

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 11, №2



2009

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 11, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит два раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. ответственного секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова, Е. Б. Кузнецов,
Б. В. Логинов, С. И. Спивак, В. А. Треногин

СВМО
САРАНСК

2009

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 11, №2

Компьютерная верстка: Жалнин Р. В.

Корректоры: Андронов А. Н., Атряхин В. А., Бадюкина Т. Е., Каледин О. Е., Ферцев А. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 29-07-32

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISBN 978-5-901661-16-1

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	8
-----------------------------	---

Е. Б. Кузнецов

К наилучшей параметризации	9
1. Введение	9
2. Многомерная параметризация	10
3. Численные расчеты	11

И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, С. И. Спивак

Последовательно-параллельное определение кинетических параметров	14
1. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики	14
2. Внутренний параллелизм исследуемого объекта	15
3. Базы данных кинетических исследований	16
4. Распараллеливание вычислительного процесса определения кинетических параметров сложных химических реакций	17
5. Кинетическая модель сложной химической реакции	21

В. З. Гринес, Л. А. Куприна, О. В. Починка, А. Е. Шищенко

f -адаптированная фильтрация для диффеоморфизмов Морса-Смейла	26
1. Введение	26
2. Существование f -адаптированной фильтрации	28
3. Свойства f -адаптированной фильтрации	30
4. Связь f -адаптированной фильтрации с вложением сепаратрис	31

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в аэроупругости	35
1. Введение	35
2. Исследование устойчивости	35

Б. В. Логинов, О. В. Макеева

Оператор ложного возмущения в обобщенной задаче на собственные значения в условиях групповой симметрии	43
1. Введение	43
2. Построение оператора ЛВ в условиях групповой инвариантности	44

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

В. А. Акулов

Информационная система по проблемам гравитационного моделирования протяженных объектов	49
2. Прямые задачи моделирования в интегральной постановке.	52
3. Обратные задачи моделирования в интегральной постановке.	53
4. Прямые и обратные задачи ГМ в локальной постановке.	54
5. Информационная поддержка принятия решений.	54

С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина

Построение расширенной характеристической системы для идеального газа в эллиптическом случае	57
1. Постановка задачи	57
2. Построение расширенной характеристической системы	58

Д. И. Бояркин

Эллиптическая краевая задача, вырождающаяся на границе	61
1. Постановка задачи	61
2. Вспомогательные построения и предложения	63
3. Априорные оценки для решений краевой задачи	64

Р. В. Жалнин, Е. Е. Пескова

О выборе интерполяционного полинома в существенно неосциллирующих схемах	68
--	----

И. Ж. Ибатулин

О дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с начальными условиями из классов Никольского	78
1. Введение	78
2. Постановка задачи	78
3. Оптимальные порядки дискретизации решений задачи (1.1)-(1.3)	80
4. Заключение	81

О. Е. Каледин, Л. А. Сухарев

Программный пакет Cone. Структура и реализация	84
--	----

Л. Ю. Катаева, И. Е. Белоцерковкая

Исследования математических моделей распространения пожара для определения зависимости скорости распространения от угла наклона	90
1. Введение	90
2. Модель Ротермела	90
3. Модель Доррера	91
4. Модель Гришина	94
5. Сравнение двух моделей	96
6. Заключение	97

А. А. Косов

О гироскопической стабилизации нелинейных и неконсервативных систем	100
1. Введение	100
2. О гироскопической стабилизации одного класса нелинейных потенциальных систем	100
3. Гироскопическая стабилизация систем с неконсервативными силами	101

И. Н. Кудашкин, Г. А. Курносков

Приложение разностных схем к исследованию нестационарного теплообмена газоразрядных ламп	106
--	-----

Т. Л. Львова

Существование периодических режимов в математических моделях нелинейных электрических цепей	112
1. Введение	112
2. Постановка задачи	112
3. Основной результат	113

Н. И. Овсянникова

Поиск оптимального управления в модели эпидемии	119
1. Математическая постановка задачи	119
2. Алгоритм синтеза управления	120
3. Анализ результатов решения	122
4. Вывод	124

А. Ю. Павлов

Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие.	127
--	-----

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова

Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики	131
1. Введение	131
2. Анализ неединственности решения обратной задачи с учетом погрешности эксперимента	131
3. Пример	132

С. И. Спивак, С. И. Лукашкин

Моделирование процесса страхования методом Монте-Карло	137
1. Введение	137
2. Модель изменения капитала страховой компании	137
3. Структура процессов поступления премий, выплат и возвратов	138
3.1. Выплаты	138
3.2. Премии и возвраты	140
3.3. Интенсивность премий, выплат и возвратов	140
4. Генерирование нестационарного пуассоновского процесса	141

5.	Численный эксперимент	141
6.	Заключение	142

П. А. Шаманаев

	Достаточные условия локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей	145
1.	Введение	145
2.	Постановка задачи	147
3.	Достаточные условия локальной приводимости	148

Anca-Veronica Ion, Raluca-Mihaela Georgescu

	Stability of equilibrium and periodic solutions of a delay equation modeling leukemia	152
1.	The problem	152
1.1.	Equilibrium solutions	153
2.	Stability of equilibrium solution	153
2.1.	Stability of x_1	153
2.2.	Stability of x_2	153
3.	Hopf bifurcation points	154
4.	On the stability properties of the periodic solutions emerged by Hopf bifurcation	155
4.1.	The delay equation as an equation in a Banach space	155
4.2.	Space of eigenfunctions corresponding to $\tilde{\lambda}_{1,2}$, the projector on this space	156
4.3.	The equation restricted to the invariant (center or unstable) manifold	158
4.4.	The normal form of the reduced equation	158
4.5.	An example	161

Florica Ioana Dragomirescu, Adelina Georgescu

	Polynomials based methods for linear nonconstant coefficients eigenvalue problems	164
1.	Introduction	164
2.	Particular physical convection problems	166
2.1.	A convection problem with variable gravity field	166
2.2.	A convection problem with an internal heat source	168
3.	Conclusions	169

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

П. А. Балахнин, А. В. Зубов, Н. В. Зубов

	О системах наблюдения	171
--	---------------------------------	-----

С. А. Дутов, А. В. Зубов, Н. В. Зубов

	Задача об устойчивости	174
--	----------------------------------	-----

А. В. Зубов, Н. В. Зубов, И. С. Стрекопытов

	Структурная минимизация	177
--	-----------------------------------	-----

О. А. Зубова Моделирование самообучающихся систем	180
---	-----

Н. И. Зубов, А. Ф. Зубова, С. В. Зубов, А. С. Стрекопытова, М. В. Стрекопытова Об особой точке системы дифференциальных уравнений	185
---	-----

А. В. Зубов, А. С. Стрекопытова, М. В. Стрекопытова Асимптотические положения покоя	188
---	-----

Р. В. Жалнин О численном моделировании стадии турбулентного перемешивания при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова	191
--	-----

Б. В. Логинов, О. В. Макеев Методы теории бифуркаций в задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла	194
1. Введение	194
5. Сложные решетки общего типа	194

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Т. В. Кормилицына Численные методы в системах символьной математики	197
---	-----

Перечень диссертаций, защищенных в диссертационном совете Д 212.117.14 в 2009 году	201
--	-----

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	202
Алфавитный указатель	204

ОТ РЕДАКЦИИ

Журнал «Труды Средневолжского математического общества» официально изменил свое название на «Журнал Средневолжского математического общества». Все лучшие традиции, сложившиеся в «предшественнике», будут сохранены и преумножены в этом журнале с новым названием. Одна из таких традиций – это отбор работ для публикаций. Предварительно работы, в основном, докладываются на конференциях или школах-семинарах, которые проводятся Средневолжским математическим обществом и Мордовским государственным университетом им. Н. П. Огарева. Здесь работы подвергаются здоровой критике и неформальному обсуждению, становится ясной их новизна и актуальность, намечаются рецензенты из членов редколлегии и из присутствующих на подобных мероприятиях ведущих ученых. Журнал Средневолжского математического общества публикует статьи по математике, информатике и методике их преподавания. Настоящий номер составлен из работ, прошедших рецензирование и экспертизу на IV Международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», которая проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-06812-моб_г. Этот номер журнала содержит работы как начинающих ученых, так и известных специалистов по математическому моделированию.

Редакция журнала желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 519.622

К наилучшей параметризации

© Е. Б. Кузнецов¹

Аннотация. Численное решение системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих несколько параметров, изучается с позиции метода продолжения решения по параметру. Рассматривается задача параметрического приближения кривых и поверхностей.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений с параметрами, наилучшие параметры, наилучшая параметризация кривых, поверхностей.

1. Введение

Многие математические модели описываются или могут быть сведены к исследованию систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений вида

$$F_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

содержащих неизвестные переменные x_1, \dots, x_n и непрерывно изменяющиеся параметры p_1, p_2, \dots, p_m , принадлежащие некоторому множеству $P : \{p_l^0 \leq p_l \leq p_l^*, l = 1, 2, \dots, m\}$.

Уравнения типа (1.1) получаются, например, при решении методом конечных элементов нелинейных статических задач механики деформируемого твердого тела, а также при параметрическом приближении кривых и поверхностей.

Пусть решение системы уравнений (1.1) известно при некоторых значениях параметров, т.е.

$$x_i = x_{i0} \quad \text{при} \quad p_l = p_{l0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Требуется найти решение системы (1.1) при других значениях параметров из множества P .

О п р е д е л е н и е 1.1. *Подпространство, задаваемое в пространстве $\mathbb{R}^{n+m} : \{x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m\}$ системой уравнений (1.1) при различных значениях параметров p_1, \dots, p_m , принадлежащих некоторому множеству $P \subset \mathbb{R}^m$, назовем подпространством множества решений системы уравнений (1.1).*

Одним из наиболее естественных и эффективных методов исследования поставленной задачи является метод продолжения решения по параметру [1].

Заметим, что продолжение решения по параметрам задачи p_1, \dots, p_m не всегда может оказаться удачным. В [1] это обстоятельство поясняется при решении однопараметрической системы уравнений.

Основной целью данной работы является обобщение результатов работы [1], в которой рассматривается однопараметрический случай, на многопараметрический, т.е. на случай системы нелинейных уравнений (1.1).

¹Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (государственный технический университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

2. Многомерная параметризация

Включим параметры системы (1.1) в число неизвестных, т.е. введем обозначения $x_{n+1} = p_1, \dots, x_{n+m} = p_m$. Тогда система уравнений (1.1) примет вид

$$F_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Пусть неизвестные x_1, \dots, x_{n+m} являются дифференцируемыми функциями некоторых m параметров μ_1, \dots, μ_m , т.е. $x_j = x_j(\mu_1, \dots, \mu_m)$, ($j = 1, 2, \dots, n+m$), дифференциалы которых могут быть представлены в виде

$$d\mu_l = \sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{lj} dx_j, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Здесь вектор $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{l(n+m)})^T$, ($l = 1, 2, \dots, m$) задает направление, в котором выбирается параметр μ_l . Придавая компонентам вектора α_l различные значения, можно задать в пространстве $\mathbb{R}^{n+m} : \{x_1, x_2, \dots, x_{n+m}\}$ любое направление. Так, если вектор α_l взять в виде $\alpha_l = (1, 0, \dots, 0)^T$, то параметр μ_l будет вычисляться в направлении изменения переменной x_1 .

Для того чтобы все выбираемые направления были равноправными, векторы α_l должны быть одинаковой длины. Пусть они будут единичными.

Очевидно, что система векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ должна быть линейно независимой. В противном случае из m параметров p_1, \dots, p_m можно образовать линейную комбинацию и число параметров в системе (1.1) может быть уменьшено.

Уравнения продолжения решения получим, если наряду с равенствами (2.2) запишем дифференциалы уравнений системы (2.1). Тогда получаем систему уравнений продолжения решения вида

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{m(n+m)} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{n(n+m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \\ dx_{m+1} \\ \vdots \\ dx_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu_1 \\ \vdots \\ d\mu_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь введены следующие обозначения $F_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n+m$.

Для того чтобы осуществить процесс продолжения решения, систему (2.3) следует разрешить относительно дифференциалов dx_1, \dots, dx_{n+m} , следовательно, матрица этой системы должна быть невырожденной. Поэтому векторы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ не должны принадлежать подпространству $L^n \subset \mathbb{R}^n$, образованному строками матрицы Якоби системы (2.1), т.е. последними n строками матрицы системы (2.3). Пусть эти векторы принадлежат подпространству $B^m \subset \mathbb{R}^m$. В силу линейной независимости векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, они образуют в подпространстве \mathbb{R}^m базис.

Введем еще одно понятие.

О п р е д е л е н и е 2.1. Подпространство в \mathbb{R}^m , образованное векторами, ортогональными строкам матрицы Якоби системы уравнений (2.1), т.е. последним n строкам матрицы системы (2.3), назовем касательным подпространством.

Очевидно, что процесс разрешения системы уравнений (2.3) относительно дифференциалов будет тем эффективнее, чем матрица системы будет лучше обусловленной.

В качестве меры обусловленности D системы линейных уравнений примем величину определителя $\det A$ матрицы A этой системы, деленную на произведение квадратичных норм его строк. Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n меру обусловленности можно представить в виде

$$D = \frac{\det A}{l_1 l_2 \dots l_n},$$

где $l_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

В силу неравенства Адамара для определителей $|D| \in [0, 1]$ и большему значению $|D|$ соответствует лучшая обусловленность системы уравнений.

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы система линейных уравнений продолжения решения (2.3) была наилучшим образом обусловленной, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке гладкого подпространства множества решений системы нелинейных уравнений (2.1), параметры продолжения решения μ_1, \dots, μ_m являлись бы длинами дуг, вычисляемых вдоль m векторов ортонормированного базиса касательного подпространства.*

3. Численные расчеты

В прикладных исследованиях кривая обычно задается не системой, а набором точек

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для решения задачи параметрической интерполяции требуется построить систему функций

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t),$$

определяющих гладкую кривую в пространстве \mathbb{R}^3 , которые при некоторых выбранных значениях параметра t_i , $i = 1, \dots, n$ принимают наперед заданные значения x_i, y_i, z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. удовлетворяют условиям

$$X(t_i) = x_i, \quad Y(t_i) = y_i, \quad Z(t_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Однако проблема выбора параметра является неоднозначной. Выбор параметра имеет решающее влияние на форму приближающей кривой. При неудачном выборе параметра на кривой могут появляться осцилляции, а в некоторых случаях даже петли. Поэтому можно поставить вопрос о выборе наилучшего параметра. Если эту задачу изучать с позиции метода продолжения решения по параметру, то наилучшим параметром будет длину дуги λ , вычисляемая вдоль интерполируемой кривой.

Так как интерполируемая кривая заранее неизвестна, то часто используемая на практике хордовая параметризация, при которой в качестве параметра выбирается длина логаной, соединяющей узловые точки, является близкой к наилучшей.

Пример 1. Рассмотрим интерполяцию лемнискаты Бернулли, задаваемой в декартовых координатах (x, y) уравнением

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0. \quad (3.1)$$

Оценки близости множеств точек полученных параметрических кривых к множеству точек исходной кривой, заданной уравнением (3.1), рассчитывались в методе Хаусдорфа. Под хаусдорфовым расстоянием между двумя точечными ограниченными множествами E и F понимается величина

$$r(E, F) = \max[\max_{P \in E} \min_{Q \in F} \rho(P, Q), \max_{P \in F} \min_{Q \in E} \rho(P, Q)]. \quad (3.2)$$

Приближим кривую (3.1) параметрическими кубическими сплайнами. Интерполяция проводилась по семи узловым точкам, причем последняя точка совпадала с первой.

При использовании наилучшей параметризации ошибка приближения составила величину $r = 10^{-5}$. При использовании хордовой параметризации $r = 0.0358$, при использовании целочисленной параметризации $(t_i, i = 0, 1, \dots, n)$ — $r = 0.1516$, при использовании центростремительной параметризации — $r = 0.1084$.

Пример 2. Рассмотрим интерполяцию однополосного гиперboloида, задаваемого уравнением

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

параметрическими бикубическими сплайнами.

Ошибки интерполяции вычислялись в метрике Хаусдорфа (3.2).

При использовании естественной параметризации линий сетки ошибка приближения составила $r = 0.08$, при использовании хордовой параметризации — $r = 0.11$, при использовании целочисленной параметризации — $r = 0.22$, при использовании центростремительной параметризации — $r = 0.19$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 222 стр.

Дата поступления 08.04.2008

To the best parametrization

© E. B. Kuznetsov²

Abstract. In the work numerical solution of the system of nonlinear algebraic or transcendental equations with parameters is investigated using the method solution continuation with respect to parameter. The problem of parametric interpolation of curves and surfaces is considered.

Key Words: system of nonlinear equations with parameters, the best parameters, the best parametrization of curves, surfaces.

REFERENCES

1. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 228 p.

²Professor of Differential Equation Chair, Moscow Aviation Institute (State Technical University), Moscow; kuznetsov@mai.ru.

УДК 519.876.5

Последовательно-параллельное определение кинетических параметров

© И. М. Губайдуллин¹, К. Ф. Коледина², С. И. Спивак³

Аннотация. В работе выявлен внутренний параллелизм исследуемого объекта, предложена модель распараллеливания вычислительного процесса, систематизирована задача в информационно-аналитическую систему обратных задач химической кинетики.

Ключевые слова: информационно-аналитическая система, внутренний параллелизм, кинетическая модель, база данных кинетических исследований.

1. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики

В настоящее время, с целью изучения закономерностей металлокомплексного катализа, в Институте нефтехимии и катализа РАН, под руководством чл.-корр. РАН Джемилева У.М., проводятся исследования механизмов сложных реакций цикло-, гидро- и карбометаллирования олефинов. Исследования представляют собой комплекс следующих методов 1.1. Первое - динамическая ЯМР спектроскопия (установление структуры промежуточных биметаллических комплексов, ответственных за образование целевых алюмациклопентанов) [1]. Второе - квантово-химические расчеты (определение геометрических и энергетических параметров переходных состояний) [2]. Третье - современные информационные технологии математического моделирования кинетики сложных химических реакций (построение кинетических моделей на основе решения обратных задач химической кинетики) [3]. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики (ИАС ОЗХК) состоит из входных (экспериментальные данные, предложенные механизмы протекания реакции), выходных (расчетные данные по каждому веществу, кинетические параметры) информационных потоков, методов (методы решения прямой и обратной задачи), технических средств обработки информации (однопроцессорные, многопроцессорные компьютеры, суперкомпьютеры). Все три метода дополняют друг друга и позволяют получать достоверные результаты.

С интенсивным развитием технологии параллельных вычислений [4] (появление суперкомпьютеров и параллельных алгоритмов) расширяется перечень методов обработки для ИАС ОЗХК. С одной стороны, возникает возможность параллельного изучения самого объекта - разбиение общей задачи на несколько независимых подзадач, с другой стороны, возможность использования параллельных алгоритмов для численного решения систем уравнений математических моделей объектов. В данной работе рассматриваются принципы внутреннего параллелизма в обратных задачах химической кинетики и различные уровни распараллеливания.

¹Доцент, Институт нефтехимии и катализа РАН, г.Уфа; irekmars@mail.ru.

²С.н.с, аспирант, Институт нефтехимии и катализа РАН, г.Уфа; irekmars@mail.ru.

³Заведующий лабораторией «Математической химии» ИНК РАН, Институт нефтехимии и катализа РАН, г.Уфа; irekmars@mail.ru.



Р и с у н о к 1.1

Объект исследования

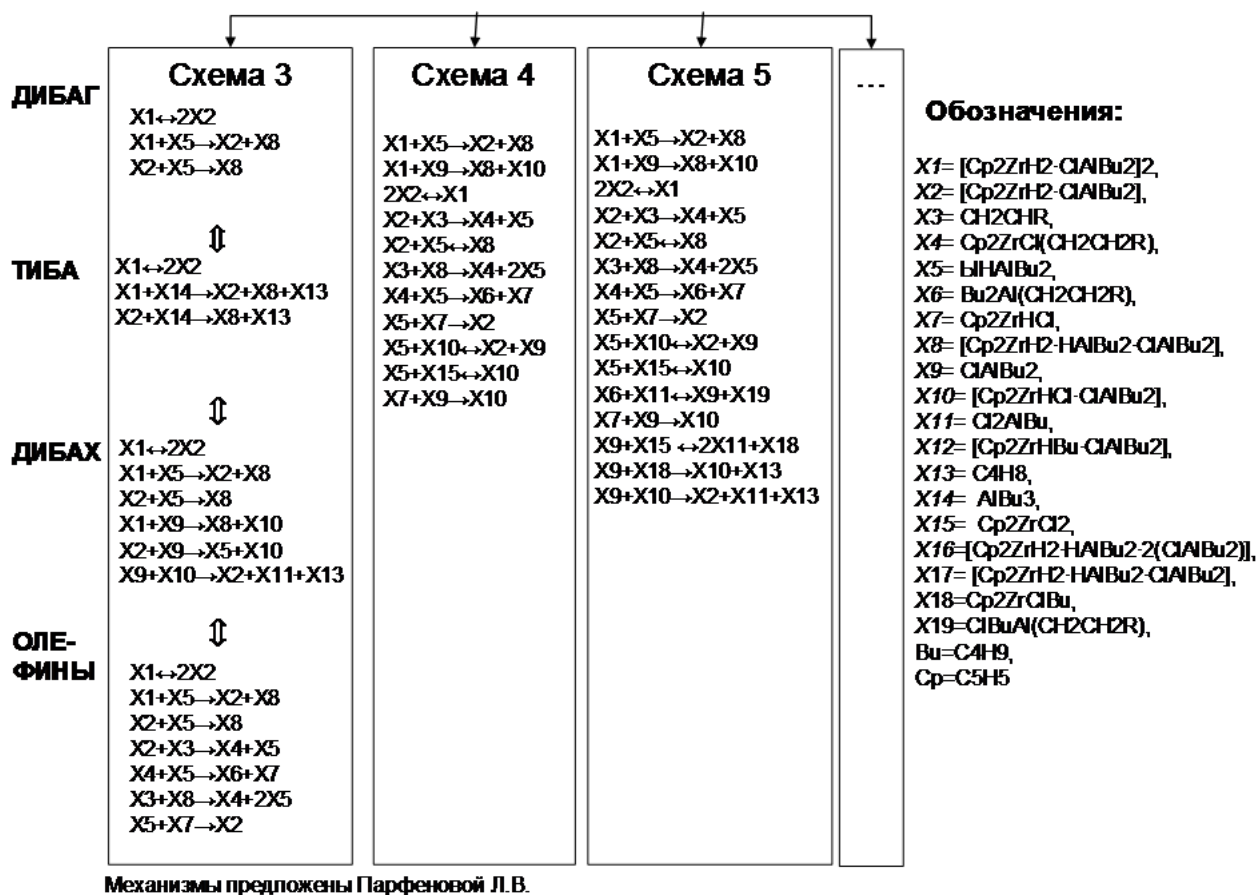
2. Внутренний параллелизм исследуемого объекта

При первоначальной постановке эксперимента сложной химической реакции трудно определить окончательно верный механизм, по которому происходит реакция. Поэтому химики-экспериментаторы на основании экспериментальных, теоретических данных предлагают первоначальный вариант механизма реакции, который, в дальнейшем, на основании дополнительных исследований, таких как квантово-химические расчеты, уточняется.

Реакция гидроалюминирования олефинов является одной из ключевых в системе реакций металлокомплексного катализа. Наши исследования являются частью исследований по установлению механизма реакции. В институте получают и экспериментальную информацию, и ведутся квантово-химические исследования, в результате которых были предложены следующие механизмы протекания реакции [5] (2.1)

На схеме 2.1 представлен второй этап детализации реакции. Были сделаны выводы, что не только мономер реагирует с АОС, но и сам димер вступает в реакцию с алкеном (вторая стадия). Проанализировав полученные стадии, объединив некоторые из них, были предложены обобщенные схемы 5, 6 реакции гидроалюминирования олефинов.

Таким образом, приходится работать с несколькими механизмами, обрабатывать большое число экспериментов, поэтому возникает необходимость создания специальных баз данных, которые будут включать в себя все эти схемы протекания реакции и экспериментальные данные.



Р и с у н о к 2.1

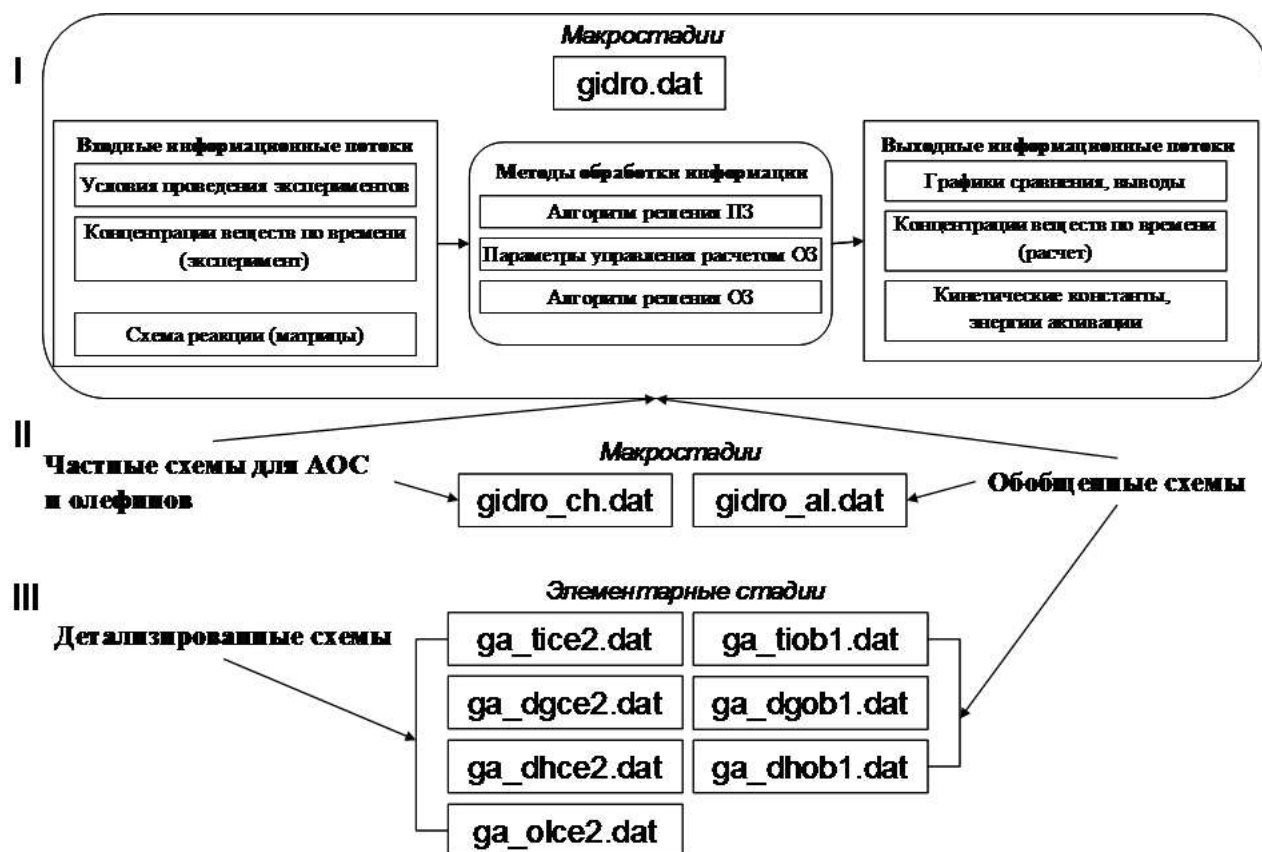
Механизмы реакции гидроалюминирования олефинов

3. Базы данных кинетических исследований

На 3.1 представлена база данных кинетических исследований, которая представляет собой входные, выходные информационные потоки и методы обработки информации.

Входные информационные состоят из схем протекания реакций (в виде матриц) и экспериментальных данных: условия проведения эксперимента, концентрации наблюдаемых веществ по времени. В методах обработки информации содержатся база алгоритмов решения задач, параметры управления расчетом. Выходные информационные потоки представляют собой различное отображение расчетных значений концентраций веществ по времени и значения кинетических параметров (констант скоростей и энергий активации).

В начале, при исследовании реакции был создан один файл с данными для общей и частных схем по АОС и олефинам. Но это вызывало неудобства при расчетах, так как нельзя было одновременно решать задачу и для частных схем, и для обобщенных схем (I 3.1). Далее он был разбит на две базы - с частными схемами и обобщенными (II 3.1). Однако, дальнейшее детализирование схем, множество вариантов механизмов для каждого АОС и олефинов заставили разделить базу на четыре, по трем АОС и олефинам [6]. Это позволяет вести параллельный расчет по этим реакциям и использовать ранее полученные результаты (III 3.1).



Р и с у н о к 3.1

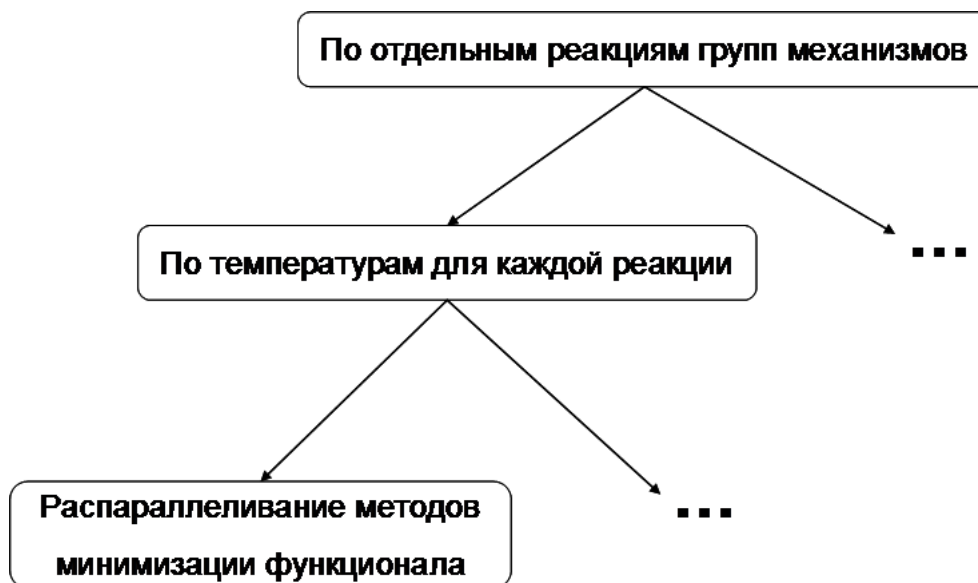
База данных кинетических исследований

4. Распараллеливание вычислительного процесса определения кинетических параметров сложных химических реакций

На 4.1 представлен общий принцип распараллеливания вычислительного процесса построения кинетической модели химической реакции[4].

Математическое моделирование на основании предложенной схемы позволяет сделать дополнительные выводы о тех или иных стадиях и о самом механизме в целом. Кроме того, для сложных реакций характерно разбиение на несколько более простых, для упрощения поиска верного механизма. Таким образом, на каком то этапе математик имеет дело с множеством механизмов, как общей схемы, так и частных реакций. При обработке этих механизмов необходимо учитывать кинетические параметры общих стадий, которые не должны в общем случае зависеть от механизма. Поэтому возникает необходимость распараллеливания по отдельным реакциям групп механизмов. Это первый уровень распараллеливания (4.2).

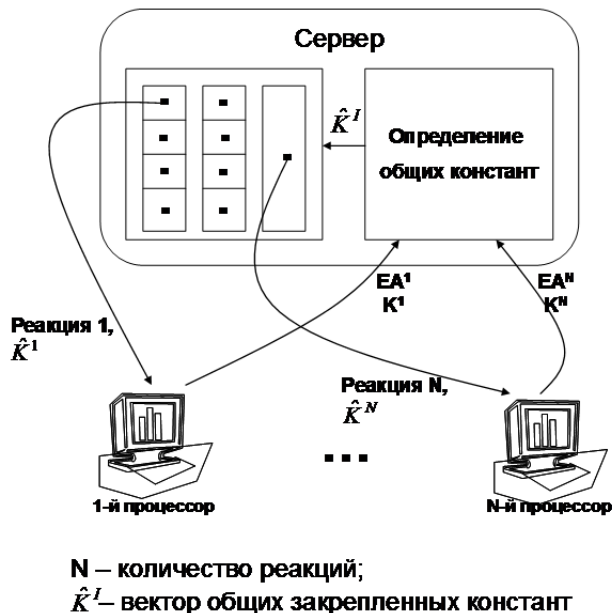
Мы имеем группу механизмов, каждый из которых состоит из нескольких реакций, определять кинетические параметры, по которым можно параллельно. Т.е. задачу по каждой реакции будет решать отдельный процессор. Управляющий компьютер передает компьютерам-работникам отдельную реакцию.



Р и с у н о к 4.1

Модель распараллеливания вычислительного процесса определения кинетических параметров сложной реакции

Уровень 1: распараллеливание по реакциям группы механизмов



Р и с у н о к 4.2

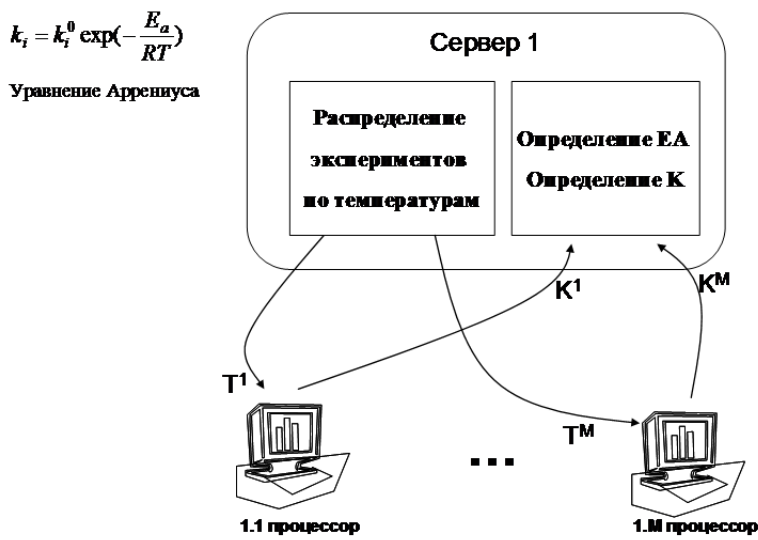
Первый уровень распараллеливания

Каждый процессор решает задачу по своей реакции и возвращает кинетические параметры (энергии активации и константы скорости). Далее управляющий компьютер выделяет набор общих констант. Для каждой константы из этого набора происходит решение обратной задачи, при этом участвуют только те механизмы, где эта константа представлена.

При поиске значения общей константы все остальные константы остаются неизменными, т.е. фиксируются. Последовательно перебирая весь набор общих констант, получаем в итоге набор, одинаково хорошо описывающий все механизмы превращений. Далее фиксируя общие константы, определяем значения независимых констант.

Далее рассмотрим, как решает свою задачу каждый из процессоров. Который уже на следующем уровне сам является управляющим (сервером) (4.3).

Уровень 2: распараллеливание реакции по температурам



M – количество рассматриваемых температур;

Р и с у н о к 4.3

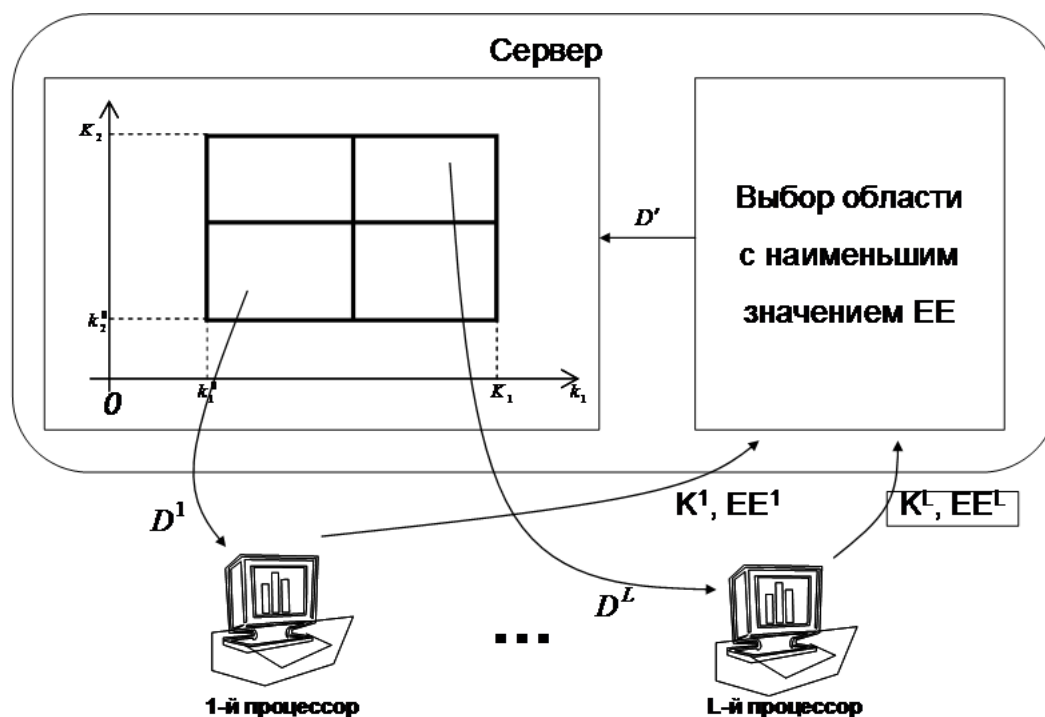
Второй уровень распараллеливания

Сервер по своей реакции распределяет каждую температуру по отдельным процессорам. Т.е. каждый процессор решает обратную задачу для своего эксперимента. Далее, определив свои константы скоростей, процессор передает их серверу.

Сервер, имея для каждой константы несколько значений при разных температурах, решает систему уравнений, составленную из уравнения Аррениуса по каждой константе при разных температурах методом наименьших квадратов, получает значения энергий активации для каждой стадии. А далее из того же уравнения Аррениуса можно определить каждую из констант скоростей для любой температуры. На следующем уровне происходит распараллеливание самого метода минимизации функционала.

Нами рассмотрено два метода минимизации функционала. Первый - многомерный метод «половинного деления» с распределением точек по равномерной сетке (4.4).

Данный метод предполагает априорное знание области изменения кинетических параметров. Пространство параметров (многомерный прямоугольный параллелепипед) разбивается надвое по каждой координате, всего получается 2^k многомерных прямоугольных параллелепипедов (k - количество кинетических констант).



L – количество подобластей ($L=2^k$, где k – количество констант)

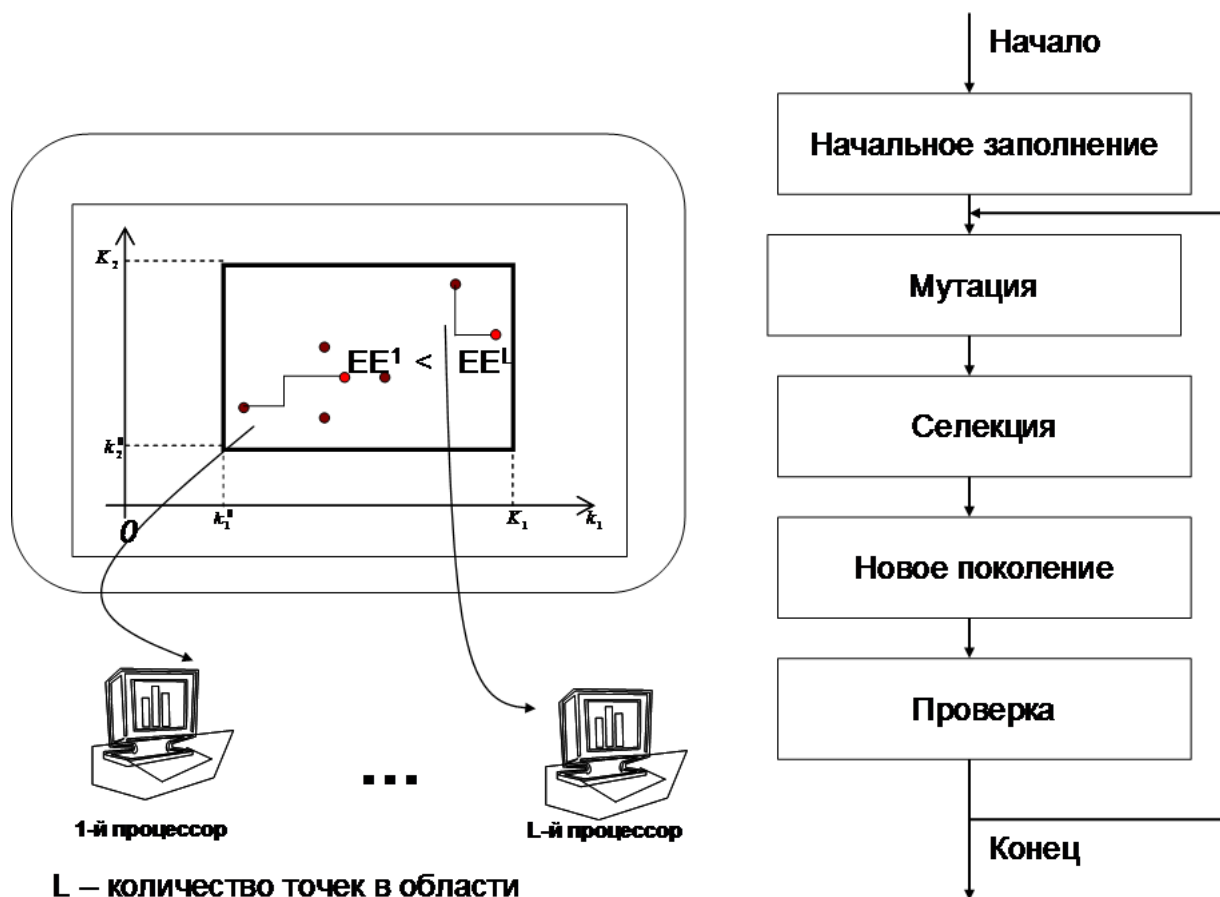
Р и с у н о к 4.4

Многомерный метод половинного деления с нахождением значений функционала в узлах равномерной сетки

Далее в каждом таком параллелепипеде действует один процессор многопроцессорной вычислительной системы (ВС), накладывая равномерную сетку на отведенное ему подпространство и вычисляя значения минимизируемого функционала в узлах этой сетки. Далее производится сравнение полученных значений и выявление наименьшего из них, в результате чего у каждого процессора появляется информация о наименьшем значении функционала в отведенном ему подпространстве. После сравнения полученных значений выбирается подпространство с наименьшим значением функционала, и процедура повторяется с новыми границами пространства и более подробной сеткой.

Число используемых процессоров в данном методе - $2k$, но оно может быть кратно увеличено за счет распределения получаемых подпространств между несколькими процессорами. Преимуществом данного метода является быстрая сходимость, а основным недостатком - большая вероятность отбрасывания глобального минимума. Второй - генетический алгоритм с последующим покоординатным спуском (4.5).

Данный метод, как и предыдущий, предполагает априорное знание области изменения кинетических параметров. При этом в пространстве параметров происходит псевдослучайное распределение точек по числу процессоров (или кратно ему), из которых каждый процессор осуществляет покоординатный спуск к ближайшему локальному минимуму. Далее производится сравнение полученных значений с отбрасыванием 75% больших, вместо которых осуществляется расстановка новых точек по нормальному распределению вокруг оставшихся точек с повторением вышеуказанной процедуры.



Р и с у н о к 4.5

Генетический алгоритм с минимизацией функционала методом покоординатного спуска

Число используемых процессоров в данном методе - $2k$, но оно может быть кратно увеличено за счет распределения кратно большего числа точек между процессорами. Преимуществом данного метода является отсутствие отбрасывания областей, потенциально могущих содержать глобальный минимум, а основным недостатком - достаточно низкая скорость сходимости.

5. Кинетическая модель сложной химической реакции

На 5.1 представлена схема превращений частных реакций гидроалюминирования второго этапа детализации. Кинетические параметры стадий реакции. На 5.2 - расчетные и экспериментальные значения концентраций веществ по времени.

Сравнивая скорости прямой и обратной реакции образования мономерного комплекса можно сделать вывод, что в интервале температур $-60 - -50^{\circ}\text{C}$ равновесие смещено в сторону димерной формы, но с увеличением температуры доля мономера в смеси возрастает.

Самой быстрой оказалась реакция перехода мономера в неактивный тригидридный комплекс (НТК). Равновесие смещено в сторону НТК, особенно при низких температурах.

Высокая скорость гидрометаллирования обеспечивается существованием обратной реакции перехода НТК в активный по отношению к олефинам мономер.

В реакции гидрометаллирования олефинов двумерным комплексом лимитирующими оказались равновероятные стадии взаимодействия мономерного комплекса с алкенами (ДИБАГ, ДИБАХ, ТИБА).

Результаты второй детализации удовлетворяют условиям того что, обратная константа намного больше прямой для первой стадии. И изменение концентрации по ДИБАГ описывается лучше, чем в первой детализации.

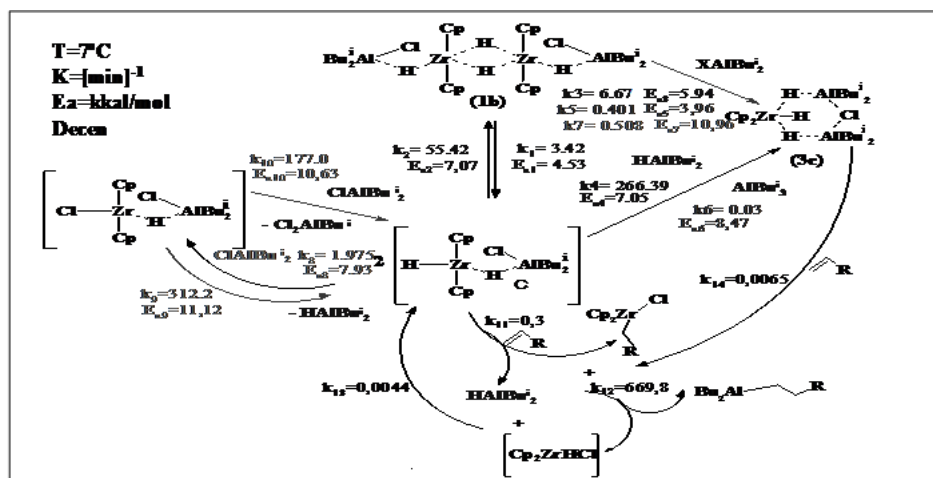


Таблица. Значения кинетических параметров стадий реакций ($[k_i] = \text{мин}^{-1}$, $[E_{a_i}] = \text{ккал/моль}$).

T	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
-65	0,2	0,7	0,17	3,48	0,03	0,0002	0,0005	0,014	0,311	0,239
-60	0,28	0,99	0,22	4,53	0,04	0,0003	0,001	0,022	0,584	0,437
-40	0,66	4,3	0,78	20,73	0,1	0,001	0,01	0,112	5,561	3,763
-20	1,44	14,3	2,14	68,99	0,2	0,006	0,103	0,43	37,06	23,07
-10	2,02	24,4	3,35	117,5	0,25	0,01	0,262	0,79	85,88	51,53
7	3,42	55,4	6,67	266,4	0,4	0,03	1,098	1,975	312,2	177,0
E_{a_1}	4,53	7,07	5,94	7,05	3,96	8,47	12,345	7,93	11,12	10,63

Олефин	T	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}
Тетрен	5	0,17	660,0	0,42	0,0009
	7	0,28	678,3	0,5	0,0011
	12	0,35	695,0	0,73	0,0023
E_{a_i}		14,2	1,085	12,0	22,167
Оксен	10	0,31	720,5	0,625	0,002
	12	0,37	786,8	0,725	0,003
	E_{a_i}	13,7	7,03	11,85	27,42
Нонен	5	0,18	745,1	0,42	0,001
	12	0,31	802,9	0,73	0,0019
	E_{a_i}	11,3	1,738	12,04	13,05
Децен	5	0,28	223,2	0,42	0,002
	7	0,29	400,0	0,5	0,0025
	E_{a_i}	8,21	23,48	12,05	11,22

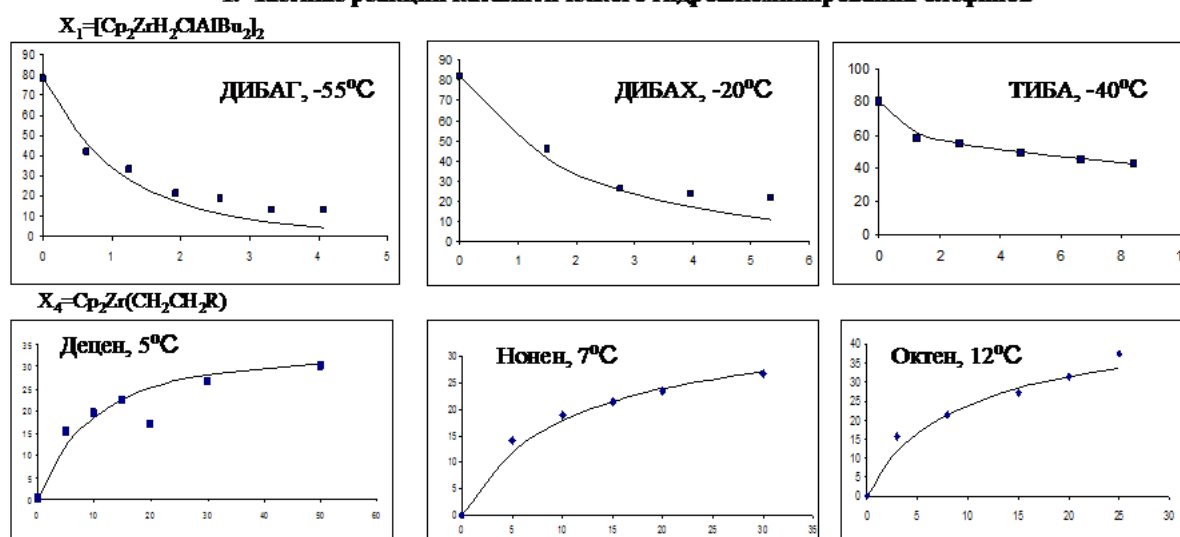
Р и с у н о к 5.1

Кинетическая модель частных реакций каталитического гидроалюминирования олефинов по второму этапу детализации

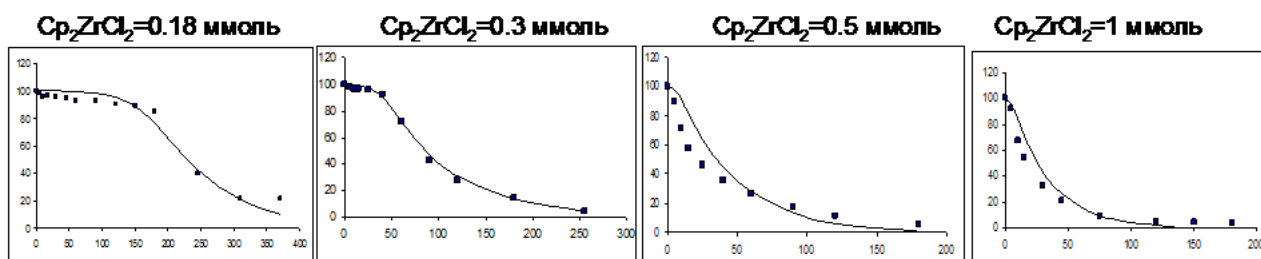
На 5.2 также представлены первоначальные результаты моделирования общей схемы реакции в присутствии диизобутилалюминийхлорида при различных концентрациях циркониевого катализатора. При концентрациях 0.18 ммоль и 0.3 ммоль наблюдается индукционный период, определение характеристик которого происходит в настоящее время.

Таким образом, в работе выявлен и исследован внутренний параллелизм рассматриваемой задачи построения механизма сложной химической реакции, с помощью детализации частных реакций. На основе двойной детализации частных реакций определены кинетические константы общего механизма, в том числе для экспериментов с индукционным периодом. Разработаны методы поиска глобального минимума функционала невязки с использованием технологии параллельных вычислений (метод многомерного половинного деления с распределением точек по равномерной сетке; генетический алгоритм с мутацией методом покоординатного спуска). Разработана информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики с использованием технологий последовательных и параллельных вычислений.

1. Частные реакции каталитического гидроалюминирования олефинов



2. Общая схема каталитического гидроалюминирования олефинов в присутствии диизобутилалюминийхлорида (октан, T=-20°C)



Р и с у н о к 5.2

Сравнение расчетных и экспериментальных данных

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халилов Л.М., Парфенова Л.В., Русаков С.В., Ибрагимов А.Г., Джемилев У.М. Синтез и превращения металлоциклов. Сообщение 22. Исследование механизма катализируемого Cr_2ZrCl_2 циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием в алюминациклопентаны методом спектроскопии ЯМР // Изв. АН, Сер. хим.-2000.-№12.- С. 2086-2093
2. Панкратьев Е.Ю., Тюпкина Т.В., Парфенова Л.В., Халилов Л.М., Хурсан С.Л., Джемилев У.М. DFT-исследование механизма гидроалюминирования олефинов $HAIBu_2$, катализируемого Cr_2ZrCl_2 . I. Моделирование образования интермедиатов в реакции $HAIBu_2$ с Cr_2ZrCl_2 // Organometallics.- 2009.- Т. 28.- №. 4.- С. 968-977.
3. Губайдуллин И.М., Спивак С.И. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики // Системы управления и информационные технологии, 2008, №1.1(31). - С. 150-153
4. Воеводин Вл.В. Решение больших задач в распределенных вычислительных средах // Автоматика и телемеханика, 2006. - №5, с. 32-45.
5. Вильданова Р.Ф. Новые гидрометаллирующие реагенты на основе комплексов L_2ZrH_2 и X_nAlR_3-n и механизм их действия: автореф. дисс. ... канд. хим. наук. Уфа, 2007. -25 с.

6. Соколинский Л.Б. Организация параллельного выполнения запросов в многопроцессорной машине баз данных с иерархической архитектурой // Программирование. - 2001. №6. С.13-29.

Serial-parallel determining of kinetic parameters

© I. M. Gubaidullin⁴, K. F. Koledina⁵, S.I.Spivak⁶

Abstract. Revelation of inner parallelism in prototype system, proposition of model of computational process parallelization, task of systematizing in information-analytic system of inverse problem of chemical kinetics in work.

Key Words: information-analytic system, inner parallelism, kinetic model, kinetic research databases.

REFERENCES

1. Khalilov L. M., Parfenova L. V., Rusakov S. V., Ibragimov A. G., Dzhemilev U. M. Synthesis and transformation metalocycles. Message 22. Study on mechanism of cycloalumination of olefins by triethylaluminum in aluminosiloxanes by method of NMR spectroscopy in the presence of Cp₂ZrCl₂ catalyst. // Proceedings of the Academy of Sciences, Ser. chem.-2000.-№12.- P. 2086-2093
2. Pankratyev E. Y., Tyumkina T. V., Parfenova L. V., Khalilov L. M., Khursan S. L., Dzhemilev U. M. "DFT Study on Mechanism of Olefin Hydroalumination by XAlBu₂ in the Presence of Cp₂ZrCl₂ Catalyst. I. Simulation of Intermediate Formation in Reaction of HAlBu₂ with Cp₂ZrCl₂ // Organometallics.- 2009.- V. 28.- N. 4.- P. 968-977.
3. Gubaidullin I.M., Spivak S.I. Information-analytical system of inverse problems of chemical kinetics // Management systems and information technology, 2008, №1.1(31). - P. 150-153
4. Voevodin V.I. The solution of large problems in distributed computing environments // Automation and Remote Control, 2006. - №5, P. 32-45.
5. Vildanova R.F. New hydrometallurgical reagents based complexes L₂ZrH₂ and X_nAlR_{3-n} and mechanism of their action: abstract diss. ... doc. chem. sciences. Уфа, 2007. -25 p.
6. Sokolinskii L.B. Organization of parallel query execution in a multiprocessor machine database with a hierarchical architecture // Programming. - 2001. N6. P.13-29.

⁴Associate professor, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Science, Ufa; irekmars@mail.ru

⁵Senior researcher, postgraduate student, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Science, Ufa; irekmars@mail.ru

⁶Head of a laboratory «Mathematical chemistry» IPC RAS, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Science, Ufa; irekmars@mail.ru

УДК 517.956.2

f -адаптированная фильтрация для диффеоморфизмов Морса-Смейла

© В. З. Гринес¹, Л. А. Куприна², О. В. Починка³, А. Е. Шищенко⁴

Аннотация. В работе вводится понятие и доказывается существование f -адаптированной фильтрации для диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n \geq 2$. Показывается, что для градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на многообразиях размерности 3, существование минимальной f -адаптированной фильтрации равносильно почти ручному вложению сепаратрис седловых точек.

Ключевые слова: фильтрация, диффеоморфизм Морса-Смейла, ручное вложение сепаратрис.

1. Введение

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Представим множество Per_f периодических точек f как объединение попарно непересекающихся подмножеств $Per_f = Per_f^+ \cup Per_f^-$, где Per_f^+ (Per_f^-) — множество всех периодических точек $p \in Per_f$ таких, что $\dim W_p^u \leq 1$ ($\dim W_p^u > 1$). Тогда множество Per_f^+ (Per_f^-) состоит из стоков Δ_f^+ (источников Δ_f^-) и седел Σ_f^+ (Σ_f^-). Положим $\mathcal{A}_f^+ = cl(W_{\Sigma_f^+}^u)$ ($\mathcal{A}_f^- = cl(W_{\Sigma_f^-}^s)$) и $L_f^+ = \mathcal{A}_f^+ \setminus \Sigma_f^+$ ($L_f^- = \mathcal{A}_f^- \setminus \Sigma_f^-$).

Следуя С. Смейлу [7], введем отношение частичного порядка \prec на множестве периодических точек f следующим образом:

$$p \prec q \iff W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset.$$

Последовательность различных периодических точек $p = r_0, r_1, \dots, r_k = q$ ($k \geq 1$) таких, что $r_0 \prec r_1 \prec \dots \prec r_k$ называется *цепью длины k , соединяющей p и q* . Максимум длин цепей, соединяющих p и q обозначается $beh(q|p)$. Для полноты полагают $beh(q|p) = 0$, если $W_q^u \cap W_p^s = \emptyset$.

Положим $k^+ = \max_{p, q \in Per_f^+} beh(q|p)$. Тогда мы можем представить множество Per_f^+ единственным образом как объединение попарно непересекающихся f -инвариантных подмножеств, $Per_f^+ = Per_{k^+}^+ \cup \dots \cup Per_0^+$, определяемых следующими формулами:

$p \in Per_{k^+}^+ \iff$ не существует точки $q \in Per_f^+$ ($q \neq p$) такой, что $p \prec q$,

$p \in Per_{k^+-j}^+ \iff p \notin Per_{k^+-i}^+, i \in \{0, \dots, j-1\}$ и не существует точки $q \in (Per_{k^+}^+ \cup \dots \cup Per_{k^+-j+1}^+)$ ($q \neq p$) такой, что $p \prec q$.

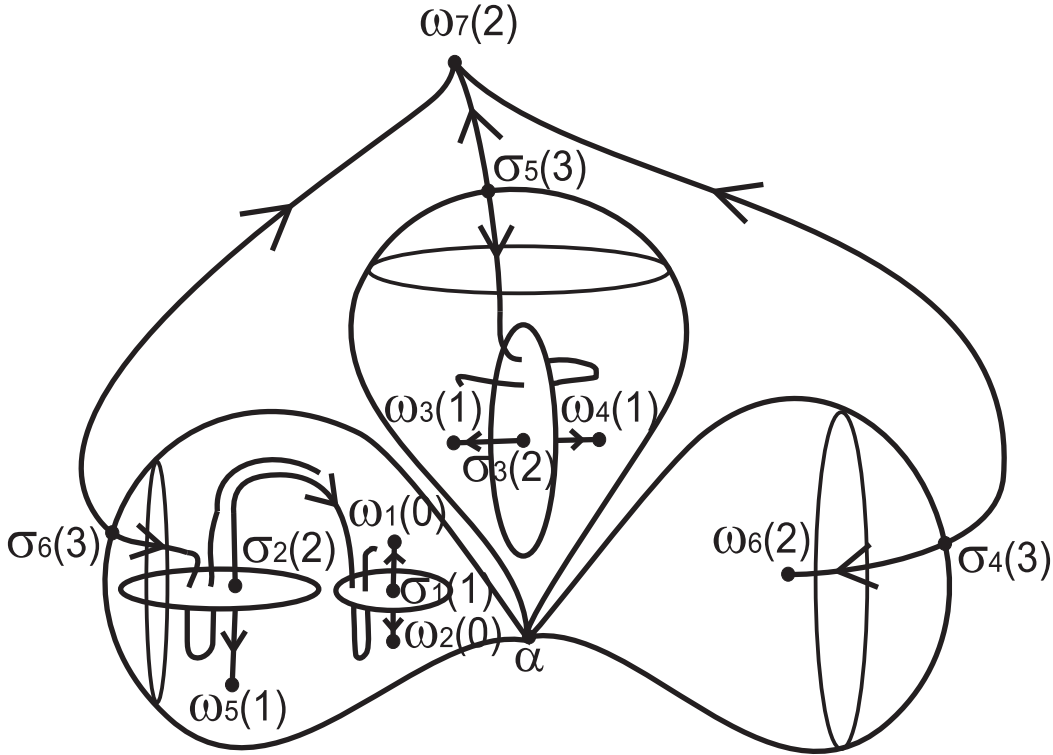
На рисунке 1.1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Около каждой периодической точки $p \in Per_f^+$ в скобках стоит число i такое, что $p \in Per_i^+$.

¹Профессор НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

²Доцент НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

³Доцент ННГУ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

⁴Доцент НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.



