

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  28  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  3

2026



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 28, № 3. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 28, NO. 3. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.  
Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

**Scientific Journal**

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2026

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Пескова Елизавета Евгеньевна** — заместитель главного редактора, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП «РФИЦ ВНИИЭФ» (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой цифрового моделирования ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мехатроники и теоретической механики ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Леонтьев Виктор Леонтьевич** — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского

политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий международной лабораторией динамических систем и приложений ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, профессор кафедры технического сервиса машин ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Институт математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Сухинов Александр Иванович** — член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Математика и информатика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (Ростов-на-Дону, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь направления «Математическая робототехника и искусственный интеллект», Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

**Язовцева Ольга Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Elizaveta E. Peskova** — Deputy Editor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department «Higher Mathematics», Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — the Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Victor L. Leontiev** — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Scientific Supervisor of the Institute of Computer Science, Mathematics and Robotics, Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Applied Mathematics and Informatics», Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Professor of Department of Technical Service of Machines, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nikolai A. Sidorov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University (Irkutsk, Russia)

**Nikolay V. Starostin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of department, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Lev A. Sukharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University, President of the Middle Volga Mathematical Society (Saransk, Russia)

**Alexander I. Sukhinov** — Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of department «Mathematics and Informatics», Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Department of Mathematical Robotics and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

**Olga S. Yazovtseva** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

# Содержание

## МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>А. И. Иноземцев</b><br>Об уравнениях Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега . . . . . | 179 |
| <b>А. М. Собина</b><br>Об одном обобщении преобразования Лапласа . . . . .                                                                     | 193 |

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

|                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>А. В. Литаврин, Е. А. Потоловская</b><br>Порождающие множества аддитивного и мультипликативного группоидов обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала . . . . . | 212 |
| <b>Ю. А. Повещенко, И. Р. Янгляев, В. О. Подрыга, О. С. Язовцева, И. М. Губайдуллин</b><br>О порядке аппроксимации алгоритма символьной прогонки . . . . .                                              | 225 |

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

|                                                                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>У. Д. Мизхер, М. Д. Мизхер, П. М. Абрашкин, П. А. Вельмисов</b><br>Численное моделирование центрального впрыска воздуха для повышения эффективности горения биогаза в системе с реагирующим потоком . . . . | 240 |
| <b>Д. С. Мосиенко, М. А. Леган</b><br>Задача плоской теории упругости о диаметральном сжатии кольца сосредоточенной нагрузкой . . . . .                                                                        | 258 |
| <b>В. Н. Снытников, Е. Е. Пескова</b><br>Актуальные математические проблемы термохимии с излучением . . . . .                                                                                                  | 280 |
| <b>И. А. Шнайдер, А. С. Богомолов, В. А. Кушников</b><br>Решение задачи локализации несанкционированных источников загрязнения атмосферы средствами математического моделирования . . . . .                    | 308 |

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . .               | 321 |
| Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . .              | 325 |
| Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . .  | 329 |
| Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . | 335 |
| Алфавитный указатель авторов . . . . .                             | 339 |

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**A. I. Inozemtsev**

On Romanovsky equations with a generalized partial-integral operator in anisotropic Lebesgue spaces . . . . . 179

**A. M. Sobina**

On a generalization of the Laplace transform . . . . . 193

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**A. V. Litavrin, E. A. Potolovskaya**

Generating sets for additive and multiplicative groupoids of generalized subnetworks of a multilayer feedforward neural network . . . . . 212

**Yu. A. Poveshchenko, I. R. Yanglyayev, V. O. Podryga, O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin**

On the Order of Approximation of the Symbolic Tridiagonal Matrix Algorithm 225

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**U. J. Mizher, M. J. Mezher, P. M. Abrashkin, P. A. Velmisov**

Analysis of Central Air Injection for Enhancing Biogas Combustion Efficiency in a Reactive Flow System . . . . . 240

**D. S. Mosienko, M. A. Legan**

The problem of the plane elasticity theory on the diametric compression of a ring by a concentrated load . . . . . 258

**V. N. Snytnikov, E. E. Peskova**

Contemporary mathematical problems in thermochemistry with radiation . . 280

**I. A. Shnaider, A. S. Bogomolov, V. A. Kushnikov**

Solution of a problem on localizing unauthorized sources of atmospheric pollution by means of mathematical modelling . . . . . 308

---

The rules of article design (in Russian) . . . . . 321

The rules of article design (in English) . . . . . 325

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 329

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . . 335

---

Author Index . . . . . 339

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

## Об уравнениях Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега

А. И. Иноземцев

*ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева» (г. Москва, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Работа содержит достаточные условия существования и единственности решения уравнения Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега. Полученное решение методом последовательных приближений представлено в виде операторного ряда Неймана. Указаны условия его сходимости. Приведены условия ограниченности частно-интегральных операторов, их итераций и оценки их норм в соответствующих анизотропных пространствах Лебега. Установлена формула итерированных ядер обобщенных частно-интегральных операторов Романовского и их связи с итерациями частно-интегральных операторов. Показана ограниченность нормы итерированного ядра в анизотропных пространствах Лебега и зависимость оценки его нормы от нормы ядра обобщенного частно-интегрального оператора Романовского. Указана необходимость рассмотрения обобщенных частно-интегральных операторов Романовского и их итерированных ядер в пространствах существенно ограниченных функций. Установлена формула резольвенты обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского и ее принадлежность пространству существенно ограниченных по части переменных функций. Полученные условия существования и единственности решения уравнения с обобщенным частно-интегральным оператором Романовского в анизотропных пространствах Лебега применяются к исследованию линейных обобщенных частно-интегральных уравнений типа Романовского, к которым приводится задача  $n$ -связных цепей Маркова.

**Ключевые слова:** частно-интегральный оператор, оператор Романовского, уравнение типа Романовского, анизотропные пространства, итерации операторов, резольвента

**Для цитирования:** Иноземцев А. И. Об уравнениях Романовского с обобщенным частно-интегральным оператором в анизотропных пространствах Лебега // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 179–192. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192

*Об авторах:*

**Иноземцев Алексей Иванович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева» (127434, Россия, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, [a.inozemcev@rgau-msha.ru](mailto:a.inozemcev@rgau-msha.ru)



MSC2020 57N10

# On Romanovsky equations with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces

**A. I. Inozemtsev***Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy  
(Moscow, Russian Federation)*

**Abstract.** The paper contains sufficient conditions for existence and uniqueness of a solution to the Romanovsky equation with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces. The solution obtained by the method of successive approximations is represented in the form of a Neumann operator series. Conditions for its convergence are indicated. Also conditions for boundedness of partial integral operators, their iterations, and estimates of their norms in the corresponding anisotropic Lebesgue spaces are presented. A formula is established for the iterated kernels of the generalized Romanovsky partial integral operators, and their relationships with the iterations of partial integral operators are obtained, too. For the norm of the iterated kernel, its boundedness is proven, and dependence of this norm on the norm of the kernel of the generalized Romanovsky partial integral operator is shown. The necessity of considering generalized Romanovsky partial integral operators and their iterated kernels in spaces of essentially bounded functions is indicated. A formula for the resolvent of the generalized Romanovsky partial integral equation and its belonging to the space of functions essentially bounded with respect to some of their variables is established. The obtained conditions for the existence and uniqueness of a solution to an equation with a generalized partial integral Romanovsky operator in anisotropic Lebesgue spaces are applied to the study of linear generalized partial integral equations of the Romanovsky type, to which the problem of  $n$ -connected Markov chains is reduced.

**Keywords:** partial integral operator, Romanovsky operator, Romanovsky-type equation, anisotropic spaces, operator iterations, resolvent

**For citation:** *A. I. Inozemtsev. On Romanovsky equations with a generalized partial integral operator in anisotropic Lebesgue spaces. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:3(2026), 179–192. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.179-192*

*About the authors:*

**Aleksey I. Inozemtsev**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy (49, Timiryazevskay St., Moscow 127434, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, [a.inozemcev@rgau-msha.ru](mailto:a.inozemcev@rgau-msha.ru)

## 1. Введение

Выражения содержащие частные интегралы изучались еще в середине XX-го века. В работах профессора А.С. Калитвина и его учеников [1, 2] приведена подробная теория линейных операторов и уравнений с частными интегралами, содержащая их

свойства в некоторых функциональных пространствах. В работе [3] исследованы некоторые свойства многомерных частно-интегральных операторов и уравнений, условий их обратимости в пространстве непрерывных функций. Свойства многомерных операторов с частными интегралами и частно-интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а также условия существования и единственности их решений в анизотропных пространствах Лебега содержатся в работах [4–6]. Критерии действия операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций были получены в [7] в случае  $\mathbb{R}^2$ , в многомерном случае и при произвольной перестановке переменных функции  $u$  достаточные условия действия обобщенных и линейных обобщенных частно-интегральных операторов Романовского получены в работе [8]. В связи с тем, что явное решение таких уравнений удается найти лишь в редких случаях, используются различные приближенные методы. В работе [9] содержатся теоремы о разрешимости частно-интегральных уравнений Романовского, результаты о численных методах их решения.

В работе рассматривается уравнение Романовского

$$u(x) = \lambda(R_{\alpha\beta}u)(x) + f(x), \quad (1.1)$$

с обобщенным частно-интегральным оператором Романовского

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_{\alpha}\Pi_{\beta}u)(x),$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi_{\beta}$  – оператор перестановки переменных функции  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т.е.  $(\Pi_{\beta}u)(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n})$ , а  $\beta$  – некоторая перестановка элементов множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , которую кратко будем обозначать в виде мультииндекса  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,

$$(K_{\alpha}u)(x) = \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha} \quad (1.2)$$

– многомерный частно-интегральный оператор,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  – мультииндекс, который отвечает за набор переменных интегрирования и принимает значения подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n)$  – дополняющий мультииндекс такой, что  $\alpha \cup \bar{\alpha} = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $D_{\alpha} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \dots \times (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$ ,  $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$  – измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега.

К уравнению

$$\begin{aligned} \lambda u(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \int_{[a,b]^m} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \cdot \\ & \cdot u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}) dt_1 dt_2 \dots dt_m, \end{aligned}$$

содержащему обобщенный оператор типа Романовского приводит задача  $n$ -связных цепей Маркова. Само уравнение называется обобщенным уравнением типа Романовского.

Задача двусвязных цепей Маркова была поставлена В.И. Романовским в работе [10], где приведено исследование уравнения

$$\lambda u(x, y) = \int_a^b \varphi(t, x, y) u(t, x) dt + f(x, y).$$

Заметим, что так как функция  $u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$  интегрируется лишь по части переменных, то оператор  $R$  – не интегральный и не компактный, а теория таких уравнений существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма.

## 2. Обобщенные частно-интегральные операторы типа Романовского в анизотропных пространствах Лебега

Определим оператор

$$\Pi_\beta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}), \quad (2.1)$$

где  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  – мультииндекс перестановки переменных функции  $u$ . Далее в работе используется  $k$ -кратный оператор перестановки функции  $u$ , т.е.  $\Pi_\beta^k u = \Pi_\beta^{k-1}(\Pi_\beta u)$ . Количество всех перестановок переменных функции  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  конечно и не превосходит  $n!$ .

Композицию многомерного частно-интегрального оператора (1.2) и (2.1) будем называть обобщенным частно-интегральным оператором типа Романовского:  $R_{\alpha\beta} = K_\alpha \circ \Pi_\beta$ , т.е.

$$(R_{\alpha\beta} u)(x) = (K_\alpha \Pi_\beta u)(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \quad (2.2)$$

Пусть  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $p_i \geq 1$ , а  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – сопряженный для  $\mathbf{p}$  мультииндекс, такой что  $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ . Анизотропное пространство Лебега  $L_{\mathbf{p}}(D)$  определяется нормой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left( \int_{a_n}^{b_n} \left( \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}},$$

где  $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  – параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$ ,  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Исследования свойств операторов и уравнений с частными интегралами в анизотропных пространствах Лебега содержатся в работах [11, 12].

В работе [12] показана ограниченность норм функции  $K_\alpha u$  в анизотропном пространстве Лебега  $L_{\mathbf{p}}(D)$ , причем из  $k_\alpha \in L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D) = L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$ ,  $u \in L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) = L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2}(D_{\bar{\alpha}}; L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha))$  следует  $K_\alpha u \in L_{\mathbf{p}}(D)$  и выполняется неравенство

$$\|K_\alpha u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_\alpha\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2}(D_{\bar{\alpha}}; L_{\mathbf{p}_\alpha}(D_\alpha))}. \quad (2.3)$$

Обозначим через  $U_m(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$  пространство определенных на  $D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}$  функций, принадлежащих пространству  $L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ , для которых существует и конечна норма  $\|u\|_{U_m} = \max_k \left\{ \|\Pi_\beta^k u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) \right\}$ . Заметим, что при  $n > m$ ,  $L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) \subset L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^m)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ , а следовательно  $U_n(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}) \subset U_m(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ .

В работе [13] показано, что если  $u(x) \in U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$ , а ядро  $k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \in L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}} \mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$ , то из неравенства (2.3) следует непрерывность оператора  $R_{\alpha\beta}$

из  $U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})$  в  $L_{\mathbf{p}}(D)$  причем существует такое число  $A < \infty$ , что выполняется неравенство

$$\|R_{\alpha\beta}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)}\|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (2.4)$$

### 3. Итерации оператора $R_{\alpha\beta}$ и его ядра $k_{\alpha\beta}$

Итерацией порядка  $r$  частного интеграла  $R_{\alpha\beta}$  называется оператор  $R_{\alpha\beta}^r$ .

Связь параметров  $(p_1, p_2, \dots, p_n) = \mathbf{p}$  анизотропного пространства Лебега  $L_{\mathbf{p}}(D)$  со степенью  $r$  дается в следующей лемме.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1$ ,  $j = \overline{1, n}$  и  $r$  – произвольное натуральное число. Если

$$k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \in L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^r(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha})), \quad f(x) \in U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}),$$

то

$$(R_{\alpha\beta}^r f)(x) \in L_{\mathbf{p}}(D),$$

причем существуют конечные числа  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , что справедливо неравенство

$$\|R_{\alpha\beta}^r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^r A_i \|\Pi_\beta^{i-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^i(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|f\|_{U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (3.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поочередно применяя неравенство (2.4) получим

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha\beta}^r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq A_1 \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|R_{\alpha\beta}^{r-1} f\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq \\ &\leq A_1 \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} A_2 \|\Pi_\beta k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^2(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|R_{\alpha\beta}^{r-2} f\|_{U_3(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq \\ &\leq \dots \leq \prod_{i=1}^r A_i \|\Pi_\beta^{i-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}^i(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|f\|_{U_{r+1}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \end{aligned}$$

Тем самым, подтверждена справедливость неравенства (3.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

Ядро отвечающее оператору  $R_{\alpha\beta}^j$  обозначим  $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$  и определим последовательностью частно-интегральных операций

$$k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha,$$

с итерациями

$$k_{\alpha\beta}^{(1)}(x; t_\alpha) = k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha),$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) &= \int_{D_\alpha} \int_{D_\alpha} \dots \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \mu_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}(\mu_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; \nu_\alpha) \dots \Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \dots d\mu_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

**Теорема 3.2.** Для  $j$ -ой итерации оператора  $R_{\alpha\beta}$  и  $j$ -итерированного ядра справедливо равенство

$$(R_{\alpha\beta}^j u)(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Применив теорему Фубини об изменении порядка интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^j u(x) &= R_{\alpha\beta} \left( R_{\alpha\beta}^{(j-1)} u(x) \right) = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta \left( \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) \Pi_\beta^{j-1} u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha \right) d\tau_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} \left( \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \right) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \\ &= \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом,  $j$ -кратная итерация обобщенного частно-интегрального оператора Романовского снова представляет собой оператор того же вида с ядром  $k_{\alpha\beta}^{(j)}$ .

**Доказательство завершено.**

Из Теоремы 3.2 и из равенства  $\|\Pi_\beta^{j-1} u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} = \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}$  следует, что для итерации  $R_{\alpha\beta}^j$ , как и для любого обобщенного частно-интегрального оператора Романовского, справедливо неравенство (2.4), т.е.

$$\|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A \|k_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}\alpha, \mathbf{p}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \quad (3.3)$$

Отсюда возникает интерес к норме  $j$ -итерированного ядра  $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$  в пространстве  $L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}\alpha, \mathbf{p}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$ .

**Теорема 3.3 (о норме  $j$ -итерированного ядра  $k_{\alpha\beta}$ ).** В пространстве  $L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}\alpha, \mathbf{p}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))$  норма итерированного ядра  $k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha)$  оператора  $R_{\alpha\beta}^j$  удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|k_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}\alpha, \mathbf{p}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} &\leq \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{q}\alpha, \mathbf{p}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{j-1} \|\Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}\bar{\alpha}\mathbf{q}\bar{\alpha}}^1(D_{\bar{\alpha}}; L_{(\mathbf{p}\alpha, \mathbf{q}\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы приведем для ядра частного интеграла  $R_{(1;2,1)}$  при  $n = 2$ .

Левую часть неравенства (3.4) представим в виде нормы от интеграла от произведения итерированного и неитерированного ядер

$$\|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} =$$

$$= \left\| \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1}) \Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1) d\tau_{j-1} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}.$$

По переменной  $\tau_{j-1}$  воспользуемся неравенством Гельдера с показателями  $p_1$  и  $q_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\| \left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \right. \\ &\times \left. \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} = \\ &= \left\{ \int_{D_2} \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{q_1}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Функция  $\left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)$  не зависит от переменной  $t_1$  поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Функция  $\left( \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right)^{\frac{p_1}{q_1}}$  не зависит от  $x_1$ , поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{p_1}} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt_1 \right]^{\frac{p_2 q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}}. \end{aligned}$$

Еще раз воспользуемся неравенством Гельдера по переменной  $x_2$  с показателями  $p_2$  и  $q_2$ , получим неравенство

$$\begin{aligned} \|k_1^{(j)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |k_1(x_1, x_2; \tau_{j-1})|^{q_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2 q_2^2}{p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2 q_2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{D_2} \left[ \int_{D_1} \left( \int_{D_1} |\Pi_{\beta} k_1^{(j-1)}(\tau_{j-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{j-1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dx_1 \right]^{\frac{p_2^2 q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p_2^2 q_2}} = \end{aligned}$$

$$= \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(j-1)}\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Т.е. норма  $j$ -итерированного ядра оценена через  $(j-1)$ -итерированное ядро. Рассуждая аналогично, получим оценку нормы  $(j-1)$ -итерированного ядра  $k_1^{(j-1)}(x_1, x_2; \tau_{j-1})$  в пространстве  $L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$ :

$$\|k_1^{(j-1)}\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(j-2)}\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Последнее действие в процессе доказательства теоремы – это получить оценку нормы дважды итерированного ядра  $k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2)$  в пространстве  $L_{p_2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$ . Здесь применяем описанный выше подход, получим необходимое неравенство:

$$\|k_1^{(2)}\|_{L_{p_2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2^j}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|\Pi_\beta k_1^{(1)}\|_{L_{p_2^2 q_2^{j-1}}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Для решения обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского методом последовательных приближений возникает необходимость в бесконечных итерациях. В полученных оценках норм оператора  $R_{\alpha\beta}^j$  (3.3) и его ядер  $k_{\alpha\beta}^{(j)}$  (3.4) при  $j = 1, 2, \dots$  некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций очевидно стремятся к бесконечности при  $j \rightarrow \infty$ . Это приводит к необходимости рассмотрения нового класса  $\mathcal{K}_\infty$  ядер  $k_{\alpha\beta}$  обобщенного частно-интегрального оператора Романовского  $R_{\alpha\beta}$ , т.е.  $k_{\alpha\beta}(x, t_\alpha) \in \mathcal{K}_\infty(D, D_\alpha)$ , если существует и конечна норма  $\|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} = \max_j \left\{ \|k_{\alpha\beta}\|_{L_\infty(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))}; \|\Pi_\beta^j k_{\alpha\beta}\|_{L_\infty(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \right\}$ .

**Теорема 3.4.** Если ядро  $k_{\alpha\beta} \in \mathcal{K}_\infty$ , то существует такое число  $A_\alpha < \infty$  что

$$\|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \|u\|_{U_2}. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись неравенствами (3.3) и (3.4), получим

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha\beta}^j u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}^j}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{j-1} \|\Pi_\beta^{j-1} k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2 q_{\bar{\alpha}}^i}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \|u\|_{U_2(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Хорошо известно, что  $L_p(D)$  вложено в  $L_q(D)$  при  $p > q$ , если область  $D$  конечная. Это приводит к неравенствам

$$\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}}^j}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(q_\alpha, p_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \leq A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty},$$

$$\|k_{\alpha\beta}\|_{L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2 q_{\bar{\alpha}}^i}(D_{\bar{\alpha}}; L_{(p_\alpha, q_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha}))} \leq A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty},$$

где константа  $A_\alpha < \infty$  зависит от области интегрирования. Из неравенства (3.6) следует неравенство (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Заметим, что при выполнении условия  $\lambda A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$  ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \|k_{\alpha\beta}^{(j+1)}(x_{\bar{\alpha}})\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha)}(D_{\alpha, \alpha})}$  сходится абсолютно и равномерно к функции из  $\mathcal{K}_\infty(D_{\bar{\alpha}})$ . Тогда определяемая им функция

$$r_{\alpha\beta}(x; t_\alpha; \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j k_{\alpha\beta}^{(j+1)}(x; t_\alpha) \in \mathcal{K}_\infty(D, D_\alpha) \quad (3.7)$$

называется резольвентой ядра  $k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha)$  обобщенного частно-интегрального оператора  $R_{\alpha\beta}$ . Эта же функция называется резольвентой обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского (1.1).

#### 4. Обобщенное частно-интегральное уравнение Романовского с частным интегралом $R_{\alpha\beta}$

Применяя классический метод последовательных приближений, решение уравнения (1.1) ищем в виде степенного ряда

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(x) \lambda^j. \quad (4.1)$$

Подставляем (4.1) в (1.1) получим равенство степенных рядов по  $\lambda$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x),$$

$$\varphi^{(j)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta \varphi^{(j-1)}(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Выражая  $\varphi^{(j)}(x)$  через  $f(x)$ , имеем

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha) \Pi_\beta f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(1)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha,$$

$$(j = 2, 3, \dots) \quad \varphi^{(j)}(x) = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta \left[ \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) \Pi_\beta^{j-1} f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha \right] d\tau_\alpha =$$

$$\int_{D_\alpha} \left[ \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}(x; \tau_\alpha) \Pi_\beta k_{\alpha\beta}^{(j-1)}(\tau_\alpha, x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha) d\tau_\alpha \right] \Pi_\beta^j f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \int_{D_\alpha} k_{\alpha\beta}^{(j)}(x; t_\alpha) \Pi_\beta^j f(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha.$$

Согласно формуле (3.2) имеем

$$\varphi^{(j)}(x) = \left( R_{\alpha\beta}^j f \right) (x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом, предполагаемое решение (4.1) примет вид следующего ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left( R_{\alpha\beta}^j f \right) (x). \quad (4.2)$$

**Теорема 4.1.** Пусть ядро  $k_{\alpha\beta} \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $f \in U_\infty$  и пусть  $|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$ , тогда существует и единственное решение обобщенного частно-интегрального уравнения Романовского (1.1) в виде операторного ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_\infty}}{1 - |\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}}.$$

**Доказательство.** Ряд (4.1) определяет функцию из пространства  $L_{\mathbf{p}}(D)$ , так как последовательность

$$\varphi^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda^j \left( R_{\alpha\beta}^j f \right) (x)$$

фундаментальная в этом пространстве. Действительно, пусть  $\ell$  – произвольное натуральное число. Тогда

$$\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\| \sum_{j=r+1}^{r+\ell} \lambda^j \left( R_{\alpha\beta}^j f \right) (x) \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \sum_{j=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^j \left\| \left( R_{\alpha\beta}^j f \right) (x) \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

Воспользуемся неравенством (3.6). В результате

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \sum_{j=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \|f\|_{U_2} = \\ &= \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \sum_{j=1}^{\ell} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j \leq \\ &\leq \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^j A_\alpha^j \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}^j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|f\|_{U_2} (|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r \frac{1}{1 - |\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty}}. \quad (4.3)$$

Поскольку  $|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty} < 1$ , то величина  $(|\lambda| A_\alpha \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_\infty})^r$  стремится к нулю с ростом  $r$ . Таким образом, последовательность  $\varphi^{(r)}$  фундаментальная в анизотропном пространстве Лебега  $L_{\mathbf{p}}(D)$ . Итак, мы убедились в существовании функции  $\varphi \in L_{\mathbf{p}}(D)$ , определенной рядом (4.2) и, следовательно, (4.1). Покажем, что эта функция есть решение уравнения (1.1).

Введем оператор

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i R_{\alpha\beta}^i f(x). \quad (4.4)$$

Положим  $\Phi_\infty = \Phi$ :

$$\Phi f(x) = \varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f. \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) и (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f - \Phi f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda^i R_{\alpha\beta}^i f \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} R_{\alpha\beta}^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} R_{\alpha\beta}^i f \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} R_{\alpha\beta}^{r+1} \varphi \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (|\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}})^{r+1} \|\varphi\|_{U_{r+2}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь первый сомножитель стремится к нулю за счет выбора  $\lambda$ , а второй ограничен значением  $\|\varphi\|_{U_{\infty}}$ . Следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f - \Phi f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = 0,$$

т.е. существует сильный предел функциональной последовательности  $\Phi_r f$ , который обозначим  $s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f = \Phi f$  при каждом фиксированном  $f$ . Тогда  $\Phi$  – тоже ограниченный линейный оператор, отображающий  $U_{\infty}$  в  $L_{\mathbf{p}}$ , причем

$$\|\Phi\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$$

и из равенства (4.4) следует

$$\|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_{\infty}}}{1 - |\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}}}.$$

Отсюда вытекает, что множество  $\|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$  ограничено.

Нетрудно проверить, что определенная нами функция (4.2) является решением уравнения (1.1). Действительно, подставляя  $\varphi(x)$  в правую часть уравнения (1.1) получим левую часть этого уравнения:

$$\lambda R_{\alpha\beta} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) \right) + f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) + f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (R_{\alpha\beta}^j f)(x) = \varphi(x).$$

Как мы уже показали

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{U_{\infty}}}{1 - |\lambda| A_{\alpha} \|k_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{K}_{\infty}}},$$

то есть множество  $\|\Phi_r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$  ограничено, и существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^r \lambda^i R_{\alpha\beta}^i \right) f(x) = \Phi f(x).$$

Таким образом, получим ограниченность  $\|\Phi\|$ , причем из существования сильного предела  $\Phi f(x)$  последовательности  $\Phi_r f(x)$  имеем

$$\|\Phi\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}$$

и существует обращающий оператор  $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$ , отображающий  $U_{\infty}$  в  $L_{\mathbf{p}}(D)$ .

Функция

$$\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^{(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^r \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j R_{\alpha\beta}^j f$$

является решением уравнения (1.1) в пространстве  $L_{\mathbf{p}}(D)$ , которое можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{D_{\alpha}} r_{\alpha\beta}(x; t_{\alpha}; \lambda) \Pi_{\beta} f(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha},$$

где  $r(x; t_{\alpha}; \lambda)$  – резольвента (3.7) ядра  $k_{\alpha\beta}$  оператора  $R_{\alpha\beta}$ .

Полученное решение единственно, поскольку решение однородного уравнения равно нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

## 5. Заключение

Представленный результат исследования достаточных условий существования и единственности решения уравнения Романовского в анизотропных пространствах Лебега обобщает ранее полученные результаты в пространствах непрерывных функций двух переменных. Полученное решение представлено в виде операторного ряда Неймана и указаны условия его сходимости. Построены итерации частно-интегральных операторов Романовского и их ядер. Приведены условия их ограниченности и оценки норм. Показана необходимость исследования таких уравнений в пространстве существенно ограниченных функций. Приведенные условия могут применяться для решения задачи  $n$ -связных цепей Маркова, которая сводится к исследованию частно-интегральных уравнений типа Романовского. Проведенное исследование данного класса уравнений создает предпосылки для исследования линейного частно-интегрального уравнения Романовского, включающего в себя сумму частно-интегральных операторов Романовского, функции в которых интегрируются по различным наборам переменных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000.
2. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265, no. 2. P. 196–235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y
3. Kalitvin A. S., Inozemtsev A. I., Kalitvin V. A. About integral equations with multidimensional partial integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, no. 6. P. 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8
4. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I., Trusova N. I. About Fredgholm equations for partial integral in  $\mathbb{R}_2$ . *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 251. № 6. P. 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

5. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 255, no. 6. P. 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0
6. Inozemtsev A. I., Barysheva I. V. Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, no. 4. P. 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5
7. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 191 с.
8. Иноземцев А.И. Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324
9. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations. *Journal Of Applied Engineering Science*. 2018. Vol. 16, № 3. P. 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433
10. Romanovskij, V. Sur une classe d'équations intégrales linéaires. *Acta Math*. 1932. Vol. 59. P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two Dimentional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8
12. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7
13. Иноземцев А. И. Об обобщенных частно-интегральных операторах Романовского в анизотропных пространствах Лебега // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2026. № 100. С. 19–27. DOI: 10.17223/19988621/100/2

*Поступила 27.04.2026; доработана после рецензирования 10.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations*, 2020, 560 p.
2. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “Linear Operators and Equations with Partial Integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **265**:2 (2022), 196–235.

3. A. S. Kalitvin, A. I. Inozemtsev, V. A. Kalitvin, “About integral equations with multi-dimensional partial integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **249**:6 (2020), 954–966.
4. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, N. I. Trusova, “About Fredgholm equations for partial integral in  $\mathbb{R}_2$ ”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 839–849.
5. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **255**:6 (2021), 715–725.
6. A. I. Inozemtsev, I. V. Barysheva, “Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 556–561.
7. A. S. Kalitvin, *Integralnye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Romanovsky integral equations with partial integrals]*, 2007 (In Russ.), 191 p.
8. A. I. Inozemtsev, “On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **27**:3 (2025), 315–324 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324
9. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations”, *Journal Of Applied Engineering Science*, **16**:3 (2018), 441–446.
10. V. Romanovskij, “Sur une classe d’équations intégrales linéaires”, *Acta Math*, **59** (1932), 99–208 (In Fr.). DOI: 10.1007/BF02546501
11. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two dimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 888–892.
12. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 893–899.
13. A. I. Inozemtsev, “On generalized Romanovsky partial integral operators in anisotropic Lebesgye spaces”, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, **100** (2026), 19–27 (In Russ.). DOI: 10.17223/19988621/100/2

*Submitted 27.04.2026; Revised 10.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## Об одном обобщении преобразования Лапласа

**А. М. Собина***ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет  
(г. Уфа, Российская Федерация)**Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В настоящей работе вводится и исследуется новое обобщение классического преобразования Лапласа для функционалов, заданных на пространствах целых функций многих комплексных переменных. В качестве ядра этого преобразования выбрана целая функция специального вида, которая естественным образом обобщает экспоненту и находит применение в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в обобщённых частных производных, а также в теории многомерных аналогов пространств Фока. Одной из ключевых задач теории функций многих комплексных переменных является описание роста целых функций. Для этого используются различные характеристики роста функций, такие как сопряжённые порядки и типы, порядки и типы по каждой переменной и др. В данной работе для функции, задающей ядро обобщённого преобразования Лапласа, вычисляются порядки и типы по каждой переменной, что позволяет охарактеризовать поведение этой функции на бесконечности. Кроме того, в статье устанавливается изоморфизм между пространством, сопряжённым к пространству целых функций многих комплексных переменных, наделённому топологией компактной сходимости, и пространством функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. Этот результат играет важную роль в дальнейших построениях. На его основе доказывается, что введённое обобщённое преобразование Лапласа реализует изоморфизм между пространством непрерывных линейных функционалов над пространством целых функций многих комплексных переменных и пространством целых функций с заданным порядком роста. Таким образом, предлагаемый подход открывает новые возможности для исследования функциональных пространств и их приложений к дифференциальным уравнениям.

**Ключевые слова:** целые функции многих комплексных переменных, порядки и типы целой функции по каждой переменной, обобщённое преобразование Лапласа

**Для цитирования:** Собина А. М. Об одном обобщении преобразования Лапласа // Журнал Средневолжского математического общества. 2026. Т. 28, № 3. С. 193–211. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

*Об авторах:*

**Собина Алиа Мидхатовна**, старший преподаватель кафедры Информационных технологий и прикладной математики, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9014-9508>, [aliya-0887@mail.ru](mailto:aliya-0887@mail.ru)



MSC2020 57N10

# On a generalization of the Laplace transform

**A. M. Sobina***Ufa State Petroleum Technological University (Ufa, Russian Federation)**Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In the paper we introduce and study a new generalization of the classical Laplace transform for functionals defined on spaces of entire functions of several complex variables. The kernel of the transform is chosen to be an entire function of a special form, which naturally generalizes the exponential function and has applications in problems related to differential equations with generalized partial derivatives, as well as in the theory of multidimensional analogues of Fock spaces.

One of the key problems in the theory of functions of several complex variables is the description of growth of entire functions. Various growth characteristics of functions may be used for this purpose, such as conjugate orders and types, orders and types with respect to each variable, and others. In this work, for the function defining the kernel of the generalized Laplace transform, we compute orders and types with respect to each variable, which makes it possible to characterize the function's behaviour at infinity.

Furthermore, we establish an isomorphism between the space dual to the space of entire functions of several complex variables, endowed with the topology of compact convergence, and the space of functions that are analytic in each variable outside some polydisk. This result plays an important role in subsequent constructions. On its basis, we prove that the introduced generalized Laplace transform realizes an isomorphism between the space of continuous linear functionals over the space of entire functions of several complex variables and the space of entire functions with a prescribed order of growth. Thus, the proposed approach opens up new possibilities for the study of function spaces and their applications to differential equations.

**Keywords:** Entire functions of several complex variables, the orders and types of an entire function with respect to each variable, generalized Laplace transform

**For citation:** A. M. Sobina. On a generalization of the Laplace transform. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 193–211. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.193-211

## *About the authors:*

**Aliya M. Sobina**, Senior Lecturer at the Department of Information Technologies and Applied Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9014-9508>, [aliya-0887@mail.ru](mailto:aliya-0887@mail.ru)

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению одного обобщения преобразования Лапласа для функционалов, заданных на целых функциях многих комплексных переменных.

Преобразование Лапласа сопряженного пространства и его обобщения играют значительную роль в анализе функций действительного и комплексного переменного. В различных источниках оно также носит название преобразованием Фурье-Лапласа, Фурье или Фурье-Бореля. Благодаря таким преобразованиям многие проблемы теории операторов свертки, дифференциальных уравнений и теории аппроксимации функций сводятся к задачам из теории аналитических функций (например, описание сопряженных пространств в терминах преобразования Фурье-Лапласа [1, 2], а также реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье-Бореля [3]). Зачастую, более эффективным инструментом в решении задач анализа являются обобщения преобразования Лапласа. Применяют различные способы обобщения. Например, в своих работах О.Э. Яремко и Н.Н. Яремко [4] изучают обобщенное двойное преобразование Лапласа; В.И. Иванов [5] рассматривает двупараметрическое обобщенное преобразование Лапласа. Наиболее распространенным способом построения обобщений преобразования Лапласа является замена экспоненты, которая является ядром классического преобразования Лапласа, на какую-либо другую функцию. В работе С.В. Панюшкина [6] исследуются обобщенные преобразования Фурье, ядром которых служит целая векторозначная функция одной комплексной переменной. Другие подходы к построению обобщенных преобразований Лапласа на основе операторов дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами рассматриваются в работе [7], где также развивается соответствующее операционное исчисление и находится решение уравнения теплопроводности. В настоящей работе в качестве ядра обобщенного преобразования Лапласа берется другая целая функция  $\mathcal{U}_\lambda(z)$ , которая играет важную роль как при изучении дифференциальных операторов в обобщенных частных производных [8, 9], так и в теории многомерных обобщенных пространств Фока [10].

В первом параграфе представлен литературный обзор и основные определения. Во втором параграфе изучается рост целой функции  $\mathcal{U}_\lambda(z)$ , показана связь порядка и типа по каждой переменной этой функции с такими характеристиками формирующих ее многочленов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , как степень и главный член. В третьем параграфе доказывается изоморфизм пространства, сопряженного к пространству целых функций  $n$  комплексных переменных, наделенному топологией компактной сходимости, и пространства функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. В последнем, четвертом параграфе вводится определение обобщенного преобразования Лапласа, ядром которого является функция (2.6), и доказывается, что это преобразование является изоморфизмом между пространством функционалов и пространством функций определенного порядка.

## 2. Основные понятия и определения

Для описания функции  $\mathcal{U}_\lambda(z)$ , а также для удобства дальнейших рассуждений, нам понадобится ряд обозначений. Всюду далее  $n$  – это фиксированное натуральное число. Символом  $\mathbb{N}_0$  будем обозначать множество  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Если  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  –  $n$ -мерная комплексная переменная и  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – мультииндекс (т.е.  $k_j \in \mathbb{N}_0$  для всех  $j = \overline{1, n}$ ), то через  $z^k$  будем обозначать произведение  $z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}$ . Для векторов  $z \in \mathbb{C}^n$  используется норма  $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}$ . Будем применять также обозначения  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  и  $a_k = a_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ . Записи  $\sum_{|k| \geq 0}$  и  $\sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0}$  будем считать эквивалентными записи  $\sum_{k_1 \in \mathbb{N}_0} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{N}_0}$ .

Далее приведём некоторые сведения, необходимые для более точной формулировки

результатов исследования.

## 2.1. Характеристики роста целых функций одной комплексной переменной

В теории целых функций одной комплексной переменной рост функции определяется такими характеристиками, как порядок и тип. Приведём определение этих характеристик, следуя А.Ф. Леонтьеву (см. §1 главы 1 монографии [11]).

**Определение 2.1.** *Говорят, что целая функция  $f(z)$  имеет конечный порядок, если найдётся число  $a > 0$ , удовлетворяющее условию: существует такое  $R > 0$ , что при всех  $z \in \mathbb{C}$ , таких что  $|z| > R$ , выполняется неравенство  $|f(z)| < \exp(|z|^a)$ .*

*Нижняя грань  $\rho_f$  множества чисел  $a$ , удовлетворяющих этому условию, называется порядком функции  $f(z)$ . Если условие не выполняется ни при каком конечном  $a > 0$ , то говорят, что  $f(z)$  имеет бесконечный порядок (т.е.  $\rho_f = \infty$ ).*

**Определение 2.2.** *Пусть целая функция  $f(z)$  имеет порядок  $0 < \rho_f < \infty$ . Говорят, что  $f(z)$  имеет конечный тип при порядке  $0 < \rho_f < \infty$ , если найдётся число  $b > 0$ , удовлетворяющее условию: существует такое  $R > 0$ , что при всех  $z \in \mathbb{C}$ , таких что  $|z| > R$ , выполняется неравенство  $|f(z)| < \exp(b|z|^{\rho_f})$ .*

*Нижняя грань  $\sigma_f$  множества чисел  $b$ , удовлетворяющих этому условию, называется типом функции  $f(z)$  при порядке  $\rho_f$ . Если условие не выполняется ни при каком конечном  $b > 0$ , то говорят, что  $f(z)$  имеет бесконечный тип (т.е.  $\sigma_f = \infty$ ) при порядке  $\rho_f$ .*

Из определений 2.1 и 2.2 вытекают следующие формулы для порядка и типа целой функции одной комплексной переменной (см. [11], глава 1, формулы (1.5) и (1.8)):

$$\rho_f = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z)|}{\ln |z|} \quad \text{и} \quad \sigma_f = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|^{\rho_f}}. \quad (2.1)$$

Кроме того, А.Ф. Леонтьев вывел (см. теорему 1.1 на стр. 12 монографии [11]) следующие формулы, выражающие порядок  $\rho_f$  и тип  $\sigma_f$  целой функции  $f$ , задаваемой степенным рядом  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , через коэффициенты этого ряда:

$$\rho_f = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |1/a_m|} \quad \text{и} \quad \sigma_f = \frac{1}{e\rho_f} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m |a_m|^{\rho_f/m}. \quad (2.2)$$

**Замечание 2.1.** *Из определения 2.2 следует, что если целая функция  $f(z)$  имеет тип  $\sigma_f < \infty$  при порядке  $\rho_f$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся константа  $B_\varepsilon > 0$ , такая что при всех  $z \in \mathbb{C}$  выполняется неравенство  $|f(z)| \leq B_\varepsilon \exp((\sigma_f + \varepsilon)|z|^{\rho_f})$ .*

## 2.2. Характеристики роста целых функций многих комплексных переменных

В теории целых функций многих комплексных переменных, в отличие от случая одной комплексной переменной, существуют несколько понятий порядков и типов, характеризующих рост целых функций с разных точек зрения. Например, в работах Л.С. Маергойза [12] и Л.И. Ронкина [13] введены следующие характеристики роста:

- 1) порядок и тип целой функции по каждой переменной;
- 2) порядок и тип целой функции по совокупности переменных;

3) системы сопряженных порядков и сопряженных типов целой функции.

В настоящей работе исследованы порядок и тип по каждой переменной. Рассмотрены несколько вариантов, некоторые из которых, согласно Л.С. Маергойзу [12], можно описать следующим образом. Пусть целая функция  $f$  от  $n$  комплексных переменных задана  $n$ -кратным степенным рядом  $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$ . С одной стороны, рост этой функции по каждой переменной  $z_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  характеризуется при фиксированных значениях остальных переменных  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$  порядком  $\rho_j(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$  целой функции  $g_j(z) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$ . С другой стороны, рост целой функции  $f(z)$  по переменной  $z_j$  можно сравнить с ростом по переменной  $r_j$  таких мажорант функции  $f(z)$ , как  $N_f(r_1, \dots, r_n) = \sum_{|k| \geq 0} |a_k| r_1^{k_1} \cdot \dots \cdot r_n^{k_n}$ , где  $r_1 = |z_1|, \dots, r_n = |z_n|$ , и  $M_f(r_1, \dots, r_n) = \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r_n\}$ . В той же работе [12] Л.С. Маергойз утверждает со ссылкой на исследования других авторов, что при каждом  $j = \overline{1, n}$  функции  $\rho_i(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$  почти всюду в  $\mathbb{C}^n$  совпадают с порядками указанных мажорант  $N_f$  и  $M_f$  по переменной  $r_j$ .

Мы будем работать в рамках первого из описанных выше вариантов, используя следующее определение.

**Определение 2.3.** Пусть  $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$  – целая функция от  $n$  комплексных переменных, и  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

1) Порядком функции  $f$  по переменной  $z_j$  будем называть порядок  $\rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$  целой функции  $g_j(z) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , при фиксированных значениях переменных  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ .

2) Если  $0 < \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) < \infty$ , то типом функции  $f$  по переменной  $z_j$  будем называть тип  $\sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$  функции  $g_j(z)$ .

Из этого определения и формул (2.1) при каждом  $j = \overline{1, n}$  вытекают следующие два равенства, соответственно для порядка  $\rho_{f,j}$  и типа  $\sigma_{f,j}$  целой функции  $f(z)$  от  $n$  комплексных переменных по переменной  $z_j$ :

$$\rho_{f,j} = \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{\ln |z|}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{f,j} = \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{|z|^{\rho_{f,j}}}. \quad (2.4)$$

### 2.3. Обобщенная экспонента

**Замечание 2.2.** Пусть  $p$  – некоторый многочлен с комплексными коэффициентами, имеющий степень  $q \in \mathbb{N}$ , такой, что  $p(s) \neq 0$  при любых  $s \in \mathbb{N}$ . Для каждого  $\lambda \in \mathbb{C}$  зададим функцию  $y_\lambda(z)$  от комплексной переменной  $z$  с помощью степенного ряда

$$y_\lambda(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(k)}. \quad (2.5)$$

**Замечание 2.3.** Пусть  $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – некоторая система комплексных многочленов со степенями  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$  соответственно. Предположим, что все эти многочлены имеют ненулевые старшие коэффициенты, а также что для любых  $j = \overline{1, n}$  и  $s \in \mathbb{N}$  верно неравенство  $p_j(s) \neq 0$ . Для каждого набора  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

зададим функцию  $\mathcal{Y}_\lambda(z)$  от  $n$ -мерной комплексной переменной  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  с помощью следующего равенства:

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = y_{\lambda_1}(z_1) \cdot y_{\lambda_2}(z_2) \cdot \dots \cdot y_{\lambda_n}(z_n) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right). \quad (2.6)$$

**Замечание 2.4.** Для любого мультииндекса  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и для каждого  $j = \overline{1, n}$  введем следующие обозначения:  $P_{j, \mathbf{k}} = 1$ , если  $k_j = 0$ , и  $P_{j, \mathbf{k}} = p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)$ , если  $k_j > 0$ . Положим также

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1, \mathbf{k}} \cdot P_{2, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}}. \quad (2.7)$$

Тогда, раскрывая скобки в правой части равенства (2.6), можно получить представление функции  $\mathcal{Y}_\lambda(z)$  в виде  $n$ -кратного степенного ряда

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} a_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1, \mathbf{k}} \cdot P_{2, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}} z^{\mathbf{k}}. \quad (2.8)$$

В нашей работе вычисляются такие характеристики роста функции  $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ , заданной в (2.6), как порядок и тип по каждой переменной. Далее с помощью этой функции вводится изучаемое в настоящей работе обобщенное преобразование Лапласа.

### 3. Порядок и тип функции $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ по каждой переменной

В данном параграфе изучается рост целых функций  $y_\lambda(z)$  и  $\mathcal{Y}_\lambda(z)$ .

#### 3.1. Порядок и тип обобщённой экспоненты $y_\lambda(z)$

Сначала необходимо показать, что функция  $y_\lambda(z)$ , зависящая от одной комплексной переменной и определяемая равенством (2.5), является целой, а также вычислить её порядок и тип. Это будет сделано в предложении 3.1, для доказательства которого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и  $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$  — такая последовательность комплексных чисел, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m - \alpha \ln m) = \beta. \quad (3.1)$$

Тогда последовательность  $\{(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m)/m - \alpha \ln m\}_{m=1}^{\infty}$  также имеет предел, и выполняется равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m}{m} - \alpha \ln m \right) = \beta - \alpha. \quad (3.2)$$

**Доказательство.**

1) Сначала докажем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \right) = -1. \quad (3.3)$$

Так как функция  $\ln x$  не убывает, то при любом  $m \in \mathbb{N}$  верна оценка

$$\int_1^m \ln x \, dx \leq \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m \leq \int_1^m \ln x \, dx + \ln m.$$

Вычисляя интегралы и деля обе части этого неравенства на  $m$ , находим:

$$-1 + \frac{1}{m} \leq \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \leq -1 + \frac{1 + \ln m}{m}.$$

Переходя здесь к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим нужное нам равенство (3.3).

2) Далее для доказательства формулы (3.2) применим известную теорему Чезаро-Штольца. Из неё, в частности, вытекает, что если числовая последовательность сходится, то последовательность её средних арифметических сходится к тому же пределу. Отсюда и из условия (3.1) получаем, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{(\gamma_1 - \alpha \ln 1) + (\gamma_2 - \alpha \ln 2) + \dots + (\gamma_m - \alpha \ln m)}{m} \right) = \beta.$$

Из этого равенства и из формулы (3.3) следует нужное соотношение:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m}{m} - \alpha \ln m \right) = \beta + \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln m}{m} - \ln m \right) = \beta - \alpha.$$

Доказательство завершено.

**Предложение 3.1.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , и многочлен  $p(z)$  степени  $q \in \mathbb{N}$  с комплексными коэффициентами имеет вид  $p(z) = t_q z^q + t_{q-1} z^{q-1} + \dots + t_0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , где  $t_q \neq 0$ . Тогда функция  $y_\lambda(z)$ , заданная формулой (2.5), является целой, имеет порядок  $\rho_{y_\lambda} = 1/q$  и тип  $\sigma_{y_\lambda} = q|\lambda/t_q|^{1/q}$ .

**Доказательство.** Сначала вычислим величины  $\rho_f$  и  $\sigma_f$  для функции  $f = y_\lambda$  по формулам Леонтьева (2.2), а затем покажем, что эта функция целая.

1) Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  положим  $\gamma_m = \ln |p(m)|$ . Тогда

$$\gamma_m = \ln |t_q m^q + t_{q-1} m^{q-1} + \dots + t_0| = \ln |t_q| + q \ln m + \ln \left| 1 + \frac{t_{q-1}}{m t_q} + \dots + \frac{t_0}{m^q t_q} \right|.$$

Отсюда следует, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m - \alpha \ln m) = \beta$ , где  $\alpha = q$  и  $\beta = \ln |t_q|$ . Таким образом, последовательность  $\{\gamma_m\}_{m=1}^\infty$  удовлетворяет условиям леммы 3.1. Согласно этой лемме, выполняется равенство (3.2), т.е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} ((\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m)/m - \alpha \ln m) = \beta - \alpha$ . Подставляя сюда значения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), приходим к формуле

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln |p(1)| + \ln |p(2)| + \dots + \ln |p(m)|}{m} - q \ln m \right) = \ln |t_q| - q. \quad (3.4)$$

Отсюда получаем следующее равенство:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| - m \ln |\lambda|}{m \ln m} = q$ .

Поэтому  $\rho_f = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |1/a_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{\ln |p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| - m \ln |\lambda|} = \frac{1}{q}$ .

