedge P_c^s(e, t_{v_b}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}})) \vee (\neg f \wedge \bar{P}_c(e, t_{v_b})) \right) \wedge \\ \left. \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_b} + \varepsilon] r \in Z(t_t)) \right\}.$$

Предикат P_c^s здесь определяется следующим образом:

$$P_c^s(e, t_{v_b}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}}) \stackrel{def}{=} \exists x \in X, \exists \varepsilon > 0 \forall t_v \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \varepsilon] : \\ Q_c(x, e, t_v) \wedge (x(a_1, t_v) = v_{a_1}) \wedge \dots \wedge (x(a_{n_c}, t_v) = v_{a_{n_c}}).$$

Предикат \bar{P}_c имеет вид:

$$\bar{P}_c(e, t_{v_b}) \stackrel{def}{=} \exists \varepsilon > 0 \forall t_v \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \varepsilon] : \neg Q_c(x, e, t_v).$$

Однако с сущностями могут происходить не только события появления, исчезновения и изменения атрибутов. Для отражения изменений в жизненном цикле атрибутов необходимо ввести дополнительное отношение жизненного цикла сущности в целом:

$$R_c^E = \{ r^E = \langle e_1, e_2, t_{v_b}, t_{t_b} \rangle \in E_c^2 \times T^2 \mid P_c^E(e_1, e_2, t_{v_b}) \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_b} + \varepsilon] r^E \in Z(t_t)) \}.$$

Предикат P_c^E имеет следующий вид:

$$P_c^E(e_1, e_2, t_{v_b}) \stackrel{def}{=} \exists x_1, x_2 \in X, \exists \varepsilon > 0 : \forall t_v \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \varepsilon] \neg Q_c(x_1, e_1, t_v) \wedge Q_c(x_2, e_2, t_v) \wedge (x_1 \subset x_2).$$

Поскольку данные отношения являются битемпоральным и транзакционным, на их основе могут быть решены задачи управления коллективным доступом к данным.

Для отслеживания авторства вносимых изменений с каждой записью в базу данных достаточно сохранять информацию о пользователе, внесшем ее. Поскольку все записи носят транзакционный характер, то данная информация не будет потеряна при изменении значений атрибутов сущностей. Множество пользователей информационной системы обозначим символом U , а элементы данного множества соответственно $u \in U$. Множество значений электронной цифровой подписи обозначим символом S , а элементы данного множества соответственно $s \in S$. Функцию расчета значения электронной цифровой подписи на основе закрытого ключа пользователя u по данным некоторого подмножества $\zeta \in Z$ обозначим: $\text{sign}(u, \zeta)$.

Для решения задачи отслеживания исходных данных, использовавшихся пользователями при принятии решений о внесении изменений, может быть использовано транзакционное время. Пусть $\Theta \subset Z$. Введем следующие обозначения:

$$\rho^E(\Theta, \tau) = \{r = \langle e_1, e_2, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in R_c^E \subset Z \mid (t_{tb} = \tau) \wedge (r \in \Theta)\};$$

$$\rho^V(\Theta, \tau) = \{r = \langle e, t_{vb}, t_{tb}, v_{a_1}, \dots, v_{a_{n_c}} \rangle \in R_c^V \subset Z \mid (t_{tb} = \tau) \wedge (r \in \Theta)\}.$$

В случае если обработка данных распределенная, то для локальной базы данных Z^j множество исходных данных имеет вид:

$$Z(\max(\{t \in T \mid (t < t_i) \wedge (\rho^E(Z^j, t) \cup \rho^V(Z^j, t) \neq \emptyset)\})).$$

Для обеспечения отслеживания авторства всех производимых изменений с сохранением соответствующих доказательств, а также обеспечения согласования изменений, необходимо включение в модель дополнительного отношения транзакций. В качестве идентификатора транзакции целесообразно использовать транзакционное время:

$$R_c^O = \{r = \langle t_{tb}, t_r, u, s \rangle \in T^2 \times U \times S \mid \\ t_r = \max(\{t \in T \mid (t < t_t) \wedge (\rho^E(Z^j, t) \cup \rho^V(Z^j, t) \neq \emptyset)\}) \wedge \\ \wedge s = \text{sign}(u, \rho^E(Z, t) \cup \rho^V(Z, t))\}.$$