Р и с у н о к 1.1

Положим $A_{k^+}^+ = Per_f^+$ и $A_{k^+-j}^+ = Per_f^+ \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} Per_{k^+-i}^+$ for $j \in \{1, \dots, k^+\}$. Для $i \in \{0, \dots, k^+\}$ обозначим через $\Delta_i^+, \Sigma_i^+ (\Delta_{A_i^+}^+, \Sigma_{A_i^+}^+)$ множество всех стоков, седел, соответственно, из множества $Per_i^+ (A_i^+)$. Положим $\mathcal{A}_i^+ = cl(W_{A_i^+}^u)$, обозначим через m_i^+ число компонент связности множества \mathcal{A}_i^+ и положим $g_i^+ = m_i^+ + |\Sigma_{A_i^+}^+| - |\Delta_{A_i^+}^+|^5$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Последовательность $P_0^+, \dots, P_{k^+}^+$ подмножеств многообразия M^n назовем f -адаптированной фильтрацией для f , если:

1) P_i^+ является объединением m_i^+ попарно непересекающихся n -шаров с 1-ручками и $W_\sigma^s \cap P_i^+$ состоит в точности из одного $(n-1)$ -мерного замкнутого диска для каждой седловой точки $\sigma \in \Sigma_i^+$;

2) $\mathcal{A}_i^+ \subset f(P_i^+) \subset int P_i^+ \subset W_{A_i^+}^s$ и $P_i \subset int P_{i+1}$.

Пусть $P_0^+, \dots, P_{k^+}^+$ — f -адаптированная фильтрация для f . По построению множество Δ_i^+ либо пусто, либо состоит из изолированных в \mathcal{A}_i^+ точек для $i \in \{0, \dots, k^+\}$. Для любого множества $P_i^+, i \in \{0, \dots, k^+\}$ f -адаптированной фильтрации положим $S_i^+ = \partial P_i^+, \hat{P}_i^+ = P_i^+ \cap W_{\Delta_i^+}^s, \tilde{P}_i^+ = P_i^+ \setminus \hat{P}_i^+$ и $D_i^+ = W_{\Sigma_i^+}^s \cap \tilde{P}_i^+$. Для некоторой трубчатой окрестности $V(D_i^+) \subset \tilde{P}_i^+$ множества D_i^+ положим $Q_i^+ = \tilde{P}_i^+ \setminus int V(D_i^+)$ и $N_i^+ = Q_i^+ \setminus int P_{i-1}^+$. Заметим, что по построению множества D_0, Q_0, N_0 являются пустыми.

О п р е д е л е н и е 1.2. f -адаптированная фильтрация $P_0^+, \dots, P_{k^+}^+$ для f называется минимальной, если:

⁵Здесь и везде далее $|A|$ — мощность множества A .

- 1) род $g(P_i^+)$ равен⁶ g_i^+ для каждого $i \in \{0, \dots, k^+\}$;
- 2) для каждого $i \in \{1, \dots, k^+\}$ существует трубчатая окрестность $V(D_i^+)$ множества D_i^+ такая, что N_i^+ диффеоморфно $S_{i-1}^+ \times [0, 1]$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Т е о р е м а 1.1. Для любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$ существует f -адаптированная фильтрация.

Т е о р е м а 1.2. Градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ обладает минимальной фильтрацией тогда и только тогда, когда множество L_f^+ состоит из одной точки или почти ручно вложено в M^3 .

2. Существование f -адаптированной фильтрации

Чтобы доказать, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$ обладает f -адаптированной фильтрацией мы будем использовать следующую лемму.

Л е м м а 2.1. Пусть \mathcal{O}_p — изолированная гиперболическая периодическая орбита диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ такая, что $\dim W_p^u = q$. Тогда существует окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ орбиты \mathcal{O}_p и функция Морса $\varphi_{\mathcal{O}_p} : U_{\mathcal{O}_p} \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- 1) $\varphi_{\mathcal{O}_p}(f(x)) < \varphi_{\mathcal{O}_p}(x)$ для любого $x \in (f^{-1}(U_{\mathcal{O}_p}) \setminus \mathcal{O}_p)$ и $\varphi_{\mathcal{O}_p}(f(x)) = \varphi_{\mathcal{O}_p}(x)$ для $x \in \mathcal{O}_p$;
- 2) $Str_{\varphi_{\mathcal{O}_p}} = \mathcal{O}_p$ и каждая критическая точка имеет индекс q ;
- 3) $(W_r^u \cap U_{\mathcal{O}_p}) \subset Ox_1 \dots x_q$ и $(W_r^s \cap U_{\mathcal{O}_p}) \subset Ox_{q+1} \dots x_n$ для координат Морса x_1, \dots, x_n в окрестности точки $r \in \mathcal{O}_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку \mathcal{O}_p — гиперболическое множество, то для каждой точки $r \in \mathcal{O}_p$ касательное пространство $T_r M^n$ раскладывается в прямую сумму подпространств $T_r M^n = T_r W_r^u \oplus T_r W_r^s$ таких, что $D_r f(T_r W_r^u) = T_{f(r)} W_{f(r)}^u$ и $D_r f(T_r W_r^s) = T_{f(r)} W_{f(r)}^s$. Более того, существует метрика Ляпунова $\|\cdot\|$ на M^n и константа $0 < \lambda < 1$ такие, что $\|Df^{-1}(v^u)\| \leq \lambda \|v^u\|$, $\|Df(v^s)\| \leq \lambda \|v^s\|$ для каждого $v^u \in E^u$ и $v^s \in E^s$, где $E^u = \bigcup_{r \in \mathcal{O}_p} T_r W_r^u$ и $E^s = \bigcup_{r \in \mathcal{O}_p} T_r W_r^s$.

Определим отображение $\varphi : E^u \oplus E^s \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\varphi(v^u, v^s) = -\|v^u\|^2 + \|v^s\|^2$. Проверим, что $\varphi(Df(v^u, v^s)) < \varphi(v^u, v^s)$ для любого ненулевого $v^u \in E^u$ и $v^s \in E^s$. Действительно, $\varphi(Df(v^u, v^s)) - \varphi(v^u, v^s) = -\|Df(v^u)\|^2 + \|Df(v^s)\|^2 + \|v^u\|^2 - \|v^s\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda^2} \|v^u\|^2 + \lambda^2 \|v^s\|^2 + \|v^u\|^2 - \|v^s\|^2 \leq -(\frac{1}{\lambda^2} - 1) \|v^u\|^2 - (1 - \lambda^2) \|v^s\|^2 < 0$ для любого ненулевого $v^u \in E^u$ и $v^s \in E^s$.

Отождествим малую окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ орбиты \mathcal{O}_p с окрестностью нулевого сечения $E^u \oplus E^s$ посредством диффеоморфизма, который переводит локальное неустойчивое (устойчивое) многообразие в E^u (E^s). Тогда для каждого $v = (v^u, v^s) \in U_{\mathcal{O}_p}$ мы имеем $f(v^u, v^s) = Df(v^u, v^s) + o(v)$. Следовательно $\varphi(f(v^u, v^s)) < \varphi(v^u, v^s)$ для ненулевого $(v^u, v^s) \in U_{\mathcal{O}_p}$, если окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ выбрана достаточно малой. Таким образом, $\varphi_{\mathcal{O}_p} = \varphi$ — искомая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

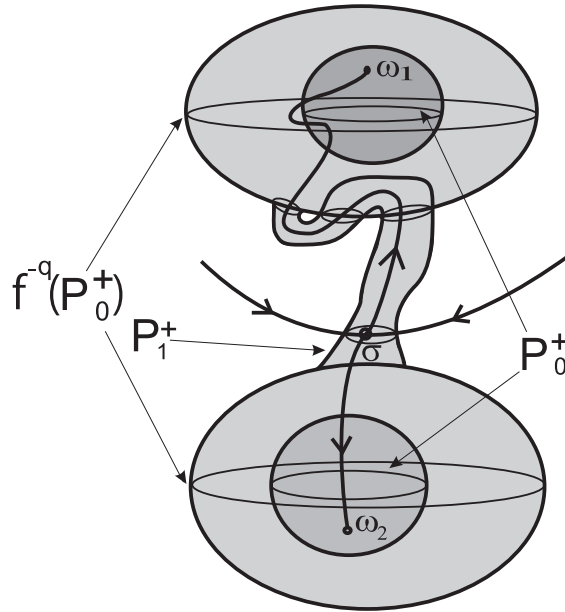
⁶Пусть P — объединение попарно непересекающихся 3-шаров с 1-ручками P_0, \dots, P_m родов g_0, \dots, g_m . Число $g(P) = g_0 + \dots + g_m$ мы называем *родом* P .

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$, $n \geq 2$ существует f -адаптированная фильтрация.*

До к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму индукцией по $i = 0, \dots, k^+$.

Пусть $i = 0$. По построению множество A_0^+ состоит из гиперболических стоков. В силу леммы 2.1., существует окрестность $U_{A_0^+} \subset W_{Per_0^+}^s$ множества A_0^+ и функция $\varphi_{A_0^+} : U_{A_0^+} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_{A_0^+}(A_0^+) = 0$ и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ множество $P_0^+ = \varphi_{A_0^+}^{-1}([0, \varepsilon_0])$ является объединением m_0^+ n -шаров и $\mathcal{A}_0^+ \subset f(P_0^+) \subset \text{int } P_0^+ \subset W_{A_0^+}^s$.

Пусть по предположению индукции мы построили множество P_i^+ со свойствами 1) и 2) из определения 1.1. Построим множество P_{i+1}^+ .



Р и с у н о к 2.1

Если $\Delta_{i+1}^+ = \emptyset$, то $\hat{P}_{i+1}^+ = \emptyset$. Если $\Delta_{i+1}^+ \neq \emptyset$, то Δ_{i+1}^+ состоит из гиперболических стоков и, подобно случаю $i = 0$, существует объединение $|\Delta_{i+1}^+|$ n -шаров таких, что $\Delta_{i+1}^+ \subset f(P_{i+1}^+) \subset \text{int } P_{i+1}^+ \subset W_{\Delta_{i+1}^+}^s$.

Согласно теореме о трансверсальности (см. [3], теорема 2.1) мы можем предположить, что S_i^+ трансверсально пересекает множество $W_{\Sigma_{i+1}^+}^u$; обозначим через n_i число точек пересечения. Положим $M_i = W_{A_i^+}^s \setminus \mathcal{A}_i^+$, $\hat{M}_i = M_i/f$ и обозначим через $p : M_i \rightarrow \hat{M}_i$ естественную проекцию. Так как \hat{M}_i получается из кобордизма $P_i^+ \setminus \text{int } f(P_i^+)$ склеиванием его границ в силу f , то $p(W_{\Sigma_{i+1}^+}^u)$ является объединением узлов, которые трансверсально пересекают $p(S_i^+)$ в n_i точках. Выберем трубчатую окрестность $\hat{T} \subset \hat{M}_i$ узлов $p(W_{\Sigma_{i+1}^+}^u)$ так, что $\hat{T} \cap p(S_i^+)$ состоит из n_i 2-дисков. Положим $T = p^{-1}(\hat{T})$.

Согласно лемме 2.1., существует окрестность $U_{\Sigma_{i+1}^+} \subset (T \cup W_{\Sigma_{i+1}^+}^s)$ множества Σ_{i+1}^+ и энергетическая функция $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+} : U_{\Sigma_{i+1}^+} \rightarrow \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+}(\Sigma_{i+1}^+) = 0$. Для малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента связности множества $V := \varphi_{\Sigma_{i+1}^+}^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2, x_3) \in U_{\Sigma_{i+1}^+} \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах. В силу λ -леммы (см. [5], λ -лемма), существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-q}(S_i^+)$ трансверсально пересекает V и $f(V)$ по n_i 2-дискам; более того, так как $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+}$ — функция Ляпунова для f на $U_{\Sigma_{i+1}^+}$, то $(f(V) \setminus \text{int } f^{-q}(P_i^+)) \subset \text{int } V$ (см. рисунок 2.1). Следовательно, $\tilde{P}_{i+1}^+ = f^{-q}(P_i^+) \cup V$ —

объединение 3-шаров с 1-ручками, которое получается из 3-шаров с 1-ручками $f^{-q}(P_i^+)$ приклеиванием 1-ручек $V \setminus \text{int } f^{-q}(P_i^+)$; более того, $f(\tilde{P}_{i+1}^+) \subset \text{int } \tilde{P}_{i+1}^+$, действительно, это верно для точек $x \in f^{-q}(P_i^+)$, так как $f^{-q}(P_i^+)$ — f -сжимаемо и верно для точек $x \in V \setminus f^{-q}(P_i^+)$, так как $(f(V) \setminus \text{int } f^{-q}(P_i^+)) \subset \text{int } V$. Положим $P_{i+1} = \tilde{P}_{i+1}^+ \cup \tilde{P}_{i+1}^+$. По построению P_{i+1} — f -сжимаемо. Его сглаживание удовлетворяет свойствам 1) и 2) из определения 1.1.

Доказательство закончено.

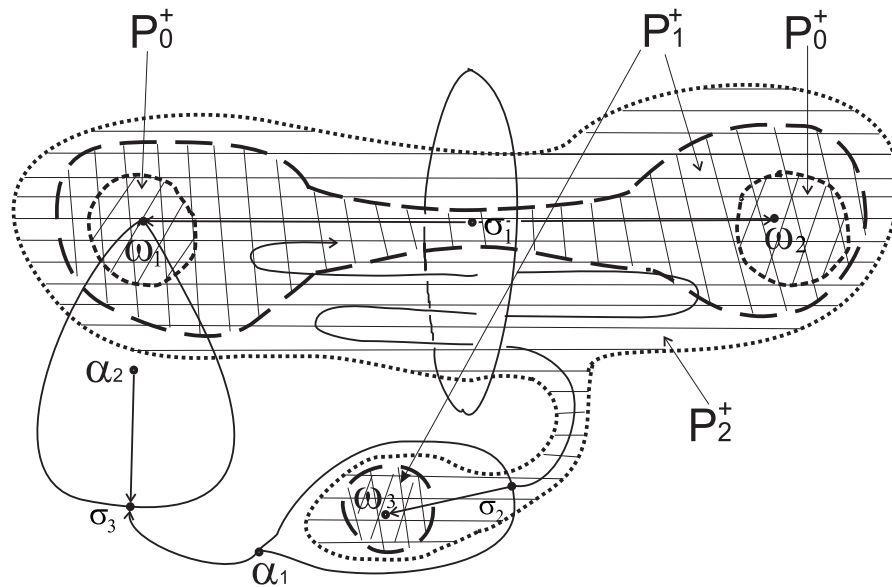


Рисунок 2.2

3. Свойства f -адаптированной фильтрации

Предложение 3.1. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ — последовательность компактных связных подмножеств нормального пространства X . Тогда $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ — непустое связное компактное подмножество X .

Доказательство. Компактность множества A следует из того, что пересечение замкнутых ограниченных множеств замкнуто и ограничено. Покажем, что A непусто. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} \subset A_1$ такую, что $x_i \in A_i$. Так как A_1 компактно, то не уменьшая общности можно считать, что существует точка $x \in A_1$ являющаяся пределом последовательности $\{x_k\}$ (в противном случае можно рассмотреть сходящуюся подпоследовательность). Нетрудно видеть, что $x \in A_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$, так как все члены последовательности $\{x_k\}$, начиная с i -ого принадлежат A_i . Откуда $x \in A$.

Покажем, что A связно. Предположим противное, $A = B \cup C$, где B и C — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U_B и U_C множеств B и C . В силу вложенности существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $A_{k_0} \subset (U_B \cup U_C)$. Так как A_{k_0} связно, то A_{k_0} принадлежит либо U_B либо U_C . Положим для определенности $A_{k_0} \subset U_B$, тогда $A_{k_0} \cap U_C = \emptyset$. Получили противоречие с тем, что $C \subset A_{k_0}$.

Доказательство закончено.

Лемма 3.1.

- 1) Для любой f -адаптированной фильтрации $P_0^+, \dots, P_{k^+}^+$, множество $P_{k^+}^+$ является связным.
- 2) Множество \mathcal{A}_f^+ является связным аттрактором⁷ размерности ≤ 1 .

Доказательство. По построению $P_{k^+}^+$ является захватывающей окрестностью для \mathcal{A}_f^+ и, следовательно, \mathcal{A}_f^+ является аттрактором. Поскольку \mathcal{A}_f^+ состоит из конечного числа гладких подмногообразий размерностей ≤ 1 (см. [7], предложение 2.3), то топологическая размерность аттрактора \mathcal{A}_f^+ также ≤ 1 . Для доказательства связности аттрактора \mathcal{A}_f^+ достаточно показать, что множество $P_{k^+}^+$ связно. Тогда аттрактор \mathcal{A}_f^+ будет связным как пересечение компактных связных вложенных множеств (см. предложение 3.1.).

Предположим противное, то есть предположим, что множество $P_{k^+}^+$ не связно. Тогда мы можем представить $P_{k^+}^+$ как объединение попарно непересекающихся замкнутых подмножеств X_1 и X_2 . Не уменьшая общности будем считать, что $f(X_j) \subset \text{int } X_j$, $j = 1, 2$ (в противном случае можно провести рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f). Положим $\tilde{X}_j = \bigcup_{n \leq 0} f^n(\text{int } X_j)$. По построению \tilde{X}_1 и \tilde{X}_2 не пустые открытые попарно непересекающиеся множества такие, что $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 = W_{Per_f^+}^s = M^n \setminus \mathcal{A}_f^-$. Таким образом, множество $M^n \setminus \mathcal{A}_f^-$ не связно. Получили противоречие с тем, что множество \mathcal{A}_f^- , имеющее топологическую размерность $\leq (n - 2)$, делит многообразие M^n (см. теорему о разбивающих множествах, [4], глава 4, следствие 1 теоремы IV).

Доказательство закончено.

Заметим, что множество \mathcal{A}_f^- является репеллером диффеоморфизма f , поскольку имеет захватывающую окрестность $M^n \setminus P_{k^+}^+$. Кроме того, применяя рассуждения выше для \mathcal{A}_f^- , можно доказать, что для $n \geq 3$ репеллер \mathcal{A}_f^- является связным.

4. Связь f -адаптированной фильтрации с вложением сепаратрис

Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, ω — сток f и L_ω — объединение всех неустойчивых одномерных сепаратрис, содержащих ω в своих замыканиях.

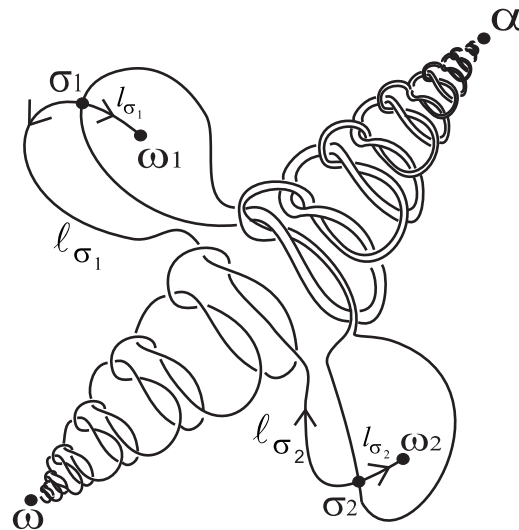
Определение 4.1. Пучок сепаратрис L_ω называется ручным, если существует гомеоморфизм $\psi : W_\omega^s \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\psi(\omega) = 0$ и $\psi(\ell \cup \omega)$ — луч с началом в точке 0 для каждой сепаратрисы $\ell \subset L_\omega$. Мы назовем множество L_f^+ градиентно-подобного диффеоморфизма f ручным в M^3 , если таковыми являются L_ω для каждого стока ω .

Определение 4.2. Пучок сепаратрис L_ω называется почти ручным, если существует гладкий 3-шар $B_\omega \subset W_\omega^s$ такой, что $\omega \in \text{int } B_\omega$ и $\ell \cap \partial B_\omega$ состоит в точности из одной точки для каждой сепаратрисы $\ell \subset L_\omega$. Мы назовем множество L_f^+ градиентно-подобного диффеоморфизма f почти ручным в M^3 , если таковыми являются L_ω для каждого стока ω .

Если пучок L_ω состоит в точности из одной сепаратрисы ℓ , то понятия ручности и почти ручности совпадают (см. [2], теорема 6). В случае большего числа сепаратрис

⁷Компактное подмножество A компактного метрического пространства X называется аттрактором дискретной динамической системы f на X , если оно имеет компактную окрестность $N \neq X$ такую, что $f(N) \subset \text{int } N$ и $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(N)$. Окрестность N называется захватывающей. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

из ручности следует почти ручность, однако, обратное следствие неверно. На рисунке 4.1 изображен фазовый портрет градиентно-подобного диффеоморфизма на \mathbb{S}^3 с почти ручным, но не ручным пучком сепаратрис (доказательство этого факта можно найти в работе [1]).



Р и с у н о к 4.1

Т е о р е м а 1.2. *Градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ обладает минимальной фильтрацией тогда и только тогда, когда множество L_f^+ состоит из одной точки или почти ручно вложено в M^3 .*

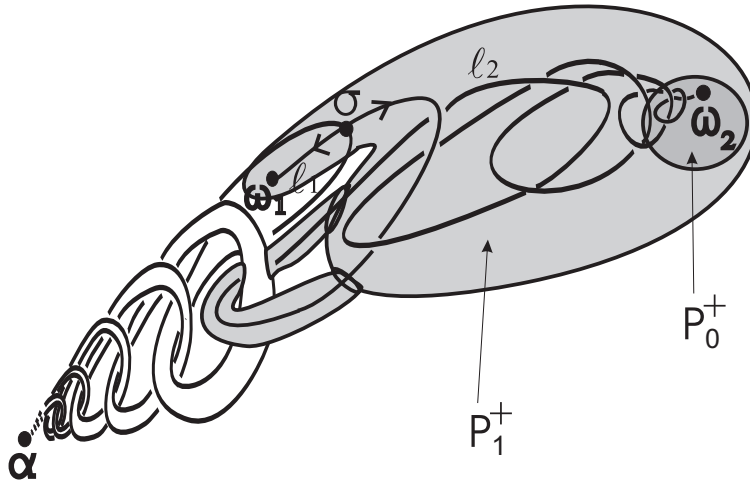
Доказательство. Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Так как f не содержит гетероклинических точек, то возможны два случая: 1) $k^+ = 0$ и 2) $k^+ = 1$. В случае 1), L_f^+ состоит из одной точки. В случае 2), L_f^+ является одномерным клеточным комплексом, состоящим из $|\Delta_f^+|$ нульмерных клеток (стоков) и из $|\Sigma_f^+|$ одномерных клеток (неустойчивых многообразий седловых точек из Σ_f^+). В случае 1) критерий очевиден. Докажем его в случае 2).

Необходимость. Из определения минимальной фильтрации следует, что $P_{k^+}^+$ — 3-шар с $g_{k^+}^+$ 1-ручками. Выберем трубчатую окрестность $V(D_{k^+}^+)$ 2-дисков $D_{k^+}^+ = P_{k^+}^+ \cap W_{\Sigma_f^+}^s$ такую, что $\ell \cap \partial V(D_{k^+}^+)$ состоит в точности из одной точки для каждой сепаратрисы $\ell \subset L_f^+$ и $f(B^+) \subset \text{int} B^+$ для $B^+ = P^+ \setminus \text{int} V(D_{k^+}^+)$. Тогда B^+ является объединением $|\Delta_f^+|$ попарно непересекающихся 3-шаров с 1-ручками рода $g(B^+) = 0$ и $P_{k^+}^+$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса с $|\Delta_f^+|$ нульмерными и $|\Sigma_f^+| + g(B^+)$ одномерными клетками. Тогда по формуле эйлеровой характеристики для клеточного комплекса получаем, что $1 - g_{k^+}^+ = |\Delta_f^+| - |\Sigma_f^+| - g(B^+)$. Откуда $g(B^+) = 0$. Таким образом, B^+ является объединением 3-шаров, удовлетворяющих условиям определения 4.2. и, следовательно, множество L_f^+ почти ручно вложено.

Достаточность. Следует из построения f -адаптированной фильтрации (см. теорему 1.1.) с учетом почти ручности множества L_f^+ .

Доказательство закончено.

На рисунке 4.2 представлена f -адаптированная фильтрация для примера, построенного Пикстоном в [6]. В силу дикости сепаратрисы ℓ_2 , изображенный диффеоморфизм f не обладает минимальной фильтрацией. Так P_1^+ является заполненным тором, а не 3-шаром.



Р и с у н о к 4.2

Благодарности. Первый и третий авторы поддержаны грантом РФФИ номер 08-01-00547.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Debrunner, R. Fox. A mildly wild imbedding of an n -frame. Duke Math. Journal. 1960. V. 27, 425-429.
2. Harrold O.G., Griffith H.C., Posey E.E. A characterization of tame curves in three-space. Trans. AMS. 1955. V. 79, 12-34.
3. Хирш М. Дифференциальная топология. Москва. 1979. 281 с.
4. Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton University Press. Princetown, NJ. 1984.
5. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969. V. 8, № 4, 385-404.
6. Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, № 2, 167-172.
7. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 1, 113-185.

f -adapted filtration for Morse-Smale diffeomorphisms

© V. Z. Grines⁸, L. A. Kuprina⁹, O. V. Pochinka¹⁰, A. E. Shishenkova¹¹

Abstract. We introduce the concept and prove existing of f -adapted filtration for Morse-Smale diffeomorphisms on manifold of dimension $n \geq 2$. It is shown that for gradient-like diffeomorphisms given on 3-manifolds, existing of minimal filtration is equivalent to almost tame embedding of separatrices of saddle periodic points.

Key Words: filtration, Morse-Smale diffeomorphism, tame embedding of separatrices.

REFERENCES

1. H. Debrunner, R. Fox. A mildly wild imbedding of an n -frame. Duke Math. Journal. 1960. V. 27, 425-429.
2. Harrold O.G., Griffith H.C., Posey E.E. A characterization of tame curves in three-space. Trans. AMS. 1955. V. 79, 12-34.
3. Hirsch, Differential topology. Graduated texts in mathematics. V 33, Springer-Verlag 1976.
4. Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton University Press. Princetown, NJ. 1984.
5. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969. V. 8, № 4, 385-404.
6. Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, № 2, 167-172.
7. Smale S. Differential dynamic system. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 1967, 747-817.

⁸Professor, head of chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁹Associate professor of NGSHA, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

¹⁰Associate professor of NNGU, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.

¹¹Associate professor of NGSHA, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

УДК 517.9

Устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в аэроупругости

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. Получены условия устойчивости решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику упругих пластин при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа.

Ключевые слова: динамическая устойчивость; нелинейность; дифференциальное уравнение; частные производные; упругая пластина; сверхзвуковое обтекание.

1. Введение

Работа посвящена исследованию динамической устойчивости упругих пластин, находящихся во взаимодействии с потоком идеального газа. Предполагается сверхзвуковой режим обтекания.

Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение материала пластин описывается нелинейными моделями упругого тела. Аэрогидродинамическая нагрузка определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики.

Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов, соответствующих модельным интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных. Полученные условия устойчивости движения упругих элементов налагают ограничения на скорость потока, значения сжимающих (растягивающих) усилий, жесткость пластин и оснований, коэффициенты демпфирования, а также другие параметры механических систем. При дозвуковом обтекании пластин и конструкций исследование динамической устойчивости ранее были проведены в работах [1], [2].

2. Исследование устойчивости

Рассмотрим модельное уравнение, описывающее поперечные колебания упругой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа (рис. 2.1):

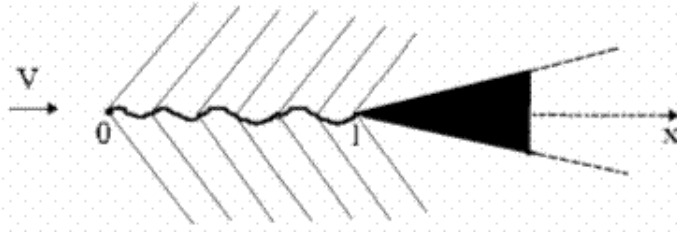
$$M\ddot{w} + \left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \right)'' + \beta_2 \dot{w}'''' - \nu \ddot{w}'' + N(t)w'' + \beta_1 \dot{w} + \beta_0 w = -\alpha (\dot{w} + Vw'), \quad (2.1)$$
$$x \in (0, l).$$

Здесь $w(x, t)$ - прогиб пластины; x - продольная координата, t - время; M , D - погонная масса и изгибная жесткость пластины; β_2 , β_1 - коэффициенты внутреннего (модель

¹Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск.

²Профессор, зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск; velmiso@ulstu.ru.

Фойхта) и внешнего демпфирования (материала пластины и основания); ϑ - коэффициент, учитывающий инерцию вращения; N - сжимающее ($N > 0$) или растягивающее ($N < 0$) продольное усилие; β_0 - коэффициент жесткости основания (модель Винклера); $\alpha = \alpha_0 \rho_0 a_0 = const > 0$, где ρ_0, a_0 - плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании); V - скорость набегающего однородного потока ($V = const > 0$); штрих обозначает производную по координате x , точка - производную по времени t .



Р и с у н о к 2.1

Пример обтекания конструкции с упругим элементом
сверхзвуковым потоком газа

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением $F = \alpha (\dot{w} + Vw')$, справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока V . Выражение для F получено с помощью решения соответствующей линейной нестационарной аэродинамической задачи на основе преобразования Лапласа и последующего исключения потенциала скорости (что согласуется с гипотезой плоских сечений Ильюшина А.А.).

Изгибающий момент M_x и перерезывающая сила Q_x в указанной модели определяются выражениями

$$M_x = \frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \beta_2 \dot{w}''', \quad Q_x = \vartheta \dot{w}' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \beta_2 \dot{w}''' \right)'. \quad (2.2)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M \dot{w}^2 + 2M\theta w \dot{w} + (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta) w^2 + \beta_2 \theta w''^2 + \vartheta \dot{w}'^2 + 2\vartheta \theta w' \dot{w}' - N w'^2 \right\} dx, \quad (2.3)$$

где $\theta > 0$ - некоторый положительный постоянный параметр.

Пусть концы пластины закреплены жестко или шарнирно, тогда граничные условия для $w(x, t)$ имеют вид

$$1) w(x, t) = w'(x, t) = 0, \quad 2) w(x, t) = w''(x, t) = 0; \quad x = 0 \text{ или } x = l. \quad (2.4)$$

В случае шарнирного закрепления конца пластины изгибающий момент, определяемый по формуле (2.2), равен нулю: $M_x = 0$.

Проведем оценки для функционала (2.3) и его производной, используя неравенства, справедливые при условиях (2.4):

$$\begin{aligned} \int_0^l w''^2(x, t) dx &\geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l \dot{w}''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_0^l \dot{w}'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l \dot{w}''^2(x, t) dx \geq \\ &\geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \quad w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w'^2(x, t) dx \geq \eta_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где λ_1, μ_1, η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $\psi'' = -\eta\psi$ [3] с граничными условиями (2.4).

Найдем производную от Φ по t :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = \int_0^l \{ & M\dot{w}\ddot{w} + M\theta\dot{w}^2 + M\theta w\ddot{w} + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta) w\dot{w} + \beta_2\theta w''\dot{w}'' + \vartheta\dot{w}'\ddot{w}' + \\ & + \vartheta\theta \dot{w}'^2 + \vartheta\theta w'\ddot{w}' - Nw'\dot{w}' - 0,5\dot{N}w'^2\} dx. \end{aligned}$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (2.1), это равенство примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = \int_0^l \left\{ -\dot{w} \left[\left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \right)'' + \beta_2\dot{w}'''' - \vartheta\ddot{w}'' + Nw'' + \beta_1\dot{w} + \beta_0w + \alpha(\dot{w} + Vw') \right] + \right. \\ \left. + M\theta\dot{w}^2 - \theta w \left[\left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \right)'' + \beta_2\dot{w}'''' - \vartheta\ddot{w}'' + Nw'' + \beta_1\dot{w} + \beta_0w + \alpha(\dot{w} + Vw') \right] + \right. \\ \left. + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta) w\dot{w} + \beta_2\theta w''\dot{w}'' + \vartheta\dot{w}'\ddot{w}' + \vartheta\theta \dot{w}'^2 + \vartheta\theta w'\ddot{w}' - Nw'\dot{w}' - 0,5\dot{N}w'^2 \right\} dx. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Проведем интегрирование по частям с учетом условий (2.4):

$$\begin{aligned} \int_0^l w \left[\vartheta\ddot{w}'' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \beta_2\dot{w}'' \right)'' \right] dx &= \int_0^l wQ'_x dx = wQ_x|_0^l - \int_0^l w'Q_x dx = \\ &= - \int_0^l \vartheta w'\ddot{w}' dx + \int_0^l w'M'_x dx = - \int_0^l \vartheta w'\ddot{w}' dx + w'M_x|_0^l - \int_0^l w''M_x dx = \\ &= - \int_0^l \vartheta w'\ddot{w}' dx - \int_0^l \beta_2 w''\dot{w}'' dx - \int_0^l \frac{Dw''^2}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} dx, \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{w} \left[\vartheta\ddot{w}'' - \left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \beta_2\dot{w}'' \right)'' \right] dx &= - \int_0^l \left(\vartheta\dot{w}'\ddot{w}' + \beta_2 \dot{w}''^2 + \frac{D\dot{w}''w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \right) dx, \\ \int_0^l ww' dx &= \frac{w^2}{2} \Big|_0^l = 0, \quad \int_0^l \dot{w}w'' dx = - \int_0^l \dot{w}'w' dx, \\ \int_0^l ww'' dx &= - \int_0^l \dot{w}'^2 dx, \quad \int_0^l \dot{w}\dot{w}'''' dx = \int_0^l \dot{w}''^2 dx. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, из (2.6) получим

$$\dot{\Phi}(t) = - \int_0^l \left\{ \frac{D\theta w''^2}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \frac{D\dot{w}'' w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + \beta_2 \dot{w}''^2 + (\beta_1 + \alpha - M\theta) \dot{w}^2 + \alpha V \dot{w} w' - \right. \\ \left. -(N\theta + 0,5\dot{N})w'^2 + \beta_0 \theta w^2 - \vartheta \theta \dot{w}^2 \right\} dx. \quad (2.8)$$

Пусть выполняются условия

$$D > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \theta > 0. \quad (2.9)$$

Тогда, учитывая второе неравенство (2.5), а также неравенство

$$\frac{D\theta w''^2}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} \geq \frac{D\theta w''^2}{(1+w'^2)^3},$$

из (2.8) получим

$$\dot{\Phi}(t) = - \int_0^l \left\{ \frac{D\theta w''^2}{(1+w'^2)^3} + \frac{D\dot{w}'' w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}} + (\beta_2 - \lambda_1^{-1} \vartheta \theta) \dot{w}''^2 + (\beta_1 + \alpha - M\theta) \dot{w}^2 + \alpha V \dot{w} w' - \right. \\ \left. -(N\theta + 0,5\dot{N})w'^2 + \beta_0 \theta w^2 \right\} dx. \quad (2.10)$$

Рассматривая квадратичные формы относительно $\frac{w''}{\sqrt{(1+w'^2)^3}}$, \dot{w}'' и \dot{w} , w' , получим, согласно критерию Сильвестра, условия их положительной определенности:

$$\beta_2 - \lambda_1^{-1} \vartheta \theta > 0, \quad D \leq 4\theta (\beta_2 - \lambda_1^{-1} \vartheta \theta), \quad \beta_1 + \alpha - M\theta > 0, \\ N\theta + 0,5\dot{N} < 0, \quad -4(\beta_1 + \alpha - M\theta) (N\theta + 0,5\dot{N}) > \alpha^2 V^2. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) получим $\dot{\Phi} \leq 0$. Следовательно,

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (2.12)$$

Оценим функционал (2.3) следующим образом

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w \dot{w} + (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta) w^2 + \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w'^2 + \right. \\ \left. + \vartheta (\dot{w}' + \theta w')^2 \right\} dx \geq \frac{1}{2} \int_0^l M\dot{w}^2 + 2M\theta w \dot{w} + (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta) w^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +\psi \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w'^2 + (1 - \psi) \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w'^2 \Big\} dx \geq \quad (2.13) \\
& \geq \frac{1 - \psi}{2l} \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M \dot{w}^2 + 2M\theta w \dot{w} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + \psi \eta_1 \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] \right) w^2 \right\} dx,
\end{aligned}$$

где $\psi \in (0, 1)$ - некоторая постоянная величина.

При выводе (2.13) было сделано предположение:

$$\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 > 0. \quad (2.14)$$

Квадратичная форма в (2.13) будет положительно определенной при условии

$$\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + \psi \eta_1 \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] > M \theta^2. \quad (2.15)$$

Если выполняется условие

$$\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta > M \theta^2, \quad (2.16)$$

то можно положить $\psi = 0$, иначе положим

$$\psi = \frac{M \theta^2 - \beta_0 - \beta_1 \theta - \alpha \theta}{\eta_1 \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right]},$$

и условие (2.15) запишется в виде

$$\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta < M \theta^2, \quad \frac{M \theta^2 - \beta_0 - \beta_1 \theta - \alpha \theta}{\eta_1 \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right]} \in (0, 1). \quad (2.17)$$

Тогда при выполнении условия (2.16) или (2.17) окончательно получим

$$\Phi(t) \geq \frac{(1 - \psi)}{2l} \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w^2(x, t). \quad (2.18)$$

Оценим $\Phi(0)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M \dot{w}_0^2 + 2M\theta w_0 \dot{w}_0 + (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta) w_0^2 + \beta_2 \theta w_0''^2 + \vartheta \dot{w}_0'^2 + 2\vartheta \theta w_0' \dot{w}_0' - N_0 w_0'^2 \right\} dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M(1 + \theta) \dot{w}_0^2 + (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + M\theta) w_0^2 + \beta_2 \theta w_0''^2 + \vartheta(1 + \theta) \dot{w}_0'^2 + (|N_0| + \vartheta \theta) w_0'^2 \right\} dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ [\beta_2 \theta + \lambda_1^{-1} (|N_0| + \vartheta \theta) + \mu_1^{-1} (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + M\theta)] w_0''^2 + [\vartheta + \eta_1^{-1} M] (1 + \theta) \dot{w}_0'^2 \right\} dx. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

С учетом (2.12), (2.18), (2.19) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\psi)}{l} \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] w^2(x, t) \leq \\ & \leq \int_0^l \left\{ [\beta_2 \theta + \lambda_1^{-1} (|N_0| + \vartheta \theta) + \mu_1^{-1} (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + M \theta)] w_0''^2 + [\vartheta + \eta_1^{-1} M] (1 + \theta) \dot{w}_0'^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Если выполняется условие (2.16), то из (2.20) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] \frac{w^2(x, t)}{l} \leq \\ & \leq \int_0^l \left\{ [\beta_2 \theta + \lambda_1^{-1} (|N_0| + \vartheta \theta) + \mu_1^{-1} (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + M \theta)] w_0''^2 + [\vartheta + \eta_1^{-1} M] (1 + \theta) \dot{w}_0'^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.21)$$

из которого следует теорема

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (2.9), (2.11), (2.14) и (2.16). Тогда решения уравнения (2.1) будут устойчивы по отношению к возмущению начальных значений \dot{w}_0' , w_0'' , если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4).

Если выполняются условия (2.17), то из (2.20) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\left[\lambda_1 \beta_2 \theta - \sup_t N - \vartheta \theta^2 \right] - \eta_1 [M \theta^2 - \beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta] \right) \frac{w^2(x, t)}{\eta_1 l} \leq \\ & \leq \int_0^l \left\{ [\beta_2 \theta + \lambda_1^{-1} (|N_0| + \vartheta \theta) + \mu_1^{-1} (\beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + M \theta)] w_0''^2 + [\vartheta + \eta_1^{-1} M] (1 + \theta) \dot{w}_0'^2 \right\} dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.9), (2.11), (2.14) и (2.17). Тогда решения уравнения (2.1) будут устойчивы по отношению к возмущению начальных значений \dot{w}_0' , w_0'' , если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4).

Аналогичным методом можно провести исследование устойчивости нулевого решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & M \ddot{w} + \left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w^2)^3}} \right)'' + \beta_2 \dot{w}'''' - \vartheta \ddot{w}'' + N(t)w'' + \beta_1 \dot{w} + \beta_0 w - \\ & - w'' \left(\mu \int_0^l w^2(x, t) dx + \nu \frac{d}{dt} \int_0^l w^2(x, t) dx \right) = -\alpha (\dot{w} + Vw'), \quad x \in (0, l). \end{aligned}$$

где ν, μ - в общем случае неотрицательные функции времени. Слагаемые, содержащие интегральные члены, учитывают влияние нелинейного продольного усилия, которое возникает в цилиндрической пластине из-за ограничений, наложенных на перемещения концов пластины $x = 0, x = l$. В этом случае используется функционал

$$H(t) = \Phi(t) + \frac{1}{4} (\mu + 2\theta\nu) \left(\int_0^l w^2(x, t) dx \right)^2$$

производная которого определяется выражением

$$\dot{H} = \dot{\Phi} - \frac{1}{2}\nu \left(\frac{d}{dt} \int_0^l w'^2(x,t) dx \right)^2 - \mu\theta \left(\int_0^l w'^2(x,t) dx \right)^2.$$

Для обеспечения устойчивости решений к перечисленным в теоремах 2.1., 2.2. условиям следует добавить следующие

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 09-01-97005-р _поволжье_ а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. – Ульяновск: Ульяновск. гос. технич. ун-т, 2000. – 115 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления". – Ульяновск: Ульяновск. гос. технич. ун-т, 2008. – 188 с.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.

Дата поступления: 17.08.2009

Stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations in aeroelasticity

© A. V. Ankilov³, P. A. Vel'misov⁴

Abstract. The conditions of stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations, describing the dynamic of elastic plates in interaction with supersonic flow of gas, are obtained.

Key Words: dynamic stability; nonlinearity; differential equation; partial derivatives; elastic plate; supersonic flow.

REFERENCES

1. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of viscoelastic elements of chanals walls. – Russia, Ulyanovsk Technical University, 2000. – 115 p.
2. Ankilov A. V., Vel'misov P. A., Gorbokononko V. D., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of mechanical system "pipeline - pressure transducer". – Russia, Ulyanovsk Technical University, 2008. – 188 p.
3. Kollatc L. Eigenvalue problems. – Russia, Moscow: Science, 1968. – 503 p.

³Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk.

⁴Professor, Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

УДК 517.988.67

Оператор ложного возмущения в обобщенной задаче на собственные значения в условиях групповой симметрии

© Б. В. Логинов¹, О. В. Макеева²

Аннотация. Предложен процесс построения оператора ложного возмущения в условиях, когда обобщенная задача на собственные значения обладает групповой симметрией. На основе определения такого оператора можно применять итерационные процессы [2]-[3] уточнения приближений к спектральным характеристикам прямой и сопряженной задач.

Ключевые слова: обобщенная задача на собственные значения, метод ложных возмущений, групповая симметрия.

1. Введение

В 1961 г. М.К. Гавурин предложил метод ложных возмущений (ЛВ) [1] для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Метод основан на построении оператора возмущения, такого, что заданные приближения к спектральным характеристикам становятся точными для возмущенного оператора, с последующим их уточнением итерационными методами. В ряде наших работ метод ЛВ распространен на общий случай достаточно гладких, прежде всего линейных, оператор-функций спектрального параметра в банаховых пространствах при симметричном использовании собственных функций и обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) прямой и сопряженной задач со многими приложениями [2]-[3]. В работе [4] приведена общая схема метода при наличии групповой симметрии линейной по спектральному параметру оператор-функции. Для случая дискретной (непрерывной) групповой симметрии собственные элементы и обобщенные жордановы цепочки прямой и сопряженной задач могут быть восстановлены действием группы (действием инфинитезимальных операторов соответствующей алгебры Ли) на базисные элементы порождающих траектории подпространств. Простейшим примером служит оператор поворота на собственном подпространстве $N(B) = \{s^2, st, t^2\}$, где порождающие подпространства образованы базисными элементами s^2 и t^2 . Поэтому для построения оператора ЛВ, обладающего групповой симметрией задачи, нужно знать приближения к указанным базисным элементам. Основными трудностями реализации метода ЛВ в условиях групповой симметрии является построение базисных приближений при наличии стационарных подгрупп и переход к линейным комбинациям, обеспечивающим выполнение соотношений биортогональности приближений для элементов ОЖЦ, необходимых для наследования групповой симметрии оператором ЛВ. Устойчивость метода по отношению к вычислительным погрешностям обосновывается регуляризацией задач теории бифуркаций, предложенной В.А. Треногиным и Н.А. Сидоровым в 70-х годах.

Работа поддержана грантом РФФИ-Румынская Академия 07-01-91680-РА-а.

¹Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

²Доцент кафедры математического анализа, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск; omakeeva@hotmail.ru.

2. Построение оператора ЛВ в условиях групповой инвариантности

Для упрощения изложения рассуждения в общем случае непрерывной групповой симметрии иллюстрируются их реализацией для одномерных порождающих подпространств.

В банаховых пространствах E_1 и E_2 рассмотрим линейную по спектральному параметру задачу на собственные значения

$$(A_0 - tA_1)x = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \rightarrow E_2$, $A_1 : E_1 \supset D(A_1) \rightarrow E_2$ — плотно заданные замкнутые линейные операторы, причем $D(A_0) \subset D(A_1)$ и A_1 подчинен A_0 (т. е. $\|A_1x\|_{E_2} \leq \|A_0x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_0)$) или $D(A_1) \subset D(A_0)$ и A_0 подчинен A_1 (т. е. $\|A_0x\|_{E_2} \leq \|A_1x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_1)$). Пусть неизвестное собственное значение λ является фредгольмовой точкой оператор-функции $A_0 - tA_1$ с собственными элементами $N(A_0 - \lambda A_1) = \text{span}\{\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}\} = E_1^n(\lambda) = E_1^n \subset E_1$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = \text{span}\{\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}\} = E_{2,n}^*(\lambda) = E_{2,n}^* \subset E_2^*$ и отвечающими им A_1 - и A_1^* -жордановыми цепочками [5] с длинами $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$

$$(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1\varphi_i^{(s-1)}, \quad (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s)} = A_1^*\psi_i^{(s-1)}, \quad s = 2, \dots, p_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ k = \det[\langle A_1\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle] \neq 0, \quad L = \det[L_{ij}] \neq 0, \quad L_{ij} = [\langle A_1\varphi_i^{(p_i+1-s)}, \psi_j^{(r)} \rangle]_{\substack{r=\overline{1, p_j} \\ s=\overline{1, p_i}}}. \quad (2.2)$$

В статье [6] доказано следующее утверждение

Л е м м а 2.1. *Элементы $\varphi_i^{(s)}$, $\psi_j^{(r)}$, $s(r) = 1, \dots, p_i(p_j)$, $i, j = 1, \dots, n$ A_1 - и A_1^* -жордановых наборов, отвечающих фредгольмовой точке λ оператор-функции $A_0 - \lambda A_1$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности*

$$\langle \varphi_i^{(s)}, \gamma_j^{(r)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{sr}, \quad \langle z_i^{(s)}, \psi_j^{(r)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{sr}, \quad s(r) = 1, \dots, p_i(p_j), \\ \gamma_j^{(r)} = A_1^* \psi_j^{(p_j+1-r)}, \quad z_i^{(s)} = A_1 \varphi_i^{(p_i+1-s)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Предполагается, что уравнение (2.1) инвариантно относительно 1-параметрической непрерывной группы $G \ni g(a_1, \dots, a_l)$. Это означает, что существуют представления L_g в пространстве E_1 и K_g в пространстве E_2 такие, что операторы A_0 и A_1 сплетаются этими представлениями: $A_i L_g = K_g A_i$, $i = 0, 1$. Известно, что подпространства E_1^n и $E_{2,n}^*$ инвариантны относительно представлений L_g и K_g^* . Тогда в некотором базисе $\{\varphi_i\}_1^n$ в $E_1^n \ni \varphi = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$ действие L_g в E_1^n определяется матрицей

$$\mathcal{A}_g = [\alpha_{ij}(g)]_{i,j=1}^n = [\alpha_{ij}(a)]_{i,j=1}^n : L_g \varphi_i = \mathcal{A}'_g \varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(g) \varphi_j \quad (\tilde{\xi}_i = (\mathcal{A}_g \xi)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(g) \xi_j),$$

$i = \overline{1, n}$. Аналогично преобразование K_g^* в инвариантном подпространстве $E_{2,n}^*$ определяется равенствами $K_g^* \psi_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj}(g) \psi_j$, $k = \overline{1, n}$ матрицу $\mathcal{B}_g = [\beta_{ij}(g)]_{i,j=1}^n$. Будем считать

выполненным

Условие I. Прямое дополнение $E_1^{\infty-n} = (I - P)E_1^n$, порожденное проектором $P = \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle \varphi_k^{(1)}$, инвариантно относительно операторов $L(a)$.

Инвариантность подпространства E_1^n относительно группы $L(a)$ позволяет на основе [7] дать следующую геометрическую интерпретацию действия $L(a)$ в E_1^n . Пусть $\{I_j(\xi)\}_{j=1}^{l_1}$ – полная система функционально независимых инвариантов в E_1^n , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Xi_\varphi^n = \Xi^n$. Подпространство E_1^n (соответственно Ξ_n) расщепляется на траектории $O(\varphi) = \{L(a)\varphi | a \in D \subset R^l\}$ ($O(\xi) = \{\mathcal{A}(a)\xi | a \in D \subset R^l\}$). Подпространство (многообразиие) $M \subset E_1^n$ или в координатном представлении $M \subset \Xi^n$ назовем порождающим траекторию $O(\varphi)$, соответственно $O(\xi)$, если оно содержит некоторую точку этой траектории. В E_1^n (Ξ^n) существует полная минимальная система $\mathcal{M} = \{M_j\}_1^s$ порождающих подпространств (многообразий) M_j , $\dim M_j \leq l_1$, $n - l_1 \leq l$ такая, что для любого $\varphi \in E_1^n$ ($\xi \in \Xi^n$) найдутся $a \in D \subset R^l$ и число j , такие, что $L(a)\varphi \in M_j$ ($\mathcal{A}(a)\xi \in M_j$). Если минимальная система \mathcal{M} состоит из порождающих подпространств (многообразий) одной размерности l_1 , то будем говорить, что группа G действует в E_1^n (Ξ^n) l_1 -оптимально. В этом случае в E_1^n существует базис $\{\varphi_j\}_1^n$, в котором для любого $\varphi \in E_1^n$ найдутся $a \in D$

и инварианты $r_1(\xi), \dots, r_{l_1}(\xi)$, такие, что $L(a)\varphi = \sum_{k=1}^{l_1} r_k(\xi)\varphi_{(k)} \in M_{j_0}$, $\varphi_{(k)} \in (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Размерность траекторий общего положения (старшей размерности) равна $n - l_1 \leq l$.

Далее предполагаем, что представления L_g в E_1^n и K_g^* в $E_{2,n}^*$ имеют полные системы l_1 функционально независимых инвариантов. В [4] показано, что если регуляризованный по Шмидту оператор $\widehat{B} = B + \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j$ также обладает групповой инвариантностью и выполнено условие I, то матрицы \mathcal{B}_g и \mathcal{A}_g эквивалентны, т.е. в некотором базисе совпадают. В [4], [8]-[9] показано, что точные собственные элементы и отвечающие им ОЖЦ прямой и сопряженной задач преобразуются соответственно операторами L_g и K_g^* т.е. той же матрицей \mathcal{A}'_g . Если полный канонический жорданов набор (ОЖН) занумерован по возрастанию длин ОЖЦ то регуляризованный по Шмидту оператор \widehat{B} обладает групповой инвариантностью т.е. $\mathcal{B}_g = \mathcal{A}_g$ тогда и только тогда, когда подпространство $E_{2,n} = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$ инвариантно относительно операторов K_g и матрица \mathcal{A}_g блочно-диагональна.

Подпространства E_1^n и $E_{2,n}^*$ инвариантны соответственно относительно инфинитезимальных операторов представлений $L(a)$ и $K^*(a)$ и в общем случае их базисы восстанавливаются действием инфинитезимальных операторов на базисные элементы порождающих подпространств. Так для одномерных порождающих подпространств базисные элементы φ_k (ψ_k) определяются формулами $\varphi_{k+1} = X_k \varphi_1$ ($\psi_{k+1} = Y_k \psi_1$), где X_k (Y_k) инфинитезимальные операторы представлений $L(a)$ ($K^{*-1}(a)$), $k = 1, \dots, l$. Поэтому приближения к точным собственным векторам будут определяться действием инфинитезимальных операторов на считающиеся заданными приближения к собственным элементам подпространств, порождающих траектории старших размерностей.

Согласно [10] доказывается следующее утверждение

Л е м м а 2.2. Пусть по формулам (2.3) построены приближения к ОЖЦ, отвечающие приближениям к собственным элементам порождающих подпространств. Переходя к линейным комбинациям можно определить системы $\{\gamma_{k0}^{(s)}\}_{k,s=1}^{l_1, p_k}$, $\gamma_{k0}^{(s)} = A_1^* \psi_{k0}^{(p_k+1-s)}$ и $\{z_{i0}^{(j)}\}_{i,j=1}^{l_1, p_i}$, $z_{i0}^{(j)} = A_1 \varphi_{k0}^{(p_i+1-j)}$, отвечающие указанным собственным элементам и удовлетворяющие соотношениям биортогональности $\langle \varphi_{i0}^{(j)}, \gamma_{k0}^{(s)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}$, $\langle z_{i0}^{(j)}, \psi_{k0}^{(s)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}$, $i, k = 1, \dots, l_1$, $j(s) = 1, \dots, p_i(p_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть определены приближения к собственным элементам порождающих подпространств и отвечающим им жордановым цепоч-

кам: $\{\varphi_{i0}^{(j)}\}_1^{l_1, p_i}$, $\{\tilde{\psi}_{\mu 0}^{(\nu)}\}_1^{l_1, p_\mu}$ и $z_{i0}^{(j)} = A_1 \varphi_{i0}^{(p_i+1-j)}$. Полагая $\tilde{\gamma}_{\mu 0}^{(\nu)} = A_1^* \tilde{\psi}_{\mu 0}^{(p_\mu+1-\nu)}$ образуем линейные комбинации $\gamma_{k0}^{(s)} = \sum_{\mu=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu} \tilde{\gamma}_{\mu 0}^{(\nu)}$, подчинив их условиям $\langle \varphi_{i0}^{(j)}, \gamma_{k0}^{(s)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}$, $i, k = 1, \dots, l_1$, $j(s) = 1, \dots, p_i(p_k)$. Тогда коэффициенты $K_{\kappa\mu}^{l\nu}$ могут быть однозначно определены из системы уравнений $\sum_{\mu=1}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu} \langle A_1 \varphi_{i0}^{(j)}, \tilde{\psi}_{\mu 0}^{(p_\mu+1-\nu)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}$, $i, k = 1, \dots, l_1$, $j(s) = 1, \dots, p_i(p_k)$. Полагая $\psi_{k0}^{(p_k+1-s)} = \sum_{\mu=0}^{l_1} \sum_{\nu=1}^{p_\mu} K_{\kappa\mu}^{s\nu} \tilde{\psi}_{\mu 0}^{(p_\mu+1-\nu)}$ из этой системы находим, что $\langle z_{i0}^{(p_i+1-j)}, \psi_{k0}^{(p_k+1-s)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}$, $z_{i0}^{(p_i+1-j)} = A_1 \varphi_{i0}^{(j)}$. Таким образом, построены приближения к ОЖЦ собственных элементов, удовлетворяющие соотношениям биортогональности (2.3).

При восстановлении с помощью инфинитезимальных операторов базисов в E_1^n и $E_{2,n}^*$ может оказаться, что количество построенных приближений превышает n . Среди них нужно выбрать наиболее удаленные от линейных оболочек заданных приближений. Для одномерных порождающих подпространств достаточно рассмотреть нормы $\|\varphi_{10} - \varphi_{k0}\|$, $\|\psi_{10} - \psi_{k0}\|$, $k = 2, \dots, l+1$, где $\varphi_{r+1,0} = X_r \varphi_{10}$ ($\psi_{r+1,0} = Y_r \psi_{10}$), $r = 1, \dots, l$ и выбрать среди полученных приближений $n-1$ наиболее удаленных от φ_{10} (ψ_{10}). Этой процедурой исключается действие стационарных подгрупп. Далее по формулам (2.3) строятся приближения к A_1 - (A_1^* -) жордановым цепочкам точных собственных элементов. В силу групповой симметрии операторов A_0 и A_1 справедливо утверждение

Л е м м а 2.3. *Выбранные дополнительные собственные элементы и построенные к ним по формулам (2.3) ОЖЦ будут удовлетворять соотношениям биортогональности.*

Доказательство следует из формул преобразования элементов $\varphi_{k0}; \gamma_{k0}$, $k = l_1, \dots, n$ ($\psi_{j0}; z_{j0}$, $j = l_1, \dots, n$) операторами $L_g; L_{g-1}^* = L_g^{*-1}$ (соответственно $K_{g-1}^* = K_g^{*-1}; K_g$).

Таким образом построены приближения к ОЖН отвечающим собственным элементам $\{\varphi_j\}_1^{l_1}$ порождающих подпространств и к ОЖН дополнительных (дополняющих до базиса) собственных элементов $\{\varphi_j\}_{l_1+1}^n$ в прямой, а также в сопряженной задаче, удовлетворяющие по отдельности соотношениям биортогональности. Если окажется, что их объединение также удовлетворяет условиям биортогональности, то оператор ЛВ может быть построен по формулам [10]

$$D_0 x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle x, \gamma_{i0}^{(j)} \rangle \left[\sigma_{i0}^{(j)} - \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{p_k} \langle \sigma_{i0}^{(j)}, \psi_{k0}^{(s)} \rangle z_{k0}^{(s)} \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle x, \tau_{i0}^{(j)} \rangle z_{i0}^{(j)}$$

или

$$D_0 x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle x, \gamma_{i0}^{(j)} \rangle \sigma_{i0}^{(j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \left[\langle x, \tau_{i0}^{(j)} \rangle - \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{p_k} \langle \varphi_{k0}^{(s)}, \tau_{i0}^{(j)} \rangle \gamma_{k0}^{(s)} \right] z_{i0}^{(j)},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{i0}^{(1)} &= (A_0 - \lambda_0 A_1) \varphi_{i0}^{(1)}, & \sigma_{i0}^{(j)} &= (A_0 - \lambda_0 A_1) \varphi_{i0}^{(j)} - A_1 \varphi_{i0}^{(j-1)}, \\ \tau_{i0}^{(1)} &= (A_0^* - \lambda_0 A_1^*) \psi_{i0}^{(1)}, & \tau_{i0}^{(j)} &= (A_0^* - \lambda_0 A_1^*) \psi_{i0}^{(j)} - A_1^* \psi_{i0}^{(j-1)}, \end{aligned} \quad j > 1.$$

Мы не располагаем условиями взаимной биортогональности построенных ОЖН. В общем случае, когда полной биортогональности нет, приходится опять привлекать лемму 2.2.

З а м е ч а н и е 2.1. Наличие полной биортогональности построенных ОЖН приведет к редукации (сокращению) числа решаемых уравнений в предложенных на основе построения ЛВ оператора итерационных процессах [2]-[3]. При отсутствии полной биортогональности редукации не будет. В этом случае полученные результаты только определяют процесс построения приближенных ОЖН в условиях групповой симметрии.

З а м е ч а н и е 2.2. Обобщение предложенного процесса на случай дискретной групповой симметрии очевидно. Здесь предложенный процесс на основе действия операторов представления сразу приведет к полной биортогональности и возможности построения оператора ЛВ без повторного применения леммы 2.2.

Рассмотрен пример спектральной задачи по Э. Шмидту для системы $u'' + \lambda v = 0$, $v'' + \lambda u = 0$, $u, v \in C^2([-1, 0) \cup (0, 1]) \cap C^1[-1, 1]$, $u(-1) = 0$, $u(0) = u(1)$, $v(-1) = v(0)$, $v(1) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавурин М.К. О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений // ЖВМиМФ, 1961, Т.1; № 5. - С. 751-770.
2. Loginov B.V., Makeeva O.V. Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // ROMAI J., 2008, V.4.
3. Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения // Доклады РАН, 2008, №419 (2). - С. 160-163.
4. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: Фан, 1985. - 184 с.
5. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. - 524 с.
6. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными (ред. М.С. Салахитдинов), АН УзССР, Ташкент, Фан, 1978. - С. 133-148.
7. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. - 360 с.
8. Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // Вестник СамГУ, 1998, №4 (10). - С. 15-70.
9. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems for nonlinear equations with Fredholm operators // Nonl. Anal. Appl.: to V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday. (R.P. Agarwal, D. O'Regan-eds.), Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 2003, V.2. - P. 617-644.
10. Логинов Б.В., Макеева О.В., Цыганов А.В. Уточнение приближенно заданных жордановых цепочек линейной оператор-функции спектрального параметра на основе теории возмущений // Межвуз. сборник научных трудов "Функциональный анализ", Ульяновск: УлГПУ, 2003, вып.38. - С. 53-62.

Дата поступления 12.08.2009

Pseudoperturbation operator in generalized eigenvalue problem under group symmetry

© B. V. Loginov³, O. V. Makeeva⁴

Abstract. It is suggested process for pseudoperturbation operator construction when an considered generalized eigenvalue problem process an group symmetry. On the base of introducing such operator iterational processes [2]-[3] can be applied for refining of approximations to spectral characteristics of direct and conjugate problems.

Key Words: generalized eigenvalue problem, pseudoperturbation method, group symmetry.