2) Из формулы (3.4) вытекает равенство  $\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \frac{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}}{m^q} = \ln \frac{|t_q|}{e^q}$ . Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}}{m^q} = \frac{|t_q|}{e^q}. \quad (3.5)$$

Отсюда и из формул (2.2) находим:

$$\sigma_f = \frac{1}{e^{\rho_f}} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m |a_m|^{\rho_f/m} = \frac{q|\lambda|^{1/q}}{e} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^q}{|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}} \right)^{1/q} = q \left| \frac{\lambda}{t_q} \right|^{1/q}.$$

3) Из предыдущего равенства вытекает, что  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = 0$ . Поэтому, используя формулу Коши-Адамара, получаем следующее значение для радиуса сходимости  $R_{\text{сх}}$  ряда (2.5):  $R_{\text{сх}} = 1/\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = \infty$ . Таким образом, функция  $y_\lambda(z)$ , заданная формулой (2.5), является целой.

До к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

**З а м е ч а н и е 3.1.** Из равенства (3.5) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно больших  $m \in \mathbb{N}$  верно неравенство  $|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)|^{1/m}/m^q < |t_q|e^{-q} + \varepsilon$ . Поэтому найдётся такая константа  $Q_\varepsilon > 0$ , что при всех  $m \in \mathbb{N}$  выполняется оценка  $|p(1) \cdot p(2) \cdot \dots \cdot p(m)| \leq Q_\varepsilon (|t_q|e^{-q} + \varepsilon)^m m^{qm}$ .

**З а м е ч а н и е 3.2.** В силу предложения 3.1, функция  $y_1(z)$  имеет порядок  $\rho_{y_1} = 1/q$  и тип  $\sigma_{y_1} = q|t_q|^{-1/q}$ . Значит, согласно замечанию 2.1, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $B_\varepsilon > 0$ , что  $|y_1(z)| < B_\varepsilon \exp((q|t_q|^{-1/q} + \varepsilon)|z|^{1/q})$  при всех  $z \in \mathbb{C}$ . Заменяя здесь  $z$  на  $\lambda z$  и воспользовавшись равенством  $y_\lambda(z) = y_1(\lambda z)$ , получим оценку

$$|y_\lambda(z)| \leq B_\varepsilon \exp((q|t_q|^{-1/q} + \varepsilon) \cdot |\lambda z|^{1/q}) \quad \text{при всех } \lambda, z \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

### 3.2. Порядок и тип произведения целых функций

Согласно определению 2.3, функция  $\mathcal{Y}_\lambda(z) = \mathcal{Y}_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$  является произведением функций  $y_{\lambda_1}(z_1)$ ,  $y_{\lambda_2}(z_2)$ ,  $\dots$ ,  $y_{\lambda_n}(z_n)$ . Поэтому для вычисления порядка и типа функции  $\mathcal{Y}_\lambda(z)$  нам понадобится следующее простое утверждение о порядке и типе произведения целых функций. Оно известно, для полноты изложения ниже приведено его доказательство.

**Предложение 3.2.** Пусть для каждого  $j = \overline{1, n}$  задана целая функция одного комплексного переменного  $h_j(z)$ , которая имеет порядок  $\rho_{h_j} \in (0; +\infty)$  и тип  $\sigma_{h_j}$ . Пусть, кроме того, целая функция  $f$  от  $n$  комплексных переменных при любых  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  определяется равенством  $f(z) = h_1(z_1) \cdot h_2(z_2) \cdot \dots \cdot h_n(z_n)$ . Тогда при каждом  $j = \overline{1, n}$  и любых фиксированных значениях переменных  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ , не являющихся нулями функций  $h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_n$  соответственно, функция  $f$  имеет по переменной  $z_j$  порядок  $\rho_{h_j}$  и тип  $\sigma_{h_j}$  при порядке  $\rho_{h_j}$ . Другими словами, при каждом  $j = \overline{1, n}$  и любых  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , таких что  $h_1(z_1) \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n) \neq 0$ , выполняются равенства

$$\rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \rho_{h_j} \quad \text{и} \quad \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \sigma_{h_j}. \quad (3.7)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный индекс  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot \dots \cdot h_n(z_n) \neq 0$ . Тогда, в силу определения 2.3, а также

формул (2.3) и (2.1), порядок  $\rho_{f,j}$  можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho_{f,j} &= \rho_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{\ln |z|} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln (\ln |h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n)| + \ln |h_j(z)|)}{\ln |z|} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |h_j(z)|}{\ln |z|} = \rho_{h_j}.\end{aligned}$$

Аналогично, используя формулу (2.4), находим тип  $\sigma_{f,j}$  функции  $f$  по переменной  $z_j$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{f,j} &= \sigma_{f,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |h_1(z_1) \cdot \dots \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot \dots \cdot h_n(z_n)| + \ln |h_j(z)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \\ &= \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |h_j(z)|}{|z|^{\rho_{f,j}}} = \sigma_{h_j}.\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

**Замечание 3.3.** В предложении 3.2 при каждом  $j = \overline{1, n}$  целая функция  $h_j(z)$  не постоянна, так как  $\rho_{h_j} \in (0; +\infty)$ . По теореме единственности  $h_j(z)$  имеет в  $\mathbb{C}$  только изолированные нули. Следовательно, условие  $h_1(z_1) \cdot h_{j-1}(z_{j-1}) \cdot h_{j+1}(z_{j+1}) \cdot h_n(z_n) \neq 0$  выполняется для всех наборов  $(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ , за исключением не более, чем счётного числа таких наборов. Таким образом, согласно предложению 3.2, равенства (3.7) выполняются в  $\mathbb{C}^{n-1}$  всюду, кроме не более, чем счётного числа точек (а значит, почти всюду относительно меры Лебега).

### 3.3. Порядок и тип функции $\mathcal{U}_\lambda(z)$ по каждой переменной

Пользуясь полученными результатами, найдем порядок и тип функции  $\mathcal{U}_\lambda(z)$ , заданной в определении 2.3.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – комплексные многочлены степеней  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$  соответственно. Предположим, что при каждом  $j = \overline{1, n}$  старший коэффициент  $t_{j,q_j}$  многочлена  $p_j$  не равен нулю, а также  $p_j(s) \neq 0$  при любых  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого набора  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ , не содержащего нулей, при каждом  $j = \overline{1, n}$  целая функция от  $n$  комплексных переменных

$$\mathcal{U}_\lambda(z) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right)$$

имеет по переменной  $z_j$  порядок  $\rho_{\mathcal{U}_\lambda,j} = \rho_{\mathcal{U}_\lambda,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = 1/q_j$  и тип  $\sigma_{\mathcal{U}_\lambda,j} = \sigma_{\mathcal{U}_\lambda,j}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = q_j |\lambda_j / t_{j,q_j}|^{1/q_j}$  при порядке  $\rho_{\mathcal{U}_\lambda,j}$ , для любых фиксированных значений переменных  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ , за исключением наборов, для которых  $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{\lambda_i}(z_i) = 0$ .

**Замечание 3.4.** Утверждение теоремы сразу следует из предложений 3.1 и 3.2, а также замечания 3.3.

**Замечание 3.5.** Так как  $\mathcal{Y}_\lambda(z) = y_{\lambda_1}(z_1) \cdot y_{\lambda_2}(z_2) \cdot \dots \cdot y_{\lambda_n}(z_n)$  по определению 2.3, то, применяя к каждому сомножителю неравенство (3.6), получим оценку

$$|\mathcal{Y}_\lambda(z)| \leq C \exp(\alpha_1 |\lambda_1 z_1|^{1/q_1} + \dots + \alpha_n |\lambda_n z_n|^{1/q_n}) \quad \text{для любых } \lambda, z \in \mathbb{C}^n, \quad (3.8)$$

где  $C > 0$  и  $\alpha_j = q_j |t_{q_j}|^{-1/q_j} + \varepsilon > 0$  при всех  $j = \overline{1, n}$ .

#### 4. Изоморфизм пространств $H^*(\mathbb{C}^n)$ и $H_0(\{\infty\}^n)$

Обозначим через  $C(\mathbb{C}^n)$  пространство всех непрерывных функций  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , наделенное локально-выпуклой топологией компактной сходимости (т.е. равномерной сходимости на компактах). Эту топологию можно задать с помощью счётной системы полунорм  $\{\pi_m\}_{m=1}^\infty$ , определяемых для любых  $m \in \mathbb{N}$  и  $f \in C(\mathbb{C}^n)$  равенством  $\pi_m(f) = \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}$ . Символом  $H(\mathbb{C}^n)$  обозначим подпространство в  $C(\mathbb{C}^n)$ , состоящее из всех целых функций, наделенное той же топологией. Пусть  $H^*(\mathbb{C}^n)$  – пространство всех линейных непрерывных функционалов на  $H(\mathbb{C}^n)$ .

**Определение 4.1.** Через  $H_0(\{\infty\}^n)$  далее будем обозначать линейное пространство всех комплекснозначных функций, определённых и аналитических по каждой переменной вне некоторого круга, и стремящихся к нулю на бесконечности. То есть для каждой функции  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$  найдётся такое  $r_g > 0$ , что  $g(z)$  определена и является аналитической в области  $\Omega_{r_g} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| > r_g, j = \overline{1, n}\}$ , причём  $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} g(z) = 0$ . Будем при этом отождествлять в  $H_0(\{\infty\}^n)$  любые две функции, имеющие одинаковые значения на пересечении их областей определения.

Следующее замечание характеризует функции  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$  через их ряды Лорана.

**Замечание 4.1.** Любая функция  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ , как это следует из определения 4.1, раскладывается в  $\Omega_{r_g}$  в кратный ряд Лорана (см. [14], теорема 1.118):

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}, \quad (4.1)$$

коэффициенты которого при любых  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  и  $\varepsilon > 0$  вычисляются по формуле

$$b_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} z_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n-1} g(z) dz_1 \dots dz_n. \quad (4.2)$$

Из этой формулы получается следующая оценка для коэффициентов:

$$|b_{k_1, \dots, k_n}| \leq (r_g + \varepsilon)^{k_1 + \dots + k_n - n} \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, верно и обратное утверждение: если функция  $g$  в некоторой окрестности точки  $\infty = (\infty, \dots, \infty) \in \mathbb{C}^n$  раскладывается в ряд Лорана (4.1), такой что при некоторых  $M > 0$  и  $r > 0$  для любых  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  коэффициенты удовлетворяют оценке  $|b_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$ , то функция  $g$  принадлежит классу  $H_0(\{\infty\}^n)$ .

Из результатов работы Кёте [15] вытекает, что в случае  $n = 1$  пространства  $H^*(\mathbb{C}^n)$  и  $H_0(\{\infty\}^n)$  изоморфны. Следующая теорема является попыткой распространить этот результат на случай  $n > 1$ . В несколько другом направлении данный результат Кёте обобщён в работе [16] (см. также имеющиеся там ссылки).

**Теорема 4.1.** *Пространство  $H^*(\mathbb{C}^n)$  линейно изоморфно пространству  $H_0(\{\infty\}^n)$ . Изоморфизм  $\Psi: H_0(\{\infty\}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}^n)$ ,  $g \mapsto \Psi_g$  можно задать равенством*

$$\Psi_g(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n, \quad f \in H(\mathbb{C}^n), \quad (4.3)$$

где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число.

**Доказательство.** Сначала заметим, что правая часть формулы (4.3) не зависит от  $\varepsilon > 0$ , так как функции  $f$  и  $g$  являются аналитическими в области  $\Omega_{r_g}$ .

Нам достаточно проверить следующие четыре факта: то, что  $\Psi_g \in H^*(\mathbb{C}^n)$  для любой  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ , а также линейность, инъективность и сюръективность отображения  $\Psi: H_0(\{\infty\}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}^n)$ . Переходим к доказательству этих фактов.

1) Если  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ , то функционал  $\Psi_g$ , заданной формулой (4.3), очевидно, является линейным по  $f \in H(\mathbb{C}^n)$ . Его непрерывность следует из оценки

$$|\Psi_g(f)| \leq (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\} \cdot \pi_m(f)$$

для любого натурального  $m \geq r_g + \varepsilon$ . Итак,  $\Psi$  действует из  $H_0(\{\infty\}^n)$  в  $H^*(\mathbb{C}^n)$ .

2) Линейность отображения  $\Psi: g \mapsto \Psi_g$  сразу видна из формулы (4.3).

3) Покажем, что отображение  $\Psi$  инъективно. Для этого достаточно показать, что его ядро  $\text{Ker}(\Psi)$  равно нулю. Итак, предположим, что  $g \in \text{Ker}(\Psi) \subset H_0(\{\infty\}^n)$ , т.е.

$$\Psi_g(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n = 0 \quad \text{при всех } f \in H(\mathbb{C}^n). \quad (4.4)$$

Согласно замечанию 4.1, функция  $g$  раскладывается в кратный ряд Лорана (4.1), коэффициенты которого при любых  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  вычисляются по формуле (4.2). Из равенств (4.2) и (4.4) при  $f(z) = z_1^{k_1-1} \dots z_n^{k_n-1}$  следует, что  $b_{k_1, \dots, k_n} = 0$  при всех  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $g(z) \equiv 0$ . Таким образом, отображение  $\Psi$  инъективно.

4) Покажем, что  $\Psi$  сюръективно, т.е. для любого функционала  $F_0 \in H^*(\mathbb{C}^n)$  существует функция  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ , для которой  $\Psi_g = F_0$ .

Итак, пусть  $F_0 \in H^*(\mathbb{C}^n)$ . Поскольку  $H(\mathbb{C}^n)$  — это линейное подпространство в  $C(\mathbb{C}^n)$ , то, согласно теореме Хана-Банаха,  $F_0$  можно продолжить до линейного непрерывного функционала  $F$  на  $C(\mathbb{C}^n)$ . Из непрерывности  $F$  вытекает существование таких  $m \in \mathbb{N}$  и  $M > 0$ , что для всех  $f \in C(\mathbb{C}^n)$  верно соотношение

$$|F(f)| \leq M \cdot \pi_m(f) = M \cdot \max\{|f(z)| \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}.$$

Из этого соотношения, в силу теоремы Рисса-Маркова, следует, что на полидиске  $\Pi_m = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leq m, \dots, |z_n| \leq m\}$  существует борелевская счетно-аддитивная комплексная мера  $\nu_m$ , для которой при всех  $f \in C(\mathbb{C}^n)$  выполняется равенство

$$F(f) = \int_{\Pi_m} f d\nu_m. \quad (4.5)$$

Далее, зададим на множестве  $\Omega_m = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| > m, j = \overline{1, n}\}$  функцию  $g(z)$  следующим образом: для каждого  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega_m$  положим

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)}. \quad (4.6)$$

Теперь убедимся, что функция  $g$  принадлежит пространству  $H_0(\{\infty\}^n)$ . Соотношение  $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} g(z) = 0$  вытекает из следующей оценки, которая верна при всех  $z \in \Omega_m$ :

$$|g(z)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d|\nu_m|(\xi)}{(|z_1| - |\xi_1|) \cdot \dots \cdot (|z_n| - |\xi_n|)} \leq \frac{|\nu_m|(\Pi_m)}{(2\pi)^n (|z_1| - m) \cdot \dots \cdot (|z_n| - m)},$$

где  $|\nu_m|$  — вариация меры  $\nu_m$ . Чтобы показать, что функция  $g(z)$  является аналитической в области  $\Omega_m$ , сначала разложим в ряд Тейлора ядро Коши:

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{l_1}}{z_1^{l_1+1}} \cdot \dots \cdot \sum_{l_n=0}^{\infty} \frac{\xi_n^{l_n}}{z_n^{l_n+1}} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{\xi_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n-1}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}.$$

Этот ряд при каждом  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega_m$  сходится равномерно по  $\xi \in \Pi_m$ . Умножая его на  $1/(2\pi i)^n$  и интегрируя по  $d\nu_m(\xi)$ , с учётом формулы (4.6), придём к равенству

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}, \quad (4.7)$$

где

$$b_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \xi_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n-1} d\nu_m(\xi) \quad \text{при любых } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Ряд (4.7) сходится при всех  $z \in \Omega_m$ , поэтому функция  $g(z)$  аналитична на  $\Omega_m$ .

Таким образом, в соответствии с определением 4.1, функция  $g$  принадлежит пространству  $H_0(\{\infty\}^n)$ , причем для неё  $r_g = m$ .

Для завершения доказательства теоремы остаётся для любой  $f \in H(\mathbb{C}^n)$  и произвольного положительного  $\varepsilon$  проверить равенство

$$F_0(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n. \quad (4.8)$$

Действительно, подставляя сюда формулу (4.6), меняя порядок интегрирования и используя многомерную формулу Коши, а также формулу (4.5), правую часть этого равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z)dz_1 \dots dz_n = \\ & = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \frac{f(z)}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_m} \frac{d\nu_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)} dz_1 \dots dz_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Pi_m} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \frac{f(z) dz_1 \dots dz_n}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\nu_m(\xi) = \\
&= \int_{\Pi_m} f(\xi) d\nu_m(\xi) = F(f) = F_0(f).
\end{aligned}$$

Итак, отображение  $\Psi$  сюръективно.

Доказательство завершено.

В следующем предложении значения функционала  $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$  выражаются через коэффициенты ряда Лорана соответствующей ему функции  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ .

**Предложение 4.1.** Пусть функция  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$  имеет ряд Лорана

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}, \quad z \in \Omega_{r_g}.$$

и функционал  $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$  задаётся равенством

$$F(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z) g(z) dz_1 \dots dz_n. \quad (4.9)$$

Тогда значение функционала  $F$  на функции  $f \in H(\mathbb{C}^n)$ , имеющей ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (4.10)$$

может быть вычислено по формуле

$$F(f) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot b_{k_1+1, \dots, k_n+1}.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из формул (4.9), (4.10), (4.2) и цепочки равенств

$$\begin{aligned}
F(f) &= \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} g(z) dz_1 \dots dz_n = \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \cdots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} g(z) dz_1 \dots dz_n = \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot (2\pi i)^n b_{k_1+1, \dots, k_n+1} = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot b_{k_1+1, \dots, k_n+1}.
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

## 5. Обобщенное преобразование Лапласа на пространстве $H^*(\mathbb{C}^n)$

Целая функция  $\mathcal{Y}_\lambda$ , называемая обобщённой экспонентой, была введена нами в определении 2.3 в предположении, что задана система  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  таких комплексных многочленов с положительными степенями, что  $p_j(s) \neq 0$  при любых  $j = \overline{1, n}$  и  $s \in \mathbb{N}$ . В силу равенств (2.6) и (2.8), для любых  $\lambda \in \mathbb{C}^n$  и  $z \in \mathbb{C}^n$  имеем:

$$\mathcal{Y}_\lambda(z) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + \sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_j z_j)^{k_j}}{p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)} \right) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{P_{1,\mathbf{k}} \cdot P_{2,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}} z^{\mathbf{k}}, \quad (5.1)$$

где  $P_{j,\mathbf{k}} = 1$ , если  $k_j = 0$ , и  $P_{j,\mathbf{k}} = p_j(1) \cdot p_j(2) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)$ , если  $k_j > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Определение 5.1.** Обобщённым преобразованием Лапласа произвольного функционала  $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$  назовём функцию  $\Phi_{\mathbf{p}}(F) = \tilde{F}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , определяемую равенством

$$\tilde{F}(\lambda) = F(\mathcal{Y}_\lambda) = \langle F, \mathcal{Y}_\lambda(\cdot) \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Теорема 4.1 позволяет нам рассматривать обобщённое преобразование Лапласа как оператор  $\Phi_{\mathbf{p}}$  на пространстве функций  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ . В следующем предложении результат преобразования выражен через коэффициенты ряда Лорана функции  $g$ . Его доказательство сразу вытекает из определения 5.1, формулы (5.1) и предложения 4.1.

**Предложение 5.1.** Пусть функционал  $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$  задаётся равенством

$$F(f) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} f(z)g(z) dz_1 \dots dz_n, \quad (5.2)$$

где функция  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$  имеет ряд Лорана  $g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}}$ .

Тогда его обобщённое преобразование Лапласа  $\tilde{F}(\lambda)$  является целой функцией, и при любом  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  может быть записано в виде

$$\tilde{F}(\lambda) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} \frac{b_{k_1+1, \dots, k_n+1}}{P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}} \lambda_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n}. \quad (5.3)$$

**Замечание 5.1.** Предложение 5.1 показывает, что отображение  $\Phi_{\mathbf{p}}: F \rightarrow \tilde{F}$  инъективно, и следовательно, является линейным изоморфизмом между пространством  $H^*(\mathbb{C}^n)$  и его образом. Из замечания 4.1 вытекает, что образ  $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$  состоит из всех целых функций  $h(\lambda)$ , у которых коэффициенты ряда Тейлора

$$h(\lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} d_{k_1, \dots, k_n} \lambda_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n},$$

при некоторых  $D > 0$  и  $r > 0$  для всех  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  подчиняются неравенству

$$|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}.$$

В силу формулы (5.3), оператор  $\Phi_{\mathbf{p}}^{-1}$ , обратный к обобщённому преобразованию Лапласа, переводит функцию  $h(\lambda) \in \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$  в функционал  $F = \Phi_{\mathbf{p}}^{-1}h \in H^*(\mathbb{C}^n)$ ,

определяемый по формуле (5.2) функцией  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$ , задаваемой рядом Лорана

$$g(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} \frac{d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}}{z_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n+1}}.$$

При этом, согласно предложению 4.1, значения  $F(f)$  для функции  $f \in H(\mathbb{C}^n)$ , имеющей ряд Тейлора  $f(z) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}$ , можно вычислять по формуле

$$F(f) = (\Phi_{\mathbf{p}}^{-1} h)(f) = (2\pi i)^n \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0} P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}} \cdot c_{k_1, \dots, k_n} \cdot d_{k_1, \dots, k_n}.$$

Далее в теореме 5.1 мы несколько по-другому опишем образ  $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ , а именно, в терминах ограничений на рост входящих в него функций.

**Определение 5.2.** Пусть задана система  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  комплексных многочленов, имеющих соответственно степени  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ . Через  $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$  будем обозначать класс тех целых функций  $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , для которых существуют положительные константы  $M > 0$  и  $\beta_1, \dots, \beta_n > 0$ , такие что

$$|h(\lambda)| \leq M \cdot \exp(\beta_1 |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \beta_n |\lambda_n|^{1/q_n}) \quad \text{при всех } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n. \quad (5.4)$$

**Теорема 5.1.** Обобщённое преобразование Лапласа  $\Phi_{\mathbf{p}}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами  $H^*(\mathbb{C}^n)$  и  $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ .

**Доказательство.** 1) Докажем сначала включение  $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n)) \subset H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ , т.е. что функция  $\tilde{F} = \Phi_{\mathbf{p}}(F)$  при любом  $F \in H^*(\mathbb{C}^n)$  принадлежит классу  $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ . Применяя интегральное представление (4.3) функционала  $F$  и определение 5.1, найдём:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_{|z_1|=r_g+\varepsilon} \dots \int_{|z_n|=r_g+\varepsilon} \mathcal{Y}_{\lambda}(z) g(z) dz_1 \dots dz_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

где  $g \in H_0(\{\infty\}^n)$  и  $\varepsilon > 0$ . Далее, в силу неравенства (3.8) из замечания 3.5, получим:

$$|\tilde{F}(\lambda)| \leq (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot C \exp(\alpha_1(r_g + \varepsilon)^{1/q_1} |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \alpha_n(r_g + \varepsilon)^{1/q_n} |\lambda_n|^{1/q_n}) \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

при некоторых положительных  $C$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Итак, верна оценка

$$|\tilde{F}(\lambda)| \leq M \cdot \exp(\beta_{q_1} |\lambda_1|^{1/q_1} + \dots + \beta_n |\lambda_n|^{1/q_n}), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

где  $M = (2\pi(r_g + \varepsilon))^n \cdot C \cdot \max\{|g(z)| \mid |z_1| = \dots = |z_n| = r_g + \varepsilon\}$  и  $\beta_j = \alpha_j(r_g + \varepsilon)^{1/q_j}$  при каждом  $j = \overline{1, n}$ . Следовательно,  $\tilde{F} = \Phi_{\mathbf{p}}(F) \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ .

2) Докажем теперь обратное включение  $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n) \subset \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ , т.е. что любая функция  $h \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$  принадлежит образу  $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$ . Согласно замечанию 5.1, для этого достаточно проверить, что у каждой функции  $h \in H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$  коэффициенты её ряда Тейлора  $h(\lambda) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq 0} d_{\mathbf{k}} \lambda^{\mathbf{k}}$  для некоторых  $D > 0$  и  $r > 0$  при всех  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  подчиняются неравенству  $|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$ .

а) Сначала оценим произведение  $|P_{1, \mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n, \mathbf{k}}|$ . В силу замечания 3.1, для каждого  $j = \overline{1, n}$  найдутся такие положительные числа  $Q_j$  и  $\gamma_j$ , что при всех  $k_j \in \mathbb{N}$  выполняется

оценка  $|P_{j,\mathbf{k}}| = |p_j(1) \cdot \dots \cdot p_j(k_j)| \leq Q_j \cdot \gamma_j^{k_j} \cdot k_j^{q_j k_j}$ . Следовательно,  $|P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq Q \cdot \gamma^{k_1 + \dots + k_n} \cdot k_1^{q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{q_n k_n}$  где  $Q = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_n$ ,  $\gamma = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ .

б) Теперь оценим коэффициенты  $d_{k_1, \dots, k_n}$  ряда Тейлора функции  $h(\boldsymbol{\lambda})$ . Так как она является целой, то при всех  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  и любых  $R_1, \dots, R_n > 0$  верна формула

$$d_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=R_1} \dots \int_{|z_n|=R_n} \frac{h(\boldsymbol{\lambda})}{\lambda_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{k_n+1}} d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Отсюда, используя неравенство (5.4), получаем оценку

$$|d_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \frac{\exp(\beta_1 R_1^{1/q_1} + \dots + \beta_n R_n^{1/q_n})}{R_1^{k_1} \cdot \dots \cdot R_n^{k_n}} \quad \text{при всех } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0.$$

Положим  $R_j = k_j^{q_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда, обозначив  $\beta = \exp(\max(\beta_1, \dots, \beta_n))$ , получим:

$$|d_{k_1, \dots, k_n}| \leq M \exp(\beta_1 k_1 + \dots + \beta_n k_n) \cdot k_1^{-q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{-q_n k_n} \leq M \beta^{k_1 + \dots + k_n} \cdot k_1^{-q_1 k_1} \cdot \dots \cdot k_n^{-q_n k_n}.$$

в) Умножив последнее неравенство на неравенство для  $|P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}|$ , полученное в пункте а), получим нужную оценку:  $|d_{k_1, \dots, k_n} \cdot P_{1,\mathbf{k}} \cdot \dots \cdot P_{n,\mathbf{k}}| \leq D \cdot r^{k_1 + \dots + k_n}$ , где  $D = M \cdot Q$  и  $r = \beta \cdot \gamma$ .

Итак, включение  $H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n) \subset \Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n))$  доказано. Значит,  $\Phi_{\mathbf{p}}(H^*(\mathbb{C}^n)) = H_{\mathbf{p}}(\mathbb{C}^n)$ .  
Доказательство завершено.

## 6. Заключение

В настоящей работе предложен и детально исследован новый подход к обобщению классического преобразования Лапласа на случай функционалов над пространствами целых функций многих комплексных переменных. Ключевым элементом построения выступает специально выбранное ядро, это целая функция, естественным образом обобщающая экспоненту. Для этого ядра систематически вычислены порядки и типы по каждой переменной, что позволило дать точную характеристику его асимптотического поведения на бесконечности.

Важным результатом работы является доказательство изоморфизма между сопряжённым пространством к пространству целых функций с топологией компактной сходимости и пространством функций, аналитических по каждой переменной вне некоторого круга. На основе этого доказано, что введённое обобщённое преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространством непрерывных линейных функционалов и пространством целых функций с заданным порядком роста.

Полученные результаты расширяют инструментарий теории функций многих комплексных переменных и открывают новые перспективы для исследования функциональных пространств. Предложенный подход оказывается востребованным в ряде прикладных задач, в частности, в теории дифференциальных уравнений в обобщённых частных производных и в изучении многомерных аналогов пространств Фока. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение спектральной теории соответствующих операторов, изучение сверток в многомерных областях и приложение к задачам интерполяции и аппроксимации.

**Благодарности.** Автор благодарит О.Е. Галкина за плодотворные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков Р. А., Исаев К. П., Махота А. А. Ряды экспонент в нормированных пространствах аналитических функций // *Уфимский математический журнал*. 2021. Т. 13, № 3. С. 27–36.
2. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа одного класса обобщенных функций // *Уфимский математический журнал*. 2020. Т. 12, № 4. С. 80–91.
3. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье–Бореля. Приложения // *Комплексный анализ и математическая физика*. Красноярск, 1988. С. 62–78.
4. Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщенное двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных // *Прикладная математика и физика*. Т. 52, № 4. 2020. С. 239–245.
5. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для  $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21, № 4 (76). С. 85–96. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-21-4-85-96
6. Панюшкин С. В. Обобщенное преобразование Фурье и его применения // *Матем. заметки*. 2006. Т. 79, № 4. С. 581–596. DOI: 10.4213/mzm2728
7. Нижников А. И., Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. № 5. С. 172–184. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184
8. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Операторы обобщенного дифференцирования с переменными коэффициентами // *Доклады Академии Наук*. 2009. Т. 424, № 5. С. 591–593.
9. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В. Фундаментальный принцип Эйлера для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами // *Доклады Академии Наук*. 2012. Т. 443, № 3. С. 293–295.
10. Дильмухаметова А. М., Напалков В. В., Муллабаева А. У. Обобщение пространства Фока // *Уфимский Математический Журнал*. 2010. Т. 2, № 1. С. 52–58.
11. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983. 176 с.
12. Маергойз Л. С. К вопросу о связях между различными определениями порядков целых функций многих переменных // *Сибирский математический журнал*. 1966. Т. 7, № 6. С. 1268–1292.
13. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука. 1971. 430 с.
14. Scheidemann V. Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Cham: Birkhäuser. 2023. 229 p.

15. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie. *J. Reine Angew. Math.* 1953. Vol. 1953, no. 191. P. 30–39.
16. Хорьякова Ю. А., Шлапунов А. А. О двойственности гротендиковского типа для пространств голоморфных функций нескольких переменных // *Математический сборник*. 2024. Т. 215, № 8. С. 120–140. DOI: 10.4213/sm9956

*Поступила 18.07.2026; доработана после рецензирования 18.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. R. A. Bashmakov, K. P. Isaev, A. A. Makhota, “Exponential series in normed spaces of analytic functions”, *Ufa Mathematical Journal*, **13**:3 (2021), 27–35 (In Russ.). DOI: 10.13108/2021-13-3-27
2. I. Kh. Musin, “On the Fourier–Laplace transform of a class of generalized functions”, *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 78–89 (In Russ.). DOI: 10.13108/2020-12-4-78
3. Yu. F. Korobeinik, S. N. Melikhov, *Complex Analysis and Mathematical Physics*, Krasnoyarsk, 1988 (In Russ.).
4. O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, “Generalized double Laplace transform and its applications to solving partial differential equations”, *Applied Mathematics and Physics*, **52**:4 (2020), 239–245 (In Russ.).
5. V. I. Ivanov, “Bounded shift operator for  $(k, 1)$ -generalized Fourier transform”, *Chebyshevskii Sbornik*, **21**:4 (76) (2020), 85–96 (In Russ.). DOI: 10.22405/2226-8383-2018-21-4-85-96
6. S. V. Panyushkin, “Generalized Fourier transform and its applications”, *Mathematical Notes*, **79**:4 (2006), 537–550 (In Russ.). DOI: 10.1007/s11006-006-0060-4
7. A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, “Generalized Laplace transform based on the differentiation operator with piecewise constant coefficients”, *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:5 (2021), 172–184 (In Russ.). DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-172-184
8. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, “Operators of generalized differentiation with variable coefficients”, *Doklady Akademii Nauk*, **424**:5 (2009), 591–593 (In Russ.).
9. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, “Euler’s fundamental principle for a class of partial differential equations with variable coefficients”, *Doklady Akademii Nauk*, **443**:3 (2012), 293–295 (In Russ.).
10. A. M. Dilmukhametova, V. V. Napalkov, A. U. Mullabaeva, “Generalization of the Fock space”, *Ufa Mathematical Journal*, **2**:1 (2010), 52–58 (In Russ.).

11. A. F. Leontiev, *Entire functions. Exponential series*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 176 p.
12. L. S. Maergoiz, “On the relationship between different definitions of orders of entire functions of several variables”, *Siberian Mathematical Journal*, **7**:6 (1966), 1268–1292 (In Russ.).
13. L. I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Nauka, Moscow, 1971 (In Russ.), 430 p.
14. V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Birkhäuser, Cham, 2023, 229 p.
15. G. Köthe, “Dualität in der Funktionentheorie”, *J. Reine Angew. Math.*, **1953**:191 (1953), 30–39.
16. Yu. A. Khoryakova, A. A. Shlapunov, “On Grothendieck-type duality for spaces of holomorphic functions of several variables”, *Sbornik: Mathematics*, **215**:8 (2024), 1114–1133. DOI: 10.4213/sm9956e

*Submitted 18.07.2026; Revised 18.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.577, 519.68:007.5, 004.032.26

## Порождающие множества аддитивного и мультипликативного группоидов обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала

А. В. Литаврин, Е. А. Потоловская

*ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Аддитивные группоиды подсетей, мультипликативные группоиды подсетей и соответствующие группоиды обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала вводились ранее, чтобы изучать связи между алгебраическими свойствами данных группоидов и структурными свойствами многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала, на базе которой строятся эти группоиды. В частности, было установлено, что свойство этих группоидов быть ассоциативными накладывает жесткое ограничение на структуру графа нейронной сети. В работе находятся порождающие множества аддитивного группоида подсетей, мультипликативного группоида подсетей и аддитивного группоида обобщенных подсетей. Для нейронных сетей, у которых каждый слой имеет строго более одного нейрона, находится порождающее множество мультипликативного группоида обобщенных подсетей. Порождающие множества данных группоидов предполагается использовать далее для решения проблемы о поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов данных группоидов. Нахождение моноида всех эндоморфизмов некоторого группоида в общем случае является нетривиальной задачей и дает некоторые свойства этого группоида. Кроме того, порождающие множества данных группоидов можно использовать для изучения их алгебраических свойств. Нахождение порождающих множеств указанных группоидов происходит путем нахождения разложения для каждого элемента группоида через элементы специальных множеств. Данные порождающие множества строились по принципу добавления в них недостающих элементов и выбрасывания из них тех элементов, которые порождаются остальными. Результаты работы могут быть использованы для изучения свойств многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала, то есть имеют практическую значимость.

**Ключевые слова:** группоид, порождающее множество группоида, аддитивный группоид подсетей, мультипликативный группоид подсетей, аддитивный группоид обобщенных подсетей, мультипликативный группоид обобщенных подсетей, многослойная нейронная сеть.

**Для цитирования:** Литаврин А. В., Потоловская Е. А. Порождающие множества аддитивного и мультипликативного группоидов обобщенных подсетей многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 212–224. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

© А. В. Литаврин, Е. А. Потоловская



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Об авторах:

**Литаврин Андрей Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, [anm11@rambler.ru](mailto:anm11@rambler.ru)

**Потоловская Ева Александровна**, студент института математики и фундаментальной информатики, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1990-5275>, [eva.potolovskaya@gmail.com](mailto:eva.potolovskaya@gmail.com)

*Original article*

MSC2020 08A62, 68T05

## Generating sets for additive and multiplicative groupoids of generalized subnetworks of a multilayer feedforward neural network

A. V. Litavrin, E. A. Potolovskaya

*Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russian Federation)*

**Abstract.** Additive subnetwork groupoids, multiplicative subnetwork groupoids, and corresponding generalized subnetwork groupoids of a multilayer feedforward neural network were previously introduced to study the relationships between the algebraic properties of these groupoids and the structural properties of the multilayer feedforward neural network upon which these groupoids are constructed. In particular, it was established that the associative nature of these groupoids imposes a strict constraint on the structure of the neural network graph. In this paper, generating sets are found for the additive subnetwork groupoid, the multiplicative subnetwork groupoid, and the additive generalized subnetwork groupoid. For such neural networks that each their layer has strictly more than one neuron, a generating set is found for the multiplicative groupoid of generalized subnetworks. The generating sets for these groupoids are further proposed for use in elementwise description of the monoid of all endomorphisms for these groupoids. Finding the monoid of all endomorphisms for a groupoid is generally a nontrivial problem and yields some properties of this groupoid. Furthermore, the generating sets of these groupoids may be used to study their algebraic properties. Generating sets for these groupoids are obtained by finding a decomposition for each element of the groupoid in terms of elements of special sets. These generating sets were constructed by adding missing elements and removing the elements generated by the remaining ones. The results of this work may be used to study the properties of multilayer feedforward neural networks. Thus, they have practical significance.

**Keywords:** groupoid, generating set of groupoid, additive groupoid of subnets, multiplicative groupoid of subnets, additive groupoid of generalized subnets, multiplicative groupoid of generalized subnets, multilayer neural network

**For citation:** A. V. Litavrin, E. A. Potolovskaya. Generating sets for additive and multiplicative groupoids of generalized subnetworks of a multilayer feedforward neural network. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 212–224. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.212-224

*About the authors:*

**Andrey V. Litavrin**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University (79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, [anm11@rambler.ru](mailto:anm11@rambler.ru)

**Eva A. Potolovskaya**, Student at the Institute of Mathematics and Computer Sciences, Siberian Federal University (79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1990-5275>, [eva.potolovskaya@gmail.com](mailto:eva.potolovskaya@gmail.com)

## 1. Введение

Информацию о многослойных нейронных сетях прямого распространения сигнала можно найти в работах [1–3]. С успехами в области обучения многослойных нейронных сетей можно ознакомиться в обзоре [4].

Для каждой многослойной нейронной сети  $\mathcal{N}$  прямого распространения сигнала в работе [5] вводится аддитивный группоид подсетей  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ , в работе [6] вводится мультипликативный группоид подсетей  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ . Группоиды  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  вводились с целью исследования связи между алгебраическими свойствами этих группоидов и свойствами нейронной сети  $\mathcal{N}$ . Было установлено, что ассоциативность группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  накладывает жесткие ограничения на структуру графа нейронной сети  $\mathcal{N}$  (см. утверждение 2 из [5] и утверждение 1 из [6]). Эндоморфизмы группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  изучались в работах [5] и [7]. В общем случае проблема поэлементного описания моноидов всех эндоморфизмов группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  остается открытой.

В работе [8] вводится понятие обобщенной подсети многослойной нейронной сети  $\mathcal{N}$  (см. определение 2.1 из [8]). В связи с этим понятием возникают аддитивный группоид обобщенных подсетей  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и мультипликативный группоид обобщенных подсетей  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  (см. определение 2.2 из [8]). В работе [8] меняется формальное определение многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала: согласно определению 1.1 из [8] такие сети могут быть однослойными (в первоначальной работе [5] минимальное число слоев сети равнялось 2). Расширение понятия многослойной нейронной сети не приводит к изменению свойств группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ , которые были получены в работах [5–7]. Необходимость данного расширения и актуальность понятия обобщенной подсети многослойной нейронной сети обсуждается во введении работы [8]. В работе [8] изучались элементарные алгебраические свойства группоидов  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  и было установлено, что каждая обобщенная подсеть  $\mathcal{N}'$  сети  $\mathcal{N}$  индуцирует подгруппоиды в группоидах  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ , изоморфные группоидам  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}')$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N}')$ .

В работе [8] обозначается проблема 4.5 о поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов группоидов  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ . Данная проблема в настоящий момент остается открытой. Естественным образом к данной проблеме можно применить метод, заключающийся в выяснении, как произвольный эндоморфизм данных группоидов действует на порождающих элементах данного группоида. Поэтому возникает интерес в нахождении порождающих множеств группоидов  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ . Поскольку проблема поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов не решена для группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ , то актуальным является вопрос нахождения порождающих множеств и этих группоидов. Порождающие множества группоидов вызывают самостоятельный интерес и вне контекста описания моноида всех эндоморфизмов.

Основной результат настоящей работы выражен в виде теорем 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2. Теорема 3.1 дает описание порождающего множества группоида  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ . Порождающее множество из теоремы 3.1 приводилось еще в работе [5], но без доказательства. Теорема 3.2 дает описание порождающего множества группоида  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ . Теоремы 4.1 и 4.2 дают описание порождающих множеств группоидов  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  для нейронной сети  $\mathcal{N}$ , все слои которой содержат строго больше одного нейрона. С точки зрения приложений ограничения из теорем 4.1 и 4.2 несущественны, так как их можно обойти с помощью добавления формальных нейронов.

## 2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть  $G = (G, *)$  – это некоторый группоид. Будем говорить, что множество  $S$  – это порождающее множество элементов группоида  $G = (G, *)$ , если пересечение всех подгруппоидов, содержащих  $S$ , совпадает со всем множеством  $G$  (стандартное определение порождающего множества некоторой алгебры). Из данного определения вытекает истинность следующего утверждения.

**Утверждение 2.1.** Пусть  $G = (G, *)$  – это некоторый группоид и  $S \subseteq G$ . Множество  $S$  порождает группоид  $G$  тогда и только тогда, когда всякий элемент  $g \in G$  является элементом из  $S$  или является некоторым произведением конечного числа элементов из  $S$ .

В данной работе будут исследоваться порождающие множества идемпотентных группоидов. Для таких группоидов условие, что всякий элемент  $g \in G$  является элементом из  $S$  или является некоторым произведением конечного числа элементов из  $S$ , эквивалентно условию: всякий элемент  $g \in G$  является некоторым произведением конечного числа элементов из  $S$ . Идемпотентность группоидов  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ ,  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ ,  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  тривиально вытекает из определения операций в этих группоидах, для удобства читателя эти определения будут приведены ниже (см. определение 2.3 и 2.4).

Нам потребуется формальное определение многослойной нейронной сети. Как обычно,  $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел и  $F(\mathbb{R}) := \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  – множество всех отображений из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ .

**Определение 2.1.** Пусть заданы следующие объекты:

- 1) кортеж  $(M_1, \dots, M_n)$  длины  $n \geq 1$  конечных непустых множеств, где при  $i \neq j$  выполняется условие  $M_i \cap M_j = \emptyset$ ;
- 2) множество  $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup \dots \cup (M_{n-1} \times M_n)$ ;
- 3) отображение  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- 4) множество  $A := M_1 \cup \dots \cup M_n$ ;
- 5) отображение  $g: A \rightarrow F(\mathbb{R})$ ;
- 6) отображение  $l: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тогда кортеж  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  будем называть многослойной нейронной сетью прямого распространения сигнала.

Приведем стандартные обозначения, связанные с нейронными сетями и кортежами. С каждой нейронной сетью  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  будем связывать следующее обозначение:

$$\text{Syn}(\mathcal{N}) = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i \times M_{i+1}.$$

Таким образом,  $Syn(\mathcal{N})$  – множество всех синаптических связей сети  $\mathcal{N}$ . Кортеж  $(M_1, \dots, M_n)$  будем называть основным кортежем нейронов сети  $\mathcal{N}$ . Кортеж из пустых множеств будем обозначать символом  $\bar{\emptyset} := (\emptyset, \dots, \emptyset)$  (длина такого кортежа всегда будет понятна из контекста). Пусть даны два кортежа  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$  и  $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  из конечных множеств. Будем использовать обозначения:

$$\bar{X} \cup \bar{Y} := (X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n); \quad \bar{X} \cap \bar{Y} := (X_1 \cap Y_1, \dots, X_n \cap Y_n);$$

$$\bar{X} \subseteq \bar{Y} \Leftrightarrow (X_1 \subseteq Y_1) \wedge (X_2 \subseteq Y_2) \wedge \dots \wedge (X_n \subseteq Y_n).$$

Ниже приведем определения непрерывного кортежа и группоидов  $AGS(\mathcal{N})$ ,  $MGS(\mathcal{N})$ ,  $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{MGS}(\mathcal{N})$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $(X_1, \dots, X_n)$  – некоторый кортеж, составленный из конечных множеств. Будем говорить, что кортеж непрерывный, если для любых различных  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  выполняется следующая импликация: если  $X_i \neq \emptyset$  и  $X_j \neq \emptyset$  и  $i < j$ , то для любого  $s \in \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$  выполняется неравенство  $X_s \neq \emptyset$ . Кортеж  $\bar{\emptyset}$  считаем непрерывным по определению.

Понятие непрерывный кортеж возникает в работе [5].

**Определение 2.3.** Пусть определена нейросеть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  с основным кортежем нейронов  $\bar{M} = (M_1, \dots, M_n)$ . Множество всевозможных непрерывных кортежей  $\bar{X} \subseteq \bar{M}$  будем обозначать символом  $AGS(\mathcal{N})$ . Далее, пусть  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  – два произвольных элемента из  $AGS(\mathcal{N})$ . Определим бинарные алгебраические операции  $(+)$  и  $(*)$  на множестве  $AGS(\mathcal{N})$ :

$$\bar{X} + \bar{Y} := \begin{cases} \bar{X} \cup \bar{Y}, & \text{если } \bar{X} \cup \bar{Y} \in AGS(\mathcal{N}) \\ \bar{\emptyset}, & \text{если } \bar{X} \cup \bar{Y} \notin AGS(\mathcal{N}) \end{cases}, \quad \bar{X} * \bar{Y} := \begin{cases} \bar{X} \cap \bar{Y}, & \text{если } \bar{X} \cap \bar{Y} \in AGS(\mathcal{N}) \\ \bar{\emptyset}, & \text{если } \bar{X} \cap \bar{Y} \notin AGS(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид  $AGS(\mathcal{N}) := (AGS(\mathcal{N}), +)$  будем называть аддитивным группоидом подсетей нейронной сети  $\mathcal{N}$ . Группоид  $MGS(\mathcal{N}) := (AGS(\mathcal{N}), *)$  будем называть мультипликативным группоидом подсетей нейронной сети  $\mathcal{N}$ .

Группоиды  $AGS(\mathcal{N})$  и  $MGS(\mathcal{N})$  возникают в работах [5] и [6]. Связь между этими группоидами и подсетями нейронной сети  $\mathcal{N}$  приводится в работах [5, 6] и [8].

Множество всех подмножеств множества  $X$  будем обозначать через  $B(X)$ . Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ . Тогда введем множество

$$\widehat{AGS}(\mathcal{N}) := AGS(\mathcal{N}) \times B(Syn(\mathcal{N})).$$

Элементы из  $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$  будем обозначать большими латинскими буквами с крышкой.

**Определение 2.4.** Полагаем, что определена нейросеть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ . Пусть  $\hat{U}_1 = (\bar{X}_1, Q_1)$ ,  $\hat{U}_2 = (\bar{X}_2, Q_2)$  – это два произвольных элемента из  $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$ . Определим бинарные алгебраические операции  $(+)$  и  $(*)$  на множестве  $\widehat{AGS}(\mathcal{N})$ :

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 := \begin{cases} (\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2, Q_1 \cup Q_2), & \text{если } \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \in AGS(\mathcal{N}) \\ (\bar{\emptyset}, \emptyset), & \text{если } \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \notin AGS(\mathcal{N}); \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\widehat{U}_1 * \widehat{U}_2 := \begin{cases} (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2, Q_1 \cap Q_2), & \text{если } \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \in \text{AGS}(\mathcal{N}) \\ (\overline{\emptyset}, \emptyset), & \text{если } \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \notin \text{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда группоид  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}) := (\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}), +)$  будем называть аддитивным группоидом обобщенных подсетей нейронной сети  $\mathcal{N}$  и группоид  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N}) := (\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N}), *)$  будем называть мультипликативным группоидом обобщенных подсетей нейронной сети  $\mathcal{N}$ .

Группоиды  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  и  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  возникают в работе [8]. Связь между этими группоидами и обобщенными подсетями нейронной сети  $\mathcal{N}$  приводится в работе [8].

### 3. Аддитивный группоид подсетей

В работе [5] для каждой нейронной сети  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ , состоящей из  $n$  слов, и для каждого  $i \in \{1, \dots, n\}$  вводилось множество  $D_i(\mathcal{N})$ , состоящее из всевозможных кортежей, у которых  $i$ -я компонента является одноэлементным подмножеством множества  $M_i$ , а все остальные компоненты равны пустому множеству. Таким образом,

$$D_i(\mathcal{N}) = \{(\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{i-1}, \{a_i\}, \emptyset, \dots, \emptyset) \mid a_i \in M_i\}.$$

Также в работе [5] отмечалось (без доказательства), что множество

$$D(\mathcal{N}) := \{(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)\} \cup \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} D_i(\mathcal{N})$$

является порождающим множеством группоида  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ , а при  $n > 2$  группоид  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  порождается множеством

$$\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} D_i(\mathcal{N}).$$

Ниже докажем сформулированное утверждение.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  – нейронная сеть. Тогда  $D(\mathcal{N})$  порождает группоид  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\overline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  – это произвольный элемент группоида  $\text{AGS}(\mathcal{N})$ , отличный от кортежа  $\overline{\emptyset}$ . Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \overline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n) &= (U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) \cup (\emptyset, U_2, \emptyset, \dots, \emptyset) \cup \dots \cup (U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = \\ &= (\dots((U_1, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) + (\emptyset, U_2, \emptyset, \dots, \emptyset)) + \dots + (\emptyset, \emptyset, \dots, U_{n-1}, \emptyset)) + (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots, U_n). \end{aligned}$$

Таким образом, кортеж  $\overline{U}$  представляется в виде суммы кортежей вида:

$$(\emptyset, \emptyset, \dots, U_s, \dots, \emptyset, \emptyset). \quad (3.1)$$

Поскольку  $U_s$  – это конечное множество и для всякого конечного множества  $X$  моноид  $(B(X), \cup)$  порождается пустым множеством и всеми одноэлементными подмножествами множества  $X$ , то всякий кортеж вида (3.1) можно представить в виде суммы элементов из множества  $D(\mathcal{N})$ . Так как кортеж  $\overline{\emptyset}$  принадлежит множеству  $D(\mathcal{N})$ , группоид  $\text{AGS}(\mathcal{N})$  порождается множеством  $D(\mathcal{N})$ .