Для решения проблемы отсутствующих значений необходимо разделение каждого отношения (предиката) на простые, каждое из которых содержит значение только одного атрибута сущности:

$$R = \{\langle c, e, a, v \rangle \in C \times E \times A \times \text{dom}(A) \mid P(c, e, a, v) = 1\}.$$

Предикат $P(c, e, a, v)$ имеет вид:

$$P(c, e, a, v) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \in X : (\text{id}(x) = e) \wedge (e \in E_c) \wedge (a \in A_c) \wedge (x(a) = v).$$

Аналогичные темпоральные отношения будут иметь следующий вид:

$$R^E = \{r^E = \langle e_1, e_2, c, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in E^2 \times C \times T^2 \mid e_1, e_2 \in E_c \wedge \\ \wedge P_c^E(e_1, e_2, t_{vb}) \wedge (\exists \varepsilon > 0 \forall t_i \in [t_{tb}, t_{tb} + \varepsilon) r^E \in Z(t_i))\}; \\ R^V = \{r^V = \langle e, a, v, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in E \times A \times \text{dom}(A) \times T^2 \mid \\ P^V(e, a, v, t_{vb}) \wedge (\exists \varepsilon > 0 \forall t_i \in [t_{tb}, t_{tb} + \varepsilon) r^V \in Z(t_i))\}.$$

Предикат $P^V(e, a, v, t_{vb})$ определяется следующим образом:

$$P^V(e, a, v, t_{vb}) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \in X, \exists \varepsilon > 0 \forall t_v \in [t_{vb}, t_{vb} + \varepsilon) : Q(x, e, t_v) \wedge (x(a, t_v) = v).$$

4. Темпоральность метаданных и управление совместными данными нескольких информационных систем

Как отмечалось во введении, одной из серьезнейших проблем информационных систем является необходимость поддержки развития структуры данных во времени, то есть темпоральность метаданных. При этом, очевидно, не должно происходить появления некорректностей, и в первую очередь — сведений об авторстве и электронной подписи.

Для описания жизненного цикла классов воспользуемся отношением, схожим с отношением, описывающим жизненный цикл сущностей:

$$R^C = \{r^C = \langle c_1, c_2, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in C^2 \times T^2 \mid P^C(c_1, c_2, t_{vb}) \wedge \\ \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{tb}, t_{tb} + \varepsilon] r^C \in Z(t_t))\}.$$

Предикат $P^C(c_1, c_2, t_{vb})$ имеет вид:

$$P^C(c_1, c_2, t_{vb}) \stackrel{def}{=} \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{vb} - \varepsilon, t_{vb}) \forall t_v^+ \in [t_{vb}, t_{vb} + \delta) \\ (c_1(t_v^+) = c_1(t_v^-) \cup c_2(t_v^-)).$$

Описание жизненного цикла атрибутов, по сути, аналогично описанию жизненного цикла сущностей:

$$R^A = \{r^A = \langle a_1, a_2, c, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in A^2 \times C \times T^2 \mid P^A(a_1, a_2, c, t_{vb}) \wedge \\ \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{tb}, t_{tb} + \varepsilon] r^A \in Z(t_t))\}.$$

Предикат $P^A(a_1, a_2, c, t_{vb})$ имеет вид:

$$P^A(a_1, a_2, c, t_{vb}) \stackrel{def}{=} \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{vb} - \varepsilon, t_{vb}) \forall t_v^+ \in [t_{vb}, t_{vb} + \delta) \\ (a_1(t_v^+) = \emptyset) \wedge (a_2(t_v^+) = a_1(t_v^-) \cup a_2(t_v^-)) \wedge (a_2(t_v^+) \in A_c).$$

Управление совместными данными в нескольких информационных системах предполагает решение одной из трех задач: дедупликации, актуализации или синхронизации. Решение задачи дедупликации связано с коллективным (в смысле несколькими системами) управлением связями между сущностями разных информационных систем. Задача актуализации дополнительно предполагает коллективную обработку значений атрибутов. Решение задачи синхронизации вместо управления связями между сущностями предполагает управление непосредственно самими сущностями и значениями атрибутов. Множество данных, коллективно обрабатываемых во всех информационных системах, обозначим символом L .