REFERENCES

1. Gavurin M.K. On pseudoperturbation method for eigenvalues determination // J. Comput. Math. Math. Phys. 1, 5 (1961), 751-770, Russian, Engl. transl.
2. Loginov B.V., Makeeva O.V. Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // ROMAI J., 2008, V.4.
3. Loginov B.V., Makeeva O.V. The Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // Doklady Mathematics, 77, 2 (2009), 194-197. Pleiades Publ., Ltd.; Dokl. Akad. Nauk 419, 2 (2009), 160-163.
4. Loginov B.V. Branching Theory of Solutions of Nonlinear Equation under Group Symmetry Conditions. – Tashkent: Fan, Acad. Sci. Uzbek SSR (1985).
5. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Branching theory of solutions of nonlinear equations. – Moscow: Nauka (1969); Engl. transl. Volters-Noordorf Int. Publ., Leyden (1974).
6. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in branching theory // Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations (M.S. Salakhitdinov-ed), Akad. Nauk UzbekSSR, Tashkent, Fan, (1978), 133-148.
7. Eisenhart L.P. Continue transformation groups. – M.:IL (1947).
8. Loginov B.V. Solutions branching of nonlinear equations and group symmetry // Vestnik of Samara State University. 4, 10 (1998), 15-70.
9. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems for nonlinear equations with Fredholm operators // Nonl. Anal. Appl.: to V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday. (R.P. Agarwal, D. O'Regan-eds.), Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. V.2 (2003), 617-644.
10. Loginov B.V., Makeeva O.V., Tsyganov A.V. Refining of approximately given Jordan chains of linear operator-function of spectral parameter on the base of perturbation theory // Interuniv. Proc. "Functional Analysis", Ulyanovsk Pedagogical University, 38 (2003), 53-62.

³Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru.

⁴Associate professor of Mathematics Analyze Chair, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk; omakeeva@hotmail.ru.

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 004.415+519.673+531.5

Информационная система по проблемам гравитационного моделирования протяженных объектов

© В. А. Акулов¹

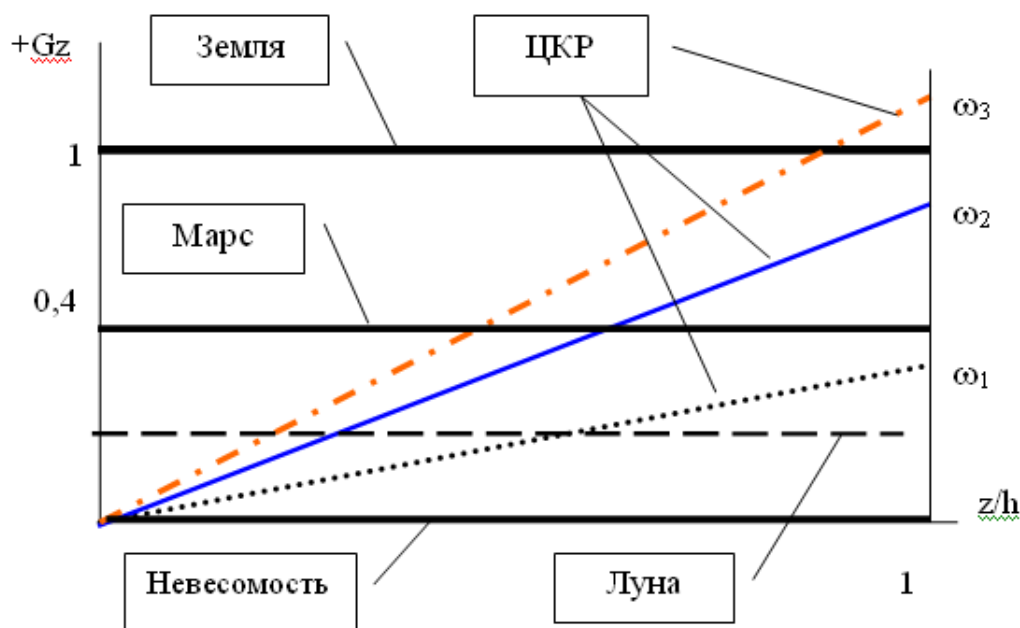
Аннотация. Разработана специализированная информационная система (АИСОА), ориентированная на решение задач гравитационного моделирования протяженных объектов на центробежных машинах (центрифугах). В основу системы положены авторские модели состояний объектов воздействий и критерии соответствия искусственной и естественной сил тяжести, построенные на принципах аналитической механики. АИСОА объединяет три функциональных компонента: физическое моделирование (собственно центрифуги), математические модели и информационную поддержку принятия решений.

Ключевые слова: информационная система, гравитационное моделирование, искусственная сила тяжести

Применение искусственной силы тяжести (ИСТ) к исследованию природных и рукотворных объектов, получившее наименование гравитационное моделирование (ГМ) нашло широкое применение в различных предметных областях. Примерами служат испытания и тарировки приборов ответственного назначения (центробежные стенды), исследования прочности объектов в строительстве и горном деле, отбор и подготовка экипажей скоростных самолетов и космических аппаратов, лечение больных травматологического и неврологического профиля и т. д. Планируется применение ИСТ в Космосе в качестве инструмента научных исследований и противодействия невесомости, что важно для успешного выполнения длительных и сверхдлительных полетов, включая межпланетные миссии [4], [6], [7]. Как известно, любая модель, а ГМ является одной из физических разновидностей, требует оценки адекватности, поскольку она (модель) представляет собой упрощенный «аналог оригинала» [5]. Рассмотрим эту задачу применительно к моделированию естественной силы тяжести (ЕСТ), которая актуальна в целом ряде приложений. Главные из них – пилотируемая космонавтика и гравитационная терапия [4], [6], [7]. На рис. 1.1 представлены структуры ЕСТ (Земля, Марс, Луна) и ИСТ, генерируемой короткорADIUSНОЙ центрифугой (ЦКР).

Здесь: $+Gz$ – модуль перегрузки, создаваемой ИСТ и ЕСТ; z – продольная координата, отсчитываемая, соответственно, от поверхности планеты или оси вращения; h – протяженность объекта в направлении Oz ; ω – угловая скорость вращения ротора ЦКР, где $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Как видно, адекватность в форме баланса перегрузок достигается только в точках пересечения характеристик: горизонталей (ЕСТ) и семейства наклонных (ИСТ). В остальных точках баланс отсутствует, причем по мере их удаленности рассогласование только возрастает. Следовательно, ЦКР осуществляет адекватность, которую можно классифицировать как весьма условную, точечную. В связи с условностью адекватности следует различать две группы объектов ГМ: точечные и распределенные.

¹Доцент кафедры «Информационные технологии» СамГТУ, Самарский государственный технический университет, г. Самара; vanger@it.samgtu.ru

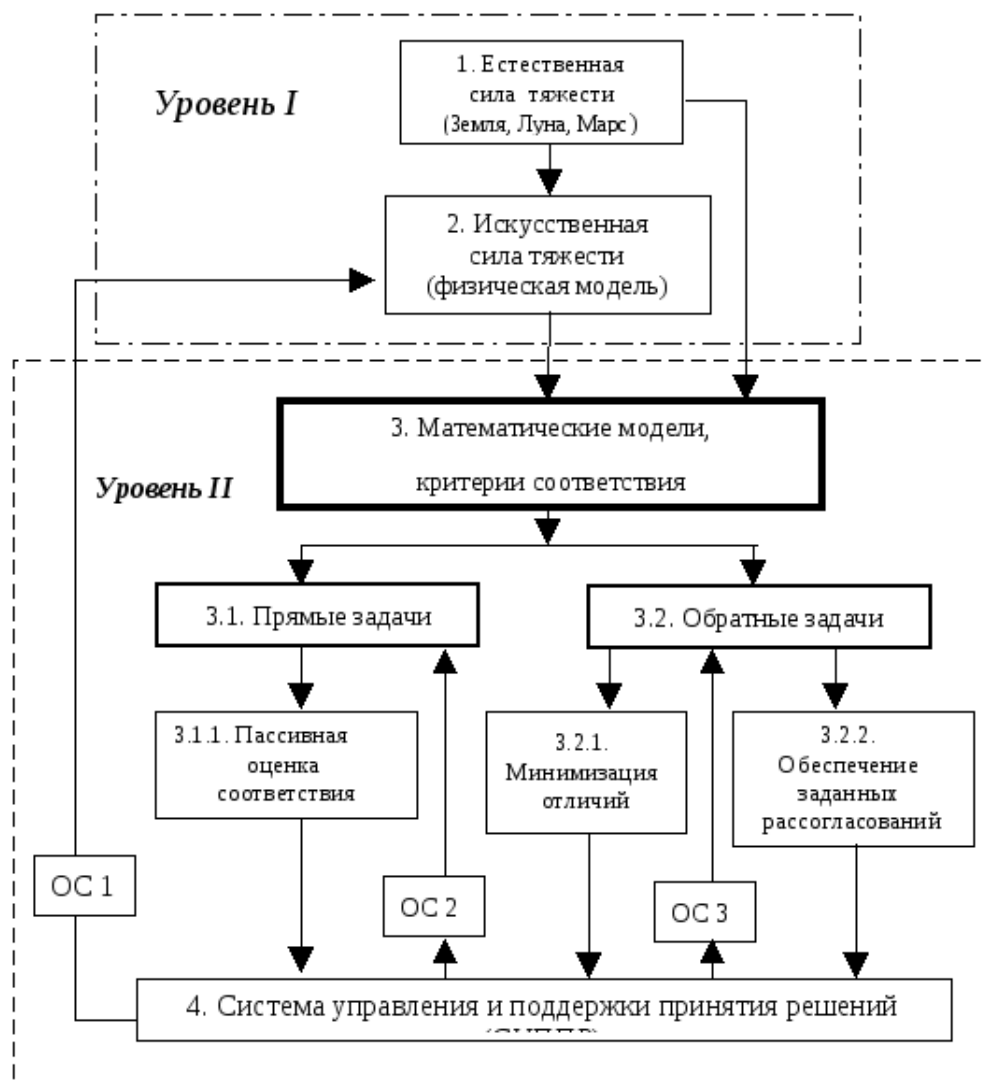


Р и с у н о к 1.1

Структурные различия ИСТ и ЕСТ

Под точечными (ТО) понимаются объекты, размеры которых столь малы по сравнению с радиусом вращения, что внутренним перепадом перегрузок можно пренебречь. Если же размеры объектов соизмеримы с радиусом, то перепад становится значительным, и такие объекты далее отнесены к категории протяженных (ПО). Как следует из рис. 1.1, для этого достаточно проанализировать изменение $+Gz$ на интервале $z/h = [0, 1]$, относительная величина перегрузок в ПО достигает 100%. Отметим, что переход по схеме «ТО – ПО» сопровождается следующими качественными изменениями. Величина и точка приложения перегрузок при ГМ становятся неопределенными; перегрузка утрачивает критериальные функции и переходит в разряд промежуточных параметров; процедуры оценки адекватности усложняются. Вследствие перечисленных и им подобных факторов информационное обеспечение ГМ, построенное на «точечной» идеологии, становится недостаточным. Особую актуальность приобретает комплекс задач по разработке методологии, ориентированной на оценку и обеспечение адекватности ИСТ и ЕСТ применительно к распределенным объектам. В СамГТУ (доц. В. А. Акулов) предложен один из вариантов решения поставленной задачи, предусматривающий его реализацию в виде проблемно-ориентированной автоматизированной информационной системы по оценке адекватности (АИСОА) [1 - 3]. В целях сокращения изложения ограничимся анализом структурной схемы АИСОА (рис. 1.2), краткой характеристикой решаемых задач и математических моделей, представленных в конечной форме и реализованных в АИСОА.

В качестве объектов ГМ выбрано весьма представительное подмножество РО, содержащих протяженные трубопроводы с жидкостью [1]. В основу концепции АИСОА положен принцип воспроизведения состояний объектов, а не параметров ИСТ. Предусмотрено, что на этапах, предшествующих ГМ, такие параметры определяются методом компьютерного моделирования.



Р и с у н о к 1.2

Структурная схема АИСОА для оценки адекватности ИСТ и ЕСТ

Кроме того, учтено, что в ряде приложений человек (космонавт, испытатель, пациент гравитационной терапии) принимает непосредственное участие в сеансах вращения, потребовавшее разработки мер параметрической безопасности. В итоге АИСОА приобрела двухуровневую иерархическую структуру, объединяющую в себе три функциональных компонента: физическое моделирование, т. е. собственно ГМ (см. уровень I, рис. 1.2), математическое моделирование, обеспечивающее ГМ входными данными (поз. 3), и информационную поддержку принятия решений (поз.4), образующие структуру, обозначенную как «Уровень II». Серия задач моделирования, названных, исходя из математического смысла, прямыми (поз. 3.1), заключаются в оценке адекватности ИСТ и ЕСТ (сходства, степень различий). Обратные задачи (поз. 3.2) состоят в определении индивидуализированных режимов испытаний, обеспечивающих либо минимум отличий, из числа возможных (поз. 3.2.1), либо заданные, причем разнонаправленные рассогласования (поз. 3.2.2). Как прямые, так и обратные задачи решены в 2-х постановках: интегральной и локальной (см. ниже).

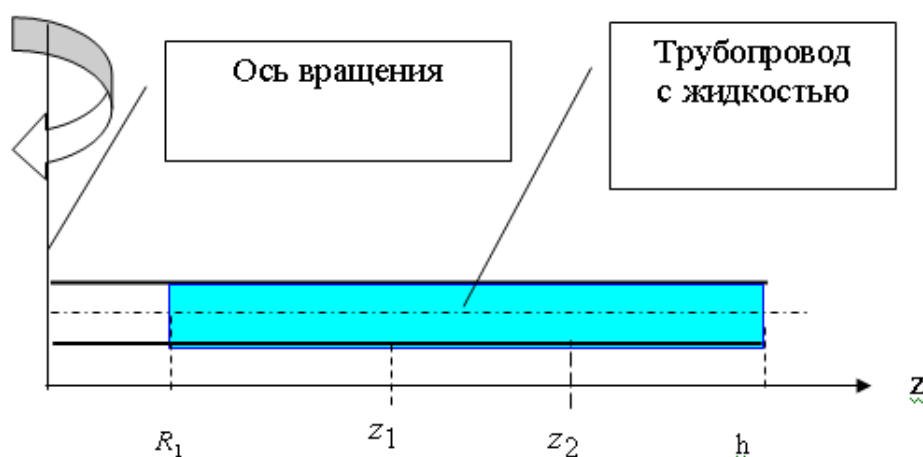
2. Прямые задачи моделирования в интегральной постановке.

Они решаются с помощью критерия адекватности вида:

$$\delta = \left(\frac{\omega^2 h^3 - R_1^2(3h - 2R_1)}{3\beta g (h - R_1)^2} - 1 \right) 100\% \quad (2.1)$$

Здесь: β - безразмерный коэффициент, учитывающий многообразие видов ЕСТ (Земля, Марс, Луна, др. варианты). $\beta = a/g$, где a , g - ускорение свободного падения, соответственно, на одной из планет и на Земле. Остальные обозначения и упрощенный вариант расчетной схемы приведены на рис. 3.

Физический смысл критерия (2.1) состоит в сопоставлении энергии, полученной жидкостью, заключенной в объекте, как со стороны естественной, так и искусственной гравитации (эффект бустера) [1] – [3]. Возможны три случая, отличающиеся величиной и знаком δ . Если $\delta = 0$, имеет место адекватность, под которой понимается минимум отличий из числа возможных, оценивая их с энергетических позиций. Если $\delta < 0$, ЦКР сообщает объекту меньше энергии, чем ЕСТ, а если $\delta > 0$, соотношение изменится на противоположное. Отметим следующие наиболее важные моменты. Во-первых, моделирование по формуле (2.1) означает пассивную оценку, т. е. регистрацию состояний ПО, при заданных испытателями параметрах всей системы, включая ЦКР и объект ГМ. Во-вторых, в (2.1) учитывается распределение жидкости и ее «энерговооруженность» на всем протяжении трубопровода, что и послужило основанием для названия – «интегральная оценка». В-третьих, перегрузка $+G_z$ трансформировалась в категорию промежуточных параметров и, что особенно важно, в частный случай предлагаемого критерия (2.1). Последнее утверждение следует из (2.1) при $R_1 = 0$: $\delta = \left(\frac{+G_z^{max}}{3\beta} \right) 100\%$. Здесь $+G_z^{max}$ - перегрузка на периферийном радиусе $z = h$ (см. рис. 2.1).

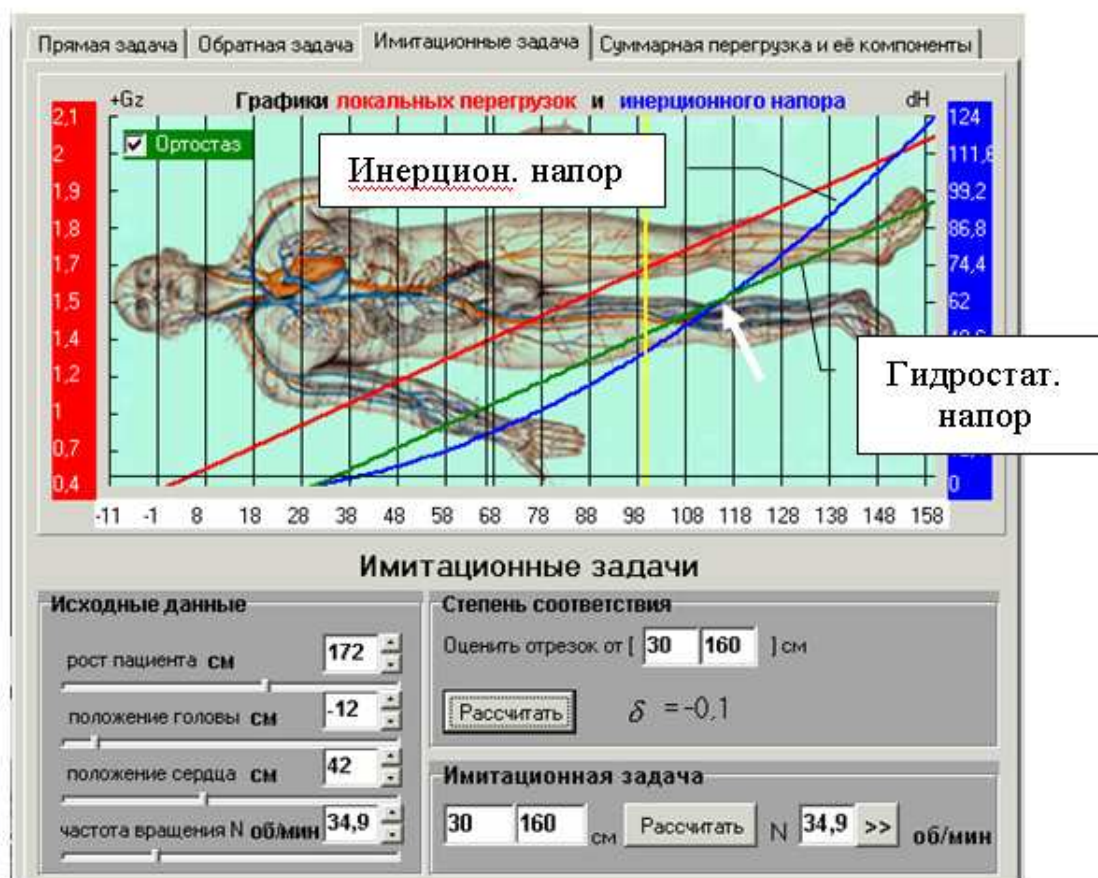


Р и с у н о к 2.1

Схема обозначений, принятых в (2.1) – (4.2)

Следует обратить особое внимание на то, что при отсутствии полноценного критерия адекватности ИСТ и ЕСТ, параметр $+G_z^{max}$ нашел самое широкое применение в различных приложениях, в том числе, космических [4], [6]. Модель (2.1) реализована в блоке 3.1.1 АИСОА (рис. 1.2) с

визуализацией результатов на экране ПК в виде типового окна (рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Типовой экран АИСОА для решения прямых задач в интегральной и локальной постановке

Особо отметим, что предлагаемый интерфейс обеспечивает режим массового решения задач по оценке адекватности ИСТ и ЕСТ, что важно с точки зрения практической значимости с учетом множества ПО и множества предметных областей.

3. Обратные задачи моделирования в интегральной постановке.

Они заключаются в определении индивидуализированных режимов ГМ, обеспечивающих адекватность ИСТ и ЕСТ. Под этим понимаются два состояния объектов ГМ: либо соответствие ИСТ и ЕСТ (энергетический баланс: $\delta = 0$, см. поз. 3.2.1, рис. 1.2), либо заданные уровни рассогласований ($\delta < 0$ или $\delta > 0$, см. поз. 3.2.2). Моделирование выполняется по формуле (3.1), которая получена разрешением (2.1) относительно ω , что и определило название задач – «обратные».

$$\omega = \pm 5,425(h - R_1) \sqrt{\frac{\beta(1 + 0,01\delta)}{h^3 - R_1^2(3h - 2R_1)}} \quad (3.1)$$

Отметим следующие наиболее важные моменты. Во-первых, модель (3.1) устраняет неопределенность «точечного» подхода к оценке адекватности ГМ в случае РО. Она однозначно определяет режимы испытаний, обеспечивающие разнообразие требований, предъявляемых к ГМ, осуществляющему моделирование ЕСТ. В их числе: множество объектов,

отличающихся габаритами и расположением на столе ЦКР; множество их состояний (δ); многообразие планет (β); промежуточные варианты β . Во-вторых, для получения оптимального режима, которому соответствует минимум отличий из числа возможных, достаточно в (3.1) положить $\delta = 0$. В-третьих, для получения заданного рассогласования ИСТ и ЕСТ, что важно с научно-практической точки зрения, достаточно в (3.1) положить соответствующее значение δ с учетом величины и знака. С целью удобства применения (3.1) в АИСОА предусмотрен отдельный типовой экран, который, как и в случае прямых задач, обеспечивает массовость прогонов.

4. Прямые и обратные задачи ГМ в локальной постановке.

В целом ряде приложений необходима оценка адекватности ИСТ и ЕСТ на локальном участке гидравлической системы (см. рис. 2.1, интервал $[z_1, z_2]$, где $R_1 \leq z_1 < z_2 \leq h$). Как следствие различий в законах распределения гидростатического давления (линейность) и инерционного давления (семейство парабол, смещенных относительно начала координат), взаимное расположение эпюр распределения давления отличается и количественным, и качественным разнообразием. Создается множество состояний объектов, когда интегральная оценка, а она усредняет энергию жидкости на интервале $[R_1, h]$ не совпадает с локальной оценкой. Опуская преобразования (интегрирование законов распределения давления на интервале $[z_1, z_2]$), приведем конечную формулу для оценки адекватности в локальной постановке:

$$\delta = \left(\frac{\omega^2}{3g\beta} \frac{z_2^2 + z_2z_1 + z_1^2 - 3R_1^2}{z_2 + z_1 - 2R_1} - 1 \right) 100\% \quad (4.1)$$

Отметим, что модель (4.1) является аналогом (2.1). Она реализована в блоке 3.1.1 АИС (см. рис. 1.2) и для удобства пользователя решается на том же экране, что и интегральная задача (см. рис. 2.2). С точки зрения ГМ особый интерес представляет задача, получившая наименование «обратной задачи в локальной постановке». Для ее решения достаточно определить ω из соотношения (4.1)

$$\omega = \pm 5,425 \sqrt{\frac{\beta(z_2 + z_1 - 2R_1)(0,01\delta + 1)}{z_2^2 + z_1z_2 + z_1^2 - 3R_1^2}} \quad (4.2)$$

Учитывая логическое сходство обратных задач (3.1) и (4.2) для их решения отведен один и тот же экран интерфейса пользователя.

5. Информационная поддержка принятия решений.

Указанный комплекс задач обладает особой актуальностью в ГМ с непосредственным участием человека в сеансах вращения как в условиях Земли, так и Космоса [4], [6]. Результаты моделирования, а они включают в себя как перечисленные, так и некоторые другие данные, в частности эпюры распределения гидростатического и инерционного давления, распределения перегрузок (см. график на рис. 2.2), поступают в блок 4 АИСОА (рис. 1.2). На основании полученной информации ответственные исполнители ГМ принимают решение либо о проведении испытаний, которое по обратной связи (ОС1) передается на уровень физического моделирования (поз. 2), либо выполняют коррекцию исходных данных с повторным моделированием (ОС2 или ОС3). В заключение отметим, что апробация

предлагаемой АИСОА на реальной информации, предоставленной Институтом медико-биологических проблем РАН РФ, а он является одним из мировых лидеров по обеспечению пилотируемой космонавтики [4], [7], показала ее высокую эффективность, научную новизну и практическую значимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулов В. А. Биомеханический критерий адекватности модельной и естественной силы тяжести //Авиакосмическая и экологическая медицина, – №1, Т 39. №1. -- С. 59 – 61.
2. Акулов В. А. Оценка адекватности искусственной и естественной силы тяжести методами многомерного анализа// Вестник СамГТУ, серия «Физико - математические науки», 2006. -- выпуск 42,. -- С.174 -- 178.
3. Акулов В. А. Теория графов в оценке соответствия искусственной и естественной сил тяжести (центрифуга, Земля, Луна, Марс) // SPЕХР 2008: Сб. науч. тр. Международной научно-практической конференции. — Самара:СГАУ, Европ. Косм. агенство (ESA), 3 – 10 сентября 2008.
4. Котовская А. Р., Виль-Вильямс И. Ф., Лукьянюк В. Ю. Проблема создания искусственной силы тяжести с помощью центрифуги короткого радиуса для медицинского обеспечения межпланетных пилотируемых полетов // Авиакосмическая и экологическая медицина, 2003. Т. 37. №5. -- С 36 – 39.
5. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем -- искусство и наука. -- М.: Мир, 1978. – 418 с.
6. Котовская А. Р., Шипов А. А., Виль –Вильямс И. Ф. Медико–биологические аспекты проблемы создания искусственной силы тяжести / М: Слово, 1986. – С. 203.
7. Mars-500 experiment // www.suzymchale.com/cosmonavtka/mars500.htm (19.04.09).

Дата поступления 27.08.2009

Information system for solving the problems of gravitation simulation for distributed objects

© V. A. Akulov²

Abstract. We developed a special information system for solving the problems of gravitation simulation for distributed objects in mechanic and electronic complexes that generate controlled artificial gravity. The system is based on the author's models of state of the objects, that experience the action? And the criteria for adequacy of the artificial and natural gravities built on the principles of analytical mechanics/ The system comprises three functional components: physical simulation (of a centrifuge itself), mathematical models and informational support for making decisions.

Key Words: information system, gravitational modelling, artificial gravity.

REFERENCES

1. Akulov V. A. Biomechanical criterion of adequacy modelling and Natural gravity //Aerospace and ecological Medicine, – No. 1, V. 39. -- P. 59 - 61.
2. Akulov V. A. Estimation of adequacy of artificial and natural force Weights methods of the multidimensional analysis// The bulletin of SamGtU, A series «Physics and mathematics sciences» , 2006. -- 42., – P. 174 – 178.
3. Akulov V. A. The theory of counts in an estimation of conformity artificial and Natural a gravity (a centrifuge, the Earth, the Moon, Mars) // SPEXP 2008: The collection of proceedings of the International scientifically-practical conference. — Samara: ESA, 3 - 10 september 2008.
4. Kotovskaya A. P., Will-Williams I. F., Lukyanuk V. Yu. Problem Creations of an artificial gravity by means of a centrifuge of the short Radius for medical maintenance of the interplanetary piloted Flights // Aerospace and ecological Medicine, 2003. V. 37. No. 5. – P. 36 - 39.
5. Shannon R. Imitating modelling of systems – art and a science. -- M.: Mir, 1978. – 418 p.
6. Kotovskaya A. R., Shipov A. A., Will-Williams I. F. Medical and Biological aspects of a problem of creation of an artificial gravity / M: Slovo, 1986. – P. 203.
7. Mars-500 experiment // www.suzymchale.com/cosmonavtka/mars500.htm (19.04.09).

²Associate professor, Samara State Technical University, Samara; vanger@it.samgtu.ru.

УДК 517.956

Построение расширенной характеристической системы для идеального газа в эллиптическом случае

© С. Н. Алексеенко¹, Т. А. Шемякина²

Аннотация. В данной статье исследуется система двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В частном случае эта система описывает плоское установившееся безвихревое движение идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента. Исходная система приводится к характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только от одной неизвестной функции. Для системы уравнений строится расширенная характеристическая система с дополнительным аргументом. При определенном значении дополнительного аргумента решение расширенной характеристической системы дает решение исходной системы уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, метод дополнительного аргумента, расширенная характеристическая система.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений [1] плоского установившегося безвихревого движения идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\psi, \varphi)}{\partial \varphi} - P(W(\psi, \varphi)) \frac{\partial W(\psi, \varphi)}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial \theta(\psi, \varphi)}{\partial \psi} + Q(W(\psi, \varphi)) \frac{\partial W(\psi, \varphi)}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$P(W(\psi, \varphi)) = \left(1 - \frac{(\kappa - 1)W^2}{2a_0^2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \geq p_* > 0,$$

$$Q(W(\psi, \varphi)) = \frac{\left(1 - \frac{(\kappa + 1)W^2}{2a_0^2}\right)}{W \left(1 - \frac{(\kappa - 1)W^2}{2a_0^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \geq q_* > 0,$$

$W = \sqrt{u^2 + v^2}$ - величина скорости; u, v - составляющие скорости по осям x, y соответственно, но вместо функций u и v введены полярные координаты $u = W \cos \theta$, $v = W \sin \theta$, где θ - угол между вектором скорости и осью x ; $\kappa = c_p/c_v$ - показатель адиабаты; a_0^2 - скорость звука в покоящемся газе; $\varphi(x, y)$ - потенциал скоростей и $\psi(x, y)$ - функция тока. Предполагаем, что $1 < \kappa < 2$, $W^2(\psi, \varphi) < \frac{2a_0^2}{\kappa + 1}$.

Система уравнений (1.1) будет эллиптического типа, когда величина скорости газа W будет меньше скорости звука и гиперболического - когда величина скорости газа W будет больше скорости звука. Эта система является частным случаем системы Ф.И.Франкля [1]. В данной работе рассматривается эллиптический случай.

¹Профессор кафедры математического анализа, Арзамасский педагогический институт, г. Арзамас; sn-alekseenko@yandex.ru.

²Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh_tat@mail.ru.

В качестве области определения возьмем

$$\tilde{\Omega} = \{(\psi, \varphi) : -\infty < \psi < +\infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_M, \varphi_M > 0\}$$

Поставим для системы уравнений (1.1) задачу Коши:

$$\theta(\psi, 0) = \theta_0(\psi), W(\psi, 0) = W_0(\psi). \quad (1.2)$$

2. Построение расширенной характеристической системы

Для исследования задачи (1.1), (1.2) применяется метод дополнительного аргумента [2]. Вначале исходную систему приводим к так называемой характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только по одной неизвестной функции. В данном случае это будет система из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + ie \frac{\partial z}{\partial \psi} = F, \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} + ie \frac{\partial W}{\partial \psi} = G_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$z(\psi, 0) = \Phi(\psi), W(\psi, 0) = W_0(\psi). \quad (2.2)$$

Здесь $e(W(\psi, \varphi)) = \sqrt{\frac{P(W(\psi, \varphi))}{Q(W(\psi, \varphi))}}$, функции F, G_2 выражаются через исходные данные Φ, W_0 явным образом.

Доказано следующее предложение.

Предложение 2.1. *Функция W определяемая из задачи (2.1), (2.2), и функция θ , определяемая из задачи:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + ie \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = Re(z) - iIm(z), \\ \theta(\psi, 0) = \theta_0(\psi), \end{cases} \quad (2.3)$$

будут решением исходной задачи (1.1), (1.2).

Расширенная характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dw_1(\psi, \varphi, s)}{ds} = G_2(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)), \\ w_1(\psi, \varphi, 0) = W_0(\psi r - i \int_0^\varphi e(w_1(\psi, \varphi, \tau)) d\tau), \\ \frac{dw_2(\psi, \varphi, s)}{ds} = F(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)), \\ w_2(\psi, \varphi, 0) = \Phi(\psi r - i \int_0^\varphi e(w_1(\psi, \varphi, \tau)) d\tau). \end{cases} \quad (2.4)$$

Искомые функции $w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s)$ зависят, кроме ψ, φ , еще от одного дополнительного аргумента s . Начальные данные - функции W_0, Φ считаем продолженными в комплексную плоскость.

Основным преимуществом новой расширенной характеристической системы по сравнению с системой уравнений в работах [3], [4] является то, что в ней полностью отсутствуют

суперпозиции неизвестных функций, и сейчас значительно удобнее исследовать ее методом последовательных приближений.

Интегрируя дифференциальные уравнения из (2.4) по s и учитывая начальные условия там же, приходим к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} w_1(\psi, \varphi, s) = W_0(\psi r - i \int_0^\varphi e(w_1(\psi, \varphi, \tau))d\tau) + \int_0^s G_2(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s))d\tau, \\ w_2(\psi, \varphi, s) = \Phi(\psi r - i \int_0^\varphi e(w_1(\psi, \varphi, \tau))d\tau) + \int_0^s F(w_1(\psi, \varphi, s), w_2(\psi, \varphi, s))d\tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

Доказывается, следующее предложение.

Предложение 2.2. *Если решения системы уравнений (2.5) удовлетворяют определенным условиям гладкости, тогда функции $W(\psi, \varphi) = w_1(\psi, \varphi, \varphi)$, $z(\psi, \varphi) = w_2(\psi, \varphi, \varphi)$, являются решением задачи (2.1), (2.2).*

А так как ранее доказано, что функции $\theta(\psi, \varphi)$, $W(\psi, \varphi)$, определяемые из задачи (2.1), (2.2), (2.3) являются решением исходной задачи (1.1), (1.2), то мы получаем основной результат.

А именно, что функции $\theta(\psi, \varphi)$, $W(\psi, \varphi)$, определяемые из расширенной характеристической системы (2.4), будут решением исходной задачи (1.1), (1.2), если они удовлетворяют определенным условиям гладкости.

Доказательство локального существования решения задачи может быть получено методом последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973.–712 с.
2. Алексеенко С. Н., Панков П. С., Косов С. Г. Применение метода дополнительного аргумента к решению задачи Коши для системы уравнений изоэнтропического движения баротропного газа// Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2004, - Вып.33, - С. 43-48.
3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Чезганов В.С. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае// Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006, - Вып.35, - С. 148-152.
4. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Балакирева В.Б. Построение расширенной характеристической системы для системы Франкля в эллиптическом случае// Труды Средневолжского математического общества, 2007, Т.9; №1, - С. 53-61.

Дата поступления 27.08.2009

On a construction of the extended characteristic system for perfect gas of the elliptic type

© S. N. Alekseenko³, T. A. Shemyakina⁴

Abstract. In this paper the system of two quasilinear differential partial equations of the first order is investigated. Among other applications, it describes steady-stated non-vortex motion of the perfect gas at lack of friction and heat conduction in a neighborhood of a surface of passage from subsonic speeds to supersonic. The basic research technique is the method of additional argument. The considered system is reduced to the characteristic form when each equation contains derivatives only from one unknown function. For the system of equations in the characteristic form the extended characteristic system with additional argument is obtained. It is proved that at the special value of the additional argument a solution of the characteristic system gives a solution of the original equations.

Key Words: differential partial equations of the first order, the method of additional argument, the extended characteristic system.

REFERENCES

1. Frankl F.I. The selected works on gas dynamics.— M: the Science, 1973.— 712 p.
2. Alekseenko S.N., Pankov P.S., Kosov S.G. Application of a method of additional argument to the decision of a problem of Cauchy for system of the equations flowing of isoentropy barotropic gas//Studies on Integro-Differential Equations, Bishkek: Ilim, 2004, V.33, P. 43-48.
3. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Chezganov V.S. Local existence of the limited decision of system Frankl in an elliptic case// Studies on Integro-Differential Equations, Bishkek: Ilim, 2006, V. 35, P. 148-152.
4. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Balakireva V.B. On a construction of the expanded characteristic system for system Frankl in an elliptic case//Proceedings of the Middle-Volga Mathematical Society, 2007. V. 9, № 1, P. 53-61.

³Professor of the mathematical analysis department, Arzamas state pedagogical institute, Arzamas; sn-alekseenko@yandex.ru.

⁴Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg; sh_tat@mail.ru.

УДК 517.9

Эллиптическая краевая задача, вырождающаяся на границе

© Д. И. Бояркин¹

Аннотация. В работе рассматривается эллиптическая краевая задача с вырождением на границе. Получены априорные оценки для решения задачи. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий.

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Лопатинского

1. Постановка задачи

Рассмотрим $(n-i)$ -мерные гладкие многообразия Γ^{n-i} , $i = 1, \dots, k$, $k \leq n-1$, причем $\Gamma^{n-1} \supset \Gamma^{n-2} \supset \dots \supset \Gamma^1 \supset \Gamma^0$. На каждом Γ^{n-i} при $k < n-1$ определим невырождающееся векторное поле с гладкими вещественными коэффициентами μ^i таким образом, чтобы это поле касалось Γ^{n-i} вдоль Γ^{n-i-1} , но не касалось Γ^{n-i-1} . На Γ^1 определим невырождающееся векторное μ^{n-1} с гладкими вещественными коэффициентами, которое может касаться Γ^1 в точке Γ^0 .

Предположим, что все многообразия Γ^{n-i} относятся к первому классу. Продолжим гладким образом поля μ^1, \dots, μ^i в достаточно малую окрестность Ω^i многообразия Γ^{n-i-1} в G . Предположим, что в Ω^i поля μ^1, \dots, μ^i линейно независимы, в этой окрестности их можно дополнить до базиса $\{\mu^1, \dots, \mu^i, \dots, \mu^n\}$.

Так как все Γ^{n-i} относятся к первому классу, то можно утверждать, что в G существует $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие N^{n-1} , проходящее через Γ^{n-2} трансверсально к полю μ^1 , причем каждую точку из Ω^1 можно соединить с N^{n-1} интегральной кривой поля μ^1 . Далее, определим $(n-i)$ -мерные гладкие многообразия N^{n-i} , $i = 2, \dots, k$ со следующими свойствами:

1. $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$;
2. N^{n-i} проходит через Γ^{n-i-1} трансверсально к полю μ^i и каждую точку из N^{n-i+1} можно соединить с N^{n-i} интегральной кривой поля μ^i .

Заметим, что в окрестности точки Γ^0 многообразия N^1 будет являться внутренней нормалью к границе Γ области G , проведенной в точке Γ^0 .

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f \tag{1.1}$$

в G ,

$$\mu^1(x, D)u = \varphi^1, \tag{1.2}$$

на Γ^{n-1} ,

¹Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарева, г. Саранск; uralsib3@saransk-com.ru.

$$\mu^i(x, D)u = \varphi^i, \quad (1.3)$$

на $\Gamma^{n-i}, i = 2, \dots, k = n - 1$,

где L - эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами из класса $C^{3,\alpha}(\bar{G})$; $\mu^1(x, D)$ - дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ^1 ; $\mu^i(x, D)$ - дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ^i .

З а м е ч а н и е 1.1. В локальной системе координат $\{\mu^1, \dots, \mu^i, \dots, \mu^n\}$ оператор L на $N^{n-i} \cap \Omega^i, i = 1, \dots, k - 1$ можно представить в виде

$$L = L_i + \sum_{q=1}^i l_q^i(\mu^q(x, D)), \quad (1.4)$$

где L_i - эллиптический оператор второго порядка по μ^{i+1}, \dots, μ^n ; l_q^i - дифференциальный оператор первого порядка по переменным μ^q, \dots, μ^n .

З а м е ч а н и е 1.2. При $k = n - 1$ многообразие N^2 , проходящее через Γ^1 трансверсально к полю μ^{n-1} , будет иметь размерность равное 2.

Так как не вырождающееся векторное поле μ^{n-1} по предположению имеет только вещественные коэффициенты, то условие Шапиро - Лопатинского выполняется на Γ^1 для операторов $L_{n-2}, \mu^{n-1}(x, D)$ даже в случае, когда поле μ^{n-1} касается кривой Γ^1 в точке Γ^0 .

З а м е ч а н и е 1.3. Если же $\mu^{n-1}(x, D)$ - оператор типа Коши - Римана, то есть $\mu^{n-1}(x, D) = \mu_1^{n-1}(x) \frac{\partial}{\partial \nu} + i \cdot \mu_2^{n-1} \frac{\partial}{\partial \tau}$, где $i^2 = -1$, ν, τ - единичные векторы нормали и касательной к Γ^1 , то на Γ^1 для операторов $L_{n-2}, \mu^{n-1}(x, D)$ условие Шапиро - Лопатинского может не выполняться, в этом случае на оператор $\mu^{n-1}(x, D)$ накладывается дополнительное условие, а в точке касания Γ^0 необходимо задать значения функции u .

Задача (1.1) - (1.2) - (1.3) - нетерова.

Теперь пусть $k < n - 1$, то есть вместо условий (1.3) имеем

$$\mu^i(x, D)u = \varphi^i, \quad (1.5)$$

на $\Gamma^{n-i}, i = 2, \dots, k < n - 1$,

В этом случае на Γ^{n-k-1} дополнительно определяем

$$u = \varphi^{k+1}, \quad (1.6)$$

на Γ^{n-k-1} ,

Задача (1.1) - (1.2) - (1.5) - (1.6) - нетерова.

2. Вспомогательные построения и предложения

Определим многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i} = \Gamma^{n-i} \setminus \Gamma^{n-(i+1)}$, для $i = 1, \dots, k-1$ и $\bar{\Gamma}^{n-k} = \Gamma^{n-k}$. Многообразие, проходящее через $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$ трансверсально к полю μ^i , обозначим через \bar{N}^{n-i} . Заметим, что многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, \bar{N}^{n-i} имеют все свойства пунктов а) и б) в постановке задачи. Кроме того, отметим, что поле μ^i , определенное на Γ^{n-i} , не касается этого многообразия в точках $\bar{\Gamma}^{n-i}$.

Предложение 2.1. Для каждой точки P , принадлежащей многообразию $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, $i = 1, \dots, k-1$, существует система координат z_1, \dots, z_n с центром в этой точке и такая, что в некоторой ее окрестности:

1. Поля $\mu^1(x, D), \dots, \mu^i(x, D)$ совпадают соответственно с полями

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

2. Многообразие $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, определяется уравнениями $z_1 = \dots = z_i = z_n = 0$.
3. Многообразие \bar{N}^{n-i} , проходящее через $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, описывается уравнениями $z_1 = \dots = z_i = 0$.

Предложение 2.1. Существует разбиение единицы

$$\psi_{M+1}^1(x) + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\psi_{M+1}^{i+1}(x) \cdot \left(\sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^i(x) \right) \right) + \sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^k(x) = 1, \quad k = 2, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

такое, что $\psi_{\tau}^i \in C^{\infty}(\bar{G})$.

Причем $\psi_{M+1}^{i+1}(x) = 0$ в некоторой $d/2$ -окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, $i = 1, \dots, k-1$, и равна 1 вне этой окрестности, а в носителе каждой из остальных функций ψ_{τ}^i определена система координат z_1, \dots, z_n , удовлетворяющая условиям предложения 2.1 и $\mu^1(x, D)\psi_{\tau}^{i+1} = \dots = \mu^i(x, D)\psi_{\tau}^{i+1} = 0$ в некоторой окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$.

Замечание 2.1. При $k = 1$ получается разбиение единицы

$$\psi_{M+1}(x) + \sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}(x) = 1, \quad (2.2)$$

причем $\psi_{M+1}(x) = 0$ в окрестности многообразия $n-2$.

Замечание 2.2. Из построения разбиения единицы (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} & \text{Supp}(\psi_{M+1}^1(x)) \cap \dots \cap \text{Supp} \left(\psi_{M+1}^i(x) \cdot \left(\sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^{i-1}(x) \right) \right) \cap \dots \cap \\ & \cap \text{Supp} \left(\sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^k(x) \right) = \emptyset. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определим функции

1. $h_1^k(x) = \sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^k(x)$, $h_1^i(x) = \psi_{M+1}^{i+1}(x) \left(\sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^i(x) \right)$, $i = 2, \dots, k-1$, $h_1^1(x) = \psi_{M+1}^1(x)$.

Функция $h_1^i(x)$ будет равна 1 в некоторой $d/2$ -окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i}$ и равна 0 вне d -окрестности $\bar{\Gamma}^{n-i}$. То есть функция $h_1^i(x)$ будет являться срезающей функцией для многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i}$, $i = 1, \dots, k$.

$$2. \quad h^k(x) = \sum_{\tau=1}^M \psi_{\tau}^k(x), \quad h^i(x) = \left(\sum_{\tau=i}^k h_{\tau}^{\tau}(x) \right), \quad i = 2, \dots, k-1,$$

$$h^1(x) = \psi_{M+1}^1(x)$$

Функция $h^i(x)$ будет равна 1 в некоторой $d/2$ -окрестности многообразия $n-i$ и равна 0 вне d -окрестности Γ^{n-i} . То есть функция $h^i(x)$ будет являться срезающей функцией для многообразия $n-i$, $i = 1, \dots, k$.

Пусть U окрестность произвольной точки $P \in \bar{\Gamma}^{n-2}$ с достаточно малым диаметром d и z_1, \dots, z_n система координат, введенная в предложении 2.1. Так как $\bar{\Gamma}^{n-2}$ многообразие первого класса, то каждую точку окрестности U можно соединить с многообразием \bar{N}^{n-1} , описываемый уравнением $z_1 = 0$, отрезком, параллельным оси Oz_1 , целиком лежащим в G и имеющим длину $\leq d$.

Лемма 2.1. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое d , что если диаметр окрестности U равен d , функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 0$ и $u(x) = 0$ вне U , то

$$\left\| \int_0^{z_1} u(\xi_1, z_2, \dots, z_n) d\xi_1 \right\|_s \leq \varepsilon_1 \|u\|_s$$

Аналогичная лемма справедлива и для точки $P \in n^{-(i+1)}$, $i \leq k-1$. Опять рассмотрим окрестность U точки P достаточно малого диаметра d , в которой существует система координат z_1, \dots, z_n из предложения 2.1. Напомним, что в этой системе координат многообразия \bar{N}^{n-i} и $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$ описываются соответственно уравнениями $z_1 = \dots = z_i = 0$ и $z_1 = \dots = z_i = z_n = 0$. Обозначим через U^{n-i} пересечение окрестности U с \bar{N}^{n-i} , а через d_i - диаметр U^{n-i} . Заметим, что $d_i \leq d$.

Лемма 2.2. Для любого $\varepsilon_i > 0$ найдется такое d_i , что если диаметр окрестности U^{n-i} точки $P \in n^{-(i+1)}$, $i \leq k-1$ равен d_i , функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 0$ и $u(x) = 0$ вне U^{n-i} , то

$$\left\| \int_0^{z_i} u(0, \dots, 0, \xi_{i1}, z_{i+1}, \dots, z_n) d\xi_{i1} \right\|_s \leq \varepsilon_i \|u(0, \dots, 0, z_i, \dots, z_n)\|_s.$$

Из лемм 2.1 и 2.2. следует

Лемма 2.3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое d , что если диаметр окрестности U точки $P \in n^{-(i+1)}$, $i = 1, \dots, k-1$ равен d , функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 1$ и $u(x) = 0$ вне U , то справедливо неравенство

$$\|u\|_s \leq \varepsilon \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_s + \sum_{q=1}^{i-1} \left\| \frac{\partial u^q}{\partial z_{q+1}} \right\|_s^{U^{n-q}} \right) + \|u^i\|_s^{U^{n-i}},$$

где $u^q = u(0, \dots, 0, z_{q+1}, \dots, z_n)$, $u^i = u(0, \dots, 0, z_{i+1}, \dots, z_n)$, $U^{n-q} = U \cap \bar{N}^{n-q}$, $U^{n-i} = U \cap \bar{N}^{n-i}$.

3. Априорные оценки для решений краевой задачи

Теорема 3.1. Если $u \in H_{s+1}(G)$, $d > 0$ - достаточно малое число и $s > \frac{3}{2}$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u , что выполняются оценки

1. при $k = n - 1$

$$\begin{aligned}
 & C^{-1} (\|u\|_s + \|\mu^1(x, D)h^2u\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}u\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}u\|_s^{N^{n-q}})) \leq \\
 & \leq (\|f\|_{s-2} + \|\mu^1(x, D)h^2f\|_{s-2} + \sum_{i=2}^{k-1} (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}f\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}f\|_{s-2}^{N^{n-q}}) + \\
 & + \|\varphi^1\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-1} + \|h^2\varphi^1\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-1} + \sum_{i=2}^{k-1} (\sum_{q=1}^{i-1} (\|\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(q+1)} + \|h^{q+2}\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-(q+1)})) + \\
 & + \sum_{i=2}^{k-1} \|\varphi^{i+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(i+1)} + \|u\|_0) \leq \\
 & \leq C (\|u\|_s + \|\mu^1(x, D)h^2u\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}u\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}u\|_s^{N^{n-q}})),
 \end{aligned}$$

где $f = Lu$ в G , $\varphi^i = \mu^i(x, D)u$ на $n-i$.

2. при $k < n - 1$

$$\begin{aligned}
 & C^{-1} (\|u\|_s + \|\mu^1(x, D)h^2u\|_s + \sum_{i=2}^k (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}u\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}u\|_s^{N^{n-q}})) \leq \\
 & \leq (\|f\|_{s-2} + \|\mu^1(x, D)h^2f\|_{s-2} + \sum_{i=2}^k (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}f\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}f\|_{s-2}^{N^{n-q}}) + \\
 & + \|\varphi^1\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-1} + \|h^2\varphi^1\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-1} + \sum_{i=2}^k (\sum_{q=1}^{i-1} (\|\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(q+1)} + \|h^{q+2}\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-(q+1)})) + \|\varphi^{k+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(k+1)} + \|u\|_0) \leq \\
 & \leq C (\|u\|_s + \|\mu^1(x, D)h^2u\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} (\sum_{q=1}^{i-1} \|\mu^{q+1}(x, D)h^{q+2}u\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^i \|h^{q+1}u\|_s^{N^{n-q}})),
 \end{aligned}$$

где $f = Lu$ в G , $\varphi^i = \mu^i(x, D)u$ на $n-i$, $\varphi^{k+1} = u$ на $n-(k+1)$.

С л е д с т в и е 3.1. Пространства решений однородных задач

1. $Lu = 0$ в G , $\mu^1(x, D)u = 0$ на $n-1$, $\mu^i(x, D)u = 0$, $i = 1, \dots, k$, $k = n - 1$, на $n-i$.

2. $Lu = 0$ в G , $\mu^1(x, D)u = 0$ на n^{-1} , $\mu^i(x, D)u = 0$, $i = 1, \dots, k$, $k < n - 1$, на n^{-i} .
 $\mu^{k+1}(x, D)u = 0$ на n^{-k-1} .

конечномерны

С л е д с т в и е 3.2. Обозначим через ${}_s(G)$ пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{s(G)} = \|u\|_s + \|\mu^1(h^2u)\|_s + \sum_{i=2}^k \|\mu^i(h^{i+1}u)\|_s^{N^{n-(i-1)}},$$

а через ${}_{s}^{n-i}$, $i = 1, \dots, k - 1$ - пространства функций, определенных на n^{-i} с конечной нормой

$$\|u\|_{s}^{n-i} = \|h_1^i u\|_s^{n-i} + \|h^{i+1}u\|_{s+1}^{n-i},$$

где h_1^i , h^i - функции, определенные в предложении 2.2. Тогда область значений операторов

- $u \rightarrow (Lu, \mu^i(x, D)u, \mu^k(x, D)u)$, $k = n - 1$, действующего из ${}_s(G)$ в ${}_{s-2}(G) \times \times_{s-\frac{3}{2}}^{n-\frac{3}{2}}$
 $\times \dots \times \times_{s-\frac{3}{2}}^{n-(k-1)} \times H_{s-\frac{3}{2}}^{(n-k)}$;
- $u \rightarrow (Lu, \mu^i(x, D)u, u)$, $k < n - 1$, действующего из ${}_s(G)$ в ${}_{s-2}(G) \times \times_{s-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \times \dots \times \times_{s-\frac{3}{2}}^{n-k}$
 $\times H_{s-\frac{1}{2}}^{(n-(k-1))}$

замкнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near boundary for elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. – Comm. Pure Applied Math., 1959, 12, - p. 623-727.
- Baderko E. Schauder estimates for oblique derivative problems. – С. р. Acad.sci. Ser. 1., 1998, 326, №12, 1377-1380.
- Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. – J. Math. and Mech., 1966, 51-81.
- Егоров. Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Наука, М. 1984.- 360 с.
- Kohn J. J. Subellipticity of the ∂ - Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions. – Acta mathem., 1979, 142, 79-122.
- М. Taylor. Pseudodifferential operators.- Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1981. –p. 472.

Дата поступления 29.11.2009

The elliptic regional problem degenerating on border

© D.I. Boyarkin²

Abstract. In work the elliptic regional problem with degeneration on border is considered. Aprioristic estimations for the decision of a problem are received. At research methods of the functional analysis and geometry of smooth varieties are used.

Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky.

REFERENCES

1. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near boundary for elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. –Comm. Pure Applied Math., 1959, 12, - p. 623-727.
2. Baderko E. Schauder estimates for oblique derivative problems. – C. r. Acad.sci. Ser. 1., 1998, 326, №12, 1377-1380.
3. Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. –J. Math. and Mech., 1966, 51-81.
4. Егоров. Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Наука, М. 1984.- 360 с.
5. Kohn J. J. Subellipticity of the ∂ - Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions. – Acta mathem., 1979, 142, 79-122.
6. M. Taylor. Pseudodifferential operators.- Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1981. –p. 472.

²Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; uralsib3@saransk-com.ru.

УДК 517.9

О выборе интерполяционного полинома в существенно неосциллирующих схемах

© Р. В. Жалнин¹, Е. Е. Пескова²

Аннотация. В работе предложен новый способ выбора интерполяционного полинома в существенно неосциллирующих схемах для численного решения систем уравнений газовой динамики.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ENO схема, существенно неосциллирующие схемы

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dF(U)}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ u(e + p) \end{pmatrix}, u = \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right).$$

Система замыкается уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho.$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, ε - удельная внутренняя энергия на единицу объема, p - давление, γ - показатель адиабаты.

Для построения дискретной модели область непрерывного изменения аргумента заменим дискретной сеткой, равномерной по каждому направлению.

Для аппроксимации системы уравнений (1.1) использовалась дифференциально-разностная схема [3, 4]:

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (1.2)$$

где $F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+)$ - дискретные потоки, которые вычислялись по схеме распада разрыва [1, 2].

Здесь $U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+$ - «левые» и «правые» значения вектора U на границе между i и $i + 1$ ячейками. Для их расчета будем использовать ENO алгоритм [5], изменив способ выбора шаблона.

Пусть дана равномерная сетка с шагом Δx :

$$x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2}.$$

Обозначим ячейку сетки $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ за I_i . Рассмотрим функцию $\nu(x)$, и предположим, что известны средние значения этой функции в ячейках I_i :

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \nu(\xi) d\xi, i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

¹Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева; zhrv@appmath.mrsu.ru.

²Магистрант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева.

Для каждой ячейки $I_i (i = 1, 2, \dots, N)$ построим полином $p(x)$ степени не больше $k - 1$, который бы интерполировал функцию $\nu(x)$ с порядком точности k в пределах данной ячейки, т.е.

$$p(x) = \nu(x) + O(\Delta x^k), \tag{1.4}$$

при $x \in I_i$, и выполнено условие

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(x) dx = \bar{\nu}_i. \tag{1.5}$$

Тогда, обозначив $\nu_{i+1/2}^- = p(x_{i+1/2}), \nu_{i-1/2}^+ = p(x_{i-1/2})$, получим

$$\nu_{i+1/2}^- = \nu(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k), \nu_{i-1/2}^+ = \nu(x_{i-1/2}) + O(\Delta x^k). \tag{1.6}$$

Такой полином можно получить, если рассмотреть первообразную $V(x)$ функции $\nu(x)$:

$$V(x) = \int_{-\infty}^x \nu(\xi) d\xi, \tag{1.7}$$

и построив полином $P(x)$ степени k , который будет интерполировать функцию $V(x)$ на границах ячеек сетки, положить $p(x) = P'(x)$.

Таким способом можно получить k полиномов $p_r(x), r = 0, \dots, k - 1$, каждый из которых будет соответствовать шаблону $S_r = \{x_{i-r-1/2}, \dots, x_{i-r+k+1/2}\}, r=0, \dots, k-1$.

Далее из k полиномов выберем тот, для которого описываемая им кривая имеет наименьшую длину l_r на интервале I_i :

$$l_r = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sqrt{1 + (p_r'(x))^2} \tag{1.8}$$

Значение выражения (1.8) будем вычислять методом трапеций:

$$l_k \approx \frac{\Delta x}{4} \left(\frac{\sqrt{1 + (p'(x_{i-1/2}))^2}}{2} + \sqrt{1 + (p'(x_{i-1/4}))^2} + \sqrt{1 + (p'(x_i))^2} + \sqrt{1 + (p'(x_{i+1/4}))^2} + \frac{\sqrt{1 + (p'(x_{i+1/2}))^2}}{2} \right) \tag{1.9}$$

Расчеты по данной схеме были выполнены для задачи Римана с начальными данными Сода и начальными данными Лакса.

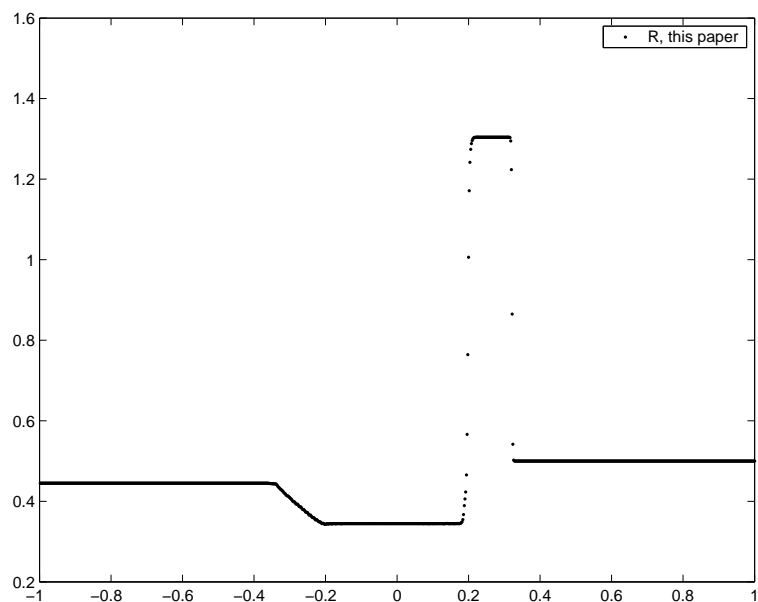
Начальные данные Сода:

$$(\rho_1, \nu_1, p_1) = (1, 0, 1), (\rho_2, \nu_2, p_2) = (0.125, 0, 0.1). \tag{1.10}$$

Начальные данные Лакса:

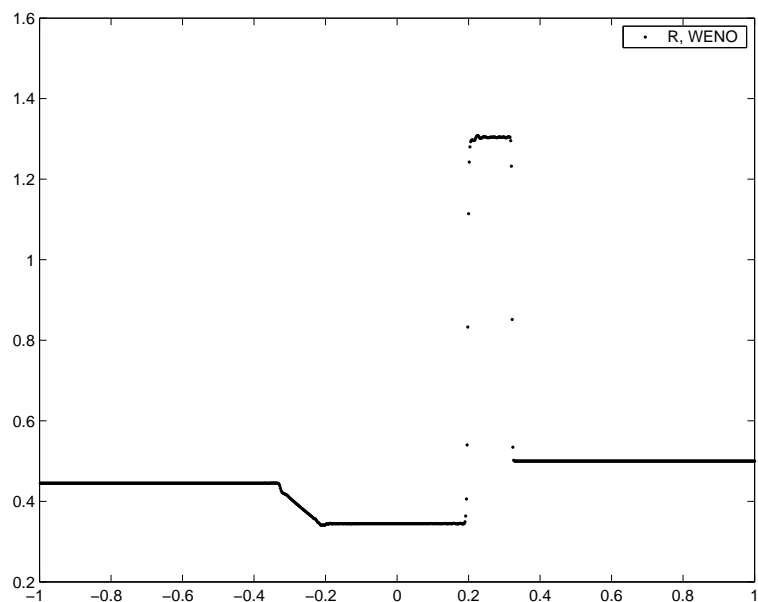
$$(\rho_1, \nu_1, p_1) = (0.445, 0.698, 3.528), (\rho_2, \nu_2, p_2) = (0.5, 0, 0.571). \tag{1.11}$$

Задача рассматривалась на отрезке $[-1, 1]$, контактный разрыв располагался в точке $x = 0$. Использовалась равномерная сетка с шагом $\Delta x = 2 \cdot 10^{-3}$ по пространственной переменной, шаг по времени был равен $\Delta t = 10^{-4}$. Расчет велся до времени $t=0.2$ для задачи с данными Сода и до времени $t = 0.13$ для задачи Лакса. Полученные результаты сравнивались с результатами расчетов, в которых «левые» и «правые» значения вектора U на границах между ячейками рассчитывались с использованием WENO алгоритма [6].



