

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 12, № 2



2010

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 12, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит два раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

СВМО
САРАНСК

2010

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 12, № 2

Компьютерная верстка: Жалнин Р. В.

Корректоры: Атряхин В. А., Егорова Д. К., Напалкова Ю. В.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 29-07-32

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, В. С. Медведев

О структуре 3-многообразия, допускающего A -диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством	7
1. Введение и формулировка результата	7
2. Вспомогательные сведения	8
3. Доказательство теоремы 1.1.	10

Е. Б. Кузнецов, П. А. Филатов

Параметризация поверхностей методом продолжения решения по параметру	14
1. Введение	14
2. Параметризация поверхностей	14
3. Параметрическая интерполяция поверхностей	18
4. Выводы	24

М. В. Тихонова, И. М. Губайдуллин, С. И. Спивак

Численное решение прямой кинетической задачи методами Ро- зенброка и Мишельсена для жестких систем дифференциальных уравнений	26
1. Введение	26
2. Постановка задачи	27
3. Численные методы решения жестких систем дифференциальных уравнений	30
3.1. Метод Розенброка	30
3.2. Метод Мишельсена	31

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

О. А. Антонова, С. А. Мустафина, С. И. Спивак

Качественная оценка влияния неопределенности в кинетических параметрах на результаты теоретической оптимизации	34
1. Введение	34
2. Постановка задачи	34
3. Вычислительный эксперимент	37

М. В. Булатов, М. Н. Мачхина

Об одном классе интегро-алгебраических уравнений с перемен- ными пределами интегрирования	40
1. Введение	40
2. Постановка задачи	40
3. Теорема существования и единственности	41

4.	Иллюстративные примеры	41
Т. А. Гурина, И. А. Дорофеев		
	Гомоклинический каскад бифуркаций в системе типа Лоренца . .	46
1.	Введение	46
2.	Исследование особых точек системы Шаповалова.	47
3.	Приведение матрицы линейной части системы к диагональной форме.	48
4.	Поиск седловых циклов.	50
5.	Поиск гомоклинических траекторий седло-узла.	52
6.	Поиск гомоклинических траекторий седло-фокуса.	53
Д. К. Егорова		
	Об оптимальной стабилизации программного движения	56
О. Е. Каледин, Л. А. Сухарев		
	О построении конуса возможных решений для базы данных	61
1.	Основные определения	61
2.	Примеры	63
Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова		
	Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения в произвольной выпуклой области с управлениями в коэффициенте нелинейного члена и правой части	67
1.	Введение	67
2.	Постановка задач и их корректность	67
3.	Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций	69
4.	Оценки погрешности метода по состоянию, погрешности сеточного функционала, скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций	71
Т. М. Митрякова, О. В. Починка, А. Е. Шишенкова		
	Динамика диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности	77
1.	Класс Φ диффеоморфизмов с конечным числом модулей топологической сопряженности	77
2.	Динамика диффеоморфизмов класса Φ	79
С. В. Павликов		
	Об устойчивости движений систем с бесконечным запаздыванием	86
1.	Основные определения. Предельные уравнения	86
2.	Теоремы об устойчивости	88
3.	Устойчивость стационарных движений	91
Ю. А. Парфёнова		
	Метод операторов преобразования для определения опимального граничного управления для уравнения Лапласа в шаре	95

-
- | | | |
|----|--|----|
| 1. | Операторы преобразования для вектор-функций, гармонических в шаре. . . | 95 |
| 2. | Задача об оптимальном граничном управлении. | 96 |
-

Д. В. Пашуткин

Преобразования Ляпунова нелинейных периодических дифференциальных уравнений. 102

- | | | |
|----|-----------------------|-----|
| 1. | Введение | 102 |
| 2. | Контрпример | 102 |
-

Д. Г. Рахимов

О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений . 106

- | | | |
|----|--|-----|
| 1. | Введение | 106 |
| 2. | Постановка задачи | 106 |
| 3. | Сведение к одномерному случаю | 107 |
| 4. | Случай кратного собственного значения с ОЖН. | 110 |
-

В. И. Сафонкин

Продолжимость решений систем с переменной структурой на многообразиях переключения 113

- | | | |
|----|-----------------------------|-----|
| 1. | Введение | 113 |
| 2. | Постановка задачи | 114 |
| 3. | Решение задачи | 115 |
| 4. | Выводы. | 116 |
-

Правила оформления рукописей для публикации
в журнале «Журнал СВМО» 119

Алфавитный указатель 121

ОТ РЕДАКЦИИ

С этого года выходит один том журнала в четырех номерах в год. В первых двух номерах 12-го тома журнала опубликованы материалы IX конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых, рекомендованные редакцией к публикации. Конференция поддержана грантом РФФИ №10-01-06048-г.

Редакция журнала желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 513.83

О структуре 3-многообразия, допускающего A -дiffeоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством

© В. З. Гринес¹, Ю. А. Левченко², В. С. Медведев³

Аннотация. В работе рассматривается класс диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. С. Смейла трехмерного многообразия M^3 в предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизмов состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров. Устанавливается, что M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.

Ключевые слова: A -дiffeоморфизм, неблуждающее множество, аттрактор, репеллер, расслоение

1. Введение и формулировка результата

Одним из важных разделов теории динамических систем является исследование взаимосвязи между рассматриваемым классом диффеоморфизмов и топологией многообразия, на котором они заданы. Например, Дж. Франкс [4] и Ш. Ньюхаус [5] показали, что любой ановский диффеоморфизм коразмерности 1 сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора⁴. Откуда следует, что многообразия допускающие такие диффеоморфизмы, гомеоморфно тору T^n . В.З. Гринес и Е.В. Жужома показали в [3] (результат анонсирован в [6]), что если замкнутое n -многообразие M^n , $n > 2$, допускает структурно устойчивый диффеоморфизм f с ориентируемым растягивающим аттрактором коразмерности 1, тогда многообразие M^n гомотопно эквивалентно тору T^n и гомеоморфно T^n для $n \neq 4$.

Напомним, что под A -дiffeоморфизмом трехмерного многообразия $f : M^3 \rightarrow M^3$ понимается диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A , введенной С. Смейлом [7]:

1. множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ является гиперболическим;
2. периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [7] неблуждающее множество $\Omega(f)$ A -дiffeоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Базисное множество Λ называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества Λ такая, что

$$f(U) \subset \text{int}U, \quad \Lambda = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U).$$

¹Профессор, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Аспирант, НГСХА, Нижний Новгород; ULev4enko@gmail.com.

³Старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

⁴Пусть линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается некоторой целочисленной матрицей с определителем $+1$ или -1 и не имеющей собственных значений, по модулю равных единице. Тогда L задает обратимое отображение F_L тора T^n , которое называется гиперболическим автоморфизмом.

Базисное множество называется репеллером, если оно является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} .

Следуя [1] базисное множество $\Lambda \subset \Omega(f)$ диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ называется поверхностным, если оно принадлежит ориентируемой замкнутой инвариантной поверхности M_Λ^2 рода $g \geq 0$ топологически вложенной в многообразие M^3 , называемое носителем для Λ .

В настоящей работе рассматривается класс A -диффеоморфизмов $f : M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров.

Следующая теорема описывает структуру многообразия, допускающего диффеоморфизмы из рассматриваемого класса.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ A -диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров. Тогда M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.

2. Вспомогательные сведения

Пусть $\mathbb{S}_g$ стандартная ориентируемая двумерная поверхность рода $g \geq 0$ (возможно с краем) и W – гладкое трехмерное многообразие (возможно с краем). Напомним, что двумерная поверхность $S_g \subset W$ называется цилиндрически вложенной в W , если существует топологическое вложение (гомеоморфизм на образ) $h : \mathbb{S}_g \times [-1, 1] \rightarrow W$ такое, что $h(\mathbb{S}_g \times \{0\}) = S_g$. При этом цилиндрически вложенная поверхность S_g называется собственно вложенной, если $h(\partial \mathbb{S}_g \times [-1, 1]) \subset \partial W$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть S_g двумерная поверхность рода $g \geq 1$ цилиндрически и собственно вложенная в 3-многообразие W . Говорят, что S_g является несжимаемой в W если выполняются следующие условия: любая простая кривая γ в S_g , которая ограничивает вложенный диск $D \subset W$, чья внутренность имеет пустое пересечение с S_g , является гомотопной нулю кривой на S_g и, следовательно, ограничивает некоторый диск на S_g .

П р е д л о ж е н и е 2.1. ([8], следствие 3.2) Пусть F – несжимаемая ориентируемая поверхность цилиндрически и собственно вложенная в $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$, $g \geq 1$, так что $\partial F \subset \mathbb{S}_g \times \{1\}$. Тогда существует поверхность $F_1 \subset \mathbb{S}_g \times \{1\}$, которая гомеоморфна F и такая, что $\partial F = \partial F_1$ и $F \cup F_1$ ограничивают область Δ в $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$, замыкание которой гомеоморфно $F \times [0, 1]$.

Пусть $\mathbb{S}_g$ поверхность без края рода $g \geq 1$. Положим $P_g = \mathbb{S}_g \times [0; 1]$, тогда граница ∂P_g состоит из двух компонент связности $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}_g$. Пусть $F \subset \text{int } P_g$ цилиндрически вложена в $\text{int } P_g$. Говорят, что поверхность F разделяет $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ если $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ принадлежат различным компонентам связности $P_g \setminus F$.

Следующее предложение доказывается аналогично лемме 3.1 из [2].

П р е д л о ж е н и е 2.2. Цилиндрически вложенная замкнутая ориентируемая поверхность $F \subset \text{int } P_g$ не разделяет $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ тогда и только тогда, когда F является границей некоторой области $D \subset \text{int } P_g$.

Л е м м а 2.1. Пусть F замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 1$ не ограничивающая область и цилиндрически вложенная в $\text{int}P_g$. Тогда F является несжимаемой поверхностью в $\text{int}P_g$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда существует простая замкнутая кривая $C \subset F$, негомотопная нулю на F и ограничивающая цилиндрически вложенный двумерный замкнутый диск D такой, что $\text{int}D \cap (F \cup \partial P_g) = \emptyset$. Выберем замкнутую окрестность $U(D) \subset \text{int}P_g$ диска D , принадлежащую открытой окрестности $V(D) \subset \text{int}P_g$ таким образом, что существует гомеоморфизм $h: V(D) \rightarrow \mathbb{D} \times (-1, 1)$ такой, что $h(C) = \mathbb{D} \times \{0\}$, $h^{-1}(\partial \mathbb{D} \times (-1, 1)) \subset F$ и $h^{-1}(\mathbb{D} \times [-0, 5, 0, 5]) = U(D)$.

Положим $Q = (F \setminus h^{-1}(\partial \mathbb{D} \times (-1, 1))) \cup h^{-1}(\mathbb{D} \times \{-1\}) \cup h^{-1}(\mathbb{D} \times \{1\})$.

Могут быть два случая:

- 1) поверхность Q состоит из одной компоненты;
- 2) поверхность Q состоит из двух компонент Q_1, Q_2 .

Покажем, что в обоих случаях по крайней мере одна из полученных поверхностей не ограничивает области в $\text{int}P_g$.

Предположим противное. В первом случае обозначим через W_0 область, ограниченную поверхностью Q .

Во втором случае для поверхности Q_i обозначим через W_i область, ограниченную Q_i , $i \in \{1, 2\}$.

Далее, могут быть две возможности.

- а) $U(D) \cap W_i = \emptyset$ для любого $i = 0, 1, 2$.
- б) существует $i \in \{0, 1, 2\}$, для которого $U(D) \cap W_i \neq \emptyset$

В случае а) поверхность F ограничивает область $W_0 \cup (U(D) \setminus h^{-1}(\partial \mathbb{D} \times [-1, 1]))$ в случае 1) и $W_1 \cup W_2 \cup (U(D) \setminus h^{-1}(\partial \mathbb{D} \times [-1, 1]))$ в случае 2). Получаем противоречие.

Рассмотрим случай б).

Если $U(D) \cap W_0 \neq \emptyset$, то область $W_0 \setminus \text{cl } U(D)$ ограничена поверхностью F .

Если $U(D) \cap W_1 \neq \emptyset$, то $W^2 \subset W_1$ и следовательно, область $W_1 \setminus \text{cl } (W_2 \cup U(D))$ ограничена поверхностью F .

Аналогично, если $U(D) \cap W_2 \neq \emptyset$, то область $W_2 \setminus \text{cl } (W_1 \cup U(D))$ ограничена поверхностью F .

Во всех случаях получаем противоречие с предположением о поверхности F .

Обозначим через F_1 поверхность, не ограничивающую область в $\text{int}P_g$. По построению ее род g_1 меньше g и в силу предложения 2.1., она не является сжимаемой. Повторяя каждый раз вышеприведенные рассуждения для вновь полученной поверхности, мы получим на последнем шаге двумерную сферу, не ограничивающую область в $\text{int}P_g$, что противоречит неприводимости многообразия P_g .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Частным случаем предложения 2.1. и леммы 2.1. является следующий факт, установленный также в [2], (теорема 3.3) для гладко вложенных поверхностей.

С л е д с т в и е 2.1. Пусть F замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 1$ не ограничивающая область и цилиндрически вложенная в $\text{int}P_g$. Тогда замыкание каждой компоненты $P_g \setminus F$ гомеоморфно P_g .

Следующее предложение является следствием Теоремы 1, доказанной в [1].

П р е д л о ж е н и е 2.3. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ — A -дiffeоморфизм, неблуждающее множество которого содержит поверхностный двумерный связный аттрактор

Λ с носителем M_Λ^2 . Тогда $M_\Lambda^2 = \Lambda$, M_Λ^2 является цилиндрически вложенной поверхностью, гомеоморфной двумерному тору, и ограничение f на M_Λ^2 сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.

3. Доказательство теоремы 1.1.

Докажем сначала две вспомогательные леммы.

Л е м м а 3.1. Пусть на замкнутом n -мерном многообразии M заданы две области B и A , причем граница A состоит из двух не пересекающихся множеств a_i , $i = 1, 2$, и пусть $a_1 \subset B$, $a_2 \cap (B \cup \partial B) = \emptyset$. Тогда если a_1 ограничивает область $B_1 \subset B$, то $\partial B \subset A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим область $A_1 = A \cup B_1 \cup a_1$. Так как $A_1 \cap B \neq \emptyset$ и граница a_2 области A_1 не имеет общих точек с замыканием $\overline{B}$, то $B \cup \partial B \subset A_1$. Из равенства $\partial B \cap (B_1 \cup a_1) = \emptyset$ следует, что $\partial B \subset A$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.2. Пусть A_1 и A_2 , $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ такие множества, что существует гомеоморфизм $h_1 : A_1 \rightarrow B \times [-1, 0]$ и $h_2 : A_2 \rightarrow B \times [0, 1]$ и $A_1 \cap A_2 = h_1^{-1}(B \times \{0\}) = h_2^{-1}(B \times \{0\})$, тогда существует гомеоморфизм $H : A_1 \cup A_2 \rightarrow B \times [-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_1 \cap A_2 = A$. Обозначим гомеоморфизм $\hat{H} : A \rightarrow A$, заданный следующим образом. Для любой точки $x \in A$ $\hat{H}(x) = h_2^{-1}(h_1(x))$. Так как A_2 гомеоморфно прямому произведению, то существует гомеоморфизм $g : A_2 \rightarrow A_2$ такой, что $g|_A = \hat{H}$.

Положим

$$H = \begin{cases} h_1(x), & x \in A_1 \\ h_2(g(x)), & x \in A_2 \end{cases}$$

Тогда отображение H является гомеоморфизмом множества $A_1 \cup A_2$ на прямое произведение $B \times [-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Докажем теорему 1.1..

Обозначим T_A носитель для аттрактора A и T_R носитель репеллера R . Согласно предложению 2.3. для любого аттрактора (репеллера) поверхность T_A (T_R) является цилиндрически вложенной. Поэтому существует замкнутая окрестность $U(T_A)$ ($U(T_R)$) и гомеоморфизм $h_A(h_R)$, такие что: $h_A : U(T_A) \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$ ($h_R : U(T_R) \rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1]$), причем $h_A(T_A) = \mathbb{T} \times \{0\}$ ($h_R(T_R) = \mathbb{T} \times \{0\}$).

Поверхность T_A (T_R) делит окрестность $U(T_A)$ ($U(T_R)$) на две компоненты связности $U_A^1 = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times [-1, 0])$ и $U_A^2 = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times [0, 1])$, (аналогично U_R^1 и U_R^2).

Граница $\partial U(T_A)$ ($\partial U(T_R)$) состоит из двух компонент связности $T_A^1 = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times \{-1\})$ и $T_A^2 = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$, ($T_R^1 = h_R^{-1}(\mathbb{T} \times \{-1\})$ и $T_R^2 = h_R^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$).

Пусть A произвольный аттрактор, который принадлежит поверхности T_A . Так как неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств, существует натуральное число n и репеллеры R_1, R_2 такие что $f^{-n}(T_A^1)$ принадлежит окрестности репеллера T_{R_1} и $f^{-n}(T_A^2)$ принадлежит окрестности репеллера T_{R_2} . Заметим, что если $R_1 = R_2 = R$, то $f^{-n}(T_A^1)$, $f^{-n}(T_A^2)$ принадлежат разным компонентам $U_{T_R}^1, U_{T_R}^2$ соответственно. Не уменьшая общности можем считать, что $f^{-n}(T_A^1)$ принадлежит компоненте $U_{R_1}^1$, а $f^{-n}(T_A^2)$ принадлежит компоненте $U_{R_2}^2$.

Покажем, что $f^{-n}(T_A^1)$ разделяет T_{R_1} и $T_{R_1}^1$ в $U_{R_1}^1$. Предположим противное. Тогда в силу предложения 2.2., $f^{-n}(T_A^1)$ является границей некоторой области $D_A^1 \subset \text{int } U_{R_1}^1$. Тогда по лемме 3.1. имеем $U(T_{R_1}) \subset f^{-n}(U_A^1)$ и следовательно, $T_{R_1} \subset f^{-n}(U_A^1)$. Тогда $f^n(T_{R_1}) \subset U_A^1$. Так как поверхность T_{R_1} является инвариантной, мы получили противоречие.

Таким образом, $U(T_{R_1}) \setminus f^{-n}(T_A^1)$ состоит из двух компонент связности таких, что замыкание каждой компоненты гомеоморфно $U(T_{R_1})$. Отсюда по следствию 2.1. следует, что поверхности T_{R_1} и $f^{-n}(T_A^1)$ ограничивают в M^3 область гомеоморфную $\mathbb{T} \times (0, 1)$. Рассуждая аналогично, получаем, что $f^{-n}(T_A^2)$ разделяет поверхности T_{R_2} и $T_{R_2}^2$ в $U_{R_2}^2$ и поверхности T_{R_2} и $f^{-n}(T_A^2)$ ограничивают в M^3 область гомеоморфную $\mathbb{T} \times (0, 1)$.

Обозначим через B^1 (B^2) область, ограниченную поверхностями T_A и T_{R_1} (T_A и T_{R_2}). Тогда согласно лемме 3.2. область B^1 (B^2) гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{T} \times [0, 1]$.

Рассуждая аналогично для всех аттракторов получаем, что M^3 может быть получено, как объединение конечного числа компактных многообразий с краем гомеоморфных $\mathbb{T} \times [0, 1]$ и пересекающихся по конечному множеству поверхностей, гомеоморфных двумерному тору. То есть многообразие M^3 допускает слоение на двумерные слои, которые гомеоморфны двумерным торам. Обозначим M_1 фактор-пространство, точками которого являются торы. Тогда по построению существует непрерывное отображение $p: M^3 \rightarrow M^1$, где M^1 одномерное многообразие, такое, что для каждой точки $m \in M^1$ существует окрестность $U(m)$ такая что $p^{-1}(U(m))$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T} \times (-1, 1)$. Так как непрерывный образ компакта есть компакт, то многообразие M^1 гомеоморфно окружности. Таким образом, теорема 1.1. полностью доказана.

Авторы благодарят грант РФФИ РАН № 08-01-00547а за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях. – Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 6. – С. 813–826.
2. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами. – Матем. сб. 2003. Т. 194, № 7. – С. 25–56.
3. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. – Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, n. 2. – P. 617–667.
4. Franks J. Anosov diffeomorphisms. – Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. AMS, Providence. 1970. 14. – P. 61–94.
5. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. – Amer. J. Math. 1970. V. 92, n. 3. – P. 761–770.
6. Гринес В.З., Жужома Е.В. О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один. – Доклады РАН. 2000. Т. 374, № 6. – С. 735–737.
7. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, n. 1. – P. 741–817.

8. F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. – *Annals of Math.* 1968. V. 87. – P. 56–88.

On structure of 3-manifold which allow A-diffeomorphism with two-dimensional surface nonwandering set

© V. Z. Grines⁵, U. A. Levchenko⁶, V. S. Medvedev⁷

Abstract. We consider a class of diffeomorphism satisfying to S.Smale Axiom A given on 3-manifold M^3 on suggestion that nonwandering set of diffeomorphisms consists of connected two-dimensional surface attractor and repellers. We establish that M^3 is a locally-trivial foliation under the circle with leaves homeomorphic to the torus.

Key Words: A-diffeomorphism, attractor, repeller, nonwandering set

REFERENCES

1. Grines V., Zhuzhoma E., Medvedev V. On surface attractors and repellers on 3-manifolds. – Matem. zam. 2005. V. 78, n. 6. – P. 813–826.
2. Grines V., Zhuzhoma E., Medvedev V. New relations for Morse-Smale systems with trivial embedding one-dimensional separatrix. – Matem. sb. 2003. V. 194, n. 7. – P. 25–56.
3. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. – Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, n. 2. – P. 617–667.
4. Franks J. Anosov diffeomorphisms. – Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. AMS, Providence. 1970. 14. – P. 61–94.
5. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. – Amer. J. Math. 1970. V. 92, n. 3. – P. 761–770.
6. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers codimension one. – Doklady RAN. 2000. V. 374, n. 6. – C. 735–737.
7. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, n. 1. – P. 741–817.
8. F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. – Annals of Math. 1968. V. 87. – P. 56–88.
9. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets. – Topology. 1967. V. 6. – P. 473–487.

⁵Professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁶Post-graduate student, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ULev4enko@gmail.com.

⁷Senior staff scientist, Institute of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

УДК 517.9

Параметризация поверхностей методом продолжения решения по параметру

© Е. Б. Кузнецов¹, П. А. Филатов²

Аннотация. В работе рассмотрены теоретические аспекты метода продолжения решения по параметру. Особое внимание уделено применению этого метода в задачах параметрического приближения поверхностей сплайнами. Приведены результаты численных исследований, которые подтверждают необходимые и достаточные условия выбора наилучших параметров при параметризации поверхностей.

Ключевые слова: параметризация, наилучший параметр, главные кривизны, интерполяция, кубический сплайн.

1. Введение

При исследовании проблемы проектирования поверхностей, которая важное значение имеет в авиации и космонавтике при создании и эксплуатации аэрокосмической техники, возникает необходимость в параметрической аппроксимации этих поверхностей. Пусть гладкая поверхность S в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1.1)$$

Требуется построить ее параметрическое представление вида

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (1.2)$$

В равенствах (1.2) параметры u , v могут быть выбраны различными способами, но именно они определяют успех параметризации. При неудачном выборе параметров на приближаемой поверхности могут появиться осцилляции и петли [1]. Поэтому можно поставить вопрос о выборе, в некотором смысле, наилучшей параметризации поверхности (1.1). Этот вопрос может быть решен, если параметризацию поверхности рассматривать с позиции метода продолжения решения по параметру [2]. Тогда наилучшие параметры в каждой точке поверхности должны лежать в касательной плоскости, построенной к поверхности в данной точке, и быть длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений [3]. Причем эти направления должны совпадать с главными кривизнами поверхности [4].

2. Параметризация поверхностей

Параметризация (1.2) поверхности, заданной уравнением (1.1), может быть получена при помощи метода продолжения решения по параметру. Для этого введем некоторые параметры u и v такие, что переменные x , y , z являются дифференцируемыми функциями этих параметров. Представим дифференциалы параметров в виде

$$du = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz, \quad dv = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz. \quad (2.1)$$

¹Профессор Московского авиационного института, г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

²Аспирант Московского авиационного института, г. Москва.

Здесь векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ задают направления, вдоль которых отсчитываются параметры u и v . Для того чтобы направления были равноправны, векторы α и β должны быть одинаковой длины. Пусть они будут единичными, тогда их компоненты должны удовлетворять равенствам

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (2.2)$$

Векторы α и β не должны быть коллинеарными, в противном случае оси системы координат (u, v) будут параллельны, а параметры u, v - линейнозависимыми.

Если наряду с равенствами (2.1) запишем выражение для дифференциала уравнения (1.1), получим систему уравнений продолжения решения

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $F_x = \partial F / \partial x, F_y = \partial F / \partial y, F_z = \partial F / \partial z$.

Для того чтобы осуществить процесс продолжения решения, необходимо разрешить эту систему относительно дифференциалов dx, dy, dz . Процесс разрешения системы (2.3) относительно дифференциалов будет тем эффективнее, чем лучше обусловлена матрица этой системы.

Мера обусловленности системы уравнений продолжения (2.3) может быть представлена в виде

$$|D| = |\Delta|/d, \quad (2.4)$$

где $d = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ - произведение квадратичных норм строк матрицы системы (2.3) с учетом равенств (2.2), а Δ - определитель системы (2.3).

Имеет место теорема [5], определяющая условия наилучшей обусловленности системы (2.3).

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы система линейных уравнений продолжения решения (2.3) была наилучшим образом обусловлена, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке гладкой поверхности множества решений нелинейного уравнения (1.1) параметры продолжения решения u и v выбирались в касательной плоскости к этой поверхности и являлись длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Исследуем на экстремум величину $D = \Delta/d$ как функцию компонент векторов α и β при условиях (2.2). Из равенства (2.4) следует, что экстремумы функции D и определителя Δ системы (2.3) будут достигаться одновременно. Таким образом, задача сводится к исследованию на экстремум функции $\Delta(\alpha, \beta)$ при условиях (2.2).

Составим функцию Лагранжа

$$L = \Delta + \gamma_1 \left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) + \gamma_2 \left(1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 \right). \quad (2.5)$$

Здесь γ_1, γ_2 - множители Лагранжа.

Разложив определитель матрицы системы (2.3) по элементам 1-й и 2-й строки, получим выражения

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_{1i} = \sum_{i=1}^3 \beta_i A_{2i}, \quad (2.6)$$

где A_{1i} - алгебраическое дополнение, соответствующее элементу α_i , A_{2i} - алгебраическое дополнение, соответствующее элементу β_i , $i = 1, 2, 3$.

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю частных производных:

$$\partial L / \partial \alpha_i = A_{1i} - 2\gamma_1 \alpha_i = 0, \quad \partial L / \partial \beta_i = A_{2i} - 2\gamma_2 \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Из равенств (2.7) и (2.2) получим выражения для компонент векторов α и β :

$$\alpha_i = \pm \frac{A_{1i}}{(A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2}}, \quad \beta_i = \pm \frac{A_{2i}}{(A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

доставляющих экстремум функции Лагранжа (2.5).

Если выражения (2.8) подставить в равенства (2.6), то получим, что определитель системы должен удовлетворять равенствам

$$\Delta = \pm (A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2)^{1/2} = \pm (A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

и экстремум функции Лагранжа достигается при значениях

$$\alpha_i = \frac{A_{1i}}{\Delta}, \quad \beta_i = \frac{A_{2i}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Достаточные условия экстремума подтверждают, что выражения (2.10) доставляют функции Лагранжа (2.5) максимум. Установим расположение по отношению к поверхности S векторов α и β , компоненты которых удовлетворяют равенствам (2.10).

Вычислим скалярные произведения $(\mathbf{N}, \alpha)$ и $(\mathbf{N}, \beta)$, где $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ - вектор нормали к поверхности в произвольной точке (x, y, z) :

$$\begin{aligned} F_x \alpha_1 + F_y \alpha_2 + F_z \alpha_3 &= \pm \frac{F_x A_{11} + F_y A_{12} + F_z A_{13}}{\Delta}, \\ F_x \beta_1 + F_y \beta_2 + F_z \beta_3 &= \pm \frac{F_x A_{21} + F_y A_{22} + F_z A_{23}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Суммы в числителях дробей правых частей равенств (2.11) представляют собой суммы произведений элементов 3-й строки на алгебраические дополнения элементов 1-й и 2-й строк. В силу свойства определителей, все такие суммы равны нулю. Следовательно, векторы α и β ортогональны вектору нормали $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ к поверхности S , т.е. лежат в плоскости, касательной к этой поверхности.

Докажем ортогональность векторов α и β . Скалярное произведение этих векторов

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \pm \frac{A_{11} \beta_1 + A_{12} \beta_2 + A_{13} \beta_3}{\Delta} \quad (2.12)$$

равно нулю, так как числитель дроби правой части равенства (2.12) равен нулю в силу свойства определителей. Следовательно, векторы α и β , определяющие в каждой точке поверхности направление линий наилучших параметров $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, проходящих через эту точку, ортогональны.

Докажем теперь, что наилучшие параметры u и v являются длинами дуг параметрических линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ соответственно.

При $v = \text{const}$ дифференциал параметра v равен нулю и система уравнений продолжения решения (2.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Разделив все уравнения системы (2.13) на du , получим систему линейных уравнений относительно производных $x_u = dx/du, y_u = dy/du, z_u = dz/du$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Решение системы (2.14), полученное по правилу Крамера, может быть записано в виде

$$x_u = \frac{A_{11}}{\Delta}, \quad y_u = \frac{A_{12}}{\Delta}, \quad z_u = \frac{A_{13}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Выражения для производных x_u, y_u, z_u из (2.15) совпадают с выражениями для компонент вектора α из (2.10), доставляющих наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения (2.3). Т.е. при $v = \text{const}$ выполняются равенства

$$\alpha_1 = x_u, \quad \alpha_2 = y_u, \quad \alpha_3 = z_u. \quad (2.16)$$

Подставляя значения (2.16) в первое из выражений (2.1) и умножая полученное равенство на du , получаем соотношение

$$(du)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2.17)$$

Т.е. параметр u является длиной дуги кривой $v = \text{const}$.

Аналогично можно показать, что при $u = \text{const}$ выполняются равенства

$$\beta_1 = x_v, \quad \beta_2 = y_v, \quad \beta_3 = z_v \quad (2.18)$$

и дифференциал параметра v удовлетворяет соотношению

$$(dv)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2.19)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Выберем в качестве параметров u и v длины дуг ортогональных параметрическим линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

Векторы $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ и $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)^T$ являются касательными к параметрическим линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$. Смысл единичных векторов α и β состоит в том, что они определяют направление отсчета параметров, поэтому они тоже должны быть касательными к кривым $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$. Следовательно, вектор α коллинеарен вектору $\mathbf{r}_u$, а вектор β коллинеарен вектору $\mathbf{r}_v$.

Дифференциалы выбранных параметров удовлетворяют равенствам (2.17), (2.19). Разделив равенство (2.17) на $(du)^2$, а равенство (2.19) - на $(dv)^2$, получим соотношения $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = r_u^2 = 1$, $x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = r_v^2 = 1$. Т.е. векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, так же как и векторы α и β , являются единичными. Из равенств векторов $\alpha = \mathbf{r}_u$ и $\beta = \mathbf{r}_v$ следуют равенства их компонент (2.16), (2.18). Кроме того, из условий $\alpha^2 = \mathbf{r}_u^2 = 1$, $\beta^2 = \mathbf{r}_v^2 = 1$ с учетом (2.16), (2.18) можно записать равенства

$$\alpha \mathbf{r}_u^T = 1, \quad \beta \mathbf{r}_v^T = 1. \quad (2.20)$$

По условию теоремы, параметры отсчитываются в ортогональных направлениях, поэтому вектор α ортогонален вектору β , а значит, и вектор $\mathbf{r}_u$ ортогонален вектору β , а вектор $\mathbf{r}_v$ ортогонален вектору α .

Поскольку $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ лежат в плоскости, касательной к поверхности S , они ортогональны вектору нормали $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$ к этой поверхности.

Из первого соотношения (2.20) и из условий равенства нулю скалярных произведений $(\mathbf{r}_u, \boldsymbol{\beta})$ и $(\mathbf{r}_u, \mathbf{N})$ можно составить систему уравнений (2.14), решением которой являются выражения (2.15). Из выражений (2.15) и равенств компонент (2.16) вытекают выражения (2.10) для компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$, доставляющих наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения решения (2.3).

Аналогично, исходя из второго соотношения (2.20) и из условий равенства нулю скалярных произведений $(\mathbf{r}_v, \boldsymbol{\alpha})$ и $(\mathbf{r}_v, \mathbf{N})$, можно доказать, что при выбранном параметре v компоненты вектора $\boldsymbol{\beta}$ доставляют наилучшую обусловленность системе уравнений продолжения решения (2.3).

Доказательство закончено.

3. Параметрическая интерполяция поверхностей

В прикладных исследованиях поверхность обычно задается не уравнением (1.1), а набором точек

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

по которым необходимо восстановить эту поверхность. Такой аналог дискретно-точечного задания поверхности называется каркасным. В области $\Omega : [a, b] \times [c, d]$ вещественных переменных u и v рассматривается параметрическая сетка

$$\Delta : a = u_1 < u_2 < \dots < u_N = b; c = v_1 < v_2 < \dots < v_M = d. \quad (3.2)$$

Совокупность координатных линий на поверхности, прообразами которых являются линии сетки (3.2), образует каркас поверхности. Куски поверхности, на которые ее разбивает каркас, называются клетками, а точки взаимопересечений каркасных линий - узловыми точками или узлами каркаса.

В инженерной геометрии одним из методов восстановления поверхности по узловым точкам является ее интерполяция по этим точкам. Под кусочно-непрерывной интерполяцией поверхности понимается приближение ее некоторой параметризацией, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Для построения частей приближающей составной поверхности необходимо сначала построить ее каркас, состоящий из координатных линий, которые задаются вектор-функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_i, v)$, $i = 1, \dots, N$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_j)$, $j = 1, \dots, M$. При этом выбор узловых значений параметров u_i и v_j и выбор расположения координатных линий неоднозначны. Одна и та же поверхность может иметь разные параметрические представления, от которых и будет зависеть точность ее приближения.