Для обеспечения синтаксической интероперабельности необходимо связывание метаданных (классов и атрибутов) информационных систем. Для этого во множестве L должны быть сведения определены глобальные классы и атрибуты. Предикат, задающий отношение классов, аналогичен соответствующему предикату во множествах Z^k :

$$R^{C^L} = \{r^{C^L} = \langle c_1^L, c_2^L, t_{vb}, t_{tb} \rangle \in C^L \times C^L \times T^2 \mid P^{C^L}(c_1^L, c_2^L, t_{vb}) \wedge \\ \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{tb}, t_{tb} + \varepsilon] r^{C^L} \in L(t_t))\}.$$

Предикат $P^{C^L}(c_1^L, c_2^L, t_{vb})$ имеет вид:

$$P^{C^L}(c_1^L, c_2^L, t_{vb}) = \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{vb} - \varepsilon, t_{vb}) \forall t_v^+ \in [t_{vb}, t_{vb} + \delta)$$

$$(c_1^L(t_v^+) = \emptyset) \wedge (c_2^L(t_v^+) = c_1^L(t_v^-) \cup c_2^L(t_v^-)).$$

Отношение атрибутов в множестве L также имеет схожий вид:

$$R^{A^L} = \{r^{A^L} = \langle a_1^L, a_2^L, c^L, t_{v_b}, t_{t_b} \rangle \in A^L \times A^L \times C^L \times T^2 \mid P^{A^L}(a_1^L, a_2^L, c^L, t_{v_b}) \wedge \\ \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_b} + \varepsilon) r^{A^L} \in L(t_t))\}.$$

Предикат $P^{A^L}(a_1^L, a_2^L, c^L, t_{v_b})$ имеет вид:

$$P^{A^L}(a_1^L, a_2^L, c^L, t_{v_b}) = \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{v_b} - \varepsilon, t_{v_b}) \forall t_v^+ \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \delta) \\ (a_1^L(t_v^+) = \emptyset) \wedge (a_2^L(t_v^+) = a_1^L(t_v^-) \cup a_2^L(t_v^-)) \wedge (a_2^L(t_v^+) \in A_{c^L}).$$

Отношение сущностей имеет вид, аналогичный R^{A^L} :

$$R^{E^L} = \{r^{E^L} = \langle e_1^L, e_2^L, c^L, t_{v_b}, t_{t_b} \rangle \in E^L \times E^L \times C^L \times T^2 \mid \\ P^{E^L}(e_1^L, e_2^L, c^L, t_{v_b}) \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_b} + \varepsilon) r^{E^L} \in L(t_t))\}.$$

Предикат $P^{E^L}(e_1^L, e_2^L, c^L, t_{v_b})$ имеет вид:

$$P^{E^L}(e_1^L, e_2^L, c^L, t_{v_b}) = \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{v_b} - \varepsilon, t_{v_b}) \forall t_v^+ \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \delta) \\ (a_1^L(t_v^+) = \emptyset) \wedge (e_2^L(t_v^+) = e_1^L(t_v^-) \cup e_2^L(t_v^-)) \wedge (e_2^L(t_v^+) \in E(c^L)).$$

Пусть L^{E^j} — множество связей между сущностями множеств E^j и E^L . Отношение, задающее связи между сущностями множеств E^j и E^L , имеет вид:

$$R^{L^{E^j}} = \{r^{L^{E^j}} = \langle l_1^{E^j}, l_2^{E^j}, e^j, e^L, t_{v_b}, t_{t_b} \rangle \in L^{E^j} \times L^{E^j} \times E^j \times E^L \times T^2 \mid \\ P^{L^{E^j}}(l_1^{E^j}, l_2^{E^j}, e^j, e^L, t_{v_b}) \wedge (\exists \varepsilon > 0 : \forall t_t \in [t_{t_b}, t_{t_b} + \varepsilon) r^{L^{E^j}} \in L(t_t))\}.$$