Доказательство завершено.

Для любого конечного множества  $X$  через  $\text{Singl}(X)$  обозначим совокупность, состоящую из всех одноэлементных подмножеств множества  $X$  и пустого множества. Множество  $\text{Singl}(X)$  является порождающим множеством для моноида  $(B(X), \cup)$ , когда  $X$  — это конечное множество.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  — нейронная сеть. Тогда группоид  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  порождается множеством  $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ .

**Доказательство.** Пусть  $\widehat{U} = (\overline{U}, Q)$  — это произвольный элемент группоида  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$ . В силу теоремы 3.1 для кортежа  $\overline{U}$  существует разложение

$$\overline{U} = (\dots((\overline{U}_1 + \overline{U}_2) + \overline{U}_3) + \dots) + \overline{U}_t, \quad (3.2)$$

где  $t$  — это подходящее натуральное число и кортежи  $\overline{U}_s$  принадлежат множеству  $D(\mathcal{N})$  для любого  $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ . Так как множество  $\text{Syn}(\mathcal{N})$  конечно, то для любого множества  $Q \in B(\text{Syn}(\mathcal{N}))$  существует разложение

$$Q = \bigcup_{s \in \{1, 2, \dots, k\}} Q_s, \quad (3.3)$$

где  $k$  — это подходящее натуральное число и для любого  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$  множество  $Q_s$  принадлежит  $\text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ . Используя соотношение (3.2) получаем равенство

$$\widehat{U} = (\overline{U}, Q) = (\dots(((\overline{U}_1, Q) + (\overline{U}_2, Q)) + (\overline{U}_3, Q)) + \dots) + (\overline{U}_t, Q). \quad (3.4)$$

В силу соотношения (3.3) для каждого кортежа  $(\overline{U}_u, Q)$  ( $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ ) из предыдущего равенства можно записать разложение

$$(\overline{U}_u, Q) = (\dots(((\overline{U}_u, Q_1) + (\overline{U}_u, Q_2)) + (\overline{U}_u, Q_3)) + \dots) + (\overline{U}_u, Q_k).$$

Подставив эти разложения в соотношения (3.4) получим разложение кортежа  $\widehat{U}$  через элементы множества  $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ . В силу произвольности  $\widehat{U}$  получаем, что группоид  $\widehat{\text{AGS}}(\mathcal{N})$  порождается множеством  $D(\mathcal{N}) \times \text{Singl}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ .

Доказательство завершено.

#### 4. Мультипликативный группоид подсетей

Для каждой сети  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  через  $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \subseteq \text{AGS}(\mathcal{N})$  обозначим множество, состоящее из кортежа  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  (основной кортеж нейронов сети  $\mathcal{N}$ ) и всех кортежей вида

$$(M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n),$$

где  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  — это подмножество множества  $M_i$  и мощность множества  $A_i$  равна  $|M_i| - 1$  или  $|M_i| - 2$ .

Далее, для каждого конечного множества  $X$  через  $\text{GenCap}(X)$  будем обозначать множество, состоящее из множества  $X$  и всех подмножеств множества  $X$  мощности  $|X| - 1$ .

**Утверждение 4.1.** Пусть  $X$  — это конечное множество. Моноид  $(B(X), \cap)$  порождается множеством  $\text{GenCap}(X)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о .

1) Пусть  $|X| = 1$ . Тогда для любого множества  $A \in B(X)$  выполняется ровно одно из условий:  $A = X$ ,  $A = \emptyset$ . В этом случае  $A = X$  или  $|A| = |X| - 1$ , следовательно, утверждение выполняется.

2) Пусть  $|X| = 2$ . Тогда для любого  $A \in B(X)$  выполняется ровно одна импликация:

$$A = X \Rightarrow |A| = |X| = 2;$$

$$A = \emptyset \Rightarrow A = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \quad (|\{a\}| = |\{b\}| = 1);$$

$$|A| = 1 \Rightarrow |A| = |X| - 1 = 1.$$

Эти соотношения показывают, что утверждение выполняется при  $|X| = 2$ .

3) Пусть  $|X| \geq 3$ . Любое множество  $A \in B(X)$  мощности  $|X| - 3$  мы можем получить как пересечение множеств мощности  $|X| - 2$  и  $|X| - 1$ . Действительно, для любых  $a_1, \dots, a_{|X|-3} \in X$  имеем равенство множеств

$$\{a_1, \dots, a_{|X|-3}, c_1\} \cap \{a_1, \dots, a_{|X|-3}, b_1, b_2\} = \{a_1, \dots, a_{|X|-3}\},$$

где  $c_1 \notin \{b_1, b_2\}$  и  $c_1, b_1, b_2 \notin \{a_1, \dots, a_{|X|-3}\}$ . Существование элементов  $c_1, b_1, b_2$ , с приведенными ограничениями, обусловлено тем, что  $|X| \geq 3$ . При этом любое множество мощности  $|X| - 2$  можно получить как пересечение множеств мощности  $|X| - 1$ . В самом деле, для любых  $a_1, \dots, a_{|X|-2} \in X$  имеем равенство множеств

$$\{a_1, \dots, a_{|X|-2}, c_1\} \cap \{a_1, \dots, a_{|X|-2}, b_1\} = \{a_1, \dots, a_{|X|-2}\}.$$

Множество  $A \in B(X)$  мощности  $|X| - (i + 2)$  ( $i = 1, \dots, |X| - 2$ ) можно получить как пересечение множеств  $|X| - (i + 1)$ . Таким образом, любое множество из  $B(X)$  можно получить как пересечение множеств  $X$  и множеств мощности  $|X| - 1$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о .

Для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$  введем обозначения

$$\overline{W}_i(A_i) := (M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n), \quad (4.1)$$

$$\overline{P}_i(A_i, \dots, A_n) := (M_1, \dots, M_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n), \quad (4.2)$$

$$\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i) := (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, M_{i+1}, \dots, M_n), \quad (4.3)$$

где при любом  $s \in \{1, \dots, n\}$  множества  $A_s$  — непустое подмножество множества  $M_s$ .

Поскольку группоид  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  является идемпотентным для любой сети  $\mathcal{N}$ , то принадлежность некоторого кортежа  $\overline{U}$  произвольному подмножеству  $T \subseteq \text{MGS}(\mathcal{N})$  равносильно тому, что кортеж  $\overline{U}$  является произведением элементов из множества  $T$ . Действительно, выполняется равенство  $\overline{U} = \overline{U} * \overline{U}$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  — это нейронная сеть такая, что для любого натурального  $i \leq n$  выполняется условие  $|M_i| \geq 2$ . Кортежи вида (4.1), (4.2) и (4.3) из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  являются произведениями конечного числа элементов из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Кортежи  $\overline{W}_i(A)$  можно представить как некоторое произведение элементов из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ . В самом деле, множество  $A$  представимо в виде

$$A = \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, t\}} A_s,$$

где  $t$  – это некоторое натуральное число и  $A_s$  – это подмножества множества  $M_i$  из  $\text{GenCap}(M_i)$  для любого  $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ . Приведенное разложение множества  $A$  с указанными свойствами существует в силу утверждения 4.1. Поэтому имеем соотношение

$$\begin{aligned}\overline{W}_i(A) &= \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, t\}} \overline{W}_i(A_s) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_1) \cap \overline{W}_i(A_2)) \cap \overline{W}_i(A_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_i(A_t) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_1) * \overline{W}_i(A_2)) * \overline{W}_i(A_3)) * \dots) * \overline{W}_i(A_t).\end{aligned}$$

Поскольку пересечение любых двух кортежей из семейства  $(\overline{W}_i(A_s))_{s \in \{1, 2, \dots, t\}}$  есть непрерывный кортеж, то в представленном выражении операция пересечения может быть заменена на операцию  $(*)$ . Так как все кортежи семейства  $(\overline{W}_i(A_s))_{s \in \{1, 2, \dots, t\}}$  принадлежат множеству  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ , то кортежи  $\overline{W}_i(A)$  порождаются кортежами из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ .

Для всякого  $i \in \{1, \dots, n\}$  выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\overline{P}_i(A_i, \dots, A_n) &= ((\dots(\overline{W}_i(A_i) \cap \overline{W}_{i+1}(A_{i+1})) \cap \overline{W}_{i+2}(A_{i+2})) \cap \dots) \cap \overline{W}_n(A_n) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_i(A_i) * \overline{W}_{i+1}(A_{i+1})) * \overline{W}_{i+2}(A_{i+2})) * \dots) * \overline{W}_n(A_n),\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i) &= ((\dots(\overline{W}_1(A_1) \cap \overline{W}_2(A_2)) \cap \overline{W}_3(A_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_i(A_i) = \\ &= ((\dots(\overline{W}_1(A_1) * \overline{W}_2(A_2)) * \overline{W}_3(A_3)) * \dots) * \overline{W}_i(A_i).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Поскольку пересечение любых двух соседних кортежей в выражениях (4.4) и (4.5) есть непрерывный кортеж, то операцию пересечения можно заменить на операцию  $(*)$ . Если в выражениях (4.4) и (4.5) все  $\overline{W}_i$  заменить на их выражения через элементы из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ , то получим разложения  $\overline{P}_i(A_{i+1}, \dots, A_n)$  и  $\overline{O}_i(A_1, \dots, A_i)$  через элементы из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ .

Доказательство завершено.

**Лемма 4.2.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  – нейронная сеть такая, что для любого натурального  $i \leq n$  выполняется условие  $|M_i| \geq 2$ . Тогда всякий элемент из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  представляется как произведение подходящих кортежей вида (4.1), (4.2) или (4.3).

Доказательство.

1) Пусть  $\overline{U}$  – это произвольный кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  вида:

$$\overline{U} = (U_1, \dots, U_s, \emptyset, \dots, \emptyset),\quad (4.6)$$

где при любом  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$  выполняется условие  $U_j \neq \emptyset$ . Тогда выполняется равенство множеств

$$\begin{aligned}\overline{U} &= ((\dots((\overline{W}_1(U_1) \cap \overline{W}_2(U_2)) \cap \overline{W}_3(U_3)) \cap \dots) \cap \overline{W}_s(U_s)) \cap \\ &\cap (\overline{P}_s(A_{s+1}, \dots, A_n) \cap \overline{P}_s(A'_{s+1}, \dots, A'_n)),\end{aligned}\quad (4.7)$$

где для любого  $t \in \{s+1, s+2, \dots, n\}$  множества  $A_t, A'_t \subseteq M_t$  удовлетворяют условию  $A_t \cap A'_t = \emptyset$ . Пара множеств  $(A_t, A'_t)$  с указанным условием существует в силу выполнения неравенства  $|M_i| \geq 2$  для любого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Поскольку в выражении (4.7) пересечение любой пары кортежей, стоящих рядом, является непрерывным множеством, то пересечения можно заменить на  $(*)$ . Таким образом, получим следующее разложение:

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) * \bar{W}_2(U_2) * \bar{W}_3(U_3) * \dots) * \bar{W}_s(U_s)) * (\bar{P}_s(A_{s+1}, \dots, A_n) * \bar{P}_s(A'_{s+1}, \dots, A'_n))).$$

Поэтому для кортежей вида (4.6) разложение из утверждения леммы построено.

2) Пусть  $\bar{U}$  – это произвольный кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  вида:

$$\bar{U} = (U_1, \dots, U_n), \quad (4.8)$$

где для любого  $j \in \{1, \dots, n\}$  выполняется равенство  $U_j \neq \emptyset$ . Тогда выполняется равенство

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) \cap \bar{W}_2(U_2)) \cap \bar{W}_3(U_3)) \cap \bar{W}_4(U_4)) \cap \dots) \cap \bar{W}_n(U_n).$$

Так как при пересечении двух кортежей, стоящих рядом, будет получаться непрерывный кортеж, то пересечения можно заменить на  $(*)$  и мы получим разложение:

$$\bar{U} = (\dots ((\bar{W}_1(U_1) * \bar{W}_2(U_2) * \bar{W}_3(U_3) * \bar{W}_4(U_4) \dots) * \bar{W}_n(U_n))).$$

Таким образом, построено разложение из утверждения данной леммы для кортежей вида (4.8).

3) Полагаем, что  $\bar{U}$  – это произвольный кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  вида:

$$\bar{U} = (\emptyset, \dots, \emptyset, U_1, \dots, U_s), \quad (4.9)$$

где  $U_j \neq \emptyset$  для любого  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{U} &= (\bar{O}_s(A_1, \dots, A_{n-s}) \cap \bar{O}_s(A'_1, \dots, A'_{n-s})) \cap \\ &\cap (\dots ((\bar{W}_{n-s+1}(U_1) \cap \bar{W}_{n-s+2}(U_2) \cap \bar{W}_{n-s+3}(U_3) \cap \dots) \cap \bar{W}_n(U_s)), \end{aligned}$$

где  $A_t \cap A'_t = \emptyset$  для любого  $t \in \{1, 2, \dots, n-s\}$ . В силу непрерывности кортежа, получающегося при пересечении любых двух соседних кортежей в представленном разложении, операцию пересечения можно заменить на операцию  $(*)$ . В результате приходим к разложению кортежей вида (4.9) из утверждения данной леммы.

4) Пусть  $\bar{U}$  – это произвольный кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  вида:

$$\bar{U} = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_m, U_1, \dots, U_s, \emptyset, \dots, \emptyset), \quad (4.10)$$

где  $U_j \neq \emptyset$  при любом  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned} \bar{U} &= ((\bar{O}_s(A_1, \dots, A_m) \cap \bar{O}_s(A'_1, \dots, A'_m)) \cap \\ &\cap (\dots ((\bar{W}_{m+1}(U_1) \cap \bar{W}_{m+2}(U_2) \cap \bar{W}_{m+3}(U_3) \cap \dots) \cap \bar{W}_{m+s}(U_s)))) \cap \\ &\cap (\bar{P}_s(A_{m+s+1}, \dots, A_n) \cap \bar{P}_s(A'_{m+s+1}, \dots, A'_n)), \end{aligned}$$

где  $A_t \cap A'_t = \emptyset$  при любом  $t \in \{1, 2, \dots, m\} \cup \{m+s+1, \dots, n\}$ . В силу непрерывности кортежа, получающегося при пересечении любых двух соседних кортежей, операцию пересечения можно заменить на операцию  $(*)$ . В результате приходим к разложению элементов вида (4.10) из утверждения леммы.

5) Рассмотрим кортежи вида:

$$(M_1, M_2, \dots, M_n), (\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset). \quad (4.11)$$

Для основного кортежа нейронов будет выполняться равенство  $(M_1, M_2, \dots, M_n) = \overline{W}_i(M_i)$ , где  $i$  – произвольное число из  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Поскольку  $|M_i| \geq 2$ , то в каждом множестве  $M_i$  можно подобрать два подмножества  $A_i$  и  $B_i$  такие, что  $A_i \cap B_i = \emptyset$ . Тогда будет выполняться равенство

$$(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = (\dots((\overline{Z}_1 * \overline{Z}_2) * \overline{Z}_3) * \dots) * \overline{Z}_n,$$

где  $\overline{Z}_i = \overline{W}_i(A_i) * \overline{W}_i(B_i)$ . Таким образом, кортежи вида (4.11) можно представить как произведение подходящих кортежей вида (4.1), (4.2) или (4.3).

Любой кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  является одним из кортежей вида (4.6), (4.8), (4.9), (4.11) или (4.10). Поэтому утверждение леммы выполняется для всех кортежей из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ . Доказательство завершено.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  – нейронная сеть такая, что для любого натурального  $i \leq n$  выполняется условие  $|M_i| \geq 2$ . Тогда  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$  порождает группоид  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ .

**Доказательство.** В силу леммы 4.2 любой кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  является произведением кортежей вида (4.1), (4.2) и (4.3). По лемме 4.1 все эти кортежи являются произведениями элементов из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ . Поэтому любой кортеж из  $\text{MGS}(\mathcal{N})$  является произведением элементов из  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ . Значит,  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$  порождает  $\text{MGS}(\mathcal{N})$ .

Доказательство завершено.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$  – нейронная сеть такая, что для любого натурального  $i \leq n$  выполняется условие  $|M_i| \geq 2$ . Группоид  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  порождается множеством  $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ .

**Доказательство.** Пусть  $\widehat{U} = (\overline{X}, Q)$  – это произвольный элемент из  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$ . По теореме 4.1 для каждого  $\overline{X}$  существует разложение

$$\overline{X} = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \dots, \overline{X}_t), \quad (4.12)$$

где  $f$  – это выражение, записанное с помощью операции  $(*)$  и скобок (т.е. терм),  $t$  – это подходящее натуральное число и для любого  $s \in \{1, 2, \dots, t\}$  кортежи  $\overline{X}_s$  принадлежат множеству  $\text{GenMult}(\mathcal{N})$ . Так как множество  $\text{Syn}(\mathcal{N})$  конечно, то в силу утверждения 4.1 для любого множества  $Q \in B(\text{Syn}(\mathcal{N}))$  существует разложение

$$Q = \bigcap_{s \in \{1, 2, \dots, k\}} Q_s, \quad (4.13)$$

где  $k$  – это подходящее натуральное число, и для любого  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$  множество  $Q_s$  принадлежит  $\text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ . Используя соотношение (4.12), получаем равенство

$$\widehat{U} = (\overline{X}, Q) = f((\overline{X}_1, Q), (\overline{X}_2, Q), (\overline{X}_3, Q), \dots, (\overline{X}_t, Q)). \quad (4.14)$$

В силу соотношения (4.13) для каждого кортежа  $(\overline{X}_u, Q)$  ( $u \in \{1, 2, \dots, t\}$ ) из предыдущего равенства можно записать разложение

$$(\overline{X}_u, Q) = (\dots(((\overline{X}_u, Q_1) * (\overline{X}_u, Q_2)) * (\overline{X}_u, Q_3)) * \dots) * (\overline{X}_u, Q_k).$$

Подставив эти разложения в равенство (4.14), получим разложение кортежа  $\widehat{U}$  через элементы множества  $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ . В силу произвольности  $\widehat{U}$  получаем, что группоид  $\widehat{\text{MGS}}(\mathcal{N})$  порождается множеством  $\text{GenMult}(\mathcal{N}) \times \text{GenCap}(\text{Syn}(\mathcal{N}))$ . Доказательство завершено.

## 5. Заключение

Порождающие множества группоидов, которые рассматривались в данной работе планируется применить для описания моноидов всех эндоморфизмов данных группоидов. Предполагается использовать метод исследования действия произвольного эндоморфизма на элементах порождающего множества. Кроме того, основные результаты работы могут быть полезны для изучения свойств многослойных нейронных сетей с помощью группоидов, которые рассматривались в данной работе.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Красноярском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2026-1314).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головки В. А., Краснопрошин В. В. Нейросетевые технологии обработки данных. Учеб. пособие. Минск: Изд-во Беларус. гос. ун-та, 2017. 263 с.
2. Горбань А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
3. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики: персептрон и теория механизмов мозга. Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 478 с.
4. Созыкин А. В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика»*. 2017. Т. 6, № 3. С. 28–59
5. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // *Труды Института математики и механики УрО*. 2021. Т. 27, № 1. С. 130–145. DOI: 10.21538/0134-48892021-27-1-130-145
6. Литаврин А. В. О некоторых конечных коммутативных группоидах, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распространения // XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы.: тезисы докладов международной конференции. Тула, 2022. С. 106–109.
7. Litavrin A. V. On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2022. Vol. 39. P. 111–126. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.111

8. Litavrin A. V., Moiseenkova T. V. On some commutative and idempotent finite groupoids associated with subnets of multilayer feedforward neural networks // *Журнал СВУ. Серия «Математика и физика»*. 2025. Т. 18, № 1. С. 59–70

*Поступила 12.03.2026; доработана после рецензирования 03.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. V. A. Golovko, V. V. Krasnoproshin, *Neural network data processing technologies*, Publishing house of Belarusian state university, Minsk, 2017 (In Russ.), 263 p.
2. A. N. Gorban, “Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks”, *Siberian Journal of Computational Mathematics*, **1**:1 (1998), 11–24 (In Russ.).
3. F. Rosenblatt, *Principles of Neurodynamics: The Perceptron and the Theory of Brain Mechanisms*, Mir, M., 1965, 478 p.
4. A. V. Sozykin, “Review of Methods for Training Deep Neural Networks”, *Bulletin of South Ural State University. Series «Computational Mathematics and Informatics»*, **6**:3 (2017), 28–59 (In Russ.).
5. A. V. Litavrin, “Endomorphisms of Finite Commutative Groupoids Associated with Multilayer Feedforward Neural Networks”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch*, **27**:1 (2021), 130–145 (In Russ.). DOI: 10.21538/0134-48892021-27-1-130-145
6. A. V. Litavrin, “On Some Finite Commutative Groupoids Associated with Multilayer Feedforward Neural Networks”, *XXI International Conference «Algebra, Number Theory, and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications» dedicated to the 85th anniversary of A. A. Karatsuba’s birth: Abstracts of the International Conference*, 2022, 106–109 (In Russ.).
7. A. V. Litavrin, “On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **39** (2022), 111–126. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.111
8. A. V. Litavrin, T. V. Moiseenkova, “On some commutative and idempotent finite groupoids associated with subnets of multilayer feedforward neural networks”, *SFU Journal. Series «Mathematics and Physics»*, **18**:1 (2025), 59–70.

*Submitted 12.03.2026; Revised 03.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

## О порядке аппроксимации алгоритма символьной прогонки

Ю. А. Повещенко<sup>1</sup>, И. Р. Янгляев<sup>2,3</sup>, В. О. Подрыга<sup>1</sup>, О. С. Язовцева<sup>2,3</sup>,  
И. М. Губайдуллин<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)

<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет (г. Уфа, Российская Федерация)

<sup>3</sup>ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

<sup>4</sup>ИНК УФИЦ РАН (г. Уфа, Российская Федерация)

**Аннотация.** В статье приведено исследование порядка точности алгоритма символьной прогонки, предлагаемого для решения задач пьезопроводности в нефтесодержащих трещиновато-пористых пластах. Алгоритм символьной прогонки представляет собой модификацию алгоритма классической прогонки и заключается в нахождении значений искомой сеточной функции в полиномиальном виде. Это влечет также полиномиальное представление одного прогоночного коэффициента и невязки. Декомпозиция области организована следующим образом: на всем нефтяном пласте введена макросетка с большим пространственным шагом, в одной из ячеек которой построена микросетка с меньшим пространственным шагом. Алгоритм позволяет получить точное решение на микросетке с целью уточнения расчетов независимо от значений функции в макроузлах. Проведена верификация алгоритма на задачах с известным аналитическим решением, получен второй порядок точности алгоритма в постановке сгущающихся сеток, что отвечает точности заявленной разностной схемы. Алгоритм применен для исследования задачи пьезопроводности в трещиновато-пористом коллекторе, получены картины распределения давления в системе трещин.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, алгоритм символьной прогонки, трещиновато-пористый коллектор, уравнение пьезопроводности

**Для цитирования:** Повещенко Ю. А., Янгляев И. Р., Подрыга В. О., Язовцева О. С., Губайдуллин И. М. О порядке аппроксимации алгоритма символьной прогонки // Журнал Средневолжского математического общества. 2026. Т. 28, № 3. С. 225–239. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

*Об авторах:*

**Повещенко Юрий Андреевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, [hecon@mail.ru](mailto:hecon@mail.ru)

**Янгляев Ильнур Радикович**, аналитик, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), лаборант-исследователь, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4659-965X>, [ilnur.yanglyev@mail.ru](mailto:ilnur.yanglyev@mail.ru)



**Подрыга Виктория Олеговна**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7874-6978>, [pvictoria@list.ru](mailto:pvictoria@list.ru)

**Язовцева Ольга Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), доцент, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, [yazovtsevaos@yandex.ru](mailto:yazovtsevaos@yandex.ru)

**Губайдуллин Ирек Марсович**, доктор физико-математических наук, профессор, Уфимский государственный нефтяной технический университет (450064, Россия, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1), заведующий лабораторией математической химии, Институт нефтехимии и катализа – обособленное структурное подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (450075, Россия, г. Уфа, проспект Октября 141), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9787-0325>, [irekmars@mail.ru](mailto:irekmars@mail.ru)

*Original article*

MSC2020 65N06

## On the Order of Approximation of the Symbolic Tridiagonal Matrix Algorithm

Yu. A. Poveshchenko<sup>1</sup>, I. R. Yanglyayev<sup>2,3</sup>, V. O. Podryga<sup>1</sup>, O. S. Yazovtseva<sup>2,3</sup>, I. M. Gubaydullin<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*

<sup>2</sup>*Ufa State Petroleum Technological University (Ufa, Russian Federation)*

<sup>3</sup>*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

<sup>4</sup>*Institute of Petrochemistry and Catalysis – a separate structural subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russian Federation)*

**Abstract.** The work studies the order of approximation of the symbolic tridiagonal matrix algorithm proposed for solving piezoconductivity problems in oil-bearing fractured-porous formations. The symbolic tridiagonal matrix algorithm is a modification of the classical tridiagonal matrix algorithm and consists in finding the values of the sought grid function in a polynomial form. This also entails a polynomial representation of one tridiagonal matrix coefficient and of the residual. The domain decomposition is organized as follows: over the entire oil-bearing formation a macrogrid with a large spatial step is introduced, and in one of its cells a microgrid with a finer spatial step is constructed. The algorithm allows obtaining an exact solution on the microgrid to refine the calculations independently of the function values at the macronodes. The algorithm is verified on problems with a known analytical solution, and the second order of accuracy of the algorithm is obtained in the formulation with nested grids, which corresponds to the accuracy of the stated difference scheme. The algorithm is applied to study the piezoconductivity problem in a fractured-porous reservoir, and pressure distribution patterns in the fracture system are obtained.

**Keywords:** mathematical modeling, symbolic tridiagonal matrix algorithm, fractured-porous reservoir, piezoconductivity equation

**For citation:** Yu. A. Poveshchenko, I. R. Yanglyayev, V. O. Podryga, O. S. Yazovtseva, I. M. Gubaydullin. On the Order of Approximation of the Symbolic Tridiagonal Matrix Algorithm. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 225–239. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.225-239

*About the authors:*

**Yury A. Poveshchenko**, D.Sc. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

**Ilnur R. Yanglyayev**, Analyst, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Laboratory Research Assistant, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevikskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4659-965X>, ilnur.yanglyayev@mail.ru

**Viktoriia O. Podryga**, D.Sc. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7874-6978>, pvictoria@list.ru

**Olga S. Yazovtseva**, Ph.D. (Phys. and Math.), Senior Researcher, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Associate Professor, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevikskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, yazovtsevaos@yandex.ru

**Irek M. Gubaydullin**, D.Sc. (Phys. and Math.), Professor, Ufa State Petroleum Technological University (1 Kosmonavtov St., Ufa 450064, Russia), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis – a separate structural subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (141 Oktyabrya Ave., Ufa 450075, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9787-0325>, irekmars@mail.ru

## 1. Введение

В настоящее время растут потребности разработки экономичных вычислительных алгоритмов для исследования практически значимых процессов. Важной характеристикой алгоритма является порядок сходимости или порядок точности. При этом вся область исследования может не требовать высокой точности исследования, а уточнение расчетов требуется только в выделенных областях. Такие задачи приобретают особую актуальность при исследовании процессов в неоднородных (гетерогенных) средах. Одним из примеров является исследование пьезопроводности в трещиновато-пористых породах, например, в нефтесодержащих пластах. При этом задача моделирования подобных процессов является актуальным вопросом на протяжении долгого времени. Исследователи отмечают необходимость учета многих факторов. Во-первых, это неоднородная структура пласта – в нем имеются трещины и матрицы пор. Описание движения флюида в них принципиально отличается – в трещинах работают законы фильтрации, например, Дарси [1]. В порах течение как таковое отсутствует, флюид распространяется за счет активного обмена с трещинами [2].

В задачах флюидодинамики в сложных средах также важен учет многофазности флюида. В работах [3] и [4] обсуждаются вопросы отдельного учета фаз флюида и необходимость расщепления всей модели на отдельный учет течения флюидов и процессы пьезопроводности. Аналогичный подход использован в настоящей работе.

Поскольку в нефтесодержащем пласте присутствуют нерегулярно расположенные скважины, существенно влияющие на динамику процессов, вблизи скважин необходимо достаточно точное исследование. При этом расчеты вдали от кустов скважин могут быть проведены со значительно меньшей точностью, например, с большим шагом интегрирования по пространству.

В работе [5] исследование скважины проводится отдельно от всего нефтесодержащего пласта с использованием цилиндрической геометрии. Эффективным средством повышения точности расчетов в выделенных областях являются иерархические сетки. В настоящей работе кустовое исследование прискважинных областей будет включено в общее исследование всего пласта.

Важным вопросом при моделировании процессов в гетерогенных средах является согласование решений на границе различных сеток внутри одной области. Работа [6] посвящена численному моделированию распространения сейсмических волн от очага землетрясения через геологический массив к наземным сооружениям (многоэтажным домам) с целью анализа возникающих разрушений в зависимости от параметров здания и глубины залегания источника волн. В работе, аналогично настоящей, применяется метод конечных разностей. Согласование решений на границе сеток достигается за счет линейной или билинейной интерполяций. Более мелкая сетка позволяет детально моделировать волны. При этом шаг интегрирования по времени выбран на основе самого мелкого пространственного разбиения. Применяемый в настоящей работе метод символьной прогонки позволяет избежать измельчения шага по времени при переходе к более мелкой пространственной сетке, поскольку в прискважинной области решается задача Дирихле.

Целью настоящей работы является исследование алгоритма символьной прогонки для разрешения задачи Дирихле в прискважинной области. Данный алгоритм представляет собой модификацию алгоритма классической прогонки и заключается в нахождении значений искомой сеточной функции в полиномиальном виде. С этой целью проведена декомпозиция всей области интегрирования, отвечающей нефтесодержащему пласту, с крупным пространственным шагом (макросетка с макроячейками). Внутри одной макроячейки, содержащей в себе кусты скважин, реализована микросетка – сетка с меньшим пространственным шагом. Это позволяет вести расчеты на более подробной пространственной сетке с целью их уточнения в прискважинной области. Вид полиномов определяется значениями сеточных функций в макроузлах, образующих макроячейку. Исследование метода символьной прогонки проведено на примере решения задачи Дирихле для одномерного и двумерного параболических уравнений. Для аппроксимации уравнений применен метод конечных разностей. Показано, что метод сохраняет второй порядок точности применяемой разностной схемы.

## 2. Математическая модель и расчетная сетка

Рассмотрим уравнения для описания динамики несмешивающегося двухфазного флюида в трещиновато-пористом коллекторе [7]:

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f S_w^f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w^f \vec{U}_w^f) + q_w^f = 0, \quad \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m S_w^m)}{\partial t} + q_w^m = 0, \quad (2.1)$$

$$q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad \lambda_w^m = -\frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f S_o^f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_o^f \vec{U}_o^f) + q_o^f = 0, \quad \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m S_o^m)}{\partial t} + q_o^m = 0, \quad (2.3)$$

$$q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad \lambda_o^m = -\frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad (2.4)$$

$$\vec{U}_w^f = -\frac{k^f k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} \operatorname{grad} P^f, \quad \vec{U}_o^f = -\frac{k^f k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} \operatorname{grad} P^f. \quad (2.5)$$

Здесь нижние индексы  $w$  и  $o$  обозначают принадлежность характеристики воде и нефти, верхние индексы  $f$  и  $m$  обозначают принадлежность характеристики системе трещин и матрице;  $\varphi^f$  и  $\varphi^m$  – пористости в трещинах и в матрице соответственно;  $\rho^f$  и  $\rho^m$  – плотности жидкостей в системе трещин и в матрице (кг/м<sup>3</sup>);  $S^f$  и  $S^m$  – насыщенности в системе трещин и в матрице ( $S_o^f + S_w^f = 1$ ,  $S_o^m + S_w^m = 1$ );  $t$  – время (с);  $\vec{U}^f$  – скорость потока нефти и воды в системе трещин (м/с), определяемая из обобщенного закона Дарси [1];  $q^f$  и  $q^m$  – источниковые члены, определяемые моделью Уоррена-Рута [1] (кг/(м<sup>3</sup>·с)),  $P^f$  и  $P^m$  – давление в системе трещин и в матрице (Па),  $k^f$  и  $k^m$  – абсолютные проницаемости системы трещин и матрицы (м<sup>2</sup>),  $k_r(S^f)$  и  $k_r(S^m)$  – относительные проницаемости жидкости,  $\mu$  – вязкость нефти и воды (Па·с),  $\sigma$  – коэффициент трещиноватости породы (1/м<sup>2</sup>). Отметим, что в рассматриваемой модели Уоррена-Рута скорость течения флюида в матрице равна 0:  $\vec{U}^m \equiv \vec{0}$  [1]. Область интегрирования двумерна, представляет собой квадрат  $[0, l] \times [0, l]$ .

Уравнение пьезопроводности в трещинах и матрице примет вид:

$$\frac{S_w^f}{\rho_w^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f)}{\partial t} + \frac{S_o^f}{\rho_o^f} \frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f)}{\partial t} + \operatorname{DIG}^f = 0, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{DIG}^f = \frac{\operatorname{div}(\rho_w^f \vec{U}_w^f)}{\rho_w^f} + \frac{\operatorname{div}(\rho_o^f \vec{U}_o^f)}{\rho_o^f} + \sigma(P^f - P^m) \left( \frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m + \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{S_w^m}{\rho_w^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m)}{\partial t} + \frac{S_o^m}{\rho_o^m} \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m)}{\partial t} + \operatorname{DIG}^m = 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{DIG}^m = -\sigma(P^f - P^m)(\lambda_w^m + \lambda_o^m). \quad (2.9)$$

Зафиксируем насыщенности без потери общности. Тогда уравнения (2.6)-(2.9) представимы в виде:

$$\frac{\partial P^f}{\partial t} - \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} P^f + \alpha^f (P^f - P^m) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P^m}{\partial t} + \alpha^m (P^m - P^f) = 0, \quad (2.11)$$

где

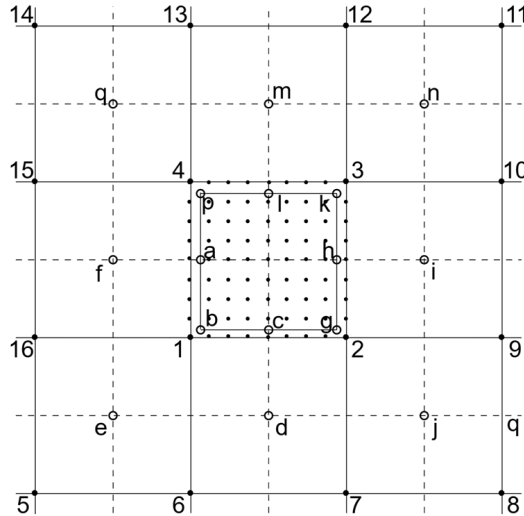
$$\kappa = \frac{k^f}{\varphi^f} \left( \frac{k_{rw}(S_w^f)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S_o^f)}{\mu_o} \right) \left( \frac{S_w^f \alpha_w}{\rho_w^{f(0)}} + \frac{S_o^f \alpha_o}{\rho_o^{f(0)}} \right)^{-1},$$

$$\alpha^f = \frac{\sigma}{\varphi^f} \left( \frac{\rho_w^m}{\rho_w^f} \lambda_w^m + \frac{\rho_o^m}{\rho_o^f} \lambda_o^m \right) \left( \frac{S_w^f \alpha_w}{\rho_w^{f(0)}} + \frac{S_o^f \alpha_o}{\rho_o^{f(0)}} \right)^{-1},$$

$$\alpha^m = \frac{\sigma(\lambda_w^m + \lambda_o^m)}{\varphi^m} \left( \frac{S_w^m \alpha_w}{\rho_w^{m(0)}} + \frac{S_o^m \alpha_o}{\rho_o^{m(0)}} \right)^{-1}.$$

Здесь  $\alpha_o$  и  $\alpha_w$  – коэффициенты сжимаемости нефти и воды,  $c^2/\text{м}^2$ ,  $\rho_o^{(0)}$  и  $\rho_w^{(0)}$  – плотности нефти и воды в недеформированном состоянии,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Будем решать задачу Дирихле для уравнения (2.10) с использованием декомпозиции области, представленной на рис. 2.1.



**Рис. 2.1.** Расчетная сетка задачи.  $1 \div 16$  и  $\bullet$  – нумерация и обозначения узлов макросетки,  $1 \div 4$  и  $\cdot$  – нумерация и обозначения узлов микросетки,  $\circ$  – обозначения пересечений потоковых линий. Для узла 1 потоковый контур обозначен abcdef, для 2 – cghijd, для 3 – ihklmn, для 4 – lpaqfm

**Fig. 2.1.** Computational grid of the problem.  $1 \div 16$  and  $\bullet$  – numbering and designations of the macrogrid nodes,  $1 \div 4$  and  $\cdot$  – numbering and designations of the microgrid nodes,  $\circ$  – designations of the intersections of the flow lines. For node 1, the flow contour is designated abcdef, for 2 – cghijd, for 3 – ihklmn, for 4 – lpaqfm

На рис. 2.1 макросетка с большим пространственным шагом отвечает всей области интегрирования. Внутри макроячейки с вершинами 1-4 реализована микросетка. Предполагается, что нам известны значения давления в вершинах макроячейки 1-4:  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ ,  $\pi_4$  соответственно.

### 3. Вычислительный алгоритм

Приведем краткое описание метода символьной прогонки для одномерного случая. Рассмотрим сеточную функцию  $\bar{u}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  – номер узла сетки.

По аналогии с методом классической прогонки [8] запишем балансное соотношение на сетке  $i = 0, \dots, N$ :

$$A_i \bar{u}_{i-1} - C_i \bar{u}_i + B_i \bar{u}_{i+1} = -\bar{F}_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (3.1)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i$  – числовые коэффициенты,  $\bar{F}_i$  – сеточная функция.

Основное отличие метода символьной прогонки от классической заключается в полиномиальном представлении сеточной функции  $\bar{u}_i$ , невязки  $\bar{F}_i$  и одного прогоночного коэффициента  $\beta_i$ . Полиномы зависят от значений давления  $\pi_1, \pi_2$  на концах отрезка

интегрирования. Задача сводится к уточнению коэффициентов полиномов при  $\pi_1, \pi_2$  итерационным методом. Далее по тексту полиномиальные величины будут обозначены чертой сверху.

Полиномиальное представление для величин имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= c_0^u + c_1^u \pi_1 + c_2^u \pi_2, \\ \bar{\beta} &= c_0^\beta + c_1^\beta \pi_1 + c_2^\beta \pi_2, \\ \bar{F} &= c_0^F + c_1^F \pi_1 + c_2^F \pi_2.\end{aligned}$$

Здесь  $c_0, c_1, c_2$  – коэффициенты полиномов, подлежащие уточнению с использованием итерационного процесса; верхние индексы означают величины, в полиномиальном представлении которых участвуют эти коэффициенты.

По аналогии с методом классической прогонки получаем выражение для нахождения прогоночных коэффициентов

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i) \bar{u}_{i+1} + (A_i \alpha_i \bar{\beta}_{i+1} + A_i \bar{\beta}_i - C_i \bar{\beta}_{i+1} + \bar{F}_i) = 0.$$

Нахождение скалярного коэффициента  $\alpha$  и полиномиального коэффициента  $\bar{\beta}$  осуществляется по формулам:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \bar{\beta}_i + \bar{F}_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Для нахождения значений  $\alpha_0, \bar{\beta}_0$  аналогично классической прогонке используются граничные условия задачи:

$$\bar{u}_0 = \alpha_1 \bar{u}_1 + \bar{\beta}_1 = \pi_1, \text{ т.е. } \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \pi_1 \quad (c_0^\beta = 0, \quad c_1^\beta = 1, \quad c_2^\beta = 0).$$

Обратное направление метода символьной прогонки реализуется с начальным значением  $\bar{u}_N = \pi_2$ .

Таким образом, задача восстановления значений сеточной функции сводится к уточнению значений коэффициентов полиномов  $c_0, c_1, c_2$  с верхними индексами, соответствующими обозначениям искомым полиномов.

При переходе на двумерный случай полиномиальное представление сеточной функции, прогоночного коэффициента и невязки примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= c_0^u + \sum_{n=1}^4 c_n^u \pi_n, \\ \bar{\beta} &= c_0^\beta + \sum_{n=1}^4 c_n^\beta \pi_n, \\ \bar{F} &= c_0^F + \sum_{n=1}^4 c_n^F \pi_n.\end{aligned}$$

Здесь  $\pi_n, n = 1, 2, 3, 4$  – значения давления в узлах макроячейки 1-4 на рис. 2.1;  $c_j, j = 0, \dots, 4$  с верхними индексами, соответствующими обозначениям искомым полиномов, – коэффициенты полиномов.

Нахождение коэффициентов при значениях давления проводится итерационным методом с предварительно заданной точностью. При решении двумерных задач используется метод переменных направлений для решения локально одномерных систем [9, 10], вычисляющих коэффициенты при неизвестных значениях сеточных функций в макроузлах.

4. Исследование порядка сходимости алгоритма

4.1. Одномерный случай

Для исследования порядка сходимости алгоритма для одномерного случая выбрана следующая задача, отвечающая виду (2.10):

$$\Delta u = -\sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1,$$

имеющая точное решение  $u = \sin x$ .

С использованием метода символьной прогонки, представленного в п. 3, получены результаты на последовательности сгущающихся сеток с числом пространственных узлов  $N = 20, 40, 80, 160, 320$  и точное решение, представленные на рис. 2-3.

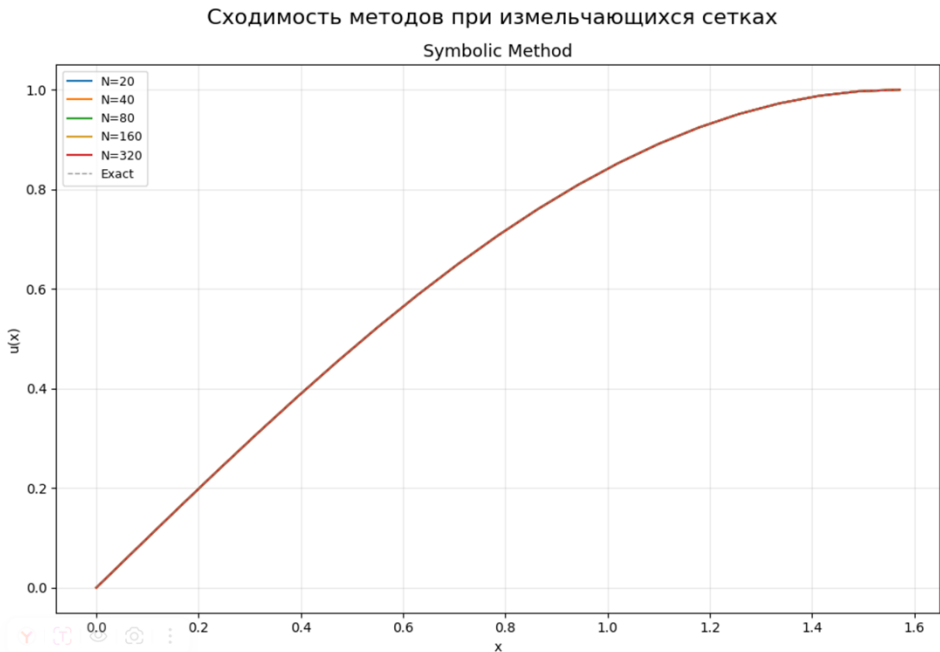
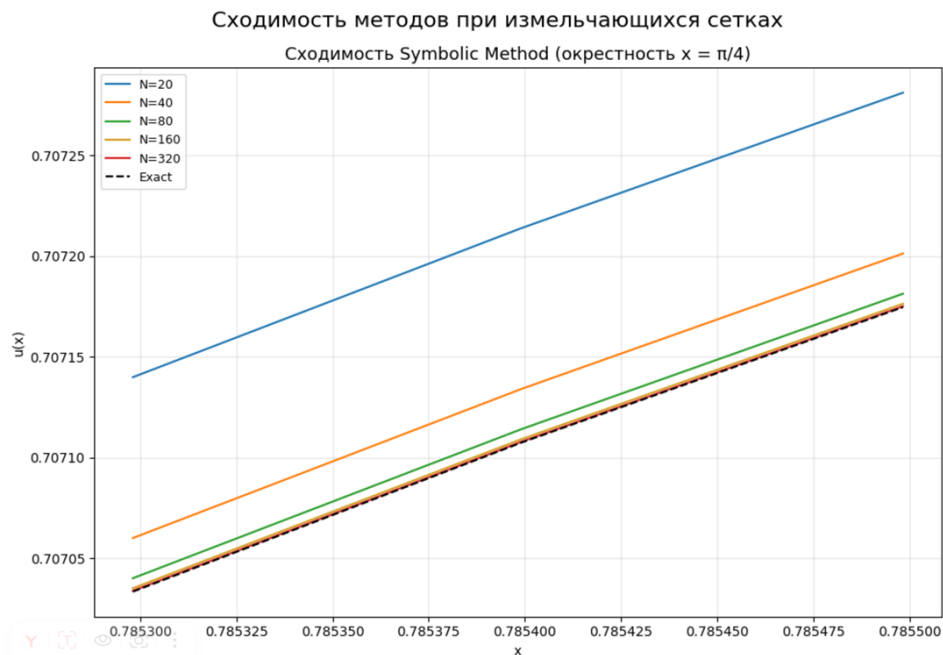


Рис. 4.1. Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках

Fig. 4.1. Solutions obtained by the symbolic tridiagonal matrix algorithm on refined grids

На рис. 4.1 представлены графики решений при различном разбиении отрезка интегрирования. На рис. 4.2 представлена детализация рис. 4.1 в окрестности точки  $x = \frac{\pi}{4}$ . Из рис. 4.1-4.2 видно, что при измельчении расчетной сетки решения сходятся к точному.



**Рис. 4.2.** Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках в окрестности точки  $x = \frac{\pi}{4}$   
**Fig. 4.2.** Solutions obtained by the symbolic tridiagonal algorithm on refined grids in a neighborhood of the point  $x = \frac{\pi}{4}$

Отклонения решений от точного приведены в таблице 4.1.

**Таблица 4.1.** Отклонения от точного решения для одномерной задачи  
**Table 4.1.** Deviations from the exact solution for the one-dimensional problem

| Число узлов сетки | Отклонение в начале отрезка интегрирования | Отклонение в середине отрезка интегрирования | Отклонение в конце отрезка интегрирования | Отклонение по максимальной норме |
|-------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|
| $N = 20$          | $1.46 \cdot 10^{-5}$                       | $1.06 \cdot 10^{-4}$                         | $2.41 \cdot 10^{-5}$                      | $1.08 \cdot 10^{-4}$             |
| $N = 40$          | $3.66 \cdot 10^{-6}$                       | $2.66 \cdot 10^{-5}$                         | $6.03 \cdot 10^{-6}$                      | $2.70 \cdot 10^{-5}$             |
| $N = 80$          | $9.14 \cdot 10^{-7}$                       | $6.65 \cdot 10^{-6}$                         | $1.51 \cdot 10^{-6}$                      | $6.76 \cdot 10^{-6}$             |
| $N = 160$         | $2.28 \cdot 10^{-7}$                       | $1.66 \cdot 10^{-6}$                         | $3.77 \cdot 10^{-7}$                      | $1.69 \cdot 10^{-6}$             |
| $N = 320$         | $5.70 \cdot 10^{-8}$                       | $4.16 \cdot 10^{-7}$                         | $9.40 \cdot 10^{-8}$                      | $4.22 \cdot 10^{-7}$             |

Расчет порядка точности как максимальной нормы отклонений, равно как и в остальных точках отрезка показывает второй порядок точности алгоритма, что соответствует используемой разностной схеме.

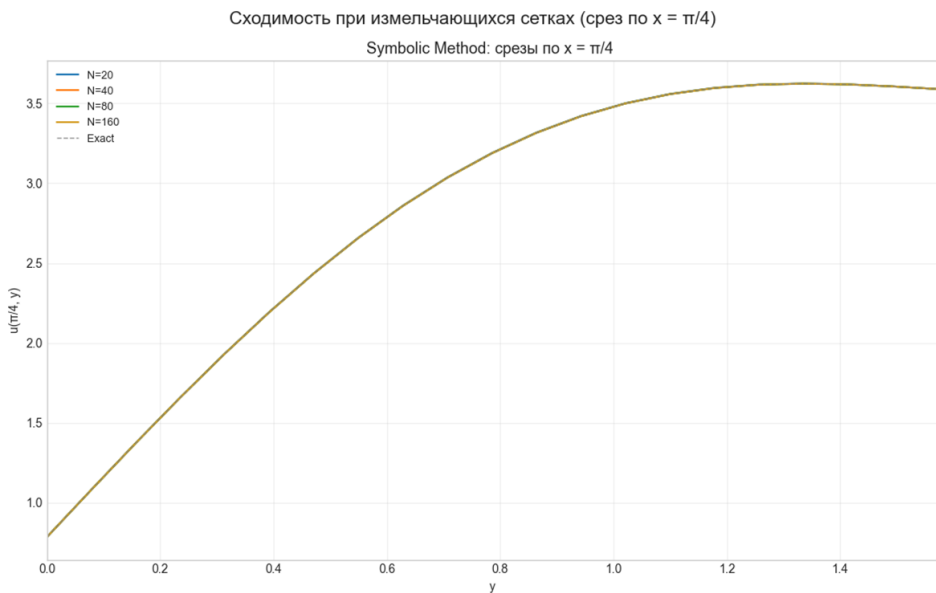
4.2. Двумерный случай

Для исследования порядка сходимости алгоритма для двумерного случая выбрана следующая задача, отвечающая виду (2.10):

$$\Delta u = -8 \sin(2x) \sin(2y), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$u|_{x=0} = y, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + y + \frac{\pi}{2}y, \quad u|_{y=0} = x, \quad u|_{y=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2}x,$$

имеющая точное решение  $u = x + y + xy + \sin(2x) \sin(2y)$ .