Поскольку поверхность задается в дискретно-точечной форме значениями $\mathbf{r}_{ij}$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$, то ее параметризацию можно получить в виде вектора-сплайна двух переменных, определенного в области $\Omega : [a, b] \times [c, d]$ вещественных переменных u и v , который определяется следующим образом:

$$\mathbf{W}(u, v) = X(u, v)\mathbf{e}_1 + Y(u, v)\mathbf{e}_2 + Z(u, v)\mathbf{e}_3, \quad (3.3)$$

где $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ - кубические сплайн-функции, заданные на параметрической сетке $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, $\Delta_u : a = u_1 < u_2 < \dots < u_N = b$, $\Delta_v : c = v_1 < v_2 < \dots < v_M = d$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - орты декартовых координатных осей.

Решение может быть продолжено, если заданным точкам (3.1) поставить в соответствие значения u_i, v_j из области Ω . Для этого воспользуемся хордовой параметризацией

[5], при которой в качестве параметра выбирается длина ломаной, соединяющей узловые точки. Доказано, что такая хордовая параметризация близка к наилучшей.

Сначала необходимо определить начальную точку, координаты которой будут соответствовать нулевым значениям параметров u и v . Затем надо выбрать две каркасные линии с номерами i^* и j^* из разных семейств, которые будут пересекаться в начальной точке. Принимая в качестве параметров u и v текущую длину вписанной ломаной с вершинами в заданных точках, для этих линий можно подсчитать приращения параметров Δu и Δv . В результате получим параметрическую сетку $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, для которой $\mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}_{ij}$.

Теперь параметрическое приближение поверхности сводится к задаче интерполяции этой поверхности вектором-сплайном, принимающим в узлах сетки (3.2) заданные значения

$$\mathbf{W}(u_i, v_j) = \mathbf{r}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

причем элементы этого вектора-сплайна представляют из себя кубические параметрические сплайны. При этом задача интерполяции поверхности кубическими сплайнами может быть сведена к задаче параметрического приближения этой поверхности эрмитовыми кубическими сплайнами, если частные производные по параметрам в узловых точках заменить на их конечно-разностные аналоги, которые определяются из условий непрерывности старших производных, а именно: на линиях $u = u_2$ и $u = u_{N-1}$ непрерывны все производные до порядка $D^{3,2}\mathbf{W}(u, v)$, а на линиях $v = v_2$ и $v = v_{M-1}$ - до порядка $D^{2,3}\mathbf{W}(u, v)$. Кроме того, в областях $[u_r, u_{r+2}] \times [v_k, v_{k+2}]$, $r = 1, \dots, N-2$, $k = 1, \dots, M-2$ непрерывны все производные, включая $D^{3,3}\mathbf{W}(u, v)$.

Построение элементов вектора-сплайна $\mathbf{W}(u, v)$ рассмотрим на примере кубического сплайна $X(u, v)$, который в узлах сетки $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$ принимает заданные значения

$$X(u_i, v_j) = x_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.5)$$

Сплайн $X(u, v)$, согласно [6], может быть представлен в виде

$$X(u, v) = \varphi^T(t) F_m \varphi(s), \quad (3.6)$$

где

$$\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), h_i \varphi_3(t), h_i \varphi_4(t)), \quad (3.7)$$

$$F_m = \begin{pmatrix} x_{i,j} & x_{i,j+1} & m_{i,j}^{(0,1)} & m_{i,j+1}^{(0,1)} \\ x_{i+1,j} & x_{i+1,j+1} & m_{i+1,j}^{(0,1)} & m_{i+1,j+1}^{(0,1)} \\ m_{i,j}^{(1,0)} & m_{i,j+1}^{(1,0)} & m_{i,j}^{(1,1)} & m_{i,j+1}^{(1,1)} \\ m_{i+1,j}^{(1,0)} & m_{i+1,j+1}^{(1,0)} & m_{i+1,j}^{(1,1)} & m_{i+1,j+1}^{(1,1)} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ l_j \varphi_3(s) \\ l_j \varphi_4(s) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Здесь введены обозначения $h_i = u_{i+1} - u_i$, $l_j = v_{j+1} - v_j$, $t = \frac{(u-u_i)}{h_i}$, $s = \frac{(v-v_j)}{h_j}$, $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -t^2(1-t)$, $\varphi_1(s) = (1-s)^2(1+2s)$, $\varphi_2(s) = s^2(3-2s)$, $\varphi_3(s) = s(1-s)^2$, $\varphi_4(s) = -s^2(1-s)$,

$m_{i,j}^{(0,1)}$ - частная производная сплайна $X(u, v)$ по переменной v , $m_{i,j}^{(1,0)}$ - частная производная сплайна $X(u, v)$ по переменной u , $m_{i,j}^{(1,1)}$ - смешанная производная сплайна $X(u, v)$ по переменным u, v .

Теперь интерполяционная задача состоит в том, чтобы из уравнений (3.5) и условий непрерывности старших производных найти неизвестные величины $m_{i,j}^{(1,0)}$, $m_{i,j}^{(0,1)}$, $m_{i,j}^{(1,1)}$. Для этого применяется алгоритм, содержащий три шага построения сплайна $X(u, v)$, который основан на том, что при фиксированном значении одной из переменных, например $v = v_j$, сплайн $X(u, v)$ и его частные производные по v являются кубическими сплайнами от переменной u .

Шаг 1. Построение кубических сплайнов $X(u, v_j)$ от переменной u вдоль координатных линий $v = v_j$, $j = 1, \dots, M$. На этом шаге решается M одномерных задач. В результате будут найдены величины $m_{i,j}^{(1,0)} = D^{1,0}X(u_i, v_j)$, $(u_i, v_j) \in \Delta$.

Шаг 2. Построение кубических сплайнов $X(u_i, v)$ от переменной v вдоль координатных линий $u = u_i$, $i = 1, \dots, N$. В результате будут найдены величины $m_{i,j}^{(0,1)} = D^{0,1}X(u_i, v_j)$, $(u_i, v_j) \in \Delta$. Причем на этом шаге решается уже N одномерных задач.

Шаг 3. Построение кубических сплайнов $\tilde{X}(u_i, v)$ от переменной v , но в качестве начальных данных необходимо принять значения частных производных в узловых точках по переменной u , которые были найдены на первом шаге данного алгоритма. Значения производных сплайнов $D^{0,1}\tilde{X}(u_i, v)$ в узлах параметрической сетки Δ представляют собой смешанные производные искомого сплайна на сетке Δ , т.е. $m_{i,j}^{(1,1)} = D^{1,1}X(u_i, v_j)$. Число решаемых одномерных задач такое же как на втором шаге и равно N .

Таким образом, построение двумерного сплайна сводится к решению $2N + M$ одномерных задач, которые представляют из себя решение следующей системы уравнений (для случая построения сплайна от переменной u):

$$\begin{cases} (1 + \gamma_1)m_{2,j} + \gamma_1 m_{3,j} = \tilde{x}'_{2,j} + 2\gamma_1 x[u_2, u_3], \\ \lambda_i m_{i-1,j} + 2m_{i,j} + \mu_i m_{i+1,j} = 3\tilde{x}'_{i,j}, \quad i = 3, \dots, N-2, \\ \gamma_N m_{N-2,j} + (1 + \gamma_N)m_{N-1,j} = \tilde{x}'_{N-1,j} + 2\gamma_N x[u_{N-2}, u_{N-1}]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь введены обозначения $j = j^*$, $\gamma_1 = \frac{h_1}{h_2}$, $\gamma_N = \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}$, $\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, $x[u_i, u_{i+1}] = \frac{x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j)}{u_{j+1} - u_j}$ - разделенные разности, $\tilde{x}'_{i,j} = \lambda_i x[u_{i-1}, u_i] + \mu_i x[u_i, u_{i+1}]$ - формула конечно-разностной аппроксимации производной по трем точкам.

Система (3.10) определяет $m_{2,j}$, $m_{3,j}$, ..., $m_{N-1,j}$, а $m_{1,j}$, $m_{N,j}$ находят из соотношений

$$m_{1,j} + (1 - \gamma_1^2)m_{2,j} - \gamma_1^2 m_{3,j} = 2(x[u_1, u_2] - \gamma_1^2 x[u_2, u_3]), \quad (3.11)$$

$$-\gamma_N^2 m_{N-2,j} + (1 - \gamma_N^2)m_{N-1,j} + m_{N,j} = 2(x[u_{N-1}, u_N] - \gamma_N^2 x[u_{N-2}, u_{N-1}]). \quad (3.12)$$

Общий вид системы уравнений (3.10) $Az = g$. Матрица такой системы - ленточная с диагональным преобладанием, т.е., если a_{ij} - элемент i -ой строки j -го столбца, то

$$r_i = |a_{ii}| - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| > 0 \quad (3.13)$$

для всех i . В связи с этим система вида (3.10) решается методом прогонки. Определители матриц с диагональным преобладанием отличны от нуля, и системы имеют решения, притом единственные. Это значит, что интерполяционный кубический сплайн, удовлетворяющий условию (3.5) и условиям непрерывности своих старших производных, существует и единственен.

Рассмотрим примеры параметрического приближения поверхностей кубическими сплайнами.

Пример 3.1. Круговой цилиндр, диаметр которого равен его высоте, задан в дискретно-точечной форме ($x^2 + y^2 = 1, z \in [0; 2]$). Для цилиндрической поверхности главными кривизнами являются окружность с максимальным значением кривизны, равной $1/R$ (R - радиус цилиндра), и образующая с нулевым значением кривизны. Интерполяция производится по 40 точкам, причем неоднозначный выбор узловых точек позволяет изменять расположение координатных осей каркаса поверхности.

Рассматривается пять случаев расположения координатных осей:

- ортогональные оси направлены по главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены под углом в 30° к главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены под углом в 45° к главным кривизнам;
- одна из осей направлена вдоль главной кривизны, другая - под углом в 30° ;
- одна из осей направлена вдоль главной кривизны, другая - под углом в 45° ;

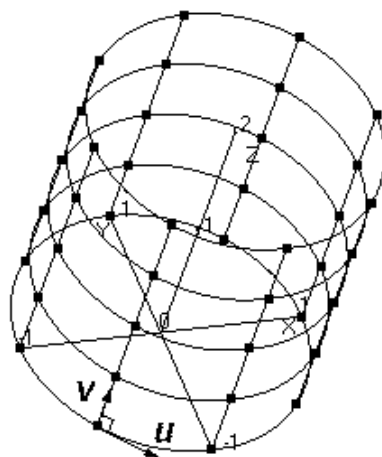
Во всех случаях по одной из координатной оси берется 5 узлов интерполяции, по другой - 9, причем первый и последний узлы совпадают.

О точности приближения поверхности позволяет судить ошибка интерполяции, вычисляемая в метрике Хаусдорфа и определяемая как максимальное расстояние между множеством точек полученной параметрическим приближением поверхности и множеством точек исходной поверхности, заданной алгебраическим уравнением. Под хаусдорфовым расстоянием между двумя точечными ограниченными множествами E и F понимается величина

$$\Delta = r(E, F) = \max[\max_{P \in E} \min_{Q \in F} \rho(P, Q), \max_{P \in F} \min_{Q \in E} \rho(P, Q)] \quad (3.14)$$

где $\rho(P, Q)$ - евклидово расстояние между точками P и Q .

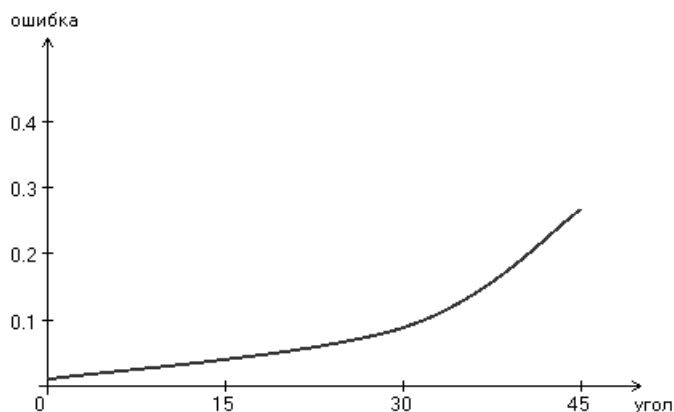
На рис.3.1 изображен каркас цилиндрической поверхности в случае, когда координатные оси направлены вдоль главных кривизн. На рисунке выделены точки по которым производилась интерполяция, а стрелками показаны направления параметризации поверхности. Ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.011$.



Р и с у н о к 3.1

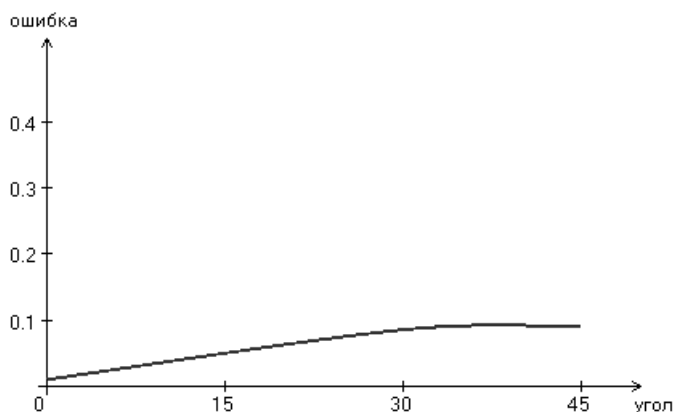
Для случаев, когда оси направлены под углами в 30° и 45° к главным кривизнам ошибка существенно возрастает и принимает значения $\Delta = 0.089$ и $\Delta = 0.267$ соответственно. При этом координатные линии каркаса поверхности представляют из себя уже не окружности и прямые, а эллипсы и спирали.

На рис.3.2 построен график зависимости угла поворота координатных осей относительно главных направлений цилиндрической поверхности от ошибки интерполяции. На графике видно, что чем ближе к главным кривизнам расположены координатные линии, тем точнее приближение цилиндра.



Р и с у н о к 3.2

Теперь рассмотрим поведение погрешности параметрического приближения для случаев, когда координатные оси не являются ортогональными. В данной ситуации исследуется поворот только одной координатной линии, а именно образующей цилиндра. При повороте на угол в 30° ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.086$, а на угол в 45° - $\Delta = 0.09$.



Р и с у н о к 3.3

График, изображенный на рис.3.3, показывает, что при увеличении угла отклонения координатной линии от образующей цилиндра ошибка интерполяции увеличивается, а своего минимума она достигает при взаимноортогональном расположении координатных линий, которое совпадает с направлениями вдоль главных кривизн.

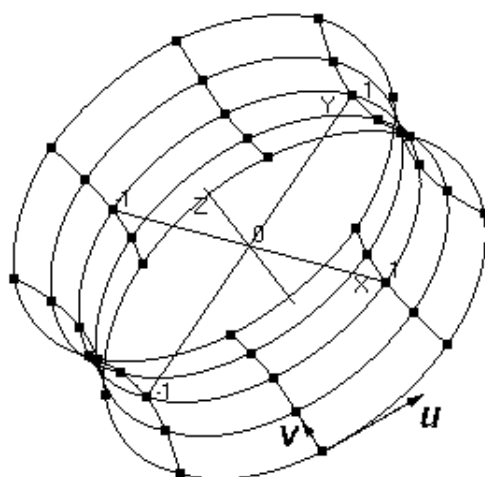
Пример 3.2. Задан однополостный круговой гиперболоид в дискретно-точечной форме ($x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \in [-0.5; 0.5]$). Окружности переменного радиуса и образующие в виде гиперболы являются главными кривизнами такой поверхности.

Так же как и в примере 3.1. интерполяция проводится по 40 точкам, при этом рассматривается только два случая расположения координатных осей:

- ортогональные оси направлены по главным кривизнам;
- ортогональные оси направлены не по главным кривизнам.

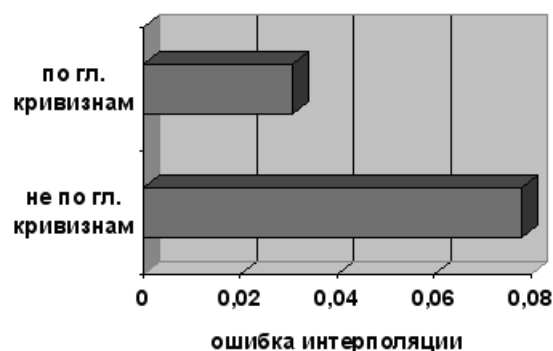
В обоих случаях по одной координатной оси берется 5 узлов интерполяции, по другой - 9 узлов, причем во втором случае от главного направления отклоняется только образующая u , за счет кривизны гиперболической поверхности, угол отклонения лежит в диапазоне от 65° до 71° .

Оценка близости множеств точек полученных параметрическим приближением гиперболоида к множеству точек исходной поверхности, заданной алгебраическим уравнением, также рассчитывается в метрике Хаусдорфа.



Р и с у н о к 3.4

На рис.3.4 изображен каркас однополостного гиперболоида в результате наилучшей параметризации, направленной по главным кривизнам поверхности. В этом случае ошибка интерполяции составила $\Delta = 0.03$. Во втором случае при нарушении условий ортогональности и направленности по главным направлениям координатных осей ошибка увеличилась более чем в два раза и ее значение составило $\Delta = 0.078$.



Р и с у н о к 3.5

Диаграмма на рис.3.5 показывает разницу в точности приближения однополостного гиперболоида, которая говорит о том, что погрешность интерполяции поверхности минимальна при соблюдении всех условий наилучшей параметризации этой поверхности.

4. Выводы

Найденные условия наилучшей параметризации поверхности, полученные при помощи метода продолжения решения по параметру, показывают, что параметризация, при которой параметры выбираются в касательной плоскости к этой поверхности и являются длинами дуг, вычисляемых вдоль двух ортогональных направлений совпадающими с главными кривизнами поверхности, является наилучшей. Причем в задачах интерполяции поверхностей в качестве параметров используется длина ломаной, соединяющей узловые точки. В результате имеется параметризация, близкая к наилучшей. На примере кругового цилиндра и однополостного гиперболоида подтверждены необходимые и достаточные условия наилучшей параметризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ (шифр проекта 2.1.1/5267).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. – М.:Мир, 1982.
2. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.:Эдиториал УРСС, 1999.
3. Кузнецов Е.Б. О наилучшей параметризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2129-2140.
4. Кузнецов Е.Б. Многомерная параметризация // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 155-167.
5. Кузнецов Е.Б., Якимович А.Ю. Наилучшая параметризация в задачах приближения кривых и поверхностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 5. – С. 760-774.
6. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скорospelов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. – М.:Машиностроение, 1985.

Parametrization of surfaces by a method of continuation of solution on parameter

© E. B. Kuznetsov³, P. A. Filatov⁴

Abstract. In work theoretical aspects are considered of a method of continuation of solution on parameter. The special attention is given application of this method in tasks of parametrical approach of surfaces splines. The shown results of computational investigation confirm requisite and sufficient conditions to get the best parameters for surfaces parametrization.

Key Words: parametrization, best parameter, main curvatures, interpolation, cubic spline.

REFERENCES

1. Faux A., Pratt M. Computational geometry. – M.:Mir, 1982.
2. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Method of continuation of solution on parametre and the best parametrization. – M.:Editorial URSS, 1999.
3. Kuznetsov E.B. On the best parametrization. // Computational Mathematics and Mathematical Physics – 2008. – V. 48, № 12. – P. 2129-2140.
4. Kuznetsov E.B. Multidimensional parametrization. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010. – V. 50, № 2. – P. 155-167.
5. Kuznetsov E.B., Yakimovich A.Yu. The best parametrization in problems of approach of curves and surfaces. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2005. – V. 45, № 5. – P. 760-774.
6. Zavyalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. Splines in engineering geometry. – M.: Mashinostroenie, 1985.

³Professor of the Moscow Aviation Institute, Moscow city; kuznetsov@mai.ru

⁴The post-graduate student of the Moscow Aviation Institute, Moscow city.

УДК 517.958:537.84, 519.62/.64

Численное решение прямой кинетической задачи методами Розенброка и Мишельсена для жестких систем дифференциальных уравнений

© М. В. Тихонова¹, И. М. Губайдуллин², С. И. Спивак³

Аннотация. В работе рассмотрены проблема жесткости системы ОДУ при построении кинетической модели реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов в присутствии катализатора Cr_2ZrCl_2 , методы Мишельсена и Розенброка для решения прямой кинетической задачи. Проведена оценка погрешности между расчетными и экспериментальными данными. Получены скорости стадий реакции для дальнейшего определения реакционной способности веществ.

Ключевые слова: математическое моделирование, химическая кинетика, прямые задачи, жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, константы скоростей элементарных реакций, метод Розенброка, метод Мишельсена.

1. Введение

Для систем дифференциальных уравнений, описывающих кинетику химических реакций, характерно наличие быстро и медленно меняющихся переменных, так как стадии реакций протекают с различными скоростями.

При решении обратных задач химической кинетики возникают ситуации, когда константы скоростей реакции принимают значения, отличные друг от друга на несколько порядков. Согласно определению понятия "жесткости" с точки зрения химии ([1]), мы можем сделать вывод, что они попадают в область, в которой система дифференциальных уравнений, описывающая реакцию, на отдельных интервалах времени протекания реакции, оказывается жесткой.

В теории численных методов доказано, что чем более вырожденным является якобиан системы ОДУ, тем она более жесткая. То есть матрица Якоби является относительной мерой жесткости, и это ее свойство может быть использовано для наиболее оптимальной настройки численного метода. Когда определитель якобиана, вне зависимости от значений функций и переменных, равен нулю, система имеет предельно высокую степень жесткости.

Стандартные явные численные методы зачастую не справляются с интегрированием таких систем, поскольку их решение требует исключительно малого значения шага численного метода, и приводят к накоплению ошибки, осцилляции скоростей стадий реакции, нарушению баланса. Таким образом, встает задача рассмотрения методов, способных решать жесткие задачи.

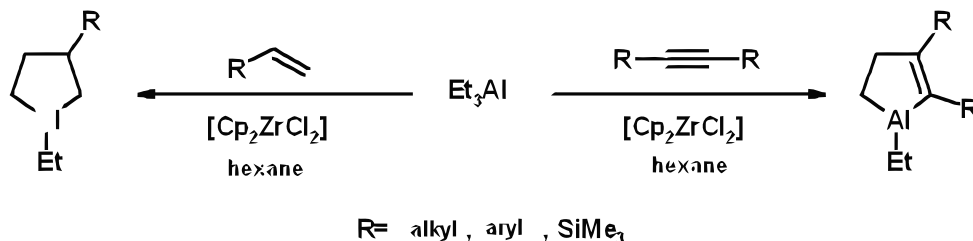
¹Магистрант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; tiny_daisy@mail.ru.

²Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, доцент, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

³Заведующий кафедрой математического моделирования, заведующий лабораторией математической химии, профессор, Башкирский государственный университет, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

2. Постановка задачи

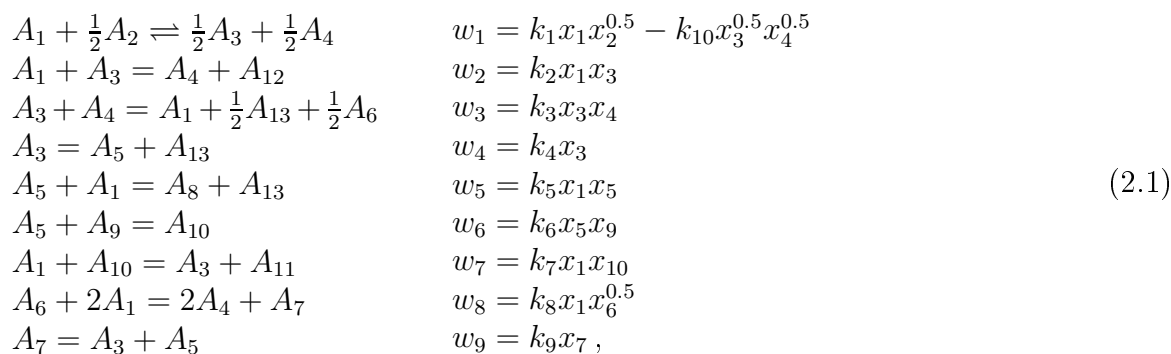
В институте нефтехимии и катализа РАН исследуется реакция циклоалюминирования олефинов и ацетиленов в присутствии катализатора Cp_2ZrCl_2 :



Р и с у н о к 2.1

Схема реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов в присутствии катализатора Cp_2ZrCl_2

Одной из возможных схем ее механизма является:



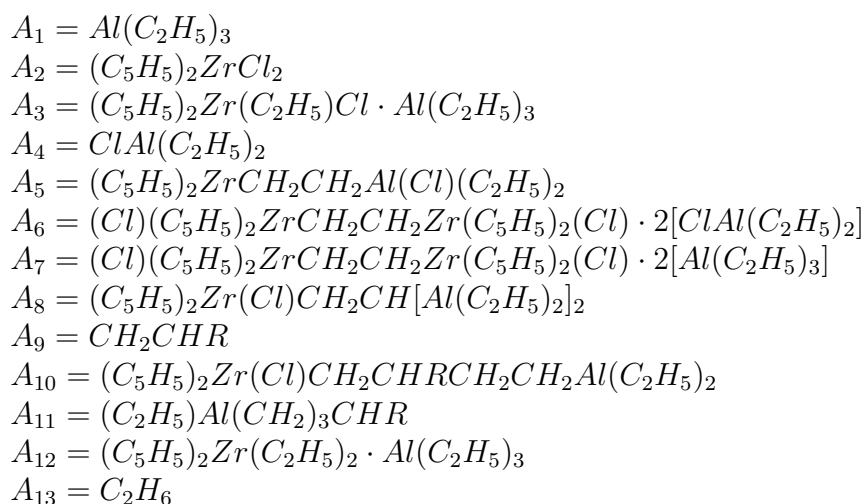
где w_j - скорость j -й стадии, $\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Ч} \cdot \text{Л}}$,

x_i - концентрация i -го вещества, $\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}$ (соответствует A_i),

k_j - константа скорости j -й реакции, $\frac{1}{\text{Ч}} \cdot \left(\frac{\text{Л}}{\text{МОЛЬ}}\right)^{\alpha-1}$, где

α - сумма степеней концентраций исходных веществ элементарной стадии.

В качестве A_i выступают вещества:



Система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая данную реакцию, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -w_1 - w_2 + w_3 - w_5 - w_7 - w_8 \\ \frac{dx_2}{dt} = -0.5w_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0.5w_1 - w_2 - w_3 - w_4 + w_7 + w_9 \\ \frac{dx_4}{dt} = 0.5w_1 + w_2 - w_3 + w_8 \\ \frac{dx_5}{dt} = w_4 - w_5 - w_6 + w_9 \\ \frac{dx_6}{dt} = 0.5w_3 - 0.5w_8 \\ \frac{dx_7}{dt} = 0.5w_8 - w_9 \\ \frac{dx_8}{dt} = w_5 \\ \frac{dx_9}{dt} = -w_6 \\ \frac{dx_{10}}{dt} = w_6 - w_7 \\ \frac{dx_{11}}{dt} = w_7 \\ \frac{dx_{12}}{dt} = w_2 \\ \frac{dx_{13}}{dt} = 0.5w_3 + w_4 + w_5 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

В лабораториях института проведен ряд химических опытов для реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов (2.1) при различных температурах. В частности, для 30°C , с начальными данными $x_1 = 1.2$ моль/л, $x_2 = 0.02$ моль/л, $x_9 = 0.4$ моль/л в лаборатории математической химии и работе ([3]) были определены следующие константы скорости реакции:

$$\begin{aligned} k_1 &= 263.9, k_2 = 0.4980, k_3 = 35.65, k_4 = 26.85, k_5 = 5.413, \\ k_6 &= 844.4, k_7 = 362, k_8 = 23.24, k_9 = 9.714, k_{10} = 1.056 \end{aligned}$$

Порядок констант сильно различается. Именно степень этого различия чаще всего и определяет жесткость системы ОДУ.

В начальный момент времени якобиан системы дифференциальных уравнений (2.2) для опыта при 30°C вырождается:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{t=0} = \left\| \begin{array}{ccccc} -37.32 & -1119.46 & 0 & \dots & 0 \\ -18.66 & -559.73 & 0 & \dots & 0 \\ 18.66 & 559.73 & 0 & \dots & 0 \\ 18.66 & 559.73 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = 0 \quad (2.3)$$

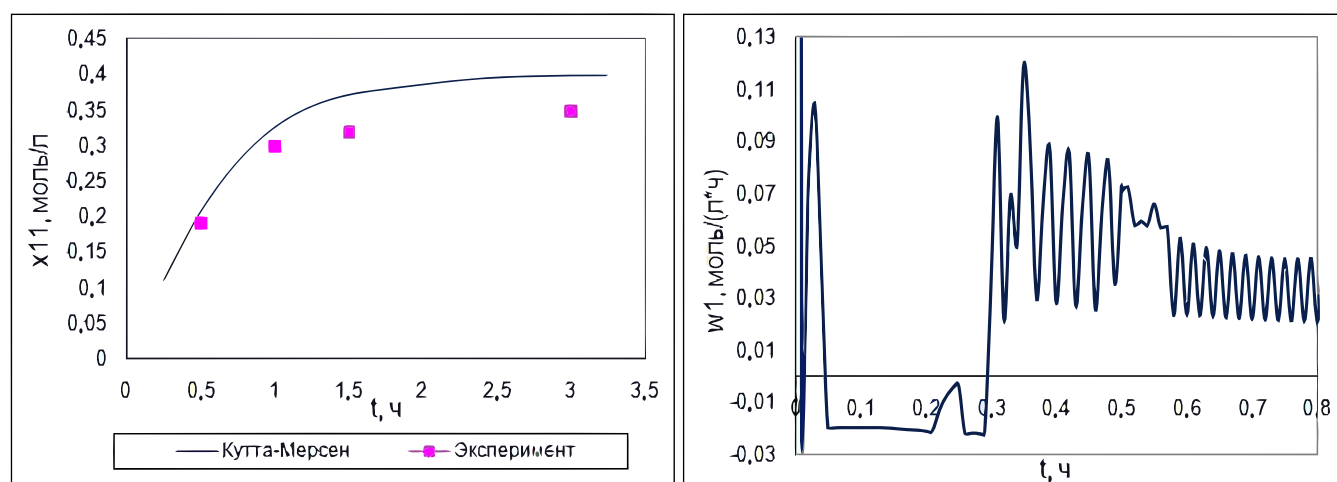
Следовательно, прямая кинетическая задача, описывающая реакцию циклоалюминирования олефинов и ацетиленов (2.1) при температуре 30 °С, является жесткой.

Для исследования химической реакции, выявления ее наиболее вероятного механизма и определения реакционной способности реагентов экспериментаторам важно знать, какие из стадий вносят существенный вклад в протекание реакции. Для этого требуется информация о непрерывных зависимостях скоростей элементарных реакций от концентраций реагентов в любой момент времени. В ходе химического процесса составы изменяются плавно. Математически это означает, что линия изменения скорости реакции, а также концентрации реагента во времени не должна иметь резких скачков и разрывов ([2]).

Была поставлена задача получить плавные кривые скоростей, чтобы иметь возможность сравнивать быстрые и медленные реакции для определения реакционной способности веществ, в частности, олефиновых и ацетиленовых соединений.

На сегодняшний день в Институте нефтехимии и катализа РАН разработан пакет программ для решения обратных задач химической кинетики. Прямая задача в нем решается явным методом Кутты-Мерсена 5 порядка.

В ходе вычислительного эксперимента этим методом были получены зависимости концентрации продукта реакции A_{11} и скорости 1-й стадии от времени (рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Метод Кутты-Мерсена.

Графики зависимостей концентрации x_{11} вещества $(C_2H_5)Al(CH_2)_3CHR$ и скорости 1-й стадии реакции от времени при $t=30^\circ C$.

Как видно из рисунка, скорость первой стадии реакции сильно осциллирует, что говорит о неустойчивости алгоритма. В результате этого метод дает большую среднеквадратичную погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^p - x_i^e)^2}{n-1}} \approx 0.155,$$

где n - число экспериментальных точек, x_i^p - расчетное значение концентрации вещества A_{11} , x_i^e - экспериментальное.

3. Численные методы решения жестких систем дифференциальных уравнений

Для построения плавных кривых скоростей элементарных реакций были рассмотрены полюбавные численные методы решения жестких систем дифференциальных уравнений.

3.1. Метод Розенброка

Рассмотрим разностную схему метода Розенброка 4-го порядка для автономных систем ОДУ ([4]):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{13}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 - 2p_3 + \frac{2}{3}p_4, \quad (3.1)$$

$$p_1 = h[E - hA(y_n)]^{-1}f(y_n), \quad (3.2)$$

$$p_2 = h[E - hA(y_n)]^{-1}f(y_n - p_1), \quad (3.3)$$

$$p_3 = h[E - hA(y_n)]^{-1}f(y_n + \frac{1}{8}p_1 + \frac{3}{8}p_2), \quad (3.4)$$

$$p_4 = h[E - hA(y_n)]^{-1}f(y_n + \frac{3}{8}p_1 + \frac{19}{24}p_2 - \frac{1}{6}p_3), \quad (3.5)$$

где h - шаг интегрирования, E - единичная матрица,

$A(y_n)$ - Якобиан системы (2.2), вычисленный в момент времени $t = t_n$,

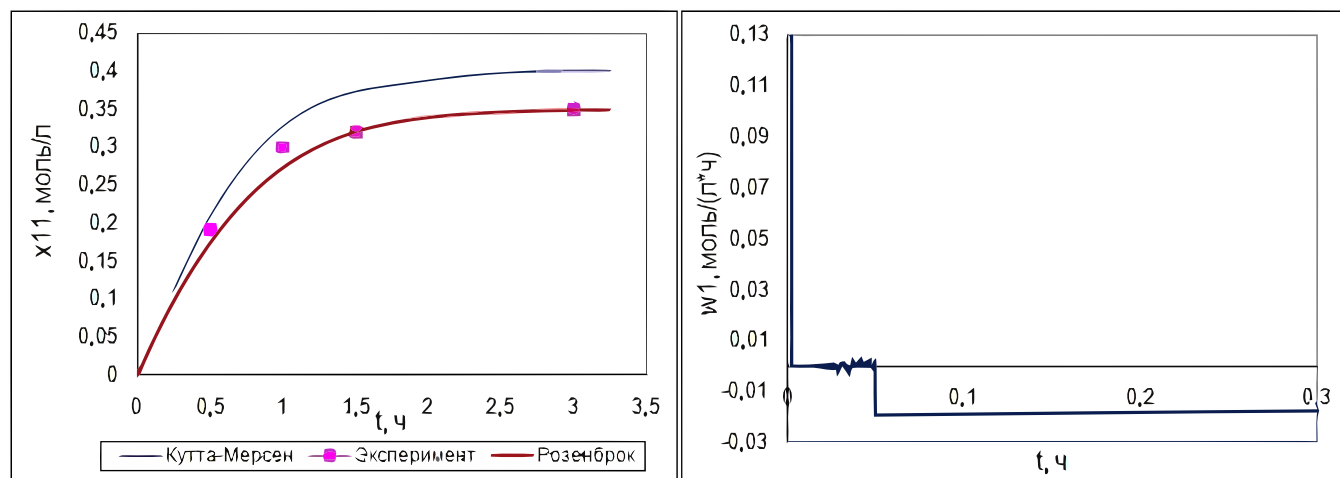
$f(y_n)$ - вектор-функция правой части системы (2.2) в момент времени $t = t_n$.

