

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  28  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  2

2026



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 28, № 2. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 28, NO. 2. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.  
Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2026

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Пескова Елизавета Евгеньевна** — заместитель главного редактора, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП «РЯЦ ВНИИЭФ» (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой цифрового моделирования ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мехатроники и теоретической механики ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — профессор, доктор физико-математических наук,

профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Леонтьев Виктор Леонтьевич** — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий международной лабораторией динамических систем и приложений ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, руководитель Высшей школы развития научно-образовательного потенциала ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Институт математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь направления «Математическая робототехника и искусственный интеллект», Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

**Язовцева Ольга Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Elizaveta E. Peskova** — Deputy Editor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department «Higher Mathematics», Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — the Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Victor L. Leontiev** — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Scientific Supervisor of the Institute of Computer Science, Mathematics and Robotics, Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Applied Mathematics and Informatics», Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of the Higher School for the Development of Scientific and Educational Potential of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nikolai A. Sidorov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University (Irkutsk, Russia)

**Nikolay V. Starostin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of department, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Lev A. Sukharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University, President of the Middle Volga Mathematical Society (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Department of Mathematical Robotics and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

**Olga S. Yazovtseva** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

- Д. М. Одинабеков**  
Нетеровость и вычисление индекса двумерных сингулярных интегральных операторов в ограниченной области . . . . . 11
- А. Э. Рассадин**  
Об интегрируемости динамических систем в пространстве двусторонних последовательностей . . . . . 28
- М. В. Сотникова, А. С. Томилова, Т. А. Лепихин**  
Синтез оптимальных линейных регуляторов с ограничением на область расположения корней . . . . . 47
- 

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

- А. В. Рукавишников**  
Численный анализ уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области с входящим углом . . . . . 62
- Е. А. Чекменёва, Т. С. Хачкова, В. В. Лисица**  
Предобуславливатель на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона . . . . . 83
- Р. В. Жалнин, А. Д. Мулюгин, В. В. Вдовин**  
Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона-Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина . . . . . 99
- 

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

- И. В. Бодрова, А. Б. Дюбуа, С. И. Кучерявый, А. С. Сафошкин**  
Моделирование зонной структуры одиночного гетероперехода . . . . . 115
- Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских**  
Численное моделирование напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава на основе адаптивной конечно-элементной триангуляции . . . . . 130
- 

- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 145
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 149
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 153
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 159
- 
- Алфавитный указатель авторов . . . . . 163

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

<b>J. M. Odinabekov</b>	
Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral operators in a bounded simply connected domain . . . . .	11
<b>A. E. Rassadin</b>	
On the Integrability of Dynamical Systems in the Space of Double-Sided Sequences . . . . .	28
<b>M. V. Sotnikova, A. S. Tomilova, T. A. Lepikhin</b>	
Synthesis of optimal linear controllers with constraints on the root domain . .	47

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

<b>A. V. Rukavishnikov</b>	
Numerical analysis of the Navier-Stokes equations in skew-symmetric form in a domain with an incoming corner . . . . .	62
<b>E. A. Chekmeneva, T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa</b>	
Machine learning-based preconditioner to solve Poisson equation . . . . .	83
<b>R. V. Zhalnin, A. D. Mulyugin, V. V. Vdovin</b>	
A Comparison of MINRES and IDR(s) Solvers for JFNK-Based Implicit Discontinuous Galerkin Methods in Gas Dynamics . . . . .	99

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

<b>I. V. Bodrova, A. B. Dubois, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin</b>	
Modeling of the band structure of a single heterojunction . . . . .	115
<b>N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh</b>	
Numerical simulation of the stress-strain state of the temporomandibular joint based on adaptive finite-element triangulation . . . . .	130

---

The rules of article design (in Russian) . . . . .	145
The rules of article design (in English) . . . . .	149
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . .	153
The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . .	159
Author Index . . . . .	163

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.968

## Нетеровость и вычисление индекса двумерных сингулярных интегральных операторов в ограниченной области

Д. М. Одинабеков

*Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
в городе Душанбе*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию двумерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами, заданных на ограниченных областях комплексной плоскости и имеющих важное значение для решения широкого круга задач математической физики, теории краевых задач и функционального анализа. Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки эффективных методов анализа свойств таких операторов, включая вопросы их разрешимости и получения формул для вычисления их индексов. Основы общей теории многомерных сингулярных интегральных операторов на неограниченных областях были заложены в работах С.Г. Михлина. Для двумерных операторов с ненулевым символом существенную роль играет аппарат теории Фредгольма. В случае, когда сингулярные интегральные операторы рассматриваются на ограниченных областях, разрешимость возникающих уравнений существенно зависит от геометрических и аналитических характеристик границы области. Поэтому в данной работе исследуются двумерные сингулярные интегральные операторы, заданные на ограниченных областях. Для изучения рассматриваемого класса операторов используется схема исследования, предложенная Р. Дудучавой, позволяющая свести исходную задачу к анализу соответствующей краевой задачи Римана. При исследовании полученной задачи Римана применяется метод Б. Боярского, основанный на построении специальной матричной функции и разбиении множества полиномиальных матриц на гомотопические классы. Такой подход обеспечивает возможность детального изучения структуры операторов и их спектральных характеристик. В работе для рассматриваемого класса операторов в пространствах Лебега установлены эффективные критерии нетеровости, выраженные через явные условия на коэффициенты операторов. Кроме того, получены формулы для вычисления индексов, что позволяет определять основные фредгольмовы свойства операторов и исследовать условия существования и единственности решений соответствующих интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нетеровость оператора

**Для цитирования:** Одинабеков Д. М. Нетеровость и вычисление индекса двумерных сингулярных интегральных операторов в ограниченной области // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 11–27. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27

© Д. М. Одинабеков



*Об авторе:*

**Одинабеков Джасур Музофирович**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Душанбе (734003, Таджикистан, Душанбе, ул. Бохтар, 35/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, [jasur\\_79@inbox.ru](mailto:jasur_79@inbox.ru)

*Original article*

MSC2020 57N10

## Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral operators in a bounded domain

**J. M. Odinabekov**

*Lomonosov Moscow State University in Dushanbe (Dushanbe, Tajikistan)*

**Abstract.** This work is devoted to study of two-dimensional singular integral operators with continuous coefficients defined on bounded domains of the complex plane. Such operators play an important role in solving a wide range of problems in mathematical physics, boundary value theory, and functional analysis. The relevance of the research is determined by need to develop effective methods for analyzing the properties of these operators, including questions of their solvability and the derivation of formulas for calculating their indices. The fundamentals of the general theory of multidimensional singular integral operators on unbounded domains were established in the works of S. G. Mikhlin. For two-dimensional operators with a non-zero symbol, the Fredholm theory plays a crucial role. When singular integral operators are considered on bounded domains, the solvability of the corresponding equations depends essentially on the geometric and analytic properties of the boundary. That's why this work investigates two-dimensional singular integral operators defined on bounded domains. To study this class of operators, the scheme proposed by R. Duduchava is used, which reduces the original problem to the analysis of an associated Riemann boundary value problem. The resulting Riemann problem is studied using the method developed by B. Bojarski. This approach is based on the construction of a special matrix function and on the splitting of set of polynomial matrices into homotopy classes. This approach makes it possible to investigate in detail the structure of the operators and their spectral characteristics. For the class of operators considered in Lebesgue spaces, effective criteria for their noethericity are established in the form of explicit conditions imposed on the operator coefficients. In addition, computational formulas for indices are obtained, making it possible to determine the main Fredholm properties of the operators and to investigate the conditions for existence and uniqueness of solutions to the corresponding integral equations.

**Keywords:** singular integral operator, operator index, operator symbol, Noethericity of operator

**For citation:** *J. M. Odinabekov.* Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral operators in a bounded domain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 11–27. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.11-27

*About the author:*

**Jasur M. Odinabekov**, Ph.D. (Phys. and Math.), Head of Department of Mathematics and Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University in Dushanbe (Tajikistan, Dushanbe, st. Bokhtar, 35/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, [jasur\\_79@inbox.ru](mailto:jasur_79@inbox.ru)

*J. M. Odinabekov. Noethericity and computation of the index of two-dimensional singular integral...*

## 1. Введение

Формирование теории сингулярных интегральных уравнений происходило параллельно становлению фредгольмовской теории и связано с классическими работами Д. Гильберта [1] и А. Пуанкаре [2]. Однако на последующих этапах развитие данного направления носило фрагментарный характер и лишь в 1920-е годы получило существенный импульс.