Предикат $P^{L^{E^j}}(l_1^{E^j}, l_2^{E^j}, e^j, e^L, t_{v_b})$ имеет вид:

$$P^{L^{E^j}}(l_1^{E^j}, l_2^{E^j}, e^j, e^L, t_{v_b}) = \exists \varepsilon > 0, \delta > 0 : \forall t_v^- \in (t_{v_b} - \varepsilon, t_{v_b}) \forall t_v^+ \in [t_{v_b}, t_{v_b} + \delta) \\ \gamma(e^j(t_v^+), e^L(t_v^+)) \wedge (l_1^{E^j}(t_v^+) = \emptyset) \wedge (l_2^{E^j}(t_v^+) = l_1^{E^j}(t_v^-) \cup l_2^{E^j}(t_v^-)).$$

На основе данных отношений может осуществляться хранение совместных данных для решения задачи дедупликации сущностей. В целях решения задачи дедупликации, все сущности, создаваемые в каждой информационной системе, должны проходить процедуру идентификации. Если в качестве ответного значения от функции идентификации возвращается идентификатор существующего объекта, то данный идентификатор присваивается сущности в L .

Использование данной модели позволяет обеспечить асинхронное согласование модификаций. При этом решение о возможности использования записей принимается системами на основе установленных правил в зависимости от состава согласований. Для данной модели множества L в работе предложены алгоритмы управления совместными данными.

5. Реализация моделей в СУБД Microsoft SQL Server

Для реализации предложенных реляционных моделей средствами стандартных СУБД требуется поддержка последними универсального или неопределенного типа данных, такого как `sql_variant` в Microsoft SQL Server. При этом для осуществления простого отката транзакций, как на уровне сервера баз данных, так и на уровне сервера приложений, посредством удаления только соответствующей записи транзакции требуется использование ограничений внешних ключей между таблицей транзакций и остальными таблицами.

Недостаточная приспособленность средств языка SQL к обработке темпоральных данных приводит к необходимости использования соединений типа `self-join`, где для упрощения написания запросов требуется использование вспомогательных функций, а для повышения производительности при их обработке – соответствующих индексов.

Для прозрачного внедрения темпоральной технологии организации данных в существующие системы требуется использование представлений, замещающих собой соответствующие использовавшиеся ранее таблицы, для обработки запросов модификации данных — триггеров типа “instead of”:

1. Выполняется генерация SQL-дампа исходной таблицы базы данных;
2. Создаются темпоральные таблицы Элементов и Атрибутов;
3. Удаляется исходная таблица;
4. Создается представление (VIEW) с тем же именем, что и исходная таблица;
5. Для созданного представления создаются триггеры `INSTEAD OF INSERTUPDATEDELETE`;
6. Выполняется восстановление данных посредством запуска скрипта SQL-дампа.

Экспериментальная проверка предложенной модели темпоральной организации данных проводилась посредством сравнения ранее известной модели полнотемпоральной организации данных с полутемпоральной моделью на базе одного отношения (совпадающего по функциональности с полнотемпоральной моделью), полутемпоральной моделью на базе двух отношений (с расширением операций над сущностями) и полутемпоральной моделью на базе четырех отношений (дополнительно обеспечивающую темпоральность метаданных).

В первую очередь была произведена вставка записей с шагом в 10 000 сущностей. Изменение размера баз данных представлено на диаграмме.

—

Затем была произведена операция обновления значений атрибутов (в соответствии с установленными правилами). Изменение размера базы данных после каждых 10 000 обновлений (одно обновление каждой записи) изображено на диаграмме.