Метод реализован с переменным шагом интегрирования и для реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов (2.1) при температуре 30°C дает среднеквадратичную погрешность $\sigma=0.073$ (рис. 3.1). Для любого момента времени закон сохранения массы различных атомов выполняется с точностью:

$$|A^T x - C| < 0.000001, \quad (3.6)$$

где A - молекулярная матрица, x - вектор-столбец концентраций веществ, C - вектор-столбец количества атомов различных видов.

Тем не менее, в промежутке времени $[0.02; 0.05]$, метод дает небольшую осцилляцию скорости 1-й стадии.



Р и с у н о к 3.1
Метод Розенброка.

Графики зависимостей концентрации x_{11} вещества $(C_2H_5)Al(CH_2)_3CHR$ и скорости 1-й стадии реакции от времени при $t=30^\circ\text{C}$.

3.2. Метод Мишельсена

Рассмотрим разностную схему метода Мишельсена 3-го порядка для автономных систем ОДУ ([5]):

$$y_{n+1} = y_n + R_1 p_1 + R_2 p_2 + R_3 2p_3, \quad (3.7)$$

$$p_1 = h[E - haA(y_n)]^{-1} f(y_n), \quad (3.8)$$

$$p_2 = h[E - haA(y_n)]^{-1} f(y_n + b_2 p_1), \quad (3.9)$$

$$p_3 = h[E - haA(y_n)]^{-1} f(b_{31} p_1 + b_{32} p_2), \quad (3.10)$$

где

$$a=0.435867, \quad b_2=0.75, \quad R_1 = \frac{11}{27} - b_{31},$$

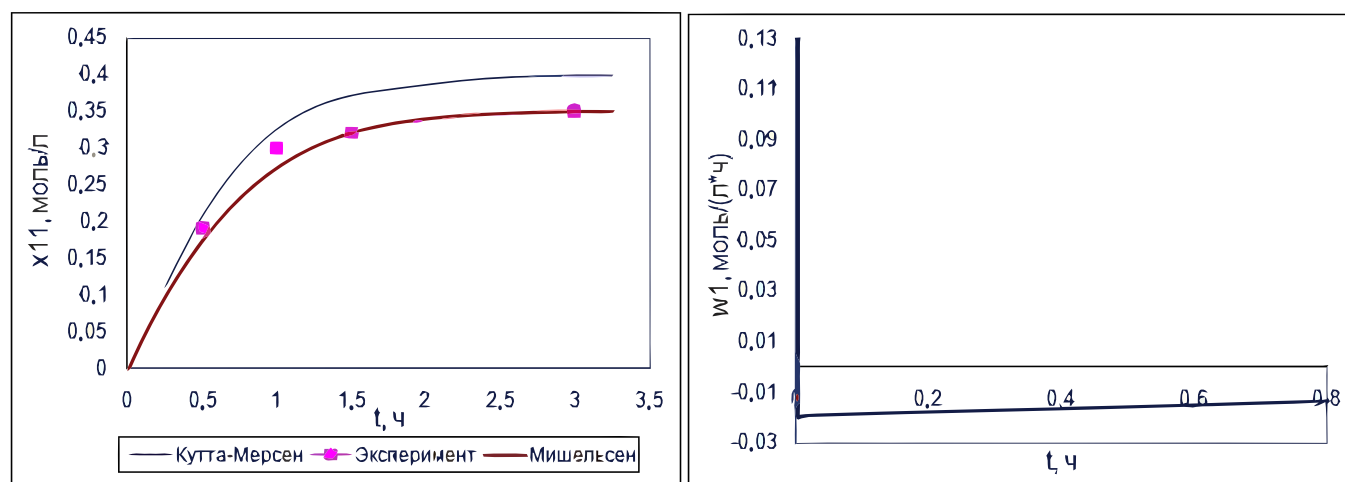
$$b_{31} = -\frac{1}{6a}(8a^2 - 2a + 1), \quad R_2 = \frac{16}{27} - b_{32},$$

$$b_{32} = \frac{2}{9a}(6a^2 - 6a + 1), \quad R_3 = 1,$$

h - шаг интегрирования, E - единичная матрица,

$A(y_n)$ - Якобиан системы (2.2), вычисленный в момент времени $t = t_n$,

$f(y_n)$ - вектор-функция правой части системы (2.2) в момент времени $t = t_n$.



Р и с у н о к 3.2

Метод Мишельсена.

Графики зависимостей концентрации x_{11} вещества $(C_2H_5)Al(CH_2)_3CHR$ и скорости 1-й стадии реакции от времени при $t=30^\circ C$.

Для исследуемой реакции циклоалюминирования (2.1) при температуре $30^\circ C$ метод дает среднеквадратичную погрешность $\sigma = 0.074$ (рис. 3.2) и для любого момента выполняется неравенство:

$$|A^T x - C| < 0.0001$$

При использовании метода Розенброка (3.1) балансное соотношение реакции (3.6) выполняется с более высокой точностью, в то время как при использовании метода Мишельсена (3.7) получаются более плавные скорости элементарных стадий. При этом оба метода дают более точное решение системы дифференциальных уравнений (2.2), чем явный метод Кутты-Мерсена.

Таким образом, в зависимости от поставленной задачи, степени ее жесткости, степени вырожденности якобиана, следует рассматривать различные численные методы, подбирая их оптимальные параметры, включающие в себя начальный, минимальный и максимальный шаг интегрирования, точность выполнения закона сохранения массы различных атомов и погрешность метода.

В дальнейшем планируется рассмотреть ряд экспериментальных данных при температурах от 0 до 50 °С, разных катализаторах, олефинах, ацетилене и спиртах с целью определения оптимальных условий протекания реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов(2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон К. Численные методы в химии: Пер. с англ. – М. Мир. – 1983. - С.504
ОНТИ, 1935. – 336 с.
2. Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. – М. Знание. – 1977. – С.5.
3. Балаев А.В., Парфенова Л.В., Русаков С.В., Губайдуллин И.М., Спивак С.И., Халилов Л.М., Джимелев У.М. Механизм реакции циклоалюминирования алкенов триэтилалюминием в алюмациклопентаны, катализируемой Cr_2ZrCl_2 .// ДАН, 2001, том 381, №3.
4. Полак Л.С., Гольденберг М.Я., Левицкий А.А. Вычислительные методы в химической кинетике. – М. Наука. – 1984. – С.135-136.
5. Гарцман К.Н., Черкашин В.В., Панкова Г.А. Решение "жестких" систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью полунявного метода Мишельсена. //ВНТИЦ Зак. 1349 т. 1000, 1978. – С.1-3

The numerical solution of the direct chemical kinetics problem by the Rosenbrock's and Mishelsen's methods for the stiff systems of differential equations.

© M. V. Tikhonova⁴, I. M. Gubaydullin⁵, S. I. Spivak⁶

Abstract. In the work the problem of the stiff ODE system in the construction of the kinetic model of the cycloalumination reaction of olefins and acetylenes in the presence of a catalyst Cp_2ZrCl_2 is considered. the Rosenbrock's and Mishelsen's methods are considered for solving the direct kinetic problem. The rates of the reaction stages are obtained for further define the reactivity of substances. The error between the calculated and experimental data in the work is estimated.

Key Words: mathematical modeling, chemical kinetics, direct problem, stiff system of ordinary differential equations, rate constants of elementary reactions, the Rosenbrock's method, Mishelsen's method.

REFERENCES

1. Johnson K. the Numerical Methods in chemistry. – M. Mir. – 1983. - p.504 Scientific and Technical Information Department, 1935. – p. 336.
2. Yablonsky G.S., Spivak S.I. The mathematical models of chemical kinetics. – M. Znanie. – 1977. – p.5.
3. Balaev A.V., Parfenova L.V. Gubaidullin I.M., Rusakov S.V., Spivak S.I., Khalilov L.M., Dzhemilev U.M. The Mechanism of Cp_2ZrCl_2 -Catalyzed Alkene Cycloalumination with Triethylaluminum to Give Alumacyclopentanes. // J. Doklady Physical Chemistry, 2004, V. 381, №3.
4. Polak L.S., Goldenberg M.Y., Levitsky A.A. Computational methods in chemical kinetics. – M. Nauka. – 1984. – p.135-136.
5. Gartsman K.N., Cherkashin V.V., Pankov G.A. The solution of "stiff"systems of ordinary differential equations using semi-implicit Mishelsen's method. //Russian Scientific and Technical Information Center, client. 1349 V. 1000, 1978. – p.1-3

⁴Master of the Mathematical modelling chair, the Bashkir state university, Ufa; tiny_daisy@mail.ru.

⁵Chief researcher of the Mathematical chemistry laboratory, candidate of physical and mathematical sciences, reader, the Institute of petrochemistry and catalysis, Russian academy of sciences, Ufa; irekmars@mail.ru.

⁶Head of the Mathematical modelling chair, head of the Mathematical chemistry laboratory, phd of physical and mathematical sciences, professor, the Bashkir state university, the Institute of petrochemistry and catalysis, Russian academy of sciences, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 519.854

Качественная оценка влияния неопределенности в кинетических параметрах на результаты теоретической оптимизации© О. А. Антонова¹, С. А. Мустафина², С. И. Спивак³

Аннотация. В работе изучен вопрос о качественной неизменности в случае поиска оптимальных температурных условий проведения химических равновесных реакций.

Ключевые слова: качественная неизменность, неопределенность в кинетических параметрах.

1. Введение

В ходе эксперимента химические константы (константы реакции k_i и энергии активаций E_i) определяются обычно с некоторым интервалом, ширина которого показывает степень их пригодности для практических задач, т.е. эти параметры находятся в условиях неопределенности:

$$(k_i^0)^{cp} - \Delta k_i^0 \leq k_i \leq (k_i^0)^{cp} + \Delta k_i^0, \quad (1.1)$$

$$E_i^{cp} - \Delta E_i \leq E_i \leq E_i^{cp} + \Delta E_i. \quad (1.2)$$

Рассмотрим влияние неопределенности в кинетических параметрах химических реакций на расчет оптимальной температуры. При решении задачи может возникнуть ситуация, что оптимальная температура находится внутри заданного ограничения (качество 1), либо находится только на его границах (качество 2). Если при этом в условиях неопределенности кинетических данных качество не меняется, то температура называется качественно неизменной. Местоположение оптимальной температуры определяет разные аппаратные условия ведения процесса: изотермические или неизотермические [1].

2. Постановка задачи

Любая сложная химическая реакция может быть представлена в виде сочетания простых реакций (обратимых, параллельных или последовательных). Рассмотрим обратимую реакцию, состоящую из n последовательных стадий:



¹Ассистент кафедры математики и информатики, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Antonova_olga22@mail.ru

²Заведующий кафедрой математики и информатики, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Mustafina_SA@rambler.ru

³Заведующий лабораторией математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru

Разделение друг от друга последовательных стадий этой реакции определяется путем подбора такой температуры, при которой выполняется требование максимального выхода продукта i -ой стадии. С другой стороны, по технологическим условиям на температуру накладывается ограничение: $T_{min} \leq T \leq T_{max}$.

Построим математическую модель для данного равновесного процесса [2]. Из курса термодинамики известно, что:

$$k_1^p = \frac{x_2}{x_1}, k_2^p = \frac{x_3}{x_2}, \dots, k_n^p = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad (2.2)$$

где k_i^p – константа равновесия, x_i – равновесная концентрация i -го продукта ($i = 1, \dots, n$). Согласно закону материального баланса:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1. \quad (2.3)$$

В матричном виде модель (2.2)-(2.3) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -k_1^p & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Для энергий активации E_i^+, E_i^- примем во внимание дополнительное ограничение: $Q_i = E_i^+ - E_i^- > 0$.

Решая систему (2.2), получим:

$$x_2 = P_1 x_1, x_3 = P_2 x_2, \dots, x_{n+1} = P_n x_n, \text{ где } P_i = \prod_{s=1}^n k_s^p. \quad (2.5)$$

Запишем выражение для равновесной концентрации, зависящее только от температуры:

$$x_s = \frac{P_s}{\sum_{i=1}^n P_i}.$$

Тогда производная для $x_s (s = 1, \dots, n)$ примет вид:

$$x_s' = \frac{P_s P_s' \left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{P_s} - \frac{\sum_{i=1}^n P_i'}{P_s'} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^2}.$$

Знак x_s' будет зависеть от знака выражения в числителе [3]:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{P_s} - \frac{\sum_{i=1}^n P_i'}{P_s'} \right). \quad (2.6)$$

Учитывая соотношение (2.5), получим:

$$P_s = \prod_{i=1}^s k_i \exp \left(- \frac{\sum_{i=1}^s Q_i}{RT} \right)$$

или, введя обозначения,

$$\tilde{E}_s = \sum_{i=1}^s Q_i, \quad \tilde{k}_s^0 = \prod_{i=1}^s k_i^0,$$

получим

$$P_s = \tilde{k}_s^0 \exp \left(- \frac{\tilde{E}_s}{RT} \right).$$

Отметим важное свойство коэффициентов E_s – монотонность:

$$i \leq j \Leftrightarrow \tilde{E}_i \leq \tilde{E}_j.$$

Тогда выражение (2.6) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{k}_s} \exp \left(- \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_s}{RT} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{E}_s} \frac{\tilde{k}_i^0}{\tilde{k}_s^0} \exp \left(- \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_s}{RT} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{k}_i^0}{\tilde{k}_s^0} \left(1 - \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{E}_s} \right) \exp \left(- \frac{\tilde{E}_i - \tilde{E}_s}{RT} \right). \end{aligned}$$

Замена

$$\begin{aligned} a_i = \frac{\tilde{k}_i^0}{\tilde{k}_s^0} \left(1 - \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{E}_s} \right), \quad z = \exp \left(- \frac{1}{RT} \right), \\ r_i = \tilde{E}_s - \tilde{E}_i, \quad i = \overline{1, l}, \quad r_i = \tilde{E}_i - \tilde{E}_s, \quad i = \overline{l+1, n} \end{aligned}$$

приводит к функционалу, являющемуся суммой полинома (если $\tilde{E}_i$ – целые числа, то с целочисленными степенями) и некоторой функции обратных степеней:

$$P_s(z) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i z^{-r_i} + \sum_{i=s+1}^n a_i z^{r_i}. \quad (2.7)$$

Проанализируем (2.7).

1. $a_i > 0$ при $i = \overline{1, s-1}$; $a_s = 0$; $a_i > 0$ при $i = \overline{s+1, n}$. В силу монотонности одинакового типа функций $-z^{r_i}$ ($n > 0$) $P_s(z)$ – есть монотонно убывающая функция.
2. Исследуем поведение функции в граничных точках: $z = 0$, $z = +\infty$, $s \in \{2, \dots, n-1\}$, т.е. существуют коэффициенты разных знаков:

а) $\lim_{z \rightarrow +0} P_s(z) = +\infty$, т.к. a_i , соответствующие мономам с отрицательными степенями,

положительны;

б) $\lim_{z \rightarrow +\infty} P_s(z) = -\infty$, т.к. a_i , соответствующие мономам с положительными степенями,

отрицательны.

$s = 1$

$$P_s(z) = \sum_{s=2}^n a_i z^{r_i} < 0 \quad (z \geq 0),$$

$$s = n$$

$$P_s(z) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i z^{-r_i} > 0 \quad (z \geq 0).$$

3. Выкладки пунктов 1 и 2 позволяют сделать выводы:

а) $s \in \{2, \dots, n-1\}$, в силу непрерывности $P_s(z)$ на $D(P_s) = [-\infty; +\infty]$ существует $z^* : P_s(z^*) = 0$,

б) $s = 1$, $P_s(z) < 0$, для любого $z > 0$,

в) $s = n$, $P_s(z) > 0$, для любого $z > 0$.

4. Т.к. $P_s(z)$ – монотонно убывающая функция, следовательно,

а) $s \in \{2, \dots, n-1\}$, из того, что $P_s(z) > 0$, для любого $z \leq z^*$ и $P_s(z) < 0$, для любого $z \geq z^*$, получим точку максимума z^* .

б) $s = 1$, $P_s(z) < 0$, для любого $z > 0$, имеем $x_s(T)$ – убывающая функция, т.е. максимальный выход продукта получим при минимальной температуре.

в) $s = n$, $P_s(z) > 0$, для любого $z > 0$, имеем $x_s(T)$ – возрастающая функция, т.е. максимальный выход продукта получим при максимальной температуре.

Таким образом показано, что существует как промежуточная точка оптимума, так и граничная точка как точка максимума. Иными словами, $U_s = Z$.

3. Вычислительный эксперимент

Изучим вопрос влияния неопределенности в термодинамических параметрах на результаты теоретической оптимизации и как следствие из этого – требование к точности определения параметров, необходимых для гарантированного прогноза условий проведения реакции.

В качестве исходных данных были выбраны параметры пассивации никелевых катализаторов ($n = 6$):

$$E_1 = 4,1 \quad \text{Ккал/моль}, \quad E_2 = 45,7 \quad \text{Ккал/моль}, \quad E_3 = 47,9 \quad \text{Ккал/моль},$$

$$E_4 = 48,25 \quad \text{Ккал/моль}, \quad E_5 = 48,4 \quad \text{Ккал/моль}, \quad E_6 = 48,5 \quad \text{Ккал/моль}.$$

Уровень ошибки составляет ($\sim 10\%$ относит.):

$$E_i(1 - \alpha) < E_i < E_i(1 + \alpha), \quad \overline{i = 1, 6}.$$

Температурный интервал $T^I = [293^\circ K, 473^\circ K]$. Результаты расчета показали, что подобная точность дает основания утверждать о наличии внутреннего максимума и выделения его границы $U_s = [293^\circ K, 313^\circ K]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонова О.А., Мустафина С.А. Чувствительность оптимального температурного режима для параллельной реакции к вариациям кинетических констант. // Вестник Башкирского университета. – 2008. – Т.13, №3(1). – С.847-848.
2. Круглов А.В. Двухсторонние оценки оптимальных решений при математическом моделировании химических процессов: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. / Уфа – 1990. – 159 с.

3. Мустафина С.А. Оптимизация равновесных процессов в условиях неопределенности по константам равновесия. // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 282-287.
4. Боресков Г.К. Катализ в производстве. – М.: Госхиммздат, 1954. – 348 с.
5. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.

Qualitative valuation of uncertainty influence in kinetic parameters on results of the theoretical optimization.

© O. A. Antonova⁴, S. A. Mustafina⁵, S. I. Spivak⁶

Abstract. In the work the question of a qualitative invariance in the case of searching optimum temperature conditions for carrying out chemical equilibrium reactions is studied.

Key Words: qualitative invariance, uncertainty in kinetic parameters.

REFERENCES

1. Antonova O.A., Mustafina S.A. Relation an optimum temperature mode for parallel reaction to variations of kinetic constants. // Bulletin Bashkir University. – 2008. – V.13, №3(I). – P.847-848.
2. Kruglov A.V. Bilateral estimations of optimum decisions at mathematical modeling of chemical processes: Diss.... kand.fiz.-mat.nauk./ Ufa – 1990. – 159 p.
3. Mustafina S.A. Optimization of equilibrium processes in the conditions of uncertainty on balance constants. // Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva. – 2006. – V. 8, № 1. – P. 282-287.
4. Boreskov G.K. Catalysis in manufacture. – M.: Goschimizdat, 1954. – 348 p.
5. Shokin U.I. Lectures on a mathematical stability theory. – Novosibirsk: Nauka, 1981. – 112 p.

⁴Assistant of Mathematics and Computer science Chair, Sterlitamaksky branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Antonova _olga22@mail.ru

⁵Head of Mathematics and Computer science Chair, Sterlitamaksky branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Mustafina _ SA@rambler.ru

⁶Head of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS, Ufa; S.Spivak@bashnet.ru

УДК 517.9

Об одном классе интегро–алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования

© М. В. Булатов¹, М. Н. Мачхина²

Аннотация. В работе приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения системы интегро–алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования.

Ключевые слова: интегро–алгебраические уравнения, переменные пределы интегрирования.

1. Введение

В данной статье рассмотрены интегро–алгебраические уравнения с переменными пределами интегрирования. Такие задачи возникают при описании математических моделей электроэнергетических установок [3]. Приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения для данного класса задач.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int_{t-c}^t K(t,s)x(s)ds = f(t), t \in [0, T], s \in [0, t], \quad (2.1)$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ – $(n \times n)$ –матрицы, $f(t)$ – n –мерная вектор–функция, c – известная положительная постоянная величина. Для данной задачи задано начальное значение

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0]. \quad (2.2)$$

Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $K(t,s)$ и $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости и

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (2.3)$$

Под решением рассматриваемой задачи будем понимать непрерывную вектор–функцию $x(t)$ обращающую уравнение (2.1) в тождество.

Задачи (2.1), (2.2) при выполнении условия (2.3) будем называть интегро–алгебраическими уравнениями с переменными пределами интегрирования. К настоящему времени известны немногие результаты относящиеся к качественной теории и численным методам решения интегро–алгебраических уравнений с постоянным нижним пределом интегрирования. Обзор по этой теме можно найти в [1], [2]. В данной работе сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения поставленной задачи.

¹Главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; mvbul@icc.ru

²Магистрант, Восточно–Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; masha88888@mail.ru

3. Теорема существования и единственности

К настоящему времени авторами не обнаружено каких-либо результатов по исследованию, а тем более по численному решению представленной в статье задачи. Однако в монографии [3] были приведены примеры таких уравнений и показана прикладная значимость задач такого рода. Перед формулировкой основного результата, приведем одно определение

О п р е д е л е н и е 3.1. [4] Матрица, обозначаемая как A^- , называется полу-обратной к матрице A , если она является решением уравнения

$$AA^-A = A.$$

Это уравнение перепишем в виде

$$WA = 0, \quad W = E - AA^-.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть для исходной задачи элементы $A(t), K(t, s), f(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями и выполнены условия:

$$1) \operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank} \left(A(0) \left[f(0) - \int_{-c}^0 K(0, s)x^0(s)ds \right] \right);$$

$$\operatorname{rank} A(t) = k = \operatorname{const} \quad \forall t \in [0, T],$$

$$2) \det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda^k a_0(t) + \lambda^{k-1} a_1(t) + \dots + a_k(t), \\ a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T];$$

$$3) Wf'(0) = W[K(0, 0)x^0(0) - K(0, -c)x^0(-c) + A'(0)x^0(0)] + W \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds;$$

$$4) A(0)x^0(-0) = f(0) - \int_{-c}^0 K(0, s)x^0(s)ds.$$

Тогда существует единственное непрерывное решение задачи (2.1), (2.2).

Прокомментируем условия теоремы. Первое условие можно интерпретировать как теорему Кронекера–Капелли, которая является условием разрешимости исходной системы (2.1) в начальной точке. Второе условие теоремы говорит о том, что на отрезке интегрирования отсутствуют сингулярные точки, т.е. точки в которых решения не существует, или через которые проходит множество решений, а третье условие гарантирует непрерывность решения поставленной задачи.

В заключительном параграфе приведем некоторые примеры, иллюстрирующие данную теорему.

4. Иллюстративные примеры

П р и м е р 4.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1, 0).$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$u(t) = -v(t).$$

Из второго уравнения системы, учитывая стартовые значения неизвестных функций, получаем

$$\int_0^t v(s) ds = e^t.$$

Это уравнение неразрешимо в классе непрерывных функций.

Проверим выполнение условий теоремы. Очевидно, что первое условие теоремы нарушено, так как

$$\text{rank} A(0) = 1,$$

а ранг расширенной матрицы

$$\text{rank} \left(A(0) | f(0) - \int_{-1}^0 K(0, s) x^0(s) ds \right) = \text{rank} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

равен двум.

Таким образом, ранг матрицы $A(t)$ в начальной точке не равен рангу расширенной матрицы в той же точке.

Пример 4.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1, 0).$$

Учитывая стартовые значения неизвестных функций, из первого уравнения системы получаем

$$u(t) + \int_0^t v(s) ds = 0,$$

а второе уравнение данной системы сведется к уравнению

$$\int_0^t [u(s) + (t-s)v(s)] ds = 0,$$

эквивалентному первому уравнению. В этом можно убедиться продифференцировав последнее уравнение по переменной t . Данная система имеет множество решений.

$$u(t) = -\frac{Ct^{k+1}}{k+1}, \quad v(t) = Ct^k \quad k \geq 0, \quad \forall C, \quad t \in [0, 1].$$

Входные данные этого примера удовлетворяют первому условию теоремы. Проверяем второе условие

$$\text{rank} A(t) = 1 = \text{const},$$

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = -1$$

$$\deg(-1) = 0 = \text{const.}$$

Видим, что второе условие теоремы нарушено, так как, ранг матрицы $A(t)$ и степень определителя пучка матриц $\lambda A(t) + K(t, t)$ являются постоянными величинами, но они не совпадают.

Пример 4.3.

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1, 0).$$

Перейдем к системе вида

$$\begin{cases} \frac{t}{2}u(t) - \int_0^t u(s)ds = 0 \\ \int_0^t v(s)ds = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу имеем $v(t) = 0$, а решением первого уравнения является класс функций $u(t) = Ct$, где C — любое число. Таким образом данная система имеет множество решений

$$u(t) = Ct, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

В этом примере входные данные удовлетворяют первому условию теоремы, но второе условие нарушено, так как

$$\text{rank} A(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t \neq 0. \end{cases}$$

Пример 4.4.

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0 \quad t \in [-1, 0).$$

Первое условие теоремы выполнено, но второе нарушено, так как

$$\text{rank} A(t) = 1 = \text{const.},$$

но степень характеристического многочлена пучка матриц $\lambda A(t) + K(t, t)$ непостоянна. В самом деле

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda(2t - 1) - 3,$$

$$\deg \det(\lambda(2t - 1) - 3) = \begin{cases} 0, & t = \frac{1}{2} \\ 1, & t \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, точка $t = \frac{1}{2}$ является сингулярной и, как нетрудно убедиться, через нее проходит множество решений

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ C\sqrt{2t-1}, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -C\sqrt{2t-1}, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где C — любое число.

Пример 4.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [1, 3]$$

$$u(t) = u^0(t) = 1 \quad v(t) = v^0(t) = 1 \quad t \in [0, 1).$$

Для данного примера выполнены первое и второе условия теоремы, но нарушено третье условие. Действительно, взяв в качестве W матрицу

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

должны получить равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое несправедливо.

Итак, третье условие теоремы не выполняется. Найдём решение данной задачи. Для этого от исходной системы перейдем к системе вида

$$\begin{cases} u(t) = v(t) \\ \int_{t-1}^1 v^0(s) ds + \int_1^t v(s) ds = t. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом шагов [5], получим

$$\int_1^t v^1(s) ds = t - \int_{t-1}^1 v^0(s) ds = 2t - 2 \Rightarrow v^1(t) = 2 \quad t \in [1, 2).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим разрывное решение вида

$$u(t) = v(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1, 2) \\ 3, & t \in [2, 3) \\ 4, & t = 3. \end{cases}$$

Работа была поддержана грантом РФФИ 10-01-00571a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов М.В. Методы решения дифференциально-алгебраических и вырожденных интегральных систем.— Дисс. ... докт. физ.—мат. наук, Иркутск, 2002, 244 с.
2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.— Новосибирск: Наука. —1996, 278 с.
3. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН. — 1999, 193 с.
4. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения.—Таллинн: Валгус.—1988, 120 с.
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. —М.-Л.: Гостехиздат.—1951, 255 с.

On one class of integral-algebraic equations with variable limits of integration

© M. V. Bulatov³, M. N. Machkhina⁴

Abstract. In the paper sufficient conditions of existence of unique continuous solutions for the system of integro-differential equations with variable integration limits are given.

Key Words: integral-algebraic equations, variable integration limits.

REFERENCES

1. Bulatov M. V. Methods of Solution of Differential-Algebraic and Singular Integral Equations.—Dr.Sc. Thesis, Irkutsk, 2002, pp.244.
2. Chistykov V.F. Algebro-Differential Operators With Finite-Dimensional Core. Novosibirsk: Nayka. — 1996, 278 p.
3. Apartsyn A.S. Nonclassical Equation of Volterra of the first kind: Theory and Numerical Methods.— Novosibirsk: Nauka. Sibirskaja Izdatel'skaja Firma RAN.—1999, 193 p.
4. Vaarmann O. Generalized Inverse Reflection.— Tallinn: Valgus.—1988, 120 p.
5. Myschkis A.D. Linear Differential Equations with Delay Argument. —M.-L.: Gostehizdat.—1951, 255 p.

³chif reseacher, ISDCT SB RAS, Irkutsk; mvbul@icc.ru.

⁴Ph.D. student, Irkutsk State Pedagogical Academy, Irkutsk; masha88888@mail.ru

УДК 517.9

Гомоклинический каскад бифуркаций в системе типа Лоренца

© Т. А. Гурина¹, И. А. Дорофеев²

Аннотация. В системе дифференциальных уравнений типа Лоренца, являющейся моделью устойчивости средней фирмы, найден полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций, приводящий к образованию странного аттрактора.

Ключевые слова: система Лоренца, бифуркация, особая точка, предельный цикл, гомоклинический контур, гомоклинический каскад бифуркаций, странный аттрактор, переход к динамическому хаосу.

1. Введение

Система дифференциальных уравнений Лоренца [1], описывающая развитие турбулентности в течении Релея-Бенара, является классическим примером динамической системы, переходящей к хаосу через двойной гомоклинический каскад бифуркаций и рождение странного аттрактора при изменении бифуркационного параметра $r \in [0, 1700]$ и фиксированных параметрах $b = 0.5$, $\sigma = 10$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (1.1)$$

В статье Шаповалова В. И. и соавторов [2] построена синергетическая модель средней фирмы, описывающая эволюцию величин кредита x , капитала y и численности сотрудников z и обладающая возможностью саморегуляции с помощью управляющих параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \sigma > 0$, являющихся бифуркационными. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, похожую на систему Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \delta y, \\ \dot{y} = \mu(x + y) - \beta xz, \\ \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy. \end{cases} \quad (1.2)$$

Устойчивой работе фирмы соответствует выход фазовой траектории системы (1.2) на устойчивое предельное множество — аттрактор (неподвижную точку или предельный цикл). Проведенные авторами [2], [4] численные эксперименты показали, что при изменении бифуркационного параметра $\gamma \in [0; 10]$ и $\alpha = 5$, $\beta = 8$, $\delta = 1$, $\mu = 2.1$, $\sigma = 4.1$ в системе (1.2) может возникнуть хаотический аттрактор, напоминающий аттрактор Лоренца. Ему предшествует каскад бифуркаций удвоения. Для проверки существования у системы Шаповалова (1.2) странного аттрактора типа Лоренца необходимо убедиться в наличии гомоклинического каскада бифуркаций.

¹Доцент кафедры теории вероятностей, Московский авиационный институт (технический университет), г. Москва; gurina__mai@mail.ru

²Ассистент кафедры теории вероятностей, Московский авиационный институт (технический университет), г. Москва; softcat@mail.ru

О п р е д е л е н и е 1.1. [1] Полным (неполным) гомоклиническим каскадом бифуркаций называется каскад бифуркаций рождения устойчивых предельных циклов из единственного устойчивого предельного цикла при изменении значений бифуркационного параметра вдоль прямой, проходящей в пространстве параметров через точку (вблизи точки) существования гомоклинического контура.

Если прямая, соответствующая изменению значений бифуркационного параметра, проходит в пространстве параметров через точку (вблизи точки) одновременного существования двух гомоклинических контуров, то образующийся каскад бифуркаций устойчивых циклов называется полным (неполным) двойным гомоклиническим каскадом.

2. Исследование особых точек системы Шаповалова.

Найдем особые точки системы (1.2) из условий $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$:

$$\begin{cases} -\sigma x + \delta y = 0, \\ \mu(x + y) - \beta xz = 0, \\ -\gamma z + \alpha xy = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \sigma > 0$ существуют три особые точки:

$$O_0(0, 0, 0), \quad O_{1,2}\left(\pm \sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta + \sigma)}{\alpha\beta\sigma}}, \pm \sqrt{\frac{\gamma\mu\sigma(\delta + \sigma)}{\alpha\beta\delta^2}}, \frac{\mu(\delta + \sigma)}{\beta\delta}\right) \quad (2.2)$$

Для исследования особых точек на устойчивость найдем якобиеву матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu - \beta z & \mu & -\beta x \\ \alpha y & \alpha x & -\gamma \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

В точке $O_0(0, 0, 0)$ получим матрицу линеаризации системы:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

и характеристическое уравнение:

$$\det(A_0 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \delta & 0 \\ \mu & \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + \gamma)(\lambda^2 - (\mu - \sigma)\lambda - \mu(\sigma + \delta)) = 0.$$

Согласно теореме Виета имеем: $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu - \sigma$, $\lambda_1\lambda_2 = -\mu(\sigma + \delta)$.