Существенный вклад в этот период был внесён Ф. Нетером [3] и Т. Карлеманом [4]. Ф. Нетером были исследованы сингулярные интегральные уравнения с одной независимой переменной, в которых интегрирование осуществляется по замкнутому контуру. Для таких уравнений установлены результаты, близкие по своей структуре к теоремам Фредгольма, однако обладающие рядом принципиальных отличий. В частности, показано, что в общем случае размерности пространств решений сопряжённых однородных уравнений могут не совпадать, а также предложен эффективный способ вычисления разности этих размерностей. Работы Т. Карлемана посвящены анализу уравнений с интегралом по незамкнутой кривой. Используя редукцию к краевой задаче Римана (или, в терминологии Н. И. Мухелишвили, к задаче Гильберта), Карлеман показал возможность сведения рассматриваемого сингулярного уравнения к эквивалентному уравнению Фредгольма. Несмотря на то, что им был рассмотрен частный случай, предложенный метод оказался применимым после соответствующих модификаций к существенно более широкому классу задач. В работах Ж. Жиро [5] представлено обобщение фредгольмовских результатов на системы сингулярных интегральных уравнений с одной независимой переменной, что послужило существенным вкладом в развитие тематики. Дальнейшее развитие связано с работами С. Г. Михлина, в которых была доказана теорема эквивалентности [6]. Начиная с 1940-х годов значительный вклад в теорию сингулярных интегральных уравнений внесли Н. И. Мухелишвили и его ученики, последовательно применявшие карлемановский подход сведения сингулярных уравнений к задачам Римана. Основные результаты этих исследований систематически изложены в монографии [7]. Сингулярные интегральные уравнения с несколькими независимыми переменными рассматривались в работах Ф. Трикоми [8], Ж. Жиро [9], С. Г. Михлина [10]. Ф. Трикоми получил формулу перестановки двойных сингулярных интегралов и исследовал отдельные классы уравнений, содержащих такие операторы. Ж. Жиро установил, что многомерный сингулярный интеграл сохраняет липшицев класс функций. С. Г. Михлиным доказано, что соответствующий сингулярный оператор является ограниченным в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций и допускает разложение в ряд по степеням унитарных операторов. Сингулярные интегральные уравнения и их комбинации естественным образом возникают в различных разделах математического анализа. В их число входят квазиконформные отображения, описанные Л. Альфорсом [12] и М. Шиффером [13], разделы теории дифференциальных уравнений с частными производными, приведенные в статьях Б. Боярского [14], А. Д. Джураева [15], В. Н. Монахова [16], обобщённые аналитические функции, теория которых представлена в работах И. Н. Векуа [11].

Отдельный интерес представляют простейшие двумерные сингулярные интегральные уравнения вида

$$(Af)(z) = a(z)f(z) + b(z)(S\bar{f})(z) = g(z), \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)ds\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (1.1)$$

Исследование уравнений вида (1.1) начато работой И. Н. Векуа [11]. В ней установ-

лено, что при условии  $|a(z)| > |b(z)|$ ,  $z \in \bar{D}$ , уравнение (1.1) однозначно разрешимо в  $L^p(D)$  при близких к двум значениях  $p$ . В доказательстве использован принцип сжатых отображений. Дальнейший анализ проведен А. Д. Джураевым [15]. Им показана достаточность условий  $|a(z)| \neq |b(z)|$ ,  $z \in \bar{D}$ ,  $a(t) \neq 0$  на границе  $\Gamma$  области  $D$  для нетеровости уравнения (1.1) в  $L^p(2)$ ,  $p > 2$  при гладкости коэффициентов. Индекс данного оператора при этом равен удвоенному индексу функции  $a(t)$ ,  $t \in \Gamma$ . Анализ выполнен с использованием редукции краевой задачи сопряжения для обобщённых аналитических функций. Среди первых работ, посвященных данным уравнениям также можно выделить статью Н.Н. Комяка [17]. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г. Джангибекова и К.Х. Бойматова [18–22]. Развитие этих исследований продолжено в рамках  $L_p$ -теории для  $1 < p < \infty$ , многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем, разработанной Р. В. Дудучавой [23]. Данный подход позволяет свести анализ нетеровых свойств уравнений к вопросам факторизации соответствующих рациональных матричных функций и определению их частных индексов в случае, если уравнения содержат различные комбинации сингулярных операторов.

Таким образом, актуальной является задача установления критерия нетеровости двумерных сингулярных уравнений как явных условий относительно их коэффициентов.

В настоящей работе исследуется двумерный сингулярный интегральный оператор с непрерывными коэффициентами, действующий в пространстве  $\mathbf{L}_{\beta-2/p}^p(\mathbf{D})$ . Ранее опубликованные работы были посвящены изучению соответствующих объектов в данном пространстве, где были установлены и подробно исследованы их основные свойства. Раздел 2 настоящей работы, носящий вспомогательный характер, содержит необходимые определения и формулировки основных результатов со ссылкой на исходную публикацию. Это сделано с целью обеспечения целостности изложения и исключения необходимости обращения читателя к дополнительным источникам. Следует отметить, что в работе [25] сумма в рассматриваемом операторе содержит слагаемые с индексами от 1 до 2, вследствие чего соответствующая задача Римана сводится к исследованию многочлена второй степени, что приводит лишь к двум возможным случаям. В отличие от этого, в настоящей работе анализируется принципиально иной оператор, в котором суммирование осуществляется по индексам от  $-3$  до  $3$ . Это приводит к задаче Римана, связанной с многочленом шестой степени, и, как следствие, к априорному возникновению семи различных случаев, каждый из которых требует самостоятельного рассмотрения. Лемма, доказанная в работе [25], сохраняет свою силу и для оператора, рассматриваемого в настоящем исследовании. Однако структура соответствующих характеристических многочленов существенно усложняется. В частности, если в работе [25] многочлены  $P(z, t)$  и  $Q(z, t)$  имели по два корня, то в настоящей работе число корней каждого из них равно шести. Вследствие этого полученные результаты принципиально отличаются от ранее установленных, несмотря на сохранение общей методологической схемы доказательства.

## 2. Понятийный аппарат и система обозначений

Введем обозначения.  $X$  – банахово пространство,  $A : X \rightarrow X$  – действующий в нём ограниченный линейный оператор. Пусть  $A^*$  – сопряжённый к  $A$  оператор, определённый на двойственном пространстве  $X^*$ . Рассмотрим множество всех элементов  $x \in X$ ,

для которых выполняется

$$Ax = 0. \quad (2.1)$$

Множество  $X$  будет ядром оператора  $A$ . Обозначим его  $\text{Ker}A$ . Заметим, что ядро является подпространством множества  $X$ . Количество линейно независимых решений уравнения (2.1), будем обозначать  $\alpha_A = \dim \text{Ker}A$ . Это является размерностью подпространства  $\text{Ker}A$ . Аналогично можно определить ядро сопряженного оператора  $A^*$ . Оно состоит из всех функционалов  $f \in X^*$ , удовлетворяющих

$$A^*f = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим подпространство функционалов  $f \in X^*$ , обладающих свойством (2.2) как  $\text{Ker}A^*$ , его размерность в этом случае равна  $\beta_A = \dim \text{Ker}A^*$ . Числа  $\alpha_A, \beta_A$  будем называть дефектными числами оператора  $A$ . Если хотя бы одно из дефектных чисел конечно, то индекс оператора  $A$  определяет их разность

$$\text{Ind}A = \alpha_A - \beta_A. \quad (2.3)$$

Очевидно, что  $\text{Ind}A$  конечен тогда и только тогда, когда обе размерности  $\alpha_A$  и  $\beta_A$  конечны.

Для того чтобы уравнение

$$Ax = y, \quad y \in X, \quad (2.4)$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член  $y$  был ортогонален к  $\text{Ker}A^*$  (иначе говоря, чтобы элемент  $y$  аннулировался любым функционалом  $u' \in \text{Ker}A^*$ ). Действительно, если уравнение (2.4) имеет решение  $x$ , а  $u \in \text{Ker}A^*$ , то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе. Вышеизложенное означает, что оператор  $A$  – нормально разрешим, если условие ортогональности (2.5) достаточно для разрешимости уравнения (2.4). Таким образом, можно записать следующие предложения.