—

Таким образом, полутемпоральная модель на основе одного отношения (значений) во всех случаях эффективнее полнотемпоральной модели на 8–12

При сравнении полнотемпоральной модели и полутемпоральной модели на основе 2 отношений (сущностей и значений) имеет значение соотношение количества новых сущностей и обновлений. Полутемпоральная модель на основе двух отношений более эффективна в случаях, когда количество обновлений в 2,46 раза больше количества сущностей.

При сравнении полнотемпоральной модели и полутемпоральной модели на основе 4 отношений (классов, атрибутов, сущностей и значений) имеет значение соотношение количества новых сущностей, обновлений и среднего количества обновляемых атрибутов. Если k — отношение количества сущностей к количеству обновлений, z — среднее количество одновременно обновляемых атрибутов каждой сущности, то полутемпоральная модель на основе четырех отношений более эффективна, когда выполняется неравенство:

$$z < 2,754 - 3,548k.$$

Поскольку z всегда не меньше 1, то, должно выполняться соотношение:

$$k < (2,754 - 1)/3,548 \approx 0,494.$$

То есть на каждую сущность в среднем должно быть больше двух обновлений. Также, очевидно, что z всегда меньше 2,754.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Date C.J., Darwen H. Databases, types and the relational model: the third manifesto (3rd ed.). — Addison-Wesley. — Reading, MA., 2006 — ISBN 0-321-39942-0.
2. Дейт К.Дж. Введение в системы баз данных (8-е изд.) / Издательский дом “Вильямс”, М. — 2005. — ISBN 5-8459-0788-8.

Collaborate data management using temporal data and metadata

© S. N. Lizin²

Abstract. DBMS and enterprise frameworks vendors compete for developing new functionalities of their products. But many problems, such as collaborate data processing or data lifecycle management, can be solved more simply and more effective using data management technologies.

Key Words: databases, data, temporal, transactional, DBMS, informational systems.

²Associate professor, Mordovian State Pedagogical Institute after M.E.Evsevev, Saransk; sergey.lizin@gmail.com.

Регуляризация задачи с возмущениями линейного уравнения малыми линейными слагаемыми

© Б. В. Логинов¹, В. Е. Поспеев²

Аннотация. Выполнена регуляризация задачи о возмущении линейного уравнения малыми линейными слагаемыми в условиях задания δ -приближений по норме операторов и правой части.

Ключевые слова: линейное уравнение, возмущение, регуляризация.

Рассматривается уравнение $Bu = h + A(\varepsilon)u$ (1), где $B \in L(E_1 \rightarrow E_2)$ оператор с незамкнутой областью значений, $\dim N(B) = \dim N^*(B) = n$, $0 \leq n < \infty$, E_1 и E_2 банаховы пространства. Решение задачи (1) с фредгольмовым оператором B содержится в [1]. Здесь для простоты изложения рассматривается случай $n = 1$ и $A(\varepsilon) = \varepsilon A$, обобщения не вызывают принципиальных затруднений. Используются терминология и обозначения [1]. Требуется построить решение уравнения (1) по заданным δ -приближениям \tilde{B} , \tilde{A} , \tilde{h} , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\gamma}$, \tilde{z} ($N(B) = \{\varphi\}$, $N^* = \{\psi\}$, (γ, φ) , $(\psi, z) = 1$). Предполагается, что оператор A подчиняет себе неограниченный оператор $\Gamma = \tilde{B}^{-1}$, $\tilde{B} = B + (\gamma, \cdot)z$.

Если p длина жордановой цепочки $(\varphi^{(i)}, i = \overline{1, p})$ элемента $\varphi = \varphi^{(1)}$, то для ее построения используются уравнения $(\tilde{B} + \alpha_j C)\tilde{\varphi}^{(j)} = \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(j-1)}$, $\alpha_j = \delta^{2^{-(j-1)}}$, где оператор C такой, что $(\psi^{(1)}, C\varphi^{(1)}) \neq 0$, т.е. $\|B + \alpha C\| = O(\alpha^{-1})$. Тогда [2] $\|\varphi^{(j)} - \tilde{\varphi}^{(j)}\| = O(\delta^{2^{-(j-1)}})$ и $|(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)})| = 1 + O(\delta^{2^{-(p-1)}})$. Согласно [1] $y = \sum_{i=-p}^q y_i \varepsilon^i + u(\varepsilon)$. Коэффициенты