С использованием метода символьной прогонки, представленного в п. 3, получены результаты на последовательности сгущающихся сеток с числом пространственных узлов  $N = 20, 40, 80, 160$  и точное решение, представленные на рис. 4.3-4.4.

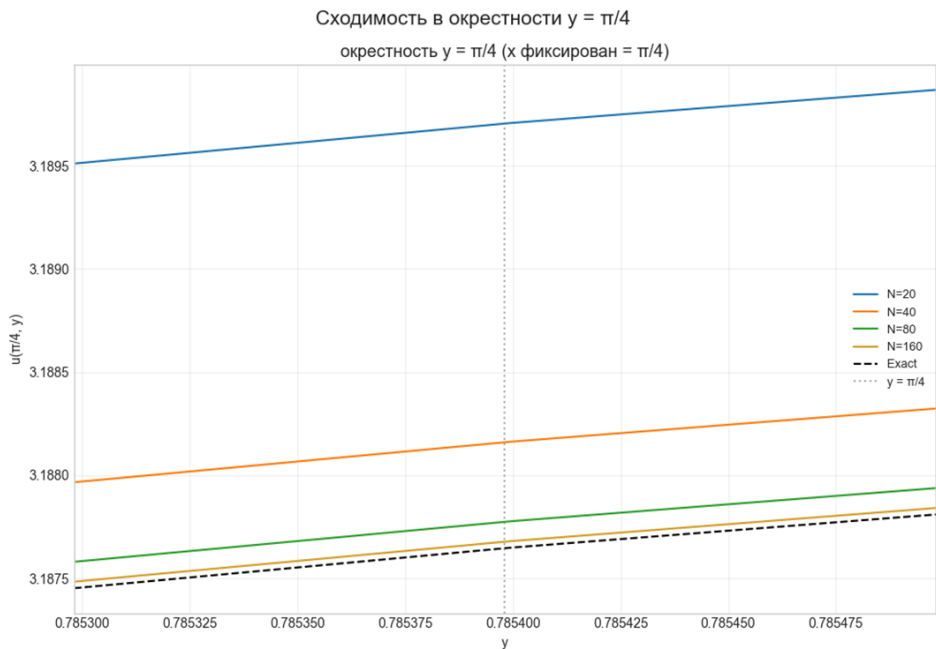


**Рис. 4.3.** Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках при  $x = \frac{\pi}{4}$

**Fig. 4.3.** Solutions obtained by the symbolic matrix tridiagonal algorithm on refined grids for  $x = \frac{\pi}{4}$

Рис. 4.3-4.4 показывают, что при измельчении пространственных сеток решения, полученные с использованием метода символьной прогонки, сходятся к точному. Отклонения решений от точного приведены в таблице 4.2. Размер расчетной сетки –  $N \times N$ .

Из таблицы 4.2 следует, что метод символьной прогонки дает второй порядок точности для используемой разностной схемы для задачи с известным точным решением.



**Рис. 4.4.** Решения, полученные методом символьной прогонки на сгущающихся сетках при  $x = \frac{\pi}{4}$  в окрестности точки  $y = \frac{\pi}{4}$   
**Fig. 4.4.** Solutions obtained by the symbolic tridiagonal matrix algorithm on refined grids for  $x = \frac{\pi}{4}$  in a neighborhood of the point  $y = \frac{\pi}{4}$

**Таблица 4.2.** Отклонения от точного решения для двумерной задачи  
**Table 4.2.** Deviations from the exact solution for the two-dimensional problem

| Число узлов сетки | Отклонение в начале отрезка интегрирования | Отклонение в середине отрезка интегрирования | Отклонение в конце отрезка интегрирования | Отклонение по максимальной норме |
|-------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|
| $N = 20$          | $3.22 \cdot 10^{-4}$                       | $2.06 \cdot 10^{-3}$                         | $3.22 \cdot 10^{-4}$                      | $2.06 \cdot 10^{-3}$             |
| $N = 40$          | $8.03 \cdot 10^{-5}$                       | $5.14 \cdot 10^{-4}$                         | $8.03 \cdot 10^{-5}$                      | $5.14 \cdot 10^{-4}$             |
| $N = 80$          | $2.00 \cdot 10^{-5}$                       | $1.28 \cdot 10^{-4}$                         | $2.00 \cdot 10^{-5}$                      | $1.28 \cdot 10^{-4}$             |
| $N = 160$         | $4.93 \cdot 10^{-6}$                       | $3.15 \cdot 10^{-5}$                         | $4.93 \cdot 10^{-6}$                      | $3.15 \cdot 10^{-5}$             |

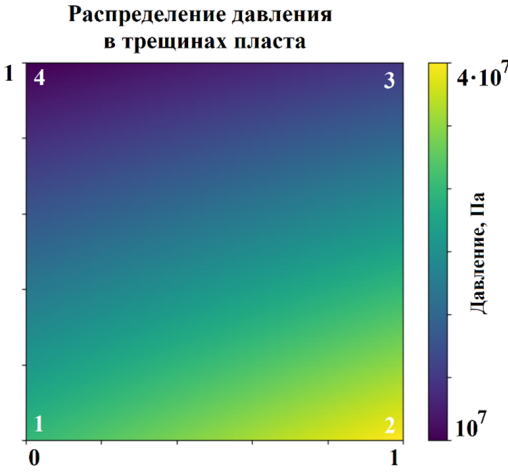
### 5. Вычислительный эксперимент

Для исследования распределения давления в трещиновато-пористой среде нефтесодержащего пласта было решено уравнение пьезопроводности (2.10) при фиксированных значениях насыщенностей. Начальное распределение давления отвечает билинейному закону распределения:  $P(x, y) = (1 - x)(1 - y)\pi_1 + x(1 - y)\pi_2 + xy\pi_3 + (1 - x)y\pi_4$ . Параметры процесса и их значения приведены ниже:

$$\phi^f = 0.01, \quad \rho_o^f = 780 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_w^f = 1110 \text{ кг/м}^3, \quad S_w^f = 0.5, \quad k^f = 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.6 \text{ л/м}^2, \quad \mu_o = 0.87 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad \mu_w = 0.36 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \\ k_{ro}(S_w^f) &= \left( \frac{0.63 - S_w^f}{0.63 - 0.25} \right)^{3.5}, \quad k_{rw}(S_w^f) = 0.295 \cdot \left( \frac{S_w^f - 0.25}{0.63 - 0.25} \right)^3, \quad \alpha^f = 0.04, \quad \tau = 1 \text{ с}, \\ h_x, h_y &= 0.01 \text{ м}, \quad \beta_w = 4.74 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{м}^2, \quad \beta_o = 2.41 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{м}^2. \end{aligned}$$

На рис. 5.1-5.2 приведены расчетные данные для уравнения пьезопроводности (2.10). В первой тестовой задаче взяты следующие значения давления в узлах макроячейки 1-4:  $\pi_1 = 3 \cdot 10^7$  Па,  $\pi_2 = 4 \cdot 10^7$  Па,  $\pi_3 = 1.5 \cdot 10^7$  Па,  $\pi_4 = 10^7$  Па.



**Рис. 5.1.** Распределение давления в первом тестовом случае  
**Fig. 5.1.** Pressure distribution in the first test case

Из рис. 5.1 хорошо прослеживается отток давления из узлов 1 и 2 с большими его значениями в сторону узлов 3 и 4 с меньшими значениями.

Во второй тестовой задаче взяты следующие значения давления в узлах макроячейки 1-4:  $\pi_1 = 10^7$  Па,  $\pi_2 = 10^7$  Па,  $\pi_3 = 10^7$  Па,  $\pi_4 = 4 \cdot 10^7$  Па.

На рис. 5.2 отражен перепад давления в случае превышения его значений в узле 4. Отток приводит к снижению значений в узле 4.

## 6. Заключение

В работе исследован алгоритм символьной прогонки с целью оценки его порядка точности в двумерном и одномерном случаях. Для применения алгоритма построена сетка с большим пространственным шагом (макросетка с макроячейками), внутри одной из ячеек которой реализована сетка с более мелким пространственным разбиением (микросетка с микроячейками). Алгоритм символьной прогонки является модификацией алгоритма классической прогонки. Его основное отличие заключается в полиномиальном представлении искомой сеточной функции, одного прогоночного коэффициента и невязки. Роль неизвестных в полиномах играют значения давления в узлах декомпозированной макроячейки, а коэффициенты подлежат уточнению итерационными методами.

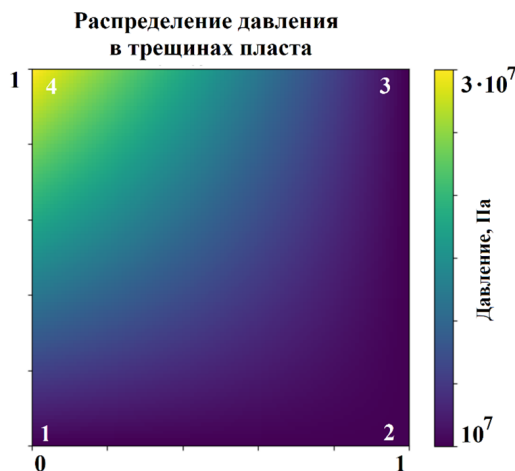


Рис. 5.2. Распределение давления во втором тестовом случае

Fig. 5.2. Pressure distribution in the second test case

Проведены вычислительные эксперименты на последовательности сгущающихся секток. Оценки отклонений расчетных данных от точного решения позволяют сделать вывод о втором порядке точности исследуемого алгоритма.

Алгоритм символьной прогонки применен к решению задачи пьезопроводности в трещиновато-пористом коллекторе нефтесодержащего пласта. Получены картины распределения давления в прискважинной области для различных начально-краевых условий задачи, корректно отражающие физику процессов.

**Благодарности.** Работа Ю.А. Повещенко (разработка и анализ методологии) и В.О. Подрыги (разработка и анализ модели) выполнена в рамках государственного задания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Работа И.Р. Янгляева (разработка и реализация алгоритмов, проведение расчетов), О.С. Язовцевой (анализ результатов, редактирование текста) и И.М. Губайдуллина (научная консультация, кураторство данных) поддержана Российским научным фондом (проект № 25-71-20005). Расчеты проведены с помощью суперкомпьютера K100, установленного в ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Warren J. E., Root P. J. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.* 1963. Vol. 3. P. 245–255. DOI: 10.2118/426-PA
2. Owusu R., Sakyi A., Dontwi I. K., Amoako-Yirenkyi P. A New Macro-Scale Volume Averaged Transport Model for Diffusive Dominated Non-Darcian Flow Problem in Multi-Scaled Naturally Fractured Reservoirs. *J. Pet. Explor. Prod. Technol.* 2022. Vol. 12. P. 2511–2522. DOI: 10.1007/s13202-022-01498-x
3. Nayagum D., Schefer G., Mose R. Modelling Two-Phase Incompressible Flow in Porous Media Using Mixed Hybrid and Discontinuous Finite Elements. *Comput. Geosci.* 2004. Vol. 8. P. 49–73. DOI: 10.1023/B:COMG.0000024446.98662.36

4. Zhang Q., Yang Y., Wang D., Sun H., Zhong J., Yao J., Lisitsa V. Correlations of Residual Oil Distribution with Pore Structure During the Water Flooding Process in Sandstone Reservoirs. *Adv. Geo-Energy Res.* 2024. Vol. 12. P. 113–126. DOI: 10.46690/ager.2024.05.04
5. Liu Xt., Xuan Ll., Liu Q., Cai Hx., Luo Wj. Research on the Application of Sidetracking Technology to Recover Residual Oil from Old Wells in Shallow and High-Water-Cut Oil Reservoirs in Nanpu Onshore Oilfield. *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023*. Singapore: Springer, 2024. P. 652–665. DOI: 10.1007/978-981-97-0475-0\_56
6. Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 11. С. 1804–1811. DOI: 10.7868/S0044466917110126.EDN ZQZYGX.
7. Uzyanbaev R. M., Bobreneva Yu. O., Poveshchenko Yu. A., Podryga V. O., Polyakov S. V., Rahimly P. I., Gubaydullin I. M. Numerical Modeling of Two-Phase Fluid Filtration for Carbonate Reservoir in Two-Dimensional Formulation. *Mathematics*. 2024. Vol. 12, no. 21. 3412. DOI: 10.3390/math12213412
8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. 197 с.
10. Kudryashova T. A., Polyakov S. V. Parallel Algorithms for Solving Multidimensional Boundary Value Problems for Parabolic Equations. In: *Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems, Collection of Articles*. Vol. 6. Moscow: Janus-K Publishing House, 2003. P. 212–226.

*Поступила 30.05.2026; доработана после рецензирования 30.07.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. J. E. Warren, P. J. Root, “The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs”, *Soc. Pet. Eng. J.*, **3** (1963), 245–255. DOI: 10.2118/426-PA
2. R. Owusu, A. Sakyi, I. K. Dontwi, P. Amoako-Yirenkyi, “A New Macro-Scale Volume Averaged Transport Model for Diffusive Dominated Non-Darcian Flow Problem in Multi-Scaled Naturally Fractured Reservoirs”, *J. Pet. Explor. Prod. Technol.*, **12** (2022), 2511–2522. DOI: 10.1007/s13202-022-01498-x
3. D. Nayagum, G. Schäfer, R. Mosé, “Modelling Two-Phase Incompressible Flow in Porous Media Using Mixed Hybrid and Discontinuous Finite Elements”, *Comput. Geosci.*, **8** (2004), 49–73. DOI: 10.1023/B:COMG.0000024446.98662.36

4. Q. Zhang, Y. Yang, D. Wang, H. Sun, J. Zhong, J. Yao, V. Lisitsa, “Correlations of Residual Oil Distribution with Pore Structure During the Water Flooding Process in Sandstone Reservoirs”, *Adv. Geo-Energy Res.*, **12** (2024), 113–126. DOI: 10.46690/ager.2024.05.04
5. Xt. Liu, Ll. Xuan, Q. Liu, Hx. Cai, Wj. Luo, *Proceedings of the International Field Exploration and Development Conference 2023*, Springer, Singapore, 2024 DOI: 10.1007/978-981-97-0475-0\_56.
6. I. B. Petrov, A. V. Favorskaya, N. I. Khokhlov, “Grid-characteristic method on systems of nested hierarchical grids and its application to the study of seismic waves”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:11 (2017), 1804–1811. DOI: 10.7868/S0044466917110126
7. R. M. Uzyanbaev, Yu. O. Bobreneva, Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, S. V. Polyakov, P. I. Rahimly, I. M. Gubaydullin, “Numerical Modeling of Two-Phase Fluid Filtration for Carbonate Reservoir in Two-Dimensional Formulation”, *Mathematics*, **12**:21 (2024), 3412. DOI: 10.3390/math12213412
8. A. A. Samarskii, *Introduction to the Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1971, 553 p.
9. N. N. Yanenko, *The Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics*, Nauka. Siberian Branch, Novosibirsk, 1967, 197 p.
10. T. A. Kudryashova, S. V. Polyakov, *Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems, Collection of Articles*, **6**, Janus-K Publishing House, Moscow, 2003.

*Submitted 30.05.2026; Revised 30.07.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.240-257

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.95:536.2:533.2

**Численное моделирование центрального впрыска воздуха для повышения эффективности горения биогаза в системе с реагирующим потоком**У. Д. Мизхер<sup>1</sup>, М. Д. Мизхер<sup>2</sup>, П. М. Абрашкин<sup>3</sup>, П. А. Вельмисов<sup>3</sup><sup>1</sup>Южный технический университет (г. Басра, Ирак)<sup>2</sup>Университет Аль-Шатра (г. Аль-Шатра, Ирак)<sup>3</sup>Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск, Российская Федерация)

**Аннотация.** В данной работе представлен комплексный численный анализ (CFD) реагирующего потока с целью исследования влияния центрального впрыска воздуха на эффективность горения и эмиссионные характеристики биогаза. Из-за высокого содержания диоксида углерода ( $\text{CO}_2$ ) биогаз обычно характеризуется нестабильностью пламени и низкой теплотворной способностью. Для решения этих проблем предложен метод центрального впрыска вторичного воздуха, направленный на изменение динамики сдвигового слоя и интенсификацию турбулентно-химического взаимодействия. Численное моделирование выполнено путем решения уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS), совместно с моделью турбулентности Realizable  $k - \epsilon$ . Сложные химические реакции смеси метана и диоксида углерода моделировались с использованием концепции вихревого рассеяния (EDC) в сочетании с сокращенным механизмом химической кинетики. Результаты показывают, что аэродинамическая структура, формируемая центральной воздушной струей, создает устойчивую центральную тороидальную зону рециркуляции (CTRZ). Эта зона выполняет роль теплового анкера, существенно стабилизируя корень пламени и предотвращая его отрыв. Оптимизация скорости центрального впрыска воздуха привела к более равномерному распределению температуры и значительному снижению выбросов недогоревших углеводородов (УНС) и монооксида углерода (CO) на выходе. Однако был определен верхний порог скорости впрыска, выше которого локальное образование термических оксидов азота ( $\text{NO}_x$ ) возрастает из-за появления интенсивных стехиометрических зон. Полученные результаты дают практические рекомендации по аэродинамической оптимизации и проектированию экологически чистых горелочных устройств, работающих на низкокалорийном биотопливе.

**Ключевые слова:** вычислительная гидродинамика (CFD), горение биогаза, центральный впрыск воздуха, концепция вихревого рассеяния (EDC), снижение выбросов

**Для цитирования:** Мизхер У. Д., Мизхер М. Д., Абрашкин П. М., Вельмисов П. А. Численное моделирование центрального впрыска воздуха для повышения эффективности горения биогаза в системе с реагирующим потоком // Журнал Средневожского математического общества. 2026. Т. 28, № 3. С. 240–257. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.240-257



Об авторах:

**Мизхер Усама Джавад**, кандидат технических наук, преподаватель, Южный технический университет (61001, Ирак, г. Басра, ул. Главная дорога Аль-Зубайр), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, [u.mizher@stu.edu.iq](mailto:u.mizher@stu.edu.iq)

**Мизхер Мустафа Джавад**, преподаватель, Университет Аль-Шатра (64007, Ирак, г. Аль-Шатра, ул. Аль-Гарраф), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7573-3036>, [mustafa.j.mezher@shu.edu.iq](mailto:mustafa.j.mezher@shu.edu.iq)

**Абрашкин Павел Михайлович**, аспирант, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-7029-3826>, [abrashkinpm@gmail.com](mailto:abrashkinpm@gmail.com)

**Вельмисов Петр Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

*Original article*

MSC2020 49K20, 76F60, 80A20

## Analysis of Central Air Injection for Enhancing Biogas Combustion Efficiency in a Reactive Flow System

U. J. Mizher<sup>1</sup>, M. J. Mezher<sup>2</sup>, P. M. Abrashkin<sup>3</sup>, P. A. Velmisov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Southern Technical University (Basra, Iraq)*

<sup>2</sup>*Al-Shatrah University (Al-Shatrah, Iraq)*

<sup>3</sup>*Ul'yanovsk State Technical University (Ul'yanovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** This study presents a comprehensive Computational Fluid Dynamics (CFD) analysis of a reactive flow system to investigate impact of central air injection on the combustion efficiency and emission characteristics of a biogas. Owing to its high carbon dioxide content ( $\text{CO}_2$ ) content, biogas typically exhibits flame instability and low calorific value. To mitigate these challenges, a central secondary air injection strategy is proposed to modify the shear layer dynamics and enhance turbulence-chemistry interactions.

Numerical simulations were executed by solving the Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations coupled with the Realizable  $k-\varepsilon$  turbulence model. The complex chemistry of the methane-carbon dioxide mixture was resolved using the Eddy Dissipation Concept (EDC) integrated with a reduced chemical kinetic mechanism.

The results reveal that the aerodynamic structure induced by the central air jet establishes a stable Central Toroidal Recirculation Zone (CTRZ), which acts as a thermal anchor, significantly stabilizing the flame root and preventing its lift-off. Optimization of the central air injection velocity has led to a more uniform temperature distribution and to a remarkable decrease in unburned hydrocarbons (UHC) and Carbon Monoxide (CO) emissions at the exhaust. However, an upper threshold for the injection velocity was identified, beyond which localized thermal Nitrogen Oxide ( $\text{NO}_x$ ) generation increases due to intensive thermal damping from the excess cold core air. These findings offer practical guidelines for the aerodynamic optimization and design of eco-friendly, low-calorific biofuel burners.

**Keywords:** computational fluid dynamics, biogas combustion, central air injection, eddy dissipation concept, reduction of emissions

**For citation:** *U. J. Mizher, M. J. Mezher, P. M. Abrashkin, P. A. Velmisov. Analysis of Central Air Injection for Enhancing Biogas Combustion Efficiency in a Reactive Flow System. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:3(2026), 240–257. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.240-257*

*About the authors:*

**Usama J. Mizher**, Ph.D (Tech.), Lecturer, Southern Technical University (Al-Zubair Main Road, Basra 61001, Iraq), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, [u.mizher@stu.edu.iq](mailto:u.mizher@stu.edu.iq)

**Mustafa J. Mezher**, Lecturer, Al-Shatrah University (Al-Gharraf St., Dhi Qar, Al-Shatrah 64007, Iraq), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7573-3036>, [Mustafa.J.Mezher@shu.edu.iq](mailto:Mustafa.J.Mezher@shu.edu.iq)

**Pavel M. Abrashkin**, postgraduate student, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-7029-3826>, [abrashkinpm@gmail.com](mailto:abrashkinpm@gmail.com)

**Peter A. Velmisov**, D.Sc. (Phys. and Math.), Professor, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

## 1. Введение

В условиях современных глобальных экологических требований и изменения структуры энергетики все большее значение приобретает использование альтернативных и возобновляемых источников энергии. Среди них биогаз, получаемый в результате анаэробного сбраживания, рассматривается как высокоперспективное топливо для снижения углеродного следа в энергогенерирующих системах. Однако сырой биогаз относится к категории низкокалорийных газообразных топлив из-за значительного содержания диоксида углерода ( $\text{CO}_2$ ), что существенно снижает его низшую теплоту сгорания и ламинарную скорость распространения пламени. Как следствие, прямое сжигание биогаза часто сопровождается низкими температурами пламени, слабой химической реакционной способностью, отрывом пламени и нестабильностью процессов горения. Эти технические ограничения приводят к неполному сгоранию топлива и, как результат, к повышенным выбросам диоксида углерода ( $\text{CO}$ ) и недогоревших углеводородов, что остается серьезной проблемой в современной теплоэнергетике [1, 2].

Для преодоления указанных недостатков активно исследуются методы оптимизации аэродинамики горелочных устройств и усовершенствования систем распределения воздуха. Опыт последних исследований показывает, что управление траекториями смешения топлива и воздуха на основе детального численного моделирования потоков позволяет существенно повысить интенсивность горения и снизить уровень вредных выбросов [3, 4]. Среди различных аэродинамических методов внедрение центральной струи вторичного воздуха представляет собой простой и эффективный способ интенсификации смешения в ядре факела и изменения динамики сдвигового слоя. Тем не менее, конкретные аэродинамические механизмы, посредством которых центральная воздушная струя влияет на структурную стабилизацию и полноту химического сгорания разбавленного углекислым газом биогаза, до сих пор не получили достаточного отражения в научной литературе [5, 6].

В последние годы численное моделирование процессов горения низкосортных и композиционных топлив привлекает широкое внимание исследователей, при этом основные

усилия сосредоточены на гидродинамике потоков, профилях температур и кинетике образования загрязняющих веществ. Например, в работе [7] с помощью CFD-моделей исследовались сопряженное горение топлив и локальное поведение пламени в активных зонах горения энергетических установок. Аналогичным образом авторы работы [8] сосредоточились на моделировании динамики потока и характеристик многофазного горения композитного топлива в комбинированных горелочных системах. Кроме того, исследование динамики образования вредных выбросов при различных режимах работы подчеркнуло ключевую роль численных прогностических инструментов в оценке экологической эффективности энергосистем [9, 10].

Параллельно с химической кинетикой детально изучались гидродинамика и механизмы смешения в коаксиальных и закрученных струйных потоках. Численные модели, примененные как к осевым, так и к тангенциально закрученным реагирующим струям, показывают, что такие параметры, как геометрия сопла, угол впрыска и интенсивность крутки, определяют макроструктуру пламени и снижают термические выбросы [11, 12]. В дополнение к экспериментальным тестам, теоретический и асимптотический анализ потоков вязкой жидкости, а также сопряженных процессов тепло- и массопереноса позволили глубже понять поведение пограничного слоя и механизмы интенсификации смешения [13, 14]. Наряду с этим современные исследования в области моделирования горения композитных топлив в промышленных горелках выявили глубокое влияние локальных граничных условий и специфики состава топлива на макромасштабную стабильность и эволюцию факела [15].

Несмотря на достигнутый прогресс, понимание того, как локальная центральная воздушная струя взаимодействует со спутным потоком биогаза, разбавленного  $\text{CO}_2$ , остается неполным. В частности, требуется детальная численная оценка взаимосвязи между скоростью центрального впрыска воздуха, формированием внутренних рециркуляционных зон и результирующим турбулентно-химическим взаимодействием.

Для устранения данного пробела в настоящей работе применяется высокоточное CFD-моделирование для систематической оценки влияния центрального впрыска воздуха на топологию течения, термическую структуру и эффективность сгорания в реагирующей биогазовой системе. Полученные результаты призваны послужить основой для разработки практических рекомендаций по аэродинамической оптимизации и проектированию горелочных устройств, работающих на низкокалорийном биотопливе.

## 2. Математическое моделирование и определяющие уравнения

Для описания стационарного, неизоэнергетического, реагирующего турбулентного потока многокомпонентной газовой смеси решается система уравнений сохранения (Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу – RANS), дополненная моделями турбулентности и химической кинетики [16, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i' u_j'} \right], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i h) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{k_{eff}}{C_p} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + S_h. \quad (2.3)$$

Здесь  $p$  – статическое давление,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $(-\rho \overline{u'_i u'_j})$  представляет собой тензор напряжений Рейнольдса, описывающий турбулентный перенос импульса,  $h$  – энтальпия смеси,  $k_{eff}$  – эффективная теплопроводность (учитывающая турбулентную теплопроводность),  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $S_h$  – объемный источник тепла за счет экзотермических химических реакций:

$$S_h = - \sum_k \frac{h_k^0}{M_k} R_k,$$

где  $h_k^0$  – стандартная энтальпия образования  $k$ -го компонента,  $M_k$  – его молярная масса,  $R_k$  – общая скорость химического превращения данного компонента.

## 2.1. Модель турбулентности

Для замыкания уравнений импульса используется модифицированная двухпараметрическая модель турбулентности Realizable  $k-\varepsilon$ , которая демонстрирует высокую точность при моделировании коаксиальных струй, сдвиговых слоев и зон обратных токов. Уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности ( $k$ ) и скорости ее диссипации ( $\varepsilon$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Константы модели  $C_2$ ,  $\sigma_k$  и  $\sigma_\varepsilon$  имеют следующие значения по умолчанию [18]:  $C_2 = 1.9$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.2$ ;  $G_k$  – генерация кинетической энергии турбулентности за счет градиентов средних скоростей,  $\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$  – турбулентная вязкость, коэффициенты модели имеют стандартные калиброванные значения,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  являются турбулентными числами Прандтля для  $k$  и  $\varepsilon$ , соответственно;  $\nu = \mu / \rho$  – кинематическая вязкость;  $C_\mu$  – эмпирический коэффициент;  $C_\mu = 0.09$ ;  $u$ ,  $v$  – компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

## 2.2. Перенос компонентов и модель турбулентно-химического взаимодействия

Локальный состав реагирующей смеси определяется путем решения уравнений переноса массовых долей  $Y_k$  для каждого из  $N - 1$  химических компонентов [19]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i Y_k) = - \frac{\partial}{\partial x_i} J_k + R_k, \quad (2.5)$$

где  $J_k$  – диффузионный поток компонента  $k$ , обусловленный градиентами концентраций и турбулентным перемешиванием:

$$J_k = - \left( \rho D_{m,k} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}.$$

Здесь  $D_{m,k}$  – коэффициент молекулярной диффузии,  $Sc_t$  – турбулентное число Шмидта ( $Sc_t = 0.7$ ).

Для моделирования скорости химических реакций  $R_k$  в условиях сильной связи между гидродинамикой и кинетикой применяется концепция вихревого рассеяния (Eddy Dissipation Concept – EDC). Модель EDC предполагает, что химическое взаимодействие происходит в микроразонах (мелких вихрях), масштабы которых определяются как [20, 21]:

$$\xi^* = C_\xi \left( \frac{\nu \varepsilon}{k^2} \right)^{1/4}.$$

Временной масштаб реакций в этих микроструктурах равен:

$$\tau^* = C_\tau \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Скорость изменения массы компонента  $k$  рассчитывается через обмен между микроразонами и окружающим потоком [22]:

$$R_k = \frac{\rho (\xi^*)^2}{\tau^* (1 - (\xi^*)^3)} (Y_k^* - Y_k),$$

где  $Y_k^*$  – массовая доля компонента после протекания химических реакций в микроразоне в течение времени  $\tau^*$ , рассчитываемая на основе сокращенного кинетического механизма горения метана с учетом промежуточных стадий образования оксида углерода CO.

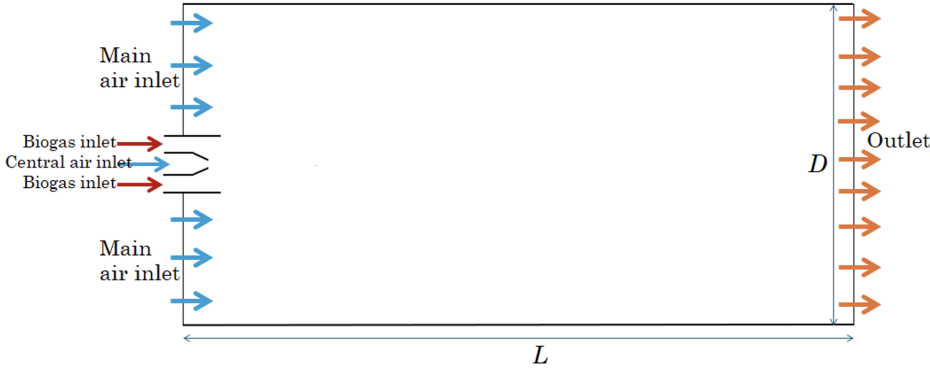
### 3. Расчетная область и граничные условия

Геометрическая модель камеры сгорания, используемая для исследования процессов горения низкокалорийного биогаза, представлена на рис. 3.1. Расчетная область представляет собой горизонтальный осесимметричный (или прямоугольный) канал длиной  $L$  и диаметром  $D$ . Конструкция горелочного устройства включает центральный узел впрыска вторичного воздуха (Central air inlet), окруженный двумя концентрическими потоками биогаза (Biogas inlet). Дополнительно в верхней и нижней частях фронтальной плиты расположены каналы подачи основного воздуха (Main air inlet), обеспечивающие подачу первичного окислителя в объем камеры. Такая конфигурация направлена на интенсификацию турбулентного перемешивания топлива и воздуха непосредственно в ядре факела, что способствует повышению полноты сгорания.

#### 3.1. Граничные условия

Для корректного замыкания системы дифференциальных уравнений в частных производных на границах расчетной области задавались условия, строго соответствующие реальным физическим и газодинамическим режимам работы экспериментальной установки.

1. Центральный канал подачи воздуха (Central Air Inlet). На данном участке сопла задавалось граничное условие массового расхода на входе. Температура подаваемого воздуха принималась постоянной и равной  $T = 300$  К. В соответствии с задачами исследования, массовый расход воздуха через этот канал ( $\dot{m}_{air, c}$ ) варьировался ступенчато: 0%, 10%, 20%, 30% и 40% от общей массы подаваемого окислителя.



**Рис. 3.1.** Схема расчетной области камеры сгорания и граничные условия  
**Fig. 3.1.** A scheme of the computational domain of the combustion chamber and boundary conditions

2. Каналы подачи биогаза (Biogas Inlet). Для топливных каналов использовалось граничное условие массового расхода (Mass Flow Inlet). Суммарный расход газового топлива был зафиксирован на уровне  $\dot{m}_{fuel} = 0.05$  г/с. Состав биогаза моделировался как бинарная смесь со следующим объемным соотношением компонентов: 65% метана ( $CH_4$ ) и 35% диоксида углерода ( $CO_2$ ). Начальная температура топлива составляла 300 K.
3. Каналы подачи основного воздуха (Main Air Inlet). На периферийных входах фронтальной плиты задавалось условие массового расхода. Массовый расход через эти каналы ( $\dot{m}_{air, m}$ ) определялся по остаточному принципу так, чтобы суммарный расход воздуха в системе  $\dot{m}_{air, total} = \dot{m}_{air, m} + \dot{m}_{air, c}$  всегда оставался неизменным и составлял ровно 0.3 г/с, обеспечивая стабильный избыток окислителя.
4. Выходное сечение камеры (Outlet). На выходе из расчетного домена устанавливалось граничное условие постоянного статического давления, равного стандартному атмосферному давлению  $p_{out} = 101325$  Па. При возникновении обратных токов температура смеси принималась равной 300 K.
5. Твердотельные стенки (Walls). Для всех конструктивных элементов и стенок камеры сгорания задавалось условие гидродинамического прилипания, при котором компоненты скорости на стенке равны нулю  $u_i = 0$ . Тепловой режим стенок моделировался как адиабатический  $\partial T / \partial n = 0$ , что исключало внешние теплопотери и позволяло оценить максимальный термический потенциал факела.

Сводные параметры всех исследованных физических конфигураций и режимов работы численной модели систематизированы и представлены в Таблице 3.1.

**Таблица 3.1.** Параметры и типы граничных условий для численного моделирования  
**Table 3.1.** Parameters and types of boundary conditions for numerical simulation

| Граничная зона (Zone) | Тип условия в Fluent | Расход / Скорость                                                        | Температура (К)                     | Химический состав (Объёмные доли)         |
|-----------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------|
| Biogas Inlet          | Mass-Flow Inlet      | $\dot{m}_{fuel} = 0.05 \text{ г/с}$                                      | 300                                 | 65% CH <sub>4</sub> , 35% CO <sub>2</sub> |
| Central Air Inlet     | Mass-Flow Inlet      | $\dot{m}_{air,c} = 0.0 - 0.12 \text{ г/с}$<br>(0%-40% от общего)         | 300                                 | 21% O <sub>2</sub> , 79% N <sub>2</sub>   |
| Main Air Inlet        | Mass-Flow Inlet      | $\dot{m}_{air,m} = 0.30 - 0.18 \text{ г/с}$<br>(до полной суммы 0.3 г/с) | 300                                 | 21% O <sub>2</sub> , 79% N <sub>2</sub>   |
| Outlet                | Pressure Outlet      | $p = 101325 \text{ Па}$                                                  | 300                                 | Свободный выход продуктов                 |
| Walls                 | Wall                 | $u_i = 0$                                                                | $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ | —                                         |

## 4. Результаты

### 4.1. Анализ полей температуры и структуры факела

На рис. 4.1 представлены двухмерные контуры распределения температуры в продольном сечении камеры сгорания для пяти исследованных режимов распределения воздуха ( $\dot{m}_{air,c} = 0\%, 10\%, 20\%, 30\%, 40\%$ ). Полученные результаты визуализируют существенное влияние интенсивности центрального впрыска на геометрическую форму, термическую структуру и пространственную стабилизацию зоны горения биогаза.

- Базовый режим:  $\dot{m}_{air,c} = 0\%, \dot{m}_{air,m} = 100\%$ .

При отсутствии центрального впрыска окислителя в прикорневой зоне горелки (непосредственно у среза сопла) наблюдается протяженная область с относительно низкими температурами (около 432 – 695 К). Высокотемпературное ядро факела ( $T \approx 1750 \text{ К}$ ) смещено далеко вниз по течению и прижато к периферии. Это объясняется тем, что балластный диоксид углерода, содержащийся в биогазе, снижает скорость химических реакций и кинетику воспламенения. В результате смешение газов в центральной зоне затруднено, что создает явные риски гидродинамического отрыва пламени.

- Режимы начального впрыска:  $\dot{m}_{air,c} = 10\%$  и  $\dot{m}_{air,c} = 20\%$ .

Подача даже небольшого количества воздуха через центральный канал радикально меняет топологию температурного поля. На контурах отчетливо видно, как зона максимальных температур ( $T_{max} \geq 1750 \text{ К}$ ) смещается навстречу потоку – ближе к срезу сопла. Центральная воздушная струя создает высокоинтенсивный сдвиговый слой на границе с коаксиальным потоком биогаза, активизируя образование центральной тороидальной зоны рециркуляции (CTRZ). Эта зона подсасывает раскаленные продукты сгорания обратно к основанию пламени, стабилизируя корень факела и предотвращая эффект отрыва. При  $\dot{m}_{air,c} = 20\%$  температурный профиль приобретает наиболее сбалансированную и симметричную форму с однородным заполнением центральной части камеры.

- Режимы избыточного впрыска:  $\dot{m}_{air,c} = 30\%$  и  $\dot{m}_{air,c} = 40\%$ .

Дальнейшее увеличение доли центрального воздуха до 30 % и 40 % приводит к изменению характера термической структуры. Высокоскоростной поток холодного воздуха (300 К), поступающий через центр, начинает оказывать избыточное динамическое воздействие на зону воспламенения. На рис. 4.1 для режима 40 % заметно расширение и некоторое растяжение ядра факела вдоль оси. Большой объем холодного окислителя приводит к локальному термическому разбавлению реакционной зоны (эффект «продувки»). Хотя максимальные температуры в глубине камеры все еще достигают высоких значений за счет догорания смеси, температурные градиенты вблизи сопла сглаживаются, что указывает на снижение интенсивности начального тепловыделения.

#### 4.2. Осевое распределение температуры пламени

Для более детального количественного анализа термической структуры реагирующего потока на рис. 4.2 приведены зависимости локальной температуры от продольной координаты вдоль центральной оси камеры сгорания для всех исследованных режимов.

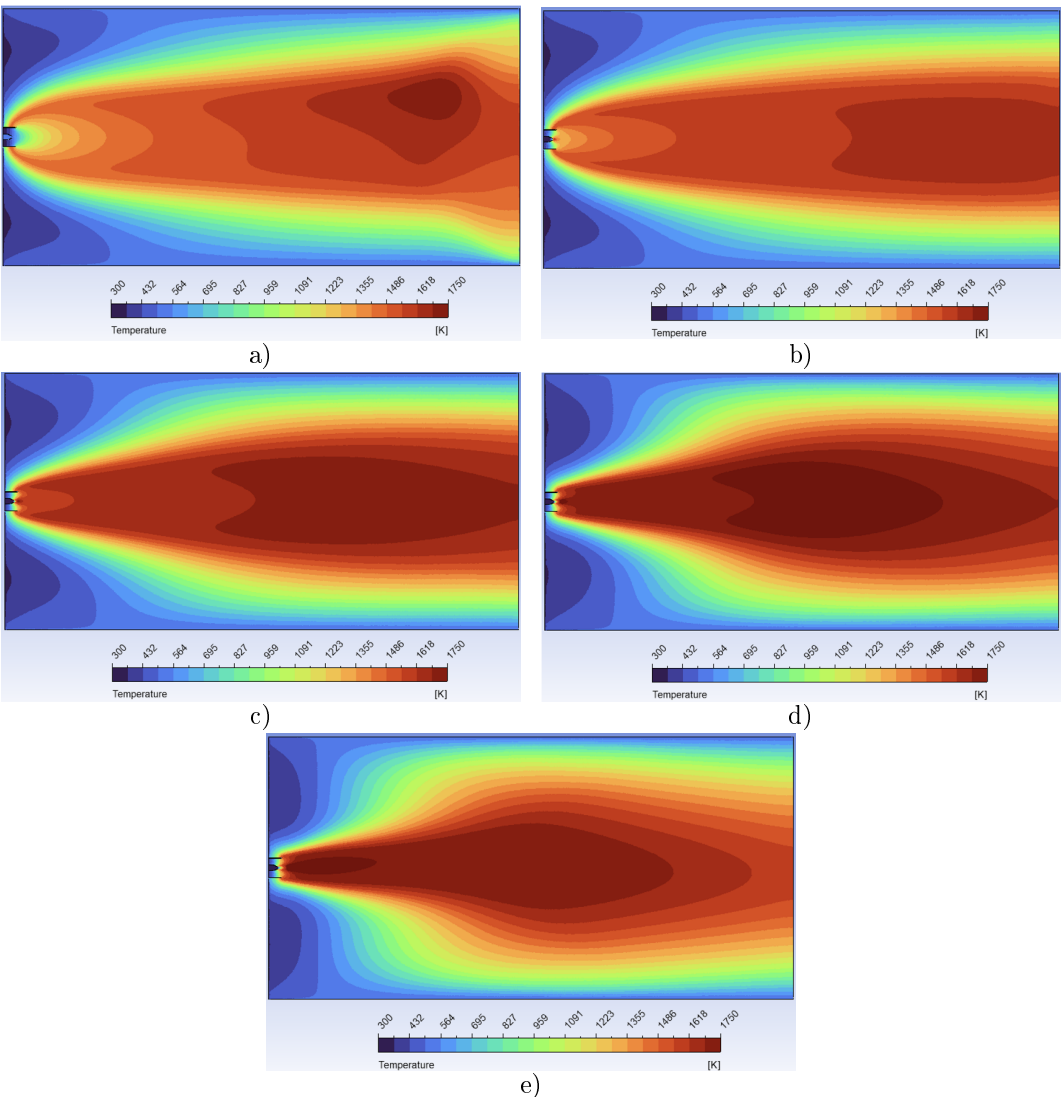
- Анализ прикорневой зоны воспламенения ( $x < 0.25$  м).

На графике отчетливо виден резкий термический скачок (градиент температуры) в непосредственной близости от среза сопла при наличии центрального впрыска воздуха. Для базового режима (0 %, красный сплошной заглавный контур) температура растет плавно и достигает значений порядка 1400 К лишь на удалении  $x \approx 0.5$  м. Это подтверждает, что высокая концентрация  $\text{CO}_2$  в исходном биогазе затягивает стадию предпламенной подготовки и сдвигает фронт воспламенения вниз по течению. Напротив, при введении центрального воздуха (10% – 40%) кривые демонстрируют мгновенный подъем температуры, причем пиковые значения в этой прикорневой зоне растут пропорционально увеличению расхода центральной струи. При режиме 40% (черная сплошная линия) и 30% (зеленая сплошная линия) фиксируются максимальные стартовые пики температур, превышающие 1800 К на расстоянии менее 0.1 м от входа. Физически это доказывает, что центральный впрыск окислителя мгновенно обеспечивает необходимый объем кислорода в ядре потока, стимулируя высокоинтенсивное квазистехиометрическое выгорание метана прямо у среза горелки.

- Анализ основной зоны стабилизации факела ( $0.25 < x < 1.5$  м).

По мере удаления от сопла характер кривых меняется. Режимы с умеренным впрыском — 20 % (синий пунктир) и 30 % (зеленая линия) — демонстрируют наиболее стабильный, монотонный и пологий профиль с удержанием температуры на высоком уровне (1700 – 1780 К). Это указывает на формирование устойчивой зоны обратных токов (CTRZ), которая непрерывно подпитывает фронт горения теплом. В то же время режим 40 % после начального экстремума показывает небольшое локальное падение температуры (стабилизация на уровне около 1740 К), что связано с охлаждающим действием избыточной массы холодного воздуха, прорывающегося через центр.

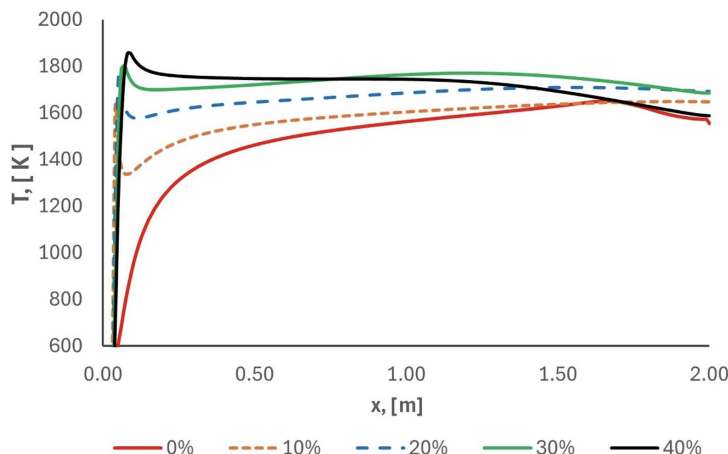
- Выходная зона ( $x > 1.5$  м).



**Рис. 4.1.** Двухмерные контуры распределения температуры (К) в камере сгорания при различных режимах распределения центрального и основного воздуха: а)  $\dot{m}_{air,c} = 0\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 100\%$ , б)  $\dot{m}_{air,c} = 10\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 90\%$ , в)  $\dot{m}_{air,c} = 20\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 80\%$ , г)  $\dot{m}_{air,c} = 30\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 70\%$ , д)  $\dot{m}_{air,c} = 40\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 60\%$

**Fig. 4.1.** Two-dimensional contours of temperature distribution (K) in the combustion chamber under different modes of distribution of central and main air: а)  $\dot{m}_{air,c} = 0\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 100\%$ , б)  $\dot{m}_{air,c} = 10\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 90\%$ , в)  $\dot{m}_{air,c} = 20\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 80\%$ , г)  $\dot{m}_{air,c} = 30\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 70\%$ , д)  $\dot{m}_{air,c} = 40\%$ ,  $\dot{m}_{air,m} = 60\%$

Ближе к выходу из камеры сгорания ( $x \rightarrow 2.0$  м) все температурные кривые сходятся к общему интервалу 1600 – 1700 К, что свидетельствует о завершении основных этапов макроскопического выгорания углеводородов и выравнивании



**Рис. 4.2.** Изменение локальной температуры ( $T$ ) вдоль центральной оси камеры сгорания ( $x$ ) при различных режимах подачи центрального воздуха (от 0% до 40%)

**Fig. 4.2** Change of local temperature ( $T$ ) along the central axis of the combustion chamber ( $x$ ) under different modes of central air supply (from 0% to 40%)

энтальпии газового потока перед выходным сечением.

### 4.3. Анализ эмиссионных характеристик и концентрации компонентов

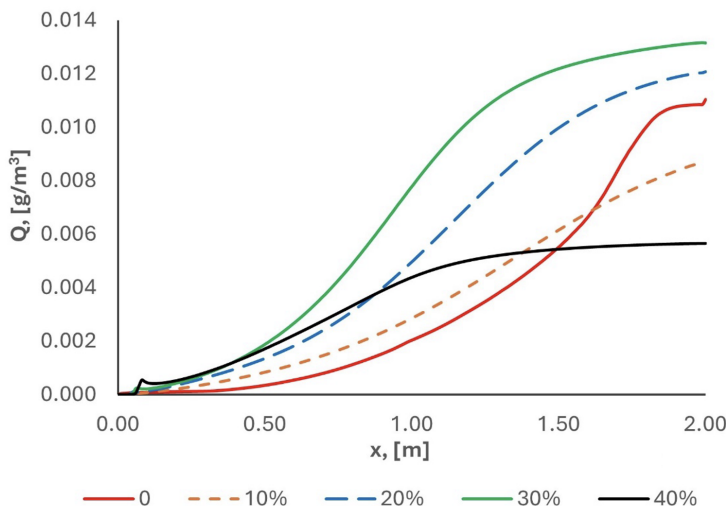
Для глубокого понимания кинетики химических реакций и оценки экологических показателей системы на рис. 4.3 и 4.4 приведены профили концентраций оксидов азота ( $Q_{\text{NO}_x}$ ) и диоксида углерода ( $Q_{\text{CO}_2}$ ) вдоль центральной оси камеры сгорания.

#### 4.3.1. Закономерности образования оксидов азота

На рис. 4.3 представлены кривые распределения концентрации  $\text{NO}_x$ . В данных условиях образование оксидов азота определяется преимущественно термическим механизмом Зельдовича, скорость которого экспоненциально зависит от локальной температуры и наличия свободного кислорода в реакционной зоне.

- Режимы умеренного впрыска (0% – 30%).

С ростом продольной координаты  $x$  концентрация  $\text{NO}_x$  монотонно увеличивается для всех режимов, что связано с развитием факела и завершением выгорания топлива. Наиболее высокая интенсивность образования  $\text{NO}_x$  зафиксирована для режима со впрыском 30% центрального воздуха (зеленая сплошная линия), где концентрация на выходе достигает максимума (около  $0.013 \text{ г/м}^3$ ). Это полностью коррелирует с температурными профилями (рис. 4.2), где данный режим удерживал стабильно высокую температуру на протяжении всей центральной зоны, создавая идеальные кинетические условия (комбинация высокой энтальпии и избытка кислорода) для термического синтеза  $\text{NO}_x$ . Режим 20% (синий пунктир) демонстрирует схожий, но чуть более умеренный характер генерации.



**Рис. 4.3.** Продольное распределение концентрации оксидов азота ( $NO_x$ ) вдоль центральной оси камеры сгорания при различных режимах распределения воздуха

**Fig. 4.3** Longitudinal distribution of the concentration of nitrogen oxides ( $NO_x$ ) along the central axis of the combustion chamber under various air distribution modes

- Режим избыточного впрыска (40 %).