**Предложение 2.1.** *Оператор  $A$  называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (2.4) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть  $y$  ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (2.2).*

**Предложение 2.2.** *Оператор  $A$  называется нетеровым в  $X$ , если он нормально разрешим и числа  $\alpha_A, \beta_A$  конечны.*

**Предложение 2.3.** *Индексом нетерова оператора  $A$  называется целое число  $\text{Ind}A = \alpha_A - \beta_A$ .*

**Предложение 2.4.** *Нетеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.*

Введем следующие обозначения:  $D$  – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова  $\Gamma$  и содержащая внутри точку  $z = 0$ .

**Предложение 2.5.** Множество комплекснозначных функций  $f(z)$ , измеримых на  $D$ , для которых функция  $F(z) = |z|^{\beta-2/p} f(z)$  суммируема в  $p$ -й степени, где  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \beta < 2$ , называется пространством  $L_{\beta-2/p}^p(\mathbf{D})$ .

Введем норму в  $L_{\beta-2/p}^p(D)$  следующим образом

$$\|f(z)\|_{L_{\beta-2/p}^p} = \left( \iint_D |F(z)|^p ds_z \right)^{1/p} = \|F\|_{L^p}.$$

Пространство  $L_{\beta-2/p}^p$  изометрично  $L^p$ , а потому является банаховым пространством.

Положим

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $z = re^{i\varphi}$ .

Будем говорить, что функция  $f(z)$  принадлежит пространству  $\tilde{L}_{\beta-2/p}^p$ , если функция

$$F(z) = |z|^{\beta-2/p} f(z) \in L^p.$$

Иными словами  $f(z) \in \tilde{L}_{\beta-2/p}^p$ , если  $f(z) \in L_{\beta-2/p}^p$  и норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$\|f\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k(r)|^p dr \right)^{1/p}.$$

Очевидно, что все аксиомы нормы выполняются.

**Лемма 2.1.** Пространство  $\tilde{L}_{\beta-2/p}^p$  является полным, т.е. банаховым.

**Доказательство.** Пусть  $|z| \leq 1$  и  $\{f^{(m)}(z)\}$  – фундаментальная последовательность функций из  $\tilde{L}_{\beta-2/p}^p$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что

$$\|f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

как только  $m, n > N$ . Покажем, что для любого фиксированного  $k$  последовательность  $\{f_k^{(m)}(r)\}$  сходится по норме  $L_{\beta-1/p}^p$  на отрезке  $[0,1]$ . В самом деле, для любого  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|f_k^{(m)}(r) - f_k^{(n)}(r)\|_{L_{\beta-1/p}^p(0,1)} &= \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} < \varepsilon \end{aligned}$$

как только  $m, n > N$ , т.е. последовательность  $\{f_k^{(m)}(r)\} \in L_{\beta-\frac{1}{p}}^p(0, 1)$  является фундаментальной последовательностью. Поскольку пространство  $L_{\beta-\frac{1}{p}}^p(0, 1)$  полно, то  $\{f_k^{(m)}(r)\} \rightarrow f_k(r)$  в  $L_{\beta-\frac{1}{p}}^p(0, 1)$ .

Покажем, что функция

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)e^{ik\varphi}, \quad z = re^{i\varphi},$$

принадлежит пространству  $\tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p$ . Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что как только  $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r)|^p dr \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon + A. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|_{L_{\beta-\frac{1}{p}}^p(0,1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon + A.$$

Следовательно  $f(z) \in \tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p$  при  $|z| \leq 1$ .

Докажем теперь, что последовательность  $\{f^{(m)}(z)\} \rightarrow f(z)$  по норме  $\tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p$ . Из

$$\|f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

следует, что для любого  $\varepsilon$  существует такой номер  $N$ , что

$$\sum_{k=-M}^M \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

как только  $n, m \geq N$ . Переходя в этом неравенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{k=-M}^M \left( \int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

при любых  $M, m \geq N$ . Переходя здесь к пределу при  $M \rightarrow \infty$  получим, что

$$\{f^{(m)}(z)\} \rightarrow f(z)$$

по норме  $\tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p$ .

Доказательство завершено.

### 3. Постановка задачи. Основные результаты

Пусть  $D$  – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная замкнутой кривой  $\Gamma$ .

В пространстве  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  ( $1 < p < \infty$ ,  $0 < \beta < 2$ ):

$$L^p_{\beta-2/p} = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p}\}$$

рассмотрим следующий двумерный сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum'_{n=-3}^3 (a_n(z)I + b_n(z)K) S_n, \quad (3.1)$$

штрих означает, что член при  $n = 0$  исключен из суммы;  $I$  – тождественный оператор,  $a_0(z), b_0(z), a_n(z), b_n(z), n \in -\overline{3}; \overline{3}$ , – непрерывные в  $\overline{D} = D \cup \Gamma$  комплекснозначные функции, а операторы  $K$  и  $S_n$  действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_n f)(z) = \frac{(-1)^{|n||n|}}{\pi} \iint_D \frac{e^{-2in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$\overline{S}_n = K S_n K, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}.$$

Здесь черта – операция комплексного сопряжения,  $m$  – некоторое целое число,  $ds_\zeta$  – элемент плоской меры Лебега, интегрирование понимается как интегрирование по Коши [10]. Отметим, что функции из вещественного пространства  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ , комплекснозначны, т.е. будем рассматривать его как линейное множество под полем вещественных чисел. В этом случае оператор  $A$  – обычный линейный ограниченный в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$  [24].

В работах [25–27] рассмотрены частные случаи оператора  $A$ . В этих статьях приведены необходимые и достаточные условия нетеровости в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ , а также формулы для вычисления индекса оператора.

Применив выкладки из работы [23], получим, что оператор  $A$  является нетеровым тогда и только тогда, когда нетеровым является оператор

$$U = \begin{pmatrix} a_0(z)I + \sum_{n=-3}^3 a_n(z)S_n & b_0(z) + \sum_{n=-3}^3 b_n(z)S_{-n}K \\ \overline{b_0(z)}I + \sum_{n=-3}^3 \overline{b_n(z)}S_n & \overline{a_0(z)}I + \sum_{n=-3}^3 \overline{a_n(z)}S_{-n}K \end{pmatrix}$$

в  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ , ( $1 < p < \infty$ ,  $0 < \beta < 2$ ).

**Лемма 3.1.** Нетеровость оператора  $A : L^p_{\beta-2/p}(D) \rightarrow L^p_{\beta-2/p}(D)$  эквивалентна нетеровости оператора  $U : L^{2,p}_{\beta-2/p}(D) \rightarrow L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$ .

**Доказательство.** Вектор  $F = (f, \overline{f})$  будет решением системы  $UF = Q$  из  $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$ , где  $Q = (g, \overline{g})$ , если функция  $f(z)$  является решением уравнения  $(Af)(z) = g(z)$  из  $L^p_{\beta-2/p}(D)$ . Справедливо и обратное: вектор  $(\overline{f_2}, \overline{f_1})$  будет решением системы  $UF = q$  из  $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$ , если вектор  $F = (f_1, f_2)$  – решение системы

$UF = q$  из  $L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$ . В этом случае решением системы  $UF = Q$  из  $L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$  является вектор  $\left(\frac{f_1 + \bar{f}_2}{2}, \frac{f_2 + \bar{f}_1}{2}\right)$ , из чего следует, что функция  $\frac{f_1 + \bar{f}_2}{2}$  будет решением уравнения (1.1) из  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ .

Предположим, что  $k$  – число линейно-независимых решений однородного уравнения  $(Af)(z) = 0$  над полем вещественных чисел, а  $l$  – число линейно независимых решений однородной системы  $UF = 0$  над полем комплексных чисел. Покажем, что  $k = l$ . Пусть  $\{f_i(z)\}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , – фундаментальная система решений однородного уравнения. В этом случае векторы  $F_i = (f_i, \bar{f}_i)$  ( $i = \overline{1, k}$ ) – линейно-независимые решения уравнения  $UF = 0$ . Очевидно, что если  $\sum_{i=1}^n c_i F_i = 0$ , то  $\sum_{i=1}^n c_i f_j = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n c_j \bar{f}_i = 0$  или  $\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$  и  $\sum_{i=1}^n \bar{c}_i f_i = 0$ . Из этого следует, что  $\sum_{i=1}^n (c_i + \bar{c}_i) f_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c}_i) f_i = 0$ , откуда,  $c_i + \bar{c}_i = 0$ ,  $c_i - \bar{c}_i = 0$ , т.е.  $c_i = 0$ . Таким образом,  $k \leq l$ . Обратное неравенство  $k \geq l$  доказывается аналогично работе [11] (стр. 276).