\tilde{y}_i асимптотики решения (1) определяются в виде $\tilde{y}_{-p} = \tilde{\xi}_1 \tilde{\varphi}^{(1)}, \dots, \tilde{y}_{-1} = \sum_{j=1}^p \tilde{\xi}_j \tilde{\varphi}^{(j)}$,

$\tilde{y}_s = \sum_{j=1}^{s+1} \tilde{\xi}_j \tilde{\varphi}^{(j)} + \tilde{b}_s$, $\tilde{\varphi}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i - [\frac{i}{p}]p)}$, $0 \leq s \leq q$; $(\tilde{B} + \alpha_s C)\tilde{b}_s = \tilde{A}\tilde{b}_{s-1}$, $\tilde{A}\tilde{b}_{-1} = \tilde{h}$;

$\tilde{\xi}_j(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)}) + (\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{j-2}) = 0$ если $j \leq p$, и $(\tilde{\xi}_j + \dots + \tilde{\xi}_{p+k} + \tilde{\xi}_k)(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)}) + (\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{j-2}) = 0$ при $j = [\frac{j}{p}]p + k$, т.е. $\tilde{\xi}_j$ вычисляются с запаздыванием в p шагов. По индукции до-

казывается, что $\|\tilde{y}_0 - y_0\| = O(\delta^{2^{-p}}), \dots, \|\tilde{y}_q - y_q\| = O(\delta^{2^{-(p+q)}})$. Число q определяется условием $|(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{q-1})| = \text{const} + O(\delta^{2^{-q}})$.

Построить решение (1) последовательным определением коэффициентов \tilde{y}_i , $i = -p, \dots$, невозможно из-за роста погрешности вместе с i . Поэтому, как и в [2] для общей задачи теории ветвления, остаток $\tilde{u}(\varepsilon)$ при $\rho_0 \leq |\varepsilon| \leq \rho$ определяется равномерным по ε регуляризованным процессом последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.:Наука, 1969. – 524 с.
2. Сидоров Н.А., Треногин В.А., Мат. заметки, т.20, № 5,, 1976.

¹Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

²В. Е. Поспеев (1935 - 1989). До 1989 года доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ташкентский государственный университет, г. Ташкент.

3. Гуковский С.А., Известия АН УзССР, сер. физ.-мат.,1979, №2.

Regularization of the problem about perturbations of linear equation by small linear terms.

© В. В. Loginov³, V. E. Pospeev⁴

Abstract. The regularization of the problem about perturbation of linear equation by small linear terms under the conditions of given δ -approximations by norm of operators and right-hand side is made.

Key Words: linear equation, perturbation, regularization.

REFERENCES

1. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. – M.:Nauka, 1969. – 524 pp.
2. Sidorov N.A., Trenogin V.A., Matem.Zametki, v.20, № 5., 1976.
3. Gukovsky S.A., Izvestiya AN UzSSR, ser. fiz.-mat.,1979, №2.

³Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru.

⁴V. E. Pospeev (1935 - 1989). Until 1989 Associate Professor of Differential Equations Chair, Tashkent State University, Tashkent.

УДК 517.9

Об одном классе многошаговых методов для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений индекса один

© Л. С. Соловарова¹

Аннотация. В настоящей работе приведен анализ многошаговых схем, которые похожи на методы, основанные на формуле дифференцирования назад. Показано преимущества таких схем над классическими схемами

Ключевые слова: Линейные дифференциально-алгебраические уравнения, индекс один, разностные схемы.

1. Введение

Взаимосвязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и алгебраических уравнений часто встречается в различных прикладных задачах. Эти взаимосвязанные системы можно записать в виде системы ОДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной. Для таких систем можно задавать начальные условия, которые должны быть согласованы с правой частью исходной системы. Данный класс задач принято называть начальной задачей (задачей Коши) для дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Построение разностных схем для ДАУ достаточно сложная, с точки зрения вычислительной математики, задача. В настоящей работе приведены разностные схемы, которые похожи на методы, основанные на формуле дифференцирования назад. На модельном примере проведено сравнение предлагаемых схем с классическими методами.