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\mu - \sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu - \sigma)^2}{4} + \mu(\delta + \sigma)} = \frac{\mu - \sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu + \sigma)^2}{4} + \mu\delta} < 0, \\ \lambda_2 &= \frac{\mu - \sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu - \sigma)^2}{4} + \mu(\delta + \sigma)} = \frac{\mu - \sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu + \sigma)^2}{4} + \mu\delta} > 0, \\ \lambda_3 &= -\gamma < 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что точка $O_0(0, 0, 0)$ — седло-узел с двумерным устойчивым инвариантным многообразием W^s и одномерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u . В симметричных точках $O_{1,2}$ имеем матрицы линеаризации:

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ -\frac{\mu\sigma}{\delta} & \mu & \mp\sqrt{\frac{\beta\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\alpha\sigma}} \\ \pm\sqrt{\frac{\alpha\gamma\mu\sigma(\delta+\sigma)}{\beta\delta^2}} & \pm\sqrt{\frac{\alpha\gamma\mu(\delta+\sigma)}{\beta\sigma}} & -\gamma \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

и характеристические уравнения:

$$\det(A_{1,2} - \lambda E) = -(\lambda^3 + (\gamma + \sigma - \mu)\lambda^2 + \gamma\left(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\right)\lambda + 2\gamma\mu(\delta + \sigma)) = 0.$$

Найдем порог устойчивости точек $O_{1,2}$, то есть значения параметров, при которых появляется пара чисто мнимых корней характеристического уравнения. Чисто мнимые корни у кубического трехчлена будут тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при λ и λ^2 равно свободному члену:

$$(\gamma + \sigma - \mu)\left(\frac{\gamma\mu}{\sigma} + \sigma\right) = 2\mu(\delta + \sigma).$$

Отсюда мы получим значение параметра γ , при котором точки $O_{1,2}$ одновременно теряют устойчивость и порождают предельные циклы, то есть происходит бифуркация Андронова-Хопфа:

$$\gamma_c = \frac{2\mu\sigma(\delta + \sigma)}{\delta\mu + \sigma^2} + (\mu - \sigma). \quad (2.7)$$

Заметим, что в выражение критического значения параметра γ_c не входят параметры α, β . Таким образом, при всех $\gamma < \gamma_c$ точки $O_{1,2}$ будут неустойчивы. Найдем значения собственных чисел при $\gamma = \gamma_c$. Характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3 + (\gamma + \sigma - \mu)\lambda^2 + \gamma\left(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\right)\lambda + \gamma(\gamma + \sigma - \mu)\left(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\right) = 0.$$

Тогда:

$$(\lambda + \gamma + \sigma - \mu)\left(\lambda^2 + \gamma\left(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\right)\right) = 0, \quad (2.8)$$

$\lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{\gamma\left(\frac{\delta\mu}{\sigma} + \sigma\right)}$ — мнимые корни, $\lambda_3 = \mu - \gamma - \sigma$ — знакопеременный действительный корень ($\lambda_3 > 0$, если $\gamma < \mu - \sigma$ и $\lambda_3 < 0$, если $\gamma > \mu - \sigma$).

Отсюда следует, что при $\gamma < \gamma_c$ и $\gamma > \mu - \sigma$ точки $O_{1,2}$ — седло-фокусы с одномерным устойчивым инвариантным многообразием W^s и двумерным неустойчивым инвариантным многообразием W^u .

Из существования в системе седло-узла и двух седло-фокусов вытекает возможность образования в ней различных гомоклинических контуров особых точек и связанных с ними каскадов бифуркаций.

3. Приведение матрицы линейной части системы к диагональной форме.

Запишем систему (1.2) в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha y \end{pmatrix}, \text{ где } A_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \delta & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Приведем матрицу линейной части системы к каноническому виду.

Поскольку матрица A_0 линеаризации в точке $O_0(0, 0, 0)$ имеет, в общем случае, различные действительные собственные числа, то она приводится к диагональной форме. По аналогии с [1] приведем матрицу линейной части системы к главным осям заменой:

$$x = u + v, \quad \delta y - \sigma x = \lambda_1 u + \lambda_2 v, \quad z = z, \quad (3.2)$$

отсюда: $y = \frac{\lambda_1 + \sigma}{\delta} u + \frac{\lambda_2 + \sigma}{\delta} v$.

Вычислим матрицу перехода и обратную к ней:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda_1 + \sigma}{\delta} & \frac{\lambda_2 + \sigma}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{\delta}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 + \sigma}{\delta} & -1 & 0 \\ -\frac{\lambda_1 + \sigma}{\delta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\delta} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Система примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = B^{-1} A_0 B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + B^{-1}(u + v) \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha \left(\frac{\lambda_1 + \sigma}{\delta} u + \frac{\lambda_2 + \sigma}{\delta} v \right) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

После подстановки (3.3), (3.4) в (3.5) и преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta \delta (u + v) z}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\beta \delta (u + v) z}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\alpha}{\delta} (u + v) ((\lambda_1 + \sigma)u + (\lambda_2 + \sigma)v) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

Запись уравнений в переменных (u, v, z) выгодно отличается от записи в переменных (z, y, z) вследствие того, что устойчивое многообразие W^s в точке $O_0(0, 0, 0)$ касательно к оси u , а неустойчивое W^u — касательно к оси v . В таком виде удобнее изучать геометрию фазовых кривых системы. При фиксированных параметрах $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\delta = 1$, $\mu = 2.1$, $\sigma = 4.1$ можно наблюдать каскад бифуркаций при стремлении значений параметра γ как сверху, так и снизу к точке γ^* существования в системе гомоклинических контуров седло-фокусов.

Особые точки преобразованной системы имеют координаты

$$O_0(0, 0, 0), \quad O_{1,2} \left(\pm \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\frac{\gamma \mu (\delta + \sigma)}{\alpha \beta \sigma}}, \mp \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\frac{\gamma \mu \sigma (\delta + \sigma)}{\alpha \beta \sigma}}, \frac{\mu (\delta + \sigma)}{\beta \delta} \right), \quad (3.7)$$

причем точки $O_{1,2}$ находятся в первом и третьем октантах пространства. Фазовая траектория при параметре γ из хаотической области лежит на поверхности двух деформированных колец с центрами в точках $O_{1,2}$. Каждое кольцо имеет внешний контур

$z = z_s(u, v)$, $z_{s \min} \leq z \leq z_{s \max}$, на котором достигаются локальные минимумы по z различных траекторий при их вращении вокруг точек $O_{1,2}$. Внутренний контур кольца определяет «глаз» аттрактора, внутрь которого траектория не заходит, а внешний контур определяет максимальный размер аттрактора, на котором траектория переходит от вращения вокруг точки $O_1(O_2)$ к вращению вокруг точки $O_2(O_1)$. Переход осуществляется по двум симметричным частям другого множества, соединяющего кольца, на котором траектория также имеет точки локальных минимумов, лежащие на кривой $z = z_g(u, v)$, $z_{g \min} \leq z \leq z_{g \max}$. Циклы, охватывающие обе точки $O_{1,2}$, имеют локальные минимумы на кривой $z = z_g(u, v)$.

4. Поиск седловых циклов.

Все циклы из бесконечного семейства неустойчивых циклов, порождающих хаотический аттрактор, имеют пересечение с одномерным неустойчивым инвариантным многообразием V^u точки $O_0(0, 0, 0)$. После вывода аналитических формул для многообразия V^u задача нахождения и доказательство существования неустойчивых циклов в системе сводится к нахождению неподвижных точек одномерного отображения возвращения на неустойчивое многообразие V^u . Этим методом могут быть найдены и любые устойчивые циклы, участвующие в формировании аттрактора. С этой целью сделаем в системе (3.1) преобразование, зависящее от z :

$$x = \tilde{u} + \tilde{v}, \quad \delta y - \sigma x = \lambda_1(z)\tilde{u} + \lambda_2(z)\tilde{v}, \quad z = z, \quad (4.1)$$

тогда: $y = \frac{\lambda_1(z) + \sigma}{\delta} \tilde{u} + \frac{\lambda_2(z) + \sigma}{\delta} \tilde{v}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix}, \quad B(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda_1(z) + \sigma}{\delta} & \frac{\lambda_2(z) + \sigma}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B^{-1}(z) = \frac{\delta}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2(z) + \sigma}{\delta} & -1 & 0 \\ -\frac{\lambda_1(z) + \sigma}{\delta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)}{\delta} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{B}(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + B(z) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \dot{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\lambda}_1(z)}{\delta} & \frac{\dot{\lambda}_2(z)}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.1) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = B^{-1}(z)(A_0 B(z) - \dot{B}(z)) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + B^{-1}(z)(\tilde{u} + \tilde{v}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta z \\ \alpha \left(\frac{\lambda_1(z) + \sigma}{\delta} \tilde{u} + \frac{\lambda_2(z) + \sigma}{\delta} \tilde{v} \right) \end{pmatrix}.$$

Если величины $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$ являются корнями уравнения:

$$\lambda^2(z) - (\mu - \sigma)\lambda(z) - (\mu\sigma + \delta(\mu - \beta z)) = 0,$$

$$\lambda_1(z) = \frac{\mu - \sigma}{2} - \sqrt{\frac{(\mu + \sigma)^2}{4} + \delta(\mu - \beta z)} < 0, \quad \lambda_2(z) = \frac{\mu - \sigma}{2} + \sqrt{\frac{(\mu + \sigma)^2}{4} + \delta(\mu - \beta z)} > 0.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta\delta(\tilde{u} - \tilde{v})\dot{z}}{(\lambda_2(z) - \lambda_1(z))^2} \\ -\frac{\beta\delta(\tilde{u} - \tilde{v})\dot{z}}{(\lambda_2(z) - \lambda_1(z))^2} \\ \frac{\alpha\sigma}{\delta}(\tilde{u} + \tilde{v})^2 + \frac{\alpha}{\delta}(\tilde{u} + \tilde{v})(\lambda_1(z)\tilde{u} + \lambda_2(z)\tilde{v}) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Многообразие V^u можно найти в явном виде из системы (4.3). Положим в (4.3) $\dot{z} = 0$, $\dot{\tilde{u}} = 0$, тогда векторное поле на V^u совпадает с направлением $\tilde{v}$.

Отсюда найдем, что:

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{v} = \pm \sqrt{\frac{\gamma\delta z}{\alpha(\sigma + \lambda_2(z))}}. \quad (4.4)$$

Так как:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix},$$

то:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}B(z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1(z) & \lambda_2 - \lambda_2(z) & 0 \\ \lambda_1(z) - \lambda_1 & \lambda_2(z) - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix}.$$

С другой стороны:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}(z)B \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} \begin{pmatrix} \lambda_2(z) - \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_2(z) & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_1(z) & \lambda_2 - \lambda_1(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}.$$

Точке $(0, \tilde{v}(z), z)$ пространства $(\tilde{u}, \tilde{v}, z)$ соответствует точка $(u(z), v(z), z)$ пространства (u, v, z) , лежащая на V^u точки $O_0(0, 0, 0)$:

$$u(z) = \frac{\lambda_2 - \lambda_2(z)}{\lambda_2 - \lambda_1} \tilde{v}(z), \quad v(z) = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \tilde{v}(z). \quad (4.5)$$

Кривая (4.5) является касательной к оси v , так как при $z \rightarrow 0$:

$$\frac{v(z)}{u(z)} = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_2(z)} = \frac{\sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta(\mu - \beta z)} + \sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta\mu}}{\sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\mu\delta} - \sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta(\mu - \beta z)}} \rightarrow \infty,$$

На этой кривой $\dot{z} = 0$, и она является многообразием V^u или кривой $z = z_g(u(z), v(z))$. Отображение $z = f_1(z_0)$ первого возвращения на плоскость $\tilde{u}(t) = 0$ можно найти из уравнения:

$$\tilde{u}(t) = \frac{\lambda_2(z) - \lambda_1}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} u(t) + \frac{\lambda_2(z) - \lambda_2}{\lambda_2(z) - \lambda_1(z)} v(t) = 0. \quad (4.6)$$

5. Поиск гомоклинических траекторий седло-узла.

Найдем две гомоклинические траектории седло-узла $O_0(0, 0, 0)$ (гомоклиническую бабочку), разрушение которых является важнейшей бифуркацией гомоклинического каскада. Аналогично [3], применим к исходной системе (1.2) преобразование $w = -\sigma x + \delta y$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (\mu - \sigma)w + (\mu(\delta + \sigma) - \beta\delta z)x, \\ \dot{z} = \alpha\sigma x^2/\delta + \alpha wx/\delta - \gamma z. \end{cases} \quad (5.1)$$

Далее, заменой $w = ux$ приводим систему к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = xu, \\ \dot{u} = -(u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma)) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha x^2(\sigma + u)/\delta - \gamma z. \end{cases} \quad (5.2)$$

И, наконец, после последней замены $x^2 = v$ получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2vu, \\ \dot{u} = -(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z, \\ \dot{z} = \alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z, \end{cases} \quad (5.3)$$

где u_1 и u_2 — корни уравнения $u^2 + (\sigma - \mu)u - \mu(\delta + \sigma) = 0$:

$$u_{1,2} = \frac{\mu - \sigma \pm \sqrt{(\sigma + \mu)^2 + 4\delta\mu}}{2}, \quad (5.4)$$

совпадают с корнями характеристического уравнения (2.5) в окрестности точки $O_0(0, 0, 0)$. Далее, переходим к системе двух уравнений, исключая время:

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = \frac{2vu}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}, \\ \frac{dz}{du} = \frac{\alpha v(\sigma + u)/\delta - \gamma z}{-(u - u_1)(u - u_2) - \beta\delta z}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Вычисляя пределы правых частей последней системы при $u \rightarrow u_2$, с использованием разложений в ряд Тейлора числителя и в знаменателя в окрестности точки $u = u_2$, найдём, что в точке $P(u_2, 0, 0)$

$$v'(u_2) = \frac{2v'(u_2)u_2}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}, \quad z'(u_2) = \frac{\alpha v'(u_2)(u_2 + \sigma)/\delta - \gamma z}{u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2)}.$$

Из первого уравнения при $v'(u_2) \neq 0$ получаем, что

$$u_1 - u_2 - \beta\delta z'(u_2) = 2u_2,$$

и, следовательно,

$$z'(u_2) = \frac{u_1 - 3u_2}{\beta\delta}, \quad v'(u_2) = \frac{\delta(2u_2 + \gamma)z'(u_2)}{\alpha(u_2 + \sigma)} = \frac{(2u_2 + \gamma)(u_1 - 3u_2)}{\alpha\beta(u_2 + \sigma)}.$$

Для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ численно решаем систему (5.5) в прямом времени с начальными условиями

$$u(0) = u_2 - \varepsilon, \quad v(0) = -v'(u_2)\varepsilon, \quad z(0) = -z'(u_2)\varepsilon. \quad (5.6)$$

А теперь вычислим пределы при $u \rightarrow u_1$, используя разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $u = u_1$, и получим в точке $P_1(u_1, 0, 0)$

$$v'(u_1) = \frac{2v'(u_1)u_1}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}, \quad z'(u_1) = \frac{\alpha v'(u_1)(u_1 + \sigma)/\delta - \gamma z'(u_1)}{u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1)}.$$

В точке $P_1(u_1, 0, 0)$ $v'(u_1) = 0$, поэтому $u_2 - u_1 - \beta\delta z'(u_1) = -\gamma$, и, следовательно,

$$z'(u_1) = \frac{u_2 - u_1 + \gamma}{\beta\delta}.$$

Аналогично, численно решим в обратном времени систему (5.5) с начальными условиями

$$u(0) = u_1 + \varepsilon, \quad v(0) = (k\varepsilon)^{-2u_1/\gamma}, \quad z(0) = z'(u_1)\varepsilon. \quad (5.7)$$

Если при численном интегрировании системы (5.5) с фиксированными параметрами и начальными условиями: $v(u_2 - \varepsilon) = -v'(u_2)\varepsilon$, $z(u_2 - \varepsilon) = -z'(u_2)\varepsilon$ значения $v(0+)$ и $z(0+)$ отличаются от значений $v(0-)$ и $z(0-)$ решений системы с начальными условиями $v(u_1 + \varepsilon) = (k\varepsilon)^{-2u_1/\gamma}$, $z(u_1 + \varepsilon) = z'(u_1)\varepsilon$ на величины порядка $O(\varepsilon)$ для любого достаточно малого ε и подобранной константы $k \in (0, 1)$, то существование гомоклинической траектории седло-узла $O_0(0, 0, 0)$ системы (1.2) доказано.

Расчеты проводились в системе Maple 12 методом Рунге-Кутты 7-8 порядка.

Показано, что для $\varepsilon = 10^{-5}$ и $k = 0.694209$ условия существования гомоклинической траектории удовлетворяются при параметрах системы:

$$\alpha = 4, \quad \beta = 8, \quad \gamma = 2.3345, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2.1, \quad \sigma = 4.1.$$

Следовательно, гомоклиническая бабочка седло-узла $O_0(0, 0, 0)$ существует.

6. Поиск гомоклинических траекторий седло-фокуса.

Найдем гомоклинические траектории седло-фокусов O_1 и O_2 , разрушение которых является главной бифуркацией гомоклинического каскада.

Применим к исходной системе (1.2) преобразование $w = -\sigma x + \delta y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{w} = (\mu - \sigma)w + (\mu(\delta + \sigma) - \beta\delta z)x, \\ \dot{z} = \alpha\sigma x^2/\delta + \alpha wx/\delta - \gamma z. \end{cases} \quad (6.1)$$

Особые точки в координатах (x, w, z) имеют вид:

$$O_0(0, 0, 0), \quad O_{1,2}\left(\pm \sqrt{\frac{\gamma\mu(\delta + \sigma)}{\alpha\beta\sigma}}, 0, \frac{\mu(\delta + \sigma)}{\beta\delta}\right). \quad (6.2)$$

Найдем якобиеву матрицу системы (6.1):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu(\delta + \sigma) - \beta\delta z & \mu - \sigma & -\beta\delta x \\ \frac{2\alpha\sigma x}{\delta} + \frac{\alpha w}{\delta} & \frac{\alpha x}{\delta} & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

В точке O_1 получим матрицу линеаризации системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu - \sigma & -\delta \sqrt{\frac{\beta \gamma \mu (\delta + \sigma)}{\alpha \sigma}} \\ \frac{2}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha \gamma \mu \sigma (\delta + \sigma)}{\beta}} & \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha \gamma \mu (\delta + \sigma)}{\beta \sigma}} & -\gamma \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

и характеристическое уравнение:

$$\det(A_1 - \lambda E) = -(\lambda^3 + (\gamma - \mu + \sigma)\lambda^2 + \gamma\left(\sigma + \frac{\delta\mu}{\sigma}\right)\lambda + 2\gamma\mu(\sigma + \delta)) = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ с положительной действительной частью $a > 0$ и действительный отрицательный корень λ_3 .

Приведем матрицу линейной части системы к каноническому виду:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Вычислим матрицу перехода C из условия $B = C^{-1}A_1C$ или $CB = A_1C$.

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}.$$

Выберем начальные условия в виде:

$$\hat{u}_0 = \varepsilon \cos \varphi, \quad \hat{v}_0 = \varepsilon \sin \varphi, \quad \hat{w}_0 = 0.$$

Решая систему (6.1) в прямом времени, получим траекторию сколь угодно близкую к сепаратрисе, выходящей из седло-фокуса O_1 . Решая систему (6.1) в обратном времени, получим траекторию сколь угодно близкую к сепаратрисе, входящей в седло-фокус O_1 . Сшивку осуществляем при $w = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М.: УРСС, 2004. - 320 с.
2. Шаповалов В.И., Каблов В.Ф., Башмаков В.А., Авакумов В.Е. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы. В книге «Синергетика и проблемы теории управления», ред. Колесников А.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - С.454-464.
3. Калошин Д.А. О построении бифуркационной поверхности гомоклинической бабочки в системе Лоренца // Дифференциальные уравнения, 2003.- Т.39.- №11.- С.1564-1565.
4. Литовченко В.А. Исследование перехода к хаосу и стабилизация детерминированных экономических систем. Дипломная работа. - МАИ, 2010.- 95 с.

Homoclinic cascade of bifurcations in the system of Lorenz's type.

© T. A. Gurina¹, I. A. Dorofeev²

Abstract. In system of the differential equations of the Lorenz's type, being model of stability of the average firm, it is found full double homoclinic cascade of the bifurcations, leading to formation of the strange attractor.

Key Words: Lorenz system, bifurcation, critical point, limit cycle, homoclinic contour, homoclinic cascade of bifurcations, strange attractor, transition to a dynamical chaos.

REFERENCES

1. Magnitskii N.A, Sidorow S.V. New methods of the Chaotic Dynamics. M.: URSS, 2004.- 320 p.
2. Shapovalov V.I., Kablov V.F., Bashmakov V.A., Avakumov V.E. Sinergetic model of the stability of the average firm. In the book «Sinergy and problems of the control theory», editor Kolesnikov A.A.- M.: PHISMATLIT, 2004.- C.454-464.
3. Kaloshin D.A. About construction of the bifurcational surface of the homoclinic butterfly in the Lorenz system//Differential equations, 2003.-V.39.- №11.- P.1564-1565.
4. Litovchenko V.A. Research of the transition to a dynamical chaos and stabilization deterministic chaos of the economic systems. Graduate work. - MAI, 2010.- 95 p.

¹Docent of Probability Theory Chair, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), Moscow; gurina__mai@mail.ru

²Assistant of Probability Theory Chair, Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies); softcat@mail.ru

УДК 517.9

Об оптимальной стабилизации программного движения

© Д. К. Егорова¹

Аннотация. В работе рассматривается возможность оптимальной стабилизации программного движения при наличии мажоранты и абсолютно равномерно ограниченных решений.

Ключевые слова: программное движение, абсолютно равномерно ограниченные решения, мажоранта.

Пусть задача оптимальной стабилизации программного движения $x = 0$ имеет вид:

a) уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, u), \quad (1.1)$$

где функция

$$G : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$$

при любом допустимом управлении $u \in K$ удовлетворяет требованиям теоремы существования и единственности решения Каратеодори при любых начальных данных (t_0, x_0) , $T \leq t_0 < +\infty$, $x_0 \in R^n$; K – класс допустимых управлений, $u : [T, +\infty) \times R^n \rightarrow R^m$ – функции типа Каратеодори и $u(t, 0) \equiv 0$,

b) функционал качества I рассматривается на решениях уравнения (1.1) и

$$I = \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t), u(t, x)) dt, \quad (1.2)$$

$$G_0 : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \rightarrow [0, +\infty)$$

– типа Каратеодори, $x(t) = x(t : t_0, x_0, u)$ – решение уравнения (1.1) с начальными данными (t_0, x_0) при любом управлении $u \in K$, $\|x_0\| \leq \delta$; решение $x = 0$ абсолютно равномерно устойчиво относительно t_0 , то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\|x(t : t_0, x_0, u)\| < \varepsilon$$

при всех x_0 , $\|x_0\| \leq \delta$ и всех $T \leq t, t_0 < +\infty$. Требуется найти такое допустимое управление $u_0 \in K$, которое доставляет минимум функционалу (1.2) в классе K при фиксированном δ .

К такой постановке задачи при подходящей замене переменных сводится задача об оптимальной стабилизации произвольного программного движения $x = \varphi(t)$ [1]. Поэтому именно в сформулированной постановке, когда программное движение есть $x = 0$, будем рассматривать задачу. Однако, сформулированная задача требует более точной математической формулировки, которая придаст четкий смысл понятию минимума функционала (1.2). Для этого мы потребуем глобальную выпрямляемость поля направлений, определяемого уравнением (1.1), в классе допустимых управлений.

В этом случае абсолютно равномерная устойчивость $x = 0$ означает: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что как только $\|x_0\| < \delta$, то

$$\|x(t : +\infty, x_0, u)\| < \varepsilon$$

¹Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; dar-ego@rambler.ru

при всех $T \leq t \leq +\infty$.

Тогда в формулировке задачи функционал качества (1.2) можно записать в виде

$$I = \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0)) dt,$$

где $x(t) = x(t : +\infty, x_0, u)$, $\|x_0\| \leq \delta$.

В этом случае минимум функционала I определяется так: существует управление $u_0(t, x)$ такое, что

$$\int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u_0(t, x(t) - x_0)) dt \leq \int_T^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0)) dt,$$

при всех $u \in K$, $x(t) = x(t : +\infty, x_0, u)$, $\|x_0\| \leq \delta$.

Тогда $u_0 = u_0(t, x)$ оптимально стабилизирует решение $x = 0$ в классе допустимых управлений K .

Теперь постановка основной задачи имеет четкую математическую формулировку. В общем случае это определение каждый раз в конкретной задаче требует уточнения. Заметим, что здесь асимптотической устойчивости решения $x = 0$ нет, и поэтому, потребовалось новое определение оптимальной стабилизации программного движения.

Для того, чтобы выполнялись все требования постановки задачи, в частности, можно потребовать существования мажоранты и наличия уравнения сравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z, v), \quad z \geq 0, v = \|u\|. \quad (1.3)$$

для уравнения движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (1.4)$$

где $u \in K$, $x \in \mathbb{R}^n$, K — класс допустимых управлений, $u(t) \in V$, $f \in C^{p,q}([T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ($p, q \geq 0$), $f(t, 0, u) \equiv 0$.

При некоторых ограничениях [2] можно обеспечить выполнимость всех условий, при которых рассматривается основная задача. Дополнительно потребуем существования мажоранты и для функции $G_0(t, x, u)$, $\|G_0(t, x, u)\| \leq \lambda_0(t, \|x\|, \|u\|)$, $\lambda_0 \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1, \mathbb{R}_+^1)$, $\lambda_0(t, \alpha_1, \|u\|) \leq \lambda_0(t, \alpha_2, \|u\|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Наличие мажоранты обусловлено скорее, практическими задачами, чем теоретической потребностью математики. Мажоранта является носителем функциональных свойств, которыми обладают функции из формулировки задачи. Действительно, именно в практических задачах точные аналитические задания неизвестны, а их мажоранты задаются как результаты измерений.

Уточним класс допустимых управлений K . В формулировке задачи рассматриваются лишь только управления с обратной связью, более общие классы требуют уточнения формулировки. Еще потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u(t, x)\| \leq \mu \|x\|,$$

где μ — минимальное неотрицательное число, обеспечивающее это неравенство для данного управления при любом $T \leq t < +\infty$.

При каких условиях основная задача имеет решение?

Пусть $\lambda_0(t, z, \mu) \leq \lambda_0(t, z, \mu_0)$, $0 \leq \mu, \mu \neq \mu_0$. Тогда для любого x_0 , $\|x_0\| \leq \delta_0$, $\|x(t : +\infty, x_0, u) - x_0\| \leq M(\delta_0, \mu_0)$ и при $\mu = \mu_0$ справедлива оценка

$$I \leq \int_T^{+\infty} \lambda_0(t, M(\delta_0, \mu), \mu) dt,$$

существование функции M вытекает из абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (1.1).

Будем считать, что управление $u \in K$ удовлетворяет условию Липшица: $\|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)\| \leq L_1|t_1 - t_2| + L_2\|x_1 - x_2\|$; $L_1, L_2 - \text{const}$. В этом случае множество

$$S(t) = \{(x(t : +\infty, x_0, u), u) : \|x_0\| \leq \delta_0, u \in K, T \leq t < +\infty\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно [3]. Поэтому непрерывный функционал I_r на $S_r(t) = S(t)$, $T \leq t \leq r$

$$I_r = \int_T^r G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0)) ds$$

по теореме Вейерштрасса достигает минимума при любом $r \geq T$. Пусть он достигается в точке $(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0)))$, $T \leq t \leq r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует пара

$(x(t : +\infty, x_0, u), u(t, x(t : +\infty, x_0, u)))$, $T \leq t \leq r$ такая, что

$$\begin{aligned} & G_0(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u) - x_0)) < \\ & < G_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u(t, x(t : +\infty, x_0, u_0) - x_0)) + \varepsilon, T \leq t \leq r. \end{aligned}$$

Поэтому существует последовательность

$$(x_n(t : +\infty, x_0, u_n), u_n(t, x_n(t : +\infty, x_0, u_n))), \quad (1.5)$$

равномерно сходящаяся при $n \rightarrow +\infty$ на сегменте $T \leq t \leq r$ к паре

$$(x_0(t : +\infty, x_0, u_0), u_0(t, x_0(t : +\infty, x_0, u_0))), T \leq t \leq r. \quad (1.6)$$

Рассматривая вложенную систему сегментов $[T, r] \subset [T, r_1] \subset \dots \subset [T, r_n] \subset \dots$, $r_n > r_{n-1}$, $r_0 = r$, получим: последовательность (1.5) при $n \rightarrow +\infty$ на полуоси $T \leq t < +\infty$ сходится к паре (1.6) равномерно на любом сегменте из $[T, +\infty)$. Поэтому существует минимум функционала I :

$$\begin{aligned} & \int_T^{+\infty} G_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0, u_0(s, x_0(s : +\infty, x_0, u_0) - x_0)) ds \leq \\ & \leq \int_T^{+\infty} G_0(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0, u(s, x(s : +\infty, x_0, u) - x_0)) ds \end{aligned}$$

при всех $u \in K$. Тогда (1.6) можно найти применением принципа максимума [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: Из-во СВМО, 2001. – 300 с.
2. Егорова Д.К., Сухарев Л.А. Оптимальная стабилизация программных движений и математическое моделирование динамики статистических результатов управляемых процессов // Труды Средневолжского математического общества. – 2005. – Т. 7, № 1. – С. 263–273.
3. Воскресенский Е.В. О полиномиальных аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт № 11. Саранск: Из-во СВМО, 1998. – 22 с.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

About optimal stabilization of programming motion.

© D. K. Egorova²

Abstract. The optimal stabilization of programming motion with majorant and absolutely uniformly bounded of solutions is considered in this work.

Key Words: the programming motion, absolutely uniformly bounded of solutions, majorant.

REFERENCES

1. Voskresensky E.V. Asymptotic methods: the theory and appendices. – Saransk: SVMO, 2001.– 300 p.
2. Egorova D.K., Suharev L.A. Optimum stabilization of motions programs and mathematical modelling dynamics statistical results operated processes // SVMO. – 2005.— T. 7, № 1. — P. 263–273.
3. Voskresensky E.V. About polynomials attractor ordinary differential equations. Preprint № 11. Saransk: SVMO, 1998. – 22 p.
4. Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. – M.: Science, 1979. – 384 p.

²Associate professor of applied mathematics char, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; dar-ego@rambler.ru.

УДК 517.9

О построении конуса возможных решений для базы данных

© О. Е. Каледин¹, Л. А. Сухарев²

Аннотация. В работе определяется конус возможных решений для базы данных; показано как его построить на неуправляемом участке методом ломаных.

Ключевые слова: конус возможных решений, дифференциальное включение, базы данных.

1. Основные определения

В работе [1] Е. В. Воскресенского рассматриваются базы данных, которые порождаются абсолютно-непрерывными вектор-функциями $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in Q$, $Q \subset AC(I_0)$ — класс абсолютно-непрерывных вектор-функций, определенных на $I_0 = [T_0, T_1]$. Пара (I_0, Q) порождает дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad T_0 \leq t \leq T_1, \quad \|x\| < R_0. \quad (1.1)$$

для которого справедлива теорема существования решения $x(t : t_0, x_0)$ Зарембы [2].

О п р е д е л е н и е 1.1. Компакт $I_0 = [T_0, T_1]$ называется неуправляемым промежутком для (1.1).

Для построения конуса возможных решений на неуправляемом промежутке рассмотрим сетку

$$S_t = \{t_i : T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_m = T_1\},$$

где t_i — узлы. Пусть $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно-непрерывная вектор-функция, такая что $x(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$. $X_{T_0, T_1} = \{x_i : i = \overline{0, m}\}$ — база данных.

Таким образом вектор-функция $x^{(k)} \in Q$, $k = \overline{0, l}$ порождает соответствующие базы данных на сетке S_t .

В области $P\{(t, x) : T_0 \leq t \leq T_1, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < R_0\}$ почти всюду имеют место неравенства

$$\mu(t, x) \leq \frac{dx}{dt} \leq \lambda(t, x), \quad (1.2)$$

где λ и μ непрерывные вектор-функции, квазимоноotonно неубывающие по переменной x . Здесь $\frac{dx}{dt}$ — производная вектор-функции $x \in Q$, реализующей базу данных X_{T_0, T_1} .

Будем считать, что $\mu, \lambda \in C(P)$ и уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(t, y), \quad (1.3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \mu(t, z) \quad (1.4)$$

¹Программист кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kaledinoe@gmail.com.

²Заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; suharev_la@mail.ru.

однозначно определяют свои решения по начальным данным (t_0, y_0) , (t_0, z_0) : $y(t : t_0, y_0)$, $z(t : t_0, z_0)$, где $t_0 \leq t \leq T_1$. Пусть $\mathbb{R}^n$ частично упорядочено: $x \geq y$, если $x_i \geq y_i$, $x = colon(x_1, \dots, x_n)$, $y = colon(y_1, \dots, y_n)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Уравнения (1.3) и (1.4) будем называть уравнениями сравнения для базы данных X_{T_0, T_1} .

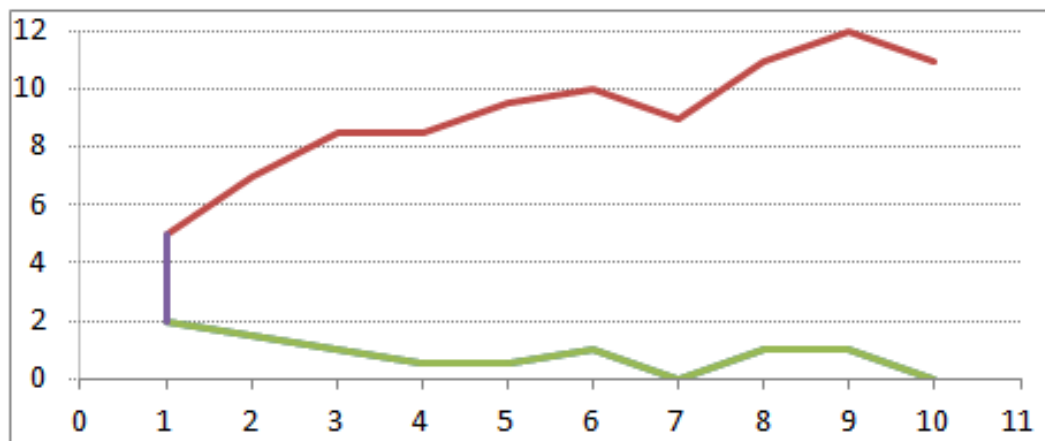
О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $Comp \mathbb{R}^n$ — подпространство всех непустых компактов из $\mathbb{R}^n$, наделенное метрикой Хаусдорфа, $T_0 \leq t \leq T_1$, $F : P \rightarrow Comp \mathbb{R}^n$ и если $y \in F(t, x)$, то $\mu(t, x) \leq y \leq \lambda(t, x)$. Тогда F — многозначная функция и включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) \quad (1.5)$$

будем называть дифференциальным включением базы X_{T_0, T_1} , $x \in AC(I_0)$.

Для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in P$ существует решение дифференциального включения (1.5) $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $x \in AC(I_0)$. Если область P замкнута и ограничена и (t_0, x_0) — внутренняя точка, то решение $x(t)$ можно продолжить влево и вправо до выхода на границу P [2].

О п р е д е л е н и е 1.4. Множество $K = \{x(t) : z(t : T_0, z_0) \leq x(t) \leq y(t : T_0, y_0), T_0 \leq t \leq T_1\}$, где $z_0 = \min x(T_0)$, $y_0 = \max x(T_0)$, называется конусом возможных траекторий на неуправляемом участке.