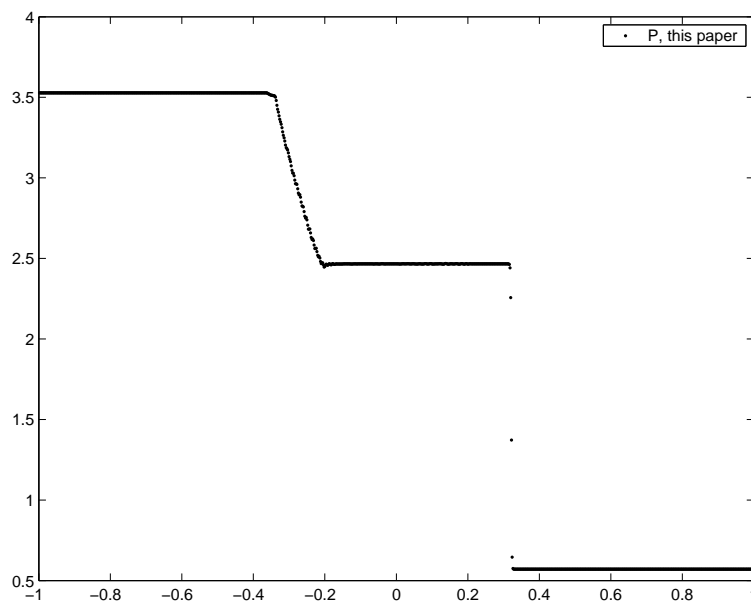
Р и с у н о к 1.1

Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): плотность

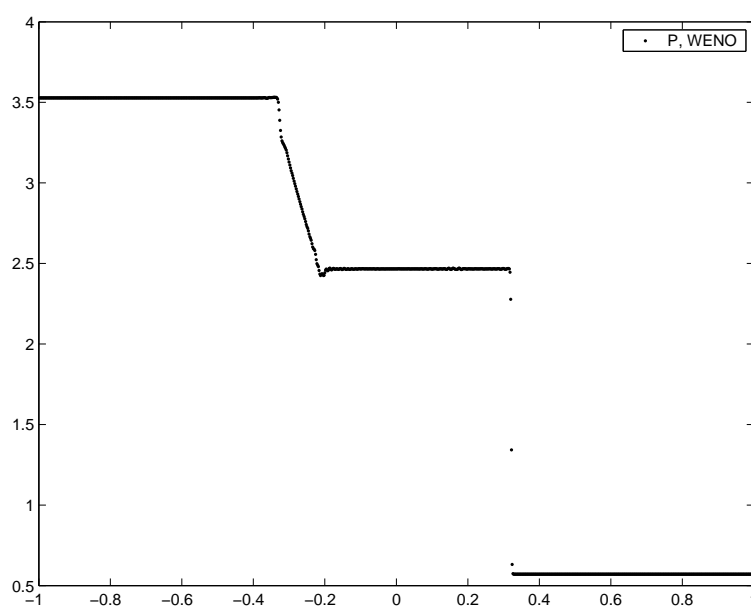


Р и с у н о к 1.2

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): плотность

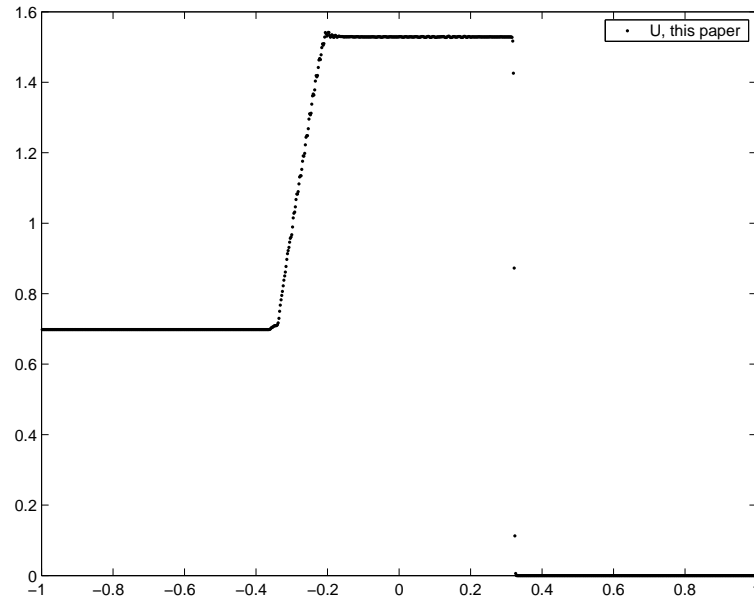


Р и с у н о к 1.3

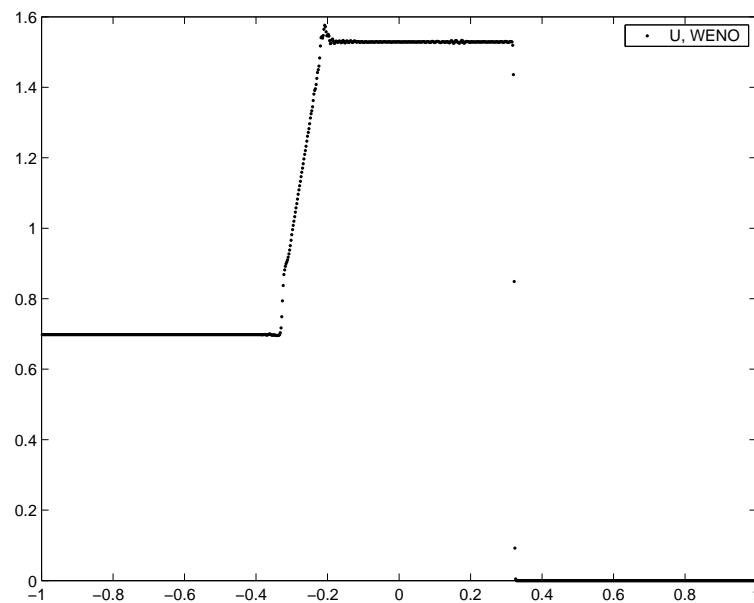
Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): давление

Р и с у н о к 1.4

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): давление

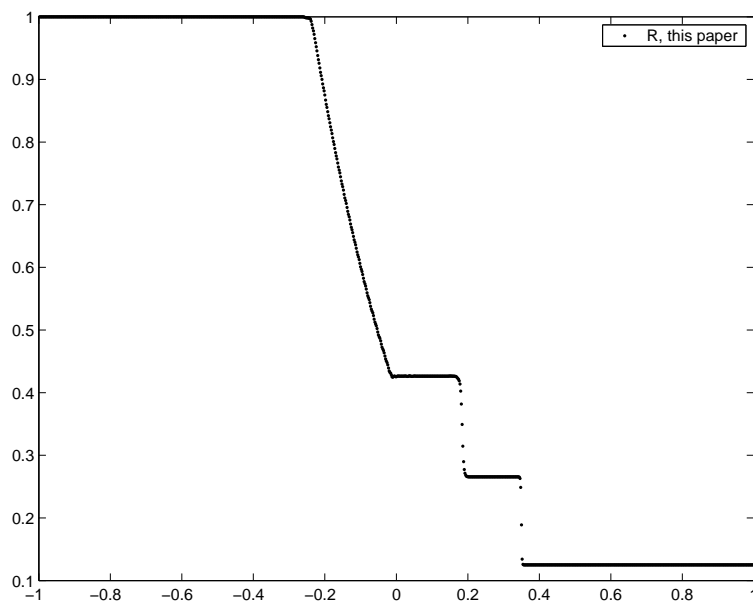


Р и с у н о к 1.5

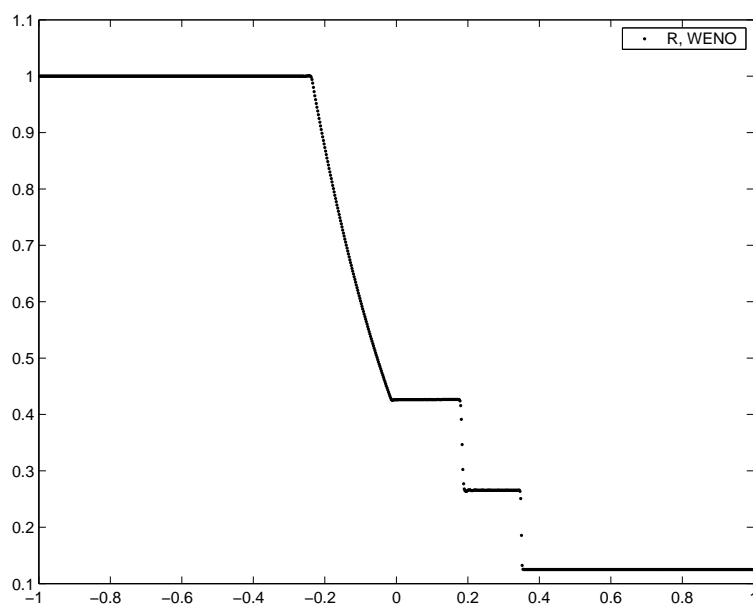
Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): скорость

Р и с у н о к 1.6

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): скорость

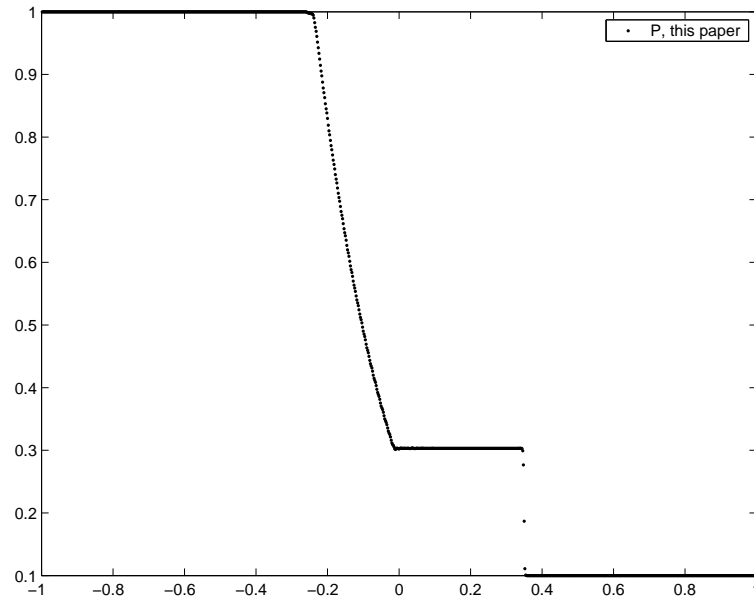


Р и с у н о к 1.7

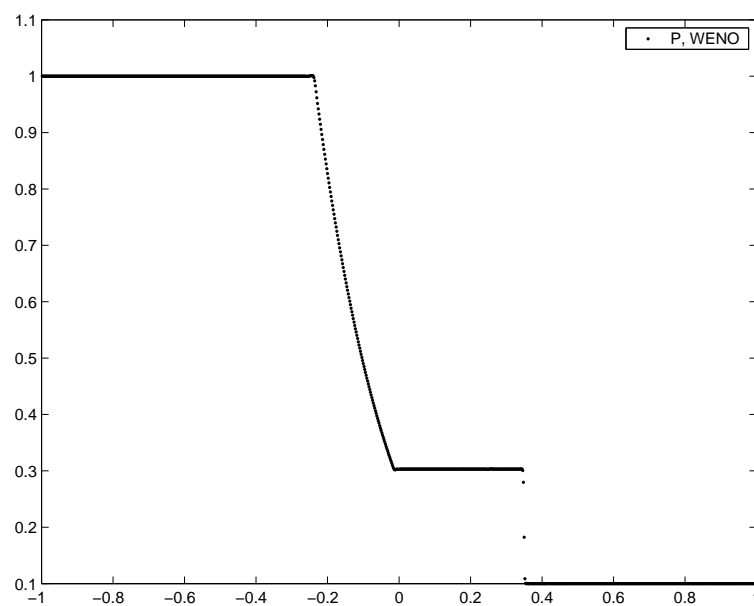
Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): плотность

Р и с у н о к 1.8

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): плотность

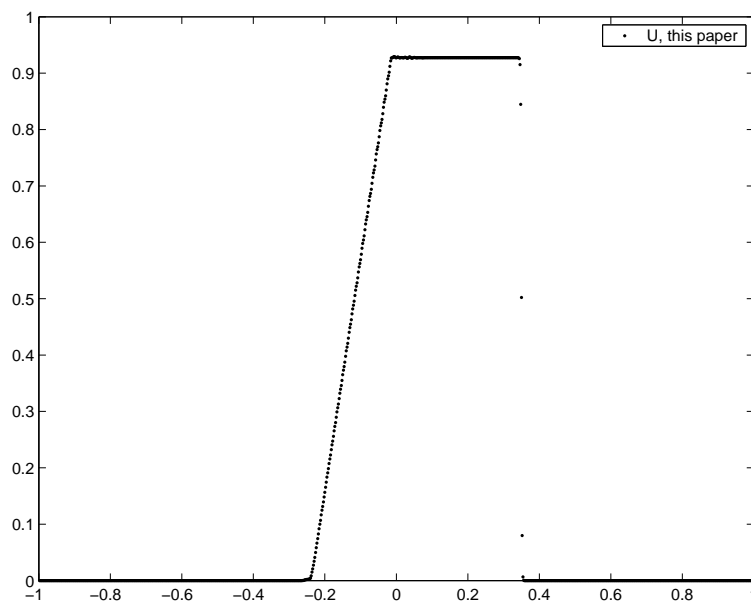


Р и с у н о к 1.9

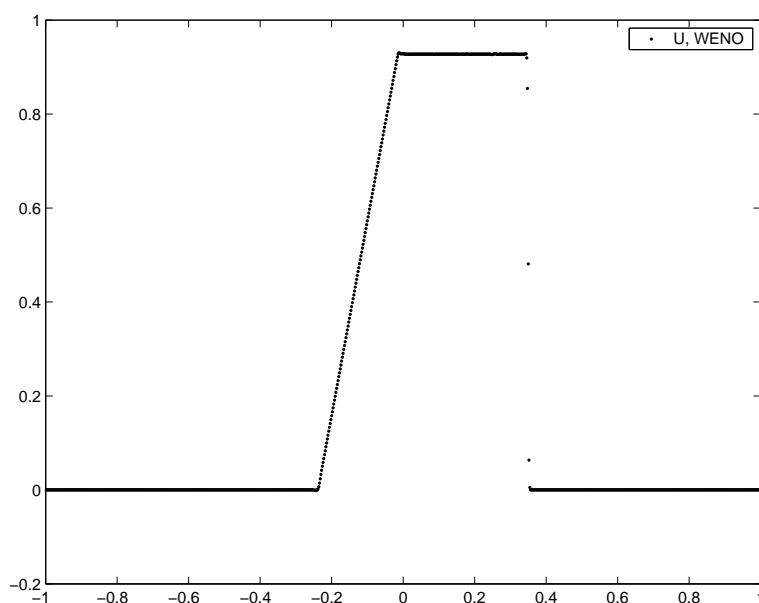
Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): давление

Р и с у н о к 1.10

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): давление



Р и с у н о к 1.11

Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): скорость

Р и с у н о к 1.12

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): скорость

Таким образом, из графиков плотности, давления и скорости для решений модельных задач видно, что предложенный способ выбора интерполяционного полинома дает меньшие осцилляции на разрывах решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб., 1959, 47, вып. 3, 271-306.

2. Годунов С.К., Забродин М.Я., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., Наука, 1976
3. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Издательство "Наука". Главная редакция Физико-математической литературы, "Математическое моделирование", 1989, Т.1, № 5, - С. 95-120.
4. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П., Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмаера-Мешкова, Математическое моделирование, 1995, т. 7, № 5, с. 15 – 25.
5. A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. III, Journal of computational physics, 71, p. 231 – 303 (1987).
6. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of computational physics, 126 (1996). P. 202-228.

About choosing interpolation polinom in essentially non-oscillatory schemes.

© R. V. Zhalnin³, E. E. Peskova⁴

Abstract. In this paper proposed new choosing method of interpolation polinom in essentially non-oscillatory schemes for solving gas dynamic equations.

Key Words: gas dynamic equations, ENO schemes, essentially non-oscillatory schemes

REFERENCES

1. Godunov S. K., Difference method of numerical calculation of discontinuous decisions of the equations of hydrodynamics // Math. col., 1959, 47, No. 3, 271-306.
2. Godunov S. K., Zabrodin M. Ya., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. The numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics, M., Nauka, 1976
3. Vyazikov K. V., Tishkin V. F., Favorskiy A. P. Construction monotonous difference schemes of the high order of approximation for hyperbolic systems. // Nauka, «Mathematical modeling», 1989, V.1, № 5, - P. 95-120.
4. Tishkin V. F., Nikishin V. V., Popov I. V., Favorskiy A. P., Difference schemes of three-dimensional gas dynamics for a problem about evolution of Richtmayer-Meshkov instability, Mathematical modelling, 1995. V. 7, № 5, p. 15 – 25.
5. A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. III, Journal of computational physics, 71, p. 231 – 303 (1987).
6. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of computational physics, 126 (1996). P. 202-228.

³Senior Lecturer of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@appmath.mrsu.ru.

⁴Magister of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk.

УДК 517.9

О дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с начальными условиями из классов Никольского

© И. Ж. Ибатулин¹

Аннотация. В работе получены оптимальные порядки дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с нулевой начальной скоростью в метрике $L^{q,\infty}$.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, задача Коши, уравнение Клейна-Гордона, квантовая теория поля, ряд Фурье, функционал.

1. Введение

Предметом исследования в статье является задача Коши для уравнения Клейна-Гордона ($s = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \quad (u = u(x, t), 0 \leq t < \infty, x \in R^s), \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \quad (x \in R^s), \quad (1.2)$$

$$f_1 \in H_2^{r_1}(0, 1)^s, \quad f_2 \in H_2^{r_2}(0, 1)^s, \quad r_1 > 2 + \frac{s}{2}, \quad r_2 > 1 + \frac{s}{2}. \quad (1.3)$$

В квантовой теории поля уравнение (1.1) рассматривают как полевое уравнение (см., например, [1, с. 42]).

Уравнение Клейна-Гордона имеет как некоторые общие свойства, так и серьезные отличия с волновым уравнением (см., например, [2]), а уравнение Шредингера является нерелятивистским приближением для уравнения Клейна — Гордона (см., например, [1, с. 41]).

2. Постановка задачи

В изучаемом здесь случае задача (1.1)-(1.3) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами $\{\hat{f}_1(m)\}_{m \in Z^s}$ и $\{\hat{f}_2(m)\}_{m \in Z^s}$ коэффициентов Фурье (подробнее см. [3]). Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема N , полученной от функций f_1 и f_2 , которые принадлежат классам функций, однопериодических по каждой из своих s переменных, $F^{(1)} = H_2^{r_1}(0, 1)^s$, $F^{(2)} = H_2^{r_2}(0, 1)^s$ соответственно (определение классов см., например, [3, 4]). Остановимся более подробно на постановке рассматриваемой задачи (в редакции из [5 - 6]).

Для заданного целого положительного N выбираем целые положительные числа N_1 и N_2 такие, что $N_1 + N_2 = N$, далее от функций f_1 и f_2 берем числовую информацию,

¹Преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан; mathibragim@mail.ru.

объема N_1 и N_2 соответственно, то есть функционалы из $L_{N_1}^{(1)}$ и $L_{N_2}^{(2)}$, причем $L_{N_1}^{(1)}$ и $L_{N_2}^{(2)}$, могут быть любыми, единственным естественным ограничением является то, что первые N_1 функционалов должны быть определены на линейной оболочке на классе функций $F^{(1)}$, оставшиеся N_2 функционала – на линейной оболочке на $F^{(2)}$.

Отметим некоторые примеры функционалов

1. $l(f) = f(\xi)$ - значения в точке;
2. $l(f) = \langle f, g \rangle$ - скалярное произведение, в частности, коэффициенты Фурье по той или иной ОНС;
3. $l(f)$ - все возможные линейные функционалы;
4. $l(f)$ - какие-то функционалы, но не все.

Полученную информацию перерабатываем с помощью алгоритма $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_s; x, t)$ до функции от тех же переменных, что и функция $u(x, t; f_1, f_2)$ - решение задачи (1.1)-(1.3), конечно же, от функции $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_s; x, t)$ требуем только, чтобы она принадлежала нормированному пространству функций Y , определенных на $\Omega_Y = [0, 1]^s \times [0, +\infty)$.

В качестве алгоритма $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_s; x, t)$ могут служить

- 1) конечные суммы вида $\sum_{k=1}^N \tau_k \rho_k(t) \psi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ -
 - система Хаара, Франклина, Уолша и т.д.,
 - базис в банаховом пространстве B ,
 - базис Рисса в V ,
 - система ненулевых элементов сепарабельного гильбертового пространства H , являющиеся фреймом,
 - ортонормированный базис пространства $L^2(R^1)$, порожденный функцией $\psi \in L^2(R^1)$, называемой всплеском.
- 2) конечные суммы вида $\sum_{k=1}^N \tau_k \rho_k(t) D_N(x - \xi_k)$, где D_N - специальное ядро.
- 3) решение разностной схемы составленной для задачи (1.1)-(1.3).

Тем самым, перебирая всевозможные наборы $(l(N); \varphi_N) \equiv (l_1^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(1)}, l_1^{(2)}, \dots, l_{N_2}^{(2)}; \varphi_N)$ мы можем получить весь арсенал, изучаемый в теории приближений и вычислительной математике.

Погрешность приближения измеряем в норме пространства Y , далее берем супреумы по классам $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, чтобы знать наихудшую погрешность по классам, остальные не хуже, затем среди всевозможных агрегатов приближения выбираем наилучший и последнее, рассматриваем минимум, перебирая всевозможные пары натуральных чисел N_1, N_2 : $N_1 + N_2 = N$, поскольку важно взять такое количество информации от каждой из функций f_1 и f_2 (общее количество информации N), чтобы порядок погрешности был как можно меньше:

$$\min_{\substack{N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{(l(N); \varphi_N) \in L_{N_1}^{(1)} \times L_{N_2}^{(2)} \times \{\varphi_N\}} \sup_{\substack{f_1 \in F^{(1)} \\ f_2 \in F^{(2)}}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(2)}; \cdot)\|_Y \quad (2.1)$$

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2.1) (желательно совпадающих с точностью до констант) и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Через $c(\alpha, \beta, \dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, различные, вообще говоря, в разных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{P_N\}_{N=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел и $\{Q_N\}_{N=1}^\infty$ – произвольная числовая последовательность, то запись $Q_N \ll_{\alpha,\beta,\dots} P_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha, \beta, \dots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|Q_N| \leq c(\alpha, \beta, \dots)P_N$. Если же $\{P_N\}_{N=1}^\infty$ и $\{Q_N\}_{N=1}^\infty$ – две последовательности положительных чисел, то запись $Q_N \asymp_{\alpha,\beta,\dots} P_N$ означает, что одновременно выполняются соотношения $Q_N \ll_{\alpha,\beta,\dots} P_N$ и $P_N \ll_{\alpha,\beta,\dots} Q_N$.

3. Оптимальные порядки дискретизации решений задачи (1.1)-(1.3)

Конкретизируя в (2.1) пространства, классы, и множества $L_{N_1}^{(1)}, L_{N_2}^{(2)}$ получаем различные постановки задач (см., напр., [5-9] и имеющуюся в них библиографию).

В работе [3] в случае $u(x, t; f_1, f_2)$ – решение задачи (1.1)-(1.3): $L_{N_1}^{(1)}$ и $L_{N_2}^{(2)}$ – множества N_1 и N_2 членных наборов всех возможных линейных функционалов, определенных на линейных оболочках на классах $H_2^{r_1}(0, 1)^s$ и $H_2^{r_2}(0, 1)^s$ соответственно, $Y = L^{2,\infty} = L^{2,\infty}(0, 1)^s \times [0, +\infty)$ была доказана следующая

Т е о р е м а А. Пусть даны целое положительное число s , положительные r_1 и r_2 такие, что

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}, r_2 > 1 + \frac{s}{2}.$$

Тогда имеют место соотношения ($N = 1, 2, \dots$)

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{\substack{l_k \in L_{N_k}^{(k)} \\ k=1,2,\varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s \\ f_2 \in H_2^{r_2}(0,1)^s}} \left\| u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(2)}; \cdot) \right\|_{L^{2,\infty}} \asymp_{r_1, r_2, s} N^{-\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s}}.$$

Данная работа посвящена случаю $u(x, t; f_1, 0)$ – решение задачи (1.1)-(1.3): $f_1 \in H_2^{r_1}(0, 1)^s$, $f_2 \equiv 0$, $L_N^{(1)}$ – множество N членных наборов всех возможных линейных функционалов, определенных на линейной оболочке на классе $H_2^{r_1}(0, 1)^s$, $Y = L^{q,\infty} = L^{q,\infty}(0, 1)^s \times [0, +\infty)$, $2 \leq q \leq +\infty$. Справедлива

Т е о р е м а. Пусть даны целое положительное число s , положительное r_1 и $2 \leq q \leq +\infty$ такие, что

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}.$$

Тогда имеют место соотношения ($N = 1, 2, \dots$)

$$\inf_{\varphi_N} \sup_{l_1 \in L_N^{(1)}, f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s} \left\| u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}; \cdot) \right\|_{r_1, q, s} \asymp N^{-\frac{r_1}{s} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим основные моменты доказательства данной теоремы.

Оценка снизу проводится с помощью построения тригонометрического многочлена $b(x)$ со спектром в $(2^{n-1}, 2^n]^s \cap Z^s$, где $n = 1 + \left\lceil \frac{\log_2 2N}{s} \right\rceil$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Тригонометрический многочлен $b(x)$ выбирается таким образом, что для наперед заданных линейных функционалов l_1, \dots, l_N выполнено $l_j(b) = 0$ ($j = 1, \dots, N$) и $\|b\|_{L^\infty} \geq 2^{-nr} N^{1/2}$, $\|b\|_{L^2} = 2^{-nr}$, $b \in H_2^{r_1}(0, 1)^s$ (о существовании подобного многочлена см. [3, 7]). Далее,

оценивая снизу $\sup_{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s} \left\| u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}; \cdot) \right\|_{L^{q, \infty}(0,1)^s \times [0, +\infty)}$ через $\|b\|_{L^q}$, с помощью неравенства разных метрик и определения инфимума получаем оценку снизу в (3.1).

Оценка сверху. Поскольку решение задачи (1.1) с начальными условиями $u(x, 0) = f_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ ($x \in R^s$), $f_1 \in H_2^{r_1}(0, 1)^s$, представимо в виде абсолютно сходящегося ряда $u(x, t) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \cos(t\sqrt{4\pi(m, m) + 1})e^{2\pi i(m, x)}$ (см. [3]), то, рассматривая в качестве агрегата $\varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}; x, t)$ соответственно частичную сумму ряда ($N \geq 3^s$):

$$\varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}; x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}(\nu^{(k)}) \cos(t\sqrt{4\pi(\nu^{(k)}, \nu^{(k)}) + 1})e^{2\pi i(\nu^{(k)}, x)},$$

где $\{\nu^{(k)}\}_{k=1}^{N'}$ - некоторое упорядочение множества $I_n = \{(m_1, \dots, m_s) : \max_{j=1, \dots, s} |m_j| \leq 2^n\}$, $N' = (2^n + 1)^s$, $n = \lceil \log_2(\sqrt[s]{N} - 1) \rceil - 1$ и, применяя неравенства разных метрик, получаем оценку сверху в (3.1).

Замечание. При $q = 2$ из вышеуказанной теоремы получаются соответственно неупрощаемые порядки погрешностей дискретизации решений задачи Коши для уравнении Клейна-Гордона с начальными условиями $u(x, 0) = f_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ ($x \in R^s$), $f_1 \in H_2^{r_1}(0, 1)^s$, $r_1 > 2 + \frac{s}{2}$, по точной информации, которые были получены ранее в [3].

4. Заключение

Практический смысл полученных результатов заключается в том, что, используя весь арсенал, изучаемый в теории приближений и вычислительной математике, беря от функции $f_1 \in H_2^{r_1}(0, 1)^s$ информацию объема N в виде различных линейных функционалов, но рассматривая как линейные так и не линейные алгоритмы приближения решений задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона с начальными условиями

$$u(x, 0) = f_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 (x \in R^s),$$

и измеряя погрешность в метрике $L^{q, \infty}(0, 1)^s \times [0, +\infty)$, с точностью до констант не зависящих от N получить оценку лучше, чем $N^{-\frac{r_1}{s} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}$ нельзя, и агрегатом, реализующим оценку сверху является ($N \geq 3^s$)

$$\varphi_N(l_1^{(1)}, \dots, l_N^{(1)}; x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}_1(\nu^{(k)}) \cos(t\sqrt{4\pi^2(\nu^{(k)}, \nu^{(k)}) + 1})e^{2\pi i(\nu^{(k)}, x)},$$

где $\{\nu^{(j)}\}_{j=1}^{N'}$ - некоторое упорядочение множества I_n , $N' = (2^{n+1} + 1)^s$, $n = \lceil \log_2(\sqrt[s]{N} - 1) \rceil - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райдер Л. Квантовая теория поля. – М.: Платон, 1998. – 512 с.
2. Дудникова Т.В., Комеч А.И. О двух-температурной задаче для уравнения Клейна-Гордона // Российский журнал Мат. Физики, 2005, Т. 12, №. 3, С. 301-325.

3. Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ // Дифференциальные уравнения, 2008, Т.44; №4, - С. 491-506.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969 – 480 с.
5. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье// Вестник Евразийского университета, 1997; №3, - С. 90-144.
6. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье Вестник (Продолжение 1)// Вестник Евразийского национального университета, 2002; № 3-4 - С. 222-272.
7. Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Мат. заметки, 2003, Т. 73; №6, - С. 803-812.
8. Берикханова М.Е., Шерниязов К.Е. Об информативной мощности всех линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Лапласа в круге // Вестник КазНУ. Серия мат. мех.инф, 2003, Т. 38; №3, - С. 8-18.
9. Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона// Журн.вычислит. математики и мат.физики, 2006, Т. 46; №9, - С. 1594-1604.

Дата поступления 01.10.2009

On the discretization of solutions of a problem of Koshi For Klein-Gordon's equation with entry conditions from Nikolsky's classes

© I. Zh. Ibatulin²

Abstract. In the work optimum usages of discretization of solutions of a problem of Koshi for Klein-Gordon's equation with zero initial speed in the metrics of $L^{q,\infty}$ are received.

Key Words: The differential equations in partial derivatives, a problem of Koshi, Klein-Gordon's equation, the quantum theory of a field, a series of Fure, functional.

REFERENCES

1. Raider L. The quantum theory of a field. M.: Platon, 1998., 512 p.
2. Dudnikova T.V., Komech A.I. On two-temperature problem for Klein-Gordon's equation//Russian J.Math. Physics, 2005 v. 12, no. 3, pp. 301-325.
3. Ibatulin I.Zh., Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of $L^{2,\infty}$ // Differential Equations, 2008, Vol. 44, No. 4, pp. 510–526.
4. Nikolski S.M. Approach of functions of many variables and the theorems. M.: Sciences, 1969, 480 p.
5. Temirgaliev N. Theory numbers methods and the probability-theoretic approach to Analysis problems. The theory of investments and approach, absolute convergence and transformations of Fure series// Buleten of Eurasian university, 1997, no. 3, pp. 90-144.
6. Temirgaliev N. Theory numbers methods and the probability-theoretic approach to Analysis problems. The theory of investments and approach, absolute convergence and transformations of Fure series (Continuation 1)// Buleten of Eurasian national university, 2002, no. 3-4, pp. 222-272.
7. Azhgaliev Sh., Temirgaliev N. Informativeness of linear functionals//Mathematical Notes, 2003, vol. 73, no. 6, pp. 759–768.
8. Berikhanova M.E., Sherneyazov K.E. Informativeness of linear functionals for the discretization of the solutions to Poisson's equation on the round// Buleten KazNU. ser. mat. mech.inf, 2003, V. 38, no. 3, pp. 8-18.
9. Bailov E.A., Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, Vol. 46, No. 9, pp. 1515–1525.

²The teacher of chair of fundamental and applied mathematics, The Euroasian national university name after L. N. Gumilev, Astana, Kazakhstan; mathibragim@mail.ru.

УДК 519.71

Программный пакет Cone. Структура и реализация

© О. Е. Каледин¹, Л. А. Сухарев²

Аннотация. В работе дается краткое описание программного пакета Cone и его возможностей при построении математических моделей динамических процессов, основанных на известных статистических данных.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное включение, конус возможных решений, функционал качества, структура программы, программное обеспечение.

На сегодняшний день наука достаточно далеко продвинулась в разработке технологий прогнозирования. Специалистам хорошо известны методы математической статистики, нейросетевого прогнозирования, нечёткой логики и т.п. Разработаны соответствующие программные пакеты, но на практике они, к сожалению, не всегда доступны рядовому пользователю. При этом часто прогнозы составляются с использованием программного продукта для работы с электронными таблицами Microsoft Excel.

В данной работе представлено описание программного обеспечения для построения прогноза развития динамического процесса по известным многолетним статистическим данным. Исследуемые процессы предполагаются периодическими или «сезонными». Дело в том, что понятие «сезон» в прогнозировании применим к любым систематическим колебаниям. Например, если речь идёт об изучении товарооборота в течение недели, то под термином «сезон» понимается один день. Кроме того, цикл колебаний может существенно отличаться (как в большую, так и в меньшую сторону) от величины в один год. И если удаётся выявить величину цикла этих колебаний, то такую статистическую информацию можно использовать для прогнозирования с использованием программного пакета Cone.

Пакет Cone предназначен для решения задачи в следующей математической постановке.

- Имеются статистические данные — база данных X_{T_0, T_1} . Предполагается, что они описывают некоторый процесс $x = x(t)$, $t \in [T_0, T_1]$ и $x \in AC[T_0, T_1]$, где $AC[T_0, T_1]$ — класс абсолютно-непрерывных функций на $[T_0, T_1]$.
- Требуется найти все такие абсолютно непрерывные функции на $[T_0, T_1]$, которые порождают базу данных X_{T_0, T_1} . Здесь известен следующий результат [1]: все такие функции удовлетворяют решению дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x),$$

где $F(tx,)$ — многозначная функция, которую можно построить задав ее "границы" применения. То есть дифференциальное включение заменяется дифференциальным неравенством

$$\mu(t, x) \leq \frac{dx}{dt} \leq \lambda(t, x).$$

Для построения функций $\lambda = \lambda(t, x)$ и $\mu = \mu(t, x)$ можно применять различные методы, лишь бы выполнялись условия существования решения задачи Коши — условия

¹Аспирант кафедры прикладной математики МордГУ, Мордовский государственный университет, г. Саранск; kaledinoe@gmail.com.

²Зав. каф. алгебры и геометрии МордГУ, Мордовский государственный университет, г. Саранск; suharev_la@mail.ru.

Зарембы. Поэтому функции λ и μ предполагаются квазимоноotonно неубывающими. Сегмент $[T_0, T_1]$ - это участок, на котором поведение вектора $x = x(t)$ известно - оно определено статистикой. Повлиять на вектор $x = x(t)$ уже нет возможности, поэтому промежуток $[T_0, T_1]$ называют неуправляемым [1].

- На промежутке $[T_1, T_2]$ - в "новом" сезоне, необходимо построить прогноз, функцию $x = x(t)$, которая описывала бы все возможные поведения процесса. Исследование поведения решений дифференциальных включений можно проводить без использования функционала качества, и с ним — $I = I(t, x, u)$. Здесь предполагается, что на промежутке $[T_1, T_2]$ имеется возможность управлять процессом с помощью некоторой функции $u = u(t)$ из некоторого класса допустимых управлений $K \subset AC[T_1, T_2]$. Ясно, что $x = x(t, x, u) \in AC[T_1, T_2]$ и на промежутке $[T_1, T_2]$ удовлетворяет новому дифференциальному включению

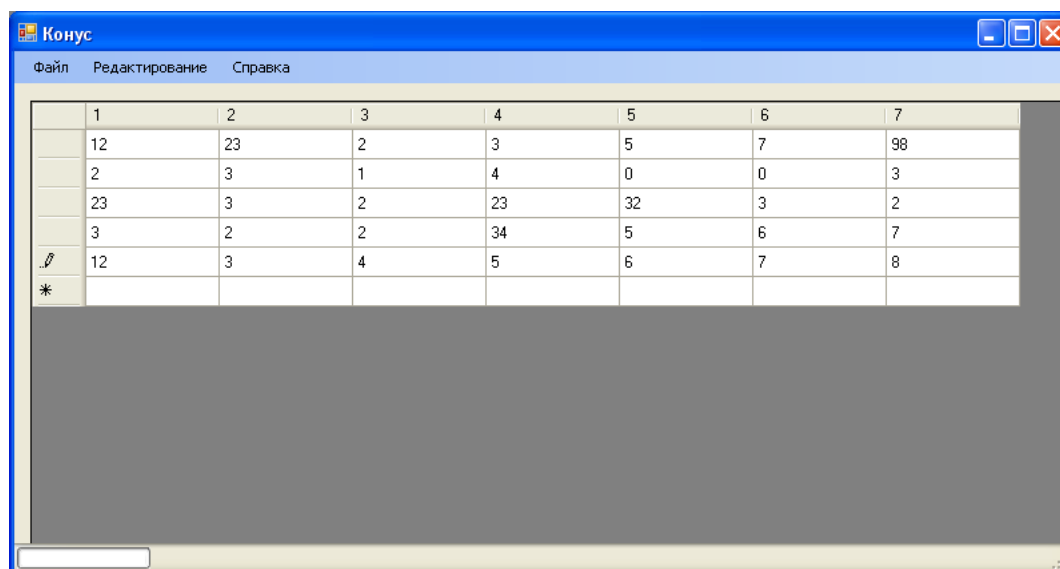
$$\frac{dx}{dt} \in F_1(t, x, u)$$

. Задача состоит в том, чтобы построить правую часть этого включения. А именно, построить квазимонотонные функции $\lambda = \lambda_1(t, x, u)$ и $\mu = \mu_1(t, x, u)$ такие, что

$$\mu_1(t, x, u) \leq \frac{dx}{dt} \leq \lambda_1(t, x, u)$$

при всех $t \in [T_1, T_2]$ и допустимых управлениях $u \in K$.

Решать такую задачу прямыми вычислениями без привлечения численных методов и создания программного обеспечения, по крайней мере, нерационально. Поэтому мы предлагаем для решения поставленных задач (хотя бы в некоторых частных случаях) использовать специализированное программное обеспечение "Cone". Цель пакета "Cone" построить границы конуса возможных решений при различных управлениях с заданным функционалом качества и без него.



Р и с у н о к 1.1

Главное окно приложения, ожидающее импорта данных

Программный пакет «Cone» состоит из нескольких независимых блоков. Окно приложения после его запуска выглядит так, как показано на рисунке 1.1:

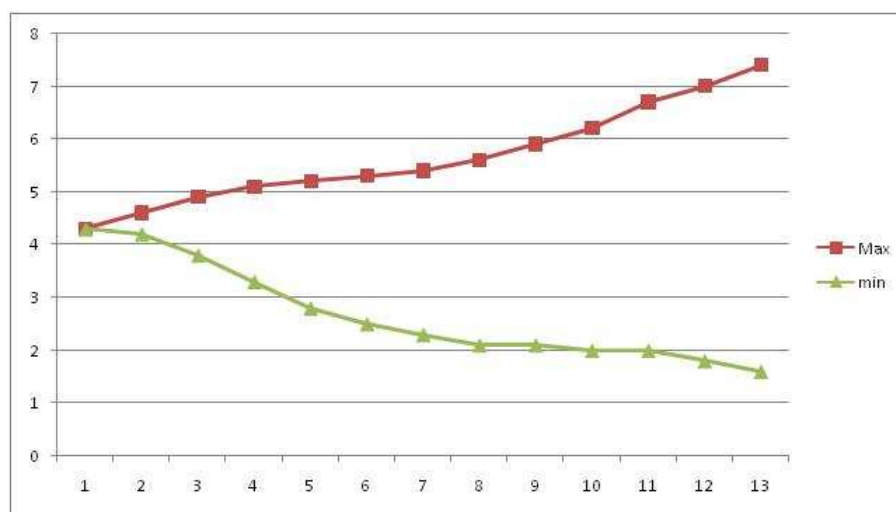
В блоке ввода данных происходит импорт данных в систему и проверка на корректность. После передачи данных приложению, последующей проверки их на корректность, происходит, собственно, обработка данных - построение разделенных разностей, поиск максимумов и минимумов разделенных разностей. По окончании этапа построения минимумов и максимумов разделенных разностей, меню программы предусматривает выбор метода построения конуса возможных траекторий. Блок «Построение конуса возможных решений на неуправляемом участке» можно реализован двумя методами.

- Если функции правых частей для уравнений сравнения μ и λ ищутся в виде максимумов и минимумов производных на соответствующих разбиениях сетки. В этом случае решения уравнений сравнения - ломаные, составленные из прямых

$$y = kx + C.$$

- Если функции μ и λ - аппроксимируются другим способом. В этом случае для построения конуса возможных траекторий необходимо сначала решение соответствующих уравнений сравнения.

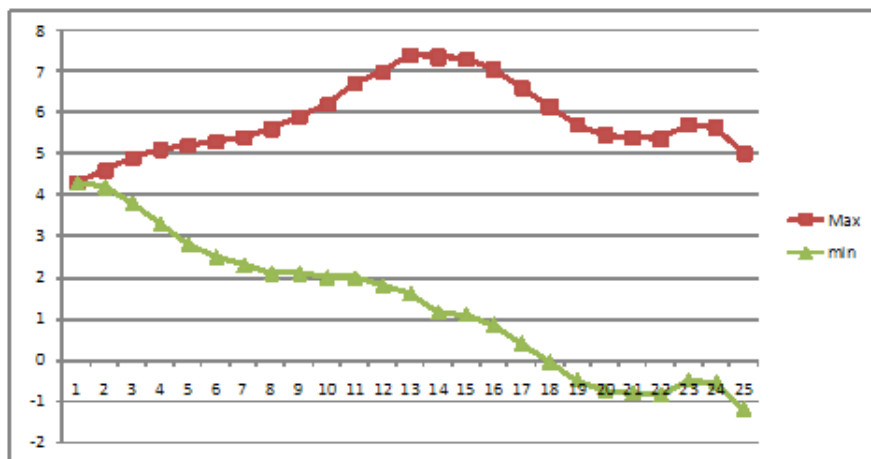
Выбрав соответствующий пункт меню, мы можем, например, методом «ломаных» построить конус возможных решений на неуправляемом участке. Результат построений отображается графически (см. рис. 1.2). Допускается вывод результата в отдельный графический файл.



Р и с у н о к 1.2

Конус возможных траекторий

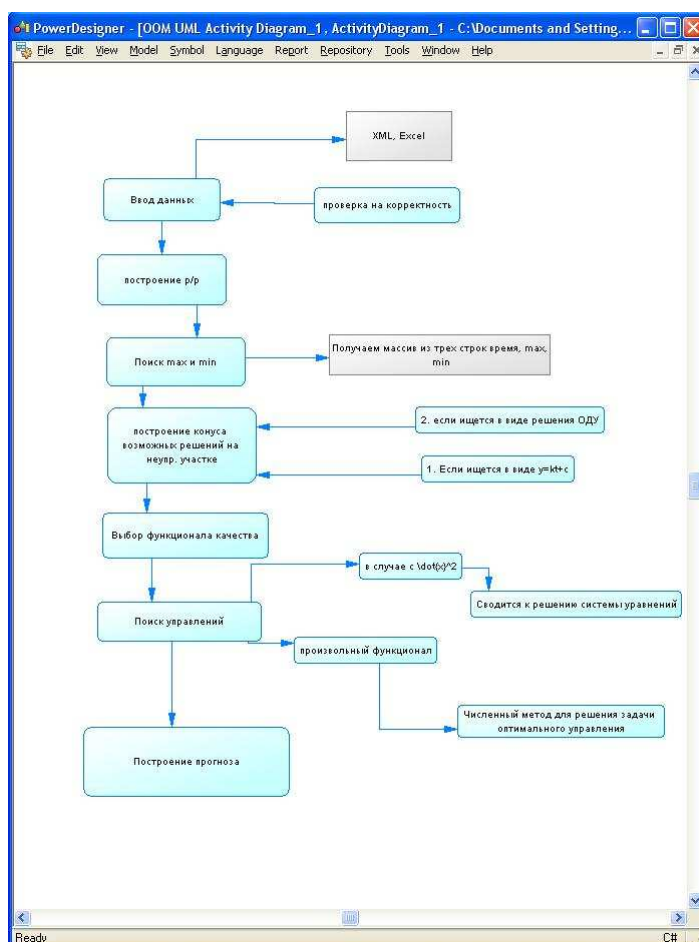
Задав в настройках нужный функционал качества и начальные данные, можно построить прогноз развития процесса и отобразить его в графическом виде. Это уже управляемый участок $[T_1, T_2]$. На нем полученный прогноз отображается в виде отдельного окна приложения в графическом виде и в виде базы данных. Возможен вывод прогноза в отдельный файл. Функционал качества накладывает серьезные ограничения на численные методы решения. Мы здесь предлагаем использовать стандартный подход: функционал качества заменяется на сетке интегральной суммой. В этом случае возникает необходимость решать систему, вообще говоря, нелинейных алгебраических уравнений. В дальнейшем предполагается численно реализовать Метод нахождения оптимальных управления с помощью принципа максимума Понтрягина.



Р и с у н о к 1.3

Конус возможных траекторий

Блок схема работы приложения представлена на рисунке



Р и с у н о к 1.4

Блок-схема работы приложения

Приложение для прогнозирования Cone разрабатывалось в среде Visual Studio 2008 под платформу .net framework. Для корректной его работы необходимо наличие установленной на компьютере библиотеки .net framework 2.0 и выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воскресенский Е. В.* Анализ баз данных и программных движений// Труды СВМО, 2008. — Т. 10, № 1. — С. 8–13.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы/ Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков — М.: Бином.Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.

Дата поступления 27.10.2009

The Software Cone. Implementation and Structure.

© O. E. Kaledin³, L. A. Suharev⁴

Abstract. In operation the short description of software package Cone and its possibilities is given at construction of mathematical models of the dynamic processes grounded on the known statistical data

Key Words: mathematical model, differential inclusion, cone of possible solutions, quality functional, program structure, the software.

REFERENCES

1. Voskresensky E. V. Analysis of databases and programmed motions// Proc. of Middle-Volga Math. Soc. (Trudy Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva), Saransk, v. 10, 1, p. 8–13, 2008.
2. Bakhvalov N. S. Numerical methods/ I. N. Aoaia, N. P. Zhidkov, G. M. Kobel'kov — Moscow: Binom.Laboratoria znaniy, 2008. — 636 p.

³Post graduate of chair Applied Mathematics, Mordovian State University, Saransk; kaledinoe@gmail.com.

⁴Head of algebra and geometry chair, Mordovian State University, Saransk; suharev_la@mail.ru.

УДК 539.3

Исследования математических моделей распространения пожара для определения зависимости скорости распространения от угла наклона

© Л. Ю. Катаева¹, И. Е. Белоцерковкая²

Аннотация. В работе рассматривается влияние угла наклона на скорость распространения пожара. За основу были выбраны модель Гришина [3]. Результаты расчетов сравнивались с известными результатами, полученными на основе моделей Доррера [1], Ротермела [2], а также с известными экспериментальными данными по моделированию пожаров на наклоненных поверхностях. В результате получена зависимость скорости распространения пожара от угла наклона подстилающей поверхности.

Ключевые слова: лесные пожары, математическое моделирование лесных пожаров.

1. Введение

Целью данной работы является сравнения модели Доррера, Ротермела и Гришина для определения зависимости скорости распространения от угла наклона. Данная статья подготовлена с использованием зарубежных и отечественных публикаций, описывающих модели распространения пожара [1], [2], [3]. Рассматриваемая тематика актуальна в силу того, что учет угла наклона подстилающей поверхности вносит существенный вклад в распространения огня. На настоящий момент не существует единой системы классификации моделей распространения пожаров. Согласно Веберу [4], все математические модели лесных пожаров могут быть классифицированы следующим образом: эмпирические (или статистические), полуэмпирические (или полуфизические модели), физические (или аналитические). Среди основных математических моделей прогнозирующих распространение пожаров следует выделить: модель Доррера, Ротермела и модель Гришина. Следует сказать, что эмпирические модели не делают никаких попыток учесть физические механизмы и, по сути, являются статистическими описаниями реальных или тестовых пожаров. Они не используют никакого физического моделирования для описания теплопереноса из зоны горения в еще нетронутый огнем участок. Эмпирические формулы были выведены из анализа накопленных данных о пожарах и погодных условиях. На базе их были построены, например, канадская и австралийская системы [5].

2. Модель Ротермела

Наиболее важная полуэмпирическая модель была создана Ротермелом [2], которая положена в основу многих систем прогноза в США и в других странах. Модель была разработана для предсказания скорости распространения огня во фронте пожара в зависимости от лесного горючего материала (ЛГМ), погоды и особенностей рельефа. В математической модели горения, разработанной Ротермелом в 1972 году, приводится формула для определения скорости, с которой огонь будет распространяться по однородному топливному

¹Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; miran_kaspir@mail.ru.

²Ассистент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; miran_kaspir@mail.ru.

массиву.

$$R = \frac{I_r \xi (1 + \varphi_w + \varphi_s)}{\rho_b Q_{ig} \varepsilon} \quad (2.1)$$

где R - это скорость распространения огня, измеряется в футах в минуту; I_r - это интенсивность реакции, величина энергии, высвобождаемая единицей площади фронта огня, измеряется бет/фут²/минуты; ξ - это коэффициент распространения теплового потока (отношение интенсивности реакции нагревающей смежные частицы топлива до возгорания); φ_w - безразмерный коэффициент, который берет в расчет влияние ветра на увеличение; φ_s - безразмерный коэффициент, который берет в расчет влияние наклона на увеличение; ρ_b - это величина среднего количества топлива на кубический фут топливной поверхности (фунты/фут³); ε - это значение пропорции топливных частиц нагретых до температуры возгорания в момент начала открытого горения; Q_{ig} - это средняя величина тепла необходимая для поджога фунта топлива (бет/фунт). В данной модели угол наклона поверхности определяет безразмерный коэффициент

$$\varphi_s = 5,275 \beta^{-0,3} \tan^2 \varphi$$

(где β - коэффициент плотности ЛГМ), который вместе с коэффициентом, отвечающим за эффективную скорость ветра φ_w , входит в выражение, определяющее скорость распространения. Рассмотрим модель Ротермеля при отсутствии ветра, тогда слагаемое

$$\varphi_w = 0 \rightarrow R = \frac{I_r \xi (1 + \varphi_s)}{\rho_b \varepsilon Q_{ig}}$$

Входные данные возьмем из статьи [6]:

$$\beta = 0,6$$

$$\sigma = \left(\frac{\beta}{3,34}\right)^{0,8189} = 0,245150101$$

$$\xi = (192 + 0,259\sigma)^{-1} \exp(0,792 + 0,681\sigma^{0,5})(\beta + 0,1) = 0,01147712$$

$$\frac{I_r}{\rho_b \varepsilon Q_{ig}} = \frac{R}{\xi} = 69,70386253$$

На графике (5.1) видно, что с увеличением угла наклона подстилающей поверхности скорость распространения пожара увеличивается, практически линейно.

3. Модель Доррера

В работе [1] математическая модель распространения лесного пожара, в определенной мере учитывает взаимодействие процессов горения напочвенного покрова и ярусов растительности. Распространение процесса горения по трехмерному слою ЛГМ рассматривается в неподвижной системе координат x, y, z . Зафиксируем неподвижную точку $C = (x, y, z)$ и выделим в ее окрестности элементарный объем ΔV . ЛГМ в окрестностях точки C в некоторый момент времени может находиться в одном из трех состояний, описываемых функцией $s(x, y, z, t)$:

$$s(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, \text{ если в точке } C \text{ в момент времени } t \text{ имеется ненулевой} \\ \text{запас горючего } w(x, y, z, t) > 0, \text{ но горения не происходит;} \\ 1, \text{ если } w(x, y, z, t) > 0 \text{ и горение происходит} \\ 2, w(x, y, z, t) = 0, \text{ т.е. горение не возможно,} \end{cases}$$

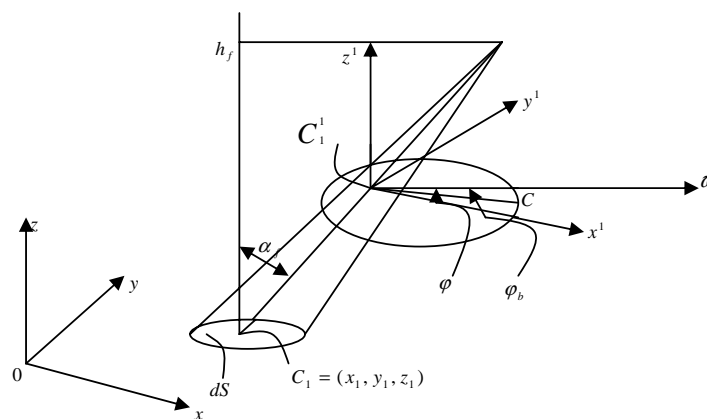
где $w(x, y, z, t) > 0$ - ненулевой запас ЛГМ. Области, соответствующие $s = 0, s = 1, s = 2$ Доррер обозначает соответственно $\Omega_0(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t)$. В модели Доррера [1] учитывается уравнения теплового баланса в твердой фазе горючего, в каждой точке слоя ЛГМ.

$$\frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial t} = \varphi_e(x, y, z, t) - k(x, y, z)[H(x, y, z, t) - H_0(x, y, z)] + \int \int \int_{\Omega(t)} \varphi(x_1, y_1, z_1, t) \xi_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1) dx_1 dy_1 dz_1 \quad (3.1)$$

Где $H(x, y, z, t)$ - энтальпия твердой фазы ЛГМ с учетом нагревания и испарения влаги ($\text{Дж}/\text{м}^3$); $\varphi(x, y, z, t)$ - энергия, образующаяся при горении слоя ($\text{Вт}/\text{м}^{-3}$); $\varphi_e(x, y, z, t)$ - энергия, поступающая от внешних источников ($\text{Вт}/\text{м}^{-3}$); $\xi_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ - функция Грина, описывающая влияние теплового эффекта реакции горения, происходящей в окрестности точки $C_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Omega_1$, на скорость поглощения тепла ЛГМ в окрестности точки $C(x, y, z) \in \Omega_0$ (м^{-3}); $k(x, y, z)$ - коэффициент теплопотерь (с^{-1}).

$$H(x, y, z) = H_0(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega_0$$

где $H_0(x, y, z)$ - начальное значение энтальпии.



Р и с у н о к 3.1

Схематическое представление локального пламени

Доррер считает, что локальное пламя, возникшее в окрестности точки $C_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Omega_1$, представляет собой конус (3.1). Конус имеет высоту h_f и отклонен от вертикальной оси z на угол α_f , тогда функция влияния пламени:

$$\begin{aligned} \xi(x - x_1, y - y_1, z - z_1) &= \xi(\rho, \varphi, z - z_1) = \\ &= \frac{a_0 \eta(z - z_1)}{\cos \alpha_f} \exp^{-\frac{\rho(\varphi, z - z_1) \cos^2 \alpha_f}{p_0(1 + \sin^2 \alpha_f)(1 - \sin \alpha_f \cos(\varphi - \varphi_b))}}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(x, y, z) \in \Omega_0, (x_1, y_1, z_1) \in \Omega_1, 0 \leq z, z_1 \leq \delta$$

Здесь (φ, ρ, z) - цилиндрическая система координат с осью z , проходящей через точку C_1^1 , лежащую на оси локального пламени; δ - толщина слоя горючего; φ - угол между осью ox и вектором ветра $C_1^1 C$; φ_b - угол между $C_1^1 C$ и вектором ω ; p_0 - характерная длина затухания (p_0 может быть оценена величиной 0,05 - 2 м) при $\alpha_f = 0$. Величины h_f и определяются взаимодействием очага пожара с атмосферой, зависимость $\eta(z - z_1)$, определяющая закон ослабления теплового потока по вертикали. Параметр a_0 (м^{-3}) определяет долю выделяющегося тепла, которое идет на распространение горения [6].

Распространение горения по тонкому однородному слою.

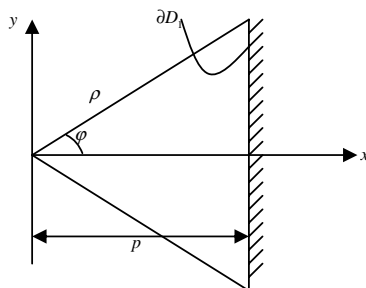
Этот частный случай может рассматриваться как модель низового лесного пожара. Для однородного слоя введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \Phi \\ \Phi_e(x, y, t) &= 0 \\ k(x, y) &= k_{\text{при}}(x, y) \in D_1(t) \\ \varphi_b &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\delta \prec p_0$ получим уравнение нагрева горючего:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial t} &= a_0 \Phi_e \delta \left(1 + \frac{\delta}{3h_f}\right) \int \int_{D_1(t)} \exp^{-\frac{\rho \cos^2 \alpha_f}{p_0(1+\sin^2 \alpha_f)(1-\sin \alpha_f \cos \varphi)}} \rho d\rho d\varphi - \\ &- k[H(x, y, t) - H_0(x, y)] \\ H(x, y, t) &= H_0(x, y)(x, y) \in D_0(t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Так как область $D_1(t)$ произвольная, то интеграл может быть определен численно. Для оценки взаимодействия ЛГМ в окрестности точки C с областью D_1 достаточно уметь рассчитывать интегралы (3.4) для элементарных участков границы сравнительно простой конфигурации.



Р и с у н о к 3.2

Схема границы пожара.

Функция учитывающая влияние геометрии участка фронта на теплопередачу в окрестность точки $C \in D_0$ (3.2)

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= \cos \varphi \rightarrow \rho = \frac{p}{\cos \varphi} \\ \Theta(\alpha_f, p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\infty} \exp^{-\frac{\rho \cos^2 \alpha_f}{(1+\sin^2 \alpha_f)(1-\sin \alpha_f \cos \varphi)}} \rho d\rho d\varphi\end{aligned}\quad (3.4)$$

Если в момент времени $t^* = \frac{p_0}{v}$ энтальпия в точке достигает критического значения $H(x, y, t^*) = H^*(x, y)$ и происходит воспламенение ЛГМ, тогда из уравнения (3.3) с учетом (3.4) перепишется:

$$\frac{H^*(x, y) - H_0(x, y)}{\pi a_0 p_0^2 \delta \Phi \left(1 + \frac{\delta}{3h_f}\right)} = \int_0^{\frac{p_0}{v}} \exp^{-k\left(\frac{p_0}{v}\right) - \tau} [\Theta(\alpha_f, \frac{p_0 - v\tau}{\rho_0}) - \Theta(\alpha_f, \frac{p_0 - v\tau + \frac{v}{\Gamma}}{\rho_0})] d\tau \quad (3.5)$$

$$(x, y) \in D_0$$

Выражение (3.5) дает связь между параметрами модели при установившемся движении фронта. В частности, если известны все параметры кроме ω , то его можно рассматривать как интегральное уравнение относительно ω . График зависимости скорости распространения от угла наклона $0 \leq \varphi \leq 25$ (5.1)

Данная модель позволяет проводить количественный и качественный анализ различных режимов распространения фронтов пожара: переход фронта через разрыв в слое ЛГМ, формирования автомодельного фронта, взаимодействия процессов горения двух параллельных слоев ЛГМ.

4. Модель Гришина

Рассмотрим задачу о распространении одномерного низового пожара. Физически задача ставится следующим образом: известны скорость ветра и температура окружающей среды, геометрические, структурные и реакционные свойства полога леса, температура и размеры очага воспламенения, требуется определить зависимость скорости распространения лесного пожара от угла наклона. Для простоты анализа сделаем следующие допущения: 1. Среда является серой и пятифазной, включающей в себя сухое органическое вещество, воду в жидко-капельном состоянии, коксик, золу и газовую фазу. 2. Газовая фаза состоит из кислорода, горючих компонентов продуктов пиролиза, инертных компонентов воздуха, а также водяного пара и инертных продуктов горения. 3. Градиент температуры поперек полога леса мал по сравнению с градиентом температуры в продольном направлении. Используя математическую формулировку модели Гришина, повернем ось ox на угол α .

$$\cos\alpha = \frac{x}{x^1} \rightarrow x = x^1 \cos\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(x^1 \cos\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} \frac{\partial}{\partial x^1}$$

Предположим, что весь фронт движется с одной и той же скоростью, ω - это скорость распространения пожара. $\xi = x^1 - \omega t$ - декартова координата в подвижной системе отсчета, связанной с положением максимального профиля температуры.

$$\frac{d}{d\xi} = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \quad (4.1)$$

Обозначим $u_\infty^1 = \frac{u_\infty}{\cos\alpha}$; $D_T^1 = \frac{D_T}{\cos^2\alpha}$; $\lambda_T^1 = \frac{\lambda_T}{\cos^2\alpha}$.