2. Постановка задачи и разностные схемы

Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ - $(n \times n)$ - матрицы, $f(t)$ - заданная, $x(t)$ - искомая n -мерная вектор-функция. Предполагая, что элементы $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ обладают той гладкостью, которая необходима в дальнейшем.

В заметке рассмотрен случай, когда

$$\det A(t) = 0 \forall t \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Системы (2.1) с условием (2.3) принято называть линейными ДАУ. Будем предполагать, что начальные данные (2.2) согласованы с правой частью, т.е. рассматриваемая задача имеет решение.

¹Программист лаборатории системного анализа и вычислительных методов, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, soleilu@mail.ru

О п р е д е л е н и е 2.1. (см., напр, [1]). Система (1) имеет индекс один, если

$$\text{rank}[(\lambda A(t) + B(t))^{-1}A(t)] = \text{rank}[(\lambda A(t) + B(t))^{-1}A(t)]^2 = r = \text{const} \forall t \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Другие эквивалентные определения индекса можно найти в [2].

Известно [1], что при выполнении вышеприведенного условия, задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. К настоящему времени вышло огромное множество работ, посвященных численному решению ДАУ индекса один. Как правило, первоначально эти алгоритмы были предназначены для численного решения жестких ОДУ, а в дальнейшем их обосновали для ДАУ индекса один. Однако относительно недавно были построены примеры жестких ДАУ, для численного решения которых большинство неявных методов оказались малоэффективными (требовался очень маленький шаг интегрирования)[3], [4]. В качестве иллюстрации приведем пример [4] :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha(\lambda t - 1) \\ 1 & 1 + \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 1], \quad (2.5)$$

где α и λ скалярные параметры, $u(0) = v(0) = 1$. Данная задача имеет индекс один и точное решение $u = (1 + \lambda t)e^{\lambda t}$, $v = e^{\lambda t}$. При $\lambda \ll 0$ мы имеем жесткую задачу. Стандартный k -шаговый метод для задачи (2.1), (2.2), основанный на формуле дифференцирования назад (метод ФДН), имеет вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \rho_j x_{i+1} + h B_{i+1} x_{i+1} = h f_{i+1}, k \leq 6, \quad (2.6)$$

где $A_{i+1} = A(t_{i+1})$, $B_{i+1} = B(t_{i+1})$, $f_{i+1} = f(t_{i+1})$, $t_{i+1} = ih$, $i = k, k + 1, \dots, N - 1$, $h = 1/N$, $x_{i+1} \approx x(t_{i+1})$, коэффициенты можно найти в [5]. Известно, что при $k \leq 6$ методы ФДН являются устойчивыми для численного решения начальной задачи для ОДУ, а при $k \geq 7$ - неустойчивыми. Применяя метод (2.6) к данному примеру, обозначая $z = \lambda h$ $\omega = \alpha h$ и опуская выкладки, получим

$$u_{i+1} = (1 + \alpha t_{i+1})v_{i+1}, \quad (2.7)$$

$$(\rho_0 - z - \omega)v_{i+1} + \sum_{j=1}^k (\rho_j - \omega)v_{i+1-j} = 0, \quad (2.8)$$

при этом полагая, что стартовые значения для v_j и u_j , $j = 0, 1, \dots, k - 1$ заданы точно. Анализ уравнения (2.8) показал, что для любого $z < 0$ существует ω такое, что как минимум один из корней характеристического уравнения (2.8) будет по модулю больше единицы. Таким образом, можно сделать вывод, что стандартные методы ФДН (2.6) для вышеприведенного примера малоэффективны. Ниже предложена модификация методов ФДН для задачи (2.1),(2.2) индекса один. Перепишем исходную систему (2.1) в виде

$$(A(t)x(t))' + (B(t) - A'(t))x(t) = f(t) \quad (2.9)$$

и для задачи (2.9),(2.2) будем применять методы ФДН, при этом вычисляя $A'(t)_{t=t_{i+1}}$ так же по методу ФДН. Предлагаемый алгоритм будет иметь вид

$$\sum_{j=0}^k \rho_j A_{i+1-j} x_{i+1-j} + (h B_{i+1} - \sum_{j=0}^k \rho_j A_{i+1-j}) x_{i+1} = h f_{i+1} \quad (2.10)$$