Р и с у н о к 1.1

Конус возможных решений

Верхней границей конуса будет решение уравнения $\frac{dy}{dt} = \lambda(t, y)$ с начальными данными $(T_0, y_0 = \max x(t), t = T_0)$, а нижней — $\frac{dz}{dt} = \mu(t, z)$ с начальными данными $(T_0, z_0 = \min x(t), t = T_0)$.

Заметим, что определение конуса возможных траекторий (конуса возможных решений) на неуправляемом участке содержит начальные условия z_0 и y_0 при $t = T_0$, которые в общем случае могут быть различными. При этом предполагается, что точка x_0 удовлетворяет условию $z_0 \leq x_0 \leq y_0$, тем самым образуя сечение интегральной воронки при $t = T_0$ [2].

2. Примеры

Для базы данных существует решение дифференциального включения, которое совпадает с верхней или нижней границей.

Пример 2.1. Пусть база данных X_{T_0, T_1} задана на сегменте $[T_0, T_1]$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	5	6	6	7	6	6.1	5.3	5	6
2	2	5	5	4.5	4	3	3	2	1	2
3	2	1.9	2	2	3	2	2	1	0	1
4	2	5	4	3.8	3	2	2	1	0.7	0
5	2	5	5.1	5	5	4	4	3	2	3

Таблица разделенных разностей:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	0	1	-1	0.1	-0.8	-0.3	1	0.6
2	3	0	-0.5	-0.5	-1	0	-1	-1	1	0.2
3	-0.1	0.1	0	1	-1	0	-1	-1	-1	0.1
4	3	-1	-0.2	-0.8	-1	0	-1	-0.3	-0.7	0
5	3	0.1	-0.1	0	-1	0	-1	-1	1	0.3

Максимумы и минимумы разделенных разностей для каждого участка разбиения сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\max$	3	1	0	1	-1	0.1	-0.8	-0.3	1	
$\min$	-0.1	-1	-0.5	-0.8	-1	0	-1	-1	-1	

Значения конуса возможных решений в узлах сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\max$	2	5	6	6	7	6	6.1	5.3	5	6
$\min$	2	1.9	0.9	0.4	-0.4	-1.4	-1.4	-2.4	-3.4	-4.1

На рисунке 2.1 изображен конус возможных решений, причем первая строка из базы данных в узлах разбиения совпадает с верхней границей конуса. Кроме того, в данном случае $z_0 = y_0$ и верхняя и нижняя границы выходят из одной точки.



Р и с у н о к 2.1

Пример 2.2. База данных X_{T_0, T_1} задана на сегменте $[T_0, T_1]$ следующей таблицей:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.5	1	0.5	0.5	1	0	1	1	0
2	2	4	4.5	4.5	4.5	5	4	5	6	5
3	5	5	4.5	4	5	5.5	4.5	5.5	6	5
4	2	4	4.5	4.5	4.5	5	4	5	6	5
5	2	3	4.5	4.5	4.5	5	4	6	6	5

Таблица разделенных разностей:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.5	-0.5	-0.5	0	0.5	-1	1	0	-1	0
2	2	0.5	0	0	0.5	-1	1	1	-1	0.5
3	0	-0.5	-0.5	1	0.5	-1	1	0.5	-1	0.5
4	2	0.5	0	0	0.5	-1	1	1	-1	0.5
5	1	1.5	0	0	0.5	-1	2	0	-1	0.5

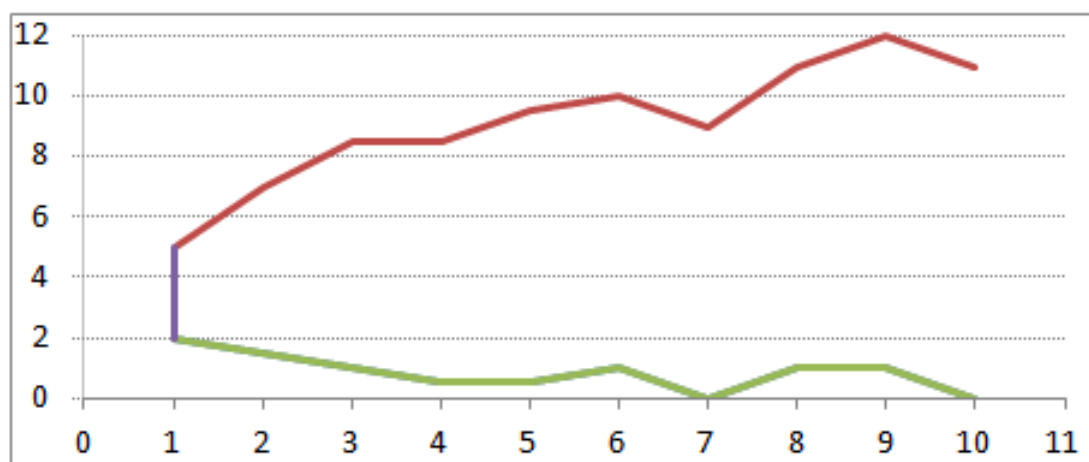
Максимумы и минимумы разделенных разностей для каждого участка разбиения сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\max$	2	1.5	0	1	0.5	-1	2	1	-1	
$\min$	-0.5	-0.5	-0.5	0	0.5	-1	1	0	-1	

База данных содержащая значения конуса возможных решений в узлах сетки выглядит следующим образом:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\max$	5	7	8.5	8.5	9.5	10	9	11	12	11
$\min$	2	1.5	1	0.5	0.5	1	0	1	1	0

На рисунке 2.2 изображен конус возможных решений для этой базы данных. В данном примере вектор-функция $x(t)$ заданная первой строкой базы данных совпадает с нижней границе конуса.



Р и с у н о к 2.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воскресенский Е. В.* Оптимальные программные движения управляемых дифференциальных включений // Труды СВМО, 2007. — Т. 9, № 1. — С. 11–17.
2. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М. : Физматлит, 2003. — С. 265–288.

© O. E. Kaledin³, L. A. Sukharev⁴

Abstract. We determined the cone of possible solutions for the database and shows how to build on the unmanaged area by broken.

Key Words: the cone of possible solutions, differential inclusions, database.

REFERENCES

1. *Voskresensky E. V.* Optimal software movement controlled differential inclusions// Trudy MVMS, 2007. — V. 9, № 1. — P. 11–17.
2. *Phillipov A. P.* Differential equation with discontinuous right side and differential inclusions // Non-linear analysis and nonlinear differential equations. — M. : Phizmatlit, 2003. — P. 265–288.

³Programmer of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; kaledinoe@gmail.com.

⁴Head of Algebra and Geometry Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; suharev_la@mail.ru.

УДК 519.6..517.977.58

Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения в произвольной выпуклой области с управлениями в коэффициенте нелинейного члена и правой части

© Ф. В. Лубышев¹, А. Р. Манапова²

Аннотация. Излагается метод разностной аппроксимации и регуляризации нелинейной задачи оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с граничными условиями Дирихле в произвольной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, несамосопряженный оператор, разностная аппроксимация, регуляризация, выпуклая область, функционал, минимизирующая последовательность.

1. Введение

В данной работе рассматривается нелинейная задача оптимального управления. Управляемые процессы описываются первой краевой задачей для несамосопряженного уравнения эллиптического типа в произвольной выпуклой области. Управления содержатся в коэффициенте нелинейного члена и правой части уравнения состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации исходных экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций.

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклая область произвольной формы с границей Γ , принадлежащей классу C^2 . Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей для несамосопряженного эллиптического уравнения в области Ω :

$$Lu = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Будем предполагать, что $k_{\alpha}, b_{\alpha}, q$, $\alpha = 1, 2$ – заданные функции; $g = (g_1, g_2) = (f, d) \in B = L_2(\Omega) \times L_{\infty}(\Omega)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_{\alpha} \in W_{\infty}^1(\Omega)$ и $k_{\alpha}(\xi) \geq \nu > 0$, $\alpha = 1, 2$, $\xi \in \Omega$, $b_{\alpha} \in L_{\infty}(\Omega)$: $\zeta_{\alpha} \leq b_{\alpha}(\xi) \leq \bar{\zeta}_{\alpha}$ п.в. на Ω , $\alpha = 1, 2$; q определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $q(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq [q(s_1) - q(s_2)]/(s_1 - s_2) \leq L_q < \infty$, для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$.

¹Профессор кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

²Доцент кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

Поставим следующую задачу: на решениях задачи (2.1), отвечающих всевозможным допустимым управлениям

$$g \in \prod_{k=1}^2 U_k = U \subset B = L_2(\Omega) \times L_\infty(\Omega), \quad U_1 = \{f \in L_2(\Omega) : \zeta_3 \leq f(\xi) \leq \bar{\zeta}_3 \text{ п.в. на } \Omega\} \quad (2.2)$$

или

$$U_1 = \{f \in L_2(\Omega) : \|f\| \leq R\}, \quad (2.3)$$

$$U_2 = \{d \in L_\infty(\Omega) : \zeta_4 \leq d(\xi) \leq \bar{\zeta}_4 \text{ п.в. на } \Omega\},$$

минимизировать функционал

$$J(g) = \int_{\Omega} |u(\xi, g) - u_0(\xi)|^2 d\Omega. \quad (2.4)$$

Здесь $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ - заданная функция, а $R, \nu, \zeta_k, \bar{\zeta}_k, k = \overline{1, 4}$ - заданные числа, $R > 0$; п.в. - почти всюду.

Предполагается выполнение следующих условий:

$$-m \leq \zeta_1 \leq \bar{\zeta}_1 \leq m, \quad -q \leq \zeta_2 \leq \bar{\zeta}_2 \leq q, \quad m, q = \text{const} > 0;$$

$$\zeta_k \leq \bar{\zeta}_k, \quad \zeta_k, \bar{\zeta}_k = \text{const}, k = 3, 4;$$

$$\delta_0 = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0; \quad D = \text{diam } \Omega. \quad (2.5)$$

Под решением задачи (2.1) при фиксированном управлении $g \in U$ понимается функция $u \equiv u(g) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \equiv V$, удовлетворяющая для $\forall \eta \in V$ тождеству

$$A(u, \eta) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right\} d\Omega = \int_{\Omega} f(\xi) \eta d\Omega = l(\eta). \quad (2.6)$$

При сделанных предположениях задача (2.1) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ при каждом фиксированном управлении $g \in U$ (см. [1]). Из результатов в [1] следует, что обобщенное (из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$) решение задачи (2.1) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и для любого $g \in U$ справедлива априорная оценка

$$\|u(g)\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Через C здесь и в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления g , шагов вводимых далее сеток и от сеточного управления $\Phi_h \in U_h$; $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Отметим, что выполнение условия (2.5) гарантирует коэрцитивность билинейной формы $A(u, \eta)$ на $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (см. также [1], [2]).

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполнены все условия при постановке задачи оптимального управления (2.1) - (2.4). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи (2.1) - (2.4), т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$, множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ слабо компактно в $H = L_2(\Omega)$. Любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$ слабо в H сходится к множеству U_* точек минимума функционала $J(g)$.

Отметим, что из теоремы 2.1. следует существование решения задачи (2.1) - (2.4), но решение этой задачи, вообще говоря, может быть не единственным.

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления рассмотрим вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач (2.1) - (2.4) последовательностями конечномерных задач оптимального управления. В области $\bar{\Omega}$ построим сетку $\bar{\omega}$. Для этого проведем построения, аналогичные построениям в [3] - [6]. Введем новое скалярное произведение на множестве сеточных функций H'_{*h} , определенных в потоковых узлах $x' = x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ (см. там же)

$$(v, \eta)' = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x \in \omega'_\alpha} v(x') z(x') h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha}$$

и определим на множестве $\overset{\circ}{H}_{*h}$ гильбертовы пространства $L_2(\omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ сеточных функций с нормами

$$\|y\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(y, y)_0} = \left(\sum_{x \in \omega} y^2(x) \text{mes } e(x) \right)^{1/2}, \quad \|y\|_{*,\omega} = \sqrt{(y, y)_*},$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)}^2 = \|\nabla_h y\|_{L_2(\omega')}^2 + \|y\|_{L_2(\omega)}^2,$$

где сеточная функция $v = \nabla_h y \in H'_{*h}$ такая, что $v(x') = \nabla_h y(x') = y_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)}$ при $x' = x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ и $\|\nabla_h y\|_{L_2(\omega')}^2 = (\nabla_h y, \nabla_h y)'$; так что

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x' \in \omega'_\alpha} [y_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)}]^2 h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} + \sum_{x \in \omega} y^2(x) \text{mes } e(x).$$

Через $C(\omega)$ обозначим линейное пространство сеточных функций $y(x)$, заданных на сетке ω с нормой

$$\|y\|_{C(\omega)} = \max_{\omega} |y(x)|.$$

Задаче оптимального управления (2.1) - (2.4) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \omega} |y(x; \Phi_h) - u_0^h(x)|^2 \text{mes } e(x), \quad (3.1)$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) = y(x; \Phi_h) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ сумматорному тождеству

$$A_h(y, v) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x' \in \omega'_\alpha} a_\alpha^{(+0.5\alpha)}(x) y_{\bar{x}_\alpha}^{(+0.5\alpha)} v_{\bar{x}_\alpha}^{(+0.5\alpha)} h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} + \\ + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} b_\alpha^h(x) y_{x_\alpha}^\circ v \text{mes } e(x) + \sum_{\omega} d^h(x) q(y) v \text{mes } e(x) = \sum_{\omega} \Phi_h(x) v \text{mes } e(x) = l_h(v), \quad (3.2)$$

а сеточное управление $\Phi_h(x)$ таково, что

$$\Phi_h(x) \in \prod_{k=1}^2 U_{kh} = U_h \subset B_h = L_2(\omega) \times L_\infty(\omega), \quad U_{1h} = \{\Phi_{1h}(x) \in L_2(\omega) : \zeta_3 \leq \Phi_h(x) \leq \bar{\zeta}_3\}, \quad (3.3)$$

или

$$U_{1h} = \{\Phi_{1h}(x) \in L_2(\omega) : \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)} \leq R\}. \quad (3.4)$$

$$U_{2h} = \{\Phi_{2h}(x) \in L_\infty(\omega) : \zeta_4 \leq \Phi_h(x) \leq \bar{\zeta}_4\}$$

Здесь $\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2$ - сеточные аппроксимации функций $k_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2$, $\xi \in \Omega$ в потоковых точках $x' = x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, определяемые по формулам:

$$a_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}(x) = \frac{1}{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}} \int_{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}} k_\alpha(\xi) dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} \neq 0, \\ a_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}(x) = \frac{1}{\Delta l} \int_{\Delta l}^{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}} k_\alpha(\xi) dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} = 0, \quad (3.5)$$

а $u_0^h(x)$ - сеточная аппроксимация для $u_0(\xi)$, вычисляемая по формуле

$$u_0^h(x) = \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{\text{mes } e(x)} u_0(\xi) d\xi, \quad x \in \omega. \quad (3.6)$$

Функции $\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}(x)$ вычисляются с помощью криволинейных интегралов первого рода вдоль $l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}$ и Δl , целиком лежащих в $\bar{\Omega}$.

Ниже всюду будем предполагать, что выполняется условие

$$\delta_0 = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \sigma}} \left\{ \frac{\nu - \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0, \quad (3.7)$$

$\sigma = \nu/\beta$, $\beta = h_1/h_1^* + h_2/h_2^*$, $h_\alpha^* = \min_{x \in \bar{\omega}} h_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, из которого следует справедливость условия (2.5).

Т е о р е м а 3.1. Задача о нахождении решения разностной схемы (3.2) при фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$ эквивалентна решению операторного уравнения $A_h u = F_h$, где оператор A_h и сеточная функция F_h определяются равенствами

$$(A_h u, v)_{W_2^1(\omega)} = A_h(y, v), \quad (F_h, v)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega); \quad (3.8)$$

Задача (3.2) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ при каждом $\Phi_h \in U_h$ и имеет место априорная оценка

$$\|y(\Phi_h)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)}. \quad (3.9)$$

4. Оценки погрешности метода по состоянию, погрешности сеточного функционала, скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Получим представление для погрешности аппроксимации ψ_h схемы (3.2) при фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$, а также установим априорную оценку погрешности $z = y - u$ для любых управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$ на решениях $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$.

Пусть $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ - решение задачи (2.1), отвечающее управлению $g \in U$, а $y(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ - решение сеточной задачи (3.2), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) = y(x) - u(x)$ - погрешность метода по состоянию. Для функции $z(x)$ получим задачу: $A_h z = \psi_h$, $x \in \omega$, где оператор A_h определяется равенством (3.8), а $\psi_h = F_h - A_h u$ - погрешность аппроксимации разностной схемы (3.2) по состоянию определяется равенством

$$(\psi_h, v)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v) - A_h(u, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega). \quad (4.1)$$

Л е м м а 4.1. Пусть $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ и $y(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ - соответственно решения задач (2.1) и (3.2) при фиксированных управлениях $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$. Тогда погрешность аппроксимации схемы (3.2) по состоянию представима в виде

$$(\psi_h, v)_{W_2^1(\omega)} = -(\eta, \nabla v)' - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[(B_\alpha^{(+0.5\alpha)}, v)_0 + (B_\alpha^{(-0.5\alpha)}, v)_0 \right] + (Q_h, v)_0 + (D_h, v)_0, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \eta^{(\pm 0.5\alpha)} &= \eta^{(\pm 0.5\alpha)}(x) = (a_\alpha u_{x_\alpha})^{(\pm 0.5\alpha)} - W_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}, \text{ если } l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} = h_{3-\alpha}; \\ \eta^{(\pm 0.5\alpha)} &= (a_\alpha u_{x_\alpha})^{(\pm 0.5\alpha)} - W_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} + \left(1 - \frac{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}}{h_{3-\alpha}}\right) \left(W_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} - \widetilde{W}_\alpha\right), \text{ если } 0 < l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} < h_{3-\alpha}; \\ \eta^{(\pm 0.5\alpha)} &= (a_\alpha u_{x_\alpha})^{(\pm 0.5\alpha)} - \widetilde{W}_\alpha, \text{ если } l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} = 0; \\ \widetilde{W}_\alpha &= \frac{1}{\Delta l} \int_{\Delta l} k_\alpha(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha} dl; \quad W_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)} = \frac{1}{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}} \int_{l_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}} k_\alpha(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha} dl; \\ B_h^{(\pm 0.5\alpha)}(x) &= b_\alpha^h(x) u_{x_\alpha}^{(\pm 0.5\alpha)} - \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{e(x)} b_\alpha(\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha} d\xi, \quad \alpha = 1, 2; \\ Q_h(x) &= \Phi_{2h}(x) q(u) - \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{e(x)} g_2(\xi) q(u) d\xi; \\ D_h(\Phi_h, g, x) &= \Phi_{1h}(x) - \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{e(x)} g_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Л е м м а 4.2. Пусть $u(\xi) \in W_2^2(\Omega)$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u_{x_\alpha}^{(\pm 0.5\alpha)}\|_{L_2(\omega)} &\leq C \left[|h| \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u(\xi)\|_{W_2^1(\Omega)} \right], \quad \alpha = 1, 2, \\ \|u\|_{L_2(\omega)} &\leq C \left[|h|^2 \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)} + |h| \|u(\xi)\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

где через $|\cdot|_{W_2^k(\Omega)}$ обозначены полунормы в пространствах W_2^k , $k = 1, 2$.

Пусть $R_\omega^h g_k$, $k = 1, 2$ - дискретизации на сетке ω управлений g_k , $k = 1, 2$ по формулам

$$R_\omega^h g_k(x) = \frac{1}{mes e(x)} \int_{e(x)} g_k(t) dt_1 dt_2, \quad k = 1, 2. \quad (4.5)$$

Ясно, что если $g_k \in U_k$, где множества U_k имеют вид (2.2), то $R_\omega^h g_k \in U_{kh}$, где множества U_{kh} имеют вид (3.3).

Л е м м а 4.3. Пусть $k_\alpha(\xi)$, $b_\alpha(\xi)$, $g_\alpha(\xi) \in L_\infty(\Omega)$, $\alpha = 1, 2$, решение задачи (3.2) принадлежит классу $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\eta(x')\|_{L_2(\omega')} &\leq |h| \|k_\alpha(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)} \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \|B_h^{\pm 0.5\alpha(x)}\|_{L_2(\omega)} &\leq C |h| \|b_\alpha(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)} \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \|Q_h(x)\|_{L_2(\omega)} &\leq C \left[|h| \|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Phi_{2h} - R_\omega^h g_2\|_{C(\omega)} \right] \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

Т е о р е м а 4.1. Пусть $u(\xi) = u(\xi, g)$ и $y(x) = y(x, \Phi_h)$ - решения задач (2.1) - (2.4) и (3.2) соответственно. Тогда для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ справедлива оценка погрешности метода по состоянию

$$\begin{aligned} \|y(\Phi_h) - u(g)\|_{W_2^1(\omega)} &\leq C \left\{ \left[|h| \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^2 \|b_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} \right) + \|\Phi_{2h} - R_\omega^h g_2\|_{C(\omega)} \right] \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\Phi_{1h} - R_\omega^h g_1\|_{L_2(\omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя доказанные выше утверждения рассмотрим вопрос о сходимости аппроксимаций по функционалу и аргументу (управлению). В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки. Пусть $v(x)$ сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$. Введем в рассмотрение область $\Omega_0 = \bigcup_{x \in \omega} e(x) \subset \Omega$, образованную объединением площадок $e(x) \subset \Omega$ и построим кусочно-постоянное восполнение $\bar{v}(x)$ функции $v(x)$, $x \in \omega$ на Ω_0 , полагая $\bar{v}(t) = v(x)$, $t \in e(x)$, $x \in \omega$.

Л е м м а 4.4. Пусть $u_0(t) \in L_2(\Omega)$, $u(t) \in W_2^2(\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_0^h\|_{L_2(\omega)} &\leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|\bar{u}_0^h\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega_0)} &= \|u\|_{L_2(\omega)} \leq C \|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C |h| \|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если $u_0(t) \in W_2^1(\Omega)$, то справедлива оценка

$$\|u_0(t) - \bar{u}_0^h(t)\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C |h| \|u_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Оценку погрешности сеточного функционала устанавливает

Т е о р е м а 4.2. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ для погрешности сеточного функционала справедлива оценка

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq C \left\{ |h| + \|R_\omega^h g_1(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega)} + \|\Phi_{2h} - R_\omega^h g_2\|_{C(\omega)} \right\}, \quad (4.9)$$

где $C = \text{const} > 0$, не зависящая от h , y , u , Φ_h , g .

Определим кусочно-постоянные восполнения $P_h \Phi_{\alpha h}(t)$ сеточных управлений $\Phi_{\alpha h}$, $x \in \omega$, $\alpha = 1, 2$ на Ω (см. [4], [5]). Для этого рассмотрим расширенную область $\bar{\Omega}_h$ - объединение ячеек $e_0(x) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : x_\alpha - 0.5h_\alpha \leq \xi_\alpha \leq x_\alpha + 0.5h_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, $x \in R_h^2$, имеющих непустое пересечение с $\bar{\Omega}$; очевидно $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_h$. Узлы основной решетки R_h^2 , принадлежащие области $\Omega_{h*} = \bar{\Omega} \setminus \Omega_h$ будем обозначать через x^* , а множество всех таких узлов через ω^* . Пусть $x^* \in \omega^*$. Доопределим сеточную функцию $\Phi_{\alpha h}(x)$, заданную на ω в узлах $x^* \in \omega^*$, полагая $\Phi_{\alpha h}(x^*) = \Phi_{\alpha h}(x)$, где x , например, ближайший к x^* узел сетки ω . Затем построим кусочно-постоянное продолжение $P_h \Phi_{\alpha h}(t)$ сеточной функции $\Phi_h(x)$ на Ω_h , полагая

$$P_h \Phi_{\alpha h}(t) = \Phi_{\alpha h}(x), \quad t \in e_0(x), \quad e_0(x) \in \bar{\Omega}_h. \quad (4.10)$$

Сужение на Ω построенного продолжения будем называть кусочно-постоянным продолжением сеточного управления $\Phi_{\alpha h}$, $x \in \omega$ на Ω , за которым сохраним то же обозначение. Ясно, что если $U_{\alpha h}$ имеют вид (3.3), (3.4), то $P_h \Phi_{\alpha h}(x) \in U_\alpha$, где U_α имеют вид (2.2), (2.3).

Л е м м а 4.5. Пусть $P_h \Phi_{\alpha h}(t)$ - кусочно-постоянные восполнения на Ω сеточных управлений $\Phi_{\alpha h}(x) \in U_{\alpha h}$, определяемые по формуле (4.10), где $U_{\alpha h}$ имеют вид (3.3), (3.4). Тогда справедливы оценки

$$\|P_h \Phi_{\alpha h}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|\Phi_{\alpha h}(x)\|_{L_2(\omega)}^2 + \gamma_h, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.11)$$

где $\gamma_h = O(|h|)$ при $|h| \rightarrow 0$.

Л е м м а 4.6. Пусть $P_{1h} \Phi_{1h}(t)$ - кусочно-постоянное восполнение на Ω сеточного управления $\Phi_{1h}(x) \in U_{1h}$, определяемое по формуле

$$P_{1h} \Phi_{1h}(t) = \begin{cases} \Phi_{1h}(x), & \text{если } t \in e(x), \quad x \in \omega \subset \Omega, \\ 0, & \text{если } t \in \Omega \setminus \Omega_0, \quad \Omega_0 = \bigcup_{x \in \omega} e(x). \end{cases} \quad (4.12)$$

а $R_\omega^h g_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$ - дискретизации на сетке ω управлений $g_\alpha(t)$ по формуле (4.5). Тогда справедливы оценки

$$\|P_{1h} \Phi_{1h}(t)\|_{L_2(\Omega)} = \|\Phi_{1h}(x)\|_{L_2(\omega)}, \quad \|R_\omega^h g_\alpha(x)\|_{L_2(\omega)} \leq \|g_\alpha(t)\|_{L_2(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.13)$$

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задачи (2.1) - (2.4) по функционалу и управлению рассмотрим при $|h| \rightarrow 0$ последовательность разностных задач минимизации (3.1) - (3.6). Будем допускать, что вычисления функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно и приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$ связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \Theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\Theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h; \quad \delta \rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0. \quad (4.14)$$

Предположим теперь, что при каждом h и соответствующей сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h\delta_h*} + \varepsilon_h$ нижней грани $J_{h\delta_h*}$ функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h при условиях (3.2) – (3.6) и найдено сеточное управление $\hat{\Phi}_h(x) = \Phi_{h\delta_h\varepsilon_h}$, такое что

$$J_{h\delta_h*} \leq J_{h\delta_h}(\hat{\Phi}_h) \leq J_{h\delta_h*} + \varepsilon_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (4.15)$$

где $\varepsilon_h \geq 0$ и $\varepsilon_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

Определим отображения $\tilde{R}_\omega^h : B \rightarrow B_h$ и $\tilde{P}^h : B_h \rightarrow B$ по правилу: $\tilde{R}_\omega^h g = \Phi_h$, где $g = (g_1, g_2)$, $\Phi_h = (R_\omega^h g_1, R_\omega^h g_2)$; $\tilde{P}^h \Phi_h = g$, где $\Phi_h = (\Phi_{1h}, \Phi_{2h})$, $g = (P_{*h}\Phi_{1h}(t), P_{*h}\Phi_{2h}(t))$, причем $P_{*h} = P_{1h}$, если берутся ограничения (2.3) и (3.4) и $P_{*h} = P_h$, если берутся ограничения (2.2) и (3.3). Отображения P_h , P_{1h} , R_ω^h определены формулами (4.10), (4.12), (4.5). Нетрудно видеть, что если $g \in U$, $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, то $\tilde{R}_\omega^h g \in U_h$, $\tilde{P}^h \Phi_h \in U$.

Л е м м а 4.7. Пусть $g \in U$, $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления. Тогда справедливы оценки

$$|J(g) - J_h(\tilde{R}_\omega^h g)| \leq C|h|, \quad |J(\tilde{P}^h \Phi_h) - J_h(\Phi_h)| \leq C|h|.$$

Т е о р е м а 4.3. Семейство разностных задач минимизации (4.14), (3.1) – (3.6) при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует экстремальную задачу (2.1) – (2.4) по функционалу, т.е. $\lim J_{h\delta_h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причем справедливы оценки скорости сходимости

$$|J_{h\delta_h*} - J_*| \leq |J_{h*} - J_*| + \delta_h \leq C|h| + \delta_h;$$

если последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\} \in U_h$ определена из условий (4.15), то последовательность сеточных управлений $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (2.1) – (2.4) и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \varepsilon_h + \delta_h);$$

последовательность $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$ слабо в $H = L_2(\Omega)$ сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений задачи (2.1) – (2.4).

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению). Из теоремы 4.3. следует, что для построения минимизирующих последовательностей в исходной экстремальной задаче (2.1) – (2.4) можно использовать конечномерную задачу минимизации (3.1) – (3.6). В силу же теоремы 2.1. экстремальная задача (2.1) – (2.4) корректно поставлена в слабой топологии пространства H . Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства H . Следовательно, нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 4.3.) для $J(g)$ на U будет сходящейся по норме H ко множеству U_* . Для построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности проведем регуляризацию конечномерных задач (3.1) – (3.6) по методу регуляризации А.Н. Тихонова (см. [7], [8]).

Введем на U стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом h рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (4.14), (3.1) – (3.6):

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h \Omega(\Phi_h), \quad \Phi_h \in U_h, \quad (4.16)$$

где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \rightarrow 0$. При каждом h определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (4.17)$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Пусть $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}$ – множество Ω -нормальных решений задачи (2.1)–(2.4). Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.1)–(2.4) и функционалы $J(g)$, $\Omega(g)$ – слабо полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H , то $U_{**} \neq \emptyset$ (см. [7]).

Т е о р е м а 4.4. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\}$ определена из условий (4.16), (4.17). Тогда последовательность $\{\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (2.1)–(2.4) и справедлива оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J(\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h);$$

если последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ удовлетворяют условиям $\alpha_h, \delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, причем $\{\alpha_h\}$ стремится к нулю согласовано с величинами $|h|$, δ_h, ν_h так, что $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$ сильно в H сходится к множеству U_{**} и $\lim \Omega(\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h) = \Omega_*$ при $|h| \rightarrow 0$.

Полученные результаты не зависят от конкретного метода решения разностных задач минимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1973.
2. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во Арм. ССР, 1979.
3. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.
4. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1991. Т. 31. №1. С. 17-30.
5. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БГУ, 1999.
6. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области // Т. СВМО, 2009, Т.11, №1. С. 133-144.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Approximation and regularization of optimal controlling problem for not self-adjoint elliptic equation in arbitrary convex domain with controls involved in the coefficient of non-linear component and the second member of equation

© F. V. Lubyshev³, A. R. Manapova⁴

Abstract. Method of difference approximation and regularization of nonlinear optimal controlling problem for non self-adjoint elliptic equation with Dirichlet boundary conditions in arbitrary convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is stated.

Key Words: optimal control, elliptic equation, non self-adjoint operator, difference approximation, regularization, convex domain, functional, minimizing sequence.

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973.
2. Oganessian L.A., Ruhovez L.A. Variation and difference methods of elliptic equations solving. Erevan: Isd-vo ASSR, 1979.
3. Samarskii A.A., Lazarov R.D. and Makarov V.L. Difference schemes for differential equations with generalized solutions. Moscow: Vysshaya Shkola, 1987.
4. Lubyshev F.V. Approximation and regularization of optimal controlling problems for not self-adjoint elliptic equation with variable coefficients // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1991. Vol.31. №1. PP.17-30.
5. Lubyshev F.V. Difference approximations of optimal control problems for systems governed by partial differential equations, Ufa: Bashkir State University, 1999.
6. Lubyshev F.V., Manapova A.R. On difference approximation of optimal control problem for elliptic equation in arbitrary domain // Proceedings of Middle Volga Mathematical Society, 2009. Vol. 11. №. 1. PP. 133-144.
7. Vasiliev F.V. Methods of optimization. Moscow: Factorial Press, 2002.
8. Tihonov A.N., Arsenin V.Y. Ill-posed problems-solving procedures. M.: Hayka, 1986.

³Professor of Computational Mathematics Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

⁴Associate professor of Computational Mathematics Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

УДК 517.9

Динамика диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности

© Т. М. Митрякова¹, О. В. Починка², А. Е. Шишенкова³

Аннотация. В настоящей работе описывается динамика диффеоморфизмов, заданных на ориентируемых поверхностях и имеющих конечное число модулей топологической сопряженности.

Ключевые слова: топологическая сопряженность, модули топологической сопряженности, орбиты гетероклинического касания, одностороннее касание.

1. Класс Φ диффеоморфизмов с конечным числом модулей топологической сопряженности

Для определения рассматриваемого класса диффеоморфизмов дадим необходимые определения.

Пусть M^2 — гладкое двумерное замкнутое ориентируемое многообразие и $f : M^2 \rightarrow M^2$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

Точка $x \in M^2$ называется *неблуждающей* для диффеоморфизма f , если для любой окрестности U_x точки x существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$. В противном случае, точка называется *блуждающей*. Частным случаем неблуждающей точки является неподвижная точка. Точка $x \in M^2$ называется *неподвижной* точкой диффеоморфизма f , если $f(x) = x$.

Неподвижная точка диффеоморфизма f является *гиперболической*, если все ее собственные значения по модулю отличны от единицы. При этом, гиперболическая неподвижная точка называется *стоком (источником)*, если все ее собственные значения по модулю меньше (больше) единицы; *седлом* — если одно собственное значение μ_p по модулю больше, а другое λ_p по модулю меньше единицы. Гиперболическая неподвижная точка $p \in \Omega_f$ имеет *инвариантные многообразия*:

устойчивое многообразие $W_p^s = \{x \in M^2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), p) = 0\}$,

неустойчивое многообразие $W_p^u = \{x \in M^2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), p) = 0\}$,

где d — метрика на M^2 . При этом $\dim W_p^s$ ($\dim W_p^u$) совпадает с числом собственных значений точки p , по модулю меньших (больших) единицы, $W_p^s = g^s(\mathbb{R}^{\dim W_p^s})$ ($W_p^u = g^u(\mathbb{R}^{\dim W_p^u})$), где $g^s : \mathbb{R}^{\dim W_p^s} \rightarrow M^2$ ($g^u : \mathbb{R}^{\dim W_p^u} \rightarrow M^2$) — инъективная иммерсия, то есть инъективное C^r -отображение, ранг матрицы Якоби которого в каждой точке равен $\dim W_p^s$ ($\dim W_p^u$). Кроме того, касательные пространства $T_p W_p^s$ и $T_p W_p^u$ имеют дополнительные размерности и касательное пространство $T_p M^2$ к многообразию M^2 в точке p натягивается на касательные пространства к W_p^s и к W_p^u , то есть имеет место равенство $T_p W_p^s \oplus T_p W_p^u = T_p M^2$. Компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *сепаратрисой*. Будем обозначать ее через ℓ_p^u (ℓ_p^s). Для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ будем обозначать через W_P^u (W_P^s) объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из множества P .