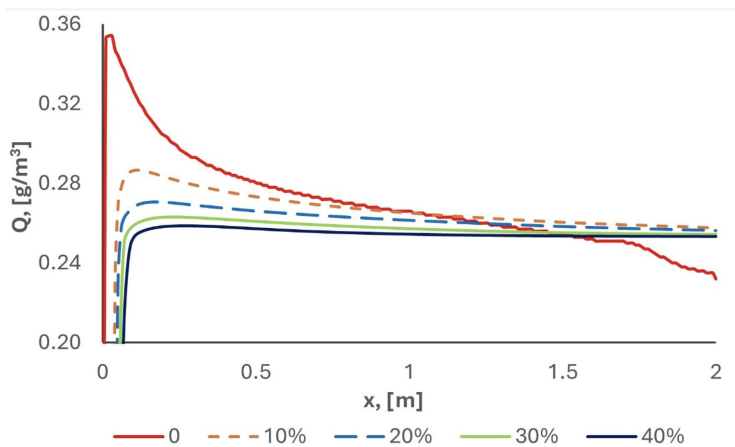
Кривая для режима 40 % (черная сплошная линия) имеет принципиально иной характер. После короткого начального всплеска вблизи сопла, кривая выходит на стабильное плато и стабилизируется на самом низком уровне ( $0.0055 \text{ г/м}^3$ ). Физически это подтверждает гипотезу о сильном термическом демпфировании (охлаждении факела). Избыточный расход холодного центрального воздуха прорывает ядро горения, снижая локальные температуры ниже критического порога активации реакций Зельдовича на основном участке камеры.

#### 4.3.2. Динамика распределения диоксида углерода

Профили концентрации  $CO_2$  на рис. 4.4 наглядно иллюстрируют особенности структуры факела и стадийность выгорания компонентов.

- Базовый режим (0 %).

Кривая базового режима (красный контур) характеризуется резким начальным пиком у самого среза сопла ( $Q \approx 0.36 \text{ г/м}^3$ ). Данный экстремум не является продуктом горения метана, а обусловлен высоким начальным содержанием балластного углекислого газа в составе исходного биогаза (35 %  $CO_2$  по объему). При отсутствии центральной воздушной струи этот инертный газ концентрируется на оси потока, снижая общую реакционную способность смеси в прикорневой зоне факела. По мере удаления от сопла ( $x > 0.25 \text{ м}$ ) концентрация падает за счет диффузионного разбавления основным воздушным потоком.



**Рис. 4.4.** Продольное распределение концентрации диоксида углерода ( $\text{CO}_2$ ) вдоль центральной оси камеры сгорания при различных режимах распределения воздуха

**Fig. 4.4.** Longitudinal distribution of carbon dioxide concentration ( $\text{CO}_2$ ) along the central axis of the combustion chamber under various air distribution modes

- Режимы со впрыском воздуха (10 % – 40 %).

При введении центрального воздуха начальная концентрация  $\text{CO}_2$  на оси падает практически до нуля, поскольку центральный канал подает чистый окислитель. С ростом координаты  $x$  происходит интенсивное выравнивание кривых, которые выходят на стабильный уровень (0.25 – 0.26 г/м<sup>3</sup>). Стабилизация и монотонный профиль этих кривых свидетельствуют о достижении завершающей стадии макроскопического выгорания углеводородов и равномерном распределении конечных продуктов сгорания по всему объему камеры.

## 5. Обсуждение результатов

На основе проведенного комплексного численного моделирования и детального анализа структуры реагирующего потока в камере сгорания были получены количественные и качественные закономерности влияния центрального впрыска воздуха на эффективность горения и экологические показатели низкокалорийного биогаза ( $\text{CH}_4/\text{CO}_2$ ). Обобщение результатов численного эксперимента позволяет сформулировать следующие основные выводы:

1. Гидродинамическая стабилизация и термическая структура факела.

Внедрение центральной воздушной струи кардинально изменяет топологию температурного поля внутри камеры. В базовом режиме (0 % центрального воздуха) из-за высокого балластирующего эффекта  $\text{CO}_2$  (40 % по объему) зона воспламенения сдвинута далеко вниз по течению ( $x > 0.5$  м). Введение центрального воздуха в объеме 10 % и 20 % активизирует образование центральной тороидальной зоны рециркуляции (CTRZ), которая подсасывает раскаленные продукты сгорания обратно к срезу сопла. Это обеспечивает мгновенный термический скачок (рост

температуры выше 1750 К на расстоянии  $x < 0.1$  м) и надежно стабилизирует корень пламени.

2. Эффект термического демпфирования при избыточном впрыске.

Дальнейшее увеличение доли центрального воздуха до 30 % и 40 % (расход до 0.12 г/с) приводит к избыточному динамическому воздействию на ось потока. Большой объем холодного окислителя (300 К) прорывает ядро горения и вызывает локальное термическое разбавление (эффект «продувки»). Это сглаживает температурные градиенты вблизи сопла и деформирует фронт пламени, снижая интенсивность начального тепловыделения, хотя в глубине камеры ( $x > 1.5$  м) за счет догорания смеси температура выравнивается на уровне 1600 – 1700 К.

3. Закономерности кинетики образования оксидов азота.

Установлено, что эмиссия  $\text{NO}_x$  подчиняется термическому механизму Зельдовича и строго коррелирует с локальной энтальпией потока. Максимальный уровень образования  $\text{NO}_x$  (около 0.013 г/м<sup>3</sup>) зафиксирован в режиме 30 %, где высокая температура поддерживается на протяжении всей центральной оси при избытке кислорода. В режиме 40 % кривая распределения  $\text{NO}_x$  выходит на стабильное плато на самом низком уровне (0.0055 г/м<sup>3</sup>), что подтверждает падение локальных температур ниже критического порога активации реакций Зельдовича из-за переохлаждения ядра.

4. Динамика распределения и выгорания углерода.

Профили концентрации  $\text{CO}_2$  наглядно подтверждают стадийность процесса. В базовом режиме (0 %) резкий начальный пик (0.36 г/м<sup>3</sup>) обусловлен исходным балластным составом топлива. При введении воздуха начальная концентрация углекислого газа на оси падает, а монотонный рост и стабилизация кривых на уровне 0.25 – 0.26 г/м<sup>3</sup> свидетельствуют об эффективном протекании реакций. Модель EDC подтверждает, что подача 20 % воздуха в центр обеспечивает оптимальное микроперемешивание, минимизируя выбросы недогоревшего СО за счет его полной конверсии в стабильный  $\text{CO}_2$ .

## 6. Заключение

На основе комплексного сопоставления термодинамических и экологических критериев выявлены две ключевые инженерные закономерности в зависимости от режима работы системы. В статье исследованы два режима: режим максимальной экологической чистоты по  $\text{NO}_x$  (40 % центрального воздуха) и оптимальный интегральный режим (20 % центрального воздуха).

Анализ результатов для первого режима выявил, что при увеличении доли центрального впрыска до 40 % (расход 0.12 г/с) зафиксировано наиболее интенсивное снижение концентрации оксидов азота ( $\text{NO}_x$ ) на оси (до минимального уровня 0.0055 г/м<sup>3</sup>). Физический механизм этого явления связан с сильным термическим демпфированием: избыточный поток холодного воздуха (300 К) прорывает ядро факела и локально снижает температуру ниже критического порога (1800 К), что практически полностью блокирует термический механизм Зельдовича. Однако данный режим приводит к некоторому ухудшению полноты сгорания и риску деформации фронта пламени.

Исследование второго режима с точки зрения достижения наилучшего баланса (компромисса или trade-off) между эффективностью и экологичностью показал, что

наиболее обоснованной является конфигурация с 20 % центрального воздуха (при массовом соотношении топлива и воздуха 0.05/0.3 г/с). Данный режим обеспечивает надежную аэродинамическую стабилизацию корня пламени за счет формирования зоны рециркуляции (CTRZ) и гарантирует максимальную полноту выгорания биогаза (минимизацию выбросов недогоревшего CO), удерживая при этом концентрацию NO<sub>x</sub> в умеренных безопасных пределах.

Полученные количественные данные и выявленные закономерности представляют прямую практическую ценность и могут быть рекомендованы для использования при проектировании и модернизации горелочных устройств промышленных энергетических установок, переводимых на низкокалорийное биотопливо.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang L., Zhang S., Zhou H., Ren Z., Wang H., Wang X. Efficient combustion of low calorific industrial gases: Opportunities and challenges. *Energies*. 2022. Vol. 15, no. 23. 9224. DOI: 10.3390/en15239224
2. Khalil A. E., Arghode V. K., Gupta A. K. Low calorific value fuelled distributed combustion with swirl for gas turbine applications. *Applied Energy*. 2012. Vol. 98. P. 69–78. DOI: 10.1016/j.apenergy.2012.02.074
3. Huang C., Li Z., Wang Y., Lu Y., Liu H., Chen Z. Influence of central air on flow and combustion characteristics and low-load stabilization performance of a Babcock burner. *Processes*. 2023. Vol. 11, no. 7. 1916. DOI: 10.3390/pr11071916
4. Qian W., Yang S., Liu W., Xu Q., Zhu W. Research on Flow Field Prediction in a Multi-Swirl Combustor Using Artificial Neural Network // *Processes*. 2024. Vol. 12, no. 11. 2435. DOI: 10.3390/pr12112435
5. Liu C., Yang H., Ruan C., Yu L., Lu X. Influence of swirl intensity on combustion dynamics and emissions in an ammonia-enriched methane/air combustor. *Physics of Fluids*. 2024. Vol. 36, No. 3. DOI: 10.1063/5.0196764
6. Emara A., Abd-Elgawad A. M. M., Emara K. Innovative eco-friendly design solutions for energy demands using swirl-induced burner by jets. *Energy*. 2024. Vol. 304. 131900. DOI: 10.1016/j.energy.2024.131900.
7. Kovalnogov V. N., Mizher U. J., Busygin S. V., Chukalin A. V. Modeling the processes of combined fuel combustion and temperature analysis in the zone of active combustion of power plants. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2022. Vol. 2425, No. 1. 420031. DOI: 10.1063/5.0081375
8. Mizher U. J., Kovalnogov V. N., Chukalin A. V. Modeling the composite fuel's flow and combustion process in a combined burner device. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. IOP Publishing, 2025. Vol. 1440, No. 1. 012004. DOI: 10.1088/1755-1315/1440/1/012004
9. Mizher U. J., Kovalnogov V. N., Chukalin A. V., Busygin S. V., Fedorov R. V. Simulation of the processes of combined fuel combustion and analysis of harmful substances emissions. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2021. Vol. 2343, No. 1. 130010. DOI: 10.1063/5.0047875

10. Kovalnogov V., Fedorov R., Chukalin A., Mizher U. Simulation Of The Processes Of Combined Fuel Combustion And Analysis Of Harmful Substances Emission. *Procedia Environmental Science, Engineering and Management*. 2021. Vol. 8, No. 1. P. 225–231.
11. Kovalnogov V. N., Fedorov R. V., Mizher U., Busygin S. V., Generalov D. A. Mathematical modeling of a swirling fuel-air jet in applications to low-emission fuel combustion. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2024. Vol. 3030, No. 1. 110001. DOI: 10.1063/5.0193208
12. Мизхер У. Дж., Ковальногов В. Н., Вельмисов П. А. Математическое моделирование закрученной струи в приложениях к малоэмиссионному сжиганию низкосортных топлив // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2021. Т. 23, № 3. С. 308–317. DOI: 10.15507/2079-6900.23.202103.308-317.
13. Velmisov P. A., Mizher U. J. Asymptotic study of heat and mass transfer processes in viscous fluids. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2021. Vol. 2333, No. 1. 120003. DOI: 10.1063/5.0041780.
14. Velmisov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2018. Vol. 2048, No. 1. 040012. DOI: 10.1063/1.5082084
15. Fedorov R., Kovalnogov V. N., Generalov D. A. Simulation and numerical study of composite fuel combustion in a burner. *International Heat Transfer Conference Digital Library*. Begel House Inc., 2023. DOI: 10.1615/IHTC17.50-100
16. Bialecki T. Mathematical model of the combustion process for turbojet engine based on fuel properties. *International Journal of Energy and Environmental Engineering*. 2022. Vol. 13. P. 1309–1316. DOI: 10.1007/s40095-022-00489-2
17. Леонтьев А. И., Кузма-Кичта Ю. А., Попов И. А. Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках // *Теплоэнергетика*. 2017. № 2. С. 36–54.
18. Ansys Fluent Theory Guide : (2021 R2). USA : Ansys Inc., 2021. 1069 p.
19. Mizher U. J., Saud I. H., Mizher M. J. Computational Analysis of Hydrogen Addition Effects on the Combustion Performance of Biogas in Energy Systems. *Results in Engineering*. 2026. 109604. DOI: 10.1016/j.rineng.2026.109604
20. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational Fluid Dynamics. Vol. II. 4th ed. USA : www.EESbooks.com, 2000.
21. Chung T. J. Computational fluid dynamics. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. 1058 p.
22. Anderson J. D. Computational Fluid Dynamics: The Basic with Application. New York : McGraw-Hill, 1995. 547 p.

*Поступила 11.05.2026; доработана после рецензирования 10.07.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. L. Zhang, S. Zhang, H. Zhou, Z. Ren, H. Wang, X. Wang, "Efficient combustion of low calorific industrial gases: Opportunities and challenges", *Energies*, **15**:23 (2022), 9224. DOI: 10.3390/en15239224
2. A. E. Khalil, V. K. Arghode, A. K. Gupta, "Low calorific value fuelled distributed combustion with swirl for gas turbine applications", *Applied Energy*, **98** (2012), 69–78. DOI: 10.1016/j.apenergy.2012.02.074
3. C. Huang, Z. Li, Y. Wang, Y. Lu, H. Liu, Z. Chen, "Influence of central air on flow and combustion characteristics and low-load stabilization performance of a Babcock burner", *Processes*, **11**:7 (2023), 1916. DOI: 10.3390/pr11071916
4. W. Qian, S. Yang, W. Liu, Q. Xu, W. Zhu, "Research on Flow Field Prediction in a Multi-Swirl Combustor Using Artificial Neural Network", *Processes*, **12**:11 (2024), 2435. DOI: 10.3390/pr12112435
5. C. Liu, H. Yang, C. Ruan, L. Yu, X. Lu., "Influence of swirl intensity on combustion dynamics and emissions in an ammonia-enriched methane/air combustor.", *Physics of Fluids*, **36**:3 (2024). DOI: 10.1063/5.0196764
6. A. Emara, A. M. M. Abd-Elgawad, K. Emara, "Innovative eco-friendly design solutions for energy demands using swirl-induced burner by jets", *Energy*, **304** (2024), 131900. DOI: 10.1016/j.energy.2024.131900
7. V. N. Kovalnogov, U. J. Mizher, S. V. Busygin, A. V. Chukalin, "Modeling the processes of combined fuel combustion and temperature analysis in the zone of active combustion of power plants.", *AIP Conference Proceedings* (AIP Publishing LLC), **2425**, 2022, 420031 DOI: 10.1063/5.0081375.
8. U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, A. V. Chukalin, "Modeling the composite fuel's flow and combustion process in a combined burner device.", *Conference Series: Earth and Environmental Science*. (IOP Publishing), **1440**, 2025, 012004 DOI: 10.1088/1755-1315/1440/1/012004.
9. U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, A. V. Chukalin, S. V. Busygin, R. V. Fedorov, "Simulation of the processes of combined fuel combustion and analysis of harmful substances emissions.", *AIP Conference Proceedings* (AIP Publishing LLC), **2343**, 2021, 130010 DOI: 10.1063/5.0047875.
10. V. Kovalnogov, R. Fedorov, A. Chukalin, U. Mizher, "Simulation Of The Processes Of Combined Fuel Combustion And Analysis Of Harmful Substances Emission.", *Procedia Environmental Science, Engineering and Management*, **8**:1 (2021), 225–231.
11. V. N. Kovalnogov, R. V. Fedorov, U. Mizher, S. V. Busygin, D. A. Generalov, "Mathematical modeling of a swirling fuel-air jet in applications to low-emission fuel combustion.", *AIP Conference Proceedings*, **3030**, AIP Publishing LLC, 2024, 110001 DOI: 10.1063/5.0193208.

12. U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, P. A. Vel'misov, "Mathematical modeling of a swirling jet in applications to low-emission combustion of low-grade fuels", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **23:3** (2021), 308–317 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.23.202103.308-317
13. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, "Asymptotic study of heat and mass transfer processes in viscous fluids", *AIP Conference Proceedings.*, **2333**, AIP Publishing LLC, 2021, 120003 DOI: 10.1063/5.0041780.
14. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, E. P. Semenova, "Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows.", *AIP Conference Proceedings*, **2048**, AIP Publishing LLC, 2018, 040012 DOI: 10.1063/1.5082084.
15. R. V. Fedorov, V. N. Kovalnogov, D. A. Generalov, "Simulation and numerical study of composite fuel combustion in a burner", *International Heat Transfer Conference Digital Library Begel House Inc*, 2023 DOI: 10.1615/IHTC17.50-100.
16. T. Bialecki, "Mathematical model of the combustion process for turbojet engine based on fuel properties", *International Journal of Energy and Environmental Engineering*, **13** (2022), 1309–1316. DOI: 10.1007/s40095-022-00489-2
17. A. I. Leontiev, Yu. A. Kuzma-Kichta, I. A. Popov, "Heat and mass transfer and hydrodynamics in swirling flows", *Thermal Engineering*, 2017, no. 2, 36–54 (In Russ.).
18. *Ansys Fluent Theory Guide : (2021 R2).*, USA : Ansys Inc., 2021, 1069 p.
19. U. J. Mizher, I. H. Saud, M. J. Mizher, "Computational Analysis of Hydrogen Addition Effects on the Combustion Performance of Biogas in Energy Systems.", *Results in Engineering*, 2026, 109604. DOI: 10.1016/j.rineng.2026.109604
20. K. A. Hoffman, S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics. Vol. II. 4th ed.*, USA : www.EESbooks.com, 2000.
21. T. J. Chung, *Computational fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
22. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basic with Application.*, McGraw-Hill, New York, 1995, 547 p.

*Submitted 11.05.2026; Revised 10.07.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 539.371

## Задача плоской теории упругости о диаметрально сжатии кольца сосредоточенной нагрузкой

Д. С. Мосиенко, М. А. Леган

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Рассматривается плоская задача линейной теории упругости для кольцевой области, нагруженной на внешнем контуре двумя противоположно направленными сосредоточенными силами, решение которой получено при помощи функций комплексной переменной. Решение построено методом Колосова–Мусхелишвили с использованием принципа суперпозиции: известные потенциалы для сплошного диска дополнены рядами Лорана с явно определяемыми коэффициентами. Исследована сходимости решения и предельные переходы к бесконечно малому отверстию и тонкостенному кольцу. Качественный анализ демонстрирует хорошее совпадение результата моделирования с экспериментальными данными, полученными методом фотоупругости. Достоверность решения подтверждена контролем граничных невязок. Решение позволяет определить зависимость коэффициента концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия от отношения радиусов внутреннего отверстия и габаритного. Значения этого коэффициента, рассчитанные при помощи подхода, представленного в данной статье, совпадают с данными, полученными с использованием метода конечных элементов. При увеличении радиуса центрального отверстия коэффициент концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия нелинейно возрастает. Обсуждены различия между сосредоточенными силами и контактным нагружением, ограничения модели и применение решения при обработке результатов модифицированного бразильского теста.

**Ключевые слова:** плоская теория упругости, кольцевая область, диаметрально сжатие, комплексные потенциалы, коэффициент концентрации напряжений, фотоупругость, модифицированный бразильский тест

**Для цитирования:** Мосиенко Д. С., Леган М. А. Задача плоской теории упругости о диаметрально сжатии кольца сосредоточенной нагрузкой // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 258–279. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279

*Об авторах:*

**Мосиенко Дмитрий Сергеевич**, аспирант, младший научный сотрудник, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2837-1039>, e-mail: [mosienko.d.s@hydro.nsc.ru](mailto:mosienko.d.s@hydro.nsc.ru)

**Леган Михаил Антонович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9029-6770>, e-mail: [leganma@yandex.ru](mailto:leganma@yandex.ru)

© Д. С. Мосиенко, М. А. Леган



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 74-10, 74Sxx

# The problem of the plane elasticity theory on the diametric compression of a ring by a concentrated load

**D. S. Mosienko, M. A. Legan***Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation)*

**Abstract.** The article considers a plane problem of the linear elasticity theory for an annular region loaded on the outer contour by two oppositely directed concentrated forces. An analytical solution to the problem is obtained using functions of a complex variable. More specifically, the solution is constructed by the Kolosov–Muskhelishvili method using the superposition principle: the known potentials of a solid disk are supplemented with Laurent series with explicitly defined coefficients. The convergence of the solution and its passage to the limiting cases of an infinitesimal hole and of a thin-walled ring are studied. Qualitative analysis demonstrates good agreement between the result of modelling and the experimental data obtained by the photoelasticity method. The reliability of the solution is confirmed by monitoring the boundary discrepancies. The solution makes it possible to determine the dependence of the tensile stress concentration coefficient on the hole contour on the ratio of the internal hole radius to the overall radius. The values of this coefficient calculated using the solution presented in this article coincide with the data obtained using the finite element method. As the radius of the central hole increases, the coefficient of tensile stress concentration on the hole contour increases nonlinearly. The differences between concentrated and contact loading, the limitations of the model, and the application of the solution to the processing of the modified Brazilian test results are discussed.

**Keywords:** plane elasticity theory, annular region, diametrical compression, complex potentials, stress concentration factor, photoelasticity, modified Brazilian test

**For citation:** *D. S. Mosienko, M. A. Legan. The problem of the plane elasticity theory on the diametric compression of a ring by a concentrated load. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:3(2026), 258–279. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.258-279*

## *About the authors:*

**Dmitry S. Mosienko**, Ph.D. student, research assistant, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), e-mail: mosienko.d.s@hydro.nsc.ru

**Mikhail A. Legan**, D.Sc. (Tech.), leading researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9029-6770>, e-mail: leganma@yandex.ru

## 1. Введение

Диаметральное сжатие кругового кольца является классической задачей плоской теории упругости и одновременно служит расчётной основой ряда прочностных испытаний [1]. Практическая значимость задачи обусловлена применением кольцевых

образцов в модифицированном бразильском тесте (МБТ), методология и ограничения которого рассмотрены в [2–3]. Центральное отверстие является регулярным концентратором напряжений и обеспечивает локализацию зарождения трещины. Для обработки результатов испытаний требуется вычислить поле напряжений в виде, удобном для применения градиентных, интегральных и связанных нелокальных критериев разрушения [4–6]. Диски с центральным отверстием также используются в современных исследованиях смешанного разрушения [7]. При обработке экспериментальных данных, вычислении растягивающих напряжений на линии действия внешней нагрузки и последующем определении условного предела прочности на растяжение, важную роль играет аналитическая модель расчета напряженно-деформированного состояния.

Классическое решение этой задачи предложено С.П. Тимошенко [8]. Данное решение основано на принципе суперпозиции – сочетании двух решений о растяжении и трёхкратном сжатии бесконечной плоскости с отверстием. Согласно данному решению, значение коэффициента концентрации напряжений в критической точке (на внутренней поверхности отверстия по линии действия нагрузки) равно 6. Недостатком такого решения является то, что оно не учитывает конечные размеры кольца. При увеличении радиуса центрального отверстия относительно габаритного радиуса кольца, допущение о том, что можно описать кольцо как сжимаемую плоскость, теряет свою силу. Это приводит к ошибке в расчете коэффициента концентрации напряжений, необходимого для экспериментальных прочностных исследований материалов. В статье [4] представлены данные расчетов критической нагрузки при помощи различных критериев разрушения, учитывающих неоднородное напряженное состояние, с использованием решения Тимошенко. Отмечается, что отклонение измеренных и вычисленных значений достигает 20%. В работе [9] представлена попытка получить решение для коэффициента концентрации напряжений в критической точке в виде грубого приближения квадратичной функцией. Согласно ему, значение коэффициента концентрации уже зависит от размера отверстия и равняется  $6 + 38t^2$ , где  $t$  – отношение радиуса отверстия к внешнему радиусу диска.

В отечественной литературе приближённое решение получено М.З. Народецким методом последовательных приближений Шварца [10]. По сравнению с классическим решением оно позволяет получить значения напряжений на внутренней поверхности диска в зависимости от радиуса центрального отверстия. При этом отмечается, что метод Шварца приводит к значительным вычислительным трудностям в связи с итеративным процессом приближения к решению, а также к малоэффективным результатам даже в применении к сравнительно простой задаче теории упругости. Тем не менее, М.З. Народецкому путем выделения главных членов удалось получить решение задачи о кольце. Однако, как будет показано далее в настоящей работе на примере вычисления коэффициента концентрации напряжений, решение на основе метода последовательных приближений Шварца приводит к заметным погрешностям.

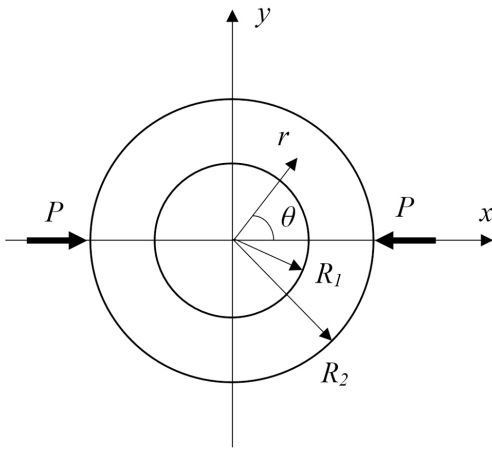
В последующих работах исследованы напряжения и перемещения на контурах кольца, а также коэффициенты концентрации напряжений [11–12]. В работе [13] комплексные потенциалы определены методом суперпозиции, а коэффициенты концентрации напряжений приведены для  $0 \leq t \leq 0.95$ . Поэтому настоящая работа не претендует на получение первого точного решения задачи. Основное внимание уделено математически однозначной и воспроизводимой форме рядового решения, контролю сходимости, сопоставлению с опубликованными результатами, исследованию предельного режима тонкого кольца, а также оценке влияния области контакта при сравнении решения методом конечных элементов с решением с сосредоточенными силами.

Результаты классических фотоупругих исследований кольцевых и дисковых областей обобщены в монографиях М.М. Фрохта [14] и Дж. Далли, У. Райли [15]. В реальных испытаниях нагрузка передаётся через контактную площадку конечной ширины. Решения для давления, распределённого по противоположным участкам внешнего контура, получены в [16–17]. Современное исследование кольцевых образцов из технической керамики [18] также показывает, что максимальные растягивающие напряжения возникают на внутреннем контуре по линии действия сил, однако точность упрощённых формул зависит от геометрии образца и способа приложения нагрузки.

В настоящей работе представлено однозначно определенное решение в форме рядов, разработан воспроизводимый алгоритм его вычисления, результаты сравниваются с опубликованными данными, определяется сходимость решения, определяются вычислительные ограничения при  $t \rightarrow 1$  и ведущее асимптотическое соотношение для коэффициента концентрации напряжений в тонком кольце. Результаты сравниваются с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Проводится анализ влияния длины дуги, по которой распределяется нагрузка, при сравнении с решением задачи со сосредоточенными силами. Определяются ограничения на использование решения в виде аналитических выражений для расчета полей напряжений в образцах, подвергаемых натурным испытаниям.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается однородное изотропное линейно-упругое кольцо с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$ . В противоположных точках внешнего контура приложены две направленные навстречу друг другу сосредоточенные силы, каждая равна  $P$ . Расчетная схема представлена на рис. 2.1. В плоской постановке сосредоточенная сила  $P$  рассматривается как сила, отнесенная к толщине образца.



**Рис. 2.1.** Расчетная схема задачи о сжатии кольца сосредоточенными силами

**Fig. 2.1.** Computational scheme for the problem of ring compression by concentrated forces

Область решения задачи ограничена кольцом. Введем комплексную координату  $z$ :

$$z = x + iy = R_2 \zeta,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ . Установим ограничение кольцевой области:

$$z = R_2 \rho e^{i\theta}, \quad t \leq \rho \leq 1, \quad t = R_1/R_2.$$

Воспользуемся классическим представлением компонент тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_{r\theta}$  в полярных координатах, записанным при помощи некоторых голоморфных функций комплексной переменной  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , также известных как комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2}{R_2} \left( \varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)} \right), \quad (2.1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{2e^{2i\theta}}{R_2} \left( \bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta) \right). \quad (2.2)$$

Здесь  $\varphi'(\zeta) = d(\varphi(\zeta))/d\zeta$  – производная комплексной функции,  $\overline{\varphi(\zeta)} = \varphi(\bar{\zeta})$  – комплексно-сопряженная функция. Выражения (2.1)–(2.2) широко известны, а подробный их вывод для области решения задачи ограниченной круговой областью в полярных координатах представлен Н.И. Мусхелишвили в работе [19, с. 132]. Фактически, это означает, что для решения задачи необходимо найти в явном виде функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ . Помимо записи выражений для компонент напряжений, комплексные потенциалы позволяют также записать общий вид решения задачи в перемещениях:

$$\frac{E}{1+\nu} (u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[ \kappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right], \quad (2.3)$$

где  $u_r$  – радиальные перемещения,  $u_\theta$  – окружные перемещения,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоского деформированного состояния и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния. Хотя далее основное внимание будет уделено решению задачи в напряжениях, с помощью комплексных потенциалов  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  всегда можно записать решение задачи в перемещениях при помощи (2.3).

Граничные условия задачи в общем виде можно записать через функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ :

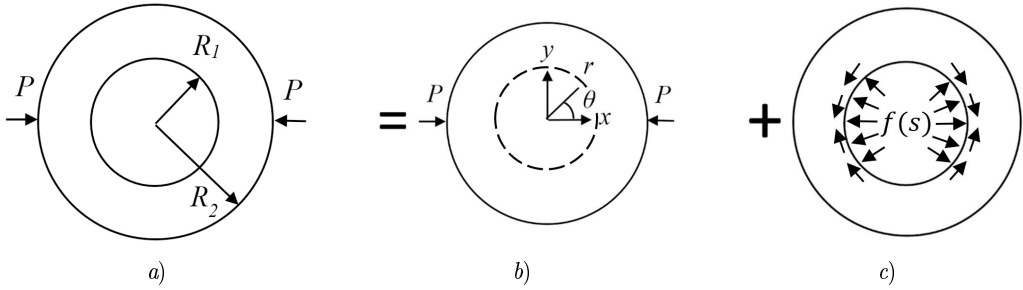
$$\varphi(s) + \overline{s\varphi'(s)} + \overline{\psi(s)} = \begin{cases} f_1(s), & s = te^{i\theta}, \\ f_2(s), & s = e^{i\theta}, \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $f_1(s)$  – функция напряжений на внутреннем контуре кольцевой области,  $f_2(s)$  – функция напряжений на внешнем контуре кольцевой области. Общий вывод граничных условий (2.4) также описан в [19, с. 180].

Поскольку задача сформулирована в условиях линейной теории упругости, воспользуемся методом суперпозиции. Разложим начальную задачу о сжатии кольца двумя сосредоточенными силами (рис. 2.2а) на сумму решений задач о сжатии сплошного цилиндра сосредоточенными силами (рис. 2.2б) и свободного кольца (рис. 2.2с).

Согласно методу суперпозиции, комплексные функции решения раскладываются на сумму двух в соответствии с расчетной схемой:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta). \end{aligned}$$



**Рис. 2.2.** Метод суперпозиции: а) исходная задача о сжатии кольца сосредоточенными силами; б) сжатие сплошного цилиндра сосредоточенными силами; в) свободное кольцо

**Fig. 2.2.** Superposition method: а) the original problem of ring compression by concentrated forces; б) compression of a solid cylinder by concentrated forces; в) a free ring

Здесь  $\varphi_1(\zeta)$  и  $\psi_1(\zeta)$  – функции для задачи сплошного диска (рис. 2.2б), а  $\varphi_2(\zeta)$  и  $\psi_2(\zeta)$  – функции для задачи кольцевой области (рис. 2.2в). Запишем граничные условия непосредственно для каждой схемы. Для сплошного диска мы имеем граничное условие на внешнем контуре:

$$\varphi_1(s) + s\overline{\varphi_1'(s)} + \overline{\psi_1(s)} = f_p(s), \quad s = e^{i\theta}, \quad (2.5)$$

где  $f_p = 0$  при  $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ,  $f_p = i(P_0)$  при переходе через точку  $\theta = 0$ ,  $f_p = i(P_0) + i(P_1)$  при переходе через точку  $\theta = \pi$ . Силы  $P_0$  и  $P_1$  для подстановки в (2.5) запишем в комплексном виде:

$$P_0 = X_0 + iY_0 = -P, \quad P_1 = X_1 + iY_1 = P.$$

Для кольцевой области, свободной от нагрузки на внешнем контуре, имеем:

$$\varphi_2(s) + s\overline{\varphi_2'(s)} + \overline{\psi_2(s)} = \begin{cases} 0, & s = e^{i\theta}, \\ -f(s) + C, & s = te^{i\theta}, \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $-f(s) + C$  – напряжения, приложенные ко внутреннему контуру кольца. Данная функция специально подбирается таким образом, чтобы полностью компенсировать напряжения, возникающие в задаче сплошного диска на мнимом контуре того же радиуса, что и радиус отверстия. При суперпозиции расчётных схем внешняя нагрузка на внутренний контур обнуляется, что соответствует исходной расчётной схеме.

Таким образом, общая задача (рис. 2.2а) будет решена, когда будут найдены функции  $\varphi_1(\zeta)$ ,  $\psi_1(\zeta)$ ,  $\varphi_2(\zeta)$ ,  $\psi_2(\zeta)$ .

### 3. Решение задачи

Решение задачи для сплошного диска под действием сосредоточенных сил было получено Мусхелишвили [19, с. 296], поэтому приведем функции  $\varphi_1(\zeta)$ ,  $\psi_1(\zeta)$  в готовом виде:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ \zeta + \ln \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) \right],$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2\zeta}{1-\zeta^2} + \ln \left( \frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right].$$

Используя функции  $\varphi_1(\zeta)$  и  $\psi_1(\zeta)$ , можем записать компоненты тензора напряжений, соответствующие решению задачи (рис. 2.2b):

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} + \sigma_{\theta 1} &= \frac{P}{\pi R_2} \left[ \frac{-2(1-\rho^4)}{(\rho^2 e^{2i\theta} - 1)(\rho^2 e^{-2i\theta} - 1)} \right], \\ \sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} &= \frac{P}{\pi R_2} \left[ \frac{4e^{2i\theta}(1-\rho^2)}{(\rho^2 e^{2i\theta} - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Разделим компоненты:

$$\sigma_{r1} = -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ \frac{1-\rho^4}{1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4} - \frac{2(1-\rho^2)(2\rho^2 - (1+\rho^4)\cos(2\theta))}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2} \right\}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\theta 1} = -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ \frac{1-\rho^4}{1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4} + \frac{2(1-\rho^2)(2\rho^2 - (1+\rho^4)\cos(2\theta))}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{r\theta 1} = \frac{P}{\pi R_2} \frac{2(1-\rho^2)(1-\rho^4)\sin(2\theta)}{(1-2\rho^2 \cos(2\theta) + \rho^4)^2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, решение задачи (рис. 2.2b) полностью определено.

Для решения задачи (рис. 2.2c) воспользуемся методом разложения в степенной ряд [20]. Запишем граничное условие на внутреннем краю:

$$\begin{aligned} f(s) = -f(te^{i\theta}) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (te^{i\theta})^{2n+1}, \\ C &= -i\pi. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты разложения запишем как:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2t^{2n+1}}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ A_{-n} &= -2t^{2n-1} \left( 1 - t^2 + \frac{1}{2n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Такая форма разложения подразумевает, что функции  $\varphi_2(\zeta)$ ,  $\psi_2(\zeta)$  определяют поправочные компоненты напряжений для задачи с кольцевой областью (рис. 2.2c). Запишем их в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^{2n+1}, \\ \psi_2(\zeta) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{2n-1}. \end{aligned}$$

При  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $a_n$  и  $b_n$  — действительные коэффициенты.

После подстановки в граничные условия задачи кольцевой области (2.6), группировки одинаковых гармоник и исключения  $b_n$  коэффициенты  $a_n$  и  $a_{-n}$  для каждого  $n = 1, 2, \dots$  определяются системой:

$$\begin{cases} (t^{4n+2} - 1) a_n + (1 - 2n) (t^2 - 1) a_{-n} = t^{2n+1} A_n, \\ (2n + 1) (t^2 - 1) a_n + (t^{-4n+2} - 1) a_{-n} = t^{-2n+1} A_{-n}. \end{cases}$$

Из данной системы уравнений можно в явном виде выразить коэффициенты  $a_n$ , а при помощи них и  $b_n$ :

$$a_0 = \frac{-t}{2(1-t^2)} A_0,$$

$$a_n = \frac{A_n (t^{-2n+1} - t^{2n-1}) + A_{-n} t^{-2n} (2n-1)(t-t^{-1})}{(t^{2n+1} - t^{-2n-1})(t^{-2n+1} - t^{2n-1}) - (t-t^{-1})^2 (4n^2 - 1)},$$

при  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$b_n = -(a_{-n} + (2n+1)a_n),$$

при  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таким образом, функции  $\varphi_2(\zeta)$ ,  $\psi_2(\zeta)$  полностью определены. Запишем компоненты тензора напряжений для задачи на рис. 2.2с:

$$\sigma_{r2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 (2-2n)(2n+1) - b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \cos(2n\theta) \}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 (2+2n)(2n+1) + b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \cos(2n\theta) \}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{r\theta 2} = \frac{P}{\pi R_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ [a_n \rho^2 2n(2n+1) + b_n (2n-1)] \rho^{2n-2} \sin(2n\theta) \}. \quad (3.6)$$

Общее решение задачи в напряжениях можно получить, суммировав радиальные компоненты (3.1) и (3.4), окружные компоненты (3.2) и (3.5), а также касательные компоненты (3.3) и (3.6) тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r1} + \sigma_{r2}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_{\theta 1} + \sigma_{\theta 2}, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta 1} + \sigma_{r\theta 2}. \end{aligned}$$

#### 4. Проверка предельных переходов

При  $t \rightarrow 0$  внутренний контур вырождается, поэтому данный случай стоит рассматривать в предельном смысле. Запишем компоненты тензора напряжений с учётом предельного перехода к малому отверстию:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ 1 - \frac{t^2}{\rho^2} + 2 \left( 1 - 4 \frac{t^2}{\rho^2} + 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right\}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{\pi R_2} \left\{ 1 + \frac{t^2}{\rho^2} - 2 \left( 1 + 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \right\}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2P}{\pi R_2} \left\{ 1 + 2 \frac{t^2}{\rho^2} - 3 \frac{t^4}{\rho^4} \right\} \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Введем коэффициент концентрации окружных напряжений как:

$$K_f = \frac{\sigma_\theta}{P/(\pi R_2)}, \tag{4.1}$$

- при  $\rho = t$  имеем  $\sigma_r = 0$  ,  $\sigma_\theta = -2\frac{P}{\pi R_2}(1 - 4\cos(2\theta))$  ,  $\sigma_{r\theta} = 0$ ;
- при  $\rho = t$  ,  $\theta = 0$  имеем  $K_f = 6$ ;
- при  $\rho = t$  ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  имеем  $K_f = -10$ .

Данные значения коэффициентов концентрации напряжения соответствуют классическому решению задачи, полученному методом суперпозиции двух решений о растяжении и трёхкратном сжатии бесконечной плоскости с отверстием [8]. Его допустимо считать эквивалентным решению, полученному в настоящей работе при  $R_1 \ll R_2$ .

Оценим асимптотику тонкого кольца при  $t \rightarrow 1$ . Положим  $h = R_2 - R_1$  и  $R_m = (R_2 + R_1)/2$ . При  $h/R_m \ll 1$  кольцо можно рассматривать как тонкий криволинейный стержень. При диаметральной сжатии изгибающий момент в нагруженном сечении равен  $M_0 = PR_m/\pi$  [8]. Для прямоугольного сечения единичной толщины имеем  $I = h^3/12$ ,  $c = h/2$ . Следовательно, ведущую изгибающую составляющую максимального окружного напряжения определим выражением:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{M_0 c}{I} + O\left(\frac{P}{h}\right) = \frac{6PR_m}{\pi h^2} + O\left(\frac{P}{h}\right).$$

Нормируем данное выражение относительно  $P/\pi R_2$ , и при стремлении  $t$  к единице получаем:

$$K_f = \frac{3(1+t)}{(1-t)^2} + O\left(\frac{1}{1-t}\right) \sim \frac{6}{(1-t)^2}.$$

Следовательно,  $K_f$  возрастает квадратично. Данное соотношение получено в рамках модели тонкого криволинейного стержня и не является результатом почленного предельного перехода в рядах. Его применимость проверена непосредственным вычислением рядового решения. Согласно данным, представленным в таблице 4.1, величина  $K_f/(1-t)^2$  монотонно приближается к 6, а относительное отклонение убывает приблизительно пропорционально  $(1-t)$ .

**Таблица 4.1.** Численная проверка асимптотики тонкостенного кольца  
**Table 4.1.** Numerical verification of the thin-walled ring asymptotics

| $t$  | $K_f$        | $K_f(1-t)^2$ | Отклонение от 6, % |
|------|--------------|--------------|--------------------|
| 0.90 | 581.590965   | 5.815910     | 3.068              |
| 0.95 | 2363.372192  | 5.908430     | 1.526              |
| 0.97 | 6605.754228  | 5.945179     | 0.914              |
| 0.98 | 14908.733730 | 5.963493     | 0.608              |
| 0.99 | 59817.674654 | 5.981767     | 0.304              |

5. Оценка сходимости

Параметр  $n$  при разложении функций  $\sigma_{r2}$ ,  $\sigma_{\theta2}$ ,  $\sigma_{r\theta2}$  можно считать порядком усечения. В таком случае, общее число членов разложения ряда будет равно  $2n + 1$ . В

таблице 5.1 представлено минимальное число членов разложения ряда для достижения усечения коэффициента концентрации окружных напряжений  $K_f$  (4.1) в точке  $\rho = t$ ,  $\theta = 0$  до третьего знака после запятой.

**Таблица 5.1.** Минимальный порядок усечения  
**Table 5.1.** Minimum truncation order

| $t$      | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| $n$      | 3   | 5   | 9   | 18  | 29  | 65  | 141  |
| $2n + 1$ | 7   | 11  | 19  | 37  | 59  | 131 | 283  |

Формально сходимость ряда Фурье для функции комплексной переменной вида (3.4) была продемонстрирована Н. И. Мусхелишвили в [19] с использованием условия Дирихле.

6. Результаты и анализ

Для каждого  $t$  вычислялись максимальные нормированные невязки на внутреннем контуре:

$$\delta_r = \max_{\theta} \frac{|\sigma_r(t, \theta)|}{P/(\pi R_2)}, \quad \delta_{\tau} = \max_{\theta} \frac{|\sigma_{r\theta}(t, \theta)|}{P/(\pi R_2)}.$$

На внешнем контуре аналогичные величины определялись вне дуг  $|\theta| < 0.05$  и  $|\theta - \pi| < 0.05$ , содержащих сингулярные точки приложения сил. Результаты, представленные в таблице 6.1, получены при минимальных значениях  $n$ , удовлетворяющих условию усечения:

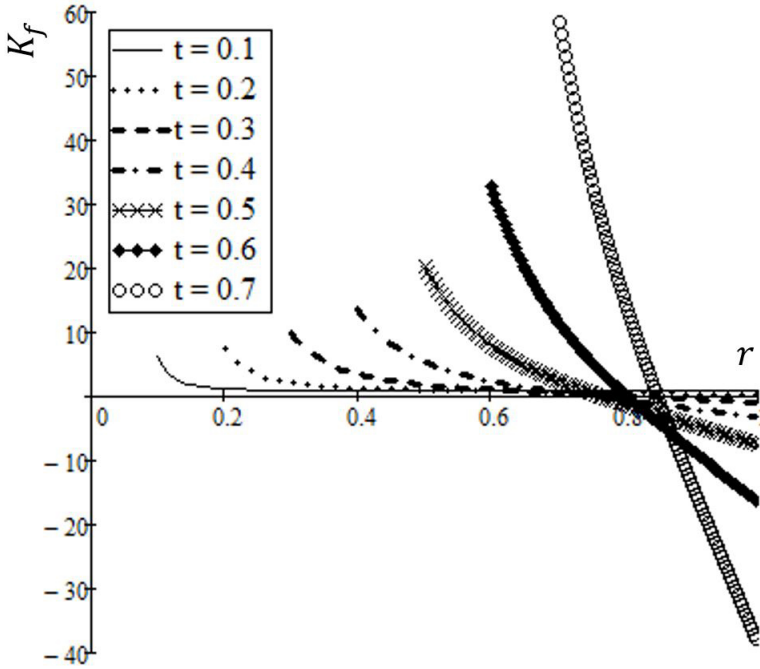
$$|(K_f)_n - (K_f)_{ref}| < 5 \cdot 10^{-4},$$

где  $(K_f)_{ref}$  – опорное значение коэффициента концентрации напряжений, вычисленное до достижения относительной точности в десятом знаке после запятой,  $(K_f)_n$  – допустимое значение при минимальном  $n$ , необходимом для достижения условия усечения. Граничные условия на внешнем свободном контуре выполняются с точностью машинного округления, а максимальная невязка на внутреннем контуре не превышает  $1.7 \cdot 10^{-4}$ .

**Таблица 6.1.** Максимальные нормированные граничные невязки  
**Table 6.1.** Maximum normalized boundary residuals

| $t$  | $n$ | $\delta_r$ при $\rho = t$<br>$\delta_r$ at $\rho = t$ | $\delta_{\tau}$ при $\rho = t$<br>$\delta_{\tau}$ at $\rho = t$ | $\delta_r$ при $\rho = 1$<br>$\delta_r$ at $\rho = 1$ | $\delta_{\tau}$ при $\rho = t$<br>$\delta_{\tau}$ at $\rho = t$ |
|------|-----|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 0.10 | 3   | $8.0 \cdot 10^{-6}$                                   | $8.0 \cdot 10^{-6}$                                             | $4.6 \cdot 10^{-14}$                                  | $5.9 \cdot 10^{-15}$                                            |
| 0.50 | 9   | $8.1 \cdot 10^{-5}$                                   | $7.8 \cdot 10^{-5}$                                             | $4.0 \cdot 10^{-14}$                                  | $8.3 \cdot 10^{-15}$                                            |
| 0.70 | 18  | $1.1 \cdot 10^{-4}$                                   | $1.1 \cdot 10^{-4}$                                             | $3.8 \cdot 10^{-14}$                                  | $1.9 \cdot 10^{-14}$                                            |
| 0.90 | 65  | $1.7 \cdot 10^{-4}$                                   | $1.6 \cdot 10^{-4}$                                             | $1.1 \cdot 10^{-12}$                                  | $6.1 \cdot 10^{-13}$                                            |
| 0.95 | 141 | $1.7 \cdot 10^{-4}$                                   | $1.6 \cdot 10^{-4}$                                             | $1.0 \cdot 10^{-11}$                                  | $4.9 \cdot 10^{-12}$                                            |

На рис. 6.1 представлены эпюры нормализованных окружных напряжений  $\sigma_\theta$  при фиксированном значении радиальной координаты  $\theta = 0$ . Каждая линия соответствует определенному значению параметра  $t$ .



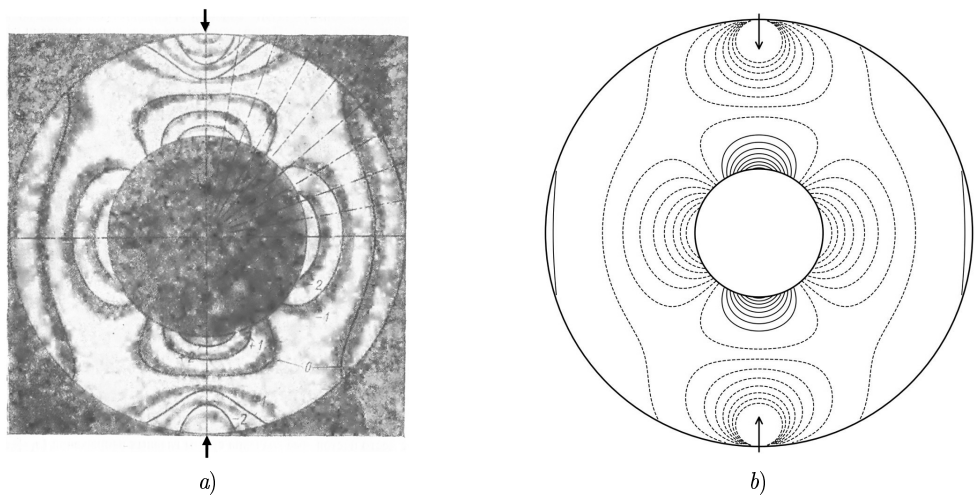
**Рис. 6.1.** Эпюры нормализованных окружных напряжений

**Fig. 6.1.** Diagrams of normalized circumferential stresses

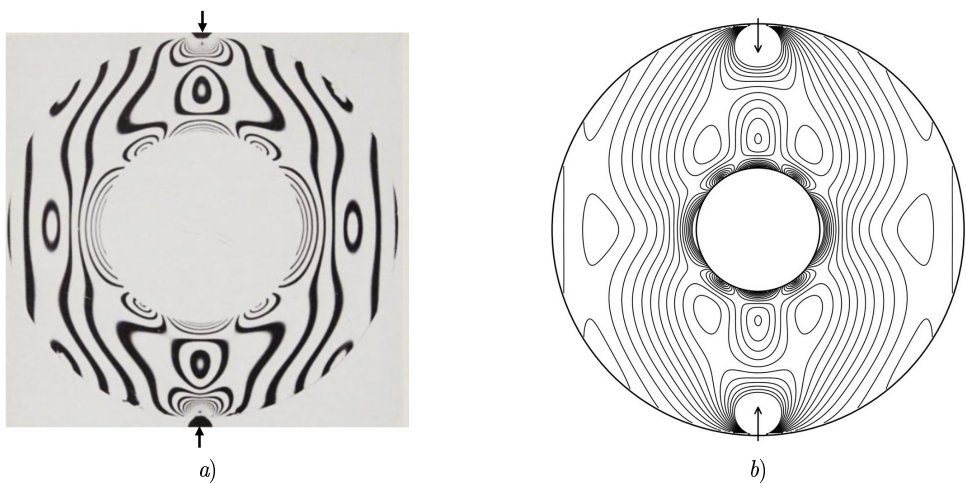
Сравнение структуры полей напряжений между найденным решением задачи и результатами физических испытаний можно сделать, сопоставив данные, полученные при помощи метода фотоупругости. Представленные ниже сравнения служат лишь для качественной оценки. Количественное сопоставление интерференционных полос, получаемых при помощи методов фотоупругости требует идентичной геометрии, упругих свойств и способа приложения нагрузки и в настоящей работе не проводится. Отметим также, что из графического отображения аналитических результатов намеренно изымается малая область вблизи приложения сосредоточенной нагрузки, так как строгое математическое решение в данной точке имеет особенность в виде логарифма и, как следствие, приводит к бесконечному сгущению линий уровня.