Тот факт, что уравнение  $Af = g$  и соответствующая система  $UF = Q$  нормально разрешимы лишь одновременно следует из доказанного соответствия между решениями неоднородного уравнения  $Af = g$  и неоднородной системы  $UF = Q$ .

Доказательство завершено.

Поскольку символ оператора  $S_n$  (см.[10]) равен  $\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^n \equiv t^n$  ( $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$ ), то, согласно [23], для нетеровости операторной матрицы  $U$  необходимо, чтобы  $\det G_A(z, t) \neq 0$  для всех  $z \in \bar{D}$ ,  $|t| = 1$ , где  $G_A(z, t)$  символ оператора  $A$  :

$$G_A(z, t) = \begin{pmatrix} P_6(z, t) & Q_6(z, t) \\ Q_6(z, t) & P_6(z, t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где

$$P_6(z, t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^3 a_n(z) t^{3+n}, \quad Q_6(z, t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^3 b_n(z) t^{3-n}, \tag{3.3}$$

и для нетеровости оператора  $A$  в  $L_{\beta-2/p}^p(D)$  необходимо, чтобы

$$\det G_A(z, t) = |P_6(z, t)|^2 - |Q_6(z, t)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \bar{D}. \tag{3.4}$$

Множества комплексных матриц второго порядка, состоящих из полиномов степени шесть, удовлетворяющих условию (3.2), будем обозначать через  $\mathcal{F}^2$ . Два полинома  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  из  $\mathcal{F}^2$  назовем гомотопными (пишется  $G_1(t) \sim G_2(t)$ ), если существует семейство  $G(t, \tau)$  матричных полиномов из  $\mathcal{F}^2$ , непрерывно зависящих от действительного параметра  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , такое, что

$$G(t, 0) \equiv G_1(t), \quad G(t, 1) \equiv G_2(t).$$

Согласно неравенству (3.4) возможны два случая:

- а)  $\det G_A(z, t) > 0$  т.е.  $|P_6(z, t)| > |Q_6(z, t)|$  для всех  $z \in \bar{D}$ ,  $|t| = 1$ ;
- б)  $\det G_A(z, t) < 0$  т.е.  $|P_6(z, t)| < |Q_6(z, t)|$  для всех  $z \in \bar{D}$ ,  $|t| = 1$ .

Множества матричных полиномов, удовлетворяющих условию (3.4) а) и б) будем обозначать соответственно через  $\mathcal{F}_+^2$  и  $\mathcal{F}_-^2$ . Если  $G_1(t) \sim G_2(t)$ , то  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$

принадлежат одному и тому же из этих множеств. В дальнейшем будем рассматривать только  $\mathcal{F}_+^2$ .

Таким образом, для (3.2) приходим к задаче Римана для единичного круга  $|t| < 1$ :

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = P_6(\tau, t)\Phi_1^+(t) + Q_6(\tau, t)\Phi_2^+(t), \\ \Phi_2^-(t) = Q_6(\tau, t)\Phi_1^+(t) + P_6(\tau, t)\Phi_2^+(t); \end{cases} \quad (3.5)$$

здесь  $\Phi_1^+(t), \Phi_2^+(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^-(t)$  – неизвестные функции точек окружности  $|t| = 1$ , аналитически продолжимые по  $t$  соответственно внутри и вне единичного круга.

Полином  $P_6(z, t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^3 a_n(z)t^{3+n}$  – комплексный невырождающийся полином степени шесть, как следует из формулы (3.3). Введем обозначения  $q_k(z)$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) – комплексные корни уравнения  $P_6(z, t) = 0$ . Корни не лежат на окружности  $|t| = 1$ , в силу справедливости формулы (3.4). Т.е. верно  $|q_k(z)| \neq 1$ , либо  $|q_k(z)| < 1$ , либо  $|q_k(z)| > 1$ , откуда следует

$$\det G_A(z, t) > 0, \text{ то есть } |P_6(z, t)| > |Q_6(z, t)| \quad \forall z \in \overline{D}. \quad (3.6)$$

Эти корни не лежат на окружности  $|t| = 1$ , т.е.  $|q_k| \neq 1$ .

Возможно, априори семь случаев:

$$j_0) |q_k| > 1, k = \overline{1, 6}, \text{ т.е. все корни лежат вне круга } |t| = 1; \quad (3.7)$$

$$j_\nu) |q_k| < 1, k = \overline{1, \nu}, \text{ т.е. внутри круга } |t| = 1 \text{ лежат } \nu \text{ } (\nu = \overline{1, 6}) \text{ корней.}$$

Будем решать задачу Римана (3.5) для случая  $j_0$ , т.е. в условиях отсутствия корней многочлена  $P_6(\tau, t)$  внутри круга  $|t| < 1$ .

Отметим, что в равенстве (3.5) для  $\Phi_1^-(t)$  левая часть является функцией, аналитически продолжимой вне единичного круга. При этом правая часть аналитически продолжима внутри единичного круга за исключением точки  $t = 0$ . В этой точке функция имеет полюс шестого порядка, значит, по теореме Лиувилля можно записать

$$P_6(t)\Phi_1^+(t) + Q_6(t)\Phi_2^+(t) = c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i}, \quad \Phi_1^-(t) = c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i}.$$

Найдя функцию  $\Phi_1^+(t)$ , получим:

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i}}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{P_6(t)}\Phi_2^+(t). \quad (3.8)$$

С учетом факторизации  $\det G_A(z, t) \equiv |P_6(z, t)|^2 - |Q_6(z, t)|^2$  в форме  $\frac{F^+(t)}{F^-(t)}$ , где  $F^+(t) \neq 0, F^-(t) \neq 0$  – аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга функции, подставив (3.8) во второе равенство системы (3.5), получим:

$$\Phi_2^-(t) = \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left( c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i} \right) + \frac{F^+(t)}{F^-(t)P_6(t)}\Phi_2^+(t).$$

Следовательно,

$$F^-(t) \left[ \Phi_2^-(t) - \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left( c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i} \right) \right] = \frac{F^+(t)}{P_6(t)} \Phi_2^+(t).$$

В левой части равенства стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, в правой – функция, продолжимая внутри единичного круга за исключением точки  $\tau_i = \frac{1}{q_{in}}$ . В этой точке она имеет простой полюс. В этом случае по теореме Лиувилля можно записать:

$$F^-(t) \left[ \Phi_2^-(t) - \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left( c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i} \right) \right] = \frac{F^+(t)}{P_6(t)} \Phi_2^+(t) = c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}},$$

т.е.

$$\Phi_2^-(t) = \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left( c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i} \right) + \frac{1}{F^-(t)} \left[ c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \right].$$

Подставив выражение для  $\Phi_2^+(t)$  в (3.8), получим

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{c_{i+1}}{t^i}}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{F^+(t)} \left( c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \right). \tag{3.9}$$

Далее необходимо устранить полюс функции  $\Phi_2^-(t)$  в точках  $t_1 = -\frac{1}{q_1}, t_2 = -\frac{1}{q_2}, t_3 = -\frac{1}{q_3}$ . С этой целью запишем

$$\left( q + \frac{1}{t_1} \right) \left( q + \frac{1}{t_2} \right) \left( q + \frac{1}{t_3} \right) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{t} - q_{in} \right).$$

Будем требовать, чтобы при  $t = \frac{1}{q_{in}}$  данное выражение обращалось в нуль, т.е. чтобы константы  $c_1, c_{n+1}, c_{n+2+i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), удовлетворяли  $n$  требованиям:

$$c_{n+2+i} = - \frac{Q_6(t)(c_1 + c_{n+1}q_{in})}{\prod_{k \neq i} (g_{in} - g_{kn}) F^+(q_{in}^m)},$$

где  $c_1, c_{n+1}$  свободные константы,  $c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$ , а на границе  $\Gamma$  области  $D$  предполагается, что выполнено неравенство