¹Ассистент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru.

²Доцент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

³Доцент, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

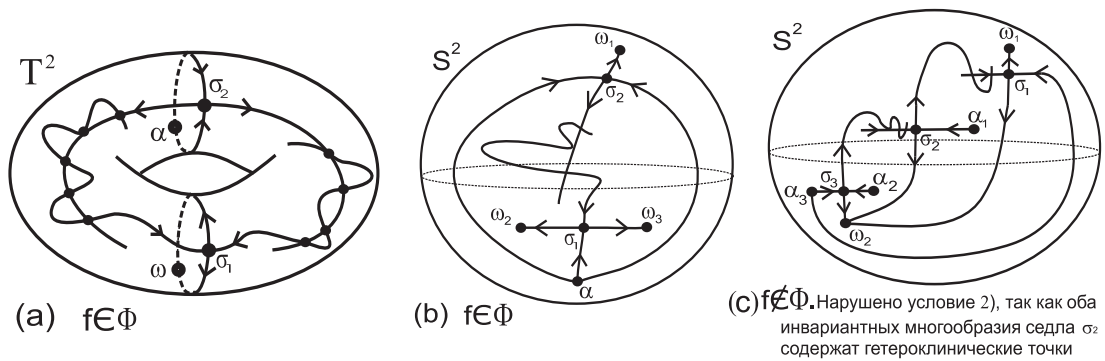
Пусть p, q – гиперболические седловые периодические точки диффеоморфизма f такие, что пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто. Точка $x \in W_p^s \cap W_q^u$, отличная от p и от q называется *гетероклинической точкой* диффеоморфизма f , если $p \neq q$ и называется *гомоклинической точкой* диффеоморфизма f , если $p = q$. Орбита гетероклинической (гомоклинической) точки называется *гетероклинической (гомоклинической) орбитой*. Гетероклиническая (гомоклиническая) точка может быть точкой трансверсального или нетрансверсального пересечения в следующем смысле.

Два гладких подмногообразия N_1, N_2 многообразия M^2 пересекаются *трансверсально* в точке $x \in (N_1 \cap N_2)$, если $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M^2$. В противном случае, пересечение в точке x называется нетрансверсальным пересечением (касанием).

Точка касания x двух гладких одномерных подмногообразий N_1, N_2 многообразия M^2 называется точкой *одностороннего касания*, если существует окрестность V_x точки x такая, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$.

В работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $f \in \text{Diff}^r(M^2)$, $r \geq 2$, заданных на гладком двумерном замкнутом ориентируемом многообразии M^2 и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек и собственные значения λ_p, μ_p любой седловой точки $p \in \Omega_f$ удовлетворяют условиям $0 < \lambda_p < 1 < \mu_p$;
- 2) если $(W_p^s \setminus p) \cap (W_q^u \setminus q) \neq \emptyset$ для седловых точек $p, q \in \Omega_f$, то $p \neq q$ и для любого седла $r \in \Omega_f$ (включая p и q) $(W_r^s \setminus r) \cap (W_p^u \setminus p) = \emptyset$ и $(W_q^s \setminus q) \cap (W_r^u \setminus r) = \emptyset$;
- 3) блуждающее множество f содержит конечное число орбит гетероклинического касания.



Р и с у н о к 1.1

Примеры фазовых портретов диффеоморфизмов поверхностей

На рисунке 1.1 изображены примеры фазовых портретов диффеоморфизмов сферы S^2 и тора T^2 . Диффеоморфизмы на рисунках 1.1 (a), 1.1 (b) принадлежат классу Φ , а на рисунке 1.1 (c) — не принадлежит классу Φ , поскольку нарушается условие 2). Согласно работам [3], [4], диффеоморфизмы класса Φ имеют конечное число модулей топологической сопряженности, то есть в некоторой окрестности диффеоморфизма f множество классов эквивалентности возможно описать с помощью конечного числа параметров (минимально возможное число таких параметров и называют *числом модулей топологической сопряженности (модальностью) диффеоморфизма f*).

З а м е ч а н и е 1.1. Так как $f \in \Psi$ является C^2 -диффеоморфизмом 2-многообразия M^2 , то из теоремы Белицкого (см. [1] или [7], теорема 3.20) следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки p диффеоморфизм f гладко сопряжен посредством C^1 -диффеоморфизма своей линейной части.

2. Динамика диффеоморфизмов класса Φ

П р е д л о ж е н и е 2.1. Диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: f имеет гомоклиническую точку x . По определению класса Φ , неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек. По определению гомоклинической точки, x не является периодической точкой, в частности, она не является неподвижной точкой. С другой стороны, любая гомоклиническая точка является неблуждающей. Получили противоречие определению класса диффеоморфизмов Φ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Пусть σ — гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$, $r \in (W_\sigma^s \setminus \sigma)$ и $U_r \subset W_\sigma^s$ — окрестность точки r . Тогда для любой последовательности точек $\{r_n\} \subset (M^2 \setminus U_r)$, сходящейся к точке r , существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка $q \in (W_\sigma^u \setminus \sigma)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейный диффеоморфизм, заданный формулой $a(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Тогда начало координат O является неподвижной гиперболической седловой точкой с неустойчивым многообразием $W_O^u = Ox$ и устойчивым многообразием $W_O^s = Oy$ для диффеоморфизма a .

Согласно теореме 5.5 [5] существуют окрестности $V_\sigma \subset M^2$, $V_O \subset \mathbb{R}^2$ точек σ , O , соответственно, и гомеоморфизм $\psi : V_\sigma \rightarrow V_O$ такой, что $\psi(f(x)) = a(\psi(x))$ для любого $x \in (V_\sigma \cap f(V_\sigma))$. Не уменьшая общности можно считать, что $\{r_n\} \subset (V_\sigma \cap f(V_\sigma))$ и $\{(x, y) : (x^2 + y^2) \leq 4\} \subset (V_O \cap a(V_O))$.

Положим $\psi(r_n) = ((r_n)_x, (r_n)_y)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное целое число m_n такое, что $1 \leq 4^{m_n} ((r_n)_x^2 + (r_n)_y^2) < 4$. Положим $q_n = a^{m_n}(r_n)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \in (W_O^s \setminus \{O\})$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)_x = 0$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$. Кроме того, последовательность $\{(r_n)_y\}$ ограничена и, следовательно, $(q_n)_y = (\frac{1}{2})^{m_n} (r_n)_y \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, координаты точек q_n удовлетворяют следующим условиям $1 \leq (q_n)_x < 4$ и $(q_n)_y \rightarrow 0$, то есть точки q_n лежат внутри некоторого компактного множества. Так как для любой последовательности, заданной на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность, то существует подпоследовательность $\{m_{n_j}\}$ последовательности $\{m_n\}$ и точка $q \in (W_O^u \setminus \{O\})$ такие, что $\lim_{j \rightarrow \infty} q_{n_j} = q$. Положим $\{m_{n_j}\} = \{k_j\}$. Тогда $r_{n_j} = \psi^{-1}(a^{-k_j}(q_{n_j}))$ — искомая подпоследовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 2.1. Пусть $f \in \Phi$. Тогда:

$$1) M^2 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u \quad (*);$$

2) W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 для каждой точки $p \in \Omega_f$ и $f|_{W_p^u}$ сопряжено с сохраняющим ориентацию линейным растяжением;

3) если $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$, то $x \in W_r^u$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$ такой, что $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$ для любой точки $p \in \Omega_f$, в частности, если ℓ_p^u не имеет гетероклинических пересечений для седловой точки p , то $cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) = \{\omega\}$, где ω — стоковая периодическая точка.

Доказательство.

1) Так как неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in \Phi$ конечно и гиперболично, то соотношение (*) следует из теоремы 2.3 работы [6].

2) Пусть $p \in \Omega_f$. Докажем, что W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 .

Если точка $p \in \Omega_f$ — источник, то $\dim W_p^u = \dim M^2 = 2$ и W_p^u — открыто. Следовательно, W_p^u — гладкое подмногообразие.

Если точка $p \in \Omega_f$ — сток, то $\dim W_p^u = 0$. Следовательно, W_p^u — гладкое подмногообразие.

Пусть $p \in \Omega_f$ — седловая точка диффеоморфизма $f \in \Phi$. Покажем, что W_p^u является гладким подмногообразием M^2 , диффеоморфным $\mathbb{R}^1$. Пусть $x \in W_p^u$ и $N_x \subset W_p^u$ — компактное множество, содержащее x . Тогда, существует карта $\psi: U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такая, что $\psi(U_x \cap N_x) = \mathbb{R}^1$. Предположим противное: W_p^u не является гладким подмногообразием M^2 . Тогда $(U_x \setminus N_x) \cap W_p^u \neq \emptyset$ для любой карты $\psi: U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такой, что $\psi(U_x \cap N_x) = \mathbb{R}^1$. Следовательно, существует последовательность $\{x_n\} \subset (W_p^u \setminus N_x)$ такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow +\infty$. Из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка $y \in W_p^s$ такие, что последовательность точек $\{y_j = f^{-k_j}(x_{n_j})\}$ сходится к точке y . Так как $M^2 = \bigcup_{q \in \Omega_f} W_q^u$, то $y \in W_q^u$ для некоторой точки $q \in \Omega_f$. Рассмотрим три

возможных случая: (а) q — источник, (б) q — сток, (с) q — седло.

(а) Если q — источник, то $y_j \in W_q^u$ для всех j , начиная с некоторого. Следовательно, $p = q$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (а) невозможен.

(б) Если q — сток, то $W_q^u = q$, $y = q$. Следовательно $q \in W_p^s$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (б) невозможен.

(с) Если q — седло, то точка q не может совпадать с точкой p , так как согласно предложению 2.1. диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек. Следовательно, из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_i}\}$, последовательность целых чисел $m_i \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_q^s$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_i}(y_{j_i})\}$ сходится к точке z . Повторяя вышеприведенные рассуждения, мы получим, что W_q^s и W_q^u содержат гетероклинические точки. Получили противоречие с условием 2) определения класса Φ , откуда следует, что случай (с) невозможен.

Таким образом, W_p^u — гладкое подмногообразие многообразия M^2 для каждой точки $p \in \Omega_f$.

3) Докажем, что если $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$, то $x \in W_r^u$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$ такой, что $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$.

Пусть $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$. Тогда существует последовательность $\{x_k\} \subset \ell_p^u$ такая, что $d(x_k, x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. В силу соотношения (*), $x \in W_r^u$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$. Рассмотрим три возможных случая: (а) r — источник, (б) r — сток, (с) r — седло.

(а) Если r — источник, то $x_k \in W_r^u$ для всех k , начиная с некоторого. Откуда $p = r$, $\ell_p^u \cup p = W_r^u$ и из условия $x \in (cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p))$ следует, что $x \notin W_r^u$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (а) невозможен.

(b) Если r — сток, то $W_r^u = r$, $x = r$ и $x_k \in W_r^s$ для всех k , начиная с некоторого. Следовательно $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$, то есть импликация верна.

(c) Если r — седло, то, согласно пункту 2) настоящей теоремы, $r \neq p$. Тогда, согласно предложению 2.2., существует подпоследовательность x_{k_j} , последовательность целых чисел $m_j \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_r^s$ такие, что последовательность точек $z_j = f^{-m_j}(x_{k_j})$ сходится к точке z . Так как, согласно соотношению (*), $M^2 = \bigcup_{q \in \Omega_f} W_q^u$, то $z \in W_q^u$ для

некоторой точки $q \in \Omega_f$. Рассмотрим три возможных случая: (1) q — источник, (2) q — сток, (3) q — седло.

(1) Если q — источник, то $z_j \in W_q^u$ для всех j , начиная с некоторого. Следовательно, $q = p$ и p — источник. Получили, что $\ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset$, то есть импликация верна.

(2) Если q — сток, то $W_q^u = q$, $z = q$. Следовательно, $q \in W_r^s$. Получили противоречие, откуда следует, что случай (2) невозможен.

(3) Если q — седло, то точка q не может совпадать с точкой r , так как, согласно предложению 2.1., диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек, и $q \neq p$ в силу пункта 2) настоящей теоремы. Из предложения 2.2. следует, что существует подпоследовательность $\{z_{j_i}\}$, последовательность целых чисел $m_i \rightarrow +\infty$ и точка $y \in W_q^s$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_i}(z_{j_i})\}$ сходится к точке y и $y \in W_t^u$ для некоторой точки $t \in \Omega_f$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, мы получим, что точка t — седло, что противоречит условию 2) определения класса Φ . Следовательно, случай (3) для точки t невозможен.

В частности, если ℓ_p^u не имеет гетероклинических пересечений для седловой точки p , то $cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) \subset \bigcup_{r \in \Omega_f: \ell_r^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$. При этом точка r не может быть седловой, так как ℓ_p^u

не имеет гетероклинических пересечений и не может быть источниковой, так как в этом случае $W_r^s = r$. Таким образом, $\ell_p^u \subset \bigcup_{\omega \in \Delta_f^s} W_\omega^s$, где Δ_f^s — подмножество множества Ω_f ,

состоящее из стоков. Поскольку сепаратриса ℓ_p^u связна, то существует единственный сток ω такой, что $\ell_p^u \subset W_\omega^s$ и, следовательно, $cl(\ell_p^u) = \ell_p^u \cup \{p, \omega\}$.

Доказательство закончено.

Обозначим через Δ_f^u (Δ_f^s) — подмножество множества Ω_f , состоящее из источников (стоков). Положим $\Delta_f = \Delta_f^u \cup \Delta_f^s$. Обозначим через Σ_f подмножество множества Ω_f , состоящее из всех седловых точек; через Σ_f^s — подмножество множества Σ_f , состоящее из седловых точек, устойчивые многообразия которых содержат гетероклинические точки.

Заметим, что если $\Sigma_f = \emptyset$, то неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одного стока и одного источника, объемлющее многообразие M^2 гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^2$, и все диффеоморфизмы "источник-сток" сопряжены между собой. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что множество Σ_f не пусто. Положим $\Sigma_f^u = \Sigma_f \setminus \Sigma_f^s$. Так как, согласно теореме 2.1., $M^2 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$, то, следовательно, множество Δ_f^u (Δ_f^s)

непусто. Положим

$$\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W_{\Sigma_f^u}^u \cup W_{\Sigma_f^s}^s \cup \Delta_f).$$

Для диффеоморфизма f группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ является бесконечной циклической группой. Действие группы диффеоморфизмов F на множестве $\mathcal{M}_f$ называется *свободным*, если $f^n(x) \neq x$ для любого $x \in \mathcal{M}_f$ и любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Действие группы диффеоморфизмов F на множестве $\mathcal{M}_f$ называется *разрывным*, если для каждого компактного подмножества $K \subset \mathcal{M}_f$ множество элементов $f^n \in F$ таких, что $f^n(K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

Замкнутое множество $\Lambda \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, если Λ имеет компактную окрестность $U \neq M^n$ такую, что $f(U) \subset \text{int } U$ и

$\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U)$. Множество называется *репеллером* диффеоморфизма f , если оно является аттрактором для f^{-1} .

Для доказательства теоремы 2.2. нам понадобится следующая техническая лемма.

Л е м м а 2.1. Пусть ω — гиперболический сток диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$ и L_ω — множество неустойчивых одномерных сепаратрис ℓ гиперболических седловых точек σ диффеоморфизма f таких, что $cl(\ell) = \ell \cup \sigma \cup \omega$. Тогда существует гладкий 2-диск $D_\omega \subset W_\omega^s$, содержащий ω и такой, что любая сепаратриса $\ell \in L_\omega$ пересекает ∂D_ω в единственной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B_0 — гладкий 2-диск такой, что $\omega \in B_0 \subset W_\omega^s$. В силу теоремы о трансверсальности, диск B_0 можно выбрать трансверсальным пучку сепаратрис L_ω . Обозначим через $\mathcal{C}_{B_0}$ совокупность всех компонент связности (являющихся гладкими дугами) множества $L_\omega \cap B_0$. Представим $\mathcal{C}_{B_0}$ в виде объединения двух непересекающихся подмножеств $\mathcal{C}_{B_0}^1, \mathcal{C}_{B_0}^2$, таких, что пересечение каждой дуги из $\mathcal{C}_{B_0}^1$ ($\mathcal{C}_{B_0}^2$) с окружностью ∂B_0 состоит в точности из одной точки (двух точек).

Заметим, что число элементов множества $\mathcal{C}_{B_0}^1$ равно числу сепаратрис из множества L_ω . Если $\mathcal{C}_{B_0}^2 = \emptyset$, то $D_\omega = B_0$ — искомый диск. В противном случае пронумеруем дуги множества $\mathcal{C}_{B_0}^2$: $c_1, \dots, c_k$ и построим гладкие 2-диски $B_1, \dots, B_k$ такие, что $\mathcal{C}_{B_i}^1 = \mathcal{C}_{B_0}^1$ и $\mathcal{C}_{B_i}^2 = \mathcal{C}_{B_0}^2 \setminus \{c_1, \dots, c_i\}$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $D_\omega = B_k$ будет искомым диском.

Построим 2-диск B_1 с требуемыми свойствами. Пусть A_1^1 и A_2^1 концевые точки дуги c_1 . Обозначим через $\tilde{c}_1$ замкнутую дугу окружности ∂B_0 с граничными точками A_1^1 и A_2^1 такую, что кривая $c_1 \cup \tilde{c}_1$ ограничивает на W_ω^s 2-диск d_1 , не содержащий точки ω (так как многообразие W_ω^s диффеоморфно $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, по теореме Шёнфлиса любая окружность, принадлежащая W_ω^s , ограничивает 2-диск). Тогда искомый диск B_1 получается сглаживанием углов и малым шевелением диска $B_0 \setminus \text{int } d_1$. Предполагая существование 2-диска B_{i-1} , аналогично вышесказанному устанавливается существование диска B_i для любого $i \in \{2, \dots, k\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 2.2. Для любого диффеоморфизма $f \in \Phi$

1) Множества $R_f = \Delta_f^u \cup W_{\Sigma_f^u}^s$ и $A_f = \Delta_f^s \cup W_{\Sigma_f^s}^u$ являются репеллером и аттрактором, соответственно.

2) Пространство $\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (R_f \cup A_f)$ состоит из конечного числа k_f компонент связности $\mathcal{M}_f^0, \dots, \mathcal{M}_f^{k_f-1}$, каждая из которых является f -инвариантной и группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на $\mathcal{M}_f^i$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_{k_f}$.

3) Для каждого многообразия $\mathcal{M}_f^i$, $i \in \mathbb{Z}_{k_f}$ существует гомеоморфизм $\nu_i : \mathcal{M}_f^i \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{\mathcal{M}_f^i}$ с гомотетией — отображением $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданным формулой $b(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Покажем, что множество A_f является аттрактором и имеет гладкую компактную окрестность $U_{A_f} \neq M^2$ такую, что $f(U_{A_f}) \subset \text{int } U_{A_f}$ и каждая компонента связности множества $f(U_{A_f}) \setminus \text{int } U_{A_f}$ диффеоморфна двумерному кольцу.

Пусть $\sigma \in \Sigma_f$. Согласно замечанию 1.1. существуют окрестности $U_\sigma \subset M^2$, $U_O \subset \mathbb{R}^2$ точек σ , O , соответственно, и гомеоморфизм $\psi : U_\sigma \rightarrow U_O$ такие, что в окрестности U_σ диффеоморфизм f гладко сопряжен своей линейной части. Пусть $H = \{(x, y) \in U_O : y^2 - x^2 \leq 1\}$, $\Gamma = \{(x, y) \in U_O : y^2 - x^2 = 1\}$, $H_\sigma = \psi_\sigma^{-1}(H)$ и $\Gamma_\sigma = \psi_\sigma^{-1}(\Gamma)$. Положим $H_{\Sigma_f^s} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^s} H_\sigma$ и $\Gamma_{\Sigma_f^s} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^s} \Gamma_\sigma$.

Пусть $\omega \in \Delta_f^s$. В силу сопряженности $f|_{W_\omega^s}$ с Df_ω для каждого ω (см., замечание 1.1.), существует гладкий 2-диск $D_\omega \subset W_\omega^s$ такой, что $f(D_\omega) \subset \text{int } D_\omega$. Положим $D_{\Delta_f^s} = \bigcup_{\omega \in \Delta_f^s} D_\omega$. Согласно лемме 2.1. $D_{\Delta_f^s}$ можно выбрать так, что любая сепаратриса из множества $W_{\Sigma_f^s}^u$ пересекает $\partial D_{\Delta_f^s}$ в единственной точке и $D_{\Delta_f^s}$ является гладким подмногообразием. В силу λ -леммы существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-n}(\partial D_{\Delta_f^s})$ трансверсально пересекает множество $\Gamma_{\Sigma_f^s}$. Положим $U_{A_f} = H_{\Sigma_f^s} \cup f^{-n}(D_{\Delta_f^s})$. По построению U_{A_f} является компактной окрестностью A_f гомеоморфной диску с дырами такой, что $A_f \subset f(U_{A_f}) \subset \text{int } U_{A_f}$ и $A_f = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(U_{A_f})$. Таким образом, множество A_f является аттрактором. По построению $U_{R_f} = M^2 \setminus \text{int } U_{A_f}$ — захватывающая окрестность U_{R_f} и, следовательно, R_f — репеллер.

2) Так как множество $W_{\Sigma_f^s}^u \cup W_{\Sigma_f^u}^s$ содержит ровно по одному инвариантному многообразию каждой седловой точки множества Σ_f и не содержит гетероклинических точек, то, по построению, множества R_f и A_f состоят из конечного числа попарно непересекающихся дуг и конечного числа точек, откуда следует, что множество $M^2 \setminus (R_f \cup A_f)$ является двумерным многообразием и состоит из конечного числа компонент связности. Обозначим их через $\mathcal{M}_f^0, \dots, \mathcal{M}_f^{k_f-1}$. Каждая компонента связности $\mathcal{M}_f^i$, $i \in \mathbb{Z}_{k_f}$ является f -инвариантной. Заметим, что $\mathcal{M}_f^i \cap \Omega_f = \emptyset$ и, следовательно, группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно на $\mathcal{M}_f^i$. Покажем, что F действует разрывно на $\mathcal{M}_f^i$.

По построению $\mathcal{M}_f = W_{A_f \cap \Omega_f}^s \setminus A_f = W_{R_f \cap \Omega_f}^u \setminus R_f$. Тогда, в силу пункта 1), для любого компактного множества $K \subset \mathcal{M}_f$ существует число $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset M^2 \setminus (f^{\mathcal{N}}(U_{A_f}) \cup f^{-\mathcal{N}}(U_{R_f}))$. Тогда $K \cap f^n(K) = \emptyset$ для любого $n : |n| > 2\mathcal{N}$.

3) Построенная в пункте 1) окрестность U_{A_f} аттрактора A_f гомотопически эквивалентна этому аттрактору. Следовательно, каждая компонента связности множества $U_{A_f} \setminus \text{int } f(U_{A_f})$ гомеоморфна двумерному кольцу. Кроме того, $U_{A_f} \setminus \text{int } f(U_{A_f})$ — фундаментальная область диффеоморфизма $f|_{\mathcal{M}_f}$ и каждая её компонента связности K_i является фундаментальной областью диффеоморфизма $f|_{\mathcal{M}_f^i}$ и диффеоморфна двумерному кольцу. Обозначим через $S_{1,i}$ и $S_{2,i} = f(S_{1,i})$ граничные окружности K_i . Фундаментальной областью диффеоморфизма $b|_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}}$ является кольцо $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ и $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = b(S_1)$ — его граничные окружности. Пусть $\hat{\nu}_{1,i} : S_{1,i} \rightarrow S_1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Положим $\hat{\nu}_{2,i}(t) = b^{-1}(\hat{\nu}_{1,i}(f(t)))$ для любого $t \in S_{2,i}$. Тогда, существует гомеоморфизм $\hat{\nu}_i : K_i \rightarrow K$ такой, что $\hat{\nu}_i|_{S_{1,i}} = \hat{\nu}_{1,i}$ и $\hat{\nu}_i|_{S_{2,i}} = \hat{\nu}_{2,i}$ (см., например, [2], глава 5, теорема 3.2). Тогда искомым гомеоморфизм определяется формулой $\nu_i(t) = b^{-m}(\hat{\nu}_i(f^m(t)))$, где $t \in \mathcal{M}_f^i$ и $f^m(t) \in K_i$.

Доказательство закончено.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и руководство, грант РФФИ номер 08-01-00547 за финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белицкий Г.Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. — Киев. Наукова думка. 1979. — 174 с.
2. Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство. — Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1966. 81. — 183 с.
3. Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. — Topology. 1980. 19. — Р. 9–21.

4. Melo W., Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli. – *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 1987. 7. – P. 415–462.
5. Палис Я., Мело В. Геометрическая теория динамических систем. – М. Мир. 1998.
6. Smale S. Differentiable dynamical systems. – *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. № 6. – P. 747–817. (Пер. на рус. яз.: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. – *УМН*. 1970. 25. № 1. – С. 113–185.)
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. – Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2003. – 428 с.

Dynamics of diffeomorphisms on surfaces with the finite number of topological conjugacy moduli

© T. V. Mitryakova⁴, O. V. Pochinka⁵, A. E. Shishenkova⁶

Abstract. In the present paper dynamics of diffeomorphisms on orientable surfaces with the finite number of moduli of topological conjugacy are described.

Key Words: topological conjugacy, moduli of topological conjugacy, orbits of heteroclinic tangency, one-sided tangency

REFERENCES

1. Belitskii G.R. Normal Forms, Invariants, and Local Mappings. – Kiev. Naukova Dumka. 1979.
2. Keldysh, L.: Topological embeddings in euclidean space. – M. Nauka. Proceedings of Math. Inst. V. A. Steklova. 1966. 81.
3. Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. – Topology. 1980. 19. – P. 9–21.
4. Melo W., Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli. – Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1987. 7. – P. 415–462.
5. Palis J., Melo W. Geometrical theory of dynamical systems. – Springer. New York Heidelberg Berlin. 1982.
6. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. № 6. – P. 747–817.
7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. – World Scientific. Singapur-London-Hong Kong. 2003. – 428 c.

⁴Assistant, Nizhnii Novgorod State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru.

⁵Assistant professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.

⁶Assistant professor, Nizhnii Novgorod State Agricultural Academy, Nizhnii Novgorod State; math@agri.sci-nnov.ru.

УДК 531.929

Об устойчивости движений систем с бесконечным запаздыванием

© С. В. Павликов¹

Аннотация. Исследуется устойчивость функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием на основе метода предельных уравнений с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова. Построение предельных уравнений проводится в специальном фазовом пространстве. Получены достаточные условия устойчивости стационарных движений эрмитарной механической системы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения с бесконечным запаздыванием, знакопостоянный функционал Ляпунова, предельные уравнения.

1. Основные определения. Предельные уравнения

Фазовое пространство функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием определим на основе аксиоматического подхода, разработанного в [1].

Пусть B есть действительное векторное пространство либо:

1) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо

2) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначим норму через $|\cdot|$. Предположим, что в пространстве B определена норма $\|\cdot\|_B$, такая, что пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ является банаховым.

Для функции $x : (-\infty, A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < A \leq +\infty$, определим функцию $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $s \leq 0$, для каждого $t \in [0, A)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. [2]. Пространство B называется допустимым, если существуют постоянные $K > 0$, $J > 0$ и непрерывная функция $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \leq a < A \leq \infty$. Если $x : (-\infty, A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$ справедливо:

B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $\|\cdot\|_B$;

B2) $\|x_t\|_B \leq K \max_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t-a)\|x_a\|_B$;

B3) $|\varphi(0)| \leq J\|\varphi\|_B$ для всех $\varphi \in B$;

B4) $M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Предположим, что если φ ограничена и непрерывна на $(-\infty, 0]$, то $\varphi \in B$ и все функции φ_{-t} , $t \geq 0$, ограничены по норме пространства B : $\|\varphi_{-t}\|_B \leq L$, для некоторого $L > 0$ (здесь $\varphi_{-t}(s) = \varphi(-t+s)$, $s \in (-\infty, 0]$).

П р и м е р 1.1. Простейшим случаем допустимого пространства является пространство $\mathbb{C}_{[-h, 0]}$ непрерывных на $[-h, 0]$ ($h = \text{const} > 0$) функций с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0)$.

¹Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; spravlikov@mail.ru.

Пример 1.2. [2]. Пусть $g : (-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$ есть непрерывная невозрастающая функция, такая, что:

$$g(0) = 1, \quad \frac{g(s+u)}{g(s)} \rightarrow 1$$

равномерно на $(-\infty, 0]$ при $u \rightarrow 0^-$;

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup_{s \leq 0} \frac{g(s)}{g(s-T)} = 0.$$

Обозначим через $\mathbb{C}_g$ пространство непрерывных функций φ , отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, таких, что:

$$\sup_{s \leq 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} < \infty.$$

Тогда пространство $\mathbb{C}_g$ с нормой:

$$\|\varphi\|_g = \|\varphi\|_{\mathbb{C}_g} = \sup_{s \leq 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)}$$

есть банахово пространство.

Рассмотрим следующее подпространство в $\mathbb{C}_g$:

$$UC_g = \{\varphi \in \mathbb{C}_g : \frac{\varphi}{g} \text{ равномерно непрерывна на } (-\infty, 0]\}.$$

Тогда UC_g есть допустимое пространство.

Частным случаем пространства $\mathbb{C}_g$ является пространство $\mathbb{C}_\gamma$ с $g(s) = e^{-\gamma s}$ для $\gamma > 0$. Пространство $\mathbb{C}_\gamma$ является допустимым.

Для произвольного $h > 0$ определим множество $B_h = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B < h\}$, $\bar{B}_h = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B \leq h\}$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (1.1)$$

Здесь f есть непрерывное отображение, определенное на множестве $\mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ для некоторого $0 < H \leq +\infty$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Для заданных $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in B_H$ назовем $x(t, \alpha, \varphi)$ решением (1.1), начинающееся в точке (α, φ) , если существует $\beta > \alpha$, такое, что $x(t, \alpha, \varphi)$ удовлетворяет (1.1) на $[\alpha, \beta]$ и $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$.

Если $f(t, \varphi)$ ограничено на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \bar{B}_h$, $|f(t, \varphi)| \leq m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{B}_h$, $0 < h < H$, тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1), определенное для $[-\infty, \beta]$ для некоторого $\beta > \alpha$ [2].

Будем также считать, что функция f удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset B_H$, т. е. существует $l = l(K)$, такое, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство:

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq l \|\varphi_2 - \varphi_1\|_B.$$

Тогда решение уравнения (1.1) будет единственным для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H$.

Определение 1.2. [3]. Функция $f(t, \varphi)$, определенная на $\mathbb{R} \times B$, имеет компактную оболочку, если для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R} \times B$ существует

последовательность $\{t_n\}$, $t_n \geq 0$, содержащая подпоследовательность $\{t_m\}$, такую, что последовательность $\{f(t + t_m, \varphi)\}$ равномерно сходится при $(t, \varphi) \in K$.

Оболочкой $H^+(f)$ является множество пар (f^*, Ω) , $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times B_H$, таких, что существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, для которой $\{f(t + t_n, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$, $(t, \varphi) \in \Omega$, при этом функция $f^* : \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется предельной к f .

Предположим, что для каждого компактного множества $K \subset B_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$, т. е. для любого $K \subset B_H$ для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых (t_1, φ_1) , $(t_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K$: $|t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K$: $\|\varphi_2 - \varphi_1\|_B < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon.$$

При условии ограниченности функции f и выполнения вышеуказанной равномерной непрерывности оболочка $H^+(f)$ будет компактной [3].

Для каждой пары $(f^*, \Omega) \in H^+(f)$ определим предельное уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t). \quad (1.2)$$

В силу того, что f удовлетворяет условию Липшица, решение уравнения (1.2) будет единственным для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \Omega$.

При определении взаимосвязи решений уравнений (1.1) и (1.2) будем пользоваться следующей леммой.

Л е м м а 1.1. [4]. Пусть $t_n \rightarrow +\infty$, последовательность $\{\varphi_n\} \in B_H$, $\varphi_n \rightarrow \varphi \in B_H$ при $n \rightarrow \infty$ и $x(t, t_n + \alpha, \varphi_n)$ есть решения системы (1.1). Тогда последовательность $\{x_t^n = x_{t+t_n}(t_n + \alpha, \varphi_n)\}$ содержится в некотором компакте $K \subset B_H$, и если функционал $f^*(t, \varphi)$ является предельным к $f(t, \varphi)$ относительно последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, $x^*(t, \alpha, \varphi)$ — решение системы (1.1), определенное на $(-\infty, \beta)$, то последовательность $\{x^n(t)\} = x(t + t_n, t_n + \alpha, \varphi_n)$ сходится к $x^*(t, \alpha, \varphi)$, а $x_t^n \rightarrow x_t^*$ равномерно по $t \in [\alpha, \gamma]$ для каждого $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha$. Положительное предельное множество $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ в пространстве B_H есть множество $\Omega^+ = \{\varphi^* \in B_H : \exists t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty, x_{t_n}(\alpha, \varphi) \rightarrow \varphi^* \text{ в допустимом пространстве } B \text{ при } n \rightarrow \infty\}$.

2. Теоремы об устойчивости

Исследуем задачу об устойчивости нулевого решения $x = 0$ системы (1.1) на основе знакопостоянного функционала Ляпунова.

О п р е д е л е н и е 2.1. Решение $x = 0$ уравнения (1.1) называется устойчивым в $\mathbb{R}^n$ (в B), если для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$, такое, что из неравенства $\|\varphi\|_B \leq \delta$ следует, что $|x(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ ($\|x_t(\alpha, \varphi)\|_B < \varepsilon$) для всех $t \geq \alpha$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Точка $x = 0$ является точкой притяжения решений уравнения (1.1) в $\mathbb{R}^n$ (в B), если для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}^+$ найдется $\eta = \eta(\alpha) > 0$, такое, что из неравенства $\|\varphi\|_B \leq \eta$ следует, что $x(t, \alpha, \varphi) \rightarrow 0$ ($\|x_t(\alpha, \varphi)\|_B \rightarrow 0$) при $t \rightarrow +\infty$.

О п р е д е л е н и е 2.3. Решение уравнения (1.1) $x = 0$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и является точкой притяжения (в $\mathbb{R}^n$ или в B).