Уравнение пиролиза:

$$\rho_1 \omega \frac{d\varphi_1}{d\xi} = R_1; R_1 = k_{01} \rho_1 \varphi_1 \exp^{-\frac{E_1}{RT}}; \quad (4.2)$$

Уравнение испарения:

$$\rho_2 \omega \frac{d\varphi_2}{d\xi} = R_2; R_2 = k_{02} \rho_2 \varphi_2 \exp^{-\frac{E_2}{RT}}; \quad (4.3)$$

Уравнение горения твердого вещества:

$$\rho_3 \omega \frac{d\varphi_3}{d\xi} = -\alpha_c R_1 + \frac{M_c}{M_1} R_3; R_3 = k_{03} s_\sigma \rho_5 c_1 \varphi_3 \exp^{-\frac{E_3}{RT}}; \quad (4.4)$$

$$\frac{d\varphi_4}{d\xi} = 0; \quad (4.5)$$

Уравнение диффузий:

$$\frac{d}{d\xi}(\rho_5 D_T^1 \frac{dc_\alpha}{d\xi}) - \rho_5(u^1 - \omega) \frac{dc_\alpha}{d\xi} + R_{5\alpha} - c_\alpha Q = \frac{\alpha}{c_{p\alpha}}(c_\alpha - c_{\alpha\infty}), \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

$$R_{51} = -R_3 - \frac{M_1}{2M_2} R_5; R_{52} = (1 - \alpha_c) v_\Gamma R_1 - R_5; R_{53} = 0;$$

$$R_5 = M_2 k_{05} \left(\frac{c_1 M}{M_1}\right)^{0,25} \left(\frac{c_2 M}{M_2}\right) T^{-2,25} \exp^{-\frac{E_3}{RT}}$$

Уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{d}{d\xi}(\lambda_T^1 \frac{dT}{D\xi}) - [\rho_5(u^1 - \omega) c_{p5} - \omega \sum_{i=1}^4 \rho_i \varphi_i c_{pi}] \frac{dT}{d\xi} - \frac{\alpha}{h}(T - T_\infty) + q_3 R_3 - q_2 R_2 + q_5 R_5 = 0 \quad (4.7)$$

$$u^1 = u_\infty^1$$

$$\rho_5 = \frac{\rho_\infty T_\infty M_\infty^{-1}}{T \sum_{i=1}^4 \frac{c_\alpha}{M_\alpha}}; \sum_{i=1}^4 c_\alpha = 1; Q = (1 - \alpha_c) R_1 + R_2 + \frac{M_c}{M_1} R_3 \quad (4.8)$$

$$u = u_\infty$$

К системе (4.2)-(4.8) граничные условия:

$$\frac{dc_\alpha}{d\xi} = 0, \frac{dT}{d\xi} = 0; \quad (4.9)$$

$$\xi = -\infty; T = T_\infty, c_\alpha = c_{\alpha\infty}, \varphi_i = \varphi_i; \quad (4.10)$$

$$\xi = +\infty; T = T_\infty, c_\alpha = c_{\alpha\infty}, \varphi_i = \varphi_i; \quad (4.11)$$

Здесь t - время, x - декартова координата в системе координат, связанной с серединой первоначального очага пожара (ось x направлена в сторону невозмущенной скорости ветра, параллельной горизонтальной подстилающей поверхности); u - компонента скорости в выбранной системе координат; φ_i, c_α - объемные доли фаз и массовые концентрации компонентов соответственно (газовой фазы $\alpha = 1$ соответствует O_2 , $\alpha = 2$ - горючим компонентам продуктов пиролиза, $\alpha = 3$ - инертным компонентам воздуха, $\alpha = 4$ - водяному пару и инертным продуктам реакций окисления, пиролиза и горения кокса); Q - массовая скорость образования газовой фазы; $R_{5\alpha}$ - массовые скорости образования компонентов газовой фазы; R_1, R_2, R_3, R_5 - массовые скорости реакции пиролиза сухого органического вещества ЛГМ, испарения воды из ЛГМ, горения коксового остатка и газообразных горючих продуктов пиролиза соответственно; ρ_i - истинная плотность i - фазы; M_α, M_c, M - молекулярные массы компонентов газовой фазы, углерода и всей смеси газов соответственно; λ_T, D_T - коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии соответственно; T - температура газовой фазы; α - коэффициент внутреннего теплообмена; R - универсальная газовая постоянная; q_2, q_3 и q_5 - тепловые эффекты процессов испарения, горения конденсированного горючего и газообразного горючего продукта пиролиза соответственно; $k_{01}, k_{02}, k_{03}, E_1, E_2, E_3$ - предэкспоненты реакций пиролиза, процессов испарения и горения конденсированного продукта пиролиза (коксона); s_σ - удельная поверхность конденсированного продукта пиролиза; α_c, v_Γ - коксовое число ЛГМ и доля горючего газа в газообразных продуктах пиролиза соответственно; h - высота леса;

индексы $-\infty$ и $+\infty$ относятся к параметрам невозмущенного потока, параметрам на верхней и нижней границах полога леса.

Из (4.9)-(4.11) \rightarrow

$$\frac{d\varphi_i}{d\xi}\Big|_{\xi=\pm\infty} = 0 \quad (4.12)$$

Для выполнения условий (4.9)-(4.12) при $T_\infty < T < T_*$ требуется:

$$R_i = 0; R_\alpha = 0; R_5 = 0; \alpha = 1, 2; i = 1, 2, 3$$

Аналитическим решением уравнений (4.2)-(4.8) с граничными условиями (4.9)-(4.11) будет:

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{q} + \sqrt{(\bar{q})^2 - 4e(\Theta_0 - 1)(1 + \pi)}}{2\bar{q}(1 + \pi)} \quad (4.13)$$

Здесь T_0 - максимальная температура во фронте лесного пожара; \bar{q} - безразмерные значения коэффициентов тепло и массообмена:

$$\bar{q} = \left[-\left[\frac{q_3 M_1 \alpha_c}{M_c} + q_5(1 - \alpha_c)v_\Gamma\right]c_1\varphi_1 + q_2\rho_2\varphi_2\right](c_5c_{p5}T_\infty)^{-1};$$

π - это безразмерная объемная теплоемкость компонентов конденсированной фазы:

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^4 \rho_i \varphi_i c_{pi}}{\rho_{5\infty} c_{p5}};$$

$$\theta_0 = \frac{T_0}{T_\infty}, \bar{\omega} = \frac{\omega}{u_\infty}; e = \frac{\alpha \lambda_T^1}{h(c_5 c_{p5} u^1)^2}.$$

5. Сравнение двух моделей

Рассмотрим частный случай модели [1], когда $\alpha_f = 0, H^*(x, y) = H^*, H_0(x, y) = H_0; (x, y) \in D_0, \Phi(x, y) = \Phi; (x, y) \in D_1$, т.е. движение прямолинейного фронта происходит по однородному слою ЛГМ при отсутствии ветра. Тогда $\Theta(0, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{p}{\cos\varphi}}^{\infty} \exp(-\rho) \rho d\rho d\varphi$ в статье [1] после аппроксимации

$$\Theta(0, p) = m \exp^{-ap}, m = 1, 2146; q = 0, 9105. \quad (5.1)$$

После подстановки (5.1) в (3.5), получим

$$\frac{H^* - H_0}{\pi a_0 p_0^2 \delta \Phi \left(1 + \frac{\delta}{3h_f}\right)} = \frac{1 - \exp\frac{-qv}{\Gamma p_0}}{p_0 k + qv} \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет только одно устойчивое решение:

$$v = \frac{\pi a_0 p_0^3 m \delta \Phi \left(1 + \frac{\delta}{3h_f}\right)}{q(H^* - H_0)}. \quad (5.3)$$

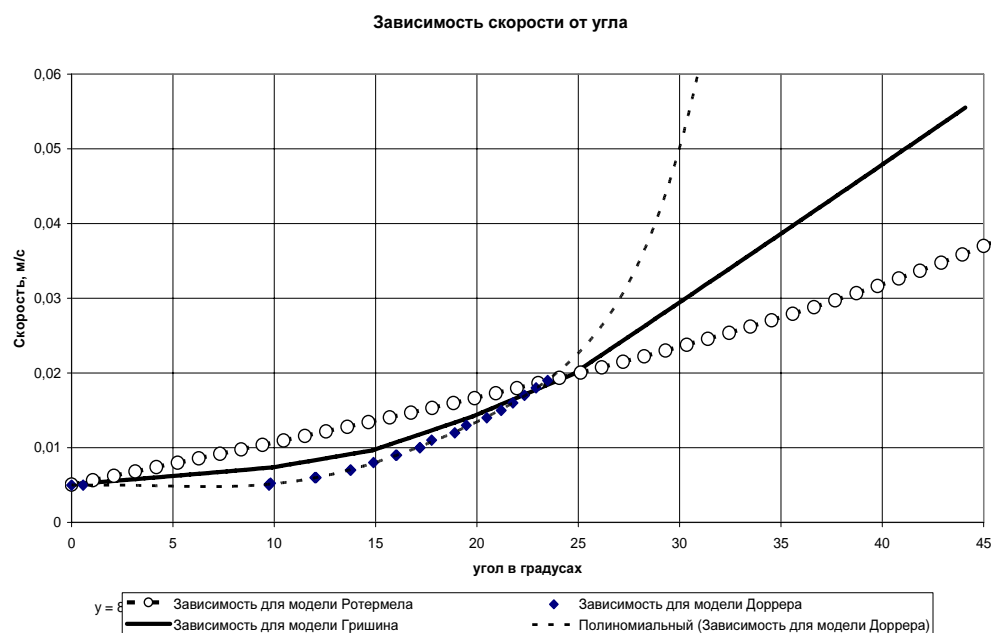
Перепишем формулу (2.1) в обозначениях принятых Доррером:

$$v = \frac{\xi_0 \delta \Phi}{H^* - H_0} \quad (5.4)$$

где ξ_0 - коэффициент, определяющий долю теплового потока, идущую на распространение горения. Этот коэффициент определяется параметрами ЛГМ. Сравнивая (5.3) и (5.4), получим соотношение

$$\frac{\pi a_0 p_0^3 m (1 + \frac{\delta}{3h_f})}{q} = \xi_0,$$

которое связывает параметры функции влияния $\xi_v(x, y, z)$ с коэффициентом ξ_0 из модели [2] и позволяет определять эти параметры на основе данных о ЛГМ. Зависимость скорости распространения пожара для трех моделей приведены на (5.1)



Р и с у н о к 5.1

Зависимость скорости распространения от угла наклона для рассматриваемых моделей

6. Заключение

На настоящий момент эмпирические и полуэмпирические модели широко используются на практике. Вебер [4] замечает, что на многие ключевые вопросы о пожаре не могут быть найдены ответы в рамках таких моделей, так как они часто характерны именно для тех экспериментальных условий, в которых они были разработаны. Становится понятным, что требуется разработка строгих физических моделей лесных пожаров "нового поколения". В данной работе было показано, что сравнение моделей Доррера и Ротермела, Гришина позволяют определить область значений параметров математической модели для исследования зависимости скорости распространения от угла наклона. При использовании эмпирических данных модели Ротермела в модели Доррера была определена зависимость скорости распространения от угла наклона и показано, что модель Ротермела при углах наклона до 23 градусов дает завышенные значения скорости распространения пожара, а модель Доррера дает значения близкие к модели Гришина, однако при углах наклона более 23 градуса модель Доррера имеет ограничения, модель Роттермела дает заниженные значения скорости распространения пожара в то время как даже упрощенная модель Гришина при этом не имеет ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доррер, Г. А. Модель распространения фронта лесного пожара / Г. А. Доррер // Теплофизика лесных пожаров. - Новосибирск : ИТФ СО АН СССР, 1984. - С. 86-99.
2. Р. Ротермел. Математическое моделирование при прогнозировании распространения лесного пожара на незаселенных территориях, 1972.
3. А.М. Гришин. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Наука, Новосибирск, 1992. Model: Grishin. А.М.
4. Р. Вебер. Моделирование распространения пожара на подстилающей поверхности. Наука, 17:6782, 1991.
5. Лесные пожары в Австралии - <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
6. Ф. Альбини. Оценка и эффекты поведения пожара на незаселенной территории, 1976
7. Гришин. Математические модели лесных пожаров. Изд-во ТГУ, Томск, 1981. Model: Grishin.

Дата поступления 20.08.2009

Researches mathematical models distribution of a fire for definition dependence speed of distribution from a corner of an inclination

© L. U. Kataeva³, I. E. Belotserkovskaya⁴

Abstract. The article deals with slope angle influence on fire spread rate. The research is based on Grishin's fire spread model [3]. Modeling results are compared with known values from Dorrer's [1], Rothermel's [2] models and slope fire modeling experiments. The slope fire spread dependence is estimated.

Key Words: forest fire, wildland forest fire modeling.

REFERENCES

1. Dorrer G. Heading fire spread model. // Forest fire thermal physics-Novosibirsk, 1984. - p. 86-99.
2. R.C. Rothermel. A Mathematical Model for Predicting Fire Spread in Wildland Fuels. Intermountain Forest. Range Experiment Station, Forest Service, US Dept. of Agriculture, 1972.
3. A. Grishin A Mathematical fire spread modeling and new fire fighting approaches. Science, Novosibirsk, 1992. Model: Grishin. A.M.
4. R.O.Weber. Modelling re spread through fuel beds. Progress in Energy and Combustion Science, 17:6782, 1991.
5. Bushfires in Victoria, Australia -<http://ru.wikipedia.org/wiki/>
6. Frank A. Albini. Estimating wildfire behavior and effects, 1976
7. A. Grishin. Mathematical fire spread modeling. Tomsk, 1981. Model: Grishin.

³Associate professor of Applied Mathematics Chair, Nizhni Novgorod State Technical University after R.E. Alekseeva, Nizhniy Novgorod; miran_kaspir@mail.ru.

⁴Assistant of Applied Mathematics Chair, Nizhni Novgorod State Technical University after R.E. Alekseeva, Nizhniy Novgorod; miran_kaspir@mail.ru.

УДК 531.36

О гироскопической стабилизации нелинейных и неконсервативных систем

© А. А. Косов¹

Аннотация. Рассматривается задача гироскопической стабилизации для механических систем, содержащих неконсервативные позиционные силы. Выявлен класс нелинейных потенциальных систем, для которого задача гироскопической стабилизации разрешима.

Ключевые слова: механическая система, гироскопические силы, гироскопическая стабилизация.

1. Введение

Задача о гироскопической стабилизации является классической и исследовалась в целом ряде работ (см., например, [1]–[9] и указанную там библиографию). Однако, по меткому выражению В. В. Козлова [9] «Несмотря на обилие результатов в этом направлении, задача о гироскопической стабилизации не может считаться исчерпанной». В дополнение отметим только, что сравнительно мало изученными являются случаи этой задачи, когда потенциальные силы нелинейны [4], а также когда в системе присутствуют неконсервативные позиционные силы. Основная цель статьи состоит в том, чтобы на основе предложенного в [10] подхода получить условия гироскопической стабилизации для линейных систем с неконсервативными силами. Рассматриваются частные случаи неконсервативных систем, когда число степеней свободы n равно 3 или 4. На основе конструкции первого интеграла, предложенной в [5], выделен класс нелинейных потенциальных систем, для которого задача гироскопической стабилизации разрешима.

Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

2. О гироскопической стабилизации одного класса нелинейных потенциальных систем

Рассмотрим механическую систему при действии потенциальных сил и гироскопических сил, уравнения движения которой имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + G\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $q \in R^n$ и $\dot{q} \in R^n$ – соответственно векторы обобщенных координат и скоростей, которые представимы в виде $q^T = (q_1^T, \dots, q_m^T)$, $q_k \in R^{n_k}$, $n = n_1 + \dots + n_k + \dots + n_m$. Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}$ предполагается представимой в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \varphi_k(s_1, \dots, s_m) q_k^T q_k, \text{ где } \varphi_k(s_1, \dots, s_m) \text{ непрерывно дифференцируемые, строго}$$

положительные функции аргументов $s_j = q_j^T q_j = \|q_j\|^2$, $j = \overline{1, m}$. Потенциальная энергия $\Pi(q) = \Phi(s_1, \dots, s_m)$ – непрерывно дифференцируемая функция тех же аргументов

¹Ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; kosov-idstu@mail.ru.

$s_j = q_j^T q_j$, причем $\Phi(0) = 0$. Предполагается, что среди чисел $c_k = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k}$, $k = \overline{1, m}$, имеются отрицательные, тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) при отсутствии гироскопических сил $G \equiv 0$ заведомо будет неустойчивым. Задача гироскопической стабилизации состоит в том, чтобы выбрать кососимметрическую матрицу G гироскопических сил так, чтобы положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) стало устойчивым. Будем выбирать эту матрицу блочно-диагональной $G = \text{diag}(G_k, k = \overline{1, m})$, где стоящие на диагонали блоки G_k являются кососимметрическими матрицами размера $n_k \times n_k$.

Система (2.1) является нелинейной взаимосвязанной системой, но ее линейная часть распадается на m изолированных подсистем с гироскопическими силами и потенциальными силами, имеющими одинаковые коэффициенты Пуанкаре.

Т е о р е м а 1. Если всем неположительным коэффициентам Пуанкаре $c_k = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} \leq 0$ соответствуют четные размерности n_k векторов состояния $q_k \in R^{n_k}$ подсистем, то задача гироскопической стабилизации нелинейной системы (2.1) разрешима.

При этом для положительных коэффициентов $c_k = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} > 0$ гироскопические силы можно не присоединять, т.е. можно считать соответствующие матрицы $G_k = 0$, для нулевых $c_k = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} = 0$ соответствующие матрицы могут быть взяты сколь угодно малыми невырожденными $\det G_k \neq 0$, для отрицательных $c_k = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} < 0$ соответствующие гироскопические силы должны быть достаточно интенсивными, матрицы G_k выбираются так, чтобы было $\lambda_{\min}(G_k^T G_k) > 8|c_k| \max_{j=1, m} \varphi_j(0)$.

П р и м е р 1. Положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ потенциальной системы с двумя степенями свободы и потенциальной энергией $\Pi(q) = \frac{1}{1 + (q_1^2 + q_2^2)^2} - 1$ неустойчиво, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум. Разложение потенциальной энергии в ряд начинается с формы 4-й степени. В соответствии с теоремой 1 после присоединения гироскопических сил положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ системы

$$\ddot{q}_1 - h\dot{q}_2 - \frac{2q_1(q_1^2 + q_2^2)}{(1 + (q_1^2 + q_2^2)^2)^2} = 0, \quad \ddot{q}_2 + h\dot{q}_1 - \frac{2q_2(q_1^2 + q_2^2)}{(1 + (q_1^2 + q_2^2)^2)^2} = 0$$

устойчиво при любом $h \neq 0$.

П р и м е р 2. Потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, q_3) = q_3^2 - (q_1^2 + q_2^2)(1 + q_3^2)$ в положении равновесия $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ имеет седловую точку, поэтому равновесие неустойчиво. В соответствии с теоремой 1 после присоединения гироскопических сил с $h > 2\sqrt{2}$, это положение равновесия для системы

$$\ddot{q}_1 - h\dot{q}_2 - 2q_1(1 + q_3^2) = 0, \quad \ddot{q}_2 + h\dot{q}_1 - 2q_2(1 + q_3^2) = 0, \quad \ddot{q}_3 + 2q_3(1 - q_1^2 - q_2^2) = 0$$

становится устойчивым.

3. Гироскопическая стабилизация систем с неконсервативными силами

Рассмотрим механическую систему

$$\ddot{q} + G\dot{q} + (C + P)q = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $q \in R^n$ и $\dot{q} \in R^n$ – соответственно векторы обобщенных координат и скоростей. Постоянные квадратные матрицы $C = C^T$ потенциальных и $P = -P^T$, $P \neq 0$ неконсервативных позиционных сил считаются заданными. Постоянная кососимметрическая квадратная матрица $G = -G^T$ гироскопических сил подлежит выбору с целью обеспечения устойчивости положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.1) по Ляпунову. Далее будут рассмотрены два частных случая задачи гироскопической стабилизации: случай системы (3.1) с тремя степенями свободы ($n = 3$) и случай системы (3.1) с четырьмя степенями свободы ($n = 4$) и блочной матрицей $C + P$ специального вида.

Рассмотрим случай системы с тремя степенями свободы. Пусть система (3.1) представлена в виде

$$\ddot{q} + h \begin{pmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 \\ g_1 & 0 & -g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \dot{q} + \begin{pmatrix} c_1 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & c_2 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & c_3 \end{pmatrix} q = 0. \quad (3.2)$$

Т е о р е м а 2. Если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} c_1 c_2 c_3 + c_1 p_3^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_1^2 &> 0, \\ c_1 (c_2 - c_3)^2 p_1^2 p_2^2 + c_2 (c_1 - c_3)^2 p_1^2 p_3^2 + c_3 (c_2 - c_1)^2 p_3^2 p_2^2 &> 0, \\ (c_2 - c_3)^2 p_1^2 p_2^2 + (c_1 - c_3)^2 p_1^2 p_3^2 + (c_2 - c_1)^2 p_3^2 p_2^2 &> 0, \end{aligned}$$

то существуют такие значения g_1, g_2, g_3 и $h_0 > 0$, что при $h > h_0$ все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми и различными, т.е. система будет устойчивой.

Первое неравенство – *необходимое* условие стабилизации $\det(C + P) > 0$.

Второе неравенство – *необходимое* условие стабилизации при сколь угодно больших $h \rightarrow +\infty$.

Третье неравенство *необходимо* в том же смысле, как и второе, и необременительно (сумма квадратов заведомо неотрицательна).

Необходимо отметить, что задача гиросtabilизации потенциальной системы с тремя степенями свободы рассмотрена в [8]. Случай системы (3.2) с присутствием неконсервативных сил по сравнению со случаем гиросtabilизации потенциальной системы имеет некоторые особенности:

1) возможна стабилизация системы с нечетным числом отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре;

2) множество стабилизирующих коэффициентов $\{g_1, g_2, g_3\}$ не является трехмерным: если векторы (p_1, p_2, p_3) и $(c_3 p_1, c_2 p_2, c_1 p_3)$ не коллинеарны, то вектор стабилизирующих коэффициентов (g_1, g_2, g_3) определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, если же эти векторы коллинеарны, то вектор стабилизирующих коэффициентов лежит в ортогональной к ним плоскости.

П р и м е р 3. Система

$$\ddot{q} + h \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{q} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} q = 0$$

сохраняет устойчивость только в конечном диапазоне $0.86 < h_{\min} < 0.87 \leq h \leq 1.29 < h_{\max} < 1.30$.

Первое и третье неравенства из условий теоремы 2 здесь выполнены: $1 > 0$, $5 > 0$. Второе неравенство обращается в равенство $0 = 0$.

Рассмотрим систему с блочной матрицей позиционных сил

$$\ddot{q} + hG\dot{q} + \begin{pmatrix} c_1 & -p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -p_2 \\ 0 & 0 & p_2 & c_2 \end{pmatrix} q = 0. \quad (3.3)$$

Здесь c_1, c_2, p_1, p_2 – некоторые числа, отличные от нуля, причем c_1 и c_2 одного знака, так что $c_1c_2 > 0$.

Отметим, что при отсутствии гироскопических сил (т.е. $G = 0$) система (3.3) распадается на две независимые подсистемы с двумя степенями свободы. Эти подсистемы неустойчивы и не могут быть стабилизированы гироскопическими силами каждая по отдельности. Возможность стабилизации на основе гироскопической связи подсистем устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а 3. *Если коэффициенты Пуанкаре одного знака, т.е. $c_1c_2 > 0$, то можно указать кососимметрическую матрицу G и число $h_0 > 0$ такие, что при всех $h > h_0$ все корни характеристического уравнения системы (3.3) будут чисто мнимыми и различными, т.е. система будет устойчивой.*

Работа выполнена при поддержке Программы № 15 ОЭММПУ РАН, совместного проекта № 45 СО РАН и ДВО РАН и РФФИ (проект № 08-08-92208_a_ГФЕН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974.
3. Лахаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 1. – С. 53–58.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980.
5. Антончик В.С. К вопросу гироскопической стабилизации // Исследования по прикладной математике. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та. – 1982. – С. 5–7.
6. Карапетян А.В. К вопросу о гироскопической стабилизации // Теориjska i primenjena mehanika. – 1994. – V. 20. – P. 89–93.
7. Булатович Р.М. Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 3. – С. 385–389.
8. Козлов В.В. О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 3. – С. 390–397.
9. Козлов В.В. Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. – Т. 39, вып. 4. – С. 32–47.

10. Косов А.А. О гироскопической стабилизации неконсервативных систем // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. IX, № 3 (27). – С. 80–89.

Дата поступления 03.08.2009

Gyroscopic stabilization of nonlinear and non-conservative systems

© A. A. Kosov²

Abstract. Problem of gyroscopic stabilization for mechanical systems with non-conservative positional forces is considered. Class of nonlinear potential systems is revealed, for which problem gyrostabilization is solvable.

Key Words: mechanical system, gyroscopic forces, gyroscopic stabilization.

REFERENCES

1. Chetaev N.G. The stability of motion. – N.Y.: Pergamon Press, 1961.
2. Merkin D.R. Gyroscopic Systems. – Moscow: Nauka, 1974.
3. Lakhadanov V.M. On stabilization of potential systems // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1975. – V. 39, № 1. – P. 45–50.
4. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. – New York-Heldelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1977.
5. Antonchik V.S. On problem of gyroscopic stabilization // Investigations on applied mathematics. – Saransk: MSU, 1982. – P. 5–7.
6. Krapetyan A.V. To the problem of gyroscopic stabilization // Teorijska i primenjena mehanika. – 1994. – V. 20. – P. 89–93.
7. Bulatovich R. On stability of linear potential gyroscopic systems in the cases of maximum potential energy // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1997. – V. 61, № 3. P. 385–389.
8. Kozlov V.V. Stabilization of the unstable equilibria of charges by intense magnetic fields // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1997. – V. 61, № 3. – P. 377–384.
9. Kozlov V.V. Restrictions of quadratic forms to Lagrangian planes, quadratic matrix equations, and gyroscopic stabilization // Funct. Anal. Appl. – 2005. – V. 39, № 4. – P. 271–283.
10. Kosov A.A. On the gyroscopic stabilization of the nonconservative systems // J. of Applied and Industrial Mathematics. – 2008. – V. 2, № 4. – P. 513–521.

²Principal researcher, Institute of System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk; kosov-idstu@mail.ru.

Приложение разностных схем к исследованию нестационарного теплообмена газоразрядных ламп

© И. Н. Кудашкин¹, Г. А. Курносов²

Аннотация. В статье даётся численный метод решения дифференциального уравнения в частных производных, описывающего распределение температуры по цилиндрическому электроду газоразрядных ламп в нестационарном режиме их функционирования.

Ключевые слова: разностные схемы, газоразрядные лампы.

Рассмотрим одномерную математическую модель металлического проводника электрического тока (имеющего форму стержня конечных размеров), длина которого намного больше его диаметра. Поместим начало системы отсчёта в центр рабочего торца и направим абсциссу вдоль оси симметрии к противоположному концу стержня. В общем виде уравнение теплообмена проводника электрического тока с окружающей средой имеет вид [1]

$$C_{\rho}F \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x} (\lambda F \frac{\delta T}{\delta x}) + q_{dj}F - q_w F \frac{\delta S}{\delta x}, \quad (1)$$

где C - удельная теплоёмкость, ρ - плотность, λ - коэффициент теплопроводности и F - площадь поперечного сечения материала стержня, t - время; q_{dj} - тепло, получаемое элементом стержня за счет нагревания его электрическим током; q_w - поток энергии, уходящий с боковой поверхности стержня вследствие конвективного и лучистого теплообмена; S - площадь охлаждаемой боковой поверхности.

Уравнение (1) отражает баланс энергии элемента проводника длиной dx и площадью поперечного сечения S , находящегося на расстоянии x от начала системы отсчёта. Левая часть отображает изменение внутренней энергии, в правой части первое слагаемое учитывает нагревание вследствие теплопроводности материала, второе - за счёт выделения джоулева тепла при прохождении электрического тока, третье - охлаждение конвективными потерями во внутриламповой газовой среде и лучистым теплообменом.

В газоразрядных источниках света высокого и сверхвысокого давления чаще всего применяются электроды цилиндрической формы. Пусть электрод имеет радиус r , тогда площадь его поперечного сечения $F = \pi r^2$, площадь боковой поверхности $S = 2\pi r x$. Подставляя эти формулы в (1), получим

$$C_{\rho}F \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x} (\lambda \frac{\delta T}{\delta x}) + q_{dj} - q_w \frac{2q_w}{r}, \quad (2)$$

Пусть в последнем уравнении коэффициент теплопроводности материала λ постоянен, джоулева энергия q_{dj} и тепловые потери электрода q_w вычисляются по известным формулам $q_{dj} = j^2 \cdot R(t)$ и $q_w = q_{conv} + q_{rad}$. Здесь j - плотность электрического тока, $R(T)$ - электрическое сопротивление электрода, q_{conv} - конвективные потери энергии, q_{rad} - энергия лучистого излучения. При передаче тепла теплопроводностью от стержня через окружающий его газ, величина теплового потока в пограничном слое около твёрдого тела подчиняется закону Ньютона

$$q_{conv} = \alpha_k (T - T_g),$$

¹ Доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский госуниверситет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск.

² Доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский госуниверситет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск.

где α_k - коэффициент теплоотдачи, T - температура стержня, T_g - температура окружающего его газа на внешней поверхности пограничного слоя.

Тогда с учётом этих допущений имеем

$$C_p F \frac{\delta T}{\delta t} = \lambda \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} - j^2 R(T) - \frac{2UT^v(T^4 - T_g^4) + \alpha(T - T_g)}{r}. \tag{3}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры по стержню подчиняется начальному условию

$$T(0, x) = \varphi(x). \tag{4}$$

Предположим также, что в рабочий торец ($x = 0$) поступает мощность $Q = Q(t)$, изменяющаяся во времени, а с противоположного тыльного конца происходит отвод тепла излучением и конвекцией. Тогда на концах стержня справедливы граничные условия

$$\frac{\delta T}{\delta x} \Big|_{x=0} = -\frac{Q(t)}{\lambda \pi r^2} = q_1(t), \tag{5}$$

$$\frac{\delta T}{\delta x} \Big|_{x=l} = -q_w(T) = q_2(T). \tag{6}$$

Требуется найти решение уравнения (3), удовлетворяющее крайевым условиям (4) - (6).

Упростим задачу и будем искать решение при $C = C(T) = const$. Введем обозначения $a^2 = \frac{\lambda}{C\rho}$, $f(x, t, T) = \frac{j^2 \cdot R(T) - \frac{2q_w}{r}}{C\rho}$, тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{\delta T}{\delta t} = a^2 \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + f(t, x, T). \tag{7}$$

Решение задачи (7), (4) - (6) будем искать методом сеток. Учитывая то обстоятельство, что теплофизические характеристики материала электрода λ, C определяются приближённо, остановимся на классической явной схеме. Обычно в теоретических исследованиях предпочтение отдаётся неявным схемам, так как в них отсутствуют ограничения на длины шагов. Однако явные схемы при обязательности ограничений обладают тем достоинством, что позволяют проводить компьютерные расчёты в интерактивном режиме.

В области

$$0 \leq x \leq l, \tag{8}$$

$$0 \leq t \leq \bar{t} \tag{9}$$

введём сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad h = \frac{l}{M}, \tag{10}$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \tau = \frac{\bar{t}}{N}. \tag{11}$$

С помощью четырёхточечного шаблона

$$[n\tau, (m - 1)h]; [n\tau, mh]; [n\tau, (m + 1)h]; [(n + 1)\tau, mh]$$

заменяем непрерывную задачу (7), (4)-(6) дискретной. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\tau} = a^2 \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{h^2} + f_{m,n}, \tag{12}$$

где $f_{m,n} = f(n\tau, mh, T_m)$.

Начальное условие (4) заменится сеточным

$$T_{m,0} = \varphi(mh), \quad (13)$$

а граничные условия (5) и (6) запишутся в виде

$$\frac{T_{-1,n} - T_{1,n}}{2h} - q_1(n, \tau) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{T_{M+1,n} - T_{M-1,n}}{2h} - q_2(T_{M,n}) = 0. \quad (15)$$

Перепишем сеточное уравнение (12) в удобном для вычисления значений температуры в узлах $(n+1)$ -го слоя по известным значениям на n -м слое

$$T_{m,n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + (1 - \frac{2a^2\tau}{h^2})T_{m,n} + \tau \cdot f_{m,n}. \quad (16)$$

Значения температуры на нулевом слое определяются соотношением (13).

В матричной форме последняя формула (16) запишется как

$$\begin{cases} T^{(n+1)} = AT^{(n)} + \tau \cdot f^{(n)}, \\ T^{(0)} = \varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (17)$$

где $T^{(n)} = \{T_{1,n}, T_{2,n}, \dots, T_{M-1,n}\}$ - вычислительный вектор столбец; $\varphi = \{\varphi(h), \varphi(2h), \dots, \varphi((M-1)h)\}$ - вектор-столбец начальных значений; $T^{(n+1)} = \{T_{1,n+1}, T_{2,n+1}, \dots, T_{M-1,n+1}\}$ - искомый вектор столбец; A - квадратная трёхдиагональная матрица порядка $M-1$

$$A = \begin{pmatrix} 1-2X & X & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ X & 1-2X & X & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 1-2X & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X & 1-2X \end{pmatrix}.$$

где $X = \frac{a^2\tau}{h^2}$.

Основной проблемой применения метода сеток является выявление условий устойчивости разностной схемы. В работе [2] установлено, что если в (7) функции $a^2, f(t, x, T)$ ограничены и равномерно непрерывны по всем аргументам и, кроме того, для $f(t, x, T)$ выполнено условие Липшица

$$|f(t, x, T_1) - f(t, x, T_2)| \leq L \cdot |T_1 - T_2|,$$

где L положительное число, а правая часть (4) интегрируема, то если представить (16) в виде

$$T_{m,n+1} = \sum_{\xi=-1}^1 C_{\xi}(t, x, 0)U_{m+\xi,n} + \tau \cdot f_{m,n}, \quad (18)$$

причём коэффициенты C_{ξ} удовлетворяют условию

$$\left| \sum_{\xi=-1}^1 C_{\xi}(t, x, 0) \cdot \exp(i\xi\beta) \right| \leq \exp(-\mu\beta^2), \quad (19)$$

где $|\beta| \leq \pi$ и постоянная $\mu > 0$, схема (16) является устойчивой [2].

С учётом введенного ранее обозначения $X = a^2 \frac{\tau}{h^2}$ имеем $C_{-1} = C_1 = X$, $C_0 = 1 - 2X$ и левая часть (19) принимает вид

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\xi=-1}^1 C_{\xi}(t, x, 0) \cdot \exp(i\xi\beta) \right| &= |X \cdot [\exp(-i\beta) + \exp(i\beta)] + 1 - 2X| = \\ &= |1 - 4X \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}|. \end{aligned} \tag{20}$$

На основании (20) для выполнения неравенства (19) необходимо, чтобы $|1 - 4X \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}| \leq 1$ при $|\beta| \leq \pi$, но тогда из последнего следует, что $X \leq \frac{1}{2}$.

Обратно, если выполняется неравенство (19), то из разложения в ряды

$$\begin{aligned} 1 - 4X \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} &= 1 - 4X \frac{\beta^2}{4} + \dots, \\ \exp(\mu\beta^2) &= 1 + \mu\beta^2 + \dots \end{aligned}$$

вытекает, что $\mu \leq X \leq \frac{1}{2}$. Равномерная непрерывность и ограниченность функций a^2 , f следует непосредственно из их представления.

Таким образом, условие устойчивости схемы (16) будет иметь место в том случае, если между шагами сетки по времени τ и по длине электрода h будет выполняться неравенство

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}. \tag{21}$$

Решение сеточной задачи (12) - (15) проводится в следующей последовательности [3].

1. Произвольным образом задается шаг сетки вдоль электрода h и по формуле (21) вычисляется максимальное значение шага по времени τ .

2. В соответствии с начальным условием (13) находится распределение температуры по электроду в нулевом слое ($n = 0$)

$$T_{m,0} = \varphi(mh); \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

3. Допустим, что решение сеточной краевой задачи (12) - (15) вычислено на слоях сетки с номерами $0, 1, 2, \dots, m$.

4. Для слоя с номером $(m + 1)$ значения температуры в узлах рассчитываются по соотношению (16)

$$\begin{aligned} T_{m,n+1} &= C_{-1}T_{m-1,n} + C_0T_{m,n} + C_1T_{m+1,n} + \tau \cdot f_{m,n}, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, M - 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

В частности, при $m = 0$ имеем

$$T_{0,n+1} = C_{-1}T_{-1,n} + C_0T_{0,n} + C_1T_{1,n} + \tau \cdot f_{0,n}.$$

Значение $T_{-1,n}$ в левом фиктивном узле находится из граничного условия (14)

$$T_{-1,n} = T_{1,n} + 2h \cdot q_1(n\tau),$$

а при $m = M$ из (15) получим значение температуры в правом фиктивном узле

$$T_{M+1,n} = T_{M-1,n} + 2h \cdot q_2(T_{M,n}).$$

Данный алгоритм решения задачи распределения температуры по цилиндрическому электроду при известных градиентах температуры на его концах относительно легко реализуется в программном обеспечении для персональных компьютеров на языках программирования высокого уровня.

Известным недостатком изложенного метода является наличие ограничения (21) на выбор шагов сетки, поэтому для подбора подходящих значений h и τ необходимо провести ряд вычислительных экспериментов с компьютерной программой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тёмкин А.Т. Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 326 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука, 1977. 656 с.
3. Кудашкин И.Н. Исследование математических моделей температурного режима электродов и их применение в системе автоматизированного проектирования источников света: Автореф. дис. канд. техн. наук. Л., 1989. 19 с.

The application of difference schemes to research of non-steady heat transfer of discharge lamps

© I. N. Kudashkin³, G. A. Kurnosov⁴

Abstract. This paper gives a numerical method of solution of partial differential equation, which described the temperature along the cylindrical electrode of discharge lamps in non-steady condition their functioning.

Key Words: difference schemes, discharge lamps

REFERENCES

1. Tjomkin A.T. The reverse methods of a heat conductions. M.: Energija, 1973. 326 p.
2. Samarsky A.A. The theory of difference schemes. M.: Nauka, 1977. 656 p.
3. Kudashkin I.N. The research of mathematical models of temperature condition of electrodes and there application in computer-aided design system of light sources: Synopsis of diss. thesis ... for a candidate of technical sciences. L., 1989. 19 p.

³Associate professor of algebra and geometry chair, Mordovian State University by N. P. Ogarev, Saransk.

⁴Associate professor of algebra and geometry chair, Mordovian State University by N. P. Ogarev, Saransk.

УДК 517.925

Существование периодических режимов в математических моделях нелинейных электрических цепей

© Т. Л. Львова¹

Аннотация. В статье получены необходимые условия существования периодического режима работы математической модели нелинейной электрической цепи.

Ключевые слова: математическая модель нелинейной электрической цепи, периодический режим работы электрической цепи, система нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Строго говоря, все электрические цепи нелинейны. Но во многих практических случаях эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею пренебрегают. Это дает возможность развить теорию линейных электрических цепей, и применять ее для расчета электротехнических устройств.

Однако существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, обладают рядом свойств, которые отсутствуют у линейных цепей. Эти свойства позволяют создавать основанные на них автоматические системы управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, устройства передачи информации, стабилизаторы напряжения или тока, генераторы и т. д.

Теоретические исследования процессов в нелинейных электрических цепях оказываются много сложнее исследования процессов в линейных цепях. Математическая модель нелинейной цепи описывается нелинейными дифференциальными уравнениями

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \quad (1.1)$$

которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа. Заметим, что только в исключительных случаях решение уравнения (1.1) можно найти в замкнутой форме.

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы: состояние равновесия; периодическое движение при отсутствии в системе источников ЭДС (тока) – автоколебания; периодическое движение с частотой источника периодической ЭДС (тока) – вынужденные колебания; резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках; квазипериодические процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов режимов [1].

2. Постановка задачи

Для расчета режима математической модели электрической цепи, содержащей нелинейные и линейные элементы, разделим ее на линейную и нелинейную части. В этом

¹Ассистент кафедры высшей математики, Рязанский государственный радиотехнический университет, г. Рязань; lvovat1@yandex.ru.

случае, получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + \varphi(t) + f(t, x, \lambda), \quad (2.1)$$

где A – $n \times n$ постоянная матрица, x – n -мерный вектор переменных состояния, $\varphi(t)$ – n -мерный вектор воздействий, $f(t, x, \lambda)$ – n -мерная вектор-функция, определяемая нелинейными элементами электрической цепи, λ – l -мерный вектор, характеризующий особенности цепи, неучтенные при составлении модели (2.1). Коэффициенты матрицы A определяются топологией линейной части электрической цепи.

Ставится задача получить условия существования периодического решения системы (2.1), другими словами, найти условия при которых в математической модели нелинейной электрической цепи существует периодический режим изменения тока и напряжения.

3. Основной результат

Рассмотрим систему уравнений (2.1). Полагаем, что выполнены следующие условия:

1) вектор-функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна для $t \in (-\infty; +\infty)$, ω -периодическая;

2) вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n \times \Lambda(\delta_0)$, где $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in \mathbb{E}_l : |\lambda| \leq \delta_0\}$, $f(t, x, 0) \equiv 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(t, x, \lambda)}{|\lambda|} = 0$ равномерно относительно переменных t, x на любом замкнутом, ограниченном множестве, принадлежащем $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n$;

3) система (2.1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра [2] на любом замкнутом, ограниченном множестве $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n \times \Lambda(\delta_0)$.

Пусть вектор-функция $x(t, c)$, где $c \in G(\mu_0) = \{c \in \mathbb{E}_n : |c| \leq \mu_0\}$, является ω -периодическим решением системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$.

Выполним замену переменных $y = x - x(t, c)$, тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\dot{y} = Ay + f(t, y + x(t, c), \lambda). \quad (3.1)$$

Введем в рассмотрение множества

$$D(\delta_0) = \{(t, y, c, \lambda) : t \in [0; \omega], y \in \mathbb{E}_n, |y| \leq \delta_0, c \in G(\mu_0), \lambda \in \Lambda(\delta_0)\},$$

$$W(\delta_0) = \{\alpha \in \mathbb{E}_n, |\alpha| \leq \delta_0\},$$

где $\mu_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ некоторые фиксированные числа.

Непосредственно подстановкой можно убедиться, что при $\lambda = 0$, $y \equiv 0$ будет решением (3.1). Тогда на основании теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра получаем, что существуют числа $\mu \in (0; \mu_0]$, $\delta \in (0; \delta_0]$, при которых для любых $\alpha \in W(\delta)$, $c \in G(\mu)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$, система уравнений (3.1) имеет единственное решение $y(t, \alpha, c, \lambda)$, определенное на сегменте $[0; \omega]$, непрерывное на множестве $[0; \omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ и удовлетворяющее неравенству $|y(t, \alpha, c, \lambda)| \leq \delta_0$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Решение $t \rightarrow y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ системы (3.1) будем называть ω -периодическим, если существуют векторы $\alpha \in W(\delta_0)$, $c \in G(\mu_0)$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ при которых выполняется равенство

$$y(0, \alpha, c, \lambda) = y(\omega, \alpha, c, \lambda) = \alpha.$$

Предположим, что вектор-функцию $f(t, y + x(t, c), \lambda)$ можно представить в виде

$$f(t, y + x(t, c), \lambda) = f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y + P_k(t, x(t, c), \lambda, y) + o(|y|^k),$$

где $D(t, x(t, c), \lambda)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $f(t, x, \lambda)$ при $x = x(t, c)$, непрерывное по переменным t, c, λ на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0)$; $P_k(t, x(t, c), \lambda, y)$ – вектор-форма k -го порядка относительно переменной y , $k > 1$; $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(|y|^k)}{|y|^k} = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} D(t, x(t, c), \lambda) = 0$, равномерно относительно t, c на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0)$. Вектор-форму $P_k(t, x(t, c), \lambda, y)$ всегда можно представить равенством $P_k(t, x(t, c), \lambda, y) = Q(t, x(t, c), \lambda, y) \cdot y$, где $Q(t, x(t, c), \lambda, y)$ матрица, непрерывная по переменным t, c, λ, y на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0) \times D(\delta_0)$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(t, x(t, c), \lambda, y) = 0$ равномерно относительно t, c, λ на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0)$.

Система уравнений (3.1) примет вид

$$\dot{y} = Ay + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y + P_k(t, x(t, c), \lambda, y) + o(|y|^k). \quad (3.2)$$

Одновременно с (3.2) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{z} = & Az + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) + \\ & + P_k(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Решение $t \rightarrow y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ системы (3.2) является решением системы (3.3). И наоборот, решение системы (3.3) $t \rightarrow z(t)$, $z(0) = \alpha$ является решением системы (3.2), и для любого $t \in [0; \omega]$ справедливо равенство $z(t) = y(t, \alpha, c, \lambda)$.*

Система уравнений (3.3) это линейная неоднородная система. Пусть $X(t)$, $X(0) = E$ фундаментальная матрица системы $\dot{z} = Az$, тогда на основании теоремы (3.1) будет

$$\begin{aligned} y(t, \alpha, c, \lambda) = & X(t) \cdot \alpha + X(t) \cdot \int_0^t X^{-1}(\xi) \cdot [f(\xi, x(\xi, c), \lambda) + D(\xi, x(\xi, c), \lambda) \cdot y(\xi, \alpha, c, \lambda) + \\ & + P_k(\xi, x(\xi, c), \lambda, y(\xi, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|^k)] d\xi. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 3.2. *Решение системы (3.2) $t \rightarrow y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ можно представить в виде*

$$y(t, \alpha, c, \lambda) = X(t) \cdot \alpha + o(|\gamma|), \quad (3.4)$$

где $\gamma = (\alpha, \lambda)$ – вектор и $|\gamma| = \max\{|\alpha|, |\lambda|\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Покажем, что величина $\frac{y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|}$ ограничена на множестве $[0; \omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ при $\gamma \neq 0$.

Так как, вектор-функция $t \rightarrow y(t, \alpha, c, \lambda)$ решение (3.2), то для любого $t \in [0; \omega]$ будет выполнено равенство

$$\dot{y}(t, \alpha, c, \lambda) = A \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) +$$

$$+P_k(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k).$$

Откуда получим

$$|y(t, \alpha, c, \lambda)| \leq |\alpha| + \int_0^t |f(\xi, x(\xi, c), \lambda)| d\xi + \int_0^t \|A + D(\xi, x(\xi, c), \lambda) + Q(\xi, x(\xi, c), \lambda, y(\xi, \alpha, c, \lambda)) + \frac{o(|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|^k)}{|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|}\| \cdot |y(\xi, \alpha, c, \lambda)| d\xi.$$

Пусть $M = \sup_{[0; \omega] \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)} \|A + D(t, x(t, c), \lambda) + Q(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)) + \frac{o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k)}{|y(t, \alpha, c, \lambda)|}\|$.

Тогда $|y(t, \alpha, c, \lambda)| \leq |\alpha| + \int_0^t |f(\xi, x(\xi, c), \lambda)| d\xi + \int_0^t M \cdot |y(\xi, \alpha, c, \lambda)| d\xi$. По лемме Гронуолла-Беллмана, для любого $t \in [0; \omega]$, и любых векторов $\alpha \in W(\delta)$, $c \in G(\mu)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ имеем $|y(t, \alpha, c, \lambda)| \leq \left(|\alpha| + \int_0^\omega |f(t, x(t, c), \lambda)| dt \right) \cdot \exp(M\omega)$. Следовательно, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t, \alpha, c, \lambda) = 0$ равномерно по $t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$, а так же

$$\begin{aligned} \frac{|y(t, \alpha, c, \lambda)|}{|\gamma|} &\leq \frac{\left(|\alpha| + \int_0^\omega |f(t, x(t, c), \lambda)| dt \right) \cdot \exp(M\omega)}{|\gamma|} = \\ &= \left(\frac{|\alpha|}{|\gamma|} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot \int_0^\omega |f(t, x(t, c), \lambda)| dt \cdot \frac{|\lambda|}{|\gamma|} \right) \cdot \exp(M\omega) \end{aligned}$$

То есть, величина $\frac{y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|}$ ограничена на множестве $[0; \omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ при $\gamma \neq 0$.

2) Убедимся, что

$$\begin{aligned} X(t) \cdot \int_0^t X^{-1}(\xi) \cdot \left[f(\xi, x(\xi, c), \lambda) + D(\xi, x(\xi, c), \lambda) \cdot y(\xi, \alpha, c, \lambda) + \right. \\ \left. + P_k(\xi, x(\xi, c), \lambda, y(\xi, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|^k) \right] d\xi = o(|\gamma|), \end{aligned}$$

а это значит,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|\gamma|} \cdot X(t) \cdot \int_0^t X^{-1}(\xi) \cdot \left[f(\xi, x(\xi, c), \lambda) + D(\xi, x(\xi, c), \lambda) \cdot y(\xi, \alpha, c, \lambda) + \right. \right. \\ \left. \left. + P_k(\xi, x(\xi, c), \lambda, y(\xi, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|^k) \right] d\xi \right) = 0 \end{aligned}$$

равномерно относительно $t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$.

Действительно, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(t, x(t, c), \lambda)}{|\gamma|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(t, x(t, c), \lambda)}{|\lambda|} \cdot \frac{|\lambda|}{|\gamma|} = 0$ равномерно относительно

$t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(D(t, x(t, c), \lambda) \cdot \frac{y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|} \right) = 0$ равномерно относительно $t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$, а так же

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{P_k(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda))}{|\gamma|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(Q(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, C, \lambda)) \cdot \frac{y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|} \right) = 0$$

и $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k)}{|\gamma|} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k)}{|y(t, \alpha, c, \lambda)|} \cdot \frac{|y(t, \alpha, c, \lambda)|}{|\gamma|} = 0$ равномерно относительно $t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$.

Итак получим, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 \in (0; \delta_0]$, такое что, для любого вектора γ , $|\gamma| < \delta_1$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{|\gamma|} \cdot \left[f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) + P_k(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)) + \right. \right. \\ \left. \left. + o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k) \right] \right| < \varepsilon$$

при любых $t \in [0; \omega]$ и $c \in G(\mu)$. Что и требовалось доказать.

Доказательство закончено.

На основании определения (3.1.) имеем, решение $t \rightarrow y(t, \alpha, c, \lambda)$ будет ω -периодическим тогда и только тогда, когда существуют векторы $\alpha^* \in W(\delta)$, $c^* \in G(\mu)$, $\lambda^* \in \Lambda(\delta)$ удовлетворяющие равенству

$$[X(\omega) - E] \cdot \alpha + X(\omega) \cdot \int_0^\omega X^{-1}(t) \cdot \left[f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) + \right. \\ \left. + P_k(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k) \right] dt = 0. \quad (3.5)$$

Согласно (3.4), систему уравнений (3.5) можно представить в виде

$$[X(\omega) - E] \cdot \alpha + F_p(\gamma, c) + o(|\gamma|^p) = 0, \quad (3.6)$$

где $p > 1$, $F_p(\gamma, c)$ – вектор-форма порядка p , относительно γ . Так как $X(t)$ – фундаментальная матрица и решение $x(t, c)$ – ω -периодическое, то $\det [X(\omega) - E] = 0$.

Пусть матрица $R = X(\omega) - E$, $\text{rang} R = r$, $0 \leq r < n$. Выполним замену переменных $\alpha = H\beta$, вектор β – фундаментальная система решений уравнения $R \cdot \alpha = 0$, его размерность $(n - r)$.

Система (3.6) примет вид

$$F_p(v, c) + o(|v|^p) = 0, \quad (3.7)$$

где $v = (\beta, \lambda)$.

Обозначим $v = \rho \cdot e$, $\rho > 0$, вектор $e = (e_\beta, e_\lambda)$, тогда уравнение (3.7) может быть записано так

$$F_p(e, c) + O(\rho, |e|) = 0,$$

где $\lim_{\rho \rightarrow 0} O(\rho, |e|) = 0$ равномерно относительно e , $|e| \leq \Delta$ и $c \in G(\mu)$, $\Delta > 1$ – некоторое число.

Теорема 3.3. Если для любых векторов e , $|e| = 1$ и $c \in G(\mu)$, $F_p(e, c) \neq 0$, то существует окрестность точки $v = 0$, в которой нет решения уравнения (3.7) отличного от нуля.

Доказательство. По условию $F_p(e, c) \neq 0$ при любых e , $|e| = 1$ и $c \in G(\mu)$, множество $\{e : |e| = 1\} \times G(\mu)$ замкнуто и ограничено, а функция $F_p(e, c)$ непрерывна на этом множестве. Тогда по теореме Вейрштрасса, существует число $m > 0$, такое что $|F_p(e, c)| \geq m$ для любых e и c , принадлежащих множеству $\{e : |e| = 1\} \times G(\mu)$.

Так как $v = (\beta, \lambda) = \rho \cdot e$, а $|e| = 1$, то $|v| = \rho$. Из $\lim_{\rho \rightarrow 0} O(\rho, 1) = 0$ следует, существование числа $\delta \in (0; \delta_0]$, такого что, для любых $\rho \in (0; \delta)$ и $c \in G(\mu)$ выполняется неравенство $|O(\rho, 1)| < \frac{m}{2}$. Получим $|F_p(e, c) + O(\rho, 1)| \geq |F_p(e, c)| - |O(\rho, 1)| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0$. Таким образом, для любых e , $|e| = 1$, $c \in G(\mu)$ и $\rho \in (0; \delta)$ будет $F_p(e, c) + O(\rho, 1) \neq 0$. А это значит, что система (3.7) не имеет ненулевого решения в окрестности точки $v = 0$, определенной соотношением $\{v : v = \rho \cdot e, \rho \in (0, \delta), |e| = 1\}$ при любом $c \in G(\mu)$.

Доказательство закончено.

Из теоремы (3.3.) следует, что необходимым условием существования ненулевого ω -периодического решения уравнения (3.1) является наличие векторов e^* , $|e^*| = 1$ и $c^* \in G(\mu)$, при которых $F_p(e^*, c^*) = 0$.

Если таких векторов нет, то решением системы (3.7) будет вектор $v = 0$, а это значит, система уравнений (3.1) имеет только нулевое решение $y \equiv 0$. Следовательно, режим работы электрической цепи, математическая модель которой задана уравнением (2.1), будет определяться линейной частью цепи. Так как вектор-функция $x(t, c)$ – ω -периодическая, то и режим работы будет периодическим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. – М.: Высш. шк., 1977. – 343 с.
2. Коддингтон Э.А. и Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.

Дата поступления 01.07.2009

The existence of periodic modes in mathematical models of nonlinear electric circuits

© T. L. Lvova²

Abstract. The article received the necessary conditions for the existence of a periodic mode of the mathematical model of nonlinear electrical circuit.

Key Words: mathematic model of nonlinear electric circuit, periodic mode of electric circuit, nonlinear differential equation systems.

REFERENCES

1. Bessonov L.A. The nonlinear electric circuits. – M.: Higher sch., 1977. – 343 p.
2. Coddington E.A. and Levinson N. Theory ordinary differential equations. M.:IL, 1958. – 474 p.

²Assistant of higher mathematics Chair, Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan; lvovat1@yandex.ru.

Поиск оптимального управления в модели эпидемии

© Н. И. Овсянникова¹

Аннотация. В данной работе построена дискретная управляемая модель распространения инфекционного заболевания, передаваемого контактным путём. Целью управления является минимизация затрат на погашение эпидемии при имеющихся ограничениях на управление и начальных данных.

Ключевые слова: оптимальное управление, вакцинация, изоляция, информационно-образовательная программа

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим динамику процесса эпидемии в сообществе, состоящем из n групп, включив управление вакцинацией, изоляцией и информационно-образовательной программой:

$$\begin{cases} x_j^{i+1} = x_j^i - x_j^i \Delta t (1 - w_j^i) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^i - \Delta t (v_j^i + \mu_j x_j^i - \Lambda_j), \\ y_j^{i+1} = y_j^i + x_j^i \Delta t (1 - w_j^i) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^i - \Delta t ((\gamma_j + \mu_j + \tilde{\mu}_j) y_j^i + u_j^i) \end{cases} \quad (1.1)$$

где x_j^i, x_j^{i+1} – численность подверженных инфекционному заболеванию в j -й группе на i -ом и на $(i+1)$ -ом шаге, y_j^i, y_j^{i+1} – численность инфицированных на i -ом и на $(i+1)$ -ом шаге, $\gamma_j y_j^i$ – количество людей, восстановивших своё здоровье в j -той социальной группе на i -ом шаге без воздействия внешних средств: карантина, вакцинации и пр. (γ^{-1} – среднее время естественного выздоровления при данном инфекционном заболевании), β_{jk}^i – коэффициент роста, характеризующий частоту встреч здоровых людей j -той группы с инфицированными людьми k -той группы на i -ом шаге, μ_j – коэффициент естественной смертности людей в j -той группе, $\tilde{\mu}_j$ – коэффициент смертности от данной инфекции в j -той группе, Λ_j – средняя скорость рождаемости в j -той группе, x_j^0, y_j^0 – известные значения в начальный момент времени, v_j^i – скорость вакцинации подверженных инфицированию в j -той группе на i -тый момент времени, u_j^i – скорость выведения инфицированных на карантин в j -той группе на i -тый момент времени, w_j^i – доля подверженных инфицированию, на которых успешно воздействовали информационно-образовательной программой в j -той группе на i -тый момент времени.

Функционал:

$$I(v, u, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{q-1} (y_j^i + d_j v_j^i + c_j u_j^i + l_j w_j^i x_j^i) \Delta t + \sum_{j=1}^n b_j y_j^q \rightarrow \inf \quad (1.2)$$

характеризует цель управления, которая состоит в том, чтобы минимизировать затраты на погашение эпидемии, где d_j – относительная стоимость вакцинации в j -той группе, c_j – относительная стоимость карантина в j -той группе, l_j – относительная стоимость информационно-образовательной программы в j -той группе (стоимость одного инфицированного человека для общества примем за единицу), b_j – относительная стоимость

¹Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Поморский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск; imaginary-aim@hotmail.com.

остаточного больного в j -той группе ($b_j \geq 1$, так оставшиеся больные могут вызвать новую эпидемию).

Ограничения на управления заданы в следующем виде:

$$0 \leq v_j^i \leq A_j, \quad 0 \leq u_j^i \leq B_j, \quad 0 \leq w_j^i \leq C_j, \quad i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{0; q-1} \quad (1.3)$$

Начальные условия:

$$x_j^0, \quad y_j^0, \quad j = \overline{1; n} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} x^i \in X_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0; q} \\ y^i \in Y_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0; q} \end{cases}$$

$$[v]_0^{q-1} = (v^0, v^1, \dots, v^{q-1}), \quad [u]_0^{q-1} = (u^0, u^1, \dots, u^{q-1}), \quad [w]_0^{q-1} = (w^0, w^1, \dots, w^{q-1})$$

$V^0(x, y)$ – множество допустимых управлений вакцинацией, $U^0(x, y)$ – множество допустимых управлений карантинном, $W^0(x, y)$ – множество допустимых управлений программой «Здоровье», D^0 – множество допустимых процессов, D^i – множество компонент допустимых процессов и подмножеств $G_i^1 \subset X_i$, $G_i^2 \subset Y_i$ – множеств достижимости на i -том шаге $i = \overline{0; q}$.

Разобьём отрезки управления $[0; u_{max}]$, $[0; v_{max}]$, $[0; w_{max}]$ равноотстоящими точками:

$$0 = u_0 < u_1 < \dots < u_l = u_{max}, \quad \Delta u = u_{i+1} - u_i, \quad i = \overline{0; l-1}$$

$$0 = v_0 < v_1 < \dots < v_r = v_{max}, \quad \Delta v = v_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{0; r-1}$$

$$0 = w_0 < w_1 < \dots < w_k = w_{max}, \quad \Delta w = w_{i+1} - w_i, \quad i = \overline{0; k-1}$$

Построим сетку, состоящую из точек (x_i, y_j) : $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, $\tau = \frac{x_{max}}{m}$, $h = \frac{y_{max}}{n}$.

2. Алгоритм синтеза управления

I этап (по убывающему индексу k).

$$\underline{k = q} \quad B_q(x, y) = \sum_{j=0}^n b_j y_j^q$$

$$\begin{aligned} \underline{k = q-1} \quad B_{q-1}(x, y) = & \inf_{\substack{u \in U^{q-1} \\ v \in V^{q-1} \\ w \in W^{q-1}}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^{q-1} + d_j v_j^{q-1} + l_j w_j^{q-1} x_j^{q-1} + c_j u_j^{q-1}) \Delta t + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^n b_j \left(y_j^{q-1} + \left[x_j^{q-1} (1 - w_j^{q-1}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-1} - \mu_j y_j^{q-1} - \tilde{\mu}_j y_j^{q-1} - \gamma_j y_j^{q-1} - u_j^{q-1} \right] \right) \Delta t \right\} \end{aligned}$$

Для каждой точки (x_i, y_j) из допустимой области находим набор управлений, минимизирующих функцию Беллмана $B_{q-1}(x, y)$.

$$\underline{k = q-2} \quad B_{q-2}(x, y) = \inf_{\substack{u \in U^{q-2} \\ v \in V^{q-2} \\ w \in W^{q-2}}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^{q-2} + d_j v_j^{q-2} + l_j w_j^{q-2} x_j^{q-2} + c_j u_j^{q-2}) \Delta t + \right.$$

$$+B_{q-1} \left(\left[x_j^{q-2} - \Delta t \left[x_j^{q-2} (1 - w_j^{q-2}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-2} + \mu_j x_j^{q-2} - \Lambda_j + v_j^{q-2} \right] \right], \right. \\ \left. \left[y_j^{q-2} + \Delta t \left[x_j^{q-2} (1 - w_j^{q-2}) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^{q-2} - (\mu_j + \tilde{\mu}_j + \gamma_j) y_j^{q-2} - u_j^{q-2} \right] \right] \right\}$$

Для каждой точки (x_i, y_j) из допустимой области находим набор управлений, минимизирующих функцию Беллмана $B_{q-2}(x, y)$, и так для каждого $k = q - 3, \dots, 0$.