Применяя последний алгоритм для (2.5) и опуская выкладки, получим

$$u_{i+1} = (1 + \lambda t_{i+1})v_{i+1}, \quad (2.11)$$

$$(\rho_0 - z)v_{i+1} + \sum_{j=1}^k \rho_j v_{i+1-j} = 0. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) полностью совпадает с методом ФДН для модельного уравнения $x' + \lambda x = 0$ и в отличие от формулы (2.8) не зависит от ω . Отметим, что при $k = 1$ (одношаговый метод) схема (2.10) примет вид

$$(A_{i+1}x_{i+1} - A_i x_i) + (hB_{i+1} - A_{i+1} + A_i)x_{i+1} = hf_{i+1}, i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.13)$$

которую можно переписать в виде

$$A_i(x_{i+1} - x_i) + hB_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1} \quad (2.14)$$

Детальный анализ последней схемы приведен в статьях [6], [7].

Детальное обоснование схем (2.10) предполагается провести в дальнейшем.

Автор благодарит М.В. Булатова за постановку задачи и обсуждение статьи.

Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00639-а, 11-01-93005Вьет-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- Новосибирск:Наука, 1988.- 157 с.
2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.- Новосибирск:Наука, 1996.- 278с.
3. März R. Differential-algebraic systems anew//Appl.Numer.Math.2002.V.42.P.315-335.
4. Kunkel P., Mehrmann V. Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations//Electr.Trans.Numer.Anal.2007.V.26.P.385-420.
5. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.- М.:Мир, 1990.- 512 с.
6. Булатов М.В., Минг-Гонг Ли, Соловарова Л.С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 11. – С. 1909-1918.
7. Булатов М.В., Соловарова Л.С. О блочных разностных схемах для дифференциально-алгебраических уравнениях// Известия Иркутского Государственного университета. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 2-12.

About the class of multistep methods for numerical solution differential-algebraic equations of index one

© L. S. Solovarova²

Abstract. In this paper we consider analysis of multistep schemes like methods based on back differentiation formula. We show advantages of this schemes above classical methods

Key Words: linear differential-algebraic equations, index one, difference schemes.

²Programmer laboratory systems analysis and computational methods, ISDCT SB RAS, Irkutsk; soleilu@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_EX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , D_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{D}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

```
\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}
```

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}
```

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

```
\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`.

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\bibitem`, имеющих один параметр:

```
\bibitem{метка для ссылки на источник}
```

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Балаев А. В.	114	Малинов В. Г.	73
Галин Д. З.	114	Малкин М. И.	88
Гнатенко Ю. А.	31	Медведев В. С.	40
Гуревич Е. Я.	35	Миронова Л. В.	15
Жужома Е. В.	40	Мифтахов Э. Н.	94
Кантор О. Г.	107	Мустафина С. А.	94, 118
Карамуллин М. Т.	31	Переварюха А. Ю.	101
Казакевич Г. И.	8	Повещенко Ю. А.	8
Казакова Д. С.	47	Поспеев В. Е.	146
Клочкова Л. В.	8	Салахов И. Р.	107
Коломиец М. Л.	53	Сахаров А. Н.	53
Коноплева И. В.	15	Соловарова Л. С.	148
Кулешов А. А.	66	Спивак С. И.	107, 114
Куприна Л. А.	40	Степашина Е. В.	118
Лизин С. Н.	135	Тишкин В. Ф.	8
Логинов Б. В.	15, 146	Яшагин Н. С.	122

Для заметок

Для заметок