На рис. 6.2 представлено сравнение картины изопахик (линии уровня суммы главных напряжений), полученных в результате аналитического решения задачи (рис. 6.2b) и экспериментов по сжатию кольца с использованием методов фотоупругости (рис. 6.2a) [14].

На рис. 6.3 представлено сравнение картины изохроматик (линии уровня разности главных напряжений), полученных в результате аналитического решения задачи (рис. 6.3b) и экспериментов по сжатию кольца с использованием методов фотоупругости (рис. 6.3a) [15].



**Рис. 6.2.** Сравнение решения: а) изопохики, метод фотоупругости;  
б) изопохики, аналитическое решение  
**Fig. 6.2.** Comparison of the solutions; а) isopachics, photoelasticity method;  
б) isopachics, analytical solution



**Рис. 6.3.** Сравнение решения: а) изохроматики, метод фотоупругости;  
б) изохроматики, аналитическое решение  
**Fig. 6.3.** Comparison of the solutions; а) isochromatics, photoelasticity method;  
б) isochromatics, analytical solution

## 7. Коэффициент концентрации напряжений

Во многих практических задачах важным параметром является значение коэффициента концентрации напряжений. При реализации расчетной схемы «модифицированный бразильский тест» наиболее опасной является точка, расположенная на внутреннем радиусе по линии диаметра, на котором расположена сжимающая нагрузка. В этой

точке образуется растягивающее напряжение с наибольшим значением коэффициента концентрации окружных напряжений  $K_f$ , описываемого формулой (4.1). Прочностные испытания хрупких материалов и горных пород это подтверждают. Из этого факта вытекает существенный недостаток классического решения [8]. Оно не учитывает, что коэффициент концентрации зависит от отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца. Решение на основе метода последовательных приближений Шварца решает эту проблему, однако приводит к погрешностям вычисления. В таблице 7.1 представлено сравнение значений коэффициента концентрации напряжений, вычисленных при помощи решения данной статьи и данных из [10].

**Таблица 7.1.** Сравнение аналитического решения и решения по методу Шварца  
**Table 7.1.** Comparison of the analytical solution and the Schwarz method solution

| $R_1/R_2$ | $K_f$ , решение<br>аналитическое<br>$K_f$ , analytical solution | $K_f$ , решение по<br>методу Шварца<br>$K_f$ , Schwarz method | $\delta$ , относительная<br>разница, %<br>$\delta$ , relative difference, % |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 0,5       | 20,311                                                          | 19,52                                                         | 3,895                                                                       |
| 0,6       | 32,838                                                          | 33,16                                                         | 0,971                                                                       |
| 0,7       | 60,446                                                          | 62,54                                                         | 3,348                                                                       |
| 0,8       | 140,716                                                         | 148,1                                                         | 4,986                                                                       |
| 0,9       | 581,59                                                          | 562,7                                                         | 3,357                                                                       |

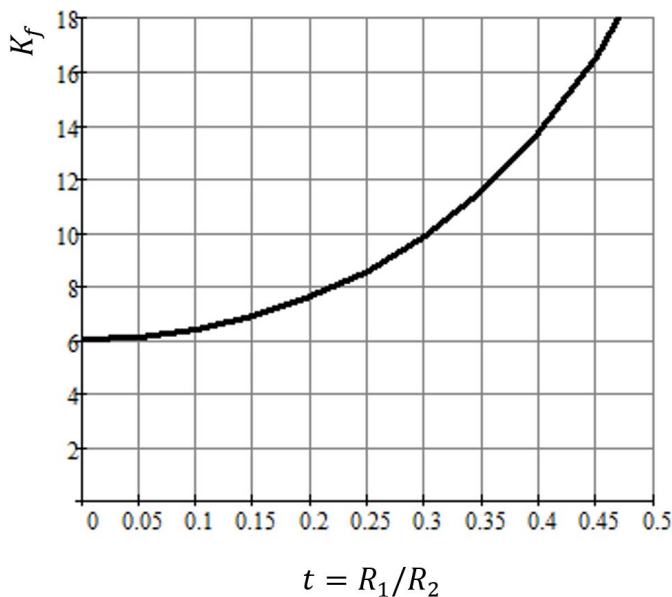
На рис. 7.1 представлен график зависимости коэффициента концентрации напряжения от относительного радиуса центрального отверстия в точке на контуре внутреннего отверстия, находящейся на линии приложения нагрузки ( $\rho = t$ ,  $\theta = 0$ ).

В работе [13] приведены высокоточные табличные значения коэффициента  $K_0$  (оригинальное обозначение) на внутреннем контуре. Поскольку в [13] использована нормировка  $2P/(\pi R_2)$ , для сопоставления выполнялось преобразование  $K_f = 2K_0$ . Проверка проведена по всем 19 опубликованным значениям при  $0.05 \leq t \leq 0.95$ . Максимальное расхождение не превышает 0.0015% и сопоставимо с погрешностью округления табличных данных. Полученное совпадение служит дополнительным подтверждением корректности коэффициентов рядового решения и принятой нормировки, но не заменяет непосредственного контроля граничных условий.

8. Метод конечных элементов

Для проверки проведем сравнения коэффициентов  $K_f$ , вычисленных при помощи аналитического решения, с решением, полученным при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Используем программный комплекс Ansys 2020 R1.

Расчетная схема для решения задачи при помощи метода конечных элементов представлена на рис. 8.1. Диск смоделирован в предположении симметрии как четверть исходного объекта исследования. Задано условие плоского деформированного состояния. Чтобы избежать сингулярного концентратора напряжения от действия сосредоточенной силы расчетная схема изменена следующим образом. Добавлена нагружаемая плита (на два порядка более жесткая, чем материал кольца), к которой с одной стороны



**Рис. 7.1.** Зависимость коэффициента концентрации напряжений от относительного радиуса центрального отверстия

**Fig. 7.1.** Dependence of the stress concentration factor on the relative radius of the central hole

приложена нагрузка, а другая сторона передает её посредством контактного взаимодействия с диском. Задано условие контакта без трения. При задании нагрузки в 100 Н ширина пятна контакта не превышала 3 характерных размеров элемента. Нагрузка задавалась достаточно малой, чтобы геометрическая нелинейность была пренебрежимо мала. Геометрические размеры плиты заданы на порядок больше характерных размеров диска.

Результат решения не зависит от материала, однако для получения напряженно-деформированного состояния был задан однородный изотропный материал диска – конструкционная сталь. Модель диска разбивалась на конечные элементы PLANE183 с контролем формирования восьми узлов (запрет вырождения в шести узловый элемент). Общее количество узлов зависело от параметра  $t$ . Минимальное количество элементов по толщине вдоль диаметра кольца (при  $t = 0.95$ ) составило 20 штук. Максимальное количество элементов по толщине вдоль диаметра кольца (при  $t = 0.05$ ) составило 240 штук. Количество элементов, распределённых вдоль дуг внешней и внутренней границы фиксировано и равняется 100 единицам. Таким образом, общее количество элементов находится в пределах от 2000 до 24000. Результат численного моделирования, а также сравнение с решением, полученным в настоящей статье, представлен в таблице 8.1. Напряжения экстраполировались из точки Гаусса в узел, для которого высчитывалось нормированное значение коэффициента концентрации напряжений.

Проверка на сходимость численного моделирования проводилась при помощи сгущения сетки. На рис. 8.2 представлен график, демонстрирующий сходимость значений коэффициента концентрации напряжений при увеличении числа элементов, на которые

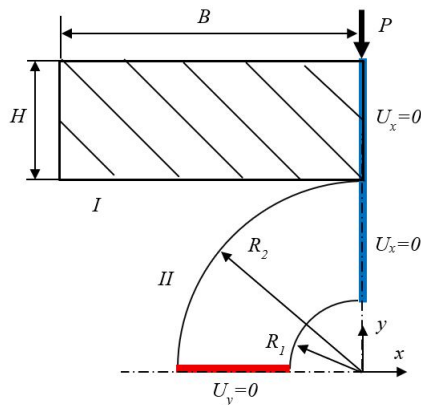


Рис. 8.1. Расчетная схема МКЭ  
Fig. 8.1. FEM computational scheme

Таблица 8.1. Сравнение аналитического решения и МКЭ  
Table 8.1. Comparison of the analytical solution and FEM

| $R_1/R_2$ | $K_f$ , решение<br>аналитическое<br>$K_f$ , analytical solution | $K_f$ , решение МКЭ<br>$K_f$ , FEM solution | $\delta$ , относительная<br>разница, %<br>$\delta$ , relative difference, % |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 0         | 6                                                               | 6                                           | 0                                                                           |
| 0.1       | 6.385                                                           | 6.377                                       | 0.112                                                                       |
| 0.2       | 7.598                                                           | 7.589                                       | 0.118                                                                       |
| 0.3       | 9.856                                                           | 9.843                                       | 0.14                                                                        |
| 0.4       | 13.682                                                          | 13.66                                       | 0.163                                                                       |
| 0.5       | 20.311                                                          | 20.276                                      | 0.168                                                                       |
| 0.6       | 32.838                                                          | 32.753                                      | 0.258                                                                       |
| 0.7       | 60.446                                                          | 60.266                                      | 0.296                                                                       |
| 0.8       | 140.716                                                         | 140.209                                     | 0.36                                                                        |
| 0.9       | 581.59                                                          | 578.461                                     | 0.538                                                                       |
| 0.95      | 2363                                                            | 2339                                        | 1.051                                                                       |

разбито кольцо для расчетной схемы при  $t = 0.5$ .  
Расхождение с решением в рядах нельзя интерпретировать исключительно как дискретизационную погрешность: в рассмотренной модели действует сосредоточенная сила, тогда как в конечно-элементной модели давление распределено по контактной площадке конечной ширины. На результат также влияют экстраполяция напряжений, контактная жёсткость и разрешение сетки в перемычке. Экспериментально-расчётное исследование подтверждает необходимость разделять вычислительную погрешность и неопределённость идеализированной двумерной модели. Максимальное расхождение в исследованном диапазоне составляет 1.05%, а при  $t \leq 0.18 - 0.5\%$ . Поскольку абсолютные значения упругих характеристик и нагрузки влияют на ширину контактной зоны, конечно-элементный расчёт рассматривается как дополнительная, а не полностью эк-

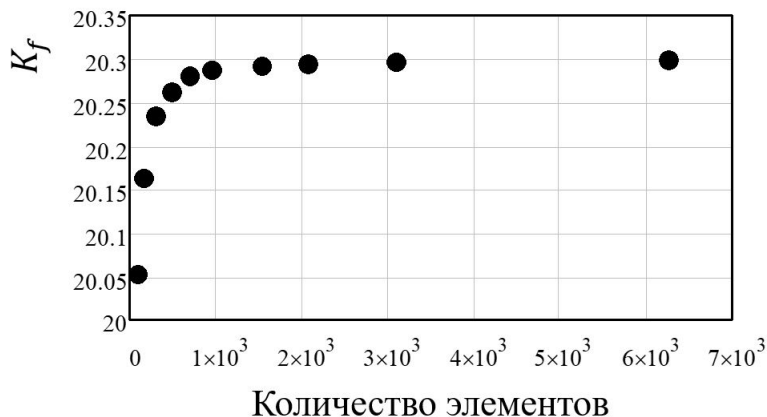


Рис. 8.2. График сходимости решения МКЭ

Fig. 8.2. FEM solution convergence graph

вивалентная проверка задачи с сосредоточенными силами.

Оценку влияния ширины контактной зоны можно провести при помощи моделирования расчетной схемы с заранее заданной дугой контактного взаимодействия. На рис. 8.3 представлена расчётная схема, в которой нагрузка передается через плиту, контактирующую с кольцом дугой конечного размера, полный угол которой равен  $2\alpha$ .

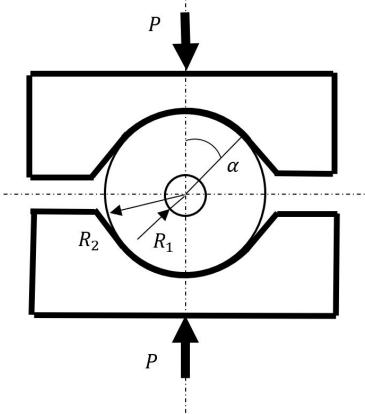


Рис. 8.3. Расчетная схема с контактом по дуге конечного размера

Fig. 8.3. Computational scheme with contact along an arc of finite size

Принципы моделирования расчетной схемы при помощи МКЭ полностью соответствуют описанным выше. Введем параметр  $\gamma$  как отношение коэффициента концентрации окружных напряжений (4.1), вычисленного при помощи метода конечных элементов с дугой контакта заданного размера  $(K_f)_{FEM}|_{2\alpha=\omega}$ , к коэффициенту концентрации окружных напряжений, вычисленного при помощи решения в рядах при действии сосредоточенной нагрузки  $(K_f)_N|_{2\alpha=0}$ :

$$\gamma = \frac{(K_f)_{FEM}|_{2\alpha=\omega}}{(K_f)_N|_{2\alpha=0}}.$$

График зависимости параметра  $\gamma$  от параметра  $t$  при различных значениях длины дуги контакта  $2\alpha$  представлен на рис. 8.4.

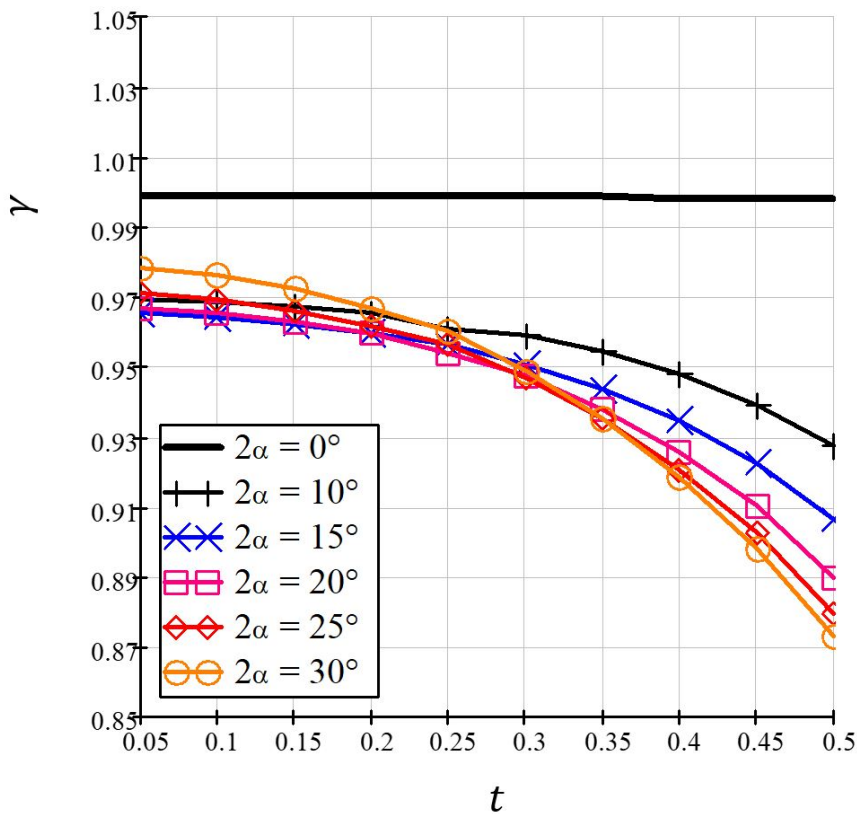


Рис. 8.4. Зависимость параметра  $\gamma$  от параметра  $t$

Fig. 8.4. Dependence of parameter  $\gamma$  on parameter  $t$

На основании представленных данных хорошо видно, что при малых размерах центрального отверстия распределение нагрузки по дуге оказывает слабое влияние на значение  $K_f$  в опасной точке. Однако с ростом значения параметра  $t$  мы видим снижение значения  $K_f$  относительно расчета при сосредоточенной нагрузке. Также стоит отметить, что изменение  $K_f$  нелинейно относительно изменения угла дуги контакта.

В соответствии с представленными данными можно сделать вывод, что смятие или иное распределение контактной нагрузки в ходе проведения реальных экспериментов по разрушению хрупких материалов оказывает малое влияние (не более 5%) на результат расчёта в случае, если параметр  $t$  находится в пределах от 0.05 до 0.25.

Тем не менее, представим список ограничений и рекомендаций по использованию решения в рядах для расчетов и анализа данных реальных испытаний.

1. Решение относится к однородному изотропному линейно-упругому материалу и двумерной постановке. Оно не описывает пластическое смятие, развитие трещины и изменение геометрии после начала разрушения.
2. Сосредоточенные силы создают сингулярности на внешнем контуре. Поле в непосредственной окрестности точек приложения сил не следует использовать для физической интерпретации.
3. При сопоставлении с экспериментом необходимо учитывать ширину и форму контактной зоны, трение, жёсткость плит, конечную толщину образца и возможную несоосность внутреннего и внешнего контуров. Особенно чувствительны к этим факторам тонкие кольца с  $t > 0.9$ .
4. Для производных высоких порядков или интегральных критериев разрушения требуется отдельный контроль сходимости соответствующего функционала по всей области интегрирования.
5. При  $t \rightarrow 1$  одновременно возрастают  $K_f$  и требуемый порядок усечения. Вычисления целесообразно выполнять с повышенной точностью арифметики и обязательным контролем граничных невязок.

## 9. Заключение

Получено и верифицировано решение в рядах плоской задачи линейной упругости для кольца, сжатого двумя сосредоточенными силами. Решение представлено комплексными потенциалами с явно определяемыми коэффициентами. Решение в напряжениях справедливо для любой точки кольца за исключением малой области вблизи приложения сосредоточенной нагрузки, где имеет место математическая сингулярность.

Проведен анализ предельных переходов. В случае малых отверстий полученное решение совпадает с решением Тимошенко. В случае тонкостенного кольца асимптотика сходится с моделью криволинейного стержня.

Проведено сравнение результата с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Данные хорошо соотносятся с результатами моделирования МКЭ. Относительная разница не превышает 1.05% вплоть до отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца равного 0.95, и 0.17% до отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца равного 0.5. Проведена оценка влияния дуги распределения контактного взаимодействия на значение коэффициента концентрации напряжений в опасной точке. В соответствии с представленными данными можно сделать вывод, что смятие или иное распределение контактной нагрузки в ходе проведения реальных экспериментов по разрушению хрупких материалов оказывает малое влияние на результат расчёта в случае, если параметр  $t$  находится в пределах от 0.05 до 0.25.

Получена зависимость коэффициента концентрации напряжений от относительного радиуса центрального отверстия в точке на контуре внутреннего отверстия, находящейся на линии приложения нагрузки.

Расчётные изопахтики и изохроматики качественно согласуются с классическими фотоупругими картинками. Решение позволяет построить эпюры напряжений в области определения задачи.

Полученное решение рекомендуется к использованию при проведении прочностных испытаний по схеме модифицированный бразильский тест с целью повышения точности

определения условного предела прочности на растяжение для хрупких и квазихрупких материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Timoshenko S. On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922. Vol. 44, no. 263. P. 1014–1019. DOI: 10.1080/14786441208562578
2. Mellor M., Hawkes I. Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. *Engineering Geology*. 1971. Vol. 5, no. 3. P. 173–225. DOI: 10.1016/0013-7952(71)90001-9
3. Леган М. А., Блинов В. А. Расчет на прочность цилиндров с отверстием при совместном использовании метода граничных элементов и нелокальных критериев разрушения // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. Т. 10, № 3. С. 332–340. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.26
4. Ефимов В. П. Испытания горных пород в неоднородных полях растягивающих напряжений // *ПМТФ*. 2013. Т. 54, № 5. С. 199–209.
5. Сукнев С. В. Разрушение квазихрупкого геоматериала с круговым отверстием при неравномерно распределенном сжатии // *ПМТФ*. 2019. Т. 60, № 6. С. 162–172.
6. Сукнев С. В. Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 1. С. 129–141. DOI: 10.31857/S0572329922100191
7. Kurguzov V., Kuznetsov D. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 297. 109875. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. / под ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 560 с.
9. Hobbs D. W. The tensile strength of rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 1964. Vol. 1, no. 3. P. 385–388.
10. Народецкий М. З. Определение напряжений в круговом кольце под действием сосредоточенных сил // *Известия АН СССР. Отделение технических наук*. 1948. № 1. С. 7–18.
11. Chianese R. B., Erdlac R. J. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1988. Vol. 41, no. 2. P. 239–247. DOI: 10.1093/qjmam/41.2.239

12. Ma D.-L. Elastic stress solution for a ring subjected to point-loaded compression. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1990. Vol. 42, no. 2. P. 185–191. DOI: 10.1016/0308-0161(90)90018-D
13. Batista M., Usenik J. Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1996. Vol. 31, no. 1. P. 75–78. DOI: 10.1243/03093247V311075
14. Фрохт М. М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. 2 / пер. с англ.; под ред. Н. И. Пригоровского. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 488 с.
15. Dally J. W., Riley W. F. Experimental Stress Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991. xxii, 639 p.
16. Tokovyy Yu. V., Hung K.-M., Ma C.-C. Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 165. P. 342–354. DOI: 10.1007/s10958-010-9803-6
17. Kourkoulis S. K., Markides Ch. F. Stresses and displacements in a circular ring under parabolic diametral compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2014. Vol. 71. P. 272–292. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2014.07.009
18. Rübling A., Hölzel P., Pilder A., Hönisch L., Schrodberger M., Kleyla M., Bartecki M., Süchting-Rose K., Kühl H. The brittle ring test: a simple and reliable method for evaluating the fracture strength of technical ceramics – theoretical and experimental investigations. *International Journal of Ceramic Engineering & Science*. 2026. Vol. 8, no. 2. Article e70047. DOI: 10.1002/ces2.70047
19. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
20. England A. H. Complex Variable Methods in Elasticity. London: Wiley-Interscience, 1971. 181 p.

*Поступила 27.05.2026; доработана после рецензирования 10.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. S. Timoshenko, “On the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **44**:263 (1922), 1014–1019. DOI: 10.1080/14786441208562578
2. M. Mellor, I. Hawkes, “Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli”, *Engineering Geology*, **5**:3 (1971), 173–225. DOI: 10.1016/0013-7952(71)90001-9

3. M. A. Legan, V. A. Blinov, “[Stress Analysis for Perforated Cylinders with Combined Use of the Boundary Element Method and Nonlocal Fracture Criteria]”, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*, **10**:3 (2017), 332–340 (In Russ.). DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.26
4. V. P. Efimov, “Rock tests in nonuniform fields of tensile stresses”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **54**:5 (2013), 857–865.
5. S. V. Suknev, “Fracture of a quasi-brittle geomaterial with a circular hole under non-uniform distributed compression”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **60**:6 (2019), 1115–1124.
6. S. V. Suknev, “Application of methods of the theory of critical distances to estimate the fracture of quasi-brittle materials with notches”, *Mechanics of Solids*, **58**:1 (2023), 108–118. DOI: 10.31857/S0572329922100191
7. V. Kurguzov, D. Kuznetsov, “Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading”, Article 109875, *Engineering Fracture Mechanics*, **297** (2024). DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
8. S. P. Timoshenko, Dzh. Gud'yer, *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*, 2nd ed., transl. from English, ed. G. S. Shapiro, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 560 p.
9. D. W. Hobbs, “The tensile strength of rocks”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **1**:3 (1964), 385–388.
10. M. Z. Narodetskiy, “[Determination of stresses in a circular ring under the action of concentrated forces]”, *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1948, no. 1, 7–18 (In Russ.).
11. R. B. Chianese, R. J. Erdlac, “The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter”, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **41**:2 (1988), 239–247. DOI: 10.1093/qj-mam/41.2.239
12. D.-L. Ma, “Elastic stress solution for a ring subjected to point-loaded compression”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **42**:2 (1990), 185–191. DOI: 10.1016/0308-0161(90)90018-D
13. M. Batista, J. Usenik, “Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter”, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **31**:1 (1996), 75–78. DOI: 10.1243/03093247V311075
14. M. M. Frokht, *Fotouprugost'. Polyarizatsionno-opticheskiy metod issledovaniya napryazheniy. T. 2 [Photoelasticity. Polarization-optical method for stress investigation. Vol. 2]*, transl. from English, ed. N. I. Prigorovskiy, Gostekhizdat Publ., Moscow; Leningrad, 1950 (In Russ.), 488 p.
15. J. W. Dally, W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991, ISBN: 978-0-07-015218-2, xxii, 639 p.

16. Yu. V. Tokovyy, K.-M. Hung, C.-C. Ma, “Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression”, *Journal of Mathematical Sciences*, **165** (2010), 342–354. DOI: 10.1007/s10958-010-9803-6
17. S. K. Kourkoulis, Ch. F. Markides, “Stresses and displacements in a circular ring under parabolic diametral compression”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **71** (2014), 272–292. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2014.07.009
18. A. Rübling, P. Hölzel, A. Pilder, L. Hönisch, M. Schrodberger, M. Kleyla, M. Bartecki, K. Süchting-Rose, H. Kühn, “The brittle ring test: a simple and reliable method for evaluating the fracture strength of technical ceramics – theoretical and experimental investigations”, Article e70047, *International Journal of Ceramic Engineering & Science*, **8:2** (2026). DOI: 10.1002/ces2.70047
19. N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 708 p.
20. A. H. England, *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley-Interscience, London, 1971, 181 p.

*Submitted 27.05.2026; Revised 10.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

УДК 519.63

## Актуальные математические проблемы термохимии с излучением

В. Н. Снытников<sup>1,2</sup>, Е. Е. Пескова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

<sup>2</sup>Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация)

**Аннотация.** Рассмотрены математические модели лазерной каталитической термохимии для дозвуковой динамики вязкого многокомпонентного газа. Решённые задачи с азимутальной симметрией относятся к проблеме получения ценных углеводородов из метана. В частности, численно решены задачи конверсии метана в круглой трубе с лазерным излучением и без него. Химические процессы рассчитывались по кинетической схеме радикально-цепных реакций с ведущей ролью атома водорода. Кроме того, приведены результаты моделирования каталитической конверсии метана в потоке наночастиц, в том числе при дополнительном нагреве излучением. На поверхности каталитических наночастиц от молекулы метана отрывается атом водорода с вылетом радикалов в газовую фазу. Достигнута 75%-ная расчетная конверсия метана при воздействии излучения. Определены тепловые потоки между стенкой трубы и реакционной средой. Актуальные математические задачи термохимии связаны с переходом к пространственно трехмерным постановкам, которые часто содержат бифуркации или могут быть неустойчивыми при изменении параметров. Для вычислительных экспериментов требуется иметь гибкий в работе код как исследовательский инструмент с полностью известными свойствами. Для создания подобных программ необходимо участие математиков различной специализации.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, математическое моделирование, дозвуковое течение, термохимия, излучение, природный газ, неокислительная конверсия метана

**Для цитирования:** Снытников В. Н., Пескова Е. Е. Актуальные математические проблемы термохимии с излучением // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 280–307. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.280-307

*Об авторах:*

**Снытников Валерий Николаевич**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ведущий научный сотрудник, Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6769-9456>, [snvt@catalysis.ru](mailto:snvt@catalysis.ru)

**Пескова Елизавета Евгеньевна**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, [e.e.peskova@math.mrsu.ru](mailto:e.e.peskova@math.mrsu.ru)



MSC2020 35Q92

# Contemporary mathematical problems in thermochemistry with radiation

V. N. Snytnikov<sup>1,2</sup>, E. E. Peskova<sup>1</sup><sup>1</sup>National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)<sup>2</sup>Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

**Abstract.** Mathematical models of laser catalytic thermochemistry for subsonic dynamics of a viscous multicomponent gas are considered. Solved problems with azimuthal symmetry relate to producing valuable hydrocarbons from methane. In particular, the problems of methane conversion in a round tube without and with laser radiation are numerically solved. The chemical processes were simulated using a kinetic scheme of radical-chain reactions with the leading role of the hydrogen atom. Furthermore, the results of modeling the catalytic conversion of methane in a nanoparticle flow are presented, including the conversion under additional heating by radiation. On the surface of catalytic nanoparticles a hydrogen atom detaches from a methane molecule, with radicals escaping into the gas phase. A 75% calculated conversion of methane under radiation exposure is achieved. Heat fluxes between the pipe wall and the reaction medium are determined, too. Current mathematical problems in thermochemistry are related to the transition to spatially three-dimensional formulations, which often involve bifurcations or may be unstable when parameters are changed. Computational experiments require a flexible code as a research tool with fully known properties. The creation of such programs requires the involvement of mathematicians with various specializations.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, mathematical modeling, subsonic flow, thermochemistry, radiation, natural gas, non-oxidative methane conversion

**For citation:** V. N. Snytnikov, E. E. Peskova. Contemporary mathematical problems in thermochemistry with radiation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 280–307. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.280-307

*About the authors:*

**Valeriy N. Snytnikov**, Ph.D. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Leading Researcher, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6769-9456>, [snyt@catalysis.ru](mailto:snyt@catalysis.ru)

**Elizaveta E. Peskova**, D.Sc. (Phys.-Math.), Chief Researcher, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, [e.e.peskova@math.mrsu.ru](mailto:e.e.peskova@math.mrsu.ru)

## 1. Введение

Этим обзором мы хотим привлечь внимание математиков к актуальным математическим задачам термохимии в области дозвуковой внутренней динамики многокомпонентной среды, поглощающей излучение. Данными задачами активно занимались в

науке после изобретения лазеров до 90-х годов прошлого столетия. Общая перестройка в науке, произошедшая на рубеже веков, привела к потере многих областей исследований и, в частности, лазерной термохимии. Наш интерес к этой области связан в настоящее время с последними вызовами в переработке природного газа.

Развитие современной термохимии охватывает практически всю энергетику и природопользование. Один из важнейших разделов термохимии связан с природным газом. Добываемый в мире во всё больших объемах природный газ направляется, в частности, на получение тепла. В России на эту цель идет до 76 % потребляемого газа. Он также является источником водорода и технического углерода для химического производства. За 2024 год более 60% из 97 млн тонн мирового производства водорода получено конверсией природного газа. Водород идет на производство аммиака, метанола и в нефтепереработку. Это основы химической индустрии и современной цивилизации.

Природный газ остается на ближайшие десятилетия одним из важнейших источников сырья и экспортного ресурса для экономики России. Рациональное использование природного газа, разработка более совершенных технологий получения из него ценных продуктов остаются важнейшими научными задачами. Сложность этих задач определяется малой химической активностью метана, основной компонентой добываемого сырья. Исследования направлены на сокращение энергетических затрат, ослабление требований к материалам реакторов и, тем самым, на получение высокой добавочной стоимости.

Неокислительная конверсия метана в ценные углеводороды и водород представляет собой востребованное направление развития плазмо-, термо-, газохимии и водородной энергетики. Оно стало особенно интересным в связи с появлением на рынке углеводородов России свободных объемов природного газа и газификацией территорий. Лазерная каталитическая конверсия метана в газопылевом потоке является перспективным подходом к развитию этого важного направления.

Изучение физико-химических процессов во внутренних потоках реакционной среды составляет одну из ключевых задач гидро-газодинамики [1–3]. На практике исследуемые потоки представлены в виде многокомпонентных смесей веществ с различной молекулярной массой. Для этих условий необходимо детально исследовать массообмен, который возникает из-за конвекции и диффузии. Течения с химическими реакциями, меняющими распределение компонентного состава смеси, могут сопровождаться изменением теплопроводности среды [4]. Выделение или поглощение энергии значительно влияет на характер течения, накладывая новые условия на количественное исследование процессов тепломассопереноса. Для задач горения процессы диффузии и теплопередачи подробно рассмотрены во многих работах, например, [5]. Дальнейшее усложнение задач ламинарных дозвуковых течений многокомпонентной среды потребовало для своего решения привлечения методов численного моделирования. Построение математических моделей и численных схем для этих задач обсуждалось в [6, 7]. Особенности численного моделирования таких течений связаны с существенным преобладанием скорости акустических возмущений над скоростью потока, с малым изменением давления и с изменением плотности при изменении объема или температуры смеси. Для описания дозвуковых течений разработана модификация уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [8], скорректированная с использованием средств асимптотического анализа [9]. Вычислительные алгоритмы для исследования дозвуковых многокомпонентных потоков с химическими экзотермическими реакциями и результаты численного моделирования окислительных процессов в среде с узкими зонами горения были представлены в [10–13]. В этих работах процессы тепломассопе-

реноса исследованы для однофазных сред. Гетерогенной составляющей, как правило, служит каталитически инертная стенка области.

Изучение воздействия лазерного излучения на различные, в том числе химически активные среды, лежит в основе создания новых перспективных технологий во многих областях науки и техники. Подобное воздействие лазерного излучения сопровождается возникновением термодинамической неравновесности, усилением процессов тепло-массопереноса с возникновением локальных изменений температуры и состава смеси, расширением области диффузионных процессов [14, 15]. Лазерный равновесный нагрев газа приводит к тем же химическим превращениям, что и равновесный нагрев любым другим способом [16, 17]. При атмосферном давлении химические процессы исключают многофотонное поглощение энергии [18]. Сложность проблемы заключается в том, что при низких мощностях и интенсивностях явления идут как фотохимические, хотя потоки энергии тепловые [19]. Сложные нелинейные режимы в проточной трубе могут возникать уже при поглощении лазерного излучения в гомогенной среде с химическими реакциями. В частности, могут возникать незатухающие колебания концентраций продуктов [14] и бегущие волны [20]. Математическое моделирование задач лазерной термохимии по состоянию на конец 80-х годов прошлого столетия отражено в [21]. Во многих задачах важную роль играет нелинейность. Нелинейные процессы в реакционной среде часто приводят к возникновению пространственных диссипативных структур и диффузионного хаоса [21].

Изучаемая нами лазерная конверсия метана (ЛКМ) основана на вводе лазерного излучения в поток газа вместе с каталитически активными наночастицами, которые нагреваются под воздействием излучения. На их поверхности происходит разложение метана с вылетом в газовую фазу высоко активных радикалов. Химические радикальные реакции приводят к образованию целевых продуктов. Проведение серийных лабораторных экспериментов по изучению ЛКМ характеризуется сложностью физико-химических процессов, большим набором параметров ЛКМ, высокими трудозатратами. Поэтому ряд технологических параметров ЛКМ целесообразно определять на основе математического моделирования.

Целью этого обзора является рассмотрение возможных постановок для нелинейных решений в области с тремя пространственными переменными. Мы приводим математическую модель, результаты численного решения задач в азимутально симметричной постановке. Далее формулируется возможное направление развития этой области математического и численного моделирования.

## 2. Математическая модель лазерной термохимии

На первом этапе необходимо создать математические модели и численные методы их реализации для описания процессов лазерной термогазохимии. Важность численных моделей для этих исследований заключается в необходимости выявления механизмов и параметров, влияющих на динамику протекания химических превращений во внутренних потоках газа и частиц, к примеру, состава газопылевой смеси, способов ввода энергии и т.д. С точки зрения математического моделирования необходимо построение, обоснование и валидация новых математических моделей, более полно описывающих дозвуковые многокомпонентные потоки с поглощением энергии от стенок области и лазерного излучения. Для реализации этих моделей требуется разработка экономичных, надежных численных методов, позволяющих повысить точность решения задач и снизить требования к вычислительным ресурсам.

Основой математических моделей служит газодинамическая система уравнений для движения сплошной среды. Эти уравнения по сути представляют законы сохранения массы, импульса и энергии, дополненные уравнениями состояния среды, начальными и граничными условиями. В литературе эта система уравнений для газа часто называется системой Навье-Стокса, которая может быть записана в векторном виде для идеального сжимаемого газа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\nabla \cdot p + \nabla \cdot \tau, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho E + p)) &= \nabla \cdot \left( \sum_j h_j \vec{J}_j + \tau \cdot \vec{v} \right) + S_h,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $\rho$  – плотность газа;  $\vec{v}$  – скорость;  $\rho E$  – полная энергия;  $p$  – статическое давление;  $\tau$  – тензор вязкой диссипации  $\tau = \mu((\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) - 2 \nabla \cdot \vec{v} I)$ ;  $I$  – единичная матрица;  $h_j = \int_{T_{ref}}^T c_{p,j} dT$ ,  $T_{ref} = 298.15 K$ ;  $c_{p,j}$  – удельная теплоёмкость  $j$ -го вещества;  $\vec{J}_j$  – диффузный поток  $j$ -го вещества;  $S_h$  – нагрев (охлаждение) смеси.

В то же время имеющиеся модели многокомпонентных реагирующих течений на основе системы уравнений Навье-Стокса (2.1) не позволяют с должной полнотой описывать особенности протекающих при ЛКМ процессов, для которых характерно значительное локальное поглощение энергии и изменение состава среды. Поэтому для подобных задач термохимии требуются новые более совершенные подходы. Для рассматриваемых задач в этой системе можно сделать важное приближение, когда изменение давления в объеме среды является малой, но конечной величиной. К примеру, в типичных лабораторных масштабах для движения воздуха по трубе длиной 30 см и радиуса 1 см разница в давлении на входе и на выходе при нормальных условиях и расходе 30 л/час составляет величину примерно  $10^{-2}$  Па, что на 7 порядков меньше статического давления  $10^5$  Па. Если движение газа происходит с низкими скоростями, значительно меньшими скорости звука, то математическая модель приводится к виду, в котором давление можно явно разделить на статическое и динамическое слагаемые. По другой терминологии в давлении выделяются основное значение и возмущенная функция (первое приближение по теории возмущений) или производится линеаризация модели по давлению. В то же время, такой подход позволяет учесть эффекты изменения объема среды и её химического состава в физико-химических процессах.

Система уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [10] была расширена на систему уравнений вязкой газопылевой двухфазной среды с учетом химических реакций и лазерного излучения [22]. Наша математическая модель дозвуковой динамики многокомпонентной многофазной среды представлена системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho_g Y_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g Y_m \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{J}_m + R_m, \quad m = \overline{1, M},\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) = 0, \quad i = \overline{1, N},\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) + \nabla \pi = \nabla \cdot \vec{\tau},\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i) + \nabla \cdot ((\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i) \vec{v}) = \\ = -\nabla \cdot \vec{q} + (n_g \alpha + \sum_i n_i \alpha_i) F - \sum_i 4\pi s_i^2 n_i \sigma (T_i^4 - T_g^4), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} S \equiv \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho_g C_p T_g} \left( -\sum_{i=1}^N \rho_i \frac{C_p (T_g - T_i)}{\zeta_i} + n_g \alpha F \right) + \\ + \frac{1}{\rho_g C_p T_g} \left( \nabla \cdot \lambda \nabla T_g + \sum_m \rho_g D_{m,mix} \nabla Y_m \nabla h_m \right) + \\ + \frac{1}{\rho_g} \sum_m \frac{M_w}{M_{wm}} (\nabla \cdot \rho_g D_{m,mix} \nabla Y_m) + \frac{1}{\rho_g} \sum_m \left( \frac{M_w}{M_{wm}} - \frac{h_m}{C_p T_g} \right) R_m. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система уравнений включает уравнения переноса массы компонент газовой смеси (2.2) и пылевых частиц (2.3), уравнение переноса импульса (2.4), уравнение для энтальпии газа и частиц (2.5) и условие на дивергенцию вектора скорости (2.6).

Здесь  $\rho_g$  – плотность газовой смеси,  $Y_m$  – массовая доля компоненты газа,  $M$  – количество компонент в газовой смеси,  $\vec{J}_m$  – вектор диффузионного потока,  $R_m$  – скорость образования или расхода  $m$ -ой компоненты смеси,  $\vec{v}$  – скорость потока газа и частиц,

$\rho_i$  – плотность частицы,  $N$  – количество фракций частиц,  $\rho = \rho_g + \sum_{i=1}^N \rho_i$  – суммарная плотность газа и частиц,  $\pi = p_g - p_0$  – возмущение давления,  $p_g$  – давление,  $p_0$  – давление, постоянное в области,  $\bar{\tau}$  – тензор вязких напряжений,  $h_g$  – энтальпия газа,  $h_i$  – энтальпия каждой фракции частиц,  $\vec{q}$  – вектор потока тепла,  $n_g$  – средняя концентрация молекул поглощающего газа в единице объема,  $n_i$  – концентрация частиц пылевой фракции,  $F$  – интенсивность излучения,  $\alpha$ ,  $\alpha_i$  – коэффициенты поглощения,  $T_g$  – температура газа,  $T_i$  – температура частиц пылевой фракции,  $s_i$  – радиус частицы,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $C_p$  – теплоемкость смеси при постоянном давлении,  $\zeta_i$  – время тепловой релаксации частицы в среде,  $M_w$  – средняя молекулярная масса смеси,  $M_{wm}$  – молекулярная масса  $m$ -ой компоненты смеси.

Для статического давления  $p_0$  уравнение состояния газовой смеси имеет вид

$$p_0 = \rho R T \sum_m \frac{Y_m}{M_{wm}}. \quad (2.7)$$

Модель также необходимо дополнить выражениями для вектора диффузионного потока, вектора потока тепла для смеси, тензора вязких напряжений:

$$\vec{J}_m = -\rho D_{m,mix} \nabla Y_m, \quad D_{m,mix} = D_{m,mix}(Y_m, T_g) \quad (2.8)$$

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T - \sum_m h_m \rho D_{m,mix} \nabla Y_m, \quad \lambda = \lambda(Y_m, T_g) \quad (2.9)$$

$$\bar{\tau} = \mu \left( \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) I \right), \quad \mu = \mu(Y_m, T_g) \quad (2.10)$$

Коэффициенты диффузии  $D_{m,mix}$ , теплопроводности  $\lambda$ , вязкости  $\mu$  являются функциями, зависящими нелинейно от температуры и концентраций компонент смеси. Для расчета коэффициентов теплопроводности и вязкости используется взвешивание вязкости

и теплопроводности по молярным долям компонент смеси. Коэффициенты диффузии компонента относительно смеси вычисляется через бинарные коэффициенты диффузии по формуле Уилки [23].

Интенсивность излучения определяется из решения уравнения

$$\frac{dF}{dl} + (n_g \alpha + \sum_i n_i \alpha_i) F = 0. \quad (2.11)$$

Здесь  $l$  – координата распространения лазерного излучения, коэффициент поглощения  $\alpha$  газовой смеси в случае излучения  $\text{CO}_2$  лазера и наличия этилена в смеси определен в [24], коэффициент поглощения фракцией пыли определяется по теории Ми.

Скорость образования или расхода компоненты смеси определяется суммированием по всем реакциям

$$R_m = M_{wm} \sum_{n=1}^N \nu_{mn} w_n. \quad (2.12)$$

Здесь  $\nu_{mn}$  – стехиометрические коэффициенты  $m$ -ой компоненты в стадии реакции  $k$ ,  $w_k$  – скорость  $k$ -ой стадии. В нашей модели мы используем двухтемпературную кинетическую схему радикально-цепных реакций, включающую 40 элементарных стадий и 15 компонент газовой смеси [25].

Энтальпия газовой смеси и энтальпия частиц твердой фазы определяются из выражений

$$h_g(T_g, Y_m) = \sum_m Y_m h_m(T_g), \quad h_m(T_g) = \int_{T_{ref}}^{T_g} C_{pm}(T_g) dT_g + h_m^0, \quad (2.13)$$

$$h_i(T_i) = C_{DV} T_i. \quad (2.14)$$

Здесь  $h_0$  – энтальпия образования каждой компоненты газа,  $T_{ref} = 293.15$  К,  $C_{pm}(T_{mg})$  – удельная теплоемкость каждой компоненты смеси при постоянном давлении,  $C_{DV}$  – теплоемкость вещества частиц при постоянном объеме.

Для определения температуры частиц используется выражение [26]:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{m_i C_{DV}} \left( \alpha_i F - 4\pi s_i^2 \sigma (T_i^4 - T_g^4) - a\pi \frac{s_i^2}{2} p_g c_t \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{T_i}{T_g} - 1 \right) - Q \cdot R \right). \quad (2.15)$$

Здесь  $a$  – коэффициент аккомодации,  $s_i$  – радиус частицы,  $c_t$  – средняя тепловая скорость молекул газа,  $Q$  – тепловой эффект реакции,  $R$  – число превращений в единицу времени.

Представленная система уравнений дополняется начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий принимаются концентрации газовых компонент  $Y_m^0$ , концентрации частиц  $n_i^0$ , температура газа  $T_g^0$ , температура частиц  $T_i^0$ , давление  $p^0$ , скорость потока  $\vec{v}^0$ . В качестве граничных условий рассматриваются условия втекания потока ( $Y_m^{in}, n_i^{in}, T_g^{in}, T_i^{in}, p^{in}, \vec{v}^{in}, F^{in}$ ), условия вытекания ( $p^{out}$ ), условия прилипания ( $T_g^{bound}, \vec{v} = 0$ ).  $F^{in}$  может иметь постоянное значение или зависеть от времени для непрерывного, импульсного или импульсно-периодического излучения.

В лазерной термогазохимии часто используется излучение  $\text{CO}_2$  лазеров для интенсификации процессов газозофазного пиролиза [27]. В математической модели, помимо радикальных реакций с возможным автокатализом и нелинейных эффектов при поглощении излучения, учитываются нагрев от стенок, теплопроводность и диффузия

многочисленных компонентов реакционной среды, а также другие нелинейные по температуре процессы. Локальный нагрев газа при поглощении излучения может привести к возникновению сверхравновесных концентраций радикалов, которые ускорят реакции вне областей своего зарождения.

### 3. Лазерная каталитическая конверсия метана

#### 3.1. Краткие данные по процессам конверсии метана

Современное состояние исследований по конверсии метана в ценные продукты приведено в обзорах [28–32]. В первом из них рассмотрены многочисленные методы переработки метана в низшие олефины и водород с первичной активацией метана путем окислительной конденсации с дальнейшим термокаталитическим расщеплением через синтез-газ и хлорирование. В [29] представлен обзор последних технологических решений по конверсии природного газа и отмечена важность процесса с точки зрения получения водорода как целевого продукта. Работа [30] посвящена обзору технологии окислительной конверсии метана в синтез-газ, водород и оксигенаты. Оценка источников по конверсии метана несомненно подводит к идее о целесообразности неокислительной конверсии метана [33–36]. Этот подход избавляет от дополнительных затрат по утилизации нежелательных продуктов окисления (монооксида и диоксида углерода). Получить углеводороды и водород из метана путем неокислительной конверсии можно при температурах выше 1200°C или в присутствии активного катализатора. В работе [37] представлены результаты по газофазному процессу с максимальной конверсией 45% при температурах выше 1150°C. Данный подход не отличается хорошей энергоэффективностью, несмотря на высокие селективности по C<sub>2</sub>-углеводородам. Применение катализаторов в пиролизных реакторах позволяет преобразовывать метан в ценные углеводороды, ароматические соединения и водород при более низких температурах среды [38–44]. Однако эта технология чувствительна к получению кокса вместо углеводородов. В работе Guo X. [40] представлен синтезированный авторами катализатор и приведены данные с конверсией метана 48 % при 1090°C в этилен, бензол и нафталин с селективностями 46%, 30%, 24% соответственно. Данный результат по конверсии является лидирующим. Однако при понижении температуры до 950°C конверсия на этом катализаторе падает до 9%. Таким образом, в настоящее время требуемая технология переработки природного газа отсутствует. Для ее создания необходимо построить математические модели и вычислительные алгоритмы для детального исследования процессов лазерной термохимии, в частности, лазерной каталитической конверсии метана. Также требуется их обосновать на основе экспериментальных данных, средств вычислительной математики и аналитических решений. Далее мы приводим уже решенные задачи, с помощью которых можно планировать экспериментальные работы, развивать математические модели и проводить вычислительные эксперименты.

#### 3.2. Конверсия метана в круглой трубе при высокой температуре ее стенки

Большое количество экспериментов по конверсии метана было проведено ранее в цилиндрической трубе с горячими стенками. Мы решали задачу о газофазной конверсии метана в осесимметричной геометрии трубы при высокой температуре стенки. Расчеты проводились для реактора цилиндрической формы длиной 220 мм, диаметром 40 мм. Диаметр был выбран из условия, чтобы длина теплопроводности по газу была меньше

радиуса трубы. В начальный момент времени область заполнена метаном, температура 1073 К, давление 101325 Па. На входе слева по всему диаметру трубы подается метан температурой 1073 К с расходом 40 л/ч. Справа по всему диаметру трубы задано условие вытекания, давление 101325 Па. Температура стенок 1473 К. Данные условия приводят к значительным перепадам температуры, плотности и концентрации в расчетной области в начальные моменты времени. Для описания схемы химических превращений принята схема с 15 компонентами смеси [45]. Скорость смеси теряет свое начальное распределение на 2-х, 3-х калибрах трубы. Во второй половине трубы происходит значительное ускорение потока. Около стенок формируется зона активных химических превращений с уменьшением доли метана при поступлении энергии от горячих стенок. Вблизи оси трубы температура газовой смеси ниже пристеночных значений, поскольку здесь происходят эндотермические реакции с поглощением энергии. Поскольку давление в реакторе равно атмосферному, нагрев приводит к разрежению газа с минимальным значением плотности у стенок. Максимальные значения плотности наблюдаются у входа газовой смеси, поскольку поступает относительно холодный метан.