Находим множество $G_0^1 \subset X_0$, $G_0^2 \subset Y_0$ и для каждого $x \in G_0^1$, $y \in G_0^2$ определяем множества $V^0(x, y)$, $U^0(x, y)$, $W^0(x, y)$.

$$B_0(x, y) = \inf_{\substack{u \in U^0 \\ v \in V^0 \\ w \in W^0}} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j^0 + d_j v_j^0 + l_j w_j^0 x_j^0 + c_j u_j^0) \Delta t \right. \\ \left. + B_1 \left(\left[x_j^0 + \left(x_j^0 \Delta t (1 - w_j^0) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^0 - \Delta t (\mu_j x_j^0 - \Lambda_j + v_j^0) \right) \right], \right. \right. \\ \left. \left. \left[y_j^0 + x_j^0 \Delta t (1 - w_j^0) \sum_{k=1}^n \beta_{jk} y_k^0 - \Delta t (\mu_j y_j^0 + \tilde{\mu}_j y_j^0 + \gamma_j y_j^0 + u_j^0) \right] \right) \right\}$$

Находим $B_0(x, y)$ и $v_0(t)$, $u_0(t)$, $w_0(t)$ для каждого $x \in G_0^1$, $y \in G_0^2$.

Итак, на первом этапе решения задачи для каждого $x \in G_k^1$, $y \in G_k^2$, $k = 0, \dots, q - 1$ находятся значения функции Беллмана $B_0(x, y)$ и компоненты оптимального управления $\tilde{v}^k(x, y)$, $\tilde{u}^k(x, y)$, $\tilde{w}^k(x, y)$ для каждого $x \in G_k^1$, $y \in G_k^2$, $k = 0, \dots, q - 1$. Найденное на I этапе оптимальное управление является синтезом. В отличие от программного управления, которое зависит только от момента времени t (шаг k) и определено только для точек \tilde{x}^k , \tilde{y}^k , $k = 0, \dots, q - 1$, принадлежащих оптимальной траектории, синтезирующая функция управления $\tilde{v}^k(x, y)$, $\tilde{u}^k(x, y)$, $\tilde{w}^k(x, y)$ определена для всех точек $x \in \bigcup_{k=0}^{q-1} G_k^1$,

$y \in \bigcup_{k=0}^{q-1} G_k^2$. Таким образом, решение уравнения Беллмана равносильно решению проблемы синтеза для задачи, которая заключается в построении оптимального управления в форме синтеза, зависящего от состояния системы $x^k \in G_k^1$, $y^k \in G_k^2$ на каждом шаге.

II этап.

Находится $\tilde{x}^0 \in G_0^1$, $\tilde{y}^0 \in G_0^2$ – оптимальная точка из условия минимизации функции $B_0(x, y)$ на множестве G_0 и оптимальное значение целевой функции:

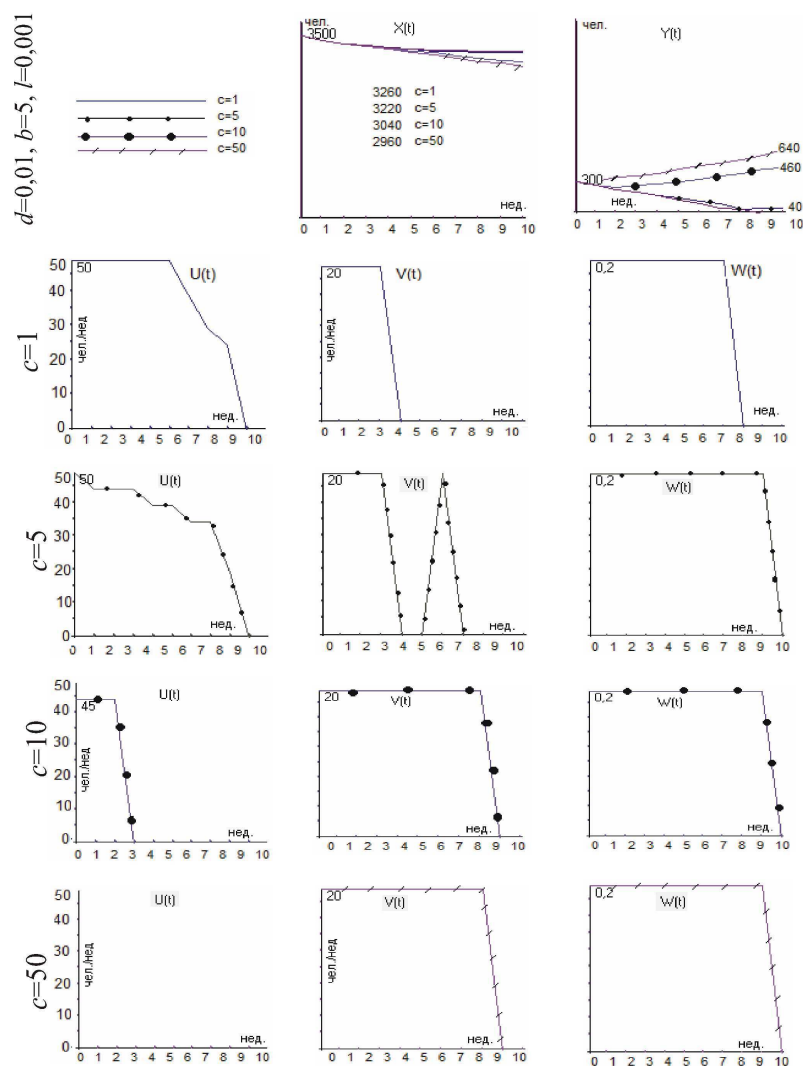
$$I_0^* = B^0(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0) = \inf_{x, y \in G_0} B^0(x, y)$$

III этап (по возрастающему индексу k)

Последовательно применяя найденный оптимальный синтез $v_k(x, y)$, $u_k(x, y)$, $w_k(x, y)$ и оператор перехода с учётом начальной фазовой точки, находим оптимальную траекторию $[\tilde{x}]_0^q = (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^q)$, $[\tilde{y}]_0^q = (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^q)$ и соответствующее ОУ: $[\tilde{v}]_0^{q-1} = (\tilde{v}^0, \tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^{q-1})$, $[\tilde{u}]_0^{q-1} = (u^0, u^1, \dots, u^{q-1})$, $[\tilde{w}]_0^{q-1} = (w^0, w^1, \dots, w^{q-1})$. \tilde{x}^0 , \tilde{y}^0 – найдено на II этапе; $v_0(x, y)$, $u_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ – найдено на I этапе.

3. Анализ результатов решения

Для начальных данных $x_0 = 3500$, $y_0 = 300$ и ограничениях на управление: $0 \leq v^i \leq 20$, $0 \leq u^i \leq 50$, $0 \leq w^i \leq 0,2$, $i = \overline{0; q-1}$ зафиксируем относительные стоимости: вакцинации одного человека \mathbf{d} , информационной программы на одного человека \mathbf{l} , остаточную стоимость больного \mathbf{b} , будем менять относительную стоимость изоляции одного больного \mathbf{c} . Из рис. 3.1 видно, что с ростом относительной стоимости изоляции управление карантинном (изоляция) стремительно снижается, усиливается управление с помощью вакцинации и информационной программы. Суммарные затраты на погашение эпидемии снова возросли (за счёт штрафа за остаточных больных). При повышении стоимости карантина остаточное число подверженных инфицированию снижается частично за счёт усиления управления вакцинацией, частично за счёт перехода в число инфицированных. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

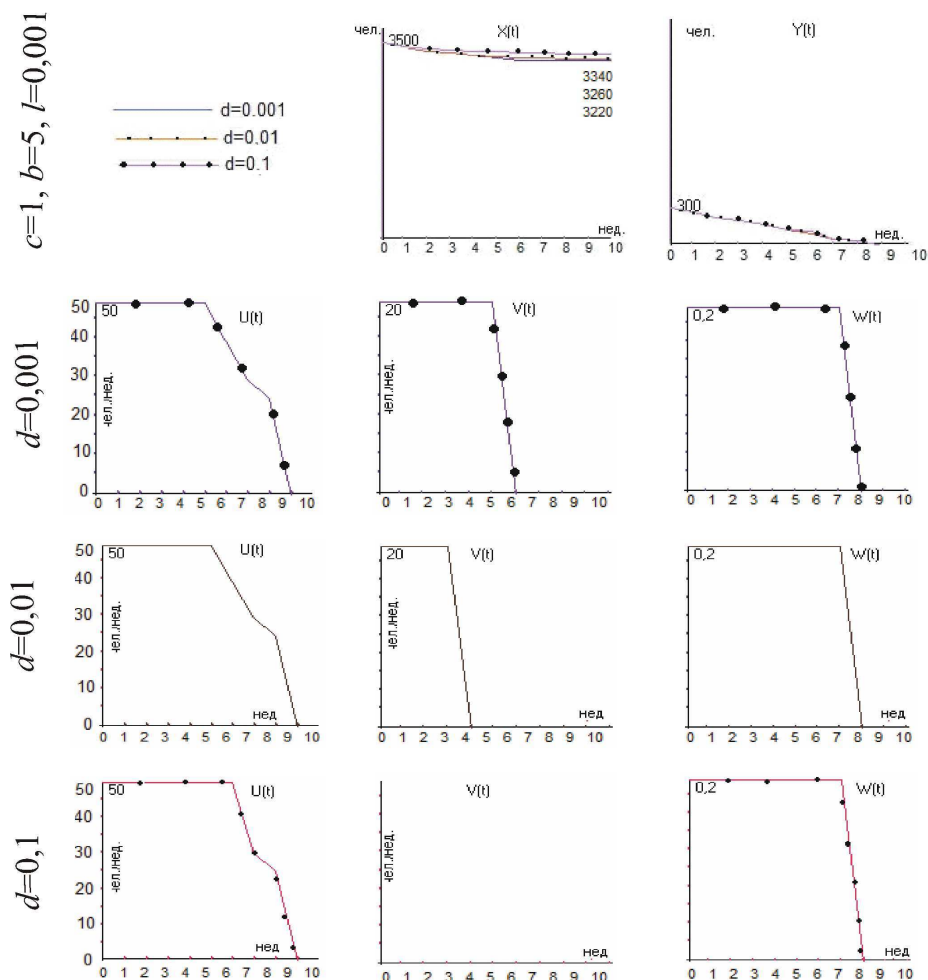


Р и с у н о к 3.1

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости карантина.

Зафиксируем относительные стоимости: изоляции одного больного \mathbf{c} , информационной программы на одного человека \mathbf{l} , остаточную стоимость больного \mathbf{b} , будем менять

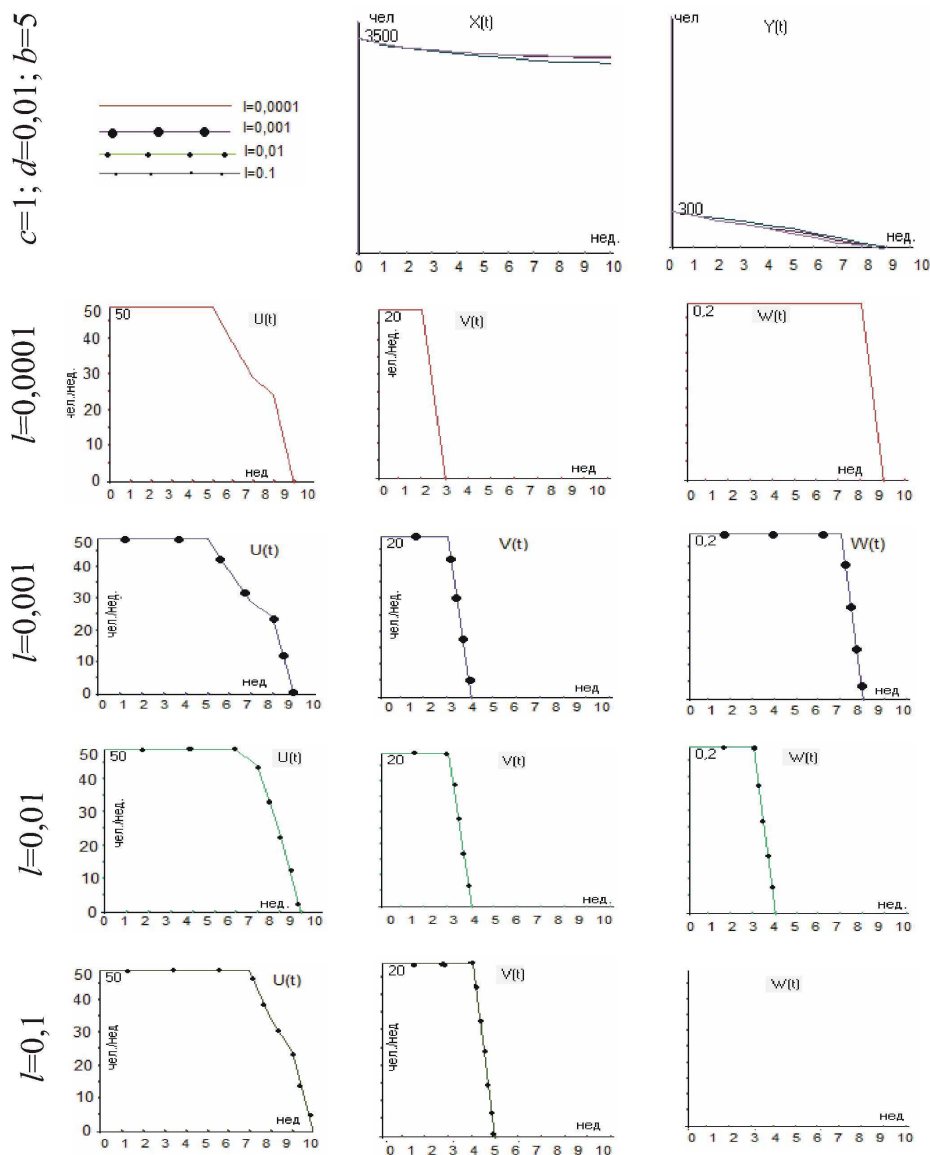
относительную стоимость вакцинации одного человека d . Из рис. 3.2 видно, что с ростом относительной стоимости вакцинации управление с помощью вакцинации снижается, управление изоляцией немного усиливается, суммарные затраты на погашение эпидемии незначительно возросли. При повышении стоимости вакцинации остаточное число подверженных инфицированию повышается из-за снижения управления вакцинацией.



Р и с у н о к 3.2

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости вакцинации.

Зафиксировав относительные стоимости: вакцинации одного человека d , изоляции одного больного c , остаточную стоимость больного b и меняя относительную стоимость информационной программы на одного человека l , получим:



Р и с у н о к 3.3

Решение задачи оптимального управления эпидемией методом синтеза управлений в зависимости от стоимости информационной программы.

Из рис. 3.3 видно, что с ростом относительной стоимости информационной программы управление информационной программой снижается, управление вакцинацией и карантинном усиливается. Суммарные затраты на погашение эпидемии возросли (за счёт штрафа за остаточных больных и дорогого управления карантинном). При повышении стоимости информационной программы остаточное число подверженных инфицированию снижается частично за счёт усиления управления вакцинацией, частично за счёт перехода в число инфицированных. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

4. Вывод

С ростом стоимости какого-то вида управления продолжительность его снижается, но в то же время растёт продолжительность других управлений. Увеличивается суммарная стоимость затрат на погашение эпидемии. Общая эпидемиологическая картина ухудшается.

На решение задачи методом синтеза управления оказывает влияние шаг численного метода: уменьшение шага Δt вызывает рост суммарных затрат на погашение эпидемии, с уменьшением шага $\Delta x = \Delta y$ уменьшается остаточное число подверженных инфицированию (за счёт перехода их в разряд больных). Структура управления и динамика $x(t)$ и $y(t)$ практически не изменяются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Цирулёва В.М. Численные методы решения экстремальных задач. Тверь: ТвГУ, 1999.- стр. 230-305.
2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
3. Андреева Е.А., Овсянникова Н.И. Разработка алгоритма и программы управления процессом эпидемии// Программные продукты и системы, №3(87), 2009, – с .126-128.

Search of optimal control in model of epidemic

© N. I. Ovsjannikova

Abstract. N. I. Ovsjannikova²

Key Words: In the given work the discrete operated model of distribution of the infectious disease transferred by a contact way is constructed. The management purpose is minimisation of expenses for epidemic repayment at available restrictions on management and the initial data. optimum control, vaccination, isolation, is information-educational program

REFERENCES

1. Andreeva E.A., Tsirulyova V.M. Numerical methods of the decision of extreme problems. Tver: ТВГУ, 1999. p. 230-305.
2. Evtushenko Ju.G. Methods of the decision of extreme problems and their application in optimisation systems. M: the Science, 1982.
3. Andreeva E.A., Ovsyannikova N.I. Working of algorithm and the program of management of epidemic process//Software products and systems, №3 (87), 2009,-p. 126-128.

УДК 517.956

Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие.

© А. Ю. Павлов¹

Аннотация. Рассматривается задача об управляемости за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений для нелинейных систем ОДУ. Получены достаточные условия существования управления когда требование асимптотического равновесия у первого приближения снято.

Ключевые слова: системы ОДУ, математическая теория управления, управляемость за бесконечное время, асимптотическое равновесие.

Важную роль в математической теории управления играют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за конечное и бесконечное время.

При управляемости за конечное время произвольная фиксированная точка переводится в другую произвольную точку за определенное время T . В случае управляемости за бесконечное время фиксированная точка переводится в сколь угодно малую окрестность другой точки, причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит.

В работе [1] профессором Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости нелинейных систем вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x + B(t)u + f(t, x, u) + F(t) \quad (1.1)$$

за конечное и бесконечное время в определенных классах допустимых управлений K .

Данные условия получены на основе асимптотической теории интегрирования уравнений движения и метода сравнения. Причем уравнением сравнения является

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t)y + B(t)u + F(t) \quad (1.2)$$

Одним из условий управляемости за бесконечное время является существование асимптотического равновесия у системы первого приближения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t)y \quad (1.3)$$

Для системы (1.3) существование асимптотического равновесия следующее.

Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (1.3), нормированная в нуле, $Y(0) = E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = Y(+\infty)$, $\det Y(+\infty) \neq 0$.

Тогда говорят, что система (1.3) имеет асимптотическое равновесие. Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -x + u \quad (1.4)$$

Уравнение первого приближения

¹Доцент кафедры прикладной математики, МГУ им Н.П.Огарева, г. Саранск; appmath@svmo.ru.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y \quad (1.5)$$

не имеет асимптотического равновесия, так как общее решение уравнения:

$$y(t) = ce^{-t} \quad (1.6)$$

и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0, \forall c \in R$.

Покажем, что уравнение (1.4) является управляемым за бесконечное время. Пусть точку x_0 по траектории уравнения (1.4) необходимо перевести за бесконечное время в точку x_1 , то есть $x(t_0) = x_0, x(+\infty_0) = x_1$.

Частное решение уравнения (1.4), проходящее через точку (t_0, x_0) имеет вид:

$$x(t) = e^{-t} \left(\int_{t_0}^t e^s u(s) ds + x_0 e^{t_0} \right) \quad (1.7)$$

Найдем такое управление u , что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t e^s u(s) ds + x_0 e^{t_0}}{e^t} \quad (1.8)$$

Если потребовать непрерывность функции на промежутке $[t_0, +\infty)$, то к последнему пределу можно применить правило Лопиталья. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t u(t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \quad (1.9)$$

То есть искомым уравнением может быть любая непрерывная функция такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_1$. В частности, можно положить $u(t) = x_1; u(t) = x_1 + \frac{1}{t}; u(t) = x_1 - \frac{1}{t}$.

Таким образом, система (1.4) является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия.

Определенный интерес представляют классы уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения не является необходимым или необходимым и достаточным условием. Найдем класс дифференциальных систем, управляемых за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений без предположения существования асимптотического равновесия системы первого приближения $\frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x + f(t, x, u), \\ x(t_0) = x_0, x(+\infty) = x_1, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$,

$T \leq t < +\infty$,

$A(\cdot) : [T, +\infty) \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$ - непрерывное отображение,

$f \in C([T, +\infty) \times R^n \times R^m \times R^n)$.

Необходимо перевести точку x_0 в точку x_1 по траектории уравнения (1.10) за бесконечное время.

Пусть $y = x - x_1$. Тогда $\dot{y} = \dot{x}$ (точкой обозначена производная по t), $x = y + x_1$. Система (1.10) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, y(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Обозначим $\varphi(t) = A(t)x_1$, $\tilde{f}(t, y, u) = f(t, y + x_1, u)$. Предположим, что $\|\tilde{f}(t, y, u) + \varphi(t)\| \leq \psi(t)\|y\| + \eta(t, u(t))$, где $\psi \in C([t_0, +\infty), R)$, $\eta \in C([t_0, +\infty) \times R^m, R)$.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) dl + \|x_0 - x_1\| \exp\left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) = \\ &\exp\left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) \left[\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp\left[\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds - \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right] dl \right] = \\ &\exp\left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) \left[\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp\left[\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right] dl \right] \end{aligned}$$

Последнее выражение при $t \rightarrow 0$ должно стремиться к нулю.

Рассмотрим
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) dl}{\exp\left(-\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right)}.$$

Предположим, что выполняется следующее условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = -\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) dl = \infty,$$

а функция $u(t)$ такова, что к пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right)}{-\exp\left(-\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) (\Lambda(t) + \psi(t))} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Если для системы (1.10) и управления $u(t)$ выполняется $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = -\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) dl = \infty$, и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)} = 0$, то любую точку $x_0 \in R^n$ можно перевести в точку $x_1 \in R^n$ за бесконечное время по траектории системы (1.10).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: Теория и приложения. СВМО, 2001.– 300с.

Дата поступления 11.11.2009

Controllability in infinite and asymptotic equilibrium.

© A. Yu. Pavlov²

Abstract. The problem about controllability in infinite time in a class of admissible controls for nonlinear ODE systems is considered. Sufficient conditions for existence of control, when the requirement of the asymptotic equilibrium in the first approximation withdrawn.

Key Words: ODE systems, mathematical control theory, asymptotic equilibrium.

REFERENCES

1. Voskresensky E. V. Asymptotic methods: the theory and applications. SVMO, 2001.–300 p.

²Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian State University, Saransk; appmath@svmo.ru.

УДК 517.9

Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики

© С. И. Спивак¹, А. С. Исмагилова²

Аннотация. Исследован метод анализа неединственности решения обратных задач химической кинетики. Рассмотрен алгоритм определения числа и вида независимых параметрических функций констант, включающий в себя характеристики погрешности измерений.

Ключевые слова: Механизм сложной химической реакции, обратные задачи, математическая интерпретация измерений, погрешность эксперимента.

1. Введение

Основная проблема, возникающая при исследовании обратных задач химической кинетики, – неоднозначность решения [1], [2]. Причина – недоинформативность кинетических измерений: в эксперименте измеряются только исходные вещества и продукты реакции, отсутствует информация по промежуточным веществам [3]. Таким образом, повышается степень неопределенности при оценивании параметров математических моделей кинетики сложных реакций [4], [5].

Основным аппаратом исследования стала теория функций, матрицы Якоби частных производных от измеряемых характеристик по искомым константам.

Цель настоящей работы – исследование однозначности решения обратных задач химической кинетики в условиях, определяемых наличием погрешности эксперимента.

2. Анализ неединственности решения обратной задачи с учетом погрешности эксперимента

Кинетическая модель может быть представлена в виде

$$\frac{da}{dt} = f(a, k),$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор концентраций веществ, $k = (k_1, \dots, k_s)$ – вектор кинетических констант, $f = (f_1, f_2)$ – выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Если измеряются концентрации части веществ, то вектор концентрации можно разбить на два подвектора:

$$a = (x', y),$$

¹Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Уфа; S.Spivak@bashnet.ru.

²Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет», г. Нефтекамск; IsmagilovaAS@rambler.ru.

где $x' = (x'_1, \dots, x'_{n_1})$ и $y = (y_1, \dots, y_{n_2})$ соответствуют измеряемым и неизмеряемым веществам, $n_1 + n_2 = n$.

Концентрация неизмеряемых веществ определяется из некоторых дополнительных соотношений. Система кинетических уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x', y, k); \\ f_2(x', y, k) = 0; \\ x'(0) = x'_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Погрешность ε рассматривается как дополнительный параметр, который не входит в систему уравнений, а входит в x .

Можно рассматривать ситуации, когда

$$x' = x + x\varepsilon, \quad x' = x + \varepsilon, \quad x' = x\varepsilon,$$

где $0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, ε_1 – предельная допустимая погрешность измерения.

Идея состоит в том, что ε входит в вектор определяемых параметров, который будет иметь вид:

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_1, \dots, k_s; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

Модели, для которых число линейно независимых столбцов матрицы Якоби частных производных от измеряемых компонент по искомым константам меньше общего числа искомых констант, называются нелинейными моделями неполного ранга (НМНР).

В этом случае задача имеет бесконечное множество решений, определения констант не имеет смысла. Тогда решается задача определения вида независимых параметрических функций (НПФ), для которых локальная неидентифицируемость будет устранена.

Тогда достаточно исследовать матрицу

$$U = \left(\frac{\partial f_1}{\partial k'} \right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial k'} \right) \quad (2.2)$$

явный вид которой определяется правыми частями системы (2.1).

Из этого следует существование ненулевой матрицы A , зависящей только от k и ε , такой что

$$U \cdot A \equiv 0.$$

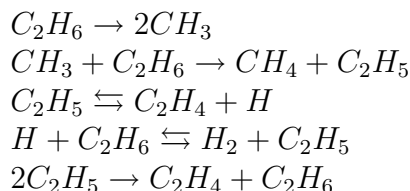
Если эта матрица найдена, то базис независимых частных решений системы

$$\frac{\partial \rho}{\partial k'} \cdot A = 0,$$

где $\rho_1(k, \varepsilon), \dots, \rho_m(k, \varepsilon)$ – система НПФ, m – число линейно независимых столбцов матрицы Якоби.

3. Пример

Рассмотрим нелинейный относительно неизмеряемых веществ механизм реакции пиролиза этана.



Измеряются с погрешностью концентрации четырех веществ: C_2H_6 , CH_4 , C_2H_4 , H_2 ; не измеряются концентрации промежуточных веществ: CH_3 , C_2H_5 , H .

Предположим, что промежуточные вещества подчиняются условиям квазистационарности. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -k_1x'_1 - k_2x'_1y_1 - k_4x'_1y_3 + k_{40}x'_4y_2 + k_5y_2^2 = f_{11}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_2x'_1y_1 = f_{12}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_3y_2 + k_{30}x'_3y_3 + k_5y_2^2 = f_{13}, \\ \frac{dx_4}{dt} &= k_4x'_1y_3 - k_{40}x'_4y_2 = f_{14}, \\ 2k_1x'_1 - k_2x'_1y_1 &= f_{21} = 0, \\ k_2x'_1y_1 - k_3y_2 + k_{30}x'_3y_3 + k_4x'_1y_3 - k_{40}x'_4y_2 - 2k_5y_2^2 &= f_{22} = 0, \\ k_3y_2 - k_{30}x'_3y_3 - k_4x'_1y_3 + k_{40}x'_4y_2 &= f_{23} = 0.\end{aligned}$$

Пусть измеряемые с погрешностью концентрации исходных веществ имеют вид:

$$x'_i = x_i + x_i\varepsilon, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Тогда вектор определяемых параметров имеет вид:

$$k'(k, \varepsilon) = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_{30}, k_{40}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

Для вычисления матрицы U продифференцируем выражения $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ по k' и y , подставим в (2.2).

Матрица U имеет размерность (4×11) . Ее элементы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}u_{11} &= -2x'_1 \left(1 + \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)} \right), \quad u_{12} = 0, \\ u_{13} &= -y_2 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{14} = -x'_1y_3 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{15} &= 2y_2 \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)}, \quad u_{16} = x'_3y_3 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{17} &= x'_4y_2 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{19} = 0, \\ u_{18} &= -2k_1x_1 \left(1 + \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)} \right) - k_4y_3x_1 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{1,10} &= k_{30}x_3y_3 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{1,11} = k_{40}x_4y_2 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{21} &= 2x'_1, \quad u_{22} = u_{23} = u_{24} = u_{25} = u_{26} = u_{27} = 0, \\ u_{28} &= 2k_1x_1, \quad u_{29} = u_{2,10} = u_{2,11} = 0, \\ u_{31} &= x'_1 \left(1 + \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)} \right), \quad u_{32} = 0, \quad u_{33} = y_2 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{34} &= x'_1y_3 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{35} = -2y_2 \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)}, \\ u_{36} &= -x'_3y_3 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{37} = -x'_4y_2 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{39} = 0, \\ u_{38} &= k_1x_1 \left(1 + 2 \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)} \right) + k_4y_3x_1 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{3,10} &= -k_{30}x_3y_3 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \quad u_{3,11} = -k_{40}x_4y_2 \frac{k_{30}x'_3}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1}, \\ u_{41} &= 2x'_1 \frac{k_3k_4x'_1 - k_{30}k_{40}x'_3x'_4}{4k_5y_2(k_{30}x'_3 + k_4x'_1)}, \quad u_{42} = 0, \quad u_{43} = y_2 \frac{k_4x'_1}{k_{30}x'_3 + k_4x'_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{44} &= x'_1 y_3 \frac{k_{30} x'_3}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}, & u_{45} &= -2y_2 \frac{k_3 k_4 x'_1 - k_{30} k_{40} x'_3 x'_4}{4k_5 y_2 (k_{30} x'_3 + k_4 x'_1)}, \\
u_{46} &= -x'_3 y_3 \frac{k_4 x'_1}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}, & u_{47} &= -x'_4 y_2 \frac{k_{30} x'_3}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}, \\
u_{48} &= 2k_1 x_1 \frac{k_3 k_4 x'_1 - k_{30} k_{40} x'_3 x'_4}{4k_5 y_2 (k_{30} x'_3 + k_4 x'_1)} + k_4 y_3 x_1 \frac{k_{30} x'_3}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}, & u_{49} &= 0, \\
u_{4,10} &= -k_{30} x_3 y_3 \frac{k_4 x'_1}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}, & u_{4,11} &= -k_{40} x_4 y_2 \frac{k_{30} x'_3}{k_{30} x'_3 + k_4 x'_1}.
\end{aligned}$$

Матрица связей выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{k_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{30} & 0 & 0 & -k_{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{40}}{k_5} & -k_{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \varepsilon_1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 + \varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \varepsilon_4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Заметим, что в матрице U , во втором столбце, соответствующем константе k_2 , и в девятом столбце, соответствующем погрешности ε_2 , стоят 0. Это означает, что концентрации измеряемых веществ не зависят от k_2 и ε_2 .

Система соответствующая (3.1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} + k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} &= 0 \\
\frac{k_3}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_3} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial k_5} + \frac{k_{40}}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} &= 0 \\
-k_{40} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} + (1 + \varepsilon_4) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_4} &= 0 \\
-k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} + (1 + \varepsilon_3) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_3} &= 0 \\
k_1 \frac{\partial \rho}{\partial k_1} + k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} - (1 + \varepsilon_1) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_1} &= 0
\end{aligned}$$

Таким образом, независимый базис решений может состоять из следующих компонент

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{k_{30}}{k_4}, \\
\rho_2 &= \frac{k_3^2}{k_5}, \\
\rho_3 &= \frac{k_1 + k_4}{k_1 k_4 (1 + \varepsilon_1)}, \\
\rho_4 &= k_{30} (1 + \varepsilon_3), \\
\rho_5 &= k_{40} (1 + \varepsilon_4).
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, доступная экспериментальная информация в механизме реакции пиролиза этана позволяет определить не все семь искомых кинетических констант, а только пять их независимых параметрических функций, задаваемых системой формул (3.2). Отметим, что комплексы ρ_4 и ρ_5 есть не что иное, как кинетические константы k_{30} и k_{40} , с точностью ε_3 и ε_4 соответственно. В то же время вид комплекса ρ_3 не позволяет

провести содержательную интерпретацию. По-видимому, вопрос может проясниться после обработки реального эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Горский В.Г. Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант // Доклады Академии наук, 1981, Т.267; N2, - С.412-415.
2. Горский В.Г., Спивак С.И. Исследование идентифицируемости параметров - один из важнейших этапов построения математических моделей в химии // Журн.структурной химии, 1988, Т.29; N 6, - С.119-125.
3. Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. - М.: Знание, 1977.
4. Кунцевич А.Д., Кудашев В.Р., Спивак С.И., Горский В.Г. Групповой анализ идентифицируемости параметров математических моделей нестационарной химической кинетики // Доклады Академии наук, 1992, Т.326; N 4, - С.658-661.
5. Бердникова М.Л., Спивак С.И. Анализ однозначности решения обратных задач химической кинетики с учетом погрешности измерений // Доклады Академии наук, 1996, Том 351; N 4, - С.482-484.

Дата поступления 15.09.2009

The informativity of kinetic measurements and the parameters calculation for mathematical models of chemical kinetics

© S. I. Spivak³, A. S. Ismagilova⁴

Abstract. The method of iniquity analysis of the inverse problem of chemical kinetics is building. The algorithm of the calculation of independent parametric function of constants is considering. The foundation of this method is characteristics of measurements error.

Key Words: The mechanism of complex chemical reaction, inverse problems, mathematical interpretation of measurements, measurements error.

REFERENCES

1. Spivak S.I., Gorskii V.G. The nonuniqueness of the solution to the problem of the determination of kinetic constants // Russian: Dokladi Akademii Nauk, 1981, V.257; N 2, - P.412-415.
2. Gorskii V.G., Spivak S.I. Parameter identifiability investigation is one principal stages of mathematical model development in chemistry // Russian: Jurnal Structurnii Himii, 1988, V.29; N 6, - P.119-125.
3. Yablonskii G.S., Spivak S.I. Mathematical Models of Chemical Kinetics.- Moscow, Znanie, 1977.
4. Kuntzevich A.D., Kudashev V.R., Spivak S.I., Gorskii V.G. Group analysis of identifiability of parameters in mathematical models of nonstationary chemical kinetics // Russian: Dokladii Akademii Nauk, 1992, V.326; N4, - P.658-661.
5. Berdnikova M.L., Spivak S.I. The analysis of uniqueness of inverse problems chemical kinetics solution in presence error measurements // Russian: Dokladii Akademii Nauk, 1996, V.351; N4, - P.482-484.

³Professor, Head of the Chair of Mathematical Modelling, The State Education Institution of Professional Education «Bashkir State University», Ufa; S.Spivak@bashnet.ru.

⁴Associate Professor of the Chair of Mathematical Modelling, Neftekamsk Filial of the State Education Institution of Professional Education «Bashkir State University», Neftekamsk; IsmagilovaAS@rambler.ru.

УДК 519.8

Моделирование процесса страхования методом Монте-Карло

© С. И. Спивак¹, С. И. Лукашкин²

Аннотация. В статье рассматривается метод имитационного моделирования (метод Монте-Карло) процесса страхования в критических ситуациях. Практическое применение данного метода приведено с использованием реальных данных.

Ключевые слова: Имитационное моделирование, актуарная математика, вероятность разорения.

1. Введение

Основа успешного функционирования любой финансовой структуры - контроль баланса входящих и исходящих потоков денежных средств. В статье анализируются параметры поступления премий, выплат и возвратов по ОСАГО. В качестве примера рассматриваются данные о деятельности регионального филиала одной из российских страховых компаний за 2004 г. Принимается предположение о том, что распределение требований о выплате находится в некотором классе распределений. Тогда возникает задача оценки параметров, от которых зависят распределения, лежащие в упомянутом семействе. Эти оценки проводятся с помощью данных о требованиях страховых выплат и подходящих методов (например, метода моментов или метода максимального правдоподобия).

2. Модель изменения капитала страховой компании

Экономический смысл страхования состоит в том, что бы с одной стороны страховая компания получила прибыль, а с другой стороны клиент этой компании за сравнительно небольшую плату снял с себя часть рисков, тем самым, обеспечив себе более устойчивое положение. Изменение капитала страховой компании в момент времени t описывается следующей формулой [1], [2]:

$$U(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{M_t} p_i - \sum_{j=1}^{N_t} y_j \quad (2.1)$$

где u_0 - начальный капитал, M_t - количество принятых премий к моменту t , p_i - величина i -той премии, N_t - количество выплат к моменту t , y_j - величина j -той выплаты.

Часто в практике страхования ОСАГО, например, при продаже автомобиля, риски связанные со страхованием гражданской ответственности отпадают. В том случае, если срок действия полиса страхования не истек, страхователь имеет право обратиться в страховую компанию, с требованием вернуть ему неиспользованную часть уплаченной страховой премии пропорционально оставшемуся сроку действия договора. Это называется возвратом.

¹Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет; S.Spivak@bashnet.ru.

²Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет; sergeylu@mail.ru.

Таким образом, соотношение (2.1) можно уточнить, добавив еще один исходящий поток возвратов. Тогда изменение капитала страховой компании в момент времени t запишется следующим образом:

$$U(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{M_t} p_i - \sum_{j=1}^{N_t} y_j - \sum_{k=1}^{L_t} v_k \quad (2.2)$$

где u_0 , M_t , p_i , N_t , y_j - из формулы (2.1), L_t - количество возвратов к моменту t , v_k - величина k -того возврата.

3. Структура процессов поступления премий, выплат и возвратов

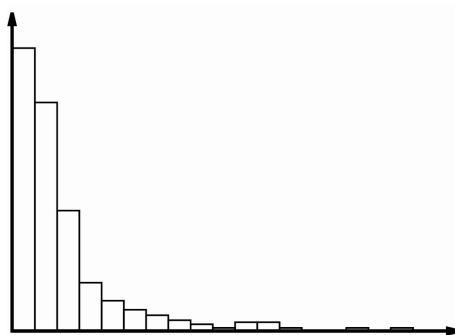
Как правило, величина премии не является постоянной величиной для всех контрактов, а меняется от различных параметров. Это касается выплат и возвратов страховых премий. Для имитационного моделирования определим функции распределения входящих и исходящих потоков.

3.1. Выплаты

Для предварительной оценки распределения, лежащего в основе данных о страховых выплатах, используем гистограмму, в которой данные разбиты на равные промежутки, и статистические характеристики этой выборки приведены в Таблице 1.

Количество значений	502
Среднее	15 577,99
Медиана	8 844,06
Мода	28 500,00
Стандартное отклонение	17 645,91
Дисперсия выборки	311 378 138,60
Асимметричность	2,37
Минимум	313,04
Максимум	114 000,00
Коэффициент вариации	1,13

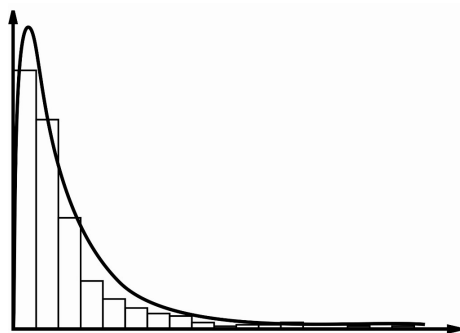
Таблица 1.



Р и с у н о к 3.1

Данные о выплатах

Мы видим, что распределение ассиметрично и смещено влево. Так же известно (например [3]), что для экспоненциального распределения коэффициент вариации равен $cv = 1$, а асимметрия $v = 2$. У нашего распределения $cv = 1,13$ и $v = 2,37$. Будем проверять гипотезу о логнормальном распределении, так как оно также удовлетворяет данным характеристикам. Построим график плотности логнормального распределения поверх гистограммы.



Р и с у н о к 3.2

Функция плотности логнормального распределения

Плотность логнормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x\sigma}} \exp -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}. \tag{3.1}$$

Оценка максимального правдоподобия для параметров логнормального распределения

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i}{n}, \quad \tilde{\sigma} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\ln x - \mu)^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Получаем $\mu = 9,1446$ и $\sigma = 1,0229$. Для того, чтобы критерий был несмещенным, при разбиении на интервалы будем использовать равновероятностный подход. Разобьем на 20 равновероятностных интервалов и применим критерий χ^2 .

i	Интервал	N_i	np_i	$\frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$
1	[0,00; 1740,76)	17	25,1	3,86
2	[1740,76; 2524,25)	20	25,1	1,30
3	[2524,25; 3243,58)	28	25,1	0,30
4	[3243,58; 3958,84)	34	25,1	2,33
5	[3958,84; 4696,93)	31	25,1	1,12
6	[4696,93; 5476,33)	22	25,1	0,44
7	[5476,33; 6313,56)	29	25,1	0,52
8	[6313,56; 7226,07)	27	25,1	0,13
9	[7226,07; 8234,28)	31	25,1	1,12
10	[8234,28; 9363,74)	27	25,1	0,13
11	[9363,74; 10648,12)	29	25,1	0,52
12	[10648,12; 12133,78)	23	25,1	0,19
13	[12133,78; 13887,50)	20	25,1	1,30
14	[13887,50; 16010,65)	23	25,1	0,19
15	[16010,65; 18667,43)	29	25,1	0,52
16	[18667,43; 22147,82)	18	25,1	2,80
17	[22147,82; 27031,76)	16	25,1	5,18
18	[27031,76; 34734,86)	22	25,1	0,44
19	[34734,86; 50368,48)	23	25,1	0,19
20	[50386,48; ∞)	33	25,1	1,89
				$\chi^2 = 24,49$

Таблица 2.

Так как $\chi_{18;0,90}^2 = 25,98$ [4], то есть χ^2 не превышает это значение, мы принимаем гипотезу о логнормальном распределении на уровне $\alpha = 0,10$.

3.2. Премии и возвраты

Аналогичным способом проверяются гипотезы о том, что премии имеют гамма-распределение

$$d(x) \quad (3.3)$$

с параметрами $a = 2,44$ и $b = 653,09$, где $\Gamma(a) = \int_{-t}^{t^{a-1}} dt$. А возвраты распределены по закону Гумбеля

$$g(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b} - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (3.4)$$

с параметрами $a = 709,05$ и $b = 456,16$.

3.3. Интенсивность премий, выплат и возвратов

На следующем этапе необходимо проанализировать время наступления выплат, возвратов и поступления премий. Анализируя данные о времени, мы получим характеристики интенсивности соответствующих процессов. Ниже приведена таблица в которой содержится средняя и максимальная интенсивность для премий, выплат и возвратов.

Интенсивность	Премии	Выплаты	Возвраты
λ	86,37	1,78	0,07
λ_{max}	1640	11	3

Таблица 3.

4. Генерирование нестационарного пуассоновского процесса

Стохастический процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ считается пуассоновским, если характеризуется следующими свойствами:

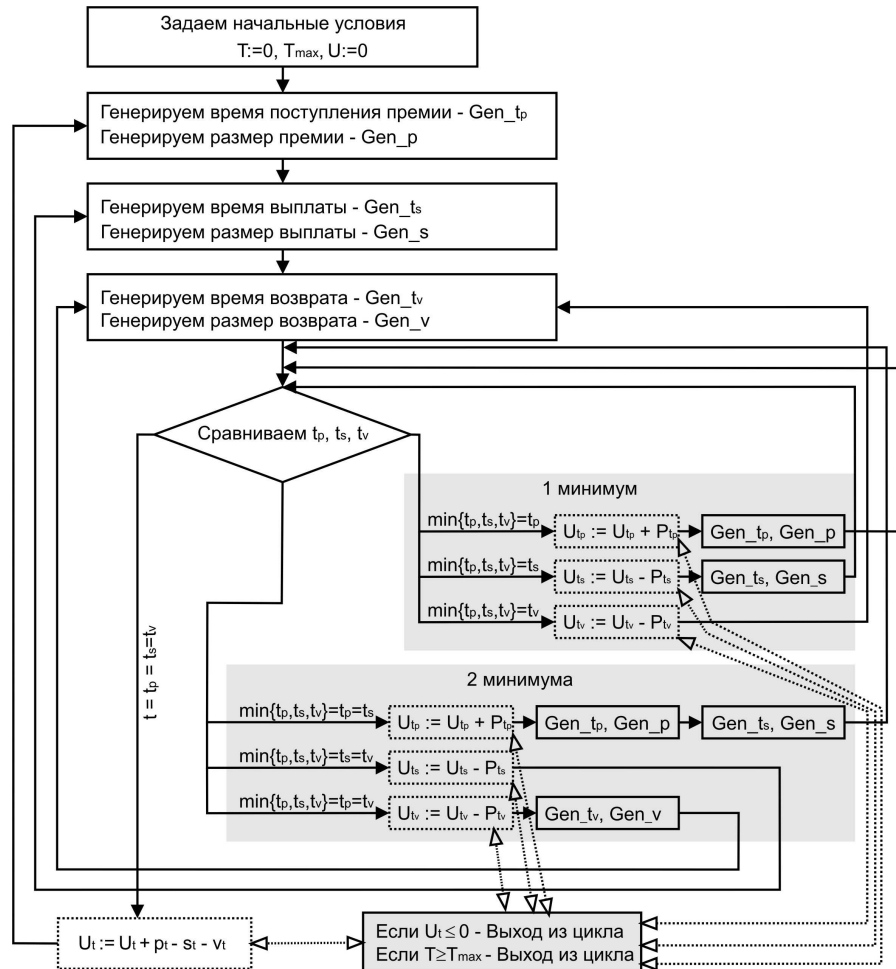
1. Требования поступают по одному в каждый момент времени.
2. $N(t + s) - N(t)$ - число поступлений требований в интервале времени $(t, t + s]$ не зависит от $\{N(u), 0 \leq u \leq t\}$
3. Распределение $N(t + s) - N(t)$ не зависит от t для всех $t, s \geq 0$.

Если выполняются пункты 1 и 2 пуассоновского процесса, а λ зависит от времени, то такой процесс называется нестационарным пуассоновский процессом. Для генерации нестационарного процесса Пуассона воспользуемся методом прореживания. Пусть интенсивность нестационарного процесса Пуассона $\lambda(t)$ не превышает некоторого значения $\lambda_{max} = \max\{\lambda(t)\}$. Мы будем генерировать стационарный пуассоновский процесс для λ_{max} , а затем "прореживаем" количество t_i , отбрасывая каждое значение t_i с вероятностью $1 - \frac{\lambda(t_i)}{\lambda_{max}}$. Тогда алгоритм генерации будет выглядеть следующим образом [3]:

1. Определяем $t_i = t_{i-1}$.
2. Генерируем U_1 и U_2 как независимые и одинаково распределенные величины с распределением $U(0, 1)$ независимо от предыдущих случайных величин.
3. Заменяем t на $t - (\frac{1}{\lambda_{max}}) \ln U_1$.
4. Если $U_2 \leq \frac{\lambda t}{\lambda_{max}}$, тогда $t_i = t$. В противном случае возвращаемся к шагу 2.

5. Численный эксперимент

Важно моделировать процесс риска во времени, потому что компания может разориться в какой-то определенный момент времени, но потом вновь увеличить количество премий. Таким образом, расчет вероятности разорения с помощью агрегированных за необходимый период данных будет некорректным. Пусть время между поступлениями требований представляет собой нестационарный пуассоновский процесс. Теперь предполагая, что начальный капитал, посчитаем вероятность разорения, используя полученные в результате анализа данные. Разорившимся будем считать процесс, в котором капитал ≤ 0 . Будем моделировать три нестационарных пуассоновских процесса, один будет моделировать промежутки времени между поступлениями премий, другой - между выплатами, третий - между возвратами. Премии в эти промежутки времени будут генерироваться согласно гамма-распределению, убытки - по логнормальному закону, а возвраты - по закону Гумбеля. Будем моделировать процессы поступления премий, выплат и возвратов во времени. Тогда алгоритм генерирования процессов будет выглядеть следующим образом:



Р и с у н о к 5.1

Алгоритм процесса оценки вероятности разорения с учетом возвратов

Реализовав 20 000 таких процессов, посчитаем количество разорившихся процессов. Ниже приведены итоги численного эксперимента.

Количество процессов	Количество разорившихся процессов	Вероятность разорения
20000	1061	0,05305

6. Заключение

Достаточно низкая вероятность разорения подтверждает тот факт, что в 2004 году закон об ОСАГО еще не был до конца «понят» гражданами. Водители еще не пользовались всеми правами по урегулированию убытков и возвратов не использованной части премий. По данным доклада ФССН с 2004 по 2006 год [5] отмечено, что выплаты росли быстрее премий, то есть коэффициент выплат (отношение выплат к премиям) постоянно увеличивался. Это обусловлено и бумом автокредитования, и большим количеством ДТП, что связано, как с появлением большого количества неопытных водителей, так и регистрацией мелких ДТП, до этого «решавшихся на месте». Эту модель можно уточнить, добавив другие исходящие и входящие потоки: ежеквартальные налоговые отчисления, резервирование, инвестирование в ценные бумаги, размещение средств на депозитах в банках, РВД

и т.п. Моделирование большого количества процессов потребует больших вычислительных мощностей и использование алгоритмов параллельного программирования. В современных условиях экономической нестабильности задача о разорении страховой компании становится еще более актуальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Климин А.С., Оценивание вероятности разорения страховой компании методом Монте-Карло // Обозрение прикладной и промышленной математики, Том 8, выпуск 2, 2001г., с. 802-803
2. Спивак С.И., Климин А.С., Моделирование процесса риска страховой компании в случае переменной скорости поступления премий между исками // Обозрение прикладной и промышленной математики, Том 8, выпуск 1, 2001г., с. 333-334
3. Аверилл М. Лоу, В. Дэвид Кельтон Имитационное моделирование. Классика CS 3-е изд.СПб.: Питер; Киев: Издательская группа ВНУ, 2004. - 847 с.
4. Ивченко Г.И., Медведев И.Ю., Чистяков А.В. Задачи с решениями по математической статистике, М.: Дрофа, 2007. - 318 с.
5. Доклад о ходе реализации закона "Об обязательном страховании гражданской ответственности владельцев транспортных средств": 2003 - 2006 гг. М.: ФССН, 2007. - 59 с.

Дата поступления 08.09.2009

Monte Carlo simulation modeling of insurance process

© S. I. Spivak³, S. I. Lukashkin⁴

Abstract. In the paper considering simulation method (Monte Carlo) of insurance process in extremal situation. The practice use of this method adduced using the real data.

Key Words: Simulation, actuary mathematics, ruin probability.

REFERENCES

1. Spivak, S.I., Klimin, A.S., Estimating a probability of ruin Monte Carlo method use. // Applied and industry mathematics review, 8 (2), 2001, p. 802-803
2. Spivak, S.I., Klimin, A.S., Modeling risk processes in insurance company with variable intensity premiums between claims // Applied and industry mathematics review, 8 (1), 2001, p. 333-334
3. Averill M. Law, W. David Kelton, Simulation modeling and analysis. BHV, 2004.
4. Ivchenko, G.I., Medvedev, I.Yu., Chistyakov, A.V., Book of mathematical statistic problems with solutions, Drofa, 2007.
5. The report of achievement the low "About motor third-party liability insurance": 2003 - 2006. FSSN, 2007.

³Professor, Head of the Chair of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; S.Spivak@bashnet.ru

⁴Post graduate student of the Chair of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; sergeylu@mail.ru

УДК 517.9

Достаточные условия локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей

© П. А. Шаманаев¹

Аннотация. В работе получены достаточные условия локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей. Доказательство основано на построении ляпуновского преобразования.

Ключевые слова: обыкновенные системы дифференциальных уравнений, локальная приводимость, ляпуновские преобразования.

1. Введение

Определение приводимости для линейных систем дифференциальных уравнений введено в знаменитой работе А.М.Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» [1]. В случае нелинейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости будем понимать в смысле определения Е.В.Воскресенского, приведенного в работе [2].

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(t, x)$ такая, что

$$f \in C^{(k,l)}(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 0, l \geq 1, \mathcal{T} = [T, +\infty), f(t, 0) \equiv 0. \quad (1.2)$$

Не ограничивая общности будем считать $T \geq 0$.

Понятие приводимости определено для систем, решения которых продолжимы вправо при $t \geq T$ для всех начальных данных (t_0, x_0) из $(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n)$. Если же у системы имеются как продолжимые так и непродолжимые решения, то вопрос о приводимости можно рассматривать лишь для той области пространства $(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n)$, в котором решения $x(t; t_0, x_0)$ системы (1.1) продолжимы вправо при $t \geq T$. Такой вид приводимости будем называть *локальной приводимостью* [6].

Предположим, что у систем вида (1.1) существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq T$, причем эти решения заполняют некоторую область D пространства \mathbb{R}^{n+1} :

$$D = \left\{ (t, x) : t \in \mathcal{T}, x \in X_t, X_t \subseteq \mathbb{R}^n \right\},$$

где X_t ($t \in \mathcal{T}$) – области, содержащие окрестность нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset X_t$ при всех $t \in \mathcal{T}$.

Если у системы вида (1.1) решения $x(t; t_0, x_0)$, где $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, определены при всех $t \geq T$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом Ξ [2], [3].

¹Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; shamanaevpa@math.mrsu.ru.

Если же у системы вида (1.1) существует совокупность решений $x(t : t_0, x_0)$, определенных при всех $t \geq T$, лишь только при $(t_0, x_0) \in D$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом Ω .

Очевидно, что если $X_t = \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathcal{T}$, то в этом случае $D = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$. Откуда следует, что для любых $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ все решения систем из множества Ω определены при всех $t \geq T$. Следовательно, множества Ω и Ξ систем дифференциальных уравнений совпадают. В общем случае $\Xi \subseteq \Omega$.

Рассмотрим преобразование

$$x = \varphi(t, y)$$

из ляпуновской группы (\mathbf{LG}, Ξ) (см. [2]) на множестве Ω . При каждом фиксированном $t \in \mathcal{T}$ это преобразование представляет собой взаимно однозначное отображение

$$x = \varphi_t(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Так как отображение φ_t является взаимно однозначным отображением пространства \mathbb{R}^n на себя, то

$$x = \varphi_t(y), \quad y \in V_t, \quad x \in U_t = \varphi_t(V_t), \quad (1.3)$$

(где $V_t \subset \mathbb{R}^n$ – область, содержащая окрестность нуля) также является взаимно однозначным отображением области V_t на область U_t .

Под определением локальной приводимости систем дифференциальных уравнений будем понимать определение из работы [6].

О п р е д е л е н и е 1.1. *Две системы из множества Ω назовем локально приводимыми, если существует преобразование $\varphi \in (\mathbf{LG}, \Xi)$ такое, что при каждом фиксированном $t \in \mathcal{T}$ диффеоморфизм*

$$\varphi_t : V_t \mapsto U_t, \quad (1.4)$$

(здесь, $X_t \supset V_t$, U_t – области, содержащие окрестности нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$ фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset V_t$, U_t при всех $t \in \mathcal{T}$), переводит точки $y \in V_t$, принадлежащие решениям одной системы, в соответствующие точки $x \in U_t$ другой системы.

Сделаем несколько замечаний относительно согласованности определений приводимости и локальной приводимости из работ [1, 2, 6]

З а м е ч а н и е 1.1. Пусть $X_t = \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathcal{T}$, и кроме этого, V_t и U_t при всех $t \in \mathcal{T}$ также совпадают со всем пространством \mathbb{R}^n . Тогда, если две системы дифференциальных уравнений являются локально приводимыми согласно определению (1.1.), то, все решения одной системы переводятся преобразованием $\varphi \in (\mathbf{LG}, \Xi)$ в решения другой системы, а это означает, что эти системы являются приводимыми в смысле работ [2], [3].

З а м е ч а н и е 1.2. Если Ω является множеством всех линейных систем дифференциальных уравнений, то из локальной приводимости двух систем из Ω следует их приводимость по Ляпунову.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений из Ω вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t, x), \tag{2.1}$$

где функция g удовлетворяет условию

$$\|g(t, u) - g(t, v)\| \leq \psi(t)\Phi(\eta)\|u - v\|, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

здесь $\psi \in C(\mathcal{T}, R^+)$, $\psi(t) \leq C$ при всех $t \in \mathcal{T}$, $\Phi(z)$ – положительная непрерывная неубывающая функция при всех $z > 0$, $\eta = \max\{\|u\|, \|v\|\}$.

Ставится задача о локальной приводимости системы дифференциальных уравнений (2.1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Введем следующие обозначения: Λ – максимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A ; λ – минимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A ; $m_1 + 1$ – максимальный порядок жордановой клетки матрицы A , соответствующий собственному значению, вещественная часть которого равна λ ; $m_2 + 1$ – максимальный порядок жордановой клетки матрицы A , соответствующий собственному значению, вещественная часть которого равна Λ .

Пусть $Y(t-s)$ – матрица Коши линейной системы (2.3), нормированная в нуле. Тогда для нее справедливы оценки [4, с.302]

$$\|Y(t-s)\| \leq Ke^{\Lambda(t-s)}\rho^{m_2}(t-s) \quad t \geq s, \tag{2.4}$$

$$\|Y(t-s)\| \leq Ke^{\lambda(t-s)}\rho^{m_1}(t-s) \quad t \leq s, \tag{2.5}$$

где K – константа;

$$\rho^\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } |t| < 1, \\ |t|^\beta & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

где β – целое неотрицательное число.

Определим функцию [5]

$$w = \Psi(z, c) = \int_c^z \frac{ds}{\Phi_0(s)}, \quad c > 0, \quad \Phi_0(s) = s\Phi(s), \tag{2.7}$$

причем, $\Psi(+\infty, c) < +\infty$, и сформулируем вспомогательную лемму.

Л е м м а 2.1. Пусть фундаментальная матрица $Y(t-t_0)$ системы (2.3) ограничена при всех $t \geq t_0$ и сходится интеграл

$$\int_T^{+\infty} \psi(\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Тогда, решения $x(t:t_0, x_0)$ системы (2.1), начальные данные (t_0, x_0) которых удовлетворяют условию

$$(t_0, x_0) \in D_1, \quad \text{где } D_1 = \left\{ (t, v) : \int_T^t \psi(\tau)d\tau < \Psi(+\infty, \|v\|), \quad t \geq T, \quad v \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2.9}$$

ограничены при всех $t \geq t_0$, причем для них справедлива оценка

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \Psi^{-1} \left(\int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau, \|x_0\| \right), \quad t \geq t_0. \quad (2.10)$$

Доказательство. Доказательство основано на применении леммы Бихари [5]. Запишем решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (2.1) в виде решения интегрального уравнения

$$x(t) = Y(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t - s)g(s, x(s))ds, \quad (2.11)$$

Учитывая ограниченность фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$ системы (2.3) при всех $t \geq t_0$, оценим норму решения $x(t; t_0, x_0)$

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|Y(t - t_0)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|Y(t - \tau)\| \|g(\tau, x(\tau))\| d\tau.$$

Отсюда получим

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq K\|x_0\| + K \int_{t_0}^t \psi(\tau)\Phi_0(\|x(\tau)\|) d\tau,$$

где $\|Y(t - t_0)\| \leq K$ при всех $t \geq t_0$, K – константа.

Применяя лемму Бихари ([5, с.110]), имеем

$$\|x(t)\| \leq \Psi^{-1} \left(\int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau, \|x_0\| \right), \quad t \geq t_0.$$

Лемма 2.1 доказана.

3. Достаточные условия локальной приводимости

В работе [6] получены достаточные условия локальной приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений с возмущениями, рост которых при $\|x\| \rightarrow +\infty$ может иметь более высокий порядок чем векторные полиномы высших порядков, к линейным системам с нулевой матрицей.

В следующей теореме достаточные условия локальной приводимости систем с возмущениями высших порядков к линейным системам с постоянной матрицей.

Теорема 3.1. Пусть выполняются все условия леммы 2.1, справедливо условие

$$t^{m_2}\psi(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (3.1)$$

и функция Ψ^{-1} удовлетворяет условию Липшица в нуле

$$|\Psi^{-1}(w, c)| \leq K|c|, \quad c = \|v\|, \quad (w, v) \in D_1, \quad (3.2)$$

где K – константа. Тогда системы (2.1) и (2.3) являются локально приводимыми.

Доказательство. Доказательство основано на построении ляпуновского преобразования из $(\mathbf{L}\mathbf{G}, \mathbf{\Xi})$.

Учитывая условие (2.10) и (3.2), получим

$$\|x(t:t_0, x_0)\| \leq K\|x_0\|, \quad (t_0, x_0) \in D_1. \tag{3.3}$$

Применим принцип линейного включения [4, с.557] к разности решений $x^{(1)}(t:t_0, u)$ и $x^{(2)}(t:t_0, v)$ системы (2.1). Учитывая оценку (2.10), получим

$$\|x^{(1)}(t:t_0, u) - x^{(2)}(t:t_0, v)\| \leq K\Psi^{-1}(w(t), \|u - v\|), \quad (t_0, u), (t_0, v) \in D_1. \tag{3.4}$$

Пусть функция $\Psi^{-1}(w, c)$ определена и непрерывна при $|c| \leq R(t)$, $t \geq T$. Определим вектор-функцию $\varphi_0(s, t, v)$ следующим образом

$$\varphi_0(s, t, v) = \begin{cases} x(s:t, v), & \text{при } \|v\| \leq R(t) \\ x\left(s:t, \frac{v}{\|v\|}R(t)\right), & \text{при } \|v\| > R(t). \end{cases} \tag{3.5}$$

Из определения множества D_1 в лемме 2.1 следует, что

$$\varphi_0(s, t, v) = x(s:t, v), \quad \text{если } (t, v) \in D_1. \tag{3.6}$$

Тогда вектор-функция $\varphi_0(s, t, v)$, определенная по формуле (3.5), удовлетворяет условию Липшица по переменной v во всем пространстве \mathbb{R}^n [4, с.555]

$$\|\varphi_0(s, t, v) - \varphi_0(s, t, u)\| \leq K\|u - v\|, \quad s \geq t, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

В пространстве \mathbb{R}^n при каждом фиксированном t рассмотрим оператор

$$Pv = - \int_t^{+\infty} Y(t-s)g(s, \varphi_0(s, t, v))ds, \tag{3.8}$$

где φ_0 – определен по формуле (3.5).