Очевидно, что при ограниченном запаздывании определения устойчивости по отношению к нормам в $\mathbb{R}^n$ и в фазовом пространстве эквивалентны.

Л е м м а 2.1. [5]. Для допустимого пространства B определения 2.1–2.3 устойчивости в $\mathbb{R}^n$ и в B эквивалентны.

Функционалом Ляпунова назовем скалярную непрерывную функцию $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через $\omega(u)$ непрерывную, строго монотонно возрастающую функцию $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega(0) = 0$.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ – некоторое решение (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha$. Вдоль этого решения функционал V представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$. Для этой функции определим верхнюю правостороннюю производную:

$$\frac{dV}{dt} = \overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}.$$

Если $V(t, \varphi) \geq 0$, $\forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{B}_{H_0}$, $V(t, 0) \equiv 0$, то функционал V называется постоянно-положительным.

Введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 2.4. Для непрерывного функционала $V(t, \varphi)$ и некоторого числа $c \in \mathbb{R}$ определим $V^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in B_H : \exists \varphi_n \in B_H, t_n \rightarrow +\infty : \varphi_n \rightarrow \varphi, V(t_n, \varphi_n) \rightarrow c\}$.

О п р е д е л е н и е 2.5. Решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\Lambda \subset B_H$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, если для любой $(f^*, \Omega) \in H^+(f)$, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\|_B < \delta\}$ следует $\|x_t^*(0, \varphi)\|_B < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t, 0, \varphi)$ любого уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ при всех $t \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 2.6. Решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda \subset B_H$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$, если оно устойчиво относительно Λ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ и существует Δ , такое, что из $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\|_B < \Delta\}$ следует, что решение $x^*(t, 0, \varphi)$ каждого уравнения (1.2) стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Введенные определения позволяют вывести достаточные условия устойчивости на основе знакопостоянного функционала Ляпунова.

Т е о р е м а 2.1. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^+$, такой, что:

$$V(t, \varphi) \geq 0, V(t, 0) \equiv 0, \dot{V}(t, \varphi) \leq 0, (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0)$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) устойчиво по Ляпунову.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1.1) неустойчиво. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдется момент $\alpha > 0$ последовательность $\{\varphi_n : \|\varphi_n\|_B \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$, такие, что для решений (1.1) $x^n(t) = x(t, \alpha, \varphi_n)$ верно:

$$\|x_{t_n}^n(\alpha, \varphi_n)\|_B = \varepsilon_0 \quad (2.1)$$

при некоторых $t = t_n$.

Из единственности $x = 0$ следует, что $t_n \rightarrow +\infty$. Можно считать, что $\|x_t^n\|_B < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha, t_n]$.

Из условия $V(t, 0) \equiv 0$ следует, что существуют числа $\Delta_n \rightarrow 0$, такие, что $V(\alpha, \varphi_n) \leq \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$ получаем:

$$V(t, x_t^n(\alpha, \varphi_n)) \leq \Delta_n, \quad t > \alpha. \quad (2.2)$$

Определим $\delta_0 = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ из условия 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. В силу (2.1), существует последовательность $t_n^{\delta_1} \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, такая, что $\|x_{t_n^{\delta_1}}^n\|_B = \delta_1$ и при $t_n^{\delta_1} \leq t \leq t_n$ выполняется:

$$\delta_1 \leq \|x_t^n\|_B \leq \varepsilon_0. \quad (2.3)$$

Из условий, наложенных на функцию $f(t, \varphi)$, следует, что последовательность $\{x^n(t, \alpha, \varphi_n) : t \in [\alpha, \gamma]\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна для любого $\gamma > \alpha$. Следовательно, с учетом того, что $\|\varphi_n\|_B \rightarrow 0$, мы можем утверждать, что семейство функций $\{x_{t_n^{\delta_1}}^n(\alpha, \varphi_n)\}$ предкомпактно в B_{δ_0} , т. е. семейство функций $\{x_{t_n^{\delta_1}}^n(\alpha, \varphi_n)\}$ принадлежит некоторому компакту $K \subset B_{\delta_0}$.

Таким образом, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) и функция φ_{δ_1} , такие, что $x_{t_n^{\delta_1}}^n \rightarrow \varphi_{\delta_1}$, где $\|\varphi_{\delta_1}\|_B = \delta_1$. При этом, в силу (2.2) и условия для производной V имеем: $V(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}^n(\alpha, \varphi_n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и значит $\varphi_{\delta_1} \in V^{-1}(\infty, 0)$.

Существует $(f^*, K) \in H^+(f)$, т. е. подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$), такая, что $f(t + t_n^{\delta_1}, \varphi) \rightarrow f_{\delta_1}^*(t, \varphi)$, $\varphi \in K$. По лемме 1.1 получаем, что $x^n(t + t_n^{\delta_1}, \alpha, \varphi_n) \rightarrow x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$, где $x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f_{\delta_1}^*(t, x_t)$.

Но тогда по определению числа δ_1 имеем, что $\|x_t^*(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, t \geq 0$ и $\|x_t^*(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Обозначим: $T_n = t_n - t_n^{\delta_1}$. Рассмотрим $x^* = x^*(T_n, 0, \varphi_{\delta_1})$. Если $T_n \leq T < +\infty$ для любого $n = 1, 2, \dots$, тогда получаем, что существует T_0 , такое, что $x_{T_0}^* = \varphi_{\varepsilon_0}$. Если $T_n \rightarrow +\infty$, тогда в силу (2.3) для каждого $T = \text{const} > 0$ $\|x_T^*(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \geq \delta_1 > 0$. И то и другое свойство противоречит выбору δ_1 . Таким образом получаем устойчивость нулевого решения (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.7. Пусть $t_n \rightarrow +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ определим множество $V_{\infty}^{-1}(t, c) \subset B_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_{\infty}^{-1}(t, c)$, если существует последовательность $\{\varphi_n \in B_H, \varphi_n \rightarrow \varphi\}$, такая, что:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(t + t_n, \varphi_n) = c.$$

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times B_H.$$

Допустим, что непрерывная функция $W = W(t, \varphi)$ ограничена на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \bar{B}_h$ и для каждого компактного множества $K \subset B_H$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$. Как и в случае $f(t, \varphi)$, при таком условии можно определить компактную оболочку для $W = W(t, \varphi)$ и предельную функцию W^* , при этом множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое той же последовательностью $t_n \rightarrow +\infty$, определим как соответствующее W^* .

Оболочкой $H^+(f, W)$ является множество (f^*, W^*, Ω) , $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times B_H$, таких, что существует последовательность $\{t_n\}, t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, для которой $\{f(t + t_n, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$, $\{W(t + t_n, \varphi)\}$ сходится к $W^*(t, \varphi)$ при $(t, \varphi) \in \Omega$.

Доказаны следующие теоремы о локализации положительного предельного множества решений (1.1) [6] и об асимптотической устойчивости нулевого решения (1.1) с использованием функционала Ляпунова со знакопостоянной производной [7].

Т е о р е м а 2.2. *Предположим, что:*

1) $V(t, \varphi) : \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset B_H$:

$$V(t, \varphi) \geq m(K) \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K,$$

его производная

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ – решение (1.1), такое, что $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq \tau < H$, для всех $t \geq \alpha$.

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$, при котором для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ существуют предельная совокупность $(f^*, W^*) \in H^+(f, W)$ с $V_\infty^{-1}(t, c)$ и решение $x^*(t, 0, \varphi^*)$ уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ такие, что множество $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ и $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const}\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$.

Т е о р е м а 2.3. *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^+$, такой, что:

$$\omega(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi), V(t, 0) \equiv 0,$$

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) для каждой предельной совокупности $(f^*, W^*) \in H^+(f, W)$ и каждого $c_0 \geq 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений предельного уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, кроме нулевого $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

3. Устойчивость стационарных движений

Рассмотрим механическую систему с голономными стационарными связями, определяемую обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, причем первые m координат системы, $(q_1, \dots, q_m)' = q^1$ ($m < n$) позиционные, остальные $(n - m)$ координат $(q_{m+1}, \dots, q_n)' = q^2$ – циклические и описываемую уравнениями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + \int_0^t \Phi(t-s) q(s) ds + Q, \quad (3.1)$$

где T — кинетическая энергия, $\Pi = \Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, $\partial T/\partial \dot{q}^2 = \partial \Pi/\partial q^2 = 0$, при этом $\Phi \in R^{m \times m}$ — симметричная матрица, $m < n$, $\Phi' = \Phi \geq 0$, $(\int_0^\infty \Phi(s)ds$ сходится) выражающая свойство эредитарности или влияния предыстории системы [8] (например, ее вязкоупругие свойства), $Q = Q(q, \dot{q})$ — обобщенные гироскопические и диссипативные силы, $Q(q, 0) \equiv 0$, $Q = (Q^1, 0)'$, $(\dot{q}^1)'Q^1 \leq 0$, $(\cdot)'$ — операция транспонирования). Полагаем $q(t) = 0, t < 0$. Система будет иметь циклические интегралы $\partial T/\partial \dot{q}^2 = c$, и для нее можно определить приведенную потенциальную энергию системы $W = W(q^1, c)$.

Пусть $\partial W/\partial q^1 = 0$ при $q^1 = 0$ и $c = c_0$, так что система имеет стационарное движение

$$\dot{q}^1 = 0, \quad q^1 = 0, \quad \dot{q}^2 = \dot{q}_0^2 = const, \quad q^2(t) = q_0^2 + \dot{q}_0^2(t - t_0) \quad (3.2)$$

отвечающее значению $c = c_0$ циклических постоянных.

Т е о р е м а 3.1. *Предположим, что:*

1) *измененная с учетом свойства эредитарности приведенная потенциальная энергия системы*

$$S(q^1, c) = W(q^1, c) - \frac{1}{2}(q^1)' \left(\int_0^\infty \Phi(s)ds \right) q^1$$

имеет изолированный минимум в точке $q^1 = 0$ при $c = c_0$ и $S(q^1, c) \geq \omega(|q^1|)$;

2) *матричная функция Φ такова, что $\dot{\Phi}(s) \leq 0$.*

Тогда стационарное движение (3.2) устойчиво по $(\dot{q}^1, q^1, \dot{q}^2)$ и является притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $c = c_0$, а также каждое возмущенное движение из области устойчивости (3.2) неограниченно приближается при $t_n \rightarrow +\infty$ к одному из предельных стационарных движений, отвечающему значению $c = c_1 = c_0 + \delta_c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Положим $U = |c - c_0|$. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(q^1, \dot{q}^1) = S(q^1, c_0) + T + \frac{1}{2} \int_0^\infty (q^1(t-s) - q^1(t))' \Phi(s) (q^1(t-s) - q^1(t)) ds.$$

Тогда производная функционала в силу системы (3.1) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (q^1(t-s) - q^1(t))' \dot{\Phi}(s) (q^1(t-s) - q^1(t)) ds \leq 0.$$

Предельная к (3.1) система имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \int_0^\infty \Phi(s) q(t-s) ds + Q, \quad (3.3)$$

Полагаем $W(q^1) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (q^1(t-s) - q^1(t))' \dot{\Phi}(s) (q^1(t-s) - q^1(t)) ds$.

Множество $\{W^*(q^1) = 0\} = \{q^1(t) \equiv const, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Очевидно, что для каждой $const \geq 0$ множество $\{V = const\} \cap \{W^*(q^1) = 0\}$ не содержит решений (3.3), кроме $\{q^1 = 0\}$.

По теореме 2.3 получаем, что движение, отвечающее $c = c_0$ асимптотически устойчиво.

Функционал $U \geq 0$, $U = 0$ тогда и только тогда, когда $c = c_0$. По теореме 2.1 получаем доказательство первой части теоремы.

Рассмотрим теперь функционал V с S зависящей от c_1 . Тогда из теоремы 2.2 получаем справедливость последней части утверждения теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ (МД-7549.2010.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hale J.K., Kato J. Phase pavlikovce for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11-41.
2. Haddock J., Terjeki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. – 1990. – V. 86. – P. 1-32.
3. Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. J. – 1970. – 22. – P. 254-269.
4. Седова Н.О. К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – №10. – С. 1338-1347.
5. Kato J. Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63-80.
6. Павликов С.В. К задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Известия вузов. Математика. – 2008. – №7. – С. 29-38.
7. Павликов С.В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №9. – С. 16-27.
8. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 302 с.

About stability of the motions of system with infinite delay.

© S. V. Pavlikov²

Abstract. We study the stability of functional differential equations with infinite delay, using the Lyapunov functional of constant sign. Limit equations are constructed in a special phase space. Sufficient stability conditions of stationary movements mechanical systems of eredital are received.

Key Words: The is functional-differential equations with infinite delay, Lyapunov functional with a constant-sign derivative, the limiting equations.

REFERENCES

1. Hale J.K., Kato J. Phase pavlikovce for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11-41.
2. Haddock J., Terjeki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. – 1990. – V. 86. – P. 1-32.
3. Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. J. – 1970. – 22. – P. 254-269.
4. Sedova N.O. To Lyapunov-Razumihina method for the equations with infinite delay // Differents Uravneniya. – 2002. – 38. – № 10. – P. 1338-1347.
5. Kato J. Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63-80.
6. Pavlikov S. V. On the Stability Problem for Functional Differential Equations with Infinite Delay // Izv. vuzov. Mathematic. – 2008. – № 7. – P. 29-38.
7. Pavlikov S. V. To a problem about stabilisation of controlled mechanical systems // Avtomatika i Telemekhanika. – 2007. – № 9. – P. 16-27.
8. Volterra V. The theory of the functional, integrated and the integral-differential equations. – M.: Nauka, 1982. – 302 p.

²Professor of chair of information safety and the controlle theory, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; spavlikov@mail.ru.

УДК 517.977

Метод операторов преобразования для определения опримального граничного управления для уравнения Лапласа в шаре

© Ю. А. Парфёнова¹

Аннотация. Рассматривается вариационная постановка проблемы граничного управления в третьей краевой задаче для уравнения Лапласа в N - мерном шаре. Методом операторов преобразования найдено аналитическое выражение для граничного управления.

Ключевые слова: Граничное управление, оператор преобразования, третья краевая задача.

1. Операторы преобразования для вектор-функций, гармонических в шаре.

Рассмотрим векторную краевую задачу в единичном шаре Ω из $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \nu_a} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -z_g \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma. \quad (1.2)$$

где Γ - матрица размера 2×2 , все собственные значения которой положительные, z_g - известная вектор-функция, содержательный смысл которой будет указан ниже.

Введем оператор [1] $L_\Gamma = \Gamma + r \frac{d}{dr}$, тогда граничное условие (1.2) переписывается в виде

$$L_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega$$

при этом вектор-функция $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ - гармоническая в Ω .

В работе [1] найдено явное выражение для оператора, обратного к L_Γ :

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \begin{pmatrix} v_1(\varepsilon x) \\ v_2(\varepsilon x) \end{pmatrix} d\varepsilon.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\varepsilon^{\Gamma-E} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) & \beta \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) \\ \frac{1}{\beta} \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) & \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\frac{1}{a_0} = \beta$, в результате приходим к решению третьей векторной краевой задачи (1.1)-(1.2):

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) v_1(\varepsilon x) d\varepsilon + \int_0^1 \beta \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) v_2(\varepsilon x) d\varepsilon \\ \int_0^1 \frac{1}{\beta} \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) v_1(\varepsilon x) d\varepsilon + \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) v_2(\varepsilon x) d\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

¹Ассистент кафедры математического анализа, Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, г. Пенза; julia5507@mail.ru.

2. Задача об оптимальном граничном управлении.

Пусть в единичном шаре $\Omega \in \mathbb{R}^n$ определено уравнение Лапласа:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0, \quad (2.1)$$

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ задано третье краевое условие:

$$hy + \frac{\partial y}{\partial v_A} \equiv hy + r \frac{\partial y}{\partial r} = g,$$

где n - орт внешней нормали к Γ , $g \in L_2(\Gamma)$, $h > 0$.

Определим для каждого управления $u \in L_2(\Gamma)$ состояние $y = y(u)$ как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнением (2.1) и краевым условием

$$hy + \frac{\partial y}{\partial v_A} = g + u, \quad (2.2)$$

Поскольку обобщенное решение $y(u) \in V = \{v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i) : i = 1, 2\}$ краевой задачи (2.1)-(2.2) существует, то оно на границе Γ области $\bar{\Omega}$ имеет смысл и $\|y(u)\|_{L_2(\Gamma)} < \infty$.

Наблюдение зададим в виде

$$Z(u) = y(u), \quad x \in \Gamma.$$

Поставим в соответствие каждому управлению $u \in L_2(\Gamma)$ значение функции стоимости:

$$J(u) = \int_{\Gamma} (y(u) - z_g)^2 d\Gamma + a_0(u, u), \quad (2.3)$$

где z_g - известный элемент из $L_2(\Gamma)$, $0 < a_0$,

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi \psi d\Gamma.$$

Следуя [2], можно показать, что каждому управлению $u \in L_2(\Gamma)$ соответствует единственное состояние $y(u) \in V$. Функция y определена на области $\bar{\Omega}$, минимизирует на V функционал энергии

$$\Phi(v) = \liminf_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - 2 \int_{\Gamma} g v d\Gamma - 2 \int_{\Gamma} u v d\Gamma \quad (2.4)$$

и является единственным в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y \in V$, удовлетворяющий $\forall v \in V$ уравнению

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} g v d\Gamma + \int_{\Gamma} u v d\Gamma. \quad (2.5)$$

Легко увидеть, что $y(u_1) \neq y(u_2)$ при $u_1 \neq u_2$.

Из (2.3) получаем

$$J(u) = \|(y(u) - y(0) + (y(0) - z_g))\|^2 + a_0(u, u) =$$

$$= \pi(u, u) - 2L(u) + \|z_g - y(0)\|^2,$$

где билинейная форма $\pi(\cdot, \cdot)$ и линейный функционал $L(\cdot)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\pi(u, v) &= (y(u) - y(0), y(v) - y(0)) + (\bar{a}u, u), \\ L(v) &= (z_g - y(0), y(v) - y(0)), \\ (\varphi, \psi) &= \int_{\Gamma} \varphi \psi d\Gamma.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Линейность функционала $L(v)$ легко видеть, поскольку разность $y(v) - y(0)$ есть единственное решение $\tilde{y}(v)$ одной из эквивалентных задач (2.4), (2.5), у которых необходимо положить $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, а в задаче (2.5) дополнительно заменить произвольную функцию v произвольным элементом $z \in V$. Тогда имеет место равенство вида

$$\tilde{y}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \tilde{y}(u_1) + \alpha_2 \tilde{y}(u_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^1, \quad \forall u_1, u_2 \in L_2.$$

На основании последнего устанавливаем линейность функционала $L(v)$ и билинейность формы $\pi(u, v)$. Форма $\pi(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна на $L_2(\Gamma)$, т.е.

$$\pi(u, u) \geq a_0(u, u).$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}(u')$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}(u'')$ - решения множества V задачи (2.5) при $f = 0$, $g = 0$ и функции $u = u(x)$, равной соответственно u' , u'' . Тогда

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_V^2 \leq \mu a(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}'') \leq \mu \|u' - u''\|_{L_2(\Gamma)} \|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\Gamma)},\tag{2.7}$$

где $\|v\|_V = \left\{ \sum_{i=1}^2 \|v\|_{W_2^1(\Omega_i)}^2 \right\}^{1/2}$, а билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ определена выражением

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx.$$

Поскольку $\forall v \in V$ справедливы равенства [2]

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega_i)} \leq c_i \|v\|_{W_2^1(\partial\Omega_i)}, \quad c_i > 0, \quad i = 1, 2,$$

то

$$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_3 \|v\|_V, \quad c_3 = \max_{i=1,2} c_i \int.\tag{2.8}$$

С учетом (2.8) из (2.7) следует

$$\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_4 \|u' - u''\|_{L_2(\Gamma)},\tag{2.9}$$

т.е. функция $\tilde{y}(u)$ непрерывно зависит от u .

Неравенство (2.9) обеспечивает непрерывность линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{F}$. Таким образом справедлива

Т е о р е м а 2.1. Если состояние системы определяется как решение эквивалентных задач (2.4), (2.5), то существует единственный элемент $u \in L_2(\Gamma)$, для которого имеет место соотношение вида $J(u) = \inf_{v \in L_2(\Gamma)} J(v)$.

Если $u \in L_2(\Gamma)$ - оптимальное управление, то

$$\pi(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in L_2(\Gamma). \quad (2.10)$$

На основании (2.6) легко увидеть справедливость равенства

$$\begin{aligned} \pi(u, v - u) - L(v - u) &= \\ &= (y(u) - z_g, y(v - u) - y(0)) + a_0(u, v - u). \end{aligned} \quad (2.11)$$

С учетом линейности задачи (2.5) из (2.11) следует

$$\pi(u, v - u) - L(v - u) = (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + a_0(u, v - u).$$

Тогда неравенство (2.10) преобразуется к виду

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + a_0(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{S}_\partial. \quad (2.12)$$

Соглашение (2.12) является необходимым и достаточным условием того, чтобы $u \in L_2(\Gamma)$ было оптимальным решением рассматриваемой задачи.

В силу существования и единственности решения $y \in V$ эквивалентных задач (2.4), (2.5) (при произвольных фиксированных $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$) существует оператор $A: V \rightarrow L_2(\Gamma)$, который на решениях y ($y|_{\Omega_l} \in C^1(\bar{\Omega}_l) \cap C^2(\bar{\Omega}_l)$, $l = 1, 2$) определяется соотношением (2.1), (2.2). Следовательно, для решений y можно единственным образом определить $\partial y / \partial v_A$ на $\partial\Omega_l$ и $\partial y / \partial v_A \in W^{-1/2}(\partial\Omega_l)$.

Для управления $v \in L_2(\Gamma)$ сопряженное состояние $p(v) \in V^*$ определим следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A^*p(v) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ hp + \frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} &= y(v) - z_g, \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где V^* - сопряженное пространство к V , $V^* = V$,

$$A^*p = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} = r \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Аналогично [2] используем далее формулу Грина. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (A^*p(u), y(v) - y(u)) = - \int_{\partial\Omega_l} \frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} (y(v) - y(u)) d\partial\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial (y(v) - y(u))}{\partial x_i} dx = \\ &= a(p, y(v) - y(u)) - \int_{\Gamma} (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) d\Gamma = \\ &= - \int_{\Gamma} (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) d\Gamma + \int_{\Gamma} p \frac{\partial (y(v) - y(u))}{\partial v_A} d\Gamma - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (p, A(y(v) - y(u))) = \\
& = - \int_{\Gamma} (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) d\Gamma + \int_{\Gamma} p(v - u) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u))_{L_2(\Gamma)} = (p, v - u)_{L_2(\Gamma)}. \quad (2.13)$$

Учитывая (2.11), (2.13), из (2.10) получаем

$$(p(u) + \bar{a}u, v - u)_{L_2(\Gamma)} \geq 0. \quad (2.14)$$

Таким образом, из (2.14) следует

$$p(u) + \bar{a}u = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Для нахождения оптимального управления $u(x)$ имеем третью краевую задачу для системы уравнений Лапласа:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega, \\
& \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega, \\
& hy + \frac{\partial y}{\partial v_A} = g - \frac{p}{\bar{a}}, \quad x \in \Gamma, \\
& hy + \frac{\partial p}{\partial v_A} = y - z_g, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Ее решение определяет оптимальное управление по формуле

$$u = -p/\bar{a}, \quad x \in \Gamma. \quad (2.15)$$

Используя формулу (1.3), находим оптимальное управление p :

$$p = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) v_1(\varepsilon x) d\varepsilon + \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) v_2(\varepsilon x) d\varepsilon,$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= \int_{\Gamma} \frac{1 - |x|^2}{(1 - 2x \cos \psi + x^2)^{\frac{n}{2}}} g(\xi) d\Gamma_{\xi}, \\
v_2(x) &= \int_{\Gamma} \frac{1 - |x|^2}{(1 - 2x \cos \psi + x^2)^{\frac{n}{2}}} z_g(\xi) d\Gamma_{\xi}, \quad \cos \psi = \frac{(x, \xi)}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

Из формулы (2.15) находим итоговую формулу для неизвестного управления:

$$u = \beta \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \sin(\beta \ln \varepsilon) v_1(\varepsilon x) d\varepsilon + \beta^2 \int_0^1 \varepsilon^{h-1} \cos(\beta \ln \varepsilon) v_2(\varepsilon x) d\varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.А. Парфёнова Векторные операторы для функций, гармонических в шаре // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. Изд-во ПГПУ. №13(17). 2009. С. 28-34
2. И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. Вычислительные схемы МКЭ для задач оптимального управления эллиптической системой с условиями сопряжения // Кибернетика и системный анализ. 2002. №1. С. 72-88.

Method of transform operators for definition optimal boundary control for Laplace equation in the ball.

© Y. A. Parfenova²

Abstract. Variation statement of the third boundary value problem for Laplace equation in N -measured sphere is considered. The method of transform operators are used of finds analytical expression for boundary optimal control.

Key Words: Optimal control, transform operator, third boundary value problem.

REFERENCES

1. Y.A. Parfenova Vector operators for harmonic function in ball // Izv. Penz.gos. pedagog.univ. im. V.G. Belinskogo. 2009. №13(17). P. 28-34
2. I.V.Sergienko, V.S.Dejneka. Computing schemes MK Θ for problems optimum control of elliptic system with interface conditions// Cybernetics and the system analysis. 2002. №1. P. 72-88.

²Assistant of Mathematical analysis Chair, Penza State University after V.G. Belinsky, Penza; julia5507@mail.ru.

УДК 517.9

Преобразования Ляпунова нелинейных периодических дифференциальных уравнений.

© Д. В. Пашуткин

Аннотация. Хорошо известно, что линейные периодические дифференциальные уравнения приводимы к линейному автономному уравнению с постоянной матрицей (теорема Флоке-Ляпунова). Рассматриваются нелинейные периодические дифференциальные уравнения и строится пример дифференциального уравнения, неприводимого к автономному уравнению в специальной группе нелинейных преобразований Ляпунова, содержащей линейные преобразования Ляпунова.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, приводимость, преобразования Ляпунова.

1. Введение

Рассмотрим множество Ξ дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1)$$

где $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, решения задачи Коши $x(t : t_0, x_0)$ с начальными условиями (t_0, x_0) существуют при всех $t \in [T, +\infty)$.

На множестве Ξ рассмотрим группу преобразований LG_2 таких, что:

1) $\varphi \in C^{(1,2)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $\|\varphi(t, x)\| \leq C\|x\|$, где C - постоянная, зависящая от φ ;

2) φ^{-1} существует и принадлежит LG_2 .

Такие преобразования играют ту же роль, что и линейные преобразования Ляпунова на множестве линейных дифференциальных уравнений [1].

Далее будем полагать, что f периодична по t , $f(t, x) \equiv f(t + \omega, x)$, $\omega > 0$.

Если $f(t, x) = A(t)x$, где $A(t)$ - непрерывная ω -периодическая матрица, то по теореме Флоке-Ляпунова уравнение (1.1) приводимо к линейному уравнению с постоянной матрицей при помощи линейного периодического по t преобразования $\varphi(t, x) = L(t)x$, $\varphi \in LG_2$.

Верно ли аналогичное утверждение для нелинейных уравнений: всегда ли существует преобразование $\varphi \in LG_2$, переводящее уравнение (1.1) в автономное уравнение? Оказывается, что для нелинейных уравнений, даже при естественном дополнительном ограничении на правую часть $\|f(t, x)\| \leq C\|x\|$, это утверждение неверно.

2. Контрпример

Для построения контрпримера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2 \ln^2 t} \\ 1 & \frac{\ln t + 1}{t \ln t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, t \geq 2. \quad (2.1)$$

Вектор-функция

$$u(t, u_{01}, u_{02}) = \begin{bmatrix} u_1(t, u_{01}, u_{02}) \\ u_2(t, u_{01}, u_{02}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) & -\frac{1}{4 \ln 4} \sin(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) \\ t \ln t \sin(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) & \frac{t \ln t}{4 \ln 4} \cos(\ln(\frac{\ln t}{\ln 4})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

является решением задачи Коши для (2.1) с начальными условиями $u(4, u_{01}, u_{02}) = (u_{01}, u_{02})^T$. Легко видеть, что для любого вектора $(u_{01}, u_{02}) \neq (0, 0)$ существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$ такая, что $\|u(t_k, u_{01}, u_{02})\| \geq C t_k \ln t_k$.

Далее рассмотрим функцию $a : R \times R \times R \rightarrow R^2$

$$a(t, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} a_1(t, u_1, u_2) \\ a_2(t, u_1, u_2) \end{bmatrix} = \alpha(u_1) \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2 \ln^2 t} \\ 1 & \frac{\ln t + 1}{t \ln t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, & t \geq 2 \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2^2 \ln^2 2} \\ 1 & \frac{\ln 2 + 1}{2 \ln 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, & t < 2 \end{cases},$$

функция $\alpha \in C^1(R, R)$ такая, что

$$\alpha(p) = \begin{cases} 1 & , p \in [-1, 1] \\ 0 & , p \notin (-2, 2) \end{cases}$$

При $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$ функция $u(t) = u(t, u_{01}, u_{02})$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = a(t, u_1, u_2), \quad (2.2)$$

так как при $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$ значения функции $u(t, u_{01}, u_{02})$ не покидают полосы $|u_1| < 1$, а на этой полосе правые части уравнений (2.2) и (2.1) при $t \geq 4$ совпадают.

Определим функцию $b : R \times R \times R \rightarrow R^2$ следующим образом: $b(t, u_1, u_2) = a(t + 4n, u_1 - 4n, u_2)$ при $t \in R, u_1 \in [4n - 2, 4n + 2], n \in Z, u_2 \in R$. А функцию $c : R \times R \times R \rightarrow R^2$ как $c(t, u_1, u_2) = b(t, u_1 - t, u_2)$. Функция c 4-периодична по t . Действительно, для любых t, u_1, u_2 выберем $n \in Z$ такое, что $u_1 - t \in [4n - 2, 4n + 2]$. Тогда $u_1 - t - 4 \in [4(n - 1) - 2, 4(n - 1) + 2]$ и

$$\begin{aligned} c(t + 4, u_1, u_2) &= b(t + 4, u_1 - t - 4, u_2) = a(t + 4 + 4(n - 1), u_1 - t - 4 - 4(n - 1), u_2) = \\ &= a(t + 4n, u_1 - t - 4n, u_2) = b(t, u_1 - t, u_2) = c(t, u_1, u_2). \end{aligned}$$

Наконец определим функцию $d : R \times R \times R \rightarrow R^2$:

$$d(t, x_1, x_2) = \beta(x_1 - 1)c(t, x_1 - 4, x_2),$$

где $\beta \in C^1(R)$, причем

$$\beta(p) = \begin{cases} 1 & p \geq 1 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}$$

Очевидно, что d является 4-периодической по t , $d(t, 0, 0) = 0$, $\|d(t, x_1, x_2)\| \leq C\|(x_1, x_2)^T\|$, а уравнение

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = d(t, x_1, x_2) \quad (2.3)$$

принадлежит множеству Ξ .

Так как $u(t) = u(t, u_{01}, u_{02})$ является решением и для уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = b(t, u_1, u_2) \quad (2.4)$$

при $u_{01}^2 + u_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$ (правые части (2.2) и (2.4) совпадают на полосе $|u_1| < 1$ при $t \geq 4$), то

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t, x_{01}, x_{02}) \\ x_2(t, x_{01}, x_{02}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t, x_{01} - 8, x_{02}) + 4 + t \\ u_2(t, x_{01}, x_{02}) \end{bmatrix}$$

является решением уравнения (2.3) при $(x_{01} - 8)^2 + x_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$.

Пусть уравнение (2.3) приводимо к автономному уравнению

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = h(y_1, y_2) \quad (2.5)$$

класса Ξ .

Согласно критерию приводимости [2], существует преобразование $\varphi \in LG_2$ такое, что функция $y(t, y_{01}, y_{02}) = \varphi(t, x(t, y_{01}, y_{02}))$ является решением уравнения (2.5) при $(y_{01} - 8)^2 + y_{02}^2 < 1$, $t \geq 4$. Откуда вытекает, что $tC_1 \leq \|y(t, 8, 0)\| \leq tC_2$, где $C_1, C_2 > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $y(t + \varepsilon, y_{01}, y_{02})$ также решение уравнения (2.5). Если ε достаточно мало, то $y(t + \varepsilon, y_{01}, y_{02}) = y(t, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})$, где $(\tilde{y}_{01} - 8)^2 + \tilde{y}_{02}^2 < 1$, $(\tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02}) \neq (8, 0)$. Существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$ такая, что $\|x(t_k, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})\| \geq Ct_k \ln t_k$. Откуда получаем цепочку неравенств:

$$C_3 t_k \ln t_k \leq \|\varphi(t_k, x(t, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02}))\| = \|y(t_k + \varepsilon, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{02})\| \leq C_4(t_k + \varepsilon).$$

Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е.В. Ляпуновские группы преобразований // Изв. вузов. Математика. – 1994. – N7. – С.13-19.
2. Воскресенский Е.В. О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1998. – N9. – С. 33-37.

Liapunov transformations of nonlinear periodic differential equations.

© D. Pashutkin

Abstract. It's a well known fact that linear differential equations are reducible to linear autonomous differential equation with a constant matrix (Floquet-Liapunov theorem). We consider nonlinear periodic differential equation and construct the example of nonreducible differential equation to autonomous equation in the special Liapunov group of nonlinear transformations containing linear Liapunov transformations

Key Words: differential equations, reducibility, Liapunov transformation.

REFERENCES

1. Voskresensky E.V. Lyapounov transformation groups // Izv. vuzov. Mathematics. – 1994. – № 7. – P. 13-19.
2. Voskresensky E.V. On the reducibility of nonlinear differential equations // Izv. vuzov. Mathematics. – 1998. – № 9. – P. 33-37.

УДК 517.948.35

О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений

© Д. Г. Рахимов¹

Аннотация. В работе рассматривается нахождение фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций и соответствующих собственных векторов, для упрощения вычислений, специальным образом строится оператор, для которого исходное кратное собственное значение окажется простым собственным значением. Предлагается также более упрощенный вариант нахождения соответствующих собственных векторов.

Ключевые слова: Дискретный спектр, метод ложных возмущений, метод Стеффенсена, оператор ложного возмущения.

1. Введение

В работах [2] - [3] рассматривалась задача уточнения приближенно заданных кратных собственных значений и соответствующих собственных векторов линейных оператор-функций спектрального параметра методом ложных возмущений с последующим применением метода Стеффенсена для кратных корней. Здесь для этой задачи строится возмущенный оператор, для которого искомое кратное собственное значение оказывается простым. Предложен также упрощенный вариант определения соответствующих собственных векторов. Тем самым дано развитие метода ложных возмущений [1].