По распределению метана вдоль оси трубы четко выделяется начальная область 20%-ной высокой конверсии метана. Далее конверсия сравнительно слабо возрастает. Такое поведение конверсии определяется падением температуры внутрь объема трубы, когда тепловой поток от стенки ограничивает эндотермические реакции метана и других углеводородов. Таким образом, чтобы увеличить конверсию метана необходимо усилить вложение энергии. Это можно сделать с помощью внешнего источника энергии, к примеру, лазерного излучения, которое должно поглощаться в реакционном объеме.

Более подробно результаты этого и последующих подпунктов изложены в [46].

### 3.3. Конверсия метана с лазерным излучением без катализатора

Следующая важная задача – это воздействие лазерного излучения на поток метана. Рассматривается конверсия метана в реакторе цилиндрической формы длиной 220 мм, диаметром 20 мм. Исходная смесь, температура которой 870.15 К, состоит из метана, который поступает в трубу слева и по всему периметру трубы на расстоянии 50 мм с суммарным расходом 40 л/ч. В начальный момент времени труба заполнена метаном. Лазерное излучение вводится через левый конец трубы, диаметр луча 4 мм. Для описания схемы реакции конверсии метана была принята 24-х стадийная радикальная кинетическая схема [45].

Вводимое через левый конец трубы лазерное излучение поглощается этиленом, который появляется при конверсии метана. В результате температура значительно увеличивается в центральной зоне реактора. Газодинамические параметры течения и выходы отдельных компонент смеси меняются на выходе трубы. Цель расчетов заключалась в определении условий для максимальной конверсии исходного сырья.

Расчеты проводились с мощностью излучения 8 Вт, 32 Вт, 64 Вт. Температура стенок задавалась 870 К у левого конца трубы и до входа газовой смеси по периметру, далее температура стенок задана 1373 К. Такое распределение температур выбрано для смещения зоны поглощения излучения и активных химических превращений в область смещения потоков.

Из рассчитанных распределений температуры вдоль оси реактора для различной мощности лазерного излучения следует, что уже при незначительной мощности излучения в 8 Вт происходит увеличение температуры на 150 К по сравнению с температурой в отсутствии излучения. При увеличении мощности до 64 Вт температура сохраняет

свои максимальные значения на всей длине трубы.

Содержания основных компонент смеси вдоль оси реактора с вводом лазерного излучения нарастают. Конверсия метана при значениях мощности выше 32 Вт увеличивается приблизительно в 1.5 – 2 раза уже в центральной части трубы. Последующее увеличение мощности (64 Вт) не оказывает сильного влияния на конверсию. В случае заданных начальных и граничных условий увеличение мощности излучения способствует выработке водорода и ацетилена, максимальное их содержание наблюдается на выходе из трубы. На расстоянии двух калибров трубы, в зоне смешения и активного поглощения лазерного излучения, наблюдается максимальный выход этилена. Уменьшение его выхода во второй половине трубы связано с повышением температуры в этой области, при которой происходит образование водорода и ацетилена.

Таким образом, управляя размерами реактора, мощностью подаваемого излучения, температурой стенок, составом исходной смеси можно найти решение задачи максимальной конверсии метана для получения целевого продукта. Полученные результаты указывают на возможность дальнейшего совершенствования процесса лазерного пиролиза метана на малотоннажных установках в целях получения таких ценных продуктов, как этилен, водород, ацетилен.

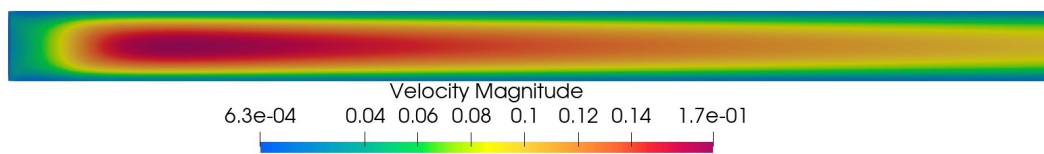
### 3.4. Каталитическая конверсия метана в потоке наночастиц без лазерного излучения

В настоящем разделе представлены результаты исследования течения реакционной газопылевой среды в круглой осесимметричной трубе с нагретыми стенками. Химические процессы описаны с использованием схемы радикально-цепных реакций [25]. Схема включает в себя стадии, протекающие как в газовой фазе, так и на поверхности каталитических наночастиц. В ней учтено наличие радикалов и продуктов реакции с сильно отличающимися массами, коэффициентами диффузии, теплопроводности и теплоемкости. Одна из brutto-реакций, отвечающих за увеличение объема среды, может быть записана как  $2\text{CH}_4 \rightarrow \text{C}_2\text{H}_4 + 2\text{H}_2$ . На поверхности каталитических наночастиц имеет место реакция  $\text{CH}_4 \rightarrow \text{CH}_3 + \text{H}$  с вылетом радикалов в газовую фазу. Энергия активации этой реакции является параметром задачи. Она определяется веществом частиц, природой и числом активных центров на их поверхности. Численные коэффициенты в кинетической схеме определяют жесткую систему ОДУ. Исследовано изменение теплового режима по длине трубы при изменении теплопроводности реакционной среды. В расчетах варьировались следующие параметры: температура стенок трубы; концентрация частиц твердой фазы; энергия активации метана на частицах; расход смеси; размер частиц; диаметр трубы.

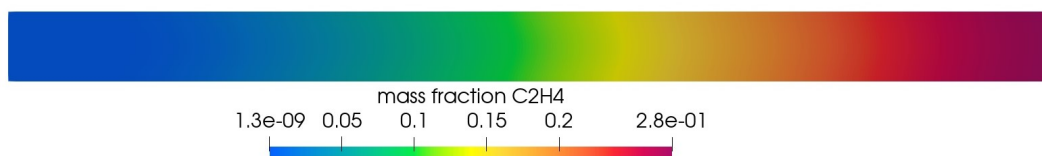
Длина расчетной области определена как 0.3 м, диаметр равен 0.02 м. Давление 1 атмосфера, начальная температура газа и частиц 1073 К. Начальный состав газа 100%  $\text{CH}_4$ . Температура стенок трубы 1123 К. Задается расход газа и частиц на входе через левый торец 60 л/ч, температура 300 К. Состав газа 100%  $\text{CH}_4$ , концентрация частиц  $10^{19} \text{ 1/м}^3$ , радиус частиц  $s_i = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ . Энергию активации метана на частицах задана равной 140 кДж/моль. На правом торце трубы задано условие вытекания потока. Размеры цилиндрической трубы выбраны с целью обеспечения полного прогрева газопылевой смеси от стенок и компенсации энергии, поглощаемой в ходе эндотермических химических реакций.

На рис. 3.1-3.2 представлены распределения скорости и массовой доли этилена в смеси для установившегося течения. Слева в трубу втекают холодный газ и частицы.

Концентрация частиц отвечает изменению скорости газа по длине трубы с ускорением и замедлением потока. На расстоянии свыше двух калибров трубы тепловой поток от стенок прогревает среду и запускаются химические реакции на наночастицах и в газовой фазе, вследствие чего наблюдается значительное ускорение потока (рис. 3.1). Оставаясь параболическим в радиальном направлении по длине трубы, далее поток испытывает торможение с уменьшением скорости примерно в 2 раза к выходу из трубы. Такое падение скорости объясняется существенным увеличением силы трения между стенками и более плотной, чем газовая, газопылевой средой. Этим наше течение в трубе отличается от течения Пуазейля, для которого скорость не меняется по длине трубы. Температура газопылевой смеси на расстоянии примерно двух калибров трубы становится близкой к температуре стенок, а ее градиент по радиусу обеспечивает необходимый поток энергии для эндотермической конверсии метана. Повышенная температура смеси в пристеночной области дает увеличенное содержание водородного радикала, количество которого продолжает в целом нарастать по длине трубы. В целом, в трубе интенсивно протекают гетерогенно-гомогенные реакции, индикатором которых служит атом водорода. По длине трубы наблюдается значительное перераспределение компонентного состава (рис. 3.2) с выравниванием по радиусу массовых долей к выходу трубы. Для заданных параметров расчета конверсия метана на выходе примерно 52%, массовая доля этилена составила 27%.



**Рис. 3.1.** Распределение скорости, м/с  
**Fig. 3.1.** Velocity distribution, m/s



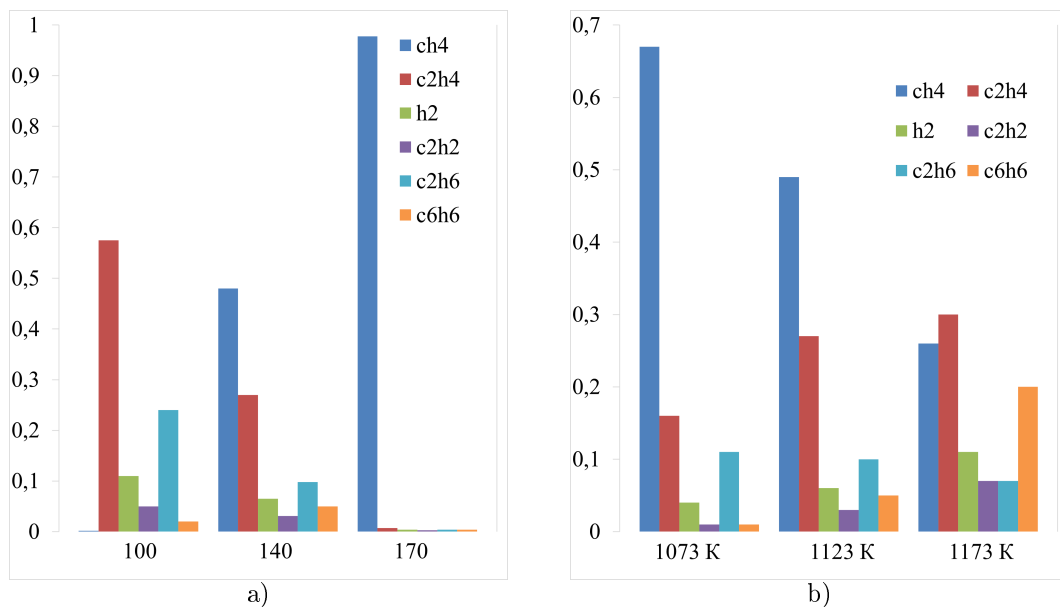
**Рис. 3.2.** Распределение этилена  
**Fig. 3.2.** Ethylene distribution

Далее приведены результаты численных расчетов с изменением энергии активации метана на частицах, температуры стенок трубы, размера частиц, концентрации частиц твердой фазы с целью определения их влияния на компонентный состав смеси.

Влияние энергии каталитической активации метана в пределах 100-170 кДж/моль на его конверсию представлено на рис. 3.3а. Повышение активности наночастиц, соответствующее снижению энергии активации при создании более совершенных катализаторов, приводит к резкому росту конверсии метана. Так, при энергии активации 100 кДж/моль, конверсия метана составила почти 100%. Низкая активность катализатора (энергия активации составляет 170 кДж/моль) приводит к критически низкой

конверсии – менее 3%. Это требует дополнительного вложения энергии в систему для запуска разложения метана. По литературным данным [25, 47, 48] энергия активации метана на активных центрах Fe/SiO<sub>2</sub> может быть близка к 140 кДж/моль, которую мы берем за основу в наших расчетах. Конверсия метана свыше 50% для этой энергии активации позволяет получать в лабораторном реакторе с ламинарными потоками этилен, этан и водород в качестве основных продуктов при умеренном содержании ароматических и других углеводородов.

Результаты расчетов при снижении и увеличении температуры стенки трубы представлены на рис. 3.3б. Увеличение температуры стенки на 50 К с сохранением остальных параметров сопровождается увеличением температуры газовой смеси и, соответственно, более высокой, 74%-ной конверсией метана в другие компоненты смеси. Основными продуктами является этилен и ароматические углеводороды. Образующийся этан при этой температуре газофазно дегидрируется в этилен и другие соединения. В случае понижения температуры стенки трубы до 1073 К на выходе из трубы наблюдается резкое снижение конверсии метана с увеличением доли этилена и неизрасходовавшегося этана. Тем самым, расчеты показывают высокую чувствительность химического процесса к температурным изменениям в диапазоне от 1073 К до 1173 К. В этом относительно узком температурном диапазоне гетерогенно-гомогенный процесс с радикальными цепными реакциями может дать высокую, свыше 70%, конверсию метана одновременно с высокими выходами этилена и водорода.

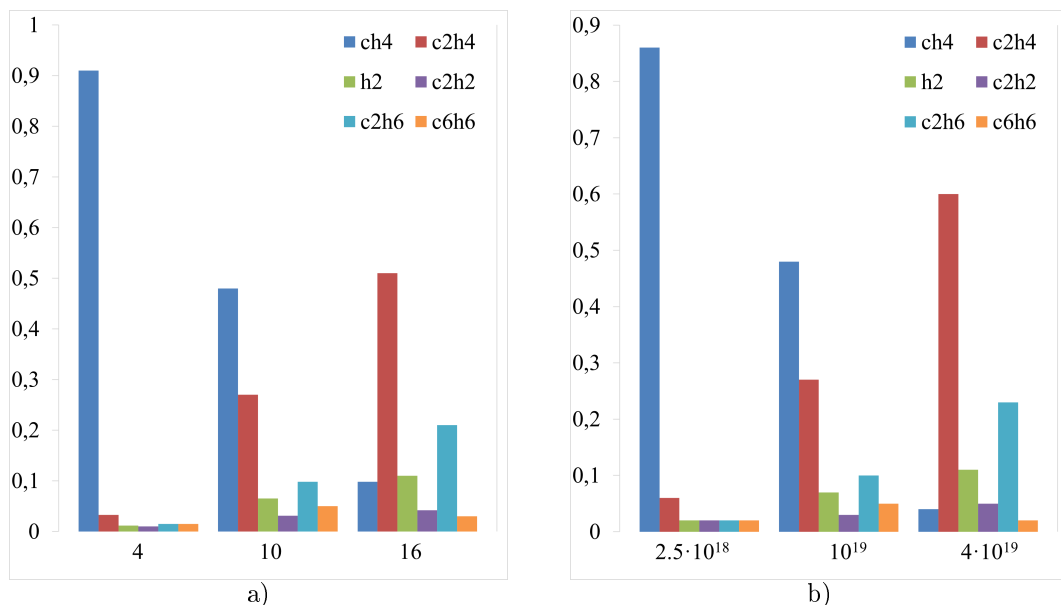


**Рис. 3.3.** Распределение массовых долей на выходе трубы: а) расчет с энергией активации метана на каталитических частицах 100 кДж/моль, 140 кДж/моль, 170 кДж/моль, б) расчет с температурой стенок 1073 К, 1123 К, 1173 К

**Fig. 3.3.** Distribution of mass fractions at the tube outlet: а) calculation with the activation energy of methane on catalytic particles of 100 kJ/mol, 140 kJ/mol, 170 kJ/mol, б) calculation with wall temperatures of 1073 K, 1123 K, 1173 K

Диаграммы на рис. 3.4 построены для результатов расчета при разных разме-

рах (рис. 3.4a) и концентрациях (рис. 3.4b) каталитических наночастиц в смеси. Изменение этих параметров существенно влияют на гетерогенную часть химического процесса прежде всего через изменение удельной каталитической поверхности, которая равна  $\pi d^2 n_i$ , и перераспределение компонентного состава наночастиц. При снижении диаметра наночастиц с 10 нм до 4 нм с общим уменьшением каталитической поверхности в 6.25 раз конверсия метана почти линейно падает от 52% и составляет 9%. При диаметре наночастиц 16 нм, что в 2.56 раза выше, конверсия увеличивается почти до 99%. Подобные высокие конверсии, по-видимому, выходят за рамки обоснованности использованной кинетической схемы радикальных цепных реакций, так как в ней не учитываются реакции продуктов на каталитической поверхности. Её увеличение сверх необходимых значений становится также отрицательным фактором для выхода ценных продуктов химического процесса. Качественно аналогичные результаты наблюдаются при изменениях концентраций наночастиц в 4 раза – рис. 3.4b. Режимы с высокой концентрацией или крупными частицами требуют отдельного изучения, поскольку в таких режимах на временах течения среды в трубе может измениться доступная для химических реакций каталитическая поверхность из-за объединения наночастиц в агломераты, что не учитывается в модели.



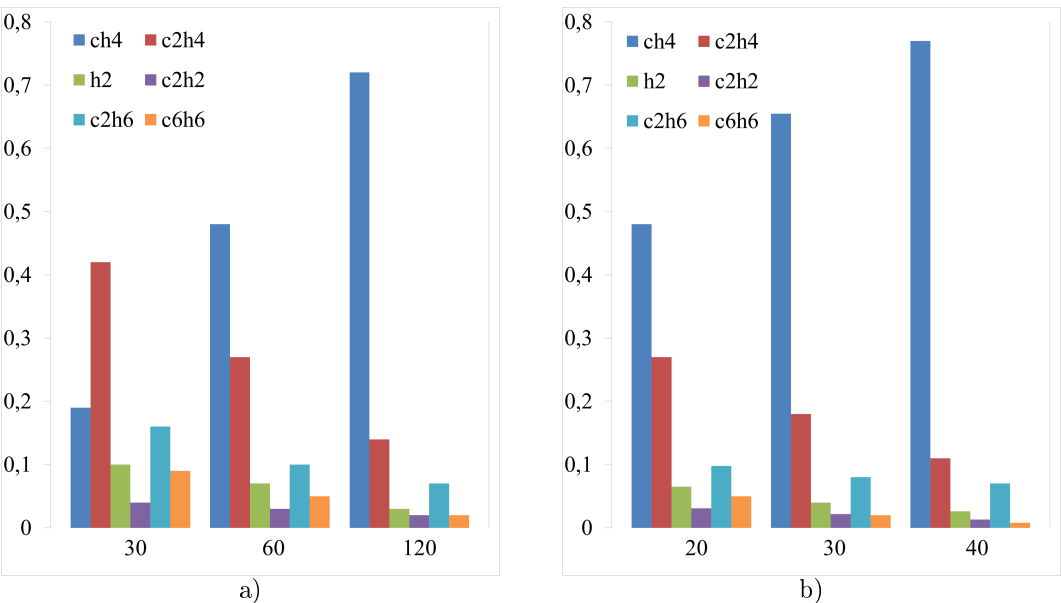
**Рис. 3.4.** Распределение массовых долей на выходе трубы: а) расчет с диаметром каталитических частиц 4 нм, 10 нм, 16 нм; б) расчет концентрацией частиц  $2.5 \cdot 10^{18} \text{ 1/m}^3$ ,  $10^{19} \text{ 1/m}^3$ ,  $4 \cdot 10^{19} \text{ 1/m}^3$

**Fig. 3.4.** Distribution of mass fractions at the tube outlet: a) calculation with a catalytic particle diameter of 4 nm, 10 nm, 16 nm, b) calculation with a particle concentration of  $2.5 \cdot 10^{18} \text{ 1/m}^3$ ,  $10^{19} \text{ 1/m}^3$ ,  $4 \cdot 10^{19} \text{ 1/m}^3$

Проведенные вычислительные эксперименты с различными расходами смеси газа и частиц (30 л/ч, 60 л/ч, 120 л/ч) показывают, что наиболее высокая конверсия метана (около 81%) с преимущественным образованием этилена, водорода и этана наблюдается в случае низкого расхода метана. При этом относительно большое содержание этилена

и этана указывает на оптимальную область проведения гетерогенно-гомогенной конверсии метана с умеренно высокой температурой смеси. Для расхода 60 л/ч конверсия метана достигает 52%, при 120 л/ч – 28%. Понижение расхода ведет к увеличению конверсии метана за счет длительности пребывания реакционной смеси в трубе. Однако, в случае низких расходов, общая производительность получения целевых продуктов снижается.

Эффект различных диаметров трубы связан с теплопередачей от поверхности трубы в реакционный объем. Для проведения расчетов были выбраны трубы диаметра 20 мм, 30 мм, 40 мм при прочих равных условиях: длина трубы и скорость потока неизменны, сохранение удельного расхода достигнуто путем его пересчета пропорционально квадрату радиуса трубы. Максимальная конверсия метана получена в трубе диаметра 20 мм. Выше было показано, что в трубе этого диаметра тепловой поток со стенок трубы может обеспечить необходимую энергию для эндотермического процесса конверсии метана. Как оказалось, в трубах круглого сечения с большим диаметром конверсия метана ограничивается теплообменом со стенкой трубы. Это ограничение производительности для каталитической конверсии можно снять увеличением длины реакционного объема или дополнительной генерацией радикалов при создании неравновесных условий лазерным излучением в газе [25].



**Рис. 3.5.** Распределение массовых долей на выходе трубы: а) расчет с расходом смеси 30 л/ч, 60 л/ч, 120 л/ч, б) расчет с диаметром трубы 20 мм, 30 мм, 40 мм  
**Fig. 3.5.** Distribution of mass fractions at the tube outlet: a) calculation with a mixture flow rate of 30 l/h, 60 l/h, 120 l/h, b) calculation with a tube diameter of 20 mm, 30 mm, 40 mm

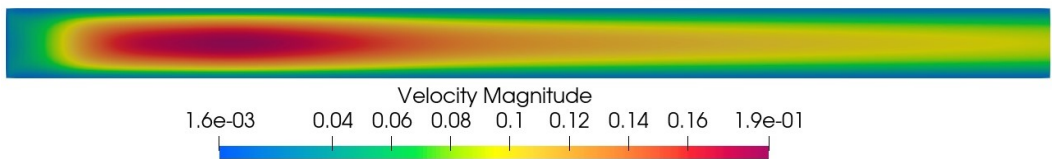
### 3.5. Каталитическая конверсия метана в потоке наночастиц и с лазерным излучением

В данном разделе представлены результаты расчетов при воздействии ИК-лазерного излучения на дозвуковое течение двухфазной среды метана и наночастиц пыли в прямой трубе круглого сечения [49]. Лазерное излучение возбуждает колебательные степени свободы у молекул этилена, который появляется в химических газофазных реакциях и на поверхности каталитически активных наночастиц. Тепловая релаксация этилена, поглотившего лазерное излучение, ведет к нагреву всех компонентов газа. Теплообмен между газом и наночастицами, который идет в свободномолекулярном режиме при диаметрах наночастиц в первых десятках нанометров, стремится привести температуры частиц и газа к тепловому равновесию. Обогреваемые стенки трубы обеспечивают основную долю энергии, необходимой для высоко эндотермической конверсии метана. Химические процессы в нагретой среде рассчитываются по кинетической схеме связанных между собой гетерогенных и гомогенных радикально-цепных реакций, включающую 40 элементарных стадий и 15 компонент газовой смеси [25]. Лазерное излучение вводится соосно в левый торец трубы вместе с газопылевой смесью метана с наночастицами. Диаметр пучка лазерного излучения, его мощность и длительность являются параметрами, которые задаются в начальных и граничных условиях. Предполагается использование непрерывного излучения  $\text{CO}_2$ -лазера.

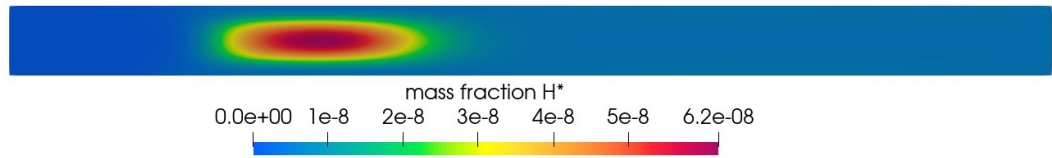
Длина расчетной области определена как 0.3 м, диаметр равен 0.02 м. Давление 101325 Па, начальная температура газа и частиц 1073 К. Начальный состав газа 100%  $\text{CH}_4$ . Расход газа и частиц на входе через левый торец 60 л/ч, температура 300 К. Состав газа 100%  $\text{CH}_4$ , концентрация частиц  $10^{19} \text{ м}^{-3}$ , радиус частиц  $s_i = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ . В качестве материала частиц принят оксид алюминия, допированный каталитически активным железом, с плотностью  $3.95 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , так что масса частицы  $m_i = 2.07 \cdot 10^{-21} \text{ кг}$ . Значения реальной и мнимой частей показателя преломления у этого материала на длине волны 10.6 мкм равны 1.12 и  $2.0 \cdot 10^{-2}$ . Энергию активации метана на частицах зададим равной 140 кДж/моль, коэффициент аккомодации 0.0015. С этого же торца вводится направленное вдоль оси лазерное излучение мощности 30 Вт, диаметр луча 0.012 м. Для смещения области запуска химических реакций от входа температура стенок трубы на участке от 0 до 0.02 м увеличивается линейно от 300 К до 1123 К, далее температура стенок задана 1123 К. На правом торце трубы задано условие вытекания потока.

На рис. 3.6-3.9 представлены картины распределения скорости, атомов водорода, температурного поля и интенсивности лазерного излучения в результате установления процесса выходом на стационарные значения функций, описывающих характеристики газа, частиц и лазерного излучения. Скорость смеси, как следует из рис. 3.6, увеличивается при переходе к области поглощения лазерного излучения под нагревом от стенок. При этом распределение остается параболическим в радиальном направлении практически везде по длине трубы. Далее происходит торможение потока с примерно двукратным уменьшением скорости в направлении выхода потока из трубы. В области поглощения лазерного излучения температура среды повышается (рис. 3.8), что способствует интенсивному течению гетерогенно-гомогенных реакций. Об этом свидетельствует активная генерация атомов водорода (рис. 3.7). В небольшой области, смещенной к входу в трубу достигнуто его пиковое значение – массовая доля более чем в 6 раз превышает значения в областях без поглощения лазерного излучения. Эта область служит местом инициирования радикальных цепных реакций, отвечающих за

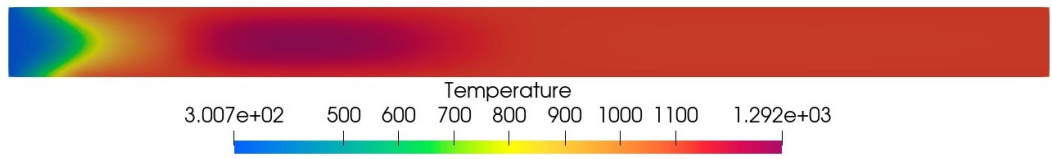
конверсию метана в газовой фазе.



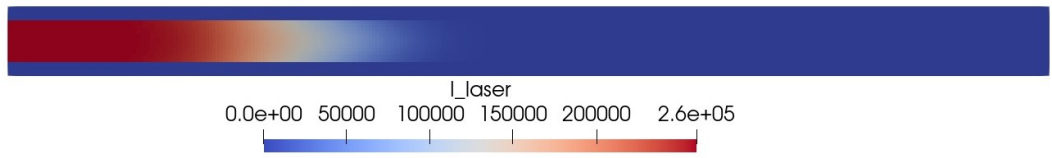
**Рис. 3.6.** Распределение скорости, м/с  
**Fig. 3.6.** Velocity distribution, m/s



**Рис. 3.7.** Распределение атома водорода  
**Fig. 3.7.** Distribution of the hydrogen atom



**Рис. 3.8.** Распределение температуры, К  
**Fig. 3.8.** Temperature distribution, K



**Рис. 3.9.** Распределение интенсивности лазерного излучения, Вт/м<sup>2</sup>  
**Fig. 3.9.** Distribution of laser radiation intensity, W/m<sup>2</sup>

Температура смеси и интенсивность излучения (рис. 3.8-3.9) демонстрируют быстрый нагрев среды поглощением энергии излучения и теплопередачей к стенкам и от стенок горячей трубы. На больших удалениях от входа и области поглощения излучения конверсия метана идет практически в изотермическом режиме. Там температура газопылевой смеси близка к температуре стенок трубы.

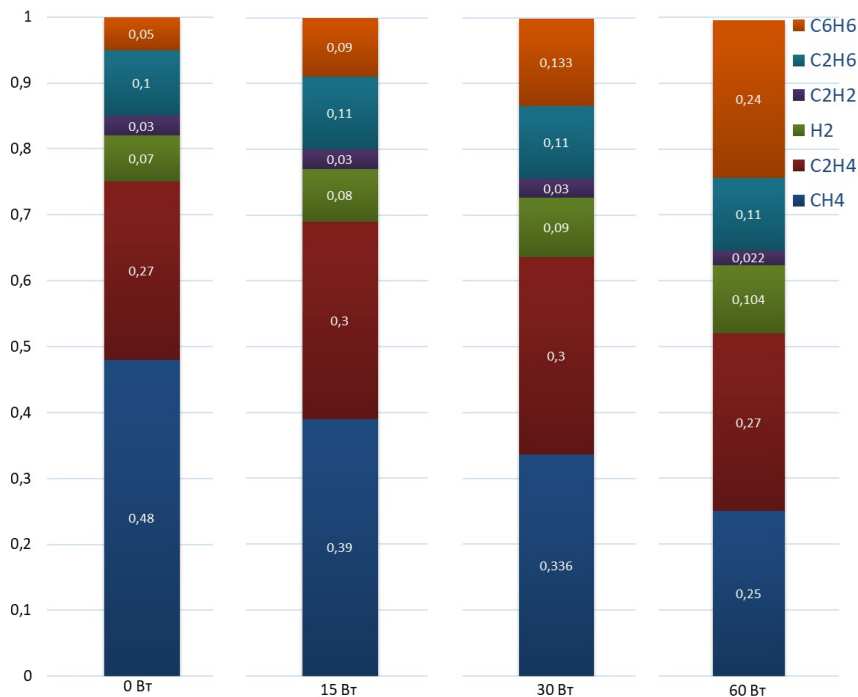
В расчете без лазерного излучения с увеличением конверсии метана наблюдается равномерное нарастание продуктов реакции. В расчете с лазерным излучением в

области поглощения излучения (на расстоянии от 0.03 м до 0.13 м от входа) происходит значительное перераспределение массовых долей компонент смеси с возрастанием конверсии метана от 1% до 33%, в этой же области без подвода излучения конверсия меняется от 1% до 17%. Наряду с конверсией метана в области поглощения излучения и повышенной температуры происходит пиролиз этана с преимущественным образованием ацетилена, водорода и бензола. Далее, в области выравнивания температуры стенок и смеси, происходит равномерное накопление продуктов реакции, схожее с картиной без излучения. Полученные результаты распределения компонент смеси вдоль оси реактора приводят к выводу о возможности смещения области поглощения лазерного излучения с целью повышения конверсии метана и образования необходимых компонент смеси. Данный вывод подтверждает, что пиролиз этана активно протекает в области поглощения излучения.

В расчетах рассматриваются относительно умеренные мощности и интенсивности лазерного излучения, при которых не происходит плазмообразование, но возможны нелинейные эффекты при резонансном поглощении излучения молекулами этилена [24]. Результаты численного расчета для умеренной мощности лазерного излучения 30 Вт (рис. 3.8-3.9) для распределений температуры и интенсивности лазерного излучения вдоль оси показывают слабое изменение излучения в поперечном радиальном направлении и относительно постоянную концентрацию этилена по радиусу. Благодаря этим обстоятельствам формируется область повышенной температуры, которая занимает поперечное сечение лазерного излучения. На подъем температуры в этой области определяющее влияние оказывает теплопроводность среды, характерный масштаб которой превышает радиус трубы. Поэтому изменение интенсивности излучения варьированием диаметра его пучка внутри диаметра трубы в рассмотренном режиме не приводит к значительным изменениям в конверсии метана и выходах продуктов к концу трубы. Значительно более сильный эффект вызывает изменение самой мощности излучения.

С увеличением мощности происходит расширение области поглощения излучения с ростом температуры и массовой доли атома водорода. В этой области образуются зоны повышенной конверсии метана на частицах с вылетом атома водорода, который интенсифицирует химические процессы в газовой фазе. Теплопроводность среды и теплообмен со стенками ограничивают температуру в зоне поглощения излучения. Если излучение в 15 Вт вызвало подъем температуры примерно на 100 К, то каждое следующее добавление 15 Вт вызывает все меньший и меньший подъем температуры из-за интенсификации химического процесса и теплоотдачи на стенку трубы. Тепловой фронт, установившийся и направленный против потока реакционной среды, имеет характерный размер примерно 4 см. В то же время тепловой фронт вдоль потока имеет почти в два раза большее значение. Он простирается за область поглощения лазерного излучения (рис. 3.9). В распределении атома водорода  $H$  на рис. 3.7 имеются свои особенности, связанные с генерацией  $H$  в разных химических реакциях по длине зоны поглощения излучения, продолжением цепных реакций и диффузией  $H$  против и вдоль потока.

Прежде всего, наблюдается большой снос  $H$  диффузией по потоку вне области с излучением для 30 Вт и 60 Вт излучения. Повышение концентрации  $H$  далее к выходу трубы дополнительно стимулирует химический процесс в газе. Кроме того, максимумы в концентрации  $H$  смещены далее по потоку относительно распределений температуры в области относительно низких интенсивностей излучения после его поглощения. Это говорит о том, что добавочная энергия от излучения в середине зоны поглощения



**Рис. 3.10.** Массовые доли компонент смеси при разной мощности лазерного излучения

**Fig. 3.10.** Mass fractions of the mixture components at different laser radiation powers

начинает расходоваться не на конверсию метана, а на вторичные химические реакции с продуктами конверсии. Это может оказаться важным, если целевыми продуктами будут ароматические соединения.

Диаграммы распределения массовых долей у основных компонент газовой смеси на выходе из трубы представлены на рис. 3.10 для значений мощности 0 Вт, 15 Вт, 30 Вт, 60 Вт. При заданных расчетных начальных и граничных условиях массовые выходы  $C_2H_6$ ,  $C_2H_4$ ,  $C_2H_2$  меняются незначительно. В то же время массовая доля бензола  $C_6H_6$  и других ароматических соединений увеличивается почти в 5 раз. При повышении мощности излучения от 0 до 60 Вт увеличивается конверсия метана с 52% до 75%. Нарастание выхода таких вторичных продуктов как ароматические соединения при относительно постоянном выходе первичных углеводородов подтверждает, что высокое дополнительное вложение энергии формирует в трубе две зоны. В первой с поглощением излучения и повышенной температурой происходит синтез ароматики, а во второй зоне происходит синтез непредельных углеводородов. Дополнительное воздействие лазерного излучения в 15 Вт, почти в 2 раза меньшего теплового потока со стенок трубы, увеличивает конверсию метана, выходы непредельных углеводородов и водорода.

Таким образом, относительно невысокие мощности лазерного излучения выступают как управляющее воздействие высокой эффективности на процесс конверсии метана в режиме поступления основной энергии со стороны горячих стенок для эндотермиче-

ского процесса. Этот режим легко реализуется в трубе небольшого диаметра. Однако уже на данном этапе можно сделать вывод, что изменение мощности и интенсивности излучения открывает возможность управления химическими реакциями в трубах с получением заранее определенных компонент смеси.

#### 4. Постановка 3D задач для математического моделирования

В предыдущих разделах обзора были представлены задачи лазерной термогазохимии, решенные в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат с потоком среды и излучения вдоль оси симметрии. Во всех этих задачах получаемые решения пространственно зависят от двух координат. Подобные решения представляют большой интерес для экспериментального изучения непосредственно самих физико-химических процессов. Однако в экспериментах азимутальная симметрия чаще всего отсутствует. Чтобы вычислительные эксперименты точнее отражали экспериментальные результаты, необходимо разрабатывать пространственно трехмерные математические и численные модели. Кроме того, подобные модели нужны на этапе проектирования укрупненных лабораторных установок и опытно-демонстрационных реакторов, в которых проверяются технические решения для разрабатываемых технологий. В то же время, численные модели должны развиваться на основе уже созданных и опробованных программ математического моделирования. Поэтому следующим этапом развития численных моделей лазерной каталитической термохимии мы видим создание пространственно трехмерных программ с использованием цилиндрической системы координат. Такие программы будут востребованы для решения следующих задач.

Излучение лазера может быть заведено внутрь трубы не строго вдоль оси симметрии. Подобное условие вызовет изменения в поглощении энергии, распределении радикалов по реакционному объему и, в конечном итоге, в выходе продуктов конверсии. Кроме того, при локальном поглощении лазерной энергии среда разогревается, ее плотность падает, и могут развиваться эффекты самофокусировки лазерного излучения, просветления среды и прочие явления, связанные с распространением в среде мощного потока излучения. Нагревательные элементы, располагаемые по поверхности трубы, могут несколько по-разному греть внешнюю поверхность трубы с нарушением однородности распределения температуры по ее поверхности.

Задачи ввода-вывода газа вместе с наночастицами в локальной точке на поверхности реакционной трубы. Сюда же примыкает целый пласт задач по расчету встречных потоков газа с их смешением, поворотом в нужном направлении для создания потока реагентов с необходимыми характеристиками в реакционной зоне с излучением. Несмотря на невысокие числа Рейнольдса для течения газа из-за отсутствия азимутальной симметрии возможно появление неустойчивостей, винтовых и спиральных структур в условиях протекания химических реакций.

Интересный и важный класс задач лазерной термохимии, для которых необходимо решать пространственно трехмерные уравнения, связан с воздействием лазерного излучения умеренной мощности на твердые таблетки в режиме испарения конденсированной среды без перехода в режимы лазерной абляции с образованием плазмы. При подаче газа в качестве окислителя – это резка металлов; при подаче инертного газа на твердые оксиды – это синтезы нанодисперсных нанопорошков, представляющих собой функциональные материалы для ряда применений и использования во многих технологиях. Одна из них была подробно описанная выше технология каталитической конверсии метана с использованием наночастиц.

Для того, чтобы реакционный газ был достаточно однородно заполнен наночастицами, необходимо предварительно его перемешать с частицами. Идея подобного перемешивания и заполнения была предложена нами в [50] через разлет предварительно сжатых в сгусток наночастиц в плотном газе с испаряемой оболочкой. Трудно ожидать, что в этом случае экспериментально будет достигнута аксиальная симметричность распределения частиц в объеме трубы. Поэтому решение пространственно трехмерных задач должно помочь определить параметры создаваемой технологии.

Актуально развитие моделей лазерной термогазохимии для критических и переходных явлений, которые возникают при воздействии лазерного излучения на реакционную среду с формированием областей сжатия и разрежения. В них условие малости величины отклонения давления от своего статического значения нарушается, и необходимо переходить на решение уравнений более общего вида. Другое направление связано с решением задач для более мощного лазерного излучения и/или экзотермических гетерогенных реакций на поверхности наночастиц. В этих случаях возможен отрыв температуры наночастиц от температуры окружающего газа. Перспективным направлением является переход к уравнениям сплошной среды со слоями неподвижной твердой фазы, через которую фильтруется поток газа и поглощается внешняя энергия, к примеру, лазерного, индукционного, СВЧ или электронагрева. Все эти направления могут развиваться как сугубо фундаментальные, так и ориентированные на создание ряда новых технологий с определением требуемых параметров на основе математического моделирования и вычислительных экспериментов. Очевидно, что для реализации этих моделей требуется создание параллельных численных методов, позволяющих достигать необходимую точность решения задач на имеющихся вычислительных ресурсах.

## 5. Заключение

В настоящем обзоре рассмотрен комплекс как решенных нами, так и актуальных задач численного моделирования в области лазерной термохимии применительно к проблеме получения целевых продуктов из природного газа. В лазерной термохимии ранее работало значительное число известных ученых. Пик развития в мире этой области исследований пришелся на конец 80-х годов прошлого столетия. Создание высокоэффективных лазерных систем, развитие математического моделирования с решением сугубо нелинейных задач, современная необходимость решить проблему прямой конверсии метана в ценные продукты, все это определило новый интерес к подходам лазерной термохимии. Как правило, математические задачи в этой области требуют пространственно трехмерных постановок. Но решения в такой постановке часто содержат бифуркации или могут быть неустойчивыми при изменении параметров. Развитие численных методов для решения подобных нелинейных задач должно предусматривать возможность появления пространственных диссипативных структур и диффузионного хаоса. Поэтому применение коммерческих кодов CFD, ориентированных на расчеты технических задач у потребителя, в этой области в основном оправдано как дополнительный инструмент численного моделирования. Для вычислительных экспериментов требуется иметь гибкий в работе код как исследовательский инструмент с полностью известными свойствами. Для создания подобных программ для задач лазерной термохимии необходимо привлекать математиков с широким участием разных специалистов по аналитическим решениям, по численным методам, по задачам для систем уравнений математической физики, прикладного и параллельного программирования, специалистов-предметников для анализа и использования полученных результатов.

Область применения разработанных нами математической модели, численного алгоритма и программы для вычислительных экспериментов значительно шире, чем задачи газохимии метана. Большой научный интерес представляет изучение и анализ нелинейных процессов, стимулированных излучением, в химически активных гетерогенно-гомогенных средах. Полученные результаты могут быть востребованы в практических приложениях, например, при разработке новых и экономически востребованных химических технологий получения водорода для топливных элементов. Это и предварительная подготовка реакционного газа для камер сгорания в энергоустановках, лазерная резка материалов, напыление покрытий и многие другие современные технологические задачи.

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке РФФ (грант № 26-11-00095).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. VI М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. 736 с.
2. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запryanов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. Справочное пособие. Москва: Квантум, 1996. 336 с.
3. Котляр Я. М. Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики. Учеб. пособие для втузов. М: Высшая школа, 1991. 208 с.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М: Атомиздат, 1979. 416 с.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М: Наука, 1987. 502 с.
6. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. М: Наука, 1989. 368 с.
7. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломассообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
8. Rehm R. G., Baum H. R. The equation of motion for thermally driven, buoyant flows. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. 1978. Vol. 83, no. 3. P. 297–308.
9. Majda A., Sethian J. The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion. *Combustion Science and Technology*. 1985. Vol. 42, no. 3-4. P. 185–205.
10. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry. *Combustion Theory and Modelling*. 2000. Vol. 4, no. 4. P. 535–556. DOI: 10.1088/1364-7830/4/4/309
11. Борисов В. Е., Якуш С. Е. Применение адаптивных иерархических сеток для расчета течений реагирующих газов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т. 16, № 2. С. 1–13.

12. Motheauna E., Abrahama J. A high-order numerical algorithm for DNS of low-Mach-number reactive flows with detailed chemistry and quasi-spectral accuracy // *Journal of Computational Physics*. 2016. Vol. 313. P. 430–454. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.02.059
13. Борисов В. Е., Якуш С. Е., Сысоева Е. Я. Численное моделирование распространения ячеистых пламен в узком зазоре между пластинами // *Математическое моделирование*. 2022. Т. 34, № 3. С. 3–25. DOI: 10.20948/mm-2022-03-01
14. Карлов Н. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Лазерная термохимия. М.: ЦентрКом, 1995. 368 с.
15. Басов Н. Г., Маркин Е. П., Ораевский А. Н., Панкратов А. В. Фотохимическое действие инфракрасного излучения // *Докл. АН СССР*. 1971. Т. 198, № 5. С. 1043–1045.
16. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Термохимическое действие лазерного излучения // *Успехи физических наук*. 1982. Т. 138, № 1. С. 45–94.
17. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С., Шафеев Г. А. Термокаталитические процессы, индуцируемые лазерным излучением в химически активных газовых средах // *Квантовая электроника*. 1983. Т. 10, № 7. С. 1373–1379.
18. Молин Ю. Н., Панфилов В. Н., Петров А. К. Инфракрасная фотохимия. Новосибирск: Наука, 1985. 254 с.
19. Гуназе О. А., Трофимов В. А. Об эффективности стимулирования химической газовой реакции световым пучком при поглощении его энергии на колебательных переходах // *Журнал технической физики*. 1999. Т. 69, № 4. С. 65–73.
20. Козлов Г. И. Исследование закономерностей распространения волн пиролиза и горения по лазерному лучу в пропане // *Письма в ЖТФ*. 1998. Т. 24, № 6. С. 13–17.
21. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
22. Snytnikov V. N., Peskova E. E., Stoyanovskaya O. P. Mathematical Model of a Two-Temperature Medium of Gas-Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. Vol. 15, no. 5. P. 877–893. DOI: 10.1134/S2070048223050095
23. Fairbanks D. F., Wilke C. R. Diffusion Coefficients in Multicomponent Gas Mixtures. *Industrial & Engineering Chemistry*. 1950. Vol. 42. P. 471–475.
24. Snytnikov V. N., Snytnikov V. N., Masyuk N. S., Markelova T. V. The Absorption of CO<sub>2</sub> laser radiation by ethylene in mixtures with methane. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2020. Vol. 253. 107119. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2020.107119
25. Lashina E. A., Peskova E. E., Snytnikov V. N. Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH<sub>4</sub> conversion: the role of gas-phase H or CH<sub>3</sub>. *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*. 2023. Vol. 136. P. 1775–1789. DOI: 10.1007/s11144-023-02442-8

26. Гуренцов Е. В., Еремин А. В., Фальченко М. Г. Моделирование процессов теплообмена лазерно-нагретых наночастиц с окружающей газовой средой // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2011. Т. 11, № 1.
27. Masyuk N., Sherin A., Snytnikov V. N., Snytnikov, Vl. N. Effect of infrared laser radiation on gas-phase pyrolysis of ethane. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*. 2018. Vol. 134. P. 122–129. DOI: 10.1016/j.jaap.2018.05.017
28. Колесниченко Н. В., Ежова Н. Н., Снатенкова Ю. М. Низшие олефины на основе метана: последние достижения // *Успехи химии*. 2020. Т. 89, № 2. С. 191–224. DOI: 10.1070/RCR4900
29. Schneider S., Bajohr S., Graf F., Kolb T. State of the art of hydrogen production via pyrolysis of natural gas. *ChemBioEng Rev.* 2020. Vol. 7, no. 5. P. 150–158. DOI: 10.1002/cben.202000014
30. Арутюнов В. С., Крылов О. В. Окислительная конверсия метана // *Успехи химии*. 2005. Vol. 74, № 12. С. 1216–1245. DOI: 10.1070/RC2005v074n12ABEH001199
31. Арутюнов В. С. Окислительная конверсия природного газа. М.: Изд-во Красанд, 2011. 636 с.
32. Пинаева Л. Г., Носков А. С., Пармон В. Н. Перспективы прямой каталитической переработки метана в востребованные химические продукты. Обзор // *Катализ в промышленности*. 2017. Т. 17, № 3. С. 184–200. DOI: 10.18412/1816-0387-2017-3-184-200
33. Holmen A., Rokstad O. A., Solbakken A. High-temperature pyrolysis of hydrocarbons. 1. Methane to acetylene. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*. 1976. Vol. 15, no. 3. P. 439–444.
34. Palmer H. B., Lahaye J., Hou K. C. Kinetics and mechanism of the thermal decomposition of methane in a flow system. *The Journal of Physical Chemistry*. 1968. Vol. 72, no. 1. P. 348–353. DOI: 10.1021/j100847a068
35. Holmen A. Direct conversion of methane to fuels and chemicals. *Catalysis Today*. 2009. Vol. 142, no. 1–2. P. 2–8. DOI: 10.1016/j.cattod.2009.01.004
36. Holmen A., Olsvik O., Rokstad O. A. Pyrolysis of natural gas: chemistry and process concepts. *Fuel Processing Technology*. 1995. Vol. 42, no. 2–3. P. 249–267. DOI: 10.1016/0378-3820(94)00109-7
37. Sung S. W., Gebreyohannes T. G., Shin J. H., Kim H. W., Kim Y. T. Carbon-efficient reaction optimization of nonoxidative direct methane conversion based on the integrated reactor system. *Chemical Engineering Journal*. 2024. Vol. 481. 148286. DOI: 10.1016/j.cej.2023.148286
38. Dong Q., Yao Y., Cheng S., Alexopoulos K., Gao J., Srinivas S., Programmable heating and quenching for efficient thermochemical synthesis. *Nature*. 2022. Vol. 605. P. 470–476. DOI: 10.1038/s41586-022-04568-6

39. Zhang J., Zhao Y., Guo X., Chen C., Dong C.-L., Liu R.-S., et al. Single platinum atoms immobilized on an MXene as an efficient catalyst for the hydrogen evolution reaction. *Nature Catalysis*. 2018. Vol. 1. P. 985–992. DOI: 10.1038/s41929-018-0195-1
40. Guo X., Fang G., Li G. et al. Direct, Nonoxidative Conversion of Methane to Ethylene, Aromatics, and Hydrogen. *Science*. 2014. Vol. 344, no. 6184. P. 616–619. DOI: 10.1126/science.1253150
41. Postma R. S., Lefferts L. Effect of ethane and ethylene on catalytic non oxidative coupling of methane. *Reaction Chemistry & Engineering*. 2021. Vol. 6. P. 2425–2433. DOI: 10.1039/d1re00261a
42. Kim S. K., Kim H. W., Han S. J., Lee S. W., Shin J., Kim Y. T. Mechanistic and microkinetic study of non-oxidative methane coupling on a single-atom iron catalyst. *Communications Chemistry*. 2020. Vol. 3. Article number 58. DOI: 10.1038/s42004-020-0306-1
43. Sim E., Lee S. W., Lee J. J., Han S. J., Shin J. H., Lee G., et al. Effect of silicon carbide-based iron catalyst on reactor optimization for non-oxidative direct conversion of methane. *Journal of Energy Chemistry*. 2023. Vol. 81. P. 519–532. DOI: 10.1016/j.jechem.2023.03.019
44. Zhang W., Fu C., Low J. et al. High-performance photocatalytic nonoxidative conversion of methane to ethane and hydrogen by heteroatoms-engineered TiO<sub>2</sub>. *Nature Communications*. 2022. Vol. 13. Article number 2806. DOI: 10.1038/s41467-022-30532-z
45. Lashina E. A., Peskova E. E., Snytnikov V. N. Mathematical modelling of the dynamics of thermal conversion of methane-ethane mixtures in a wide temperature range. *Chemistry for Sustainable Development*. 2023. Т. 31, № 3. С. 278–286. DOI: 10.15372/CSD2023467
46. Пескова Е. Е. Математическое моделирование процессов лазерной термохимии : специальность 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Пескова Елизавета Евгеньевна ; ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – Москва, 2025. – 219 с.
47. Kostyukov A. I., Zaitseva N. A., Baronskiy M. G., Nashivochnikov A. A., Snytnikov V. N. Catalytic activity of laser-synthesized CrOx/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanocatalysts with different particle sizes in isobutane dehydrogenation. *Journal of Nanoparticle Research*. 2022. Vol. 24, № 7. 144. DOI: 10.1007/s11051-022-05532-1
48. Kovalskii V. Y., Ruzankin S. P., Snytnikov V. N., Zilberberg I. L. Extremely Low Barrier Activation of Methane on Spin-Polarized Ferryl Ion [FeO]<sub>2</sub><sup>+</sup> at the Four-Membered Ring of Zeolite. *Molecular Catalysis*. 2022. Vol. 528. 112468. DOI: 10.1016/j.mcat.2022.112468
49. Peskova E. E., Snytnikov V. N. Computer simulation of laser radiation influence at internal flows of reactive hydrocarbons. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2024. Vol. 58. P. 526–536. DOI: 10.1134/S0040579524600876

50. Снытников В. Н., Пескова Е. Е. Волновая динамика радикалов в газопылевой среде при каталитической конверсии углеводородов // Волны и вихри в сложных средах. Сборник материалов 16-й международной конференции - школы молодых ученых. Москва, 2025. С. 227–228.