Покажем, что оператор P является оператором сжатия в \mathbb{R}^n . Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая ограниченность решений системы (2.1), когда начальные данные удовлетворяют условию $(t_0, x_0) \in D_1$ и справедливость оценок (2.5) и (3.7), имеем

$$\|Pu - Pv\| \leq KK_1 \int_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) |\Psi^{-1}(w(s), \|u - v\|)| ds.$$

Используя (3.2), получим

$$\|Pu - Pv\| \leq K^2 K_1 \int_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) ds \|u - v\|.$$

Зафиксируем θ , такое что $0 < \theta < 1$. Тогда, учитывая условие (2.8), можно подобрать T , такое, что при всех $t \geq T$

$$K^2 K_1 \int_t^{+\infty} e^{\lambda(t-s)} s_2^m \psi(s) ds \leq \theta.$$

Следовательно, оператор P является оператором сжатия в \mathbb{R}^n и переводит пространство \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

Так как \mathbb{R}^n — банахово пространство, то все условия теоремы п.10.1 [4, с.506] выполнены, и следовательно, при любом $u \in \mathbb{R}^n$ уравнение

$$v = u + \Phi v \quad (3.9)$$

имеет в \mathbb{R}^n единственное решение и оно может быть получено методом последовательных приближений, начинающихся с любого элемента $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Полагая $L = I - \Phi$, где I — тождественный оператор в \mathbb{R}^n , запишем уравнение (3.9) в виде

$$Lv = u. \quad (3.10)$$

Так как оно имеет единственное решение при любом $u \in \mathbb{R}^n$, то существует [4] обратный оператор L^{-1} такой, что

$$L^{-1}u = v. \quad (3.11)$$

Положим

$$\varphi(t, v) \equiv Lv \quad \forall t \geq T, \quad (3.12)$$

$$\varphi^{-1}(t, u) \equiv L^{-1}u \quad \forall t \geq T. \quad (3.13)$$

Таким образом, преобразование (3.12) удовлетворяет определению 1.1 и, следовательно, системы (2.1) и (2.3) являются локально приводимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — Л.; М.: ОНТИ, 1935. — 336 с.
2. Воскресенский Е.В. О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. — 1998. — №9. — С.33-37.
3. Воскресенский Е.В. Ляпуновские группы преобразований // Изв. вузов. Математика. — 1994. — №7. — С.13-19.
4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
6. Шаманаев П.А. О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов // Труды Средневолжского математического общества. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 145-151.
7. Шаманаев П.А. О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков к линейным системам с нулевой матрицей // Труды Средневолжского математического общества. — 2008. — Т. 10, № 2. — С. 213-217.

Sufficient conditions reducibility of differential equations system with perturbations of the higher orders to the linear systems with a constant matrix.

© P. A. Shamanaev²

Abstract. In the work sufficient conditions are obtained for local reducibility of the ODE systems with perturbations of the higher orders to the linear systems with a zero matrix. The proof is bases on the construction of Lyapounov transformations.

Key Words: ODE systems, local reducibility, Lyapounov transformations.

REFERENCES

1. Lyapounov A.M. General problem of stability motion. – L.; M.: ONTI, 1935. – 336 p.
2. Voskresensky E.V. On reducibility of the nonlinear differential equations // *Izv. vuzov. Mathemetic.* – 1998. – № 9. – P. 33-37.
3. Voskresensky E.V. Lyapounov transformation groups // *Izv. vuzov. Mathemetic.* – 1994. – № 7. – P. 13-19.
4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytcsiy V.V. The exponent theory of Lyapunov and her application to a stability problem. – M.: Nauka, 1966. – 576 p.
5. Demidovich B.P. Lectures on a mathematical stability theory. – M.: Nauka, 1967. – 472 p.
6. Shamanaev P.A. On local reducibility of systems of differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials to linear systems with variable matrix. // *Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva.* – 2005. – V. 7, № 1. – P. 256-262.
7. Shamanaev P.A. On the local reducibility of differential equation systems with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials. // *Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva.* – 2003. – V. 5, № 1. – P. 145-151.
8. Shamanaev P.A. On local reducibility of differential equations system with perturbations with perturbations of the higher orders to the linear systems with a zero matrix. // *Trudy Srednevolzskogo Matematicheskogo Obshchestva.* – 2008. – V. 10, № 2. – P. 213-217.

²Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; shamanaevpa@math.mrsu.ru.

Stability of equilibrium and periodic solutions of a delay equation modeling leukemia

© Anca-Veronica Ion¹, Raluca-Mihaela Georgescu²

Annotation. We consider a delay differential equation that occurs in the study of chronic myelogenous leukemia. The equation was investigated numerically in [8], [9], where also some conclusions regarding the stability of equilibria are given. In [6] the first author studied in detail the stability of the two equilibrium points and obtained results that do not agree to those of [8], [9]. In the present work, we shortly remind the results of [6] and then concentrate on the study of stability of periodic solutions emerged by Hopf bifurcation from the non-trivial equilibrium point. We give the algorithm for the construction of a center manifold at a typical point (in the parameter space) of Hopf bifurcation, and of a unstable manifold in the vicinity of such a point (where such a manifold exists). Then we find the normal form of the equation restricted to the center manifold, by computing the first Lyapunov coefficient. The normal form allows us to establish the stability properties of the periodic solutions occurred by Hopf bifurcation.

Acknowledgement. Work supported by Grant 11/05.06.2009 within the framework of the Russian Foundation for Basic Research - Romanian Academy collaboration.

AMS MSC 2000: 65L03, 37C75, 37G05, 37G15.

Key words: delay differential equations; stability; Hopf bifurcation; normal forms.

1. The problem

We consider the delay differential equation that occurs in the study of periodic chronic myelogenous leukemia [8], [9]

$$\dot{x}(t) = - \left[\frac{\beta_0}{1 + x(t)^n} + \delta \right] x(t) + k \frac{\beta_0 x(t-r)}{1 + x(t-r)^n}. \quad (1.1)$$

Here $\beta_0, n, \delta, \gamma, r$ are positive parameters and $k = 2e^{-\gamma r}$. The unknown function, $x(\cdot)$, should also be nonnegative, being a non-dimensional density of cells. We do not insist more on the significance of the function $x(\cdot)$ or in that of the parameters, since these are extensively presented in [8], [9]. Anyway, inasmuch as the equation represents a good model for the periodic chronic myelogenous leukemia, both the equilibrium solutions and the periodic solutions are important, as are their stability properties.

In the following we use the space $\mathcal{B} = C([-r, 0], \mathbb{R})$ (the space of continuous, real valued functions defined on $[-r, 0]$, with the supremum norm, denoted by $|x|_0$). Given a function $x : [-r, T) \mapsto \mathbb{R}$, $T > 0$ and a $0 \leq t < T$, we define the function $x_t \in \mathcal{B}$ by $x_t(s) = x(t+s)$.

Equation (1.1) may be written as

$$\dot{x} = h(x_t), \quad (1.2)$$

where $h : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$, and we impose to this equation the initial condition

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \quad (1.3)$$

In [6] we proved that problem (1.2), (1.3) has an unique, defined on $[-r, \infty)$ bounded solution.

¹"Gh. Mihoc-C. Iacob" Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania.

²University of Pitești, Romania.

1.1. Equilibrium solutions

As shown in [8], the equilibrium points of the problem are

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \left(\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) - 1\right)^{1/n}.$$

The second one is acceptable from the biological point of view if and only if it is strictly positive that is, if and only if

$$\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) - 1 > 0. \quad (1.4)$$

In terms of r , the above inequality may be written as

$$r < r_{max} := -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\beta_0}\right),$$

and since the delay r is positive, the condition $\delta/\beta_0 < 1$ follows.

The biological interpretation of function β [8] shows that the condition $\beta(x_2) = \delta/(k-1) > 0$ should be fulfilled. This is equivalent to $k > 1$.

The linearized equation around one of the equilibrium points is

$$\dot{z}(t) = -[B_1 + \delta]z(t) + kB_1z(t-r), \quad (1.5)$$

with $B_1 = \beta'(x^*)x^* + \beta(x^*)$, $x^* = x_1$ or $x^* = x_2$.

The eigenvalues of the infinitesimal generator of the semigroup of operators generated by equation (1.5) are the solutions of the characteristic equation

$$\lambda + \delta + B_1 = kB_1e^{-\lambda r}. \quad (1.6)$$

2. Stability of equilibrium solution

The study in [6] has lead us to the following conclusions (obtained by using the results in [1]).

2.1. Stability of x_1

In this case $B_1 = \beta_0$. The equilibrium point x_1 is stable as long as it is the single equilibrium point, that is when $\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) \leq 1$. When the second equilibrium point occurs ($\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) > 1$), x_1 becomes unstable. For $\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) = 1$, equation (1.6) admits the solution $\lambda = 0$. Hence the change of stability occurs by traversing the eigenvalue $\lambda = 0$.

2.2. Stability of x_2

In this case,

$$B_1 = \beta_0[n - (n-1)A]/A^2 \quad (2.1)$$

where $A = \beta_0(k-1)/\delta$.

We still rely on [6] in this subsection. Let us define for future use

$$r_n = -\frac{1}{\gamma} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\beta_0} \frac{n}{n-1} + 1 \right) \right\}.$$

We have the following distinct situations.

I. $B_1 < 0$ that is equivalent to $\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) > \frac{n}{n-1}$, and, in terms of r , equivalent to $0 \leq r \leq r_n$. Two subcases are to be considered.

I.A. $B_1 < 0$ and $\delta + B_1 < 0$. In this case $Re\lambda < 0$ for all eigenvalues λ if and only if $|\delta + B_1| < |kB_1|$ and

$$\frac{\arccos((\delta + B_1)/kB_1)}{\omega_0} < r < \frac{1}{|\delta + B_1|}, \quad (2.2)$$

where ω_0 is the solution in $(0, \pi/r)$ of the equation $\omega \cot(\omega r) = -p$. Hence when the above conditions are satisfied, the equilibrium solution x_2 is stable.

When $r|\delta + B_1| = 1$, the solution x_2 is unstable [6].

I.B. $B_1 < 0$ and $\delta + B_1 > 0$.

In this case, $Re\lambda < 0$ for all eigenvalues λ if and only if

$$\delta + B_1 > |kB_1| \text{ or } \left\{ \delta + B_1 \leq |kB_1| \text{ and } r < \frac{\arccos((\delta + B_1)/kB_1)}{\omega_0} \right\} \quad (2.3)$$

where ω_0 is defined as above.

Remarks. a) If $B_1 < 0$, $\delta + B_1 = 0$, the solution is stable if and only if $-kB_1r < \pi/2$ while, for this case, the point $kB_1r = -\pi/2$ is a Hopf bifurcation point.

b) Assume that we vary r and keep all the other parameters fixed. The conditions (2.2) or (2.3) for r are not as simple as they seem, because B_1 is itself a function of r , (being a function of k). Let us consider the function

$$h(r) = T^{-1}(-(\delta + B_1(r))r) - \arccos\left(\frac{\delta + B_1(r)}{k(r)B_1(r)}\right). \quad (2.4)$$

If for a certain r^* we have $h(r^*) = 0$ (that is the condition for the change of stability), in order to find whether a value r_1 in a neighborhood of r^* is in the stability zone or not, we have to know the sign of $h(r_1)$, hence we have to study the monotony properties of function h in a neighborhood of r^* . This will be done in the last section for an example.

II. $B_1 > 0$ that is equivalent to $\frac{\beta_0}{\delta}(k-1) < \frac{n}{n-1}$, and, in terms of r , equivalent to $r_n \leq r \leq r_{max}$.

In this case, we can only have $\delta + B_1 > 0$, and, by [1], $Re\lambda < 0$ for all eigenvalues λ if and only if $kB_1 < \delta + B_1$.

By using (2.1) we see the above inequality is equivalent to $\frac{\beta_0(k-1)}{\delta} > 1$ that is already satisfied, since x_2 exists is positive. It follows that if $B_1 > 0$ then x_2 is stable.

3. Hopf bifurcation points

By denoting $\lambda = \mu + i\omega$, and by equating the real, respectively the imaginary part of the characteristic equation (1.6), we obtain

$$\mu + \delta + B_1 = kB_1e^{-\mu r} \cos(\omega r), \quad (3.1)$$

$$\omega = -kB_1e^{-\mu r} \sin(\omega r).$$

It is useful to consider the case $\mu = 0$ in the above equations,

$$\delta + B_1 = kB_1 \cos(\omega r), \quad (3.2)$$

$$\omega = -kB_1 \sin(\omega r).$$

In the above stability discussion, in **I.**, the case

$$r = \frac{\arccos((\delta + B_1)/(kB_1))}{\omega_0} \quad (3.3)$$

occurs on the frontier of the stability domain. This relation, together with $\omega_0 \cot(\omega_0 r) = -(\delta + B_1)$ imply that $\omega_0 = \sqrt{(kB_1)^2 - (\delta + B_1)^2}$ and that the pair $\mu^* = 0$, $\omega^* = \omega_0$ represents a solution of (3.1).

Hence a point in the parameter space, where relation (3.3) is satisfied, might be a Hopf bifurcation point when one of the parameters is varied. The Hopf bifurcation may be either a non-degenerated or a degenerated one.

To be more precise, we consider the vector of parameters $(\beta_0, n, \delta, \gamma, r)$ and denote it by $\mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq 5}$.

We choose a point in the parameter space, $\mathbf{a}^* = (\tilde{a}_i^*)_{1 \leq i \leq 5}$, such that, for this choice of parameters, there are two pure imaginary eigenvalues $\tilde{\lambda}_{1,2}(\mathbf{a}^*) = \pm i\omega^*$, $\omega^* := \omega(\mathbf{a}^*) > 0$ and all other eigenvalues λ have strictly negative real parts (i.e. a point where condition (3.3) holds).

In the following we keep fixed all parameters excepting one, a_j , that we vary (j fixed, $1 \leq j \leq 5$). For further simplicity, we denote $a_j := \alpha$, such that $\tilde{\lambda}_{1,2}(\mathbf{a})$ becomes $\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha)$ and such that $Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha^*) = 0$.

If $\frac{\partial Re\tilde{\lambda}_i}{\partial \alpha}(\alpha^*) \neq 0$, $i = 1, 2$, then at α^* a Hopf bifurcation occurs and, in a neighborhood U^* of α^* , either to the left or to the right of α^* we have $Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha) < 0$, while $Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha) > 0$ at the opposite side of α^* . We assume that the neighborhood U^* is such that for all $\alpha \in U_j^*$ all other eigenvalues besides $\tilde{\lambda}_{1,2}$ have real parts less than a fixed negative value.

4. On the stability properties of the periodic solutions emerged by Hopf bifurcation

We consider a periodic solution occurred by Hopf bifurcation, as described in the previous section. In order to establish whether or not such a periodic solution is stable, we have to compute the normal form of the reduced to the center manifold (or to the unstable manifold) problem. In this section we present the algorithm for obtaining this normal form and the consequences on the stability of periodic solutions.

Since we study local bifurcations around x_2 , throughout this section we work with eq. (1.1) translated by x_2 , that is the new unknown function $z = x - x_2$ is considered.

4.1. The delay equation as an equation in a Banach space

We assume that we are in one of the situations, mentioned in Section 3, where a Hopf bifurcation occurs. In order to construct the center (or the unstable) manifold at the equilibrium point x_2 we need to write our equation as a differential equation in a Banach space. We use the method of Teresa Faria, from [2], as we did also in [4], [5]. We consider the space

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \psi : [-r, 0] \mapsto \mathbb{R}, \psi \text{ is continuous on } [-r, 0) \wedge \exists \lim_{s \rightarrow 0} \psi(s) \in \mathbb{R} \right\},$$

that is formed of functions $\psi = \varphi + \sigma d_0$, where $\varphi \in \mathcal{B}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ and $d_0 : [-r, 0] \mapsto \mathbb{R}$,

$$d_0(s) = \begin{cases} 0, & s \in [-r, 0), \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

The space \mathcal{B}_0 is normed by $\|\psi\| = |\varphi|_0 + |\sigma|$. The linearized equation (1.5) can be written as

$$\dot{z} = Lz_t, \quad (4.1)$$

$$L\varphi = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\varphi(\theta),$$

(the integral is a Stieljes one) with

$$\eta(s) = \begin{cases} -kB_1, & s = -r; \\ 0, & s \in (-r, 0); \\ -(B_1 + \delta), & s = 0. \end{cases}$$

Nonlinear equation (1.1) may be written as

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + f(z(t), z(t-r)), \quad (4.2)$$

where $f(\cdot, \cdot)$ comprises the nonlinear terms of the equation. Since $z(t)$ and $z(t-r)$ are functions of z_t , eq. (4.2) may be written as

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + \tilde{f}(z_t). \quad (4.3)$$

In [2], the linear operator $A : C^1([-r, 0], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_0$

$$A(\varphi) = \dot{\varphi} + d_0[L(\varphi) - \dot{\varphi}(0)] \quad (4.4)$$

is defined and it is proved that this is the infinitesimal generator of the semigroup of operators $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ given by $S(t)(\varphi) = z_t(\varphi)$, where $z(t, \varphi)$ is the solution of equation (4.1) with the initial condition $z_0 = \varphi$. Then the nonlinear equation may be written as an equation in \mathcal{B}_0 , that is

$$\frac{dz_t}{dt} = A(z_t) + d_0\tilde{f}(z_t). \quad (4.5)$$

4.2. Space of eigenfunctions corresponding to $\tilde{\lambda}_{1,2}$, the projector on this space

We return for the moment to the linear equation (1.5). The eigenfunctions corresponding to the two eigenvalues $\tilde{\lambda}_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ are given by $\varphi_{1,2}(s) = e^{\tilde{\lambda}_{1,2}s}$, $s \in [-r, 0]$. Since the eigenfunctions are complex functions, we need to use the complexification of the space \mathcal{B} , \mathcal{B}_0 that we denote by \mathcal{B}_C , \mathcal{B}_{0C} , respectively. We denote by \mathcal{M} the subspace of \mathcal{B}_C generated by $\varphi_{1,2}(\cdot)$.

In [2] a projector defined on \mathcal{M} is constructed. For its construction we need a bilinear form that is defined by using the transposed equation of the linearized equation. The transposed equation is

$$\dot{y}(s) = - \int_{-r}^0 y(s-\theta)d[\eta(\theta)],$$

hence

$$\dot{y}(s) = (B_1 + \delta)y(s) - kB_1y(s+r).$$

The characteristic equation for the adjoint problem is

$$\lambda = B_1 + \delta - kB_1e^{\lambda r},$$

that admits the solutions $\lambda_{1,2} = -\mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$. The corresponding eigenfunctions are $\psi_1(\zeta) = e^{(-\mu+i\omega)\zeta}$, $\psi_2(\zeta) = e^{(-\mu-i\omega)\zeta}$, $\zeta \in [0, r]$.

In order to construct the projector defined on \mathcal{B}_{0C} with values on \mathcal{M} , we define the bilinear form [3]

$$\begin{aligned} \langle \psi, \varphi \rangle &= \psi(0)\varphi(0) - \int_{-r}^0 \int_0^\theta \psi(\zeta - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\zeta) d\zeta = \\ &= \psi(0)\varphi(0) + kB_1 \int_{-r}^0 \psi(\zeta + r) \varphi(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

where $\psi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$.

We look for linear combinations of the vectors ψ_j , that we will denote Ψ_i , $i = 1, 2$, such that $\langle \Psi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$. For this we determine the 2×2 matrix E , with elements $e_{ij} = \langle \psi_i, \varphi_j \rangle$.

$$e_{11} = (\psi_1, \varphi_1) = \psi_1(0)\varphi_1(0) + kB_1 \int_{-r}^0 e^{(-\mu+i\omega)(\theta+r)} e^{(\mu+i\omega)\theta} d\theta = 0,$$

$$e_{12} = (\psi_1, \varphi_2) = \psi_1(0)\varphi_2(0) + kB_1 \int_{-r}^0 e^{(-\mu+i\omega)(\theta+r)} e^{(\mu-i\omega)\theta} d\theta = 1 + (\delta + B_1 + \mu - i\omega)r,$$

$$e_{21} = (\psi_2, \varphi_1) = \psi_2(0)\varphi_1(0) + kB_1 \int_{-r}^0 e^{(-\mu-i\omega)(\theta+r)} e^{(\mu+i\omega)\theta} d\theta = 1 + (\delta + B_1 + \mu + i\omega)r,$$

$$e_{22} = (\psi_2, \varphi_2) = \psi_2(0)\varphi_2(0) + kB_1 \int_{-r}^0 e^{(-\mu-i\omega)(\theta+r)} e^{(\mu-i\omega)\theta} d\theta = 0.$$

We have $\det E = e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} = -[(1 + (\delta + B_1 + \mu)r)^2 + \omega^2r^2]$. Since

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

we obtain

$$\Psi_1 = \frac{1}{\det E} [e_{22}\psi_1 - e_{12}\psi_2] = \frac{-e_{12}}{\det E} \psi_2, \quad \Psi_2 = \bar{\Psi}_1.$$

We can now write the projector defined on \mathcal{B}_{0C} and with values on \mathcal{M} . It is given, for $\psi = \varphi + d_0\sigma \in \mathcal{B}_{0C}$ by

$$\mathcal{P}(\psi) = (\langle \Psi_1, \varphi \rangle + \Psi_1(0)\sigma) \varphi_1 + (\langle \Psi_2, \varphi \rangle + \Psi_2(0)\sigma) \varphi_2. \tag{4.6}$$

If $\sigma = 0$ and, thus, $\psi = \varphi \in \mathcal{B}_C$, we have $\mathcal{P}(\varphi) = \langle \Psi_1, \varphi \rangle \varphi_1 + \langle \Psi_2, \varphi \rangle \varphi_2$.

Now, for the solution $z(\cdot, \varphi)$ of (4.5) we can write

$$z_t = \varphi_1 u_1(t) + \varphi_2 u_2(t) + \mathbf{v}(t),$$

with $u_1(t) = \langle \Psi_1, z_t \rangle$, $u_2(t) = \langle \Psi_2, z_t \rangle$, $\mathbf{v} = (I - \mathcal{P})z_t$.

We project now the equation (4.5) by \mathcal{P} , to obtain,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = B\mathbf{u} + \Psi(0)\tilde{f}(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \mathbf{v}), \tag{4.7}$$

where

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

Remark that u_1, u_2 are complex functions, but, since our initial problem is formulated in terms of real functions, we have $u_1 = \bar{u}_2$, and the two scalar equations comprised in (4.7) are

complex conjugated one to the other. Hence it suffices to study one of the them, let us say the equation for u_1 . We denote $u_1 = u$ and the equation to be studied in the following is

$$\frac{du}{dt} = (\mu + i\omega)u + \Psi_1(0)\tilde{f}(\varphi_1 u + \varphi_2 \bar{u} + \mathbf{v}), \quad (4.8)$$

where, as the above computations show,

$$\Psi_1(0) = \frac{1 + (\delta + B_1 + \mu - i\omega)r}{[1 + (\delta + B_1 + \mu)r]^2 + \omega^2 r^2}. \quad (4.9)$$

4.3. The equation restricted to the invariant (center or unstable) manifold

For those $\alpha \in U^*$ where $Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha) \geq 0$, since all other eigenvalues have negative real part, there is a local invariant manifold, the local unstable manifold, W_{loc}^u , for $Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha) > 0$, or the local center manifold, W_{loc}^c , for α^* ($Re\tilde{\lambda}_{1,2}(\alpha^*) = 0$).

The local invariant manifold is an at least C^1 invariant manifold, tangent to the space \mathcal{M} at the point $z = 0$ (that is $x = x_2$), and it is the graph of a function $w(\alpha)(\cdot)$ defined on a neighborhood of zero in \mathcal{M} and taking values in $(I - \mathcal{P})\mathcal{B}_c$. A point on the local invariant manifold has the form $u\varphi_1 + \bar{u}\varphi_2 + w(\alpha)(u\varphi_1 + \bar{u}\varphi_2)$. Since it is an invariant manifold, if the initial condition is taken on the manifold, then its image through the semigroup $\{\tilde{T}(t)\}_{t \geq 0}$, $\tilde{T}(t)(\varphi) = z_t(\varphi)$, is still on it ($\tilde{T}(t)(\varphi) = T(t)(\varphi) - x_2$, where $T(t)$ is defined at the end of Subsection 1.1). Hence

$$\tilde{T}(t)(\varphi) = u(t)\varphi_1 + \overline{u(t)}\varphi_2 + w(\alpha)(u(t)\varphi_1 + \overline{u(t)}\varphi_2), \quad (4.10)$$

with $u(\cdot)$, solution of the equation

$$\frac{du}{dt} = \tilde{\lambda}_1(\alpha)u + \Psi_1(0)\tilde{f}(\varphi_1 u + \varphi_2 \bar{u} + w(\alpha)(u\varphi_1 + \bar{u}\varphi_2)), \quad (4.11)$$

with the initial condition $u(0) = u_0$, where $\mathcal{P}(\varphi) = u_0\varphi_1 + \bar{u}_0\varphi_2$. The real and the imaginary parts of this complex equation, represent the two-dimensional restricted to the center manifold problem. We can study this problem with the tools of planar dynamical systems theory (see, e.g. [7]).

4.4. The normal form of the reduced equation

In order to find the normal form of equation (4.11) we must consider the series of powers of u, \bar{u} for $w(\alpha)$ and for $\tilde{f}(z_t)$. We set

$$\tilde{w}(\alpha)(u, \bar{u}) = \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(\alpha) u^j \bar{u}^k, \quad (4.12)$$

where $\tilde{w}(\alpha)(u, \bar{u}) := w(\alpha)(u(t)\varphi_1 + \overline{u(t)}\varphi_2)$, $w_{jk}(\alpha) \in \mathcal{B}$, $u : [0, \infty) \mapsto \mathbb{C}$.

$\tilde{f}(z_t)$ is, due to (4.10), a function of u, \bar{u} , and we develop it in a series of powers

$$\tilde{f}(z_t) = \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} f_{jk}(\alpha) u^j \bar{u}^k. \quad (4.13)$$

Equation (4.11) becomes

$$\frac{du}{dt} = \tilde{\lambda}_1(\alpha)u + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} g_{jk}(\alpha) u^j \bar{u}^k, \quad (4.14)$$

where $g_{jk}(\alpha) = \Psi_1(0)f_{jk}(\alpha)$. If the first Lyapunov coefficient at α^* , [7],

$$l_1(\alpha^*) = \frac{1}{2\omega^{*2}} \operatorname{Re}(ig_{20}(\alpha^*)g_{11}(\alpha^*) + \omega^*g_{21}(\alpha^*)) \tag{4.15}$$

is not equal to zero, at $\alpha = \alpha^*$ our equation presents a non-degenerated Hopf bifurcation.

We assume that the initial function, φ , is on the invariant manifold. We give the algorithm for computing the first Lyapunov coefficient. We are interested in the nonlinear part of our equation. We consider the function $\beta(x)x$, compute its derivatives of higher order than one at the point x_2 , and denote them B_n

$$B_n = \beta^{(n)}(x_2)x_2 + n\beta^{(n-1)}(x_2).$$

Let F be the function $F(z) = \frac{1}{2!}B_2z^2 + \frac{1}{3!}B_3z^3 + \frac{1}{4!}B_4z^4 + \dots$. The nonlinear part of the RHS of (4.2) is $f(z(t), z(t-r)) = -F(z(t)) + kF(z(t-r))$, or, in terms of z_t , the function \tilde{f} of (4.3) is $\tilde{f}(z_t) = -F(z_t(0)) + kF(z_t(-r))$.

The normal form of the restriction of the problem to the unstable manifold is [7]

$$\frac{d}{dt}u = (\beta(\alpha) + i)u + su|u|^2, \tag{4.16}$$

where $\beta(\alpha) = \mu(\alpha)/\omega(\alpha)$, $s = \operatorname{sign}(l_1(\alpha^*))$. For $\alpha = \alpha^*$, $\beta(\alpha^*) = 0$, and the normal form on the center manifold is obtained. The existence and stability properties of the cycle emerged by Hopf bifurcation are given by the signs of $\beta(\alpha)$ (for $\alpha \in U^*$) and $l_1(\alpha^*)$. We must compute $l_1(\alpha^*)$, given by (4.15).

In order to identify the coefficients $g_{jk}(\alpha^*)$ we must find the coefficients for the series of \tilde{f} . The following computations are done at $\alpha = \alpha^*$, but for simplicity, the parameter will not be written.

We have (by denoting $\varphi_1 = \varphi$)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z_t) &= -F([\tilde{T}(t)\varphi](0)) + kF([\tilde{T}(t)\varphi](-r)) = \\ &= -\frac{1}{2!}B_2[u\varphi(0) + \overline{u\varphi}(0) + \frac{1}{2}w_{20}(0)u^2 + w_{11}(0)u\overline{u} + \frac{1}{2}w_{02}(0)\overline{u}^2 + \dots]^2 - \\ &\quad -\frac{1}{3!}B_3[u\varphi(0) + \overline{u\varphi}(0) + \frac{1}{2}w_{20}(0)u^2 + w_{11}(0)u\overline{u} + \frac{1}{2}w_{02}(0)\overline{u}^2 + \dots]^3 - \dots + \\ &\quad +\frac{1}{2!}kB_2[u\varphi(-r) + \overline{u\varphi}(-r) + \frac{1}{2}w_{20}(-r)u^2 + w_{11}(-r)u\overline{u} + \frac{1}{2}w_{02}(-r)\overline{u}^2 + \dots]^2 + \\ &\quad +\frac{1}{3!}kB_3[u\varphi(-r) + \overline{u\varphi}(-r) + \frac{1}{2}w_{20}(-r)u^2 + w_{11}(-r)u\overline{u} + \frac{1}{2}w_{02}(-r)\overline{u}^2 + \dots]^3 + \dots = \\ &= \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} f_{jk} u^j \overline{u}^k. \end{aligned} \tag{4.17}$$

The second order terms are

$$-\frac{1}{2}B_2(u^2 + 2u\overline{u} + \overline{u}^2) + \frac{kB_2}{2}(u^2\varphi^2(-r) + 2u\overline{u} + \overline{u}^2\overline{\varphi}^2(-r)),$$

and the coefficients

$$\begin{aligned} f_{20} &= B_2(k\varphi^2(-r) - 1) = -B_2(1 - ke^{-2\omega^*ir}); \\ f_{11} &= B_2(k - 1); \end{aligned}$$

$$f_{02} = B_2(k\bar{\varphi}^2(-r) - 1) = -B_2(1 - ke^{2\omega^*ir})$$

follow. From here, we already find $g_{ij} = \Psi_1(0)f_{ij}$, $i + j = 2$, with $\Psi_1(0)$ given in (4.9).

In order to determine l_1 we still need to compute the coefficient g_{21} . From (4.17) we obtain

$$f_{21} = -\frac{1}{2}B_2[w_{11}(0) + \frac{1}{2}w_{20}(0) - ke^{-i\omega^*r}w_{11}(-r) - \frac{1}{2}ke^{i\omega^*r}w_{20}(-r)] - \frac{1}{2}B_3(1 - ke^{-i\omega^*r}), \quad (4.18)$$

hence we have to determine $w_{20}(0)$, $w_{20}(-r)$, $w_{11}(0)$, $w_{11}(-r)$.

The functions $w_{jk} \in \mathcal{B}_C$ are determined from [10], [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(s) u^j \bar{u}^k &= \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} g_{jk} u^j \bar{u}^k \varphi_1(s) + \\ &+ \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} \bar{g}_{jk} \bar{u}^j u^k \varphi_2(s) + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(s) u^j \bar{u}^k, \end{aligned}$$

and the integration constants are determined from

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(0) u^j \bar{u}^k + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} g_{jk} u^j \bar{u}^k \varphi_1(0) + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} \bar{g}_{jk} \bar{u}^j u^k \varphi_2(0) = \\ - \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} w_{jk}(-r) u^j \bar{u}^k + \sum_{j+k \geq 2} \frac{1}{j!k!} f_{jk} u^j \bar{u}^k. \end{aligned}$$

Hence, the function $w_{20}(\cdot)$ is solution of the differential equation,

$$w'_{20}(s) = 2\omega^* i w_{20}(s) + g_{20} \varphi(s) + \bar{g}_{02} \bar{\varphi}(s).$$

We integrate between $-r$ and 0 and obtain

$$w_{20}(0) - w_{20}(-r)e^{2\omega^*ir} = \frac{g_{20}i}{\omega^*}(1 - e^{\omega^*ir}) + \bar{g}_{02} \frac{i}{3\omega^*}(1 - e^{3\omega^*ir}).$$

We also have the relation

$$2\omega^* i w_{20}(0) + g_{20} + \bar{g}_{02} = -w_{20}(-r) + f_{20}.$$

From the two relations above, we get

$$\begin{aligned} w_{20}(0) &= c \left[e^{2\omega^*ir} f_{20} + g_{20} \left(\frac{i}{\omega^*} - \frac{i}{\omega^*} e^{i\omega^*r} - e^{2i\omega^*r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}_{02} \left(\frac{i}{3\omega^*} - \frac{i}{3\omega^*} e^{3i\omega^*r} - e^{2i\omega^*r} \right) \right], \\ w_{20}(-r) &= c \left[f_{20} + g_{20}(1 - 2e^{\omega^*ir}) - \frac{1}{3} \bar{g}_{02}(1 + 2e^{3\omega^*ir}) \right], \end{aligned}$$

where $c = [1 + 2\omega^* \sin(2\omega^*r) - 2i\omega^* \cos(2\omega^*r)] / (1 - 4\omega^* \sin(2\omega^*r) + 4\omega^{*2})$.

We now compute w_{11} . It is the solution of

$$\frac{d}{ds} w_{11}(s) = g_{11} e^{\omega^*is} + \bar{g}_{11} e^{-\omega^*is}.$$

By integrating between $-r$ and 0 , we obtain

$$w_{11}(0) = w_{11}(-r) - \frac{i}{\omega^*} g_{11}(1 - e^{-\omega^* ir}) + \frac{i}{\omega^*} \bar{g}_{11}(1 - e^{\omega^* ir}).$$

The second relation is here

$$g_{11} + \bar{g}_{11} = -w_{11}(-r) + f_{11} \quad \Leftrightarrow \quad w_{11}(-r) = -g_{11} - \bar{g}_{11} + f_{11}.$$

It follows that

$$w_{11}(0) = g_{11} + \bar{g}_{11} - f_{11} - \frac{i}{\omega^*} g_{11}(1 - e^{-\omega^* ir}) + \frac{i}{\omega^*} \bar{g}_{11}(1 - e^{\omega^* ir}).$$

Now we have all the elements for determining f_{21} by formula (4.18), and then we can compute

$$g_{21} = \Psi_1(0)f_{21}.$$

and after that, the first Lyapunov coefficient, that determines the stability properties of the periodic orbit emerged by Hopf bifurcation.

The above indicated computations, are easy to perform with a computing program (Maple e.g.), for a given Hopf bifurcation point, i.e. if all the parameters are known. If we try to make the computations with all parameters non-determined, we are lead to very complicated expressions that can not be handled even by the program Maple itself, and that can not be analyzed theoretically.

4.5. An example

In order to provide an example, we choose the following "strategy" for finding Hopf bifurcation points. We choose $n^*, \beta_0^*, \delta^*, k^*$, in a zone of parameters acceptable from biological point of view. With this values of the parameters we can compute B_1^* , (the value of B_1 at these parameters values), $p^* = \delta^* + B_1^*$, $q^* = k^* B_1^*$, and determine ω^* and r^* such that a Hopf bifurcation actually takes place. That is we set $\omega^* = \sqrt{(q^*)^2 - (p^*)^2}$, $r^* = \arccos(p^*/q^*)/\omega^*$. Once r^* determined, we can also compute γ^* .

As above, we choose one of the parameters a_j to be the variable one and check the condition that the curve $\lambda_1(a_j)$ actually crosses the imaginary axis in the complex plane, when a_j varies around a_j^* . This can be done by example by differentiating relations (3.1) with respect to a_j and by solving the obtained system of equations with respect to $\mu'(a_j^*), \omega'(a_j^*)$.

The example. We consider the following selection of parameters:

$$n^* = 12, \beta_0^* = 1.77, \delta^* = 0.05, k^* = 1.180746972 (\Leftrightarrow \gamma^* r^* = 0.527).$$

These parameters were chosen in the zone of biological interest, as can be seen in [8].

We find then $x_2 = 1.150859618$, $B_1^* = -2.524121872$, $p^* = \delta^* + B_1^* = -2.474121872$, $q^* = k^* B_1^* = -2.980349005$, $\omega^* = \sqrt{q^{*2} - p^{*2}} = 1.661686238$, $r^* = \arccos(p^*/q^*)/\omega^* = .3559207407$, $\gamma^* = 1.48067$.

We choose to vary r and, by differentiating the relations (3.1) with respect to r find that $\mu'(r^*) = 25.66$.

The first Lyapunov coefficient is easily computed since all the parameters are known, by following the algorithm in the previous subsection. We get

$$l_1(r^*) = -87.387.$$

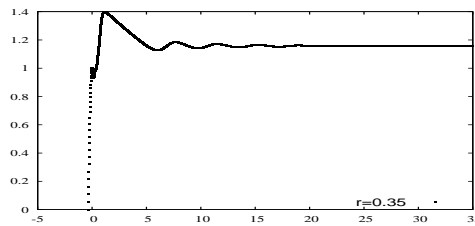
Thus the normal form of the restriction of the equation to the unstable and to the center manifold is (by (4.16))

$$\frac{d}{dt}u = (\beta(r) + i)u - u|u|^2,$$

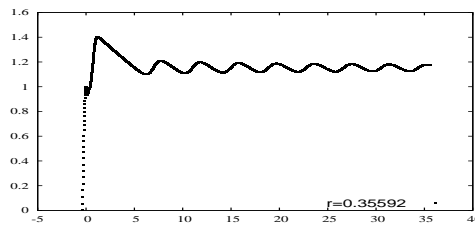
with $\beta(r) = \frac{\mu(r)}{\omega(r)}$ and $\beta(r^*) = 0$. The normal form in polar coordinates is

$$\begin{cases} \dot{\rho} = (\beta(r) - \rho^2)\rho, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

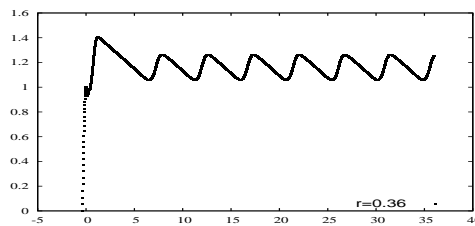
We are interested in the behavior of the solutions on a small neighborhood of r^* . Since $\mu'(r^*) > 0$, on such a neighborhood $r < r^* \Rightarrow \mu(r) < 0 \Rightarrow \beta(r) < 0$, and only the equilibrium solution $z = 0 \Leftrightarrow x = x_2$ exists, and it is stable, while $r > r^* \Rightarrow \mu(r) > 0 \Rightarrow \beta(r) > 0$. Thus a stable periodic solution exists for $r > r^*$.



a) $r=0.35$.



b) $r=0.35592$.



c) $r=0.36$.

Fig.1) Trajectories obtained by numerical integration of eq. (1.1) for initial condition $\varphi(s) = \cos(\frac{\pi}{2r}s)$ for r around the Hopf bifurcation value r^* .

These assertions seem in contradiction with the condition of stability (2.2). Actually there is no contradiction. The function h defined in (2.4) satisfies, for the chosen parameters values, $h(r^*) = 0$ and $\frac{dh}{dr}(r^*) = -20.236$. Thus, $r < r^* \Rightarrow h(r) > 0$ and the equilibrium point x_2 is stable, while for $r > r^*$, $h(r) < 0$ and the equilibrium point is unstable.

The numerical integration confirms our theoretical analysis, as the figures above show.

REFERENCES

1. N. D. Hayes, Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, J. London Math. Soc., 1950, 226-232.
2. T. Faria, Normal forms for RFDE in finite dimensional spaces -section 8.3 of J. Hale, L.T. Magalhães, W. Oliva, Dynamics in infinite dimensions, Applied Mathematical Sciences, 47, Springer, 2002.
3. J. Hale, S. M. Verduyn Lunel, Introduction to functional differential equation, Springer, Berlin, 2003.
4. A. V. Ion, On the Bautin bifurcation for systems of delay differential equations, Acta Univ. Apulensis, 8(2004), 235-246 (Proc. of ICTAMI 2004, Thessaloniki, Greece);
5. A. V. Ion, An example of Bautin-type bifurcation in a delay differential equation, J. Math. Anal. Appl., 329(2007), 777-789.
6. A. V. Ion, New results concerning the stability of equilibria of a delay differential equation modeling leukemia, submitted to publication.
7. Y. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, Springer, New York, 1995.
8. L. Pujo-Menjouet, M. C. Mackey, Contribution to the study of periodic chronic myelogenous leukemia, C. R. Biologies, 327(2004), 235-244.
9. L. Pujo-Menjouet, S. Bernard, M. C. Mackey, Long period oscillations in a G_0 model of hematopoietic stem cells, SIAM J. Applied Dynamical Systems, 2, 4(2005), 312-332.
10. G. Mircea, M. Neamțu, D. Opreș, Dynamical systems from economy, mechanics, biology, described by delay equations, Mirton, Timișoara, 2003 (in Romanian).

Accepted: 17.08.2009

Polynomials based methods for linear nonconstant coefficients eigenvalue problems

© Florica Ioana Dragomirescu¹, Adelina Georgescu²

Annotation. A method based on generalized Jacobi polynomials is proposed to solve the eigenvalue problem governing the Lyapunov stability of the mechanical equilibria of certain fluids occurring in complex circumstances. Two concrete natural convection problems of great interest from the applications point of view are numerically investigated. Fairly accurate approximations of the lower part of the spectrum are given in comparison with other numerical evaluations existing in the literature.

Acknowledgement. This work was supported by the Grant 11/5.06.2009 within the framework of the Russian Foundation for Basic Research - Romanian Academy collaboration.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 65L10; 65L15; 65L60;76E06.

Key words: Lyapunov stability; high order two-point boundary value problem; spectral methods.

1. Introduction

Spectral methods have been applied with great success to various physical problems from science and engineering for which the evolution of perturbations is governed by linear or nonlinear eigenvalue problems [1], [5], [6],[11], [13]. The main reason of their extensive use is the high accuracy of these methods and the fact that the expansion functions usually have a basic property: they are easy to evaluate either Fourier series based on trigonometric functions or polynomials expansions are considered.

Usually the linearization process in a hydrodynamic stability problem increases the conditions number of the problem making the solution more sensitive to small perturbations. The resulting eigenvalue problem depends on the spectrum of the operator obtained by the linearization of the mapping that define the initial and boundary conditions eigenvalue problem.

The use of classical Jacobi polynomials as trial functions in weighted Galerkin-type methods is motivated by the fact that spectral approximations of the eigenfunctions in an eigenvalue problems is usually considered as a finite expansion of eigenfunctions of a singular Sturm-Liouville problem and Jacobi polynomials are in fact eigenfunctions of such a problem [2]. For problems with singular or degenerated coefficients or some problems on infinite intervals the Jacobi polynomials are of great interest [8], [9].

A dual-Petrov-Galerkin method based on Jacobi polynomials was introduced in [10] for third and higher odd-order differential equations. It was proven that their use simplify the numerical analysis of the spectral approximations. The Chebyshev and Legendre polynomials (regained as particular cases of Jacobi polynomials) have been widely used in the literature with good results in [4], [6],[12].

The main objective of the paper is to point out the major dependence of the approximations properties of spectral methods on the choice of the basis functions. General Jacobi polynomials based spectral methods for differential equations were not widely used in mathematical physics problems. In [2] Jacobi-Galerkin methods for fourth - order equations in two dimensions are

¹University "Politehnica" of Timisoara, Department of Mathematics, P-ta Victoriei, No.2, 300006, Timisoara, Romania, ioana.dragomirescu@mat.upt.ro.

²Academy of Romanian Scientists, Splaiul Independentei, No. 54, 050094 Bucharest, Romania, adelinageorgescu@yahoo.com.

considered proving that for a suitable selection of the parameters α, β the resulting systems of equations to be solved are diagonals, simplifying the numerical procedure.

As examples of applications, we considered two particular physical problems governed by high-order differential equations with variable coefficients. The eigenvalue problem governing the stability of the fluid motion in both cases has a general formulation

$$\begin{cases} A\mathbf{U} = Ra \cdot B\mathbf{U}, \text{ in } \Omega \\ C\mathbf{U} = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

with A, B nonconstant elements matrix high order differential operators and C a linear differential operator defined on the boundary $\partial\Omega$ of the domain of definition Ω by

$$C(\mathbf{U}, D\mathbf{U}) = 0. \tag{1.2}$$

This paper is organized as follows. In this section we introduce some generalized Jacobi polynomials [2] and motivate their use for the approximation of the orthogonal projection on some Hilbert space for our type of problems. The second section is devoted to the analytical and numerical applications of the proposed method to the particular physical problems. Some final remarks are given in the conclusion section of the paper.

Let us introduce the differential operators A, B from (1.1)-(1.2). In both cases, the general formulation of our problems leads to the two-point boundary value problem

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)^2 W = f(z)\Theta, \\ (D^2 - a^2)\Theta = -a^2 Rag(z)W, \end{cases} \tag{1.3}$$

so $A = \begin{pmatrix} (D^2 - a^2 I)^2 & f(z) \\ O & (D^2 - a^2 I) \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} O & O \\ -a^2 g(z) & O \end{pmatrix}$. The boundary conditions defining the operator C have the form

$$W = DW = \Theta = 0 \text{ at } z = 0, 1. \tag{1.4}$$

Here f, g are two indefinitely derivable functions characterizing the basic flow, W, Θ the amplitudes of the velocity and the temperature perturbation fields, (W, Θ) representing the corresponding eigenvector for the eigenvalue Ra .

A suitable approach imply a transformation of the physical domain onto the standard interval of definition of Jacobi polynomials, i.e. $x = 2z - 1$, such that the boundary conditions are written at -1 and 1

$$W = DW = \Theta = 0 \text{ at } x = -1, 1. \tag{1.5}$$

The weighted residual method proposed here imply a spectral expansion of each component of the eigenvector using combination of generalized Jacobi polynomials functions that satisfy the boundary conditions (1.4).

Let us recall that the Jacobi polynomials $P_n^{\alpha, \beta}(x)$, $n > 0$ are defined by the Rodrigues formula [9]

$$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} D^n [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \tag{1.6}$$

with $D = \frac{d}{dx}$ and α, β two complex parameters.

The classical Jacobi polynomials associated with the real parameters $\alpha, \beta > -1$ are a sequence of orthogonal polynomials, i.e.

$$\int_{-1}^1 P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{\alpha, \beta}(x) dx = \gamma_n^{\alpha, \beta} \delta_{n, m} \tag{1.7}$$

with $\omega^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ the Jacobi weight function, $\delta_{n,m}$ the Kronecker symbol and

$$\gamma_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^\lambda \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda)}, \quad \lambda = \alpha + \beta + 1.$$

Jacobi polynomials can also be defined using (1.6) for $\alpha, \beta < -1$. However, the main property used in numerical applications, the orthogonality in $L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2$ for all α, β of these polynomials it is no longer valid.

Following [11] to account for the homogeneous boundary conditions, let us define the space P_N of all polynomials of degree less or equal to N , $N = 1, 2, \dots$. We are interested in the construction of an approximation space of the form $\mathcal{M} = \{v \in P_N | v = Dv = 0 \text{ at } x = \pm 1\}$. Let us introduce the functions $\varphi_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \dots$, [9]

$$\varphi(x) = (1-x^2)^2 \cdot P_k^{\alpha,\beta}(x), \quad k = 1, \dots, N$$

which fulfills the boundary conditions (1.4). Using the properties of the Jacobi polynomials it is easy to verify that the functions $\varphi_k(x)$, $0 < k < N-4$, are linearly independent and the dimension of the corresponding generated space $\mathcal{N} = \text{span}\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_{N-4}(x)\}$ is equal to $N-3$. In fact, these function can be viewed as generalized Jacobi polynomials [2] since we can write

$$\varphi(x) = (1-x)^2(1+x)^2 P_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha',\beta'}(x).$$

The above expression point out that a certain type of indexes for generalized Jacobi polynomials must be used. In fact, in [12] it was proven that when developing and analyzing Chebyshev spectral methods for boundary value problems the generalized Jacobi polynomials with indexes $(-1/2-k, -1/2-l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$ are the most convenient choice.

Let us introduce the expansion series $W = \sum_{k=0}^{N-4} W_k \varphi_k(x)$, $\Theta = \sum_{k=0}^{N-4} \Theta_k \varphi_k(x)$, with $W_k = (W, \varphi_k(x))$ and $\Theta_k = (\Theta, \varphi_k(x))$ and the scalar product (\cdot, \cdot) taken with respect to the Hilbert space $L_{\omega^{\alpha,\beta}}^2$.

Replacing the expansion functions in the system (1.3) and imposing the condition that the equations in (1.3) be orthogonal on $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, N-4}$ leads to an algebraic system in the unknown coefficients W_k, Θ_k . Not all these coefficients vanish so the condition that the determinant of the algebraic system be equal to zero leads to the secular equation which gives us the critical values of the Rayleigh number.

The formulas for the Jacobi coefficients of all the derivatives of the functions occurring in (1.3) can be found in [2].

2. Particular physical convection problems

We considered two concrete physical cases: one concerning a convection problem for a variable gravity field [6] and the other one for a convection problem with an internal heat source [4].

2.1. A convection problem with variable gravity field

The convection problem investigated in this section arises in a horizontal layer of fluid heated from below for a variable gravity field. The gravity field varying across the layer can be considered linear or not [5], [6]. Here our investigation concerns only a linearly decreasing gravity field orthogonal on the fluid layer and assumed to depend on the vertical coordinate z only [13]. The linear stability against normal mode perturbations is governed by a two-point problem

for ordinary differential equations of the form (1.3) with $f(z) = 1 - \varepsilon z$ and $g(z) = 1$, with ε the scale parameter for the variable gravity field. The analytical and numerical investigation of the problem was also performed in [3], using a shifted Legendre polynomials based method for the case of linear stability of the mechanical equilibrium of the fluid layer. In this paper we apply the above described method for various cases of the parameters defining the Jacobi polynomials. The chosen basis of expansion functions leads to sparse matrices, with banded submatrices whose size are equal to the number of generalized Jacobi polynomials used in the expansions.

Numerical evaluations of the Rayleigh number for various values of the wavenumber and various linear decreasing gravity fields are presented in Table 1 in comparison with previous results obtained also by us for either trigonometric expansion functions or shifted Legendre polynomials. The following physical conclusion is pointed out: the stability domain increases as the gravity field is linearly decreasing across the layer.

ε	a^2	$Ra_{\alpha,\beta=-1/2}$	$Ra_{\alpha,\beta=0}$	$Ra_{\alpha,\beta=1/2}$	$Ra_{trig}[6]$	$Ra_{SLP}[6]$
0	9.711	1730.0	1748.5	1743.9	1715.079356	1749.975727
0.01	9.711	1738.8	1757.2	1752.8	1723.697848	1758.769253
0.2	9.711	1922.2	1942.3	1937.5	1905.643719	1944.243122
0.2	12.0	1951.3	1969.6	1965.1	1937.927940	1977.079049
0.2	14.5	2037.1	2053.9	2049.9	2026.289430	3475.507241
1	10.0	3434.5	3470.8	3461.8	3431.318766	3475.507241

Table 1. Numerical evaluations of the Rayleigh number for various values of the parameters ε and a and various parameters α, β .

It is clear that for the same small value of the spectral parameter, $N = 3$, the numerical results obtained here are similar, but not the best. However, we remarked that the necessary computational time is significantly reduced in this case.

In Table 2 the numerical evaluations of the first and second eigenvalue, respectively, are presented for increasing values of the spectral parameter N . The results are obtained for the classical Rayleigh-Bénard convection and they show a quite good agreement with previous existing values for the critical Rayleigh number.

N	Ra_1	Ra_2
2	1790.0	27286
5	1757.2	25801
10	1729.7	25443
12	1726.6	25326
14	1724.6	25306
15	1724.5	25272

Table 2. Numerical evaluations of the first and the second eigenvalue for $\alpha = \beta = 0$, $a^2 = 9.711$, $\varepsilon = 0$ for various values of the spectral parameter N .

The decreasing of both eigenvalues to well known numerical values with an increasing N marks a numerical convergence of the algorithm (Fig. 1 a), b)).

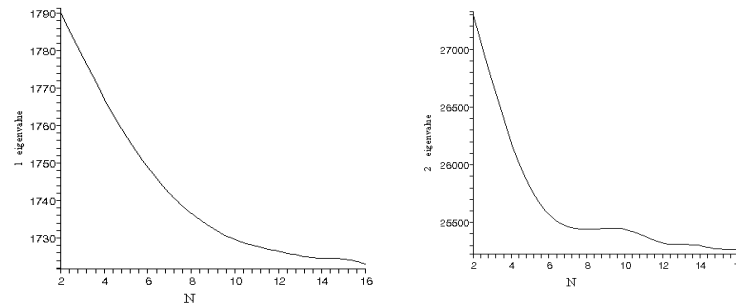


Fig. 1. The decreasing values of the first and the second eigenvalue Ra for an increasing spectral parameter N .

2.2. A convection problem with an internal heat source

The motion in the atmosphere or mantle convection in the Earth are two among phenomena of natural convection induced by internal heat sources. Natural convection occurring in industrial devices by internal heating [14] is another example for which an investigation of the effect of internal heat generation on fluids flows is needed. All these motions bifurcate from the conduction state as a result of its loss of stability. In spite of their importance, due to the occurrence of variable coefficients in the nonlinear partial differential equations governing the evolution of perturbations around the basic equilibrium, few systematic studies were performed. Most of the investigations only consider the much simpler case of uniform heat generation. In [15] experimental investigations were carried out pointing out that a dilation of convection cells occurs with an increasing rate of internal heat generation. The physical model of natural convection in the presence of an uniform internal heat source, investigated in this paper, concerning a horizontal layer of viscous incompressible fluid with constant viscosity and thermal conductivity coefficients ν and k , was also treated in [16]. Veltchiev [16] focussed on the vertical distribution of the total heat fluxes and their individual components for small and moderate supercritical Rayleigh number. An analytical investigation of the eigenvalue problem deduced by us in [4] was performed in [7]. Here we are concerned with the approximative numerical evaluations of the critical Rayleigh number at which the instability sets in. These results obtained for various types of polynomial approximations when generalized Jacobi polynomials are considered, are presented in comparison with the ones obtained by using other type of polynomials (Table 3).

The associated eigenvalue problem in a horizontal fluid layer bounded by two rigid walls, governing the stability of the basic motion against normal mode perturbations, deduced by us in [4], has the form from (1.3) with $f(z) = 1$ and $g(z) = 1 - N_{hc}z$. The eigenvalue is the Rayleigh number R and N_{hc} is a dimensionless parameter characterizing the heating (cooling) rate of the layer. Although it looks like a simple switch in the expression of the unknown functions f and g this new model support most of the times a different approach from the first benchmark model [7].

N_{hc}	a^2	$Ra_{\alpha,\beta=-1/2}$	$Ra_{\alpha,\beta=0}$	$Ra_{hyp}[7]$	$Ra_{SLP}[5]$
0	9.711	1730.2	1780.9	1708.54	1715.079324
1	9.711	1727.04	1745.3	1651.04	1711.742588
2	9.711	1717.5	1735.9	1609.12	1701.891.001
1	10.0	1727.1	1745.1	1651.1	1712.257687
4	10.0	1680.6	1696.4	1560.8	1664.341789
4	12.0	1699.4	1699.7	1739.2	1685.422373
10	9.0	1503.2	1524.6	1366.02	1482.527042
11	9.0	1468.0	1489.4	1366.05	1446.915467
12	9.0	1432.7	1454.2	1354.7	1411.401914

Table 3. Numerical evaluations of the Rayleigh number for various values of the parameters N_{hc} representing the heating (cooling rate) and a and various types of polynomials.

3. Conclusions

A family of generalized Jacobi polynomials with indexes (α, β) of the form $(-1/2 - k, -1/2 - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ is proposed in order to solve a class of eigenvalue problems governing the linear stability of the mechanical equilibria of certain types of fluids motions. For boundary conditions corresponding to rigid boundary surfaces case, Fourier series based on the proposed generalized Jacobi polynomials basis led to a good numerical algorithm. In general, the method can be successfully used for spectral approximations of differential equations with suitable boundary conditions which are automatically satisfied by the expansion functions. Orthogonal families of generalized Jacobi polynomials can be constructed starting from the proposed one with a large applicability to solve partial or ordinary differential equations with constant or varying coefficients.

In spite of the existence of many theoretical bases, the complexity in reducing the computation of the critical Rayleigh number using spectral methods comes from the necessity that these functions satisfy all less simpler boundary conditions.

REFERENCES

1. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A., Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics, Springer, 2007.
2. Doha, E.H., Bhrawy, A.H., Efficient spectral-Galerkin algorithm for direct solution of fourth-order differential equations using Jacobi polynomials, Appl. Num. Math., 58(2008), 1224-1244.
3. Dragomirescu, I., A SLP-based method for a convection problem for a variable gravity field, Proceedings of Aplimat 2007, Bratislava, 149-154.
4. Dragomirescu, F.I., Georgescu, A., Stability bounds in a problem of convection with uniform internal heat source, Proc. of ICNPAA 2006, Seenith Sivasundaram (ed.), Cambridge Scientific Publishers Ltd, 2007, 163-170.
5. Dragomirescu, F.I., Shifted polynomials in a convection problem, Appl.Math&Inf. Sci. Journal, 2, 2 (2008), 163-172.

6. Gheorghiu, C. I., Dragomirescu, I. F., Spectral methods in linear stability. Applications to thermal convection with variable gravity field, *Applied Numerical Mathematics*, 59(2009), 1290-1302.
7. Dragomirescu, F.I. , Georgescu, A., On the stability bounds in a problem of convection with uniform internal heat source, submitted to *Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti*, Messina, Italy.
8. Guo, B., Shen, J., Wang, L.L., Optimal spectral-Galerkin methods using generalized Jacobi polynomials, *J. Sci. Comput.*, 27 (2006), 305-322.
9. Guo, B.Y., Shen, J., Wang, L.L., Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications, *Applied Numerical Mathematics*, doi:10.1016/j.apnum.2008.04.003.
10. Shen, J., A new dual dual-Petrov-Galerkin for third and higher odd-order equations: applications to the KDV equation, *SIAM J., Numer. Anal.* 41(2003), 1595-1619.
11. Shen, J., Wang, L. L., Fourierization of the Legendre-Galerkin method and a new space-time spectral method, *Applied Numerical Mathematics*, 57 (2007), 710-720.
12. Shen, J., Wang, L. L., Legendre and Chebyshev dual-Petrov-Galerkin methods for hyperbolic equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 (37-40)(2007), 3785-3797.
13. Straughan, B., *The energy method, stability, and nonlinear convection*, Springer, Berlin, 2003.
14. Tasaka, Y., Takeda, Y., Effects of heat source distribution on natural convection induced by internal heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48, 2005, 1164-1174.
15. Tritton, D. J., Zarraga, M. N., Convection in horizontal layers with internal heat generation, *J. Fluid. Mechanics*, 30 (1967), 21-31.
16. Vel'tishchev, N. F., Convection in a horizontal fluid layer with a uniform heat source, *Fluid Dynamics*, 39, 2 (2004), 189-197.

Accepted: 17.08.2009

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

О системах наблюдения

© П. А. Балахнин¹, А. В. Зубов², Н. В. Зубов³

Аннотация. Для линейных стационарных систем наблюдения решена задача определения минимального числа выходов, при которых рассматриваемую систему можно сделать полностью наблюдаемой. Задачи подобного рода часто возникают при создании систем наблюдения.

Ключевые слова: вектор наблюдения, ранг матрицы, матрица, многочлен, столбец, собственное число.

Рассмотрим линейную стационарную систему наблюдения

$$\dot{X} = AX, \quad Y = CX, \quad (1.1)$$

где C - постоянная матрица размера $r \times n$, $Y = (y_1, \dots, y_r)^T$ - вектор наблюдений (выходы системы).

Поставим задачу поиска минимального числа p выходов, при которых открытая система $\dot{X} = AX$ может быть сделана наблюдаемой путем выбора соответствующей матрицы C размера $p \times n$ полного ранга, т. е. задачу структурной минимизации системы наблюдения.

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем характеристикой наблюдаемости системы (1.1) минимальное число p выходов, при которых открытая система $\dot{X} = AX$ может быть сделана наблюдаемой путем выбора соответствующей матрицы C размера $p \times n$ полного ранга.

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 1.1. Характеристика наблюдаемости матрицы A равна p , где $p = \max_{i=\overline{1, k}} p_i$, а p_i - число линейно независимых собственных векторов соответствующих различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, k}$) матрицы A , т. е. всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов C_1, \dots, C_p , являющихся строками матрицы C так, что система (1.1) будет наблюдаемой.

Доказательство теоремы целиком опирается на тот факт, что если величина p для матрицы A , является максимальным числом линейно независимых собственных векторов соответствующих различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, k}$) этой матрицы, то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов C_1, \dots, C_p , являющихся столбцами матрицы C так, что ранг матрицы $V^T = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T]$ был равен n . Если же ранг матрицы C меньше p , то система (1.1) не является наблюдаемой.

¹Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

²Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

³Профессор факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

С л е д с т в и е 1.1. *Если характеристический многочлен матрицы A совпадает с его минимальным многочленом, то система (1.1) может быть сделана наблюдаемой с помощью скалярной системы наблюдения.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов А. В., Дикусар В. В., Зубов Н. В. Структурная минимизация систем управления // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Т. 31(2). М.: Изд-во ЛКИ, 2007. С. 34-43.
2. Зубов А. В., Зубов Н. В. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. Уч. пос. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2010, - 102 с.
3. Блистанова Д. Л., Зубов И. В., Зубов Н. В., Северцев Н. А. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа. Уч. пос. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002, 119 с.
4. Мутлу О. В. Основы управления движением. (Исследование равномерной устойчивости по Ляпунову) Уч. пос. СПб., 2007. 92 с.
5. Зубов А. В. Стабилизация и управление в динамических системах. Уч. пос. СПб.: СПбГУ, 2007, 132 с.
6. Зубов А. В., Алидрисси М. А. Расчет и стабилизация программных траекторий механических систем. Уч. пос. СПб.: СПбГУ, 2008, 68 с.