2. Постановка задачи

В 1961 году М.К.Гавурин предложил метод уточнения приближенно заданных собственных чисел и собственных векторов самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве основанный на введении оператора ложного возмущения (ЛВ), такого, что приближения к собственным числам и элементам становились точными для возмущенного оператора. В дальнейшем ЛВ метод получил развитие для операторов и оператор-функций спектрального параметра в банаховых пространствах (см. обзорную статью [8]). В настоящей работе предлагается прием, позволяющий свести задачу определения кратного собственного значения и отвечающих ему собственных элементов к случаю простого собственного значения. Используются терминологии и обозначения [6],[8].

Пусть λ - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра достаточно гладкой по t в некоторой области $G \subset C$ оператор-функции $T(t) \in L(E_1, E_2)$ E_1, E_2 - некоторые банаховы пространства; $N(T(\lambda)) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $N(T^*(\lambda)) = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, причем $k = \det\|\langle T'(\lambda)\varphi_i, \psi_j \rangle\| \neq 0$. Пусть известны достаточно хорошие приближения φ_{i0}, ψ_{i0} и Λ к собственным элементам $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$ и собственному числу λ , соответственно:

$$\|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon, \|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon, |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon.$$

¹Ведущий научный сотрудник, Институт математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

В качестве приближения λ_0 выбираем приближенное значение одного из решений уравнения

$$F^0(t - \Lambda) \equiv f^0(t) \equiv \det \|\langle T(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| = 0, \quad (2.1)$$

имеющего в окрестности Λ n близких по модулю корней.

Действительно, для функций $\Phi_{ij}^{(0)} \equiv \langle T(t)(\varphi_{i0} - \varphi_i), \psi_{j0} \rangle - \langle T(t)\varphi_i, \psi_j - \psi_{j0} \rangle$ справедлива оценка $|\Phi_{ij}^{(0)}(t)| \leq (\|\psi_{j0}\| \|T(t)\| + \|T(t)\varphi_i\|)\varepsilon$. Применяя неравенство Адамара, определяем постоянную C , такую, что на некотором контуре Γ , содержащем внутри себя точки λ и Λ , при достаточно малом ε

$$|\Phi^{(0)}(t)| = \det \|\Phi_{ij}^{(0)}(t)\| = |f^{(0)}(t) - g(t)| \leq \varepsilon C < \mu = \inf_{\Gamma} |g(t)| \leq |g(t)|,$$

где $g(t) = \det \|\langle T(t)\varphi_i, \psi_j \rangle\|$. Тогда согласно теореме Руше [5] уравнение (2.1) внутри Γ , имеет столько же корней, сколько функция $g(t)$, для которой по условию

$$g^{(i)}(\lambda) = 0, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad g^{(n)}(\lambda) = k \neq 0.$$

В силу малости ε

$$k_0 = \det \|\langle T'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| \neq 0. \quad (2.2)$$

Поэтому биортогональные системы элементов к $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ и $\{\psi_{i0}\}_1^n$ можно построить следующим образом:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^0 T^{*'}(\lambda_0) \psi_{i0}, \quad z_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{s=1}^n K_{sj}^0 T'(\lambda_0) \varphi_{s0},$$

где K_{is}^0 - алгебраическое дополнение элемента $k_{is}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{s0}, \psi_{i0} \rangle$. Так как $k \neq 0$, найдется номер i_0 , такой что $k_{i_0 1}^0 = \langle T'(\lambda_0)\varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle \neq 0$.

Целью работы является сведение задачи ложного возмущения для кратного собственного значения к случаю простого собственного значения.

3. Сведение к одномерному случаю

Введем оператор-функцию $\overline{T(t)} = T(t) + \sum_{s=2}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0}$.

Т е о р е м а 3.1. Точное собственное значение λ оператора $T(t)$ является простой изолированной фредгольмовой точкой дискретного спектра оператора $\overline{T(t)}$, причем соответствующие собственный вектор и дефектный функционал имеют вид

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{s=2}^n c_s \varphi_s, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i_0 0} + \sum_{s \neq i_0}^n d_s \psi_s. \quad (3.1)$$

При этом элементы $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$ оказываются достаточно хорошими приближениями элементов $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фредгольмовость оператора $\overline{T(\lambda)}$ следует из теоремы С.М. Никольского [6]. Из его определения следует, что $N(\overline{T(\lambda)}) \subset N(T(\lambda))$ и нули оператора $\overline{T(\lambda)}$ можно искать в виде (3.1).

Тогда

$$\overline{T(\lambda)} \tilde{\varphi} = \sum_{s=2}^n \langle \varphi_1, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} + \sum_{s=2}^n \sum_{k=2}^n c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости системы векторов $\{z_{i0}\}_1^n$ возникает система

$$\sum_{k=2}^n c_k \langle \varphi_k, \gamma_{s0} \rangle = -\langle \varphi_1, \gamma_{s0} \rangle, \quad s = \overline{2, n}, \quad (3.2)$$

решения которой определяются по формулам Крамера. Двойственным образом устанавливается, что дефектный функционал $\overline{T(\lambda)}$ имеет вид (3.1), где коэффициенты d_k определяются из системы вида (3.2) по Крамеру. Поскольку при $j \neq i$ $|\langle \varphi_j, \gamma_{i0} \rangle| = |\langle \varphi_j - \varphi_{j0}, \gamma_{i0} \rangle| \leq \varepsilon \|\gamma_{i0}\|$ и соответственно $|\langle z_{i0}, \psi_j \rangle| \leq \varepsilon \|z_{i0}\|$, то из вида решений системы (3.2) следует, что $|c_k|, |d_k| \leq K\varepsilon, k = \overline{2, n}$. Элементы φ_{10}, ψ_{i0} являются приближениями $\tilde{\varphi} \in N(\overline{T(\lambda)})$ и $\tilde{\psi} \in N(\overline{T^*(\lambda)})$, так как $\|\varphi_{10} - \tilde{\varphi}\| \leq (1 + (n-1)K)\varepsilon$, $\|\psi_{i0} - \tilde{\psi}\| \leq (1 + (n-1)K)\varepsilon$.

В силу малости коэффициентов $c_k, d_k, k = \overline{2, n}, \tilde{k} = \langle \overline{T'(\lambda)} \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$.

Для уточнения собственного значения λ применим метод ложных возмущений в одномерном варианте к задаче

$$\overline{T(t)}x = 0. \quad (3.3)$$

с последующим использованием итерационного процесса Эйткена-Стеффенсена [7] к уравнению $f(t) \equiv \langle \overline{T(t)} \varphi_{10}, \psi_{i0} \rangle = 0$:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [f(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{(-1)} f(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \lambda^{(0)} = \Lambda. \quad (3.4)$$

где $\Phi(t) = t - f(t)$, $f(t', t'') = (f(t') - f(t'')) / (t' - t'')$.

Т е о р е м а 3.2. *Если начальные приближения достаточно хороши, то найдутся числа C, C_1, L_1 и K такие, что при $h = C\varepsilon(|k_{i0}| - C_1\varepsilon)^{-1}(1 + L_1)K < 1$ уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, который можно найти с помощью формулы (3.4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $(\overline{T(t)})' = T'(t), (\overline{T(t)})'' = T''(t)$.

$$\begin{aligned} a) f(\Lambda) &= \langle \overline{T(\Lambda)} \varphi_{10}, \psi_{i0} \rangle = \langle \overline{T(\Lambda)} \varphi_{10} - \overline{T(\lambda)} \tilde{\varphi}, \psi_{i0} \rangle = \\ &= \langle \overline{T(\Lambda)}(\varphi_{10} - \tilde{\varphi}) + (\overline{T(\Lambda)} - \overline{T(\lambda)}) \tilde{\varphi}, \psi_{i0} \rangle, |f(\Lambda)| \leq \varepsilon \|\overline{T(\Lambda)}\| + \varepsilon \sup_{\theta \in [0;1]} \overline{T'(\Lambda + \theta(\lambda - \Lambda))} = C\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f(t', t'') &= f'(t'') + f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t'') = f'(\lambda) + \\ &+ f''(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda))(t'' - \lambda) + f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t''), \end{aligned}$$

где $f'' = (\psi_{i0}, T''(t)\varphi_{10})$,

$$\begin{aligned} |f(t', t'')| &\geq |k_{i0}| - |f''(\lambda + \theta_1(t'' - \lambda))||t'' - \lambda| - \\ &- |f''(t'' + \theta(t' - t''))||t' - t''| \geq |k_{i0}| - 3C_1\varepsilon, \end{aligned}$$

где $C_1 = \sup_{t \in G_0} T''(t)$;

$$c) \Phi(t) = t - f(t), \Phi(t', t'') = 1 - f(t', t''), |\Phi(t', t'')| \leq 1 + |f(t', t'')| \leq 1 + L_1;$$

$$d) |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| = |f(t', t'') - f(t'', t''')| \leq L_2(|t' - t''| + |t'' - t'''|) = K|t' - t'''|.$$

Теперь, если $h = C\varepsilon(|k_{i0}| - 3C_1\varepsilon)^{-1}(1 + L_1)K < 1$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, который можно найти методом Эйткена-Стеффенсена (3.4) (см. [7]).

Определим элементы

$$\tilde{\gamma}_0 = 1/k_{i_01} \overline{T'^*(\lambda_0)} \psi_{i_00} \in E^*, \quad \tilde{z}_0 = 1/k_{i_01} \overline{T'(\lambda_0)} \varphi_{10} \in F$$

биортогональные к φ_{10} и ψ_{i_00} соответственно.

Построим оператор ложного возмущения в виде

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \overline{T(\lambda_0)} \varphi_{10} + \langle x, \overline{T^*(\lambda_0)} \psi_{i_00} \rangle \tilde{z}_0.$$

Тогда $\text{Ker}(\overline{T(\lambda_0)} - D_0) = \{\varphi_{10}\}$, $\text{Ker}(\overline{T^*(\lambda_0)} - D_0^*) = \{\psi_{i_00}\}$.

Применяя лемму Шмидта [6] сводим (3.3) к системе

$$\begin{cases} x = \xi \left[I + \overline{\Gamma_0} \left(D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)} \right) \right]^{-1} \varphi_{10}, \\ \xi = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь $\overline{\Gamma_0} = \left[\overline{T(\lambda^0)} - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right]^{-1}$.

Подставляя первое уравнение (3.5) во второе, получим уравнение разветвления, простым корнем которого является исходное собственное значение λ :

$$F(t - \lambda^0) \equiv \langle (D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)}) \left[I + \overline{\Gamma_0} (D_0 + \overline{T(t)} - \overline{T(\lambda^0)}) \right]^{-1} \varphi_{10}, \psi_{i_00} \rangle = 0. \quad (3.6)$$

Т е о р е м а 3.3. Если начальные приближения достаточно хороши, то к уравнению (3.6) можно применить метод Эйткена-Стеффенсена (3.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим условия применимости метода Стеффенсена:

$$a) f(\lambda_0) = \langle D_0 [I + \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_0, \psi_0 \rangle, |f(\lambda_0)| \leq \|D_0\|^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1} = C_1(\|D_0\|);$$

$$b) |f(t', t'')| \geq |k_0| - C_2(\|D_0\|, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} C_2(\|D_0\|, \varepsilon) &= L_1 \|\Gamma_0\| \|D_0\| [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1} \{1 + [1 - \|\Gamma_0\| \|D_0\|]^{-1}\} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \{2 (L_2 + 2L_1^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}) [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} + \\ &+ \varepsilon L_3 + 6L_1 L_2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1} + \\ &+ 6L_1^3 \|\Gamma_0\|^2 [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2} [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2}\}; \end{aligned}$$

$$L_1 = \sup_{t \in G} \|T^{(i)}(t)\|, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$c) \Phi(t) = t - g(t), |\Phi(t', t'')| \leq C_3, C_3 = L_1 [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2};$$

$$\begin{aligned} d) |\Phi(t', t'') - \Phi(t'', t''')| &= |f''(t'' + \theta(t' - t''))(t' - t'') - \\ &- f''(t'' + \theta_1(t''' - t''))(t''' - t'')| \leq C_4(\|D_0\|, \varepsilon) (|t' - t''| + |t'' - t'''|) \leq \\ &\leq K |t' - t'''|, t', t'', t''' \in G_0, \end{aligned}$$

$$C_4(\|D_0\|, \varepsilon) = [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-2} \{L_2 + 2L_1^2 \|\Gamma_0\| [1 - \|\Gamma_0\| (\|D_0\| + \varepsilon L_1)]^{-1}\}.$$

Теперь, если $h = C_1 C_3 K (|k_0| - C_2)^{-1} < 1$, то λ можно вычислить из уравнения (3.6) методом Стеффенсена (3.4), для реализации которого требуется решить два линейных уравнения $\left[\overline{T(\lambda^{(m)})} + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right] x = \tilde{z}_0$, $\left[\overline{T(\Phi(\lambda^{(m)}))} + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0 \right] y = \tilde{z}_0$.

Т е о р е м а 3.4. Собственные вектора $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$ соответствующие собственному значению λ оператора $T(\lambda)$ являются решениями уравнений

$$\left[T(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[T^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. К исходной задаче $T(\lambda)x = 0$ применяем метод ложных возмущений, для чего вводим оператор ложного возмущения:

$$D_0 = - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle T(\lambda) \varphi_{i0}.$$

Тогда приближения $\varphi_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$ окажутся нулями оператора $T(\lambda) + D_0$.

Запишем уравнение $T(\lambda)x = 0$ в виде

$$\left[T(\lambda) + D_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = D_0 x + \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$$

или

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n \xi_i [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \\ \xi_i = \langle x, \gamma_{i0} \rangle, i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где $\Gamma_0 = [T(\lambda) + D_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}]^{-1}$. Подставляя первое во второе получим

$$\sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij} \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i \langle \Gamma_0 D_0 [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \gamma_{j0} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

По условию эта система имеет n линейно независимых решений, т.е. ранг матрицы составленной из коэффициентов, равен нулю. Следовательно, система разрешима для любых ξ_i , и φ_i можно выбрать в виде

$$\varphi_i = [I - \Gamma_0 D_0]^{-1} \varphi_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которые являются решениями уравнения (3.7).

4. Случай кратного собственного значения с ОЖН.

Пусть λ - изолированная фредгольмовская точка дискретного спектра оператор-функции $T(t) \in L(E_1, E_2)$ - аналитической по t в некоторой области $G \subset C$, $\text{Ker} T(\lambda) = \{\varphi_i\}_1^n$, $\text{Ker} T^*(\lambda) = \{\psi_i\}_1^n$, $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1, n}}^{j=\overline{2, p_i}}$, $\{\psi_i^{(j)}\}_{i=\overline{1, n}}^{j=\overline{2, p_i}}$ соответствующие им присоединенные элементы. Через $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_j\}_1^n$ обозначим системы векторов, биортогональные к $\{\varphi_i\}_1^n$ и $\{\psi_i\}_1^n$ соответственно.

Предполагаются известными некоторые достаточно хорошие приближения: $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)} : |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon$.

Как и выше введем оператор

$$\overline{T(t)} = T(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}, \quad (4.1)$$

здесь через $\{\gamma_{i0}\}_1^n$ обозначена система векторов, биортогональных к $\{\varphi_{i0}\}_1^n$, а через $\{z_{i0}\}_1^n$ - биортогональных $\{\psi_{i0}\}_1^n$.

Без ограничения общности можно предположить, что $p_1 = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$. Тогда оператор $\overline{T(\lambda)}$ имеет один собственный вектор вида

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 + d_2 \varphi_2 + \dots d_n \varphi_n. \quad (4.2)$$

и p_1 присоединенных элементов вида $\tilde{\varphi}^{(j)} = \varphi_1^{(j)} + \sum_{i=2}^n d_i \varphi_i^{(j)}$. Доказательство проделывается аналогично доказательству теоремы 1. Ввиду малости коэффициентов d_i , $i = \overline{1, n}$, в качестве приближений к $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^{(j)}$, $j = \overline{2, p_i}$, можно брать приближения φ_{10} и $\varphi_{10}^{(j)}$, $j = \overline{2, p_i}$, соответственно.

Мы находимся в условиях задачи, рассмотренной в работе [8], для оператора $\overline{T(\lambda)}$. Как и в [8] применяя к оператору $\overline{T(\lambda)}$ процесс линеаризации, задачу сводим к линейной задаче, рассмотренной там же. Используя дальше метод ложных возмущений к линеаризованной задаче находим собственное значение λ и соответствующие собственный элемент $\tilde{\varphi}$ и присоединенные к нему элементы $\tilde{\varphi}^{(j)}$, $j = \overline{2, p_i}$.

Определив λ соответствующие собственные элементы φ_i , $i = \overline{1, n}$, находим как решения уравнений:

$$\left[T(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\gamma_{i0}, \cdot) z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Присоединенные элементы определяются из рекуррентной системы:

$$\left[T(\lambda) + \sum_{i=1}^n (\gamma_{i0}, \cdot) z_{i0} \right] x_s = \sum_{j=1}^s T_j x_{s+1-j}, \quad s = \overline{2, p_i}, \quad x_1 = \varphi_i, \quad x_{s+1} = \varphi_i^{(s)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавурин М. К. О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений. ЖВМ и МФ, т.1, № 5, 1961, 757-770.
2. Логинов Б. В., Рахимов Д. Г. О методе ложных возмущений для уточнения приближенно заданных жордановых цепочек. Сб. "Вопросы вычисл. и прикл. математики № 52, "Фан Ташкент, 1978, 37-39.
3. Рахимов Д. Г. О разыскании собственных чисел и векторов аналитической оператор-функции методом ложных возмущений. Сб. "Дифференц. ур-я с част. произв. и их прилож. "Фан Ташкент, 1977, 107- 120.
4. Рахимов Д. Г. Регуляризация в задачах на собственные значения для оператор-функций нелинейно зависящих от спектрального параметра методом линеаризации. Узб. мат. ж., 2009, № 3, с. 163-170.
5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, М., "Наука 1969.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969.
7. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963, 220 с.
8. Loginov B. V., Rakhimov D. G., Sidorov N. A. Development of M. K. Gavurin's Pseudoperturbation Method, Fields Inst. Commun., 2000, v.25, p. 367-381.

On the calculation of multiple Fredholm's points of discrete spectra of linear operator functions by pseudoperturbation methods.

© D. G. Rakhimov²

Abstract. In present work considered a problem of finding multiple eigenvalues and corresponding eigenvectors of linear operator functions by pseudoperturbation method, in which process calculations eigenvalues became to finding roots with the same multiplicity of nonlinear equation. For this they apply Stephensen's method. In work for the simplification of calculations, specially constructed operator, for which initial eigenvalue is simple. We also suggest simpler variant for finding corresponding eigenvectors.

Key Words: Discrete spectra, pseudoperturbation method, Stephensen's method, pseudoperturbation operators.

REFERENCES

1. Gavurin M. K. On pseudoperturbation method for eigenvalues determination, J. Computing Math and Math Physics, 1961, 1, №5, 757-770 p. Russian, Engl. transl.
2. Loginov B. V., Rakhimov D.G. Regulation questions for eigenvalue problems, Tashkent, 2008, 132 p. Russian.
3. Rakhimov D. G. On the finding eigenvalues and eigenvectors of linear operator-functions by a pseudoperturbation method, Book "Partial differential equations and its applications Tashkent, 1977, 107-120 p. Russian.
4. Rakhimov D. G. Regulation eigenvalue problems nonlinear concerning spectral parameter of operator-functions by a method linearization, Uzbek Mathematical Journal, №3, 2009, p.163-170. Russian.
5. Shabat B. V. Introduction to complex analysis, M., Nauka, 1969, 576 p. Russian.
6. Vainberg M. M., Trenogin V. A. Branching Theory of solutions of nonlinear equations, M., Nauka, 1969, 528 p.; Engl. transl. Volters-Noordorf Int. Publ., Leyden, 1974.
7. Ostrovsky A. M. Solutions equations and systems equations, M., IL, 1963, 220 p. Russian.
8. Loginov B. V., Rakhimov D. G., Sidorov N. A. Development of M. K. Gavurin's Pseudoperturbation Method, Fields Inst. Communic., 2000, v.25, p. 367-381.

²Senior scientist, Institute of Mathematics and information technologies of Academy scientifics of the Republik of Uzbekistan, Tashkent; Davranaka@yandex.ru

УДК 519.71

Продолжимость решений систем с переменной структурой на многообразиях переключения

© В. И. Сафонкин¹

Аннотация. В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия, накладываемые на параметры системы с переменной структурой, гарантирующие переход решений из областей однозначности функций управления на поверхность переключения и их правая единственность.

Ключевые слова: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель.

1. Введение

Как известно, к классу систем управления с переменной структурой относятся системы регулирования, математическими моделями которых являются дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t, x)) \quad (1.1)$$

где $x \in R^n$, $f(t, x, u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция $u(t, x)$, $u \in \mathbb{R}^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности S в пространстве переменных $t, x_1, x_2, \dots, x_n$, задаваемой уравнением $s(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ и представляющая собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s(x) > 0$ и $s(x) < 0$. Таким образом, функция $f(t, x, u(t, x))$ является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Области $s(t, x) > 0$, $s(t, x) < 0$ будем называть областями однозначности. В них, соответственно, $u(t, x) = u^{(1)}(t, x)$ при $s(x) > 0$ и $u(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ при $s(x) < 0$. Где функции $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x) \in C([t_0, +\infty)) \times \mathbb{R}^n$.

Введем обозначения: $u^+(t, x)$ и $u^-(t, x)$ - предельные значения функции $u(t, x)$ с обеих сторон поверхности S ; $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x, u)$ - значения функции $f(t, x, u)$ в предельных значениях функции $u(t, x)$; f_N^+ и f_N^- - проекции векторов $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x, u)$ на нормаль к поверхности S в точке $x \in S$, направленную из области $S < 0$ в область $S > 0$.

В дальнейшем будем также предполагать, что как $f(t, x, u)$, так и $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывны в областях однозначности функции $f(t, x, u)$ вплоть до границы поверхности $s(x) = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Решением уравнения (1.1) будем считать решение дифференциального включения

¹Доцент кафедры прикладной математик Мордовский госуниверситет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; appmath@svmo.ru.

$$\frac{dx}{dt} \in f(t, x, U(t, x)) \quad (1.2)$$

т.е. абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, определенную на некотором отрезке значений t , для которой почти всюду на этом отрезке имеет место

$$\frac{dx(t)}{dt} \in f(t, x(t), U(t, x(t))). \quad (1.3)$$

Множество $U(t, x)$, а, следовательно, и множество $f(t, x, U(t, x))$ получены одним из методов доопределения уравнения (1.1) на множестве S (см. также [2]).

О п р е д е л е н и е 1.2. Для уравнения (1.1) имеет место правая единственность в области D , если для $\forall(t_0, x_0)$ каждые два решения, удовлетворяющие условию $x(t_0) = x_0$ совпадают на каждом отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ в предположении, что они оба существуют и проходят в этой области.

О п р е д е л е н и е 1.3. Многозначную функцию $F(p)$ будем называть непрерывной в точке p , если $\alpha(F(p'), F(p)) \rightarrow 0$ при $p' \rightarrow p$, где $\alpha(A, B) = \max(\sup \rho(a, B), \sup \rho(b, A))$, $a \in A, b \in B$, A и B - множества.

2. Постановка задачи

Для реальных физических систем с переменной структурой оказывается важным создание такого режима ее поведения, при котором траектория из областей однозначности функции $f(t, x, u)$ попадает на многообразие S , где изображающая точка остается на нем в течение некоторого промежутка времени. Решение таких задач обычно проводятся в два этапа: на первом показываются условия, при которых траектории из областей однозначности попадают в некоторую δ - окрестность многообразия S (S^δ); на втором – переход изображающей точки из δ - окрестности S^δ на само многообразие S и сохранение движения на нем при $t > t_0$.

В работе [5] на основе асимптотического подхода путем сравнения решений в областях однозначности и решений на многообразии $s(x) = 0$, определенных путем применения метода эквивалентного управления, получены необходимые и достаточные условия попадания траекторий из любой точки $(t_0, x_0) \in S$ в сколь угодно малую окрестность S^δ .

Здесь же ставится задача: определить необходимые условия, накладываемые на множество $F(t, x, u)$, а, следовательно, и функцию правой части уравнения (1.1), при выполнении которых оказывается выполненным второй этап. Очевидно, при этом должны быть выполнены условия существования решения на поверхности $s(x) = 0$ и его правая единственность.

3. Решение задачи

В дальнейшем: coA - наименьшее выпуклое множество, содержащее множество A ; S^δ - замкнутая δ - окрестность множества S ; $S^\delta \cup S$ - объединение множеств.

За область $D \in R^n$, где рассматривается решение уравнения (1.1), будем принимать объединение множеств S - множество меры нуль и множества S^δ .

Доопределяя уравнение (1.1) методом Филиппова (см. [3], оно приводится к дифференциальному включению вида

$$\frac{dx}{dt} = coF(t, x), \quad (3.1)$$

где $F(t, x) = f(t, x, U(t, x))$ - множество векторов правой части системы в точках разрыва $u(t, x)$ на поверхности S . В этой области $F(t, x)$ - замкнутое выпуклое множество, а в окрестности S^δ - есть точка. При линейном вхождении $u(t, x)$ в правую часть уравнения (1.1) $F(t, x)$ - есть отрезок, соединяющий точки $u^+(t, x)$ и $u^-(t, x)$.

Дополнив множество $U(t, x)$ точкой $u(t', x') \in S^\delta$ и приняв условие $dist((t', x'), S) \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow x \in S$, уравнение (1.1) приводится к дифференциальному включению

$$\frac{dx}{dt} \in F_1(t, x), \quad (3.2)$$

где $F_1(t, x)$ - множество векторов правой части уравнения (1.1), полученное на множестве $u(t, x) \cup U(t, x)$.

Согласно сформулированной задачи и принятых ранее соглашений оказывается справедливым следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Если для любых двух точек p и p' множества $S \cup S^\delta$ области D имеет место*

$$\alpha(F_1(t, p'), F_1(t, p)) \leq l(t) |p' - p|, \quad (3.3)$$

где $l(t)$ - суммируемая функция, то для решений уравнения (1.1) при сделанных выше предположениях имеет место правая единственность в области D .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $F_1(t, x)$ непрерывна по обоим переменным (это следует из свойств функции), то для любых двух точек $p' \in S^\delta$ и $p \in S$ условие (3.3) может быть переписано в виде

$$f(t, p', u(t, p')) - f(t, p, u(t, p)) \leq l(t) |p' - p|,$$

где $(t, p') \in S^\delta, (t, p) \in S, S^\delta \in D, S \in D$. (3.4)

Очевидно соотношение (3.4) остается справедливым и для включения (). Умножая неравенство (3.4) слева и справа на величину $|p' - p|$, оказываются выполненными условия теоремы 2 [3] о существовании не более одного решения уравнения (1.1), т.е. имеет место правая единственность решений, как в окрестности S^δ , так и на поверхности S .

Прежде, чем сформулировать следующее утверждение, сделаем предположение о том, что система (1.1) доопределяется методом эквивалентного управления [2], который приводит к уравнению $\nabla s(x) \cdot f(t, x, u_{eq}(t)) = 0$ ($\nabla s(x)$ — градиент функции $s(x)$), из которого и должна быть в последующем определена функция $u_{eq}(t, x)$, эквивалентная функции $u(t, x)$, указанной в уравнении (1.1). Сам метод доопределения читатель может найти в источниках [2], [4].

Т е о р е м а 3.2. *Если выполнены условия теоремы 3.1., а функция $u_{eq}(t, x)$ определена однозначно. Кроме того, один из векторов f_N^- или f_N^+ направлен в сторону множества S , а другой равен нулю, то решение уравнения (1.1) попав из области D с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ на множество S , остается там для всех $t > t_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать случай $f_N^- = 0$, $f_N^+ < 0$. При сделанном предположении с учетом свойств функции $F_1(t, x)$ в предположении $t_0 \rightarrow t$, $x_0 \rightarrow x$, где $x \in S$, имеет место $u(t, x) \in [u^*(t, x), u^+(t, x)]$, здесь u^* — предельное значение функции $u(t, x)$, когда (t_0, x_0) принадлежит δ -окрестности множества S . Важно заметить то, что множество $F_1(t, x)$ при выше сделанных предположениях содержит одновременно векторы правых частей уравнений доопределенных как методом Филиппова [3], так и методом эквивалентного управления [2]. То есть $f_0(t, x) \in F_1$ и $f(t, x, u_{eq}(t, x)) \in F_1$.

Введем в рассмотрение функцию $f_s(t, x)$, определив ее значение равенством $f_s(t, x) = (f_{eq}(t, x) - f^+(t, x)) / (u_{eq}(t, x) - u^+(t, x))$, которое вытекает из соотношения

$$f_s = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u} d\sigma, \quad (3.5)$$

где $u(t, x) \in [u_{eq}(t, x), f^+(t, x)]$, а функция $f_{eq}(t, x)$ — есть функция правой части уравнения (1.1) в точке $(t, x, u_{eq}(t, x))$.

Если предположить, что вектор $f_{eq}(t, x)$ расположен между векторами $f(t, x, u^*(t, x))$ и $f_0(t, x)$, этого всегда можно добиться, устремляя δ к нулю, то при $x_0 \rightarrow x \in S$ с учетом непрерывности функции $F_1(t, x, u(t, x))$ имеет место $|f^* - f_0| = r(t, x) \rightarrow 0$. Откуда следует, вектор $f_{eq}(t, x)$ будет стремиться к вектору $f_0(t, x)$, находящемуся на касательной плоскости к поверхности S . Последнее означает, что решение, пришедшее из области $S < 0$ или $S > 0$ на многообразии $s(x) = 0$ совпадают.

4. Выводы.

Приведенные утверждения показывают, что при наложенных условиях и сделанных предположениях в отношении параметров правой части системы (1.1) в ней может возникать режим перехода изображающей точки из достаточно малой окрестности многообразия переключения на это множество, на котором это движение сохраняется некоторое время. Как известно, на практике такие режимы имеют важное значение при синтезе скользящего режима на поверхности разрыва управляющей функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

-
1. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970, - 592с.
 2. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368с.
 3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223с.
 4. Пятницкий Е.С. Избранные труды (теория управления). Т.1. – М.: Физматлит, 2004. – 382с.
 5. Сафонкин В.И. Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Из-во СВМО, 2005. Т7, №1. – С. 251-256.

Continuability of solutions of variable structure systems on the switching manifolds

© В.И. Сафонкин²

Abstract. In the article necessary and sufficient conditions guaranteeing the transition of solutions from the regions of single-valuedness to the switching surface and their right uniqueness are established.

Key Words: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель

REFERENCES

1. Emelynov S.V. Theory of systems with variable structure. – M.: Nauka, 1970, - 592 p.
2. Utkin V.I. Sliding modes in optimization and control problems. – M.: Nauka, 1981. – 368 p.
3. Filippov A.F. Differential equation with discontinuous right-hand side. – M.: Nauka, 1985. – 223 p.
4. Pyatnitsky E.S. Selected works (control theory). v.1. – M.: Fizmatlit, 2004. – 382 p.
5. Safonkin V.I. Asymptotic behavior of solutions to systems with variable structure Proc. of Middle-Volga Math. Soc. (Trudy Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva), Saransk, v. 7, 1, p. 251-256, 2005.

²Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian state university after N. P. Ogarev, Saransk; appmath@svmo.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе $\TeX$ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Внимание! Новые правила. Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность,  
место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, го-  
род; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место рабо-  
ты, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-  
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды $\backslash\mathbf{R}$, $\backslash\mathbf{Rn}$, $\backslash\mathbf{C}$, $\backslash\mathbf{Z}$, $\backslash\mathbf{N}$ и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды $\backslash\mathrm{phi}$, $\backslash\mathrm{epsilon}$ соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами $\backslash\mathrm{px}\{i\}$ и $\backslash\mathrm{pxtog}\{u\}\{i\}$.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды $\backslash\mathrm{textrm}$, $\backslash\mathrm{textit}$. Например, для вставок формул Γ_i , D_i в текст статьи, необходимо набрать команды $\backslash\mathrm{textrm}\{\Gamma\}_i$, $\backslash\mathrm{textit}\{D\}_i$.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды $\backslash\mathrm{label}\{\mathrm{метка}\}$ и $\backslash\mathrm{eqref}\{\mathrm{метка}\}$, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить $\backslash\mathrm{label}\{\mathrm{ivanov14}\}$, теорему 5 из этой статьи — $\backslash\mathrm{label}\{\mathrm{ivanovt5}\}$ и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду $\backslash\mathrm{ref}\{\mathrm{метка}\}$).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами
а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathrm{insertpicture}\{\mathrm{метка}\}\{\mathrm{имя_файла.eps}\}\{\mathrm{степень_сжатия}\}$

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$\backslash\mathrm{insertpicturewcap}\{\mathrm{метка}\}\{\mathrm{имя_файла.eps}\}\{\mathrm{подпись_под_рисунком}\}$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathrm{insertpicturecapscale}\{\mathrm{метка}\}\{\mathrm{имя_файла.eps}\}\{\mathrm{степень_сжатия}\}$ {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$\backslash\mathrm{insertpicturenonum}\{\mathrm{имя_файла.eps}\}\{\mathrm{степень_сжатия}\}$ {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**.

Для оформления списка литературы на английском языке следует использовать окружение **thebibliographyEn**.

Сам список оформляется в виде последовательности команд $\backslash\mathrm{bibitem}$, имеющих один параметр:

$\backslash\mathrm{bibitem}\{\mathrm{метка\ для\ ссылки\ на\ источник}\}$

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду $\backslash\mathrm{cite}$ или $\backslash\mathrm{pgcite}$ (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.2, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Антонова О. А.	34	Митрякова Т. М.	77
Булатов М. В.	40	Мустафина С. А.	34
Гринес В. З.	7	Павликов С. В.	86
Губайдуллин И. М.	26	Парфенова Ю. А.	95
Гурина Т. А.	46	Пашуткин Д. В.	102
Дорофеев И. А.	46	Починка О. В.	77
Егорова Д. К.	56	Рахимов Д. Г.	106
Каледин О. Е.	61	Сафокин В. И.	113
Кузнецов Е. Б.	14	Спивак С. И.	26, 34
Левченко Ю. А.	7	Сухарев Л. А.	61
Лубышев Ф. В.	67	Тихонова М. В.	26
Манапова А. Р.	67	Филатов П. А.	14
Мачхина М. Н.	40	Шишенкова А. Е.	77
Медведев В. С.	7		

Для заметок

Для заметок

Для заметок