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_6(\tau, q_k(\tau)) \neq 0 \text{ при } z \in \overline{D} \text{ и } \tau \in \Gamma.$$

Итак, для функций  $\Phi_1^+(t), \Phi_2^+(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^-(t)$  получили следующие выражения:

$$\Phi_1^-(t) = c_1 + \frac{c_{n+1}}{t^n},$$

$$\Phi_2^-(t) = \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \left( c_1 + \frac{c_{n+1}}{t^n} \right) + \frac{1}{F^-(t)} \left[ c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \right],$$

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1 + \frac{c_{n+1}}{t^n}}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{F^+(t)} \left( c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \right),$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{P_6(t)}{F^+(t)} \left[ c_{n+2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}}{\frac{1}{t} - q_{in}} \right].$$

Сначала подставим  $c_1 = 0$  и  $c_{n+1} = 1$ , а затем  $c_1 = 1$  и  $c_{n+1} = 0$ , найдем элементы матрицы  $\Phi^-(t)$  и  $\Phi^+(t)$

$$\Phi^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^n} & 1 \\ \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \frac{1}{t^n} + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^1}{\frac{1}{t} - q_{in}}}{F^-(t)} & \frac{\overline{Q_6(t)}}{P_6(t)} \frac{1}{t^n} + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^2}{\frac{1}{t} - q_{in}}}{F^-(t)} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^n} - \frac{Q_6(t)}{F^+(t)} \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^1}{\frac{1}{t} - q_{in}} & \frac{1}{P_6(t)} - \frac{Q_6(t)}{F^+(t)} \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^2}{\frac{1}{t} - q_{in}} \\ \frac{P_6(t)}{F^+(t)} \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^1}{\frac{1}{t} - q_{in}} & \frac{P_6(t)}{F^+(t)} \sum_{i=1}^n \frac{c_{n+2+i}^2}{\frac{1}{t} - q_{in}} \end{pmatrix},$$

При этом

$$\det \Phi^-(t) = \frac{Q_6(t)}{\prod_{k \neq i} (g_{in} - g_{kn}) F^+(q_{in}^m) F^-(t)} \neq 0.$$

$$\det \Phi^+(t) = \frac{Q_6(t)}{\prod_{k \neq i} (g_{in} - g_{kn}) F^+(q_{in}^m) F^+(t)} \neq 0.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_6(\tau, q_k(\tau)) \neq 0 \text{ при } z \in \overline{D} \text{ и } \tau \in \Gamma \quad (3.10)$$

мы имеем

$$\Phi^-(t) = \Omega_A^+(t) \Phi^+(t)$$

или

$$\Omega_A^+(t) = \Phi^-(t) (\Phi^+(t))^{-1}. \quad (3.11)$$

Аналогично, доказываем, что при условии (3.10) имеет место представление

$$\Omega_A^-(t) = \Phi_*^-(t) (\Phi_*^+(t))^{-1}. \quad (3.12)$$

В разложении матрицы  $\Omega_A^\pm(t)$  аналитическое продолжение за пределы единичного круга допустимо для первых множителей, как следует из формул (3.11) и (3.12). Вторые множители же могут иметь аналитическое продолжение во внутреннюю область круга. Определители данных множителей не равны нулю на всей области. Это следует из нулевых индексов матрицы  $\Omega_A^\pm(t)$ . Таким образом, оператор является нетеровым при справедливости граничного условия (3.10).

Будем обозначать через  $\mathcal{M}_{j\nu}$ ,  $\nu = \overline{0, 6}$  класс матричных полиномов из  $\mathcal{F}_+^2$ , для которых справедливо одно из выражений (3.7). Индекс полинома совпадает с индексом в выражении (3.7). Условия факторизации матрицы  $G_A(\tau, t)$ ,  $\tau \in \Gamma$ ,  $|t| = 1$  с нулевыми частными индексами ищутся в зависимости от номера класса полинома  $\mathcal{M}_{j\nu}$ . В этом случае оператор  $A$  нетеров в пространствах  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \beta < 2$  [9].

Следует отметить, что при рассмотрении других случаев задача Римана оказывается безусловно разрешимой, т.е. дополнительных условий разрешимости не возникает.

Введем обозначения

$$\Delta_\nu = |a_\nu|^2 - |b_\nu|^2, \quad \lambda_{\nu n} = \bar{a}_\nu a_n - b_\nu \bar{b}_n, \quad \mu_{\nu n} = \bar{a}_\nu b_n - b_\nu \bar{a}_n,$$

$$M = \max_{|t|=1} \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^6 \lambda_j t^j \right), \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

где функции  $\lambda_j$  явно выражаются через коэффициенты оператора  $A$ .

**Теорема 3.1.** *Для нетеровости оператора  $A$  в лебеговых пространствах  $L_{\beta-2/p}^p(D)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $0 < \beta < 2$  необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \left( M^2(z) + \sum_{n=-3}^3 (|\mu_{0n}(z)|^2 - |\lambda_{0n}(z)|^2) \right)^{1/2}, \quad \text{при } \forall z \in \bar{D}, \quad (3.13)$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \left( M^2(z) + \sum_{n=-3}^3 (|\mu_{\nu n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu n}(z)|^2) \right)^{1/2}, \quad \nu = \pm 1, \pm 2,$$

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_6(\tau, q_k(\tau)) \neq 0, \quad \text{при } \forall z \in \bar{D} \quad \text{и} \quad \tau \in \Gamma, \quad (3.14)$$

где  $q_k(\tau)$  – корни уравнения  $P_6(\tau, t) = 0$ ,  $\tau \in \Gamma$ ,  $|t| = 1$ , такие, что  $|q_k(\tau)| < 1$  для  $\forall \tau \in \Gamma$ . При этом, если выполнено (3.13), то индекс оператора  $A$  равен нулю; если выполнено (3.14), то

$$\varkappa = 2 \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Ind}_{\Gamma} Q_6(\tau, q_k(\tau)).$$

#### 4. Заключение

Представленная в статье форма оператора позволила редуцировать исходную задачу к решению соответствующей задачи Римана, связанной с многочленом шестой

степени. Полученные ранее автором леммы для операторов с суммированием по индексам от 1 до 2 были обобщены на более широкий класс операторов с суммированием по индексам от  $-3$  до  $3$ , что потребовало учёта существенно усложнившейся структуры характеристических многочленов. Проведённое исследование данного класса операторов создаёт предпосылки для дальнейшего построения теории Нетера двумерных сингулярных операторов, заданных на ограниченных областях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hilbert D. Uber eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie. Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig: Teubner, 1905. P. 233–240. DOI: 10.11588/heidok.00016038
2. Poincare H. Lecons de mecanique celeste. Tome I–III. Paris. 1905.
3. Noether F. Uber eine klass singularer Integralgleichungen. *Math. Ann.*, 1920. Vol 82. P. 42–63. DOI: 10.1007/BF01457974
4. Carleman T. Uber das Neumann - Poincaresche Problem fur ein Gebiet mit Ecken. Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1916. 193 p.
5. Giraud G. Sur une classe d'equation integrales on figurent des valeurs principales d'integrales sinpeles. *Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. 3-e Serie.* 1939. Vol. 56. P. 119–172. DOI: 10.24033/asens.877
6. Михлин С. Г. Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений // *Мат. сбор.* 1938. Т. 3, № 1. С. 121–140.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1946. 448 с.
8. Tricomi F. Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie "con asterisco". *Ren - diconti d. R. Accademia Naz. d. Lincei. III. ser. 6a. fasc. 9.* 1926. P. 535–539.
9. Giraud G. Sur une classe generale d'equation a integrales principales. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1936. Vol. 202, no. 26. P. 2124–2127.
10. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 487 с.
11. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 227 с.
12. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 134 с.
13. Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении. В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз, 1962. С. 193–218.
14. Боярский Б. В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций : 01.00.00 : дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва. 1960. 326 с.

15. Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997. 415 с.
16. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
17. Комяк И. И. О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений // *Докл. АН СССР*. 1980. Т. 250, № 6. С. 1307–1310.
18. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // *Матем. заметки*. 1989. Т. 46, № 5. С. 91–93.
19. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов // *ДАН СССР*. 1990. Т. 313, № 3. С. 541–545.
20. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов // *ДАН СССР*. 1990. 314, № 5. С. 1055–1059.
21. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // *Математические заметки*. 1991. Т. 49, вып. 4. С. 150–152.
22. Бойматов К. Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // *Успехи математических наук*. 1988. Т. 43, вып. 8. С. 171–172.
23. Duduchava R. J. On multidimensional singular integral operators. *Journal of operators theory*. 1984. Vol. 11, no. 1. P. 41–76.
24. Stein E. M. Note on singular integrals // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1957. Vol. 8. P. 250–254.
25. Джангибеков Г., Одинабеков Д. М., Худжаназарова Г. Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области // *Вестник МГУ им. М.В. Ломоносова. Серия 1. Математика. Механика*. 2019. № 2 С. 9–14. DOI: 10.3103/S0027132219020025
26. Одинабеков Д. М. О нетеровости и индексе двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // *Вестник российских университетов. Математика*. 2022. Т. 27, вып. 138. С. 164–174. DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174
27. Одинабеков Д. М. О разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // *Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук*. 2019. № 1. С. 42–49.

*Поступила 27.04.2025; доработана после рецензирования 27.04.2025;  
принята к публикации 27.04.2025*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. D. Hilbert, "Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie", *Verhandlungen des III Internation. Mathem. Kong., Heidelberg*, 1905, 233–240. DOI: 10.11588/heidok.00016038
2. H. Poincare, *Lecons de mecanique celeste*, I–III, Paris, 1905.
3. F. Noether, "Über eine klass singularer Integralgleichungen", *Math. Ann. Bd.*, **82** (1920), 42–63. DOI: 10.1007/BF01457974
4. T. Carleman, *Über das Neumann - Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken*, Aimqvist and Wiksell, Uppsala, 1916, 193 p.
5. G. Giraud, "Sur une classe d'equation integrales on figurent des valeurs pricipales d'integrales sinpeles", *Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup.*, **56** (1939), 119–172. DOI: 10.24033/asens.877
6. S. G. Mikhlin, *The problem of equivalence in the theory of singular integral equations*, **3**, Mat. collection, 1938 (In Russ.).
7. N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Moscow, 1946 (In Russ.), 448 c.
8. F. Tricomi, "Formula d' inversione dell' ordine di due integrazioni doppie "con asterisco", *Ren - diconti d. R. Accademia Naz. d. Lincei*, III, *6a, fasc. 9*, 1926, 535–539.
9. G. Giraud, "Sur une classe generale d'equation a integrales pricipales", *Comptes Rendus de l'Acad?mie des Sciences*, **26** (1936), 2124–2127.
10. S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Fizmatgiz, Moscow, 1962 (In Russ.), 487 p.
11. I. N. Vekua, *Generalized analyti- cal functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1959 (In Russ.), 227 p.
12. L. Al'fors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Mir, Moscow, 1969 (In Russ.), 134 p.
13. M. Shiffer, "Extremal problems and variational methods in conformal mapping", *In the book: International Mathematical Congress in Edinberg (review papers)*, 1962, 193–218 (In Russ.).
14. B. V. Boyarskiy, "Research on elliptic equations on the plane and boundary value problems of function theory", *Diss. doc. physic-mathematical sciences*, 1960 (In Russ.), 326 p.
15. A. D. Dzhurayev, *Method of singular integral equations*, Nauka, Moscow, 1997 (In Russ.), 415 p.
16. V. N. Monakhov, *Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations*, Nauka, Novosibirsk, 1977 (In Russ.), 424 p.
17. I. I. Komyak, "On the solvability of one class of two-dimensional singular integral equations", *Reports of the academy of sciences USSR*, **250** (1980), 1307–1310 (In Russ.).

18. G. Dzhangibekov, “On some two-dimensional singular integral operators”, *Mat. Notes*, **46** (1989), 91–93 (In Russ.).
19. G. Dzhangibekov, “Noethericity property and index of one class of two-dimensional singular integral operators”, *Reports of the academy of sciences USSR*, **313** (1990), 541–545 (In Russ.).
20. G. Dzhangibekov, “On one class of singular integral operators”, *Reports of the academy of sciences USSR*, **314** (1990), 1055–1059 (In Russ.).
21. G. Dzhangibekov, “On some two-dimensional singular integral operators with shift”, *Mathematical notes*, **49** (1991), 150–152 (In Russ.).
22. K.Kh. Boymatov, G. Dzhangibekov, “On one singular integral operator”, *Advances in Mathematical Sciences*, **43** (1988), 171–172 (In Russ.).
23. R.J. Duduchava, “On multidimensional singular integral operators”, *Journal of operators theory*, **11** (1984), 41–76.
24. E. M. Stein, “Note on singular integrals”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 250–254.
25. G. Dzhangibekov, J.M. Odinabekov, G.Kh. Khudzhanazarova, “On Noethericity conditions and the index of one class of singular integral operators over a bounded simply connected domain”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74** (2019), 49–54 (In Russ.). DOI: 10.3103/S0027132219020025
26. J. M. Odinabekov, “On the Noetherian property and index of two-dimensional singular integral operators over a bounded domain”, *Reports of the academy of sciences RT*, **27** (2022), 164–174 (In Russ.). DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174
27. J.M. Odinabekov, “On the solvability of some classes of two-dimensional singular integral operators over a bounded domain”, *News of the Academy of Sciences of the RT, Dept. of Phys.-Math., Chem., Geol. and Engineering Sciences*, 2019, 42–49 (In Russ.).

*Submitted 27.04.2025; Revised 27.04.2025; Accepted 27.04.2025*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.28-46  
*Original article*

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 30B10, 37L05

## On the Integrability of Dynamical Systems in the Space of Double-Sided Sequences

A. E. Rassadin

*Higher School of Economics University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** The article is devoted to the analysis of dynamical systems in a specially constructed countably-dimensional phase space, namely, in the space of double-sided sequences. It is not only a linear space but also a Banach algebra. Using the multiplication operation in this algebra, the article constructs two examples of dynamical systems in such a space; both systems allow exhaustive investigation. One dynamical system is concentrated, meaning that its dynamic variables depend only on time, while another system is distributed, meaning that its dynamic variables depend not only on time but also on a spatial variable. A concentrated system can be obtained in two ways. The first way is simplifying the Cauchy problem for the Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation with a periodic initial condition. The second way involves deriving the evolution equation for the countably-dimensional energy in a countably-dimensional system of ordinary differential equations, which is the normal form for the analogue of the Andronov-Hopf bifurcation in the space of double-sided sequences. A distributed dynamic system arises as a result of the spatial discretization of a certain nonlinear integro-differential equation. In this paper general solutions of Cauchy problems for these dynamic systems are constructed using the method of generating functions in the form of Laurent series. The article also provides specific examples of exact solutions of Cauchy problems for these dynamic systems. It is shown how, by analogy with digital signal processing methods, these exact solutions generate a countable set of exact solutions for the dynamic systems under consideration.

**Keywords:** Fourier series, commutative algebra with unit, open ring, upsampling

**For citation:** A. E. Rassadin. On the Integrability of Dynamical Systems in the Space of Double-Sided Sequences. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 28–46. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.28-46

*About the author:*

**Alexander E. Rassadin**, Postgraduate student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12, B. Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [aerassadin@hse.ru](mailto:aerassadin@hse.ru)

© A. E. Rassadin



УДК 517.9

## Об интегрируемости динамических систем в пространстве двусторонних последовательностей

А. Э. Рассадин

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Статья посвящена анализу динамических систем в специальном образом сконструированном счётном фазовом пространстве, а именно, в пространстве двусторонних последовательностей. Оно является не только линейным пространством, но и банаховой алгеброй. С помощью операции умножения в этой алгебре в статье строятся два примера динамических систем в таком пространстве, допускающих исчерпывающее исследование. Одна динамическая система является сосредоточенной, то есть её динамические переменные зависят только от времени, а другая динамическая система является распределённой, то есть её динамические переменные зависят не только от времени, но и от пространственной переменной. Сосредоточенная система может быть получена двумя способами. Первый способ состоит в упрощении задачи Коши для уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова с периодическим начальным условием. Второй способ заключается в выводе эволюционного уравнения для счётномерной энергии в счётномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся нормальной формой для аналога бифуркации Андронова-Хопфа в пространстве двусторонних последовательностей. Распределённая динамическая система возникает в результате пространственной дискретизации некоторого нелинейного интегродифференциального уравнения. В данной работе общие решения задач Коши для этих динамических систем строятся с использованием метода производящих функций в форме ряда Лорана. В статье также приводятся конкретные примеры точных решений задач Коши для этих динамических систем. Показано, как по аналогии с методами цифровой обработки сигналов эти точные решения порождают счетное множество точных решений для рассматриваемых динамических систем.