Дата поступления 27.08.2009

About systems of observation

© P. A. Balachnin⁴, A. V. Zubov⁵, N. V. Zubov⁶

Abstract. For linear stationary systems of observation is resolved the task of definition minimum number of exits, at which examine system one can is make completely is observed. The tasks like sort often is spring by creation of systems of observation.

Key Words: vector of observation, rank of matrix, matrix, polynomial, pillar, own number.

REFERENCES

1. Zubov A. V., Dicusar V. V., Zubov N. V. The structure minimization of system control. // Works ISA RAN. Dynamics of no family systems. T. (31)2. M.: PLKI, 2007. P. 34-43.
2. Zubov A. V., Zubov N. V. The theory of stability and application by tasks number analysis. The school book. SPb.: Published NII of Chemistry SPbGU, 2002, 119 p.
3. Blistanova L. D., Zubov I. V., Pejd N. V., Severchev N. A. Constructive methods of theory stabilities and they application for tasks number analysis. The school book. SPb.: Published NII of Chemistry SPbGU, 2002, 119 p.
4. Mutlu O. V. The basis of control the motion (Investigation regular stabity on Lapunov) The shool book. SPb., 2007. 92 p.
5. Zubov A. V. Stabilization and control in dynamical systems. The school book. SPb.: SPbGU, 2007, 132 p.
6. Zubov A. V., Alidrissy M. A. The calculation and stabilization of program trajectory of mechanical system. The school book. SPb.: SPbGU, 2008, 68 p.

⁴Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁵Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁶Professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

УДК 517.9

Задача об устойчивости

© С. А. Дутов¹, А. В. Зубов², Н. В. Зубов³

Аннотация. В настоящей работе выводятся условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями и даются точные оценки расстояния интегральной кривой до положения равновесия, а также излагается ряд применений полученных результатов.

Ключевые слова: функция, множество, интегральная кривая, порядок, неравенство, устойчивость, пространство.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Вещественную однозначную непрерывную функцию $X(x_1, \dots, x_n)$, заданную в E_n , будем называть о д н о р о д н о й п о р я д к а μ и обозначать $X^{(\mu)}$, $\mu = p/q$, где p и q - натуральные числа, q нечетное, если для любой вещественной постоянной c имеет место равенство $X(cx_1, \dots, cx_n) = c^\mu X(x_1, \dots, x_n)$; при этом величину c^μ будем считать положительной при p четном, а при p нечетном - вещественной, имеющей знак c .*

О п р е д е л е н и е 1.3. *Вещественную однозначную непрерывную функцию $V(x_1, \dots, x_n)$, заданную в E_n , будем называть п о л о ж и т е л ь н о - о д н о р о д н о й п о р я д к а $m > 0$ и обозначать $V^{[m]}$, если для любой вещественной величины c имеет место равенство $V(cx_1, \dots, cx_n) = |c|^m V(x_1, \dots, x_n)$; при этом величину $|c|^m$ считаем положительной.*

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.1)$$

Далее через

$$x = x(t, x^{(0)}) \quad (1.2)$$

будем обозначать интегральную кривую системы (1.1) такую, что $x(0, x^{(0)}) = x^{(0)}$, где x - вещественный n -мерный вектор (x_1, \dots, x_n) . Ясно, что вместе с интегральной кривой (1.2) система (1.1) имеет семейство интегральных кривых, зависящее от одной произвольной вещественной постоянной c , представимое в форме

$$x = cx(c^{\mu-1}t, x^{(0)}) = x(t, cx^{(0)}).$$

Т е о р е м а 1.2. *1) При p четном нулевое решение системы (1.1) не может быть асимптотически устойчивым.*

2) Если p нечетно и $\mu \neq 1$, то нулевое решение системы (1.1) может быть асимптотически устойчивым лишь при вещественных возмущениях.

¹Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

²Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru.

³Профессор факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

3) Если $\mu = 1$, то нулевое решение системы (1.1) может быть асимптотически устойчивым при любых комплексных возмущениях.

При помощи результатов, содержащихся в работе [1], можно показать, что интегральные кривые системы (1.1) удовлетворяют неравенству

$$|x(t, x^{(0)})| < At^{-\alpha} \quad (1.3)$$

при $|x^{(0)}| = 1$, где A и α - положительные постоянные, если только нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво и $X_s^\mu \in C^{(\nu)}$, т. е. функции $X_s^{(\mu)}$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам в E_n до порядка $\nu \geq 1$ включительно.

Таким образом, в дальнейшем неравенство (1.3) при $X_s^{(\mu)} \in C^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$ следует считать эквивалентным асимптотической устойчивости.

Т е о р е м а 1.3. Если интегральные кривые системы (1.1) удовлетворяют неравенству (1.3), то существуют постоянная $m > \mu - 1$ и две функции $W^{[m]}$ и $V^{[m+\mu-1]}$, обладающие следующими свойствами:

- 1) функции $V^{[m-\mu+1]}$ и $-W^{[\mu]}$ определено-отрицательные;
- 2) функция $V^{[m-\mu+1]}(x(t, x^{(0)}))$ непрерывно дифференцируема по t и имеет место равенство

$$\frac{dV^{[m-\mu+1]}}{dt} = W^{[m]}.$$

Если, кроме того, $X_s^{(\mu)} \in C^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$, то функцию $W^{[m]}$ можно выбрать так, что функция $V^{[m-\mu+1]} \in C^{(\nu)}$ является единственным решением системы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i^\mu = W^{[m]}; \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = (m - \mu + 1)V, \quad (1.4)$$

определенным условием $V(0, \dots, 0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб.: Изд-во Лань, 2009, 400 с.
2. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2008. 336 с.
3. Зубов Н. В., Зубова А. Ф. Безопасность функционирования технических систем. Уч. пос. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009, 343 с.
4. Стрекопытова М. В. Исследование равновесных движений. СПб.: СПбГУ, 2007. 95 с.
5. Зубов А. В., Зубов Н. В. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.

Дата поступления 27.08.2009

The task about stability

© S. A. Dutov⁴, A. V. Zubov⁵, N. V. Zubov⁶

Abstract. In real work is lead out solutions of asymptotical stability zero decision of system ordinary differential equations with one family right parts and is give exact evaluations distance integer curve to situation equal weight, and so is expound row applications giving results.

Key Words: function, a number of, integer curve, order, inequality, stability, space.

REFERENCES

1. Zubov V. I. The lecture on theory control. SPb.: Published "Lan", 2009, 400 p.
2. Zubov A. V., Zubov N. V., Laptinskiy V. N. Dynamics of control systems. SPb.: SPbGU, 2008. 336 p.
3. Zubov N. V., Zubova A. F. The safety of function mechanical systems. The school book. SPb.: Published SPbGU, 2009, 343 p.
4. Strecopitova M. V. The investigation of equal weight motions. SPb.: SPbGU, 2007. 95 p.
5. Zubov A. V., Zubov N. V. Dynamical safety of control systems. SPb.: Published NII Chemistry SPbGU, 2009. 172 p.

⁴Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU6 Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg

⁵Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU6 Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg

⁶Professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU6 Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg

УДК 517.9

Структурная минимизация

© А. В. Зубов¹, Н. В. Зубов², И. С. Стрекопытов³

Аннотация. Для линейных стационарных систем наблюдения решена задача определения минимального числа выходов, при которых рассматриваемую систему можно сделать полностью управляемой. Задачи подобного рода часто возникают при синтезе систем управления.

Ключевые слова: замкнутая система, ранг матрицы, матрица, вектор-функция, многочлен, собственное число

Поставим задачу поиска минимального числа p управляющих воздействий, при которых открытая система

$$\dot{X} = AX + F(t) \quad (1.1)$$

может быть сделана полностью управляемой путем выбора соответствующей матрицы $B = \{B_1, \dots, B_p\}$ полного ранга, т. е. задачу минимизации структуры системы управления, при которой замкнутая система

$$\dot{X} = AX + BU + F(t), \quad (1.2)$$

будет полностью управляемой. Здесь A и $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ - постоянные матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times p)$; $U = (u_1, \dots, u_p)^T$ - вектор управлений, $u_i \in L_2[0, T]$; $F(t) \in KC[0, T]$ - кусочно-непрерывная вектор-функция, определенная на промежутке $[0, T]$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Назовем характеристикой полной управляемости системы (1.2) (системы (1.1)) величину $p = \max_{i=\overline{1, k}} p_i$, где p_i - число линейно независимых собственных векторов, соответствующих различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, k}$) матрицы A .

Иногда, для краткости, будем говорить о характеристике полной управляемости матрицы A .

Т е о р е м а 1.4. Если характеристика полной управляемости матрицы A равна p , то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов B_1, \dots, B_p , являющихся столбцами матрицы B так, что система (1.2) будет полностью управляемой.

Т е о р е м а 1.5. Если ранг матрицы B меньше характеристики полной управляемости матрицы A , то система (1.2) не является полностью управляемой.

С л е д с т в и е 1.1. Если характеристический многочлен матрицы A совпадает с его минимальным многочленом, то система (1.1) может быть сделана полностью управляемой с помощью скалярного управления [1].

¹Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

²Профессор факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

³Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

Доказательство этих теорем целиком опирается на тот факт, что если характеристика полной управляемости матрицы A равна p , то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов B_1, \dots, B_p , являющихся столбцами матрицы B так, что ранг матрицы $D = \{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$ был равен n . Если же ранг матрицы B меньше p , то система (1.2) не является полностью управляемой [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов Н. В., Борунов В. П., Крылова М. Ю. Скалярные системы управления и критерий полной управляемости. // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Т. 32(2). М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 21-31.
2. Блистанова Л. Д., Зубов И. В., Зубов Н. В., Северцев Н. А. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа. Уч. пос. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002, 119 с.
3. Зубов А. В. Стабилизация и управление в динамических системах. Уч. пос. СПб.: СПбГУ, 2007, 132 с.
4. Зубов А. В., Алидрисси М. А. Расчет и стабилизация программных траекторий механических систем. Уч. пос. СПб.: СПбГУ, 2008, 68 с.
5. Зубов А. В., Зубов Н. В., Зубова А. Ф., Мутлу О. В., Стрекопытова М. В. Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений. СПб., Мобильность плюс. 2009, 224 с.
6. Мутлу О. В. Основы управления движением (исследование равномерной устойчивости по Ляпунову). Уч. пос. СПб., 2007. 92 с.
7. Зубов Н. В., Зубов С. В. Лекции по математическим методам стабилизации динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 352 с.

Дата поступления 27.08.2009

Structure minimization

© A. V. Zubov⁴, N. V. Zubov⁵, I. S. Strecopitov⁶

Abstract. For linear stationary systems of observation is resolved the task of definition minimum number of exits, at which examine system one can is make completely is controlled. The tasks like sort often is spring by syntheses of systems of control.

Key Words: closed system, rank of matrix, matrix, vector-function, polynomial, pillar, own number

REFERENCES

1. Zubov N. V., Borunov V. P., Krilova M. U. The scalarity systems of control and criteria of completely control. // The works ISA RAN. Dynamics of not uniform systems. T. 32(2). M.: Published KKI, 2008. P. 21-31.
2. Blistanova L. D., Zubov I. V., Zubov N. V., Severchev N. A. Constructive methods of theory stabilities and they application for tasks number analysis. The school books. SPb.: Published NII of Chemistry SPbGU, 2002, 119 p.
3. Zubov A. V. Stabilization and control in dynamical systems. The school book. SPb.: SPbGU, 2007, 132 p.
4. Zubov A. V., Alidrissy M. A. The calculation and stabilization of program trajectory of mechanical system. The school book. SPb.: SPbGU, 2008, 68 p.
5. Zubov A. V., Zubov N. V., Zubova A. F., Mutlu O. V., Strecopitova M. V. The investigation of stability of solutions of differential equations. SPb., Mobility plus. 2009, 224 p.
6. Mutlu O. V. The basis of control the motion (investigation regular stability on Lapunov). The school book. SPb., 2007. 92 p.
7. Zubov N. V., Zubov S. V. Lecture on mathematical methods of stabilization dynamics system. SPb.: Published SPbGU, 2007. 352 p.

⁴Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁵Professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁶Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

УДК 517.9

Моделирование самообучающихся систем

© О. А. Зубова¹

Аннотация. Наблюдательное обучение, или обучение через примеры, относится к системам, которые тренируются, а не программируются, на некотором наборе примеров, то есть на множестве пар входных/выходных данных. Системы, которые могут обучаться на примерах выполнению какой-то конкретной задачи, имеют множество приложений в различных областях современной жизни.

Ключевые слова: классификация, пространство, обучение, множество, алгоритм, отношение.

Системы, которые могут обучаться на примерах выполнению какой-то конкретной задачи, имеют множество приложений в различных областях современной жизни. Например, были разработаны алгоритмы, которые могут производить диагностику типа ракового заболевания, исходя из множества измерений уровня выраженности нескольких тысяч человеческих генов в биопсии опухоли, сравненных с микрокомплексом cDNA, содержащим некоторое количество генов. Программное обеспечение обучается правилам классификации по набору примеров, то есть по множеству моделей выраженности тех или иных генов у определенного количества пациентов, диагноз которых известен. Проблемой в данном случае является большая размерность пространства входных параметров - порядка 20 000 генов - и мизерное количество обучающихся примеров - примерно 50.

В подобных системах предполагается наличие машины, которая обучается выполнению задачи, исходя из некоторого набора данных в форме $(x_i, y_i)_{i=1}^m$. Обучение означает выведение функции, которая наилучшим образом отображает отношения между входными данными x_i и соответствующими им выходными y_i . Главным вопросом теории обучения является то, насколько хорошо эта функция обобщает данные, то есть насколько хорошо она считает выходные параметры для не встречавшихся ранее входных параметров.

Рассмотрим алгоритм построения искомой обобщающей функции $f : X \rightarrow Y$ (где X - замкнутое подмножество R^n и $Y \subset R$).

1. Начинаем с "тренировочного" множества $S_m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$.
2. Выбираем симметричную, положительно определенную функцию $K_x(x') = K(x, x')$, непрерывную на $X \times Y$. Ядро $K(t, s)$ положительно определено, если $\sum_{i,j=1}^n c_i c_j K(t_i, t_j) \geq 0$ для любых $n \in N$ и любого выбора $t_1, \dots, t_n \in X$ и $c_1, \dots, c_n \in R$.
3. Определяем $f : X \rightarrow Y$ в виде $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i K_{x_i}(x)$, где $c = (c_1, \dots, c_m)$ и

$$(m\gamma I + K)c = y, \quad (1.1)$$

где I - единичная матрица, K - квадратная матрица, состоящая из элементов $K_{i,j} = K(x_i, x_j)$, и y - вектор с координатами y_i . Параметр γ - положительное, вещественное число.

Линейная система уравнений (1.1), содержащая m неизвестных, является корректной, так как матрица K положительна, а матрица $(m\gamma I + K)$ строго положительна. Число обусловленности является хорошим, если число $m\gamma$ достаточно велико. Подобный тип уравнений изучался еще со времен Гаусса, и алгоритмы их рационального разрешения представляют одну из наиболее изученных областей численного анализа.

¹Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru.

Описанный алгоритм может быть выведен из регуляризации Тихонова. Для того чтобы найти минимизатор ошибки, мы можем попробовать решить некую задачу - называемую Задачей Минимизации Эмпирического Риска (МЭР) - нахождения функции в пространстве H , которая минимизирует выражение

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2, \tag{1.2}$$

которое, вообще говоря, является некорректным. Корректность (1.2) зависит от выбора пространства гипотез H . Согласно Тихонову, мы будем минимизировать не в пространстве H , а в пространстве гипотез H_γ для каждого фиксированного параметра γ следующий регуляризованный функционал

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2 + \gamma \cdot \|f\|_K^2, \tag{1.3}$$

где $\|f\|_K^2$ - норма в H_K Гильбертовом Пространстве Воспроизводящего Ядра (ГПВЯ), определенном ядром K . Последнее слагаемое в выражении (1.3) - называемое регуляризатором - обеспечивает гладкость и единственность решения.

Сначала определим норму $\|f\|_K^2$. Рассмотрим пространство линейной оболочки от $K_{\bar{x}_j}$. Здесь принято обозначение \bar{X}_j , чтобы подчеркнуть то, что элементы X , используемые в этой конструкции, не имеют, вообще говоря, ничего общего с тренировочным множеством $(x_i)_{i=1}^m$. Определим внутреннее произведение в этом пространстве, положив $\langle K_x, K_{\bar{x}_j} \rangle = K(x, \bar{x}_j)$ и линейно продолжив до $\sum_{j=1}^r a_j K_{\bar{x}_j}$. Пополнение пространства ассоциированной нормой есть ГПВЯ, то есть Гильбертовым пространством H_K с нормой $\|f\|_K^2$. Заметим, что $\langle f, K_x \rangle = f(x)$ для $f \in H_K$ (просто положить $f = K_{\bar{x}_j}$ и продолжить линейно).

Для того чтобы минимизировать функционал в выражении (1.3), мы возьмем его производную по f , рассмотрим ее на элементе \bar{f} из ГПВЯ и приравняем нулю. Тогда мы получим

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i)) \bar{f}(x_i) - \gamma \cdot \langle f, \bar{f} \rangle = 0. \tag{1.4}$$

Выражение (1.4) должно быть истинным для любых \bar{f} . В частности, положив $\bar{f} = K_x$, мы имеем $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i K_{x_i}(x)$, где $c_i = \frac{y_i - f(x_i)}{m\gamma}$. Тогда уравнение (1.4) получается подстановкой предпоследнего выражения в последнее выражение.

Рассмотрим вышеприведенный алгоритм в контексте фундаментальных понятий теории обучения, одним из которых является *ошибка обобщения*. Для этого предположим, что $(x_i, y_i)_{i=1}^m$ - случайные данные. Тогда существует неизвестная вероятностная мера ρ на производящем множестве $X \times Y$, из которого выбираются данные.

Эта вероятностная мера ρ определяет функцию $f_p : X \rightarrow Y$, задаваемую выражением $f_p(x) = \int y d\rho_x$, где ρ_x - условная мера на $X \times Y$.

В силу такого построения f_p , можно говорить о том, что она является точной функцией входных/выходных параметров, отражающей среду, обеспечивающую данные. Тогда размер *ошибки* функции f есть $\int_X (f - f_p)^2 d\rho_X$, где ρ_X - мера на X , порожденная ρ (иногда называемая маргинальной мерой).

Можно сказать, что задачей теории обучения является "нахождение" функции f , минимизирующей эту ошибку. Для нахождения такой функции важно иметь в наличии пространство H - пространство гипотез - для работы. Тогда рассматривают выпуклое

пространство непрерывных функций $f : X \rightarrow Y$ (где $Y \subset R$), которое, будучи подмножеством $C(X)$, является компактным, где $C(X)$ - Банахово пространство непрерывных функций с мерой $\|f\| = \max_X |f(x)|$.

Начнем с данных $(x_i, y_i)_{i=1}^m = z$, и, минимизируя по $f \in H \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2$, получим единственную гипотезу $f_z : X \rightarrow Y$. Эта f_z называется *эмпирическим оптимумом*, и мы можем сосредоточиться на задаче оценивания

$$\int_X (f_z - f_p)^2 d\rho_X. \quad (1.5)$$

На данном этапе удобно разбить эту задачу на несколько шагов посредством определения "действительного оптимума" f_H , взяв минимум от интеграла $\int_X (f - f_p)^2$ в пространстве H . Тогда

$$\int_X (f_z - f_p)^2 = S(z, H) + \int_X (f_H - f_p)^2 = S(z, H) + A(H), \quad (1.6)$$

где $S(z, H) = \int_X (f_z - f_p)^2 - \int_X (f_H - f_p)^2$.

Первое слагаемое в правой части выражения (1.6) (S) должно быть оценено по вероятности по параметру z , и эта оценка называется *ошибкой выборки* (иногда *ошибкой оценки*). Второе слагаемое, (A), называется *ошибкой аппроксимации*. Сначала рассмотрим оценку для ошибки выборки, которая будет иметь вид $S(z, H) \leq \varepsilon$ с большой достоверностью, эта достоверность будет зависеть от ε и от объема выборки m .

Пусть число $\text{Cov}\#(H, \eta)$ есть количество шаров радиуса η в пространстве H , необходимое для покрытия H . Справедливо следующее.

Т е о р е м а 1.6. *Предположим, что $|f(x) - y| \leq M$ для всех $f \in H$ и для почти всех $(x, y) \in X \times Y$. Тогда*

$$\text{Prob}_{z \in (X \times Y)^m} \{S(z, H) \leq \varepsilon\} \leq 1 - \delta, \quad (1.7)$$

где $\delta = \text{Cov}\#(H, \varepsilon/24M)e^{-m\varepsilon/288M^2}$.

Ошибка аппроксимации $\int_X (f_H - f_p)^2$ может быть исследована следующим образом. Пусть $B : L^2 \rightarrow L^2$ есть компактный, строго положительный (самосопряженный) оператор, E - гильбертово пространство $\{g \in L^2, \|B^{-s}g\| < \infty\}$ со скалярным произведением $\langle g, h \rangle_E = \langle B^{-s}g, B^{-s}h \rangle_{L^2}$. Кроме того, предположим, что $E \rightarrow L^2$ можно разложить в $E \rightarrow C(X) \rightarrow L^2$ с хорошо обусловленным и компактным включением $J_E : C(X) \hookrightarrow E$.

Т е о р е м а 1.7. *Пусть $0 < r < s$ и H есть $\overline{J_E(B_R)}$, где B_R - это шар радиуса R в E . Тогда $\|f_p - f_H\|^2 \leq (1/R)^{2r/s-r} \|B^{-r}f_p\|^{2s/s-r}$.*

В этой записи $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве интегрируемых с квадратом на множестве X функций с мерой ρ_X .

Задачу оценки ошибки обобщения можно рассматривать и в другой форме, отличной от (1.5). Для этого представим действительный оптимум в виде:

$$f_H = \min_H \{ \max_X (f - f_p)^2 \}, \quad (1.8)$$

а эмпирический оптимум в виде:

$$f_z = \min_H \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 \right\}. \quad (1.9)$$

Далее, вместо оценки ошибки обобщения в форме (1.8) можно исследовать выражение

$$\max_X (f_z - f_p)^2. \quad (1.10)$$

Тогда ошибка выборки будет иметь вид:

$$S'(z, H) = \max_X \{(f_z - f_H)((f_z + f_H) - 2f_p)\}, \quad (1.11)$$

а ошибка аппроксимации (с учетом выражения (1.7))

$$A'(H) = \max_X (\min_H \{\max_X (f - f_p)^2\} - f_p)^2. \quad (1.12)$$

Подставив (1.7) и (1.8) в (1.11), мы получим:

$$S'(z, H) = \max_X \left\{ \min_H \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 - \max_X (f - f_p)^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\min_H \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 + \max_X (f - f_p)^2 \right) - f_p \right] \right\}. \quad (1.13)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова. Безопасность функционирования технических систем. Уч. пос. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009, 343 с.
2. А. В. Зубов, Н. В. Зубов. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. Уч. пос. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2010, 102 с.
3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, О. В. Мутлу, М. В. Стрекопытова. Расчет устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с приложениями. Уч. пос. СПб.: СПбГУ, 1999, 184 с.
4. Н. В. Зубов, О. В. Мутлу. Методы исследования феноменологических уравнений нейродинамики. Уч. пос. СПб.: "Мобильность-плюс", 2007, 92 с.
5. Н. В. Зубов, С. В. Зубов. Лекции по математическим методам стабилизации динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007, 352 с.
6. С. В. Зубов. Исследование устойчивости расчетных движений. СПб.: Мобильность плюс, 2007, 158 с.

Дата поступления 27.08.2009

Modulating of own leaning systems

© O. A. Zubova²

Abstract. Observation learning, or learning across examples, is concern for systems, that is train, but not programming, on same set examples, that is on a number of pairs enter/exit data. The systems, that be able to learning on examples execution that concrete task, is have many applications in different region modern life.

Key Words: classification, space, learning, a number of, algorithm, relation.

REFERENCES

1. N. V. Zubov, A. F. Zubova. The safety of function mechanical systems. The school book. SPb.: Published in SPbGU, 2009, 343 p.
2. A. V. Zubov, N. V. Zubov. The theory of stability and application by tasks number analysis. The school book. SPb.: Published NII of Chemistry SPbGU, 2002, 119 p.
3. A. V. Zubov, N. V. Zubov, A. F. Zubova, O. V. Mutlu, M. V. Strecopitova. Calculation of stability of solutions differential equations second order with applications. The school book. SPb.: SPbGU, 1999, 184 p.
4. N. V. Zubov. O. V. Mutlu. The methods of investigation fenomenological equations neurodynamics. The school book. SPb.: "Mobility-plus", 2007, 92 p.
5. N. V. Zubov, S. V. Zubov. The lecture on mathematical methods of stabilizations dynamics systems. SPb.: Published SPbGU, 2007, 352 p.
6. S. V. Zubov. The investigation of stability of calculate motions. SPb.: Mobility-plus, 2007, 158 p.

²Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, a_v_zubov@mail.ru.

УДК 517.9

Об особой точке системы дифференциальных уравнений

© Н. И. Зубов¹, А. Ф. Зубова², С. В. Зубов³, А. С. Стрекопытова⁴,
М. В. Стрекопытова⁵

Аннотация. А. М. Ляпунов указал случай, когда некоторая система уравнений в частных производных, не удовлетворяющая условиям Коши-Ковалевской, имеет единственное голоморфное решение. В настоящей статье указываются условия, при которых указанного типа системы имеют семейство голоморфных решений. Полученные результаты, как и у Ляпунова, позволяют решить ряд вопросов из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функция, решение, сходимости, свойство, переменная, ряд, коэффициент.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial x_s} \left(\sum_{i=1}^n p_{si}(t)x_i + X_s(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k, t) \right) + \frac{\partial z_j}{\partial t} = \\ = \sum_{i=1}^k q_{ji}(t)z_i + \sum_{i=1}^n r_{ji}(t)x_i + Z_j(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k, t), \\ j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Предположим, что функции X_s , Z_j разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин x_1, \dots, x_n , z_1, \dots, z_k :

$$\begin{aligned} X_s &= \sum_{\sum_1^n m_i + \sum_1^k n_i \geq 2} P_s^{(m_1, \dots, m_n, n_1, \dots, n_k)}(t) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \cdot z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}, \\ Z_j &= \sum_{\sum_1^n m_i + \sum_1^k n_i \geq 2} Q_j^{(m_1, \dots, m_n, n_1, \dots, n_k)}(t) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \cdot z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}, \\ & s = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k; \end{aligned}$$

сходящиеся при $|x_i| \leq z_0$, $|z_i| \leq z_0$, $t > 0$.

Через λ_s , $s = 1, \dots, n$, обозначим характеристические числа системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{si}(t)x_i, \quad s = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

через μ_1, \dots, μ_k - характеристические числа системы

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{i=1}^k q_{ji}(t)z_i, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.3)$$

¹Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУб Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

²Профессор факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

³Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

⁴Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

⁵Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

Т е о р е м а 1.8. Если 1) $\lambda_s > 0$, $s = 1, \dots, n$; 2) $\mu_\sigma = \lambda_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, \beta$; 3) системы (1.2) и (1.3) правильные, то существует группа функций $z_j(x_1, \dots, x_n, t, c_1, \dots, c_\beta)$ ($j = 1, \dots, k$), каждая из которых зависит от β произвольных постоянных, обладающая свойствами:

1) Функции z_j разлагаются в ряды $z_j = \sum_{m=1}^{\infty} z_j^{(m)}$, $j = 1, \dots, k$, сходящиеся при $|x_s| \leq x_0(t) \neq 0$, $t \in [0, +\infty)$, $|c_\sigma| \leq c_0$, $s = 1, \dots, n$; $\sigma = 1, \dots, \beta$. Функции $z_j^{(m)}$ являются однородными формами степени m относительно x_1, \dots, x_n , коэффициенты которых суть функции t и одновременно полиномы относительно c_1, \dots, c_β .

2) Функции $z_j(x_1, \dots, x_n, t, c_1, \dots, c_\beta)$ удовлетворяют системе (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб. Изд-во Лань, 2009. 400 с.
3. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2008. 336 с.
4. Стрекопытова М. В. Исследование равновесных движений. СПб.: СПбГУ, 2007. 95 с.

Дата поступления 27.08.2009

About special point system of differential equations

© N. I. Zubov⁶, A. F. Zubova⁷, S. V. Zubov⁸, A. S. Strecopitova⁹,
M. V. Strecopitova¹⁰

Abstract. A. M. Lapunov is indicate case, when same system of equations in frequent derivative, is not satisfy conditions Koshi-Kovalevskoi, is have only golomorfizm solution. In real article is indicate the conditions, by which indicated type systems is have family golomorfizm solutions. Giving results, what and at Lapunov, is allow decide the row questions from theory ordinary differential equations.

Key Words: function, solution, meeting, property, variable, row, coefficient.

REFERENCES

1. Lapunov A. M. The common task about stability motion. Harkov, 1982.
2. Zubov V. I. The lecture on theory control. SPb. Published "Lan", 2009, 400 c.
3. Zubov A. V., Zubov N. V., Laptinskiy B. H. Dynamics control systems. SPb.: SPbGU, 2008. 336 p.
4. Strecopitova M. V. Investigation equal weight motions. SPb.: SPbGU, 2007. 95 p.

⁶Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁷Professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁸Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁹Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

¹⁰Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

УДК 517.9

Асимптотические положения покоя

© А. В. Зубов¹, А. С. Стрекопытова², М. В. Стрекопытова³

Аннотация. Изучается предельное поведение движений при неограниченном возрастании времени, когда предельное многообразие не состоит из траекторий системы дифференциальных уравнений, движения которой изучаются. В широком классе случаев такое поведение движений сводится к появлению асимптотических положений покоя. Даются условия возникновения таких положений.

Ключевые слова: функция, решение, сходимость, свойство, переменная, ряд, коэффициент, интеграл, матрица.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^n (a_{si} + \varphi_{si}(t^\alpha))x_i + f_s(t), \quad s = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Функции φ_{si} , f_s вещественны, непрерывны, заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, $\alpha = p/q$, где q нечетно.

Т е о р е м а 1.9. Пусть

1) собственные числа матрицы $\{a_{si}\}$ имеют отличные от нуля вещественные части;

2) функции $\varphi_{si}(t)$ и интегралы $\int_0^t \varphi_{si}(\tau) d\tau$ ограничены при $t \in (-\infty, +\infty)$ и $\alpha > 1$;

3) функции f_s ограничены при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Тогда система (1.1) имеет единственное ограниченное решение при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Т е о р е м а 1.10. Если выполнены все условия теоремы 1.9. и $|f_s(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$, то единственное ограниченное решение также будет обладать свойством $x_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Это же свойство сохраняется для квазилинейных систем, если малый положительный параметр удовлетворяет условию $\mu \leq \mu_0$, где μ_0 достаточно мало. Если при этом все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то все решения квазилинейной системы, начинающиеся из некоторой точки $x_s = 0$, будут также обладать свойством $x_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, так что $x_s = 0$ является асимптотическим положением покоя.

Т е о р е м а 1.11. Если выполнены все условия теоремы 1.9. и

$$f_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{sk} e^{iP_k(t)},$$

где P_k - полином с вещественными коэффициентами степени $m_k \geq 2$, то существует единственное ограниченное решение, обладающее свойством $x_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Если, кроме того, все собственные числа матрицы $\{a_{si}\}$ имеют отрицательные вещественные части, то все решения системы (1.1) будут обладать свойством $x_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Точка $x_s = 0$ является асимптотическим положением покоя,

¹Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

²Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

³Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Зубова А. Ф. Математические методы исследования надежности колебательных систем в технике и технологических процессах. СПб.: СПбГУ, 2007, 339 с.
3. Зубов А. В., Зубов Н. В., Зубова А. Ф., Мутлу О. В., Стрекопытова М. В. Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений. СПб., Мобильность плюс. 2009, 224 с.
4. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008, 336 с.
5. Зубов Н. В., Зубова А. Ф. Безопасность функционирования технических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009, 343 с.

Дата поступления 27.08.2009

Asymptotical condition of peace

© A. V. Zubov⁴, A. S. Strecopitova⁵, M. V. Strecopitova⁶

Abstract. Is learning the limit behavior of motions by not limited increase time, when limited variety isn't comprise out of trajectories of system differential equations, the motions that is learning. In wide class situations this behavior of motions is come to at appearance asymptotical positions of peace. Is giving the conditions beginning that position.

Key Words: function, solution, meeting, property, variable, row, coefficient, integer, matrix.

REFERENCES

1. Lapunov A. M. The common task about stability of motion. M.; L.: Gostexizdat, 1950.
2. Zubova A. F. The mathematical methods of investigations reliability oscillated systems in technics and technology process. SPb.: SPbGU, 2007, 339 p.
3. Zubov A. V., Zubov N. V., Zubova A. F., Mutlu O. V., Strecopitova M. V. The investigation stability of solutions differential equations. SPb., Mobility plus. 2009, 224 p.
4. Zubov A. V., Zubov N. V., Laptinskiy V. N. Dynamics of control systems. SPb.: Published SPbGU, 2008, 336 p.
5. Zubov N. V., Zubova A. F. The satisfy of function technical system. SPb.: Published SPbGU, 2009, 343 p.

⁴Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGU, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁵Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

⁶Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru.

УДК 531.36

О численном моделировании стадии турбулентного перемешивания при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

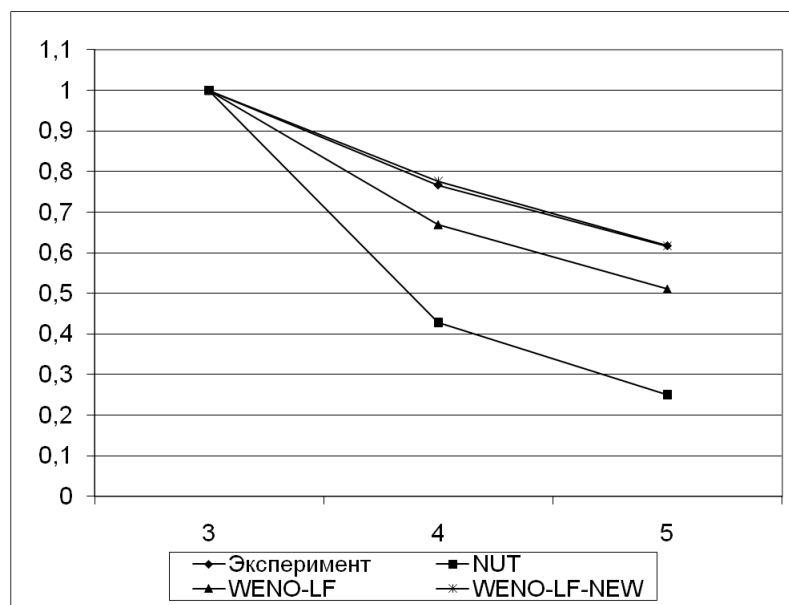
© Р. В. Жалнин¹

Аннотация. В работе представлены результаты прямого численного моделирования турбулентного перемешивания при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием существенно неосциллирующих схем высокого порядка точности. Получены результаты более близкие к экспериментальным, чем в предыдущих работах.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, существенно неосциллирующие схемы высокого порядка точности, WENO-схемы

В работах [3–5] предложены существенно неосциллирующие схемы высокого порядка точности для численного решения многомерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. Результаты численного моделирования развитой стадии турбулентного перемешивания при развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием указанных схем представлены в работах [4–5]. Результаты численных экспериментов в этих работах более близки к результатам натуральных экспериментов [2], чем результаты других авторов [1].

В работе [4] моделирование осуществлялось на достаточно грубой сетке (шаг сетки по пространственным переменным равнялся 1 мм, начальные возмущения на контактном разрыве задавались на двух слоях ячеек). Здесь представлены результаты моделирования этой же задачи на сетке с шагом 0,5 мм. Начальные возмущения так же задавались на двух слоях сетки, в результате амплитуда начальных возмущений вдвое уменьшилась.



Р и с у н о к 1.1

Значения максимумов турбулентных пульсаций на 3-х датчиках,
нормированные относительно значений датчика № 3

¹Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@apmath.mrsu.ru.

На рисунке 1.1 представлены графики максимумов турбулентных пульсаций в местах расположения датчиков LDA в натурном эксперименте [2]. На рисунке графики обозначены следующим образом: «Эксперимент» – результаты натуральных экспериментов; «NUT» – вычисления с использованием кода NUT [1]; «WENO-LF» – расчеты на сетке с шагом 1 мм [3–5]; «WENO-LF-NEW» – расчеты, описанные в данной статье. Видно, что результаты полученные на подробной сетке лучше согласуются с результатами эксперимента, чем ранее полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф., Численное исследование турбулентного перемешивания для одной задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, ВАНТ, сер. Мат. моделир. физ. процессов, 2004, вып. 1.
2. Poggi F., Thorembey M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instability // Physics of Fluids. 1998. Vol. 10, No 11. P. 2698-2700.
3. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма высокого порядка точности для гиперболических систем уравнений, Труды СВМО, 2007, т. 9, № 1, сс. 145 – 153
4. Жалнин Р.В., Змитренко Н.В., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф., Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Мат. моделирование, 2007, том 19, №10, сс. 61–66
5. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма высокого порядка точности для гиперболических систем уравнений, Труды СВМО, 2008, т. 10, № 1, 137 – 146

Дата поступления 20.09.2009

About numerical modelling of a turbulent mixing stage at Richtmyer-Meshkov instability evolution

© R. V. Zhalnin²

Abstract. There are results of direct numerical modelling of turbulent mixing are presented at Richtmyer-Meshkov instability evolution, with using ENO schemes of a high order of accuracy in this work. Results closer to experimental, than in the previous works are received.

Key Words: direct numeric simulation, Richtmyer-Meshkov instability, WENO-schemes

REFERENCES

1. Zmitrenko N. V., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Numerical research of turbulent mixing for one problem about evolution of Richtmyer-Meshkov instability, VANT, Math. modelling phys. proc. ser., 2004, No. 1.
2. Poggi F., Thoremby M.-H., Rodrigues G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instability // Physics of Fluids. 1998. Vol. 10, No 11. P. 2698-2700.
3. Zhalnin R. V. About construction of a high order of accuracy parallel algorithm for hyperbolic systems of the equations, Trudy SVMO, 2007, v. 9, No. 1, cc. 145 – 153
4. Zhalnin R. V., Zmitrenko N. V., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Numerical modelling of evolution of Richtmyer-Meshkov instability with using a high order of accuracy schemes // Math. modelling, 2007, V. 19, no. 10, pp. 61–66
5. Жалнин Р. В. About construction of parallel computing algorithm of a high order of accuracy for hyperbolic systems, Trudy SVMO, 2008, v. 10, No. 1, pp. 137 – 146

²Senior lecturer of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@apppmath.mrsu.ru.

УДК 517.988.67

Методы теории бифуркаций в задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла

© Б. В. Логинов¹, О. В. Макеев²

Аннотация. Основная часть работы опубликована под тем же названием в т. 11, №1. Кратко изложено (п. 2) приложение результатов [16–21] к задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла, описываемой нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна с интегралами по всему пространству \mathbb{R}^3 с ядрами, зависящими от модуля разности аргументов. Все решения имеют простой тип и, соответственно, допускают симметрию только симморфных пространственных кристаллографических групп. Основное внимание уделено задаче кристаллизации со сложными решетками (п. 3), описываемой системами интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Возникает векторное подпространство нулей и, соответственно, векторный случай ветвления с высокими порядками вырождения. Тем самым указан подход к бифуркационным задачам, допускающим симметрию несимморфных кристаллографических групп. В качестве конкретного примера рассмотрено построение уравнения разветвления для задачи кристаллизации с симметрией группы C_{2h}^5 моноклинной сингонии, описываемой системой четырех нелинейных интегральных уравнений. Построенное уравнение разветвления наследует указанную симметрию. Выписана асимптотика разветвляющихся решений. Рассмотрен случай сложной решетки, состоящей из одинаковых подрешеток, что соответствует одному бифуркационному параметру. Здесь представлен пункт 5 статьи ТСВМО т. 11, №1, в котором кратко рассмотрен более сложный случай различных подрешеток. Наиболее общая ситуация будет предметом дальнейших исследований.

Ключевые слова: задачи о нарушении симметрии; статистическая теория кристалла; нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна; бифуркация и симметрия

1. Введение

Ниже намечен план исследования кристаллизации со сложными решетками общего типа. Полученные в обеих частях работы результаты поддержаны грантами РФФИ-Румынская Академия, проект №07-01-91680а, и проектом № 2.1.1/6194 программы РНПВШ Минобрнауки РФ.

5. Сложные решетки общего типа

Оставляя общий случай кристаллизации с несколькими подрешетками, составленными из одинаковых частиц в каждом классе, но ориентированных по-разному и отличающимися частицами в разных классах, выпишем систему интегральных уравнений задачи о кристаллизации с симметрией сложной гранецентрированной и объемноцентрированной кубической решетки. Соответственно в вершинах и центрах граней (вершинах и центре) элементарного куба расположены разные частицы и система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна состоит из двух уравнений и содержит два параметра λ_1 и λ_2 .

¹Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

²Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск; o.makeev@ulstu.ru.

Начало кристаллизации рассматривается как потеря устойчивости однородного распределения плотностей u_{10} и u_{20} , $M = 2$: $u_{i0} + \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\lambda_{j0}} e^{u_{j0}} K_{ij0} = 0$, $K_{ij0} = \int_0^\infty K_{ij}(|q - q'|) dq' = 4\pi \int_0^\infty \rho^2 K(\rho) d\rho$ с условием нормировки $\frac{1}{|\Pi_0|} (\frac{1}{\lambda_{10}} e^{u_{10}} + \frac{1}{\lambda_{20}} e^{u_{20}}) = 1$, где Π_0 – объем элементарной ячейки, или двумя условиями нормировки в каждой из подрешеток. Решения соответствующей системы (3.2), отвечающие от однородного распределения плотностей, ищутся в виде $u_s(q) = u_{s0} + w_s(q)$.

$$B_s w_s \equiv w_s(q) + \sum_{j=1}^2 \mu_{j0} \int K_{sj}(|q - q'|) w_j(q') dq' = \sum_{j=1}^2 \varepsilon_j \int K_{sj}(|q - q'|) e^{w_j(q')} dq' - \sum_{j=1}^2 \mu_{j0} \int K_{sj}(|q - q'|) [e^{w_j(q')} - w_j(q') - 1] dq' \equiv R_s(w, \varepsilon), \quad s = 1, 2 \quad (5.1)$$

где $\frac{1}{\theta \lambda_j} = \frac{1}{\theta \lambda_{j0}} + \varepsilon_j = \mu_{j0} + \varepsilon_j$. Элементарная ячейка периодичности образована двумя тройками базисных векторов $\mathbf{a}_{kj} = a_j \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ с соответствующими векторами $\mathbf{l}_j^{(k)} = \frac{1}{a_j} \mathbf{e}_k$ в обратной решетке $\langle \mathbf{a}_{\sigma j}, \mathbf{l}_j^{(s)} \rangle = \delta_{s\sigma}$. Общий вектор обратной решетки записывается в виде $\mathbf{l}_{kj} = (\mathbf{m}_{kj}^{(s)}, \mathbf{l}_j^{(s)}) = \sum_{s=1}^3 m_{kj}^{(s)} \mathbf{l}_j^{(s)}$. Для описания подпространства нулей линеаризованной системы (5.1) разложим функции w_s в ряды Фурье по обратной решетке $w_j(q) = \sum_k w_{kj} e^{2\pi i \langle \mathbf{l}_{kj}, q \rangle}$. После подстановки разложений в (5.1) и перехода к полярным координатам приходим к системе

$$\sum_k \left\{ w_{\mathbf{m}_{k1}} \left[1 + \mu_{10} K_{11} \left(\frac{\mathbf{m}_{k1}}{a_1} \right) \right] e^{\frac{2\pi i}{a_1} \langle \mathbf{m}_{k1}, q \rangle} + \mu_{20} w_{\mathbf{m}_{k2}} K_{12} \left(\frac{\mathbf{m}_{k2}}{a_2} \right) e^{\frac{2\pi i}{a_2} \langle \mathbf{m}_{k2}, q \rangle} \right\} = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum_k \left\{ \mu_{10} w_{\mathbf{m}_{k1}} K_{21} \left(\frac{\mathbf{m}_{k1}}{a_1} \right) e^{\frac{2\pi i}{a_1} \langle \mathbf{m}_{k1}, q \rangle} + w_{\mathbf{m}_{k2}} \left[1 + \mu_{20} K_{22} \left(\frac{\mathbf{m}_{k2}}{a_2} \right) \right] e^{\frac{2\pi i}{a_2} \langle \mathbf{m}_{k2}, q \rangle} \right\} = 0$$

где $I_{s\sigma(j)}^k = K_{s\sigma} \left(\frac{\mathbf{m}_{kj}}{a_j} \right) = \frac{2a_j}{R_{kj}(\mathbf{m}_{kj})} \int_0^\infty \rho K_{s\sigma}(\rho) \sin \frac{2\pi \rho}{a_j} R_{kj}(\mathbf{m}_{kj}) d\rho$

Выбирая в (5.2) сначала при $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ $m_{ks}^{(1)} = \pm 1$, $m_{ks}^{(2)} = \pm 1$, $m_{ks}^{(3)} = \pm 1$, $s = 1, 2$, а затем при $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ $m_{k1}^{(s)} = \pm 1$, $m_{k1}^{(r \neq s)} = \pm 1$; $m_{k2}^{(s)} = \pm 1$, $m_{k2}^{(r \neq s)} = \pm 1$, $s = 1, 2, 3$ приходим к условиям кристаллизации соответственно с гранецентрированной (объемноцентрированной) ячейкой периодичности в виде соответствующих определителей системы (5.2).

З а м е ч а н и е 5.1. Для получения критерия кристаллизации к системе интегральных уравнений (5.1) следует добавить условия нормировки п. 3, где V кратно ячейке периодичности Π_0 [3, 4] $\frac{1}{|\Pi_0|} \int_{\Pi_0} \left[\frac{1}{\lambda_1} e^{u_{10} + w_1(q)} + \frac{1}{\lambda_2} e^{u_{20} + w_2(q)} \right] dq = 1$ или условием нормировки в каждой из подрешеток $\frac{e^{u_{j0}}}{|\Pi_j| \lambda_j} \int e^{w_j(q)} dq = 1$. Эти условия позволяют определить не только критическое значение температуры кристаллизации, но и закритическое поведение кристалла, разыскивая решение в виде рядов по общему малому параметру $\varepsilon = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}$, $\lambda_j = \lambda_{j0} + \nu_j(\varepsilon)$.

Дата поступления 20.08.2009

Bifurcation theory methods in problem about crystallization of liquid phase state in statistical crystal theory

© B. V. Loginov³, O. V. Makeev⁴

Abstract. Applications of the results [16–21] are briefly presented (p. 2) to the problem on crystallization of liquid phase state in statistical crystal theory governed by nonlinear integral equation of Hammerstein type with integrals on the whole space \mathbb{R}^3 and kernels depending on modulus of arguments difference. All solutions have primary type and respectively allow only symmetry of symmorphic spatial crystallographic groups. Basic attention is paid (p. 3) to crystallization problem with composite lattices governed by systems of nonlinear Hammerstein type integral equations. Here vectorial zero-subspace arise and respectively vectorial bifurcation with higher orders of degeneracy. By this an approach is indicated to bifurcation problems allowing non-symmorphic crystallographic group symmetries. As concrete example it is considered the construction of the bifurcation equation for crystallization problem with the group C_{2h}^5 symmetry of monoclinic syngony governed by the system of four nonlinear integral equations. The constructed branching equation inherits the indicated symmetry. Bifurcating solutions are written out. It is considered only case of composite lattice consisting of the identical sublattices that corresponds to one bifurcation parameter. Here n.5 of the article Proc. MVMS v. 11, No. 1 is presented in which more complicated case of different sublattices is briefly considered. The most general situation will be subject of future investigations.

Key Words: symmetry breaking problems; statistical theory of crystal; nonlinear integral equations of Hammerstein type; bifurcation and symmetry

³Ulyanovsk state technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru.

⁴Ulyanovsk state technical University, Ulyanovsk; o.makeev@ulstu.ru.

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Численные методы в системах символьной математики© Т. В. Кормилицына¹

Аннотация. Обсуждаются различные подходы к изучению алгоритмов вычислительной математики с применением специализированных математических программ.

Ключевые слова: численные методы, программы, алгоритмы.

Для изучения алгоритмов основных численных методов необходимо проводить первоначальную их реализацию как можно подробнее. Для автоматизации неизбежных громоздких расчетов на этом этапе можно рекомендовать использовать электронные таблицы, а именно только их возможность непосредственного пересчета по формулам. Встроенные алгоритмы типа "Поиск решений" или построение приближающего многочлена методом наименьших квадратов следует использовать несколько позднее. Однако после приобретения определенных навыков наступает этап непосредственного использования вычислительных схем.

На этом этапе успешное решение задачи зависит уже не столько от знания выбранного численного метода для реализации математической модели, сколько от правильности проведения вычислений. Именно на этом этапе можно использовать мощные вычислительные и аналитические возможности систем символьной математики (MathCad, Maple, Mathematica и др).

Проблему выбора системы символьной математики каждый исследователь решает по-своему в зависимости от решаемых задач и материальных возможностей. Достойную альтернативу коммерческим программным продуктам составляют свободно распространяемые системы Maxima, Scilab, Gap, Octave и другие.

Однако использование таких программ представляет определенные трудности, так как не все из них хорошо документированы и не все имеют удобную встроенную справочную информацию, хотя от версии к версии эти недостатки устраняются.

Укажем еще один вариант решения проблемы - интерактивные вычисления в ресурсах оригинальных систем символьной математики. Разработчики названных выше коммерческих продуктов в разных целях (это и реклама самого продукта, и популяризация класса систем аналитических вычислений) в последнее время представляют пользователям бесплатный сервис - получение результатов, как численных, так и аналитических, на платформах своих программ в Интернет.

Приведем примеры.

Многие исследователи пользовались системой MathCad для численных и аналитических расчетов. В настоящее время, благодаря огромной работе российских ученых, сотрудничающих с разработчиками систем символьной математики, открыт доступ к решению математических задач в режиме доступа по адресу <http://mas.exponenta.ru>. Ресурсы этого сайта и раньше составляли большой банк программ для проведения математических вычислений. Проект реализуется в рамках развития многолетних творческих связей, существующих между Санкт-Петербургским Государственным Политехническим университетом и образовательным математическим сайтом Exponenta.ru в части разработки, изу-

¹Доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева, г. Саранск; kortv58@mail.ru.

чения и внедрения новых информационных технологий, перспективных образцов научного программного обеспечения в образование и научные исследования.

Проект адресован преимущественно студентам вузов, в том числе - практически применяющим Mathcad для решения профильных задач; преподавателям вузов, в том числе - практически использующим Mathcad и MAS для составления заданий и тестов; научным работникам и инженерам, в том числе - практически использующим Mathcad в своих исследованиях.

Проект реализуется поэтапно, сейчас для пользователей открыты алгоритмы численного и аналитического интегрирования, поиск нуля функции методом Ньютона.

Более разнообразны алгоритмы задач линейной алгебры: решение системы линейных алгебраических уравнений; диагонализация вещественной симметричной матрицы; получение линейной формы, эквивалентной квадратичной форме; вычисление корня симметричной матрицы (альтернатива преобразованию Холецкого).

Компания Wolfram Research 18 мая 2009 года объявила о запуске Wolfram|Alpha - первой в мире интерактивной системы математических знаний, доступной бесплатно в сети Интернет. Wolfram|Alpha основана на разработанной ученым Стефеном Вольфрамом программе технических расчетов Mathematica и на его исследованиях, опубликованных в книге "A New Kind of Science".

Система Wolfram|Alpha была полностью построена и развернута на основе технологий программы Mathematica компании Wolfram Research. Wolfram|Alpha содержит около шести миллионов строк кодов программы Mathematica. Система Wolfram|Alpha благодаря технологии gridMathematica запущена параллельно на 10 000 процессорных ядрах. Причем каждый запрос, поступающий в систему, обслуживается программой webMathematica.

Основная цель Wolfram|Alpha - сделать систематические знания доступными каждому пользователю Интернета. Wolfram|Alpha использует миллионы терабайт данных и синтезирует их в новые комбинации и презентации. Система отвечает на вопросы, решает уравнения, сопоставляет различные типы данных, предсказывает поведение и многое другое.

Перечислим четыре составляющих Wolfram|Alpha.

1) Набор данных. Wolfram|Alpha содержит терабайты фактических данных из широкого спектра областей. Команды экспертов и исследователей собирали и сортировали данные, преобразуя их в вычисляемые формы, которые могут быть распознаны и использованы компьютерными алгоритмами.

2) Динамические вычисления. Когда система Wolfram|Alpha получает пользовательский запрос, она извлекает соответствующие данные из своей базы и затем применяет необходимые из имеющихся десятков тысяч алгоритмов, создавая и синтезируя новые знания, относящиеся к запросу.

3) Интуитивно понятный язык. Чтобы дать возможность системе Wolfram|Alpha понимать вводимые запросы, ее разработчики исследовали способы, которыми люди выражают идеи в предметных областях, и постепенно разрабатывали алгоритмы, чтобы они могли автоматически распознавать запросы.

4) Вычислительная эстетика. Wolfram|Alpha также олицетворяет новый подход к дизайну пользовательского интерфейса. Система воспринимает пользовательские вводы и создает настраиваемую страницу ясных и удобно представленных вычисленных знаний.

Электронный ресурс доступен по адресу <http://www.wolframalpha.com>. Полезную информацию можно найти по адресу <http://www.softline.ru/science/>. Отметим ресурсы другой известной системы символьной математики Maple, доступные по адресу <http://www.maplesoft.com/applications/Category.aspx>. На сайте доступны готовые документы с решениями конкретных задач. Авторами алгоритмов являются ученые разных стран. Определяется рейтинг и качество предлагаемых алгоритмов.

Может показаться, что при наличии таких мощных возможностей у специализированных математических пакетов исчезает необходимость получения классического математического образования, так как эти системы "делают все сами". Это в корне неверно, так как ключевая проблема при проведении различного рода исследований - формулировка задачи и построение математической модели - по-прежнему остается прерогативой исследователя, а математическим программам отводится роль лишь исполнителей.

Дата поступления 27.08.2009

Numerical methods in systems of symbolic mathematics

© T. V. Kormilitsyna²

Abstract. To studying of algorithms of calculus mathematics various approaches are discussed with application of specialised mathematical programs.

Key Words: numerical methods, programs, algorithms.

²Associate professor of informatics and computers chair, Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева, Saransk; kortv58@mail.ru.

Перечень диссертаций, защищенных в диссертационном совете Д 212.117.14 в 2009 году

В период с 1 января по 1 июня 2009 года в диссертационном совете Д 212.117.14 были защищены следующие диссертационные работы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

14 мая 2009 г.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ, МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ, ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА
ЩЕБЕНОЧНО-ПЕСЧАНОГО КАРКАСНОГО (ЩПК) МАТЕРИАЛА.

Ю. А. Полетаев

Специальность: 05.13.18
Научный руководитель: д. техн. н., профессор Б. М. Люпаев
Официальные оппоненты: д. техн. н., профессор Г. Г. Болдырев
к. ф.-м. н., Д. И. Бояркин
Ведущая организация: Воронежский Государственный Архитектурно-
Строительный Университет (ВГАСУ)

28 мая 2009 г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЫНУЖДЕННОГО
КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА.

Д. И. Логинов

Специальность: 05.13.18
Научный руководитель: д. ф.-м. н., доцент Н. И. Шамров
Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Ю. А. Аветисян
к. ф.-м. н., доцент, Д. И. Бояркин
Ведущая организация: ГОУВПО «Саратовский государственный
технический университет»

28 мая 2009 г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, РАСЧЕТ И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ
ЭФФЕКТИВНЫХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ МОЩНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ
ПРИБОРОВ.

А. А. Саванин

Специальность: 05.13.18
Научный руководитель: д. техн. н., профессор С. А. Панфилов
Официальные оппоненты: д. техн. н., профессор Е. М. Гейфман
к. ф.-м. н., доцент, В. И. Сафонкин
Ведущая организация: ФГУ «Российский Центр испытаний и сертификации -
Москва» («РОСТЕСТ - Москва»)

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_EX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Внимание! Новые правила. Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды $\backslash\mathbf{R}$, $\backslash\mathbf{Rn}$, $\backslash\mathbf{C}$, $\backslash\mathbf{Z}$, $\backslash\mathbf{N}$ и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды $\backslash\mathbf{phi}$, $\backslash\mathbf{epsilon}$ соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами $\backslash\mathbf{px}\{i\}$ и $\backslash\mathbf{pxtog}\{u\}\{i\}$.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды $\backslash\mathbf{textrm}$, $\backslash\mathbf{textit}$. Например, для вставок формул Γ_i , D_i в текст статьи, необходимо набрать команды $\backslash\mathbf{textrm}\{\Gamma\}_i$, $\backslash\mathbf{textit}\{D\}_i$.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{метка}\}$ и $\backslash\mathbf{eqref}\{\mathit{метка}\}$, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanov14}\}$, теорему 5 из этой статьи — $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanovt5}\}$ и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду $\backslash\mathbf{ref}\{\mathit{метка}\}$).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами
а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$$\backslash\mathbf{insertpicture}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\}$$

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$$\backslash\mathbf{insertpicturewcap}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$$\backslash\mathbf{insertpicturecapscale}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\} \quad \{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$$

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$$\backslash\mathbf{insertpicturenonum}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\} \quad \{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$$

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**.

Для оформления списка литературы на английском языке следует использовать окружение **thebibliographyEn**.

Сам список оформляется в виде последовательности команд $\backslash\mathbf{bibitem}$, имеющих один параметр:

$$\backslash\mathbf{bibitem}\{\mathit{метка\ для\ ссылки\ на\ источник}\}$$

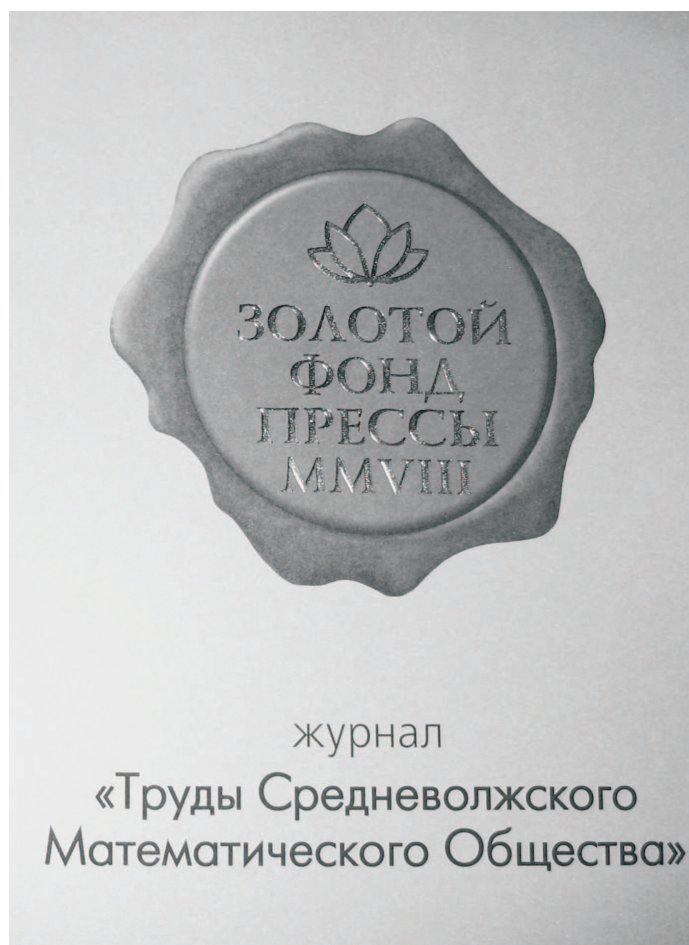
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду $\backslash\mathbf{cite}$ или $\backslash\mathbf{pgcite}$ (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.2, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Акулов В. А.	49	Кузнецов Е. Б.	9
Алексеев С. Н.	57	Куприна Л. А.	26
Анкилов А. В.	35	Курносков Г. А.	106
Балахнин П. А.	171	Логинов Б. В.	43, 194
Белоцерковская И. Е.	90	Лукашкин С. И.	137
Бояркин Д. И.	61	Львова Т. Л.	112
Вельмисов П. А.	35	Макеев О. В.	194
Гринес В. З.	26	Макеева О. В.	43
Губайдуллин И. М.	14	Овсянникова Н. И.	119
Дутов С. А.	174	Павлов А. Ю.	127
Ибатулин И. Ж.	78	Пескова Е. Е.	68
Исмагилова А. С.	131	Починка О. В.	26
Жалнин Р. В.	68, 191	Спивак С. И.	14, 131, 137
Зубов А. В.	171, 177, 188	Стрекопытов И. С.	177
Зубов Н. В.	171, 177	Стрекопытова А. С.	185, 188
Зубов Н. И.	185	Стрекопытова М. В.	185, 188
Зубов С. В.	185	Сухарев Л. А.	84
Зубова А. Ф.	185	Шаманаев П. А.	145
Зубова О. А.	180	Шемякина Т. А.	57
Каледин О. Е.	84	Шишленкова А. Е.	26
Катаева Л. Ю.	90		
Коледина К. Ф.	14	Dragomirescu F. I.	164
Косов А. А.	100	Georgescu A.	164
Кудашкин И. Н.	106	Georgescu R.-M.	152
		Ion A.-V.	152



**Журнал Средневолжского
математического общества**

Том 11, № 2

Для заметок

Для заметок

Для заметок