Поступила 21.07.2026; доработана после рецензирования 21.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theoretical Physics. Hydrodynamics*, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., Moscow, 1986 (In Russ.), 736 p.
2. A. M. Kutepov, A. D. Polyanin, Z. D. Zapryanov, A. V. Vyazmin, D. A. Kazenin, *Chemical Hydrodynamics. A Reference Guide*, Kvantum, Moscow, 1996 (In Russ.), 336 p.
3. Ya. M. Kotlyar, *Methods of Mathematical Physics and Problems of Hydroaerodynamics. A Textbook for Technical Colleges*, Vysshaya Shkola, Moscow, 1991 (In Russ.), 208 p.
4. S. S. Kutateladze, *Fundamentals of Heat Transfer Theory*, Atomizdat, Moscow, 1979 (In Russ.), 416 p.
5. D. A. Frank-Kamenetskii, *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 502 p.
6. Yu. V. Lapin, M. Kh. Strelets, *Internal Flows of Gas Mixtures*, Nauka, Moscow, 1989 (In Russ.), 368 p.
7. S. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Energoatomizdat, Moscow, 1984 (In Russ.), 152 p.
8. R. G. Rehm, H. R. Baum, "The equation of motion for thermally driven, buoyant flows", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **83**:3 (1978), 297–308.
9. A. Majda, J. Sethian, "The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion", *Combustion Science and Technology*, **42**:3–4 (1985), 185–205.
10. M. S. Day, J. B. Bell, "Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry", *Combustion Theory and Modelling*, **4**:4 (2000), 535–556. DOI: 10.1088/1364-7830/4/4/309
11. V. E. Borisov, S. E. Yakush, "Application of adaptive hierarchical grids for computing reacting gas flows", *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, **16**:2 (2015), 1–13 (In Russ.).
12. E. Motheau, J. Abraham, "A high-order numerical algorithm for DNS of low-Mach-number reactive flows with detailed chemistry and quasi-spectral accuracy", *Journal of Computational Physics*, **313** (2016), 430–454. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.02.059

13. V. E. Borisov, S. E. Yakush, E. Ya. Sysoeva, "Numerical simulation of cellular flame propagation in a narrow gaps", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **14**:5 (2022), 755–770. DOI: 10.1134/S2070048222050039
14. N. V. Karlov, N. A. Kirichenko, B. S. Luk'yanchuk, *Laser Thermochemistry*, TsentrKom, Moscow, 1995 (In Russ.), 368 p.
15. N. G. Basov, E. P. Markin, A. N. Oraevskii, A. V. Pankratov, "Photochemical action of infrared radiation", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **198**:5 (1971), 1043–1045 (In Russ.).
16. F. V. Bunkin, N. A. Kirichenko, B. S. Luk'yanchuk, "Thermochemical action of laser radiation", *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, **138**:1 (1982), 45–94 (In Russ.).
17. F. V. Bunkin, N. A. Kirichenko, B. S. Luk'yanchuk, G. A. Shafeev, "Thermocatalytic processes induced by laser radiation in chemically active gas media", *Kvantovaya Elektronika*, **10**:7 (1983), 1373–1379 (In Russ.).
18. Yu. N. Molin, V. N. Panfilov, A. K. Petrov, *Infrared Photochemistry*, Nauka, Novosibirsk, 1985 (In Russ.), 254 p.
19. O. A. Gunaze, V. A. Trofimov, "On the efficiency of stimulating a chemical gas reaction by a light beam under absorption of its energy at vibrational transitions", *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, **69**:4 (1999), 65–73 (In Russ.).
20. G. I. Kozlov, "Investigation of the propagation of pyrolysis and combustion waves along a laser beam in propane", *Pis'ma v ZhTF*, **24**:6 (1998), 13–17 (In Russ.).
21. T. S. Akhromeeva, S. P. Kurdyumov, G. G. Malinetskii, A. A. Samarskii, *Nonstationary Structures and Diffusion Chaos*, Nauka, Moscow, 1992 (In Russ.), 544 p.
22. V. N. Snytnikov, E. E. Peskova, O. P. Stoyanovskaya, "Mathematical Model of a Two-Temperature Medium of Gas-Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **15** (2023), 877–893. DOI: 10.1134/S2070048223050095
23. D. F. Fairbanks, C. R. Wilke, "Diffusion Coefficients in Multicomponent Gas Mixtures", *Industrial & Engineering Chemistry*, **42** (1950), 471–475.
24. Vl. N. Snytnikov, V. N. Snytnikov, N. S. Masyuk, T. V. Markelova, "The Absorption of CO<sub>2</sub> laser radiation by ethylene in mixtures with methane", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **253** (2020). DOI: 10.1016/j.jqsrt.2020.107119
25. E. A. Lashina, E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, "Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH<sub>4</sub> conversion: the role of gas-phase H or CH<sub>3</sub>", *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*, **136** (2023), 1775–1789. DOI: 10.1007/s11144-023-02442-8
26. E. V. Gurentsov, A. V. Eremin, M. G. Falchenko, "Modeling of heat exchange processes between laser-heated nanoparticles and the surrounding gas medium", *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, **11**:1 (2011) (In Russ.).
27. N. Masyuk, A. Sherin, V. N. Snytnikov, Vl. N. Snytnikov, "Effect of Infrared Laser Radiation on Gas-Phase Pyrolysis of Ethane", *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, **134** (2018), 122–129. DOI: 10.1016/j.jaap.2018.05.017

28. N. V. Kolesnichenko, N. N. Ezhova, Yu. M. Snatenkova, “Lower olefins from methane: recent advances”, *Uspekhi Khimii*, **89**:2 (2020), 191–224 (In Russ.). DOI: 10.1070/RCR4900
29. S. Schneider, S. Bajohr, F. Graf, T. Kolb, “State of the Art of Hydrogen Production via Pyrolysis of Natural Gas”, *ChemBioEng Reviews*, **7**:5 (2020), 150–158. DOI: 10.1002/cben.202000014
30. V. S. Arutyunov, O. V. Krylov, “Oxidative conversion of methane”, *Uspekhi Khimii*, **74**:12 (2005), 1216–1245 (In Russ.). DOI: 10.1070/RC2005v074n12ABEH001199
31. V. S. Arutyunov, *Oxidative Conversion of Natural Gas*, Krasand, Moscow, 2011 (In Russ.), 636 p.
32. L. G. Pinaeva, A. S. Noskov, V. N. Parmon, “Prospects for direct catalytic processing of methane into demanded chemical products. A review”, *Kataliz v Promyshlennosti*, **17**:3 (2017), 184–200 (In Russ.). DOI: 10.18412/1816-0387-2017-3-184-200
33. A. Holmen, O. A. Rokstad, A. Solbakken, “High-temperature pyrolysis of hydrocarbons. 1. Methane to acetylene”, *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, **15**:3 (1976), 439–444.
34. H. B. Palmer, J. Lahaye, K. C. Hou, “Kinetics and mechanism of the thermal decomposition of methane in a flow system”, *The Journal of Physical Chemistry*, **72**:1 (1968), 348–353. DOI: 10.1021/j100847a068
35. A. Holmen, “Direct conversion of methane to fuels and chemicals”, *Catalysis Today*, **142**:1–2 (2009), 2–8. DOI: 10.1016/j.cattod.2009.01.004
36. A. Holmen, O. Olsvik, O. A. Rokstad, “Pyrolysis of natural gas: chemistry and process concepts”, *Fuel Processing Technology*, **42**:2–3 (1995), 249–267. DOI: 10.1016/0378-3820(94)00109-7
37. S. W. Sung, T. G. Gebreyohannes, J. H. Shin, H. W. Kim, Y. T. Kim, “Carbon-efficient reaction optimization of nonoxidative direct methane conversion based on the integrated reactor system”, *Chemical Engineering Journal*, **481** (2024), 148286. DOI: 10.1016/j.cej.2023.148286
38. Q. Dong, Y. Yao, S. Cheng, K. Alexopoulos, J. Gao, S. Srinivas, “Programmable heating and quenching for efficient thermochemical synthesis”, *Nature*, **605** (2022), 470–476. DOI: 10.1038/s41586-022-04568-6
39. J. Zhang, Y. Zhao, X. Guo, C. Chen, C.-L. Dong, R.-S. Liu, et al., “Single platinum atoms immobilized on an MXene as an efficient catalyst for the hydrogen evolution reaction”, *Nature Catalysis*, **1** (2018), 985–992. DOI: 10.1038/s41929-018-0195-1
40. X. Guo, G. Fang, G. Li, et al., “Direct, Nonoxidative Conversion of Methane to Ethylene, Aromatics, and Hydrogen”, *Science*, **344**:6184 (2014), 616–619. DOI: 10.1126/science.1253150
41. R. S. Postma, L. Lefferts, “Effect of ethane and ethylene on catalytic non oxidative coupling of methane”, *Reaction Chemistry & Engineering*, **6** (2021), 2425–2433. DOI: 10.1039/d1re00261a

42. S. K. Kim, H. W. Kim, S. J. Han, S. W. Lee, J. Shin, Y. T. Kim, “Mechanistic and microkinetic study of non-oxidative methane coupling on a single-atom iron catalyst”, *Communications Chemistry*, **3** (2020), 58. DOI: 10.1038/s42004-020-0306-1
43. E. Sim, S. W. Lee, J. J. Lee, S. J. Han, J. H. Shin, G. Lee, et al., “Effect of silicon carbide-based iron catalyst on reactor optimization for non-oxidative direct conversion of methane”, *Journal of Energy Chemistry*, **81** (2023), 519–532. DOI: 10.1016/j.jechem.2023.03.019
44. W. Zhang, C. Fu, J. Low, et al., “High-performance photocatalytic nonoxidative conversion of methane to ethane and hydrogen by heteroatoms-engineered TiO<sub>2</sub>”, *Nature Communications*, **13** (2022), 2806. DOI: 10.1038/s41467-022-30532-z
45. E. A. Lashina, E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Mathematical modelling of the dynamics of thermal conversion of methane-ethane mixtures in a wide temperature range”, *Chemistry for Sustainable Development*, **31**:3 (2023), 278–286. DOI: 10.15372/CSD2023467
46. E. E. Peskova, *Mathematical modeling of laser thermochemistry processes : specialty 1.2.2 «Mathematical modeling, numerical methods and software packages» : dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences*, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, 2025.
47. A. I. Kostyukov, N. A. Zaitseva, M. G. Baronskiy, A. A. Nashivochnikov, V. N. Snytnikov, “Catalytic Activity of Laser-Synthesized CrO<sub>x</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Nanocatalysts with Different Particle Sizes in Isobutane Dehydrogenation”, *Journal of Nanoparticle Research*, **24**:7 (2022). DOI: 10.1007/s11051-022-05532-1
48. V. Y. Kovalskii, S. P. Ruzankin, V. N. Snytnikov, I. L. Zilberberg, “Extremely Low Barrier Activation of Methane on Spin-Polarized Ferryl Ion [FeO]<sub>2</sub><sup>+</sup> at the Four-Membered Ring of Zeolite”, *Molecular Catalysis*, **528** (2022). DOI: 10.1016/j.mcat.2022.112468
49. E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Computer simulation of laser radiation influence at internal flows of reactive hydrocarbons”, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, **58** (2024), 526–536. DOI: 10.1134/S0040579524600876
50. V. N. Snytnikov, E. E. Peskova, *Waves and Vortices in Complex Media. Proceedings of the 16th International Conference – School of Young Scientists*, Moscow, 2025 (In Russ.).

*Submitted 21.07.2026; Revised 21.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## Решение задачи локализации несанкционированных источников загрязнения атмосферы средствами математического моделирования

И. А. Шнайдер<sup>1</sup>, А. С. Богомолов<sup>1,2</sup>, В. А. Кушников<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем точной механики и управления ФГБУН «Саратовский научный центр Российской академии наук» (г. Саратов, Российская Федерация)

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (г. Саратов, Российская Федерация)

**Аннотация.** Рассматривается задача локализации несанкционированных источников атмосферного загрязнения на промышленной территории в условиях воздействия переменных метеорологических факторов. Предложена математическая модель распространения загрязняющих веществ, в основе которой лежит уравнение переноса, расширяющая классическую модель гауссова шлейфа за счёт учёта процессов сухого осаждения и вымывания примесей атмосферными осадками, а также влияния относительной влажности на изменение массы частиц поллютанта. Задача идентификации источника сформулирована в виде некорректной обратной задачи и сведена к задаче минимизации функционала среднеквадратичного отклонения между расчётными и наблюдаемыми концентрациями. Для её решения применён метод роя частиц, обеспечивающий глобальную оптимизацию параметров источника при ограниченном объёме исходных данных. Разработан программный комплекс, реализующий предложенные модели и алгоритмы и обеспечивающий интеграцию с системами экологического мониторинга. Проведённые вычислительные эксперименты подтверждают повышение точности моделирования и эффективность предложенного подхода к локализации источников загрязнения по сравнению с существующими методами.

**Ключевые слова:** экологический мониторинг, поллютанты, распространение загрязнителя, локализация источника, задача локализации, имитационное моделирование

**Для цитирования:** Шнайдер И. А., Богомолов А. С., Кушников В. А. Решение задачи локализации несанкционированных источников загрязнения атмосферы средствами математического моделирования // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 3. С. 308–320. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.308-320

*Об авторах:*

**Шнайдер Илья Андреевич**, младший научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления ФГБУН «Саратовский научный центр Российской академии наук» (410028, Россия, г. Саратов, ул. Рабочая, 24), ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4739-0130>, e-mail: [es1098@mail.ru](mailto:es1098@mail.ru)



**Богомолов Алексей Сергеевич**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, заведующий лабораторией системного анализа и управления Института проблем точной механики и управления ФГБУН «Саратовский научный центр Российской академии наук» (410028, Россия, г. Саратов, ул. Рабочая, 24); профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, 83), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, e-mail: [alexbogomolov@ya.ru](mailto:alexbogomolov@ya.ru)

**Кушников Вадим Алексеевич**, доктор технических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией комплексных научных исследований Института проблем точной механики и управления ФГБУН «Саратовский научный центр Российской академии наук» (410028, Россия, г. Саратов, ул. Рабочая, 24); профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, 83), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, e-mail: [kushnikoff@yandex.ru](mailto:kushnikoff@yandex.ru)

*Original article*

MSC2020 86A22

## Solution of a problem of localizing unauthorized sources of atmospheric pollution by means of mathematical modelling

I. A. Shnaider<sup>1</sup>, A. S. Bogomolov<sup>1,2</sup>, V. A. Kushnikov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Precision Mechanics and Control, Saratov Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (Saratov, Russian Federation)*

<sup>2</sup>*Saratov State University (Saratov, Russian Federation)*

**Abstract.** The problem of localizing unauthorized sources of atmospheric pollution in an industrial area under varying meteorological conditions is considered. A mathematical model of pollutant dispersion is proposed, based on the solution of the transport equation. The model extends the classical Gaussian plume model by incorporating dry deposition and wet scavenging processes. Also the model takes into account the effect of relative humidity on the variation of pollutant particle mass. The source identification problem is formulated as an ill-posed inverse problem and reduced to minimization of a root-mean-square deviation between predicted and observed concentrations. The particle swarm optimization method is applied to solve this problem, providing global optimization of source parameters under limited input data. A software implementing the proposed models and algorithms is developed, providing integration with environmental monitoring systems. Computational experiments demonstrate improved accuracy of modelling and confirm the effectiveness of the proposed approach for source localization in comparison with existing methods.

**Keywords:** environmental monitoring, pollutants, a pollutant dispersion, Gaussian plume, source localization, simulation

**For citation:** I. A. Shnaider, A. S. Bogomolov, V. A. Kushnikov. Solution of a problem of localizing unauthorized sources of atmospheric pollution by means of mathematical modelling. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:3(2026), 308–320. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202603.308-320

И. А. Шнайдер, А. С. Богомолов, В. А. Кушников. Решение задачи локализации...

*About the authors:*

**Il'ya A. Shnaider**, Junior Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary Research Institution Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences (24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4739-0130>, e-mail: [es1098@mail.ru](mailto:es1098@mail.ru)

**Aleksey S. Bogomolov**, D.Sc. (Engineering), Leading Researcher, Head of the Laboratory of System Analysis and Management, Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary Research Institution Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences (24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia); Professor, Saratov State University (83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, e-mail: [alexbogomolov@ya.ru](mailto:alexbogomolov@ya.ru)

**Vadim A. Kushnikov**, D.Sc. (Engineering), Chief Researcher, Head of the Laboratory for Integrated Scientific Research, Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary Research Institution Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences (24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia); Professor, Saratov State University (83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, e-mail: [kushnikoff@yandex.ru](mailto:kushnikoff@yandex.ru)

## 1. Введение

В современных условиях распространения промышленных производств и изменения климата растет актуальность вопросов загрязнения атмосферного воздуха. Особую опасность для экологии представляют новые неучтённые или нелегальные источники выбросов, которые затрудняют выполнение государственных нормативов по охране атмосферного воздуха и подрывают эффективность существующей системы экологического контроля [1]. Такие источники могут быть оперативно выявлены на основе анализа данных о превышении норм загрязнения и метеоданных. Задача их локализации может рассматриваться как обратная задача математического моделирования распространения загрязнителя.

На формирование и пространственное распределение шлейфов загрязнителей существенное влияние оказывают метеорологические факторы, в частности атмосферные осадки, которые способствуют процессам вымывания и осаждения примесей. Исследования показывают, что пренебрежение влиянием осадков может приводить к недооценке уровня загрязнения, особенно в районах с повышенной влажностью и частыми дождями, что, в свою очередь, усложняет оценку реального состояния атмосферного воздуха [2]. Традиционные модели рассеивания не всегда позволяют корректно определить координаты источников выбросов, особенно при сочетании множества факторов – рельефа местности, скорости и направления ветра, температуры и осадков.

Анализ нормативных документов, включая Приказ Минприроды России от 06.06.2017 № 273, показывает, что существующие методики ориентированы преимущественно на оценку воздействия стационарных источников в процессе проектирования промышленных объектов [3]. При этом влияние переменных метеорологических факторов, в том числе осадков, учитывается лишь в ограниченном объеме. В настоящее время отсутствуют систематические рекомендации, касающиеся локализации источников выбросов в реальном времени с учетом сухого осаждения и влияния жидких осадков.

В связи с этим актуальной научной задачей является разработка математических моделей и комплексов программ для моделирования распространения загрязнителя, учитывающих влияние на концентрацию сухого осаждения и жидких осадков, и решения на этой основе задач локализации новых источников загрязнения.

В области моделирования процессов рассеивания примесей при различных метеорологических условиях следует отметить труды А.В. Семакиной, в которых предложены математические подходы к описанию динамики загрязнителей воздуха [4]. В работах В.И. Рязанова разработаны методологические основы численного моделирования атмосферных загрязнений с использованием дистанционных измерений и обратных задач для оценки качества воздуха [5]. Численные методы решения обратных задач, позволяющие определять параметры источников по данным наблюдений концентраций, развиваются в работах Е.А. Панасенко и А.В. Старченко [6], А.А. Чубатова и В.Н. Кармазина [7].

Несмотря на значительные достижения в области моделирования атмосферного переноса загрязняющих веществ [8], вопросы учёта влияния сухого осаждения и осадков при решении задач локализации источников выбросов остаются недостаточно исследованными [9] в части влияния состава частиц, взаимодействия сухого и влажного осаждения, а также точности коэффициентов осаждения и их валидации экспериментальными данными. Актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью автоматизации обработки больших объёмов данных, учёта погодных факторов в моделировании и обеспечения точного и оперативного определения параметров источников выбросов.

Целью исследования является разработка математической модели, численного метода и комплекса программ для решения задачи локализации источников атмосферного загрязнения на промышленной территории с учётом процессов сухого осаждения и вымывания загрязнителей осадками.

## 2. Постановка задачи локализации несанкционированных источников атмосферного загрязнения

Общая задача локализации источников повышенного атмосферного выброса может быть формально представлена следующим образом. Пусть территория  $S$  подвергается загрязнению поллютантом  $P$  вследствие функционирования на территории  $S'$  множества источников загрязнения  $\Omega$ . Множество  $\Omega$  включает подмножество  $\Omega'$  источников загрязнения с известными координатами и задекларированными интенсивностями выброса. Также на территории  $S$  расположена система датчиков  $\Sigma(t)$  в известных контрольных точках. Требуется по наблюдениям метеоданных  $X(t)$  и концентрации поллютанта  $Y(t)$  на датчиках  $\Sigma(t)$  в течение интервала времени  $[t_n, t_k]$  определить:

- координаты источников из  $\Omega'$ , которые на достаточно длительных интервалах из  $[t_n, t_k]$  превышали задекларированную интенсивность выбросов поллютанта  $P$ , а также интенсивность и длительность выбросов;
- координаты источников из  $\Omega \setminus \Omega'$  (то есть новых, незарегистрированных источников), которые на достаточно длительных интервалах из  $[t_n, t_k]$  осуществляли выбросы поллютанта  $P$ , а также интенсивность этих выбросов.

В общем случае можно утверждать, что данная задача поставлена некорректно. Поэтому варианты её решения могут быть частью итерационного процесса, сопровождающегося решением вспомогательных задач. Среди таких вспомогательных задач рассмотрим следующий частный случай. Предположим, что выбросы источников из множества  $\Omega'$  не превышают задекларированных значений, при которых суммарное загрязнение от источников из этого множества не превышает некоторого известного значения,

наблюдаемого ранее. При этом на некоторых датчиках системы  $\Sigma(t)$  наблюдается достаточно большое превышение данного значения. Требуется найти источник из  $\Omega \setminus \Omega'$ , выбросы которого повлекли это превышение. При этом при достаточно частом повторении циклов мониторинга и сравнительно небольших территориях можем предполагать, что источник единичный. Содержательно такая задача состоит в определении участков исследуемой территории, на которых может находиться новый незарегистрированный источник загрязнения [10].

Формально задача поиска источника может быть сведена к задаче оптимизации целевой функции, представляющей среднеквадратичное отклонение предсказанной концентрации от измеренной на датчиках:

$$J(\theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [C_{\text{pred}}(x_i, y_i, z_i, Q, H) - C_{\text{obs}}(x_i, y_i, z_i)]^2} \longrightarrow \min_{\theta \in \Theta}.$$

Здесь

- $\theta = (x, y, z, Q, H)$  – вектор параметров источника, включающий координаты  $(x, y, z)$ , интенсивность выброса  $Q$  и высоту источника  $H$ ;
- $\Theta \subset \mathbb{R}^5$  – множество допустимых значений параметров источника:

$$\Theta = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}] \times [Q_{\min}, Q_{\max}] \times [H_{\min}, H_{\max}];$$

- $C_{\text{pred}}$  – концентрация, рассчитанная продукционной моделью шлейфа;
- $C_{\text{obs}}$  – наблюдаемая концентрация на  $i$ -м датчике;
- $N$  – количество контрольных точек наблюдений.

### 3. Продукционная модель распространения загрязнителя.

В основу разработанной продукционной модели была положена модель Д. Л. Эрмака, получаемая путем решения уравнения переноса (адвекции-диффузии) при граничных условиях Робина и Неймана при помощи преобразования Фурье. В модель введен коэффициент  $K_{RH}$  изменения концентрации поллютанта под действием осадков. Аэрозольные частицы в атмосфере никогда не существуют в изолированном виде, они находятся в динамическом взаимодействии с окружающим водяным паром. При этом ключевыми процессами, определяющими равновесное содержание воды в частице, являются эффект Рауля – растворённое вещество понижает давление насыщенного пара воды над каплей, что облегчает конденсацию молекул воды на частице и способствует её росту, и эффект Кельвина (кривизны) – чем меньше радиус капли, тем выше давление насыщенного пара над её поверхностью. Комбинация этих эффектов приводит к понижению давления за счёт растворённых веществ. Повышение давления из-за кривизны описывается уравнением Кёлера.

Влажность воздуха (RH) определяет, в какой мере эти процессы будут развиваться. При низкой влажности частицы остаются сухими, но по мере увеличения RH они начинают набирать воду. Вблизи насыщения ( $RH \rightarrow 1$ ) наблюдается резкий рост количества конденсированной воды и переход частиц в капельное состояние. Это изменение массы можно описать коэффициентом

$$K_{RH} = \frac{m_s}{m_p},$$

который показывает, во сколько раз увеличилась масса частицы (а вместе с ней и эффективная концентрация загрязнителя) при данной влажности:

$$K_{RH} = 1 + \frac{RH \cdot \vartheta \cdot M_w}{M_p(1 - RH)}, \quad (3.1)$$

где  $RH$  – относительная влажность воздуха,  $\vartheta$  – гигроскопический коэффициент связываемости поллютанта с водой,  $M_w$  – молярная масса воды,  $M_p$  – молярная масса загрязнителя. Значение  $K_{RH}$  показывает увеличение массы частицы загрязнителя за счет соединения с молекулами воды в процессе конденсации под воздействием атмосферной влажности, вызывающее пропорциональный рост концентрации загрязнителя в атмосфере.

Разработанная математическая модель примет вид:

$$C(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) e_1 \left[ e_2 - \sqrt{2\pi} \frac{W_0 \sigma_z}{K_z} e_3 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{W_0}{\sqrt{2K_z}} + \frac{z+H}{\sqrt{2\sigma_z}}\right) \right], & \text{без осадков} \\ \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) e_1 \left[ e_2 - \sqrt{2\pi} \frac{W_0 \sigma_z}{K_z} e_3 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{W_0}{\sqrt{2K_z}} + \frac{z+H}{\sqrt{2\sigma_z}}\right) \right] \cdot K_{RH}, & \text{в случае осадков,} \end{cases} \quad (3.2)$$

где:  $C(x, y, z)$  – концентрация загрязнителя в точке  $(x, y, z)$ ,  $\text{кг/м}^3$ ;  $x, y, z$  – пространственные координаты, м;  $H$  – высота источника выброса, м;  $Q$  – скорость выброса загрязнителя,  $\text{кг/с}$ ;  $u$  – скорость ветра,  $\text{м/с}$ ;  $\sigma_y, \sigma_z$  – параметры гауссовского распределения по направлениям  $y$  и  $z$ , м;  $K_z = \sigma_z^2 u / 2x$  – коэффициент турбулентной диффузии;  $W_{\text{set}} = \rho g d^2 / 18\mu$  – скорость осаждения сферических частиц по закону Стокса, где  $\rho$  – плотность частицы загрязнителя,  $d$  – диаметр частицы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\mu$  – вязкость воздуха;  $W_0 = W_{\text{dep}} - \frac{1}{2} W_{\text{set}}$ , где  $W_{\text{dep}} > 0$  – скорость сухого осаждения;  $\rho$  – плотность частиц,  $\text{кг/м}^3$ ;  $d$  – диаметр частицы, м;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ ;  $W_{\text{set}}$  – скорость оседания частиц,  $\text{м/с}$ ;  $W_{\text{dep}}$  – скорость сухого осаждения (экспериментальная),  $\text{м/с}$ ;  $W_0$  – составной параметр, учитывающий осаждение  $\text{м/с}$ ;  $e_1 = \exp\left(-\frac{W_{\text{set}}(z-H)}{2K_z} - \frac{W_{\text{set}}^2 \sigma_z^2}{8K_z^2}\right)$ ;  $e_2 = \exp\left(-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right)$ ;  $e_3 = \exp\left(\frac{W_0(z+H)}{K_z} + \frac{W_0^2 \sigma_z^2}{2K_z^2}\right)$ ;  $\operatorname{erfc}$  – дополнительная функция коррекции ошибок [11].

#### 4. Алгоритм решения задачи локализации источников атмосферного загрязнения

Алгоритм решения задачи включает в себя предварительную обработку мониторинговых данных, прямое моделирование с использованием разработанной продукционной модели и решение обратной задачи расчета распространения загрязнителя с помощью метода роя частиц (МРЧ).

Алгоритм состоит из следующих последовательных этапов:

- анализ и очистка данных измерений и метеорологических наблюдений;
- прямое моделирование вкладов известных (задекларированных) источников на выбранных временных интервалах;

- вычисление поля отклонений наблюдений от вкладов известных источников и формирование задачи поиска неизвестных источников;
- решение полученной задачи оптимизации параметров источника(ов) (координаты, интенсивность, длительность) посредством МРЧ;
- интерпретация и визуализация результатов.

Предполагается, что источник выброса находится в точке максимальной концентрации загрязнителя. Задачу локализации источников атмосферного загрязнения сведем к поиску параметров  $\theta$  (координат и характеристик источника, либо набора таких источников), при минимизирующих следующую целевую функцию:

$$J(\theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [C_{\text{прог}, \theta}(x_i, y_i, z_i) - C_{\text{набл}}(x_i, y_i, z_i)]^2}, \quad (4.3)$$

где  $C_{\text{набл}}$  – наблюдаемая на датчике концентрация,  $C_{\text{прог}, \theta}$  – прогнозируемая моделью концентрация.

Функция  $J(\theta)$  минимизируется с помощью МРЧ, каждой частице роя соответствуют точки пространства  $(x_s, y_s, z_s)$  и параметры выброса  $Q$  и  $\tau$ .  $Q \in [0, Q_{\text{max}}]$ ,  $\tau \in [\tau_{\text{min}}, \tau_{\text{max}}]$ .

## 5. Численное решение задачи локализации

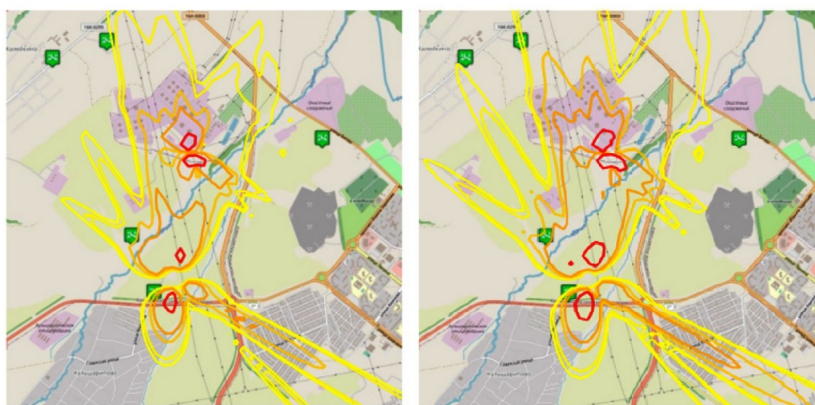
Для автоматизированного поиска возможных решений задачи локализации источников атмосферного выброса на основе метода роя частиц и разработанной математической модели расчета распространения атмосферного загрязнителя с учетом влияния жидких осадков была разработана программа на высокоуровневом языке Python, позволяющая определять координаты потенциального источника повышенного атмосферного выброса на промышленной территории. Программный комплекс обеспечивает интеграцию с БД экомониторинга MS SQL Server.

Реализуются два основных режима работы:

1. Моделирование распространения загрязнителей от известных источников с учётом метеопараметров и характеристик выброса.
2. Решение задачи локализации неизвестных источников атмосферного загрязнения на основе данных системы датчиков и API сервиса метеонаблюдений, разработанной производственной модели шлейфа и МРЧ.

Для проверки точности разработанной модели и подхода рассмотрим модельный пример. Исследуется область промышленной территории размером  $5 \times 5$  квадратных километров с преимущественно гладким рельефом. На участке расположены стационарные пункты экомониторинга  $R_1, \dots, R_5$ , осуществляющие сбор концентраций загрязнителей и метеоданных. Также на участке расположены инвентаризированные источники выбросов – промышленные предприятия с задекларированными характеристиками: местоположение, высота над уровнем суши, количество часов работы и интенсивность выбросов в атмосферу загрязняющих веществ. В качестве исходных данных используются измерения из базы экомониторинга: концентрации сероводорода в сети сенсоров,

данные о скорости, направлении ветра, интенсивности осадков. На 24-х часовом периоде были проведены 72 итерации для 20-минутных интервалов времени. Среднее время моделирования периода составило 20 секунд. Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор AMD Ryzen 7 5700X (8 ядер, 16 потоков, базовая тактовая частота 3.4 ГГц), 32 ГБ оперативной памяти DDR4, операционная система Windows 10 64-bit. Вычислено среднее значение концентрации загрязнителя за день, построены карты распределения загрязнения и тепловые карты концентраций. На рис. 5.1 представлены результаты моделирования распространения сероводорода, слева – с использованием модели без учета влияния осадков, справа – с использованием разработанной производственной модели. Согласно метеорологическим наблюдениям, в течение дня наблюдались осадки в виде дождя, состояние атмосферы характеризовалось преимущественно высокой неустойчивостью (классы А–В).



**Рис. 5.1.** Моделирование распространения сероводорода на исследуемом участке, слева – без учёта влияния осадков, справа – с учётом влияния осадков на шлейф загрязнителя

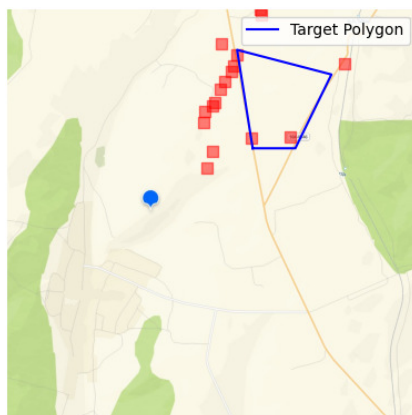
**Fig. 5.1.** Modeling the spread of hydrogen sulfide in the study area: left – without the influence of precipitation; right – with the influence of precipitation on the pollutant plume

Учёт вымывания загрязнителя позволяет уменьшить завышенные значения концентраций в областях, удалённых от источника. Как видно на рис. 5.1, вблизи источника наблюдается большее количество зон с повышенными концентрациями загрязнителя, что подтверждается данными экологического мониторинга исследуемой территории.

Значения ошибок прогнозирования составили  $MAE = 0.000086$  и  $MAPE = 41.04\%$ , в то время как при реализации модели Д. Эрмака  $MAE = 0.000135$  и  $MAPE = 48.51\%$ .

Для оценки точности решения задачи локализации рассмотрен второй модельный пример на участке промышленной территории  $5 \times 5$  квадратных км с единственным источником выбросов сероводорода – предприятием по переработке природного газа и одним датчиком системы экомониторинга. Для выбора параметров МРЧ, обеспечивающих лучшую точность при меньшем времени выполнения проведена серия экспериментов на фиксированном временном интервале. Получены значения:  $w = 0.45$ ,  $c_1 = 1.8$ ,  $c_2 = 1.6$ .

Для проведения эксперимента по поиску источника сероводорода использовались данные наблюдений со станции экомониторинга с использованием полученных параметров. Результаты представлены на рис. 5.2. Сплошной линией показаны границы предприятия-источника, квадратами – участки, предположительно содержащие источник, полукругом – местоположение сенсора.



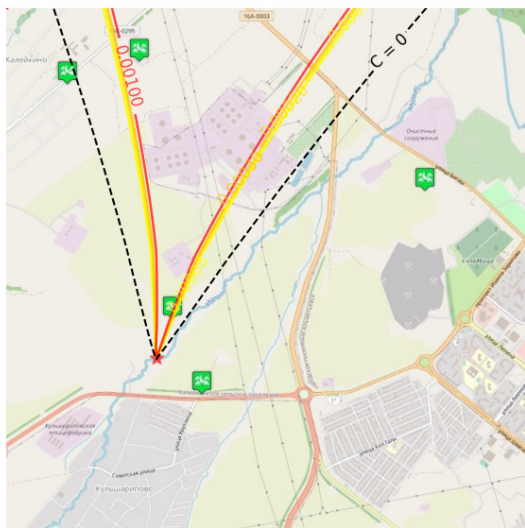
**Рис. 5.2.** Картохема результатов поиска источника загрязнений на участке № 2

**Fig. 5.2.** Map of the results of the search for the source of pollution at plot № 2

Средняя абсолютная ошибка программного комплекса составила  $MAE = 137.78$  м при использовании одного сенсора. Для сравнения, в работе [12] при применении гибридного метода роя частиц (ГМРЧ) и модели Гауссова шлейфа средняя ошибка определения координат источников при использовании двух сенсоров достигала более 1 км, снижаясь лишь при существенном увеличении числа сенсоров и итераций алгоритма. Полученное значение ошибки программного комплекса при одном сенсоре находится в диапазоне ошибок, характерных для современных инверсных моделей, и демонстрирует достаточно высокую точность предлагаемого метода при минимальном объёме исходных данных.

На первом участке  $5 \times 5$  квадратных км с несколькими предприятиями также был проведён полный эксперимент по локализации источников на временном интервале с зафиксированным превышением ПДК и успешно локализованным нелегальным источником загрязнения. Результаты моделирования представлены на рис. 5.3. Сплошными линиями обозначены уровни концентрации предполагаемого распространения искомого источника, пунктиром – линии нулевой концентрации, звездочкой – местоположение этого источника.

Сопоставление результатов с данными экомониторинга показало достаточно близкое расположение источника, рассчитанное с помощью программного комплекса, с локацией обнаруженного незарегистрированного источника зафиксированных ранее незарегистрированных выбросов сероводорода в виде разгерметизации газопровода, что подтверждает практическую значимость предложенного подхода.



**Рис. 5.3.** Результаты моделирования поиска источника атмосферных выбросов и предполагаемого распространения сероводорода на картосхеме участка № 1  
**Fig. 5.3.** The results of modeling the search for the source of atmospheric emissions and the supposed spread of hydrogen sulfide on the map of site № 1.

## 6. Заключение

Статья посвящена решению актуальной научно-практической задачи локализации источников атмосферного загрязнения и расчёта распространения примесей с использованием методов численного моделирования и глобальной оптимизации. На основе анализа современных подходов к моделированию переноса поллютантов и идентификации источников сформулирована корректная постановка задачи.

Разработан метод численного решения задачи локализации источников атмосферного загрязнения, основанный на сведении задачи к некорректной обратной задаче и применении метода роя частиц, а также реализован программный комплекс для моделирования и определения параметров источника.

В результате вычислительных экспериментов определены рациональные значения параметров численного метода, обеспечивающие повышение точности расчётов при сокращении времени вычислений, что подтверждает эффективность предложенного подхода и его практическую значимость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Короткова Н. В., Семенова Н. В. Влияние метеорологических условий на загрязнение атмосферного воздуха в Саратове // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Науки о Земле*. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 168–173.

2. Puig Duran M., Darbra R. M. Innovations and insights in environmental monitoring and assessment in port areas. *Current Opinion in Environmental Sustainability*. 2024. Vol. 70. 101472.
3. Минприроды России. Приказ от 6 июня 2017 г. № 273 «Об утверждении методов расчетов рассеивания выбросов вредных (загрязняющих) веществ в атмосферном воздухе». М., 2017.
4. Семакина А. В. Основные математические подходы для оценки процессов рассеивания примеси в атмосферном воздухе // *Антропогенная трансформация природной среды*. 2024. Т. 10, № 2. С. 42–64.
5. Рязанов В. И. Моделирование распространения примесей в атмосфере на основе трехмерной модели с использованием данных ДМРЛ. *Идеи К. Э. Циолковского в инновациях науки и техники: материалы 51-х Научных чтений памяти К. Э. Циолковского*. Калуга: Эйдос, 2016. С. 292–294.
6. Панасенко Е. А. Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. и мех.* 2008. № 2(3). С. 47–55.
7. Чубатов А. А., Кармазин В. Н. Устойчивая оценка интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2009. Т. 1, № 4. С. 391–403.
8. Clifton O. E., Schwede D., Hogrefe C., Bash J. A single-point modeling approach for the intercomparison and evaluation of ozone dry deposition across chemical transport models (Activity 2 of AQMEII4). *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2023. Vol. 23. P. 9911–9961. DOI:10.5194/acp-23-9911-2023
9. Van Leuven S., De Meutter P., Camps J., Termonia P., Delcloo A. An optimisation method to improve modelling of wet deposition in atmospheric transport models: applied to FLEXPART v10.4. *Geoscientific Model Development*. 2023. Vol. 16. P. 5323–5338.
10. Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Лапковский Р. Ю., Кушников В. А., Шнайдер И. А. Задача локализации источников повышенного атмосферного выброса. *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2023): Труды Шестнадцатой международной конференции*. Москва: ИПУ РАН, 2023. С. 507–511.
11. Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Лапковский Р. Ю., Кушников В. А., Шнайдер И. А. Продукционная модель расчета распространения атмосферного загрязнителя с учетом влияния атмосферных осадков. *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2024): Труды Семнадцатой международной конференции*. Москва: ИПУ РАН, 2024. С. 413–419.
12. Chaiwino W., Manorot P., Poochinapan K., Mouktonglang T. Identifying the Locations of Atmospheric Pollution Point Source by Using a Hybrid Particle Swarm Optimization. *Symmetry*. 2021. Vol. 13. 985. DOI:10.3390/sym13060985

Поступила 27.04.2026; доработана после рецензирования 10.08.2026;  
принята к публикации 25.08.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. N. V. Korotkova, N. V. Semenova, "Influence of meteorological conditions on atmospheric air pollution in Saratov", *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Nauki o Zemle*, **19:3** (2019), 168–173 (In Russ.).
2. M. Puig Duran, R. M. Darbra, "Innovations and insights in environmental monitoring and assessment in port areas", *Current Opinion in Environmental Sustainability*, **70** (2024), 101472.
3. Ministry of Natural Resources and Environment of the Russian Federation, *Order of June 6, 2017 No. 273 "On approval of methods for calculating the dispersion of emissions of harmful (polluting) substances into the atmospheric air"*, Moscow, 2017 (In Russ.).
4. A. V. Semakina, "Basic mathematical approaches for assessing the processes of impurity dispersion in the atmospheric air", *Antropogennaya transformatsiya prirodnoy sredy*, **10:2** (2024), 42–64 (In Russ.).
5. V. I. Ryazanov, "Simulation of the spread of impurities in the atmosphere based on a three-dimensional model using DMRL data", *Idey K. E. Tsiolkovskogo v innovatsiyakh nauki i tekhniki: materialy 51-kh Nauchnykh chteniy pamyati K. E. Tsiolkovskogo*, 2016, 292–294 (In Russ.).
6. E. A. Panasenکو, "Numerical solution of some inverse problems with different types of atmospheric pollution sources", *Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Mat. i mekh.*, 2008, no. 2(3), 47–55 (In Russ.).
7. A. A. Chubátov, V. N. Karmazin, "Stable estimation of the intensity of an atmospheric pollution source based on the method of sequential functional approximation", *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, **1:4** (2009), 391–403 (In Russ.).
8. O. E. Clifton, D. Schwede, C. Hogrefe, J. Bash, "A single-point modeling approach for the intercomparison and evaluation of ozone dry deposition across chemical transport models (Activity 2 of AQMEII4)", *Atmospheric Chemistry and Physics*, **23** (2023), 9911–9961. DOI: 10.5194/acp-23-9911-2023
9. S. Van Leuven, P. De Meutter, J. Camps, P. Termonia, A. Delcloo, "An optimisation method to improve modelling of wet deposition in atmospheric transport models: applied to FLEXPART v10.4", *Geoscientific Model Development*, **16** (2023), 5323–5338.
10. A. F. Rezhnikov, A. S. Bogomolov, R. Yu. Lapkovsky, V. A. Kushnikov, I. A. Shnayder, "The problem of localization of sources of increased atmospheric emissions", *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh sistem (MLSD'2023): Trudy Shestnadsatoj mezhdunarodnoj konferentsii*, 2023, 507–511 (In Russ.).

11. A. F. Rezchikov, A. S. Bogomolov, R. Yu. Lapkovsky, V. A. Kushnikov, I. A. Shnayder, “Production model for calculating the spread of an atmospheric pollutant taking into account the influence of atmospheric precipitation”, *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh sistem (MLSD'2024): Trudy Semnadsatoj mezhdunarodnoj konferentsii*, 2024, 413–419 (In Russ.).
12. W. Chaiwino, P. Manorot, K. Pochinapan, T. Mouktonglang, “Identifying the Locations of Atmospheric Pollution Point Source by Using a Hybrid Particle Swarm Optimization”, *Symmetry*, **13** (2021), 985. DOI: 10.3390/sym13060985

*Submitted 27.04.2026; Revised 10.08.2026; Accepted 25.08.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете symbib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать BGN/PCGN упрощенная без диакритических знаков.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Oliger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

The volume of annotations in Russian and English should be on average from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

**Examples of bibliographic references for the section References.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizatsii-kvadratichnogo-funktsionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

*Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.*

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О. }.

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Название таблицы на английском языке}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца на русском языке & Название второго столбца на русском языке \\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

**Оформление рисунков.** Все вставляемые рисунки в текст статьи должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript). В редакцию журнала также необходимо предоставить те же рисунки в формате JPG с разрешением 300 точек на дюйм (dpi).

Для вставки рисунков в текст статьи можно пользоваться следующими командами:

а) вставка одного рисунка

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Название рисунка на русском языке:}
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Название рисунка на англ. языке}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}
```

б) вставка двух рисунков в одну строку

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
}
```

---



---

```

\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a$}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b$}
\end{minipage}
\caption{Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на русском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на русском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на русском языке, \\
\medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на английском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на английском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на английском языке }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

**\RBibitem{метка для ссылки на источник}**,

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

**\Bibitem{метка для ссылки на источник}**.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmbib.sty**

### Статьи в журналах на русском языке

**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневолжского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

## The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** *To format article headings in English, use the following commands:* `\headerFirstEn` *u* `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment `equation`. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the `equation*` environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the `table` environment with the nested `tabular` environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name in English}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Table name in Russian}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
```

```

First column name in English & Second column name in English \\
First column name in Russian & Second column name in Russian \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Title of the drawing in English: \\
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Title of the drawing in Russian}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

b) inserting two pictures into one line

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a$}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b$}
\end{minipage}
\caption{Common name of two drawings a and b in Russian: \\
$a$ the title of the picture a in English, b the title of the picture b in English,
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Common name of two drawings a and b in Russian: \\

```

```

$a)$ the title of the drawing a in Russian, $b)$ the title of the drawing b in Russian }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

### Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

#### Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

#### Journal articles in English:

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

#### Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

```

---



---

```
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-
kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-
ciklicheskoj-redukcii
```

#### Articles in collections in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

#### Books (monographs and collections) in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

#### Conference proceedings in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

## Алфавитный указатель авторов

|                   |     |                   |     |
|-------------------|-----|-------------------|-----|
| Абрашкин П. М.    | 240 | Мосяненко Д. С.   | 258 |
| Богомолов А. С.   | 308 | Пескова Е. Е.     | 280 |
| Вельмисов П. А.   | 240 | Повещенко Ю. А.   | 225 |
| Губайдуллин И. М. | 225 | Подрыга В. О.     | 225 |
| Иноземцев А. И.   | 179 | Потоловская Е. А. | 212 |
| Кушников В. А.    | 308 | Снытников В. Н.   | 280 |
| Леган М. А.       | 258 | Собина А. М.      | 193 |
| Литаврин А. В.    | 212 | Шнайдер И. А.     | 308 |
| Мизхер У. Д.      | 240 | Язовцева О. С.    | 225 |
| Мизхер М. Д.      | 240 | Янгляев И. Р.     | 225 |

## Author Index

|                   |     |                     |     |
|-------------------|-----|---------------------|-----|
| P. M. Abrashkin   | 240 | D. S. Mosienko      | 258 |
| A. S. Bogomolov   | 308 | E. E. Peskova       | 280 |
| P. A. Velmisov    | 240 | Yu. A. Poveshchenko | 225 |
| I. M. Gubaydullin | 225 | V. O. Podryga       | 225 |
| A. I. Inozemtsev  | 179 | E. A. Potolovskaya  | 212 |
| V. A. Kushnikov   | 308 | V. N. Snytnikov     | 280 |
| M. A. Legan       | 258 | A. M. Sobina        | 193 |
| A. V. Litavrin    | 212 | I. A. Shnaider      | 308 |
| U. J. Mizher      | 240 | O. S. Yazovtseva    | 225 |
| M. J. Mezher      | 240 | I. R. Yanglyayev    | 225 |

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Язовцева О. С.*

Подписано в печать 18.09.2026. Дата выхода в свет 30.09.2026. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 15,4 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 548.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova*

Translation: *A. O. Syromyasov*

Desktop publishing: *O. S. Yazovtseva*

Signed to print 18.09.2026. Date of publishing 30.09.2026. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 15,4

Number of copies 100. Order no. 548.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University

Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,

Republic of Mordovia, Russia