**Ключевые слова:** ряды Фурье, коммутативная алгебра с единицей, открытое кольцо, прореживание

**Для цитирования:** Рассадин А. Э. Об интегрируемости динамических систем в пространстве двусторонних последовательностей // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 28-46. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.28-46

*Об авторе:*

**Рассадин Александр Эдуардович**, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, [aerassadin@hse.ru](mailto:aerassadin@hse.ru)

### 1. Introduction

Dynamical system is a mathematical model of the evolution of a real (physical, chemical, biological, economic, etc.) system, the states of which at any given time is uniquely determined by its initial state [1].

Let one remind strict definition of dynamical system with phase space  $\mathbb{X}$  and continuous time  $t$  [2–4].

**Definition 1.1.** *A continuous mapping  $\psi : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{X}$  is called continuous dynamical system, if for all  $x \in \mathbb{X}$  and all  $t, s \in \mathbb{R}$  it obeys to the following group properties:*

- i.  $\psi(x, 0) = x$ ;*
- ii.  $\psi(\psi(x, t), s) = \psi(x, t + s)$ .*

If phase space  $\mathbb{X}$  of the system is infinite-dimensional Banach space over field  $\mathbb{C}$ , then this continuous dynamical system is called a distributed dynamical system, a lot of these systems in various applications being polynomially nonlinear.

If such Banach space possesses by unconditional Schauder basis, then input distributed dynamical system can be reduced to countable-dimensional system of ordinary differential equations (see, for instance, works [5–6] and references therein).

According to the article [7] let one demonstrate this procedure on example of the Cauchy problem for the Kardar–Parizi–Zhang equation:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right)^2, \quad \hat{U}(x, 0) = \hat{U}^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

with periodic initial condition:

$$\hat{U}^0(x + 2\pi) = \hat{U}^0(x). \quad (1.2)$$

This equation describes epitaxial growth of crystals.

Restriction (1.2) means that one can seek solution of equation (1.1) as the Fourier series:

$$\hat{U}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) \exp(inx), \quad u_{-n}(t) = u_n^*(t). \quad (1.3)$$

Substituting expansion (1.3) into input equation (1.1) one obtains the next countable-dimensional system of ordinary differential equations:

$$\dot{u}_n = -n^2 u_n - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k(n-k) u_k u_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

the Fourier amplitudes of initial condition (1.2) being initial conditions for system (1.4).

Carefully peering into system (1.4) we can observe that in this system set of independent variables  $\{u_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  may be considered as a vector of some linear space of the complex-valued double-sided sequence. Countable-dimensional system (1.4) of ordinary differential equations generates a flow in this space. However, the peculiarity of this example is that the right-hand side of this system includes both the components of this vector and their numbers. Other examples of such systems have the same properties [5–6].

The imposition of an exclusion on the dependence of the right-hand side of such system on the numbers of the vector components leads to the consideration of the following set of dynamical systems.

**Definition 1.2.** *Let  $u = (\dots, u_{-n}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  be the complex-valued double-sided sequence. We shall say that  $u$  is an element of the linear*

space of complex-valued double-sided sequences  $\mathbb{L}$ , if for all  $z \in K$ , where  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R, r \geq 0, R \leq \infty\}$  is some open ring, series  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n z^n$  is the Laurent series for some analytical on  $K$  function  $U(z)$ .

**Definition 1.3.** Analytical on the ring  $K$  function

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n z^n \tag{1.5}$$

is called generating function for vector  $u \in \mathbb{L}$ .

If  $u \in \mathbb{L}$  and  $v \in \mathbb{L}$ , then it is easy to find that product of corresponding them generating functions  $U(z)$  and  $V(z)$  is equal to:

$$U(z)V(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u \star v)_n z^n, \tag{1.6}$$

where  $u \star v$  denotes double-sided sequence with components:

$$(u \star v)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k v_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Formula (1.7) means that one can define product of two vectors from  $\mathbb{L}$  without usage of generating functions.

It is well-known [8] that linear space  $\mathbb{L}$  with multiplication (1.7) of two vectors is commutative algebra with unit  $e = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$ . In particular  $u \star e = e \star u = u$  for all  $u \in \mathbb{L}$ .

Let the elements of algebra  $\mathbb{L}$  be functions of continuous time  $t: u(t), v(t), w(t), \dots \in \mathbb{L}$ , then flows can be set on  $\mathbb{L}$  using countable-dimensional systems of ordinary differential equations, the right-hand sides of which are constructed using addition and multiplication operations in the algebra  $\mathbb{L}$ .

For example, in work [9] the next system for vectors  $v(t) \in \mathbb{L}$  and  $w(t) \in \mathbb{L}$  was considered:

$$\dot{v} = \mu v - w - v \star (v \star v + w \star w), \quad \dot{w} = v + \mu w - w \star (v \star v + w \star w), \quad \mu > 0. \tag{1.8}$$

This system is countable-dimensional analog of the normal form of the Andronov–Hopf bifurcation, phase space of system (1.8) being  $\mathbb{X} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}$ .

Further, the suggested construction can be generalized, namely, let the elements of algebra  $\mathbb{L}$  be both functions of continuous time  $t$  and variable  $x \in \mathbb{R}^m: u(x, t), v(x, t), w(x, t), \dots \in \mathbb{L}$ , then distributed dynamical systems can be set on  $\mathbb{L}$  using countable-dimensional systems of integro-differential equations or partial differential equations, the right-hand sides of which are constructed using both addition and multiplication operations in the algebra  $\mathbb{L}$  and partial derivatives and integrals.

In particular, to illustrate this generalization the following Cauchy problem for vector  $u(x, t) \in \mathbb{L}$  has been solved exactly in article [10]:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - \xi, t) \star u(\xi, t) d\xi = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x) \in \mathbb{L}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

The paper continues investigation of the integrability of dynamical systems in the space of double-sided sequences determined by Definition 1.2. The rest of this work is organized as follows: the next section deals with construction of general solution of countable-dimensional analog of the well-known logistic equation. Section 3 is devoted to the description in explicit form of a number of exact solutions of this nonlinear countable-dimensional system of ordinary differential equations. In section 4 general solution of one countable-dimensional system of nonlinear partial differential equations is found. Section 5 presents a number of exact solutions of this system of partial differential equations. Final section contains discussion of obtained results and of perspectives of further investigations.

## 2. General solution of the analog of the logistic model

Let us consider the next Cauchy problem for vector  $u(t) \in \mathbb{L}$ :

$$\dot{u} = u - u \star u, \quad u(0) = u^0 \in \mathbb{L}. \quad (2.1)$$

Equation (2.1) looks like the well-known logistic equation in which multiplication is replaced by an asterisk (" $\star$ ") denoting multiplication in  $\mathbb{L}$  according to formula (1.7).

Using this formula one can rewrite equation (2.1) in components as countable-dimensional system of ordinary differential equations:

$$\dot{u}_n = u_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k u_{n-k}, \quad u_n(0) = u_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

The system (2.1) (or (2.2)) may arise by means of three different ways.

First of all, it is easy to see that system (2.2) can be obtained from the Cauchy problem for the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial \hat{U}(x, t)}{\partial t} = \hat{U}(x, t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(x - \xi, t) \hat{U}(\xi, t) d\xi, \quad \hat{U}(x, 0) = \hat{U}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

namely, discretization of straight line  $\mathbb{R}$  with step  $\delta$  generates from function  $\hat{U}(x, t)$  countable set of functions  $u_n(t) = \hat{U}(n\delta, t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . And after that change of integral in equation (2.3) by corresponding to it integral sum and further scaling  $\delta u_n \rightarrow u_n$  ought to give rise to system (2.2) exactly.

Further, let us consider the next Cauchy problem for the Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation [11]:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} + \hat{U}(1 - \hat{U}), \quad \hat{U}(x, 0) = \hat{U}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

where  $D$  is a diffusion coefficient.

If initial condition for this Cauchy problem is periodic (1.2), then one ought to seek solution of equation (2.4) as the Fourier series (1.3).

Substituting expansion (1.3) into input equation (2.4) one obtains:

$$\dot{u}_n = -Dn^2 u_n + u_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k u_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

the Fourier amplitudes  $u_n^0$  of initial condition

$$u_n^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{U}^0(x) \exp(-inx) dx \tag{2.6}$$

being initial conditions for system (2.5).

If the diffusion coefficient  $D$  is small:  $0 < D \ll 1$ , and values (2.6) vanishes under  $|n| \geq \frac{1}{\sqrt{D}}$  as  $o(n^{-2})$ , that is if Fourier spectrum (2.6) of initial condition  $\hat{U}^0(x)$  is concentrated in the strip with  $|n| \ll \frac{1}{\sqrt{D}}$ , then it is obvious that the solution of the Cauchy problem (2.5)-(2.6) is close to the solution of the Cauchy problem (2.2) with the same initial conditions at the initial stage of its temporal evolution.

At last let one construct from solutions  $v(t) \in \mathbb{L}$  and  $w(t) \in \mathbb{L}$  of the system (1.8) the following value:

$$u = \frac{v \star v + w \star w}{2}. \tag{2.7}$$

In analogy with the Andronov–Hopf bifurcation in two-dimensional space this value characterize energetic relations in the system (1.8).

Calculating the derivative of value (2.7) due to the system (1.8) one can easily find that:

$$\dot{u} = 2\mu u - 4u \star u. \tag{2.8}$$

After rescaling of time  $t \mapsto 2\mu t$  and value (2.7)  $u \mapsto 2\frac{u}{\mu}$  the Cauchy problem for equation (2.8) is reduced to the Cauchy problem (2.1) with initial condition  $u^0 = \frac{v^0 \star v^0 + w^0 \star w^0}{\mu}$ , where  $v^0 \in \mathbb{L}$  and  $w^0 \in \mathbb{L}$  are initial conditions for the system (1.8).

Thus, the Cauchy problem (2.1) (such as the problem (2.2)) meets quite often in different applications.

For the Cauchy problem (2.2) the following theorem is valid.

**Theorem 2.1.** *General representation of exact solution of the Cauchy problem (2.2) is equal to:*

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{U^0(z)}{U^0(z) + \exp(-t)[1 - U^0(z)]} \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{2.9}$$

where

$$U^0(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n^0 z^n, \quad z \in K \tag{2.10}$$

and  $K$  is the ring of analyticity of the integrand in formula (2.9), integration along the circle  $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\} \in K$  being counter clockwise.

**Доказательство.**

Let us introduce for solution  $u(t) \in \mathbb{L}$  of equation (2.1) the generating function:

$$U(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n(t) z^n, \quad z \in K. \tag{2.11}$$

We stress that unlike the generating function (1.5) the generating function (2.11) depends both complex variable  $z$  and real variable  $t$ .

Applying formula (1.6) to the system (2.2) it is not difficult to observe that the input Cauchy problem (2.2) is reduced to the next one:

$$\frac{\partial U(z, t)}{\partial t} = U(z, t) - U^2(z, t), \quad U(z, 0) = U^0(z), \quad (2.12)$$

where initial condition for equation (2.12) is equal to the generating function (2.10) for vector  $u^0 \in \mathbb{L}$ :

Further it is well-known that exact solution of the Cauchy problem (2.12) is equal to:

$$U(z, t) = \frac{U^0(z)}{U^0(z) + \exp(-t)[1 - U^0(z)]}. \quad (2.13)$$

Combining formulas (2.11) and (2.13) in the framework of the theory of analytical functions one can obtain expression (2.9).

Доказательство завершено.

**Remark 2.1.** *Singular points of expression (2.13) may depend on time  $t$  hence internal and external radii of the analyticity ring  $K$  for function (2.13) may depend on time  $t$  too:  $r = r(t)$  and  $R = R(t)$ . Therefore radius  $\rho$  of the circle of integration  $C_\rho \subset K$  in expression (2.9) generally speaking also depends on time  $t$ :  $\rho = \rho(t)$ .*

### 3. Examples of exact solutions of countable-dimensional logistic model

In practice instead of application of expression (2.9) it is more suitable to derive the Laurent expansion (2.11) and hence to extract exact solution  $u(t) \in \mathbb{L}$  of the input Cauchy problem (2.1) directly from formula (2.13) using initial condition (2.10).

The next statement demonstrate this procedure.

**Theorem 3.1.** *Exact solution of the Cauchy problem (2.2) under the following nonzero values for initial condition  $u^0 \in \mathbb{L}$ :*

$$u_0^0 = a, \quad u_1^0 = u_{-1}^0 = \frac{b}{2}, \quad 0 < a - b < a + b < 1, \quad (3.1)$$

is equal to

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{A^2(t) - B^2(t)}} \left[ a - \frac{bB(t)}{A(t) + \sqrt{A^2(t) - B^2(t)}} \right], \quad (3.2)$$

and

$$u_n(t) = u_{-n}(t) = (-1)^{n+1} \frac{b \exp(-t)}{\sqrt{A^2(t) - B^2(t)}} \frac{B^{n-1}(t)}{(A(t) + \sqrt{A^2(t) - B^2(t)})^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

where  $A(t) = a + (1 - a) \exp(-t)$  and  $B(t) = b(1 - \exp(-t))$ .

*P r o o f.* First of all let one restore on values (3.1) corresponding to them initial generating function (2.10):

$$U^0(z) = a + \frac{b}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad z \in K. \tag{3.4}$$

The result of substitution of formula (3.4) into expression (2.13) is equal to

$$U(z, t) = \frac{2 a z + b(z^2 + 1)}{2 A(t) z + B(t) (z^2 + 1)}. \tag{3.5}$$

Denominator of formula (3.5) has two zeros, namely,  $z_1 = \zeta(t)$  and  $z_2 = \frac{1}{\zeta(t)}$ , where

$$\zeta(t) = -\frac{B(t)}{A(t) + \sqrt{A^2(t) - B^2(t)}}, \tag{3.6}$$

hence expansion of function (3.5) into the Laurent series on the open ring  $K_t$  is equal to

$$U(z, t) = u_0(t) + u_1(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^{n-1}(t) (z^n + z^{-n}), \quad z \in K_t, \tag{3.7}$$

where  $K_t = \{z \in \mathbb{C} \mid |\zeta(t)| < |z| < |\zeta(t)|^{-1}\}$ ,

$$u_0(t) = \frac{a + b\zeta(t)}{\sqrt{A^2(t) - B^2(t)}} \tag{3.8}$$

and

$$u_1(t) = \frac{b\zeta^2(t) + 2 a \zeta(t) + b}{2 \sqrt{A^2(t) - B^2(t)}}. \tag{3.9}$$

Thus from formula (3.7) it is obvious that exact solution of the Cauchy problem (2.2) under initial condition (3.1) is equal to

$$u_n(t) = u_{-n}(t) = u_1(t) \zeta^{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Inserting expression (3.6) into formulas (3.8), (3.9) and (3.10), one can easily obtain formulas (3.2) and (3.3) in the statement of the theorem.

*P r o o f f i n i s h e d.*

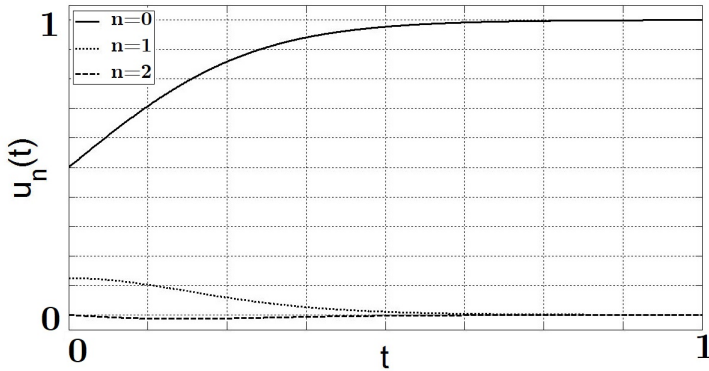
Temporal evolution of the first functions (3.8), (3.9) and (3.10) assuming  $a = 0.5$  and  $b = 0.25$  is shown on Figure 3.1.

From formulas (3.2) and (3.3) it is easy to find that:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_0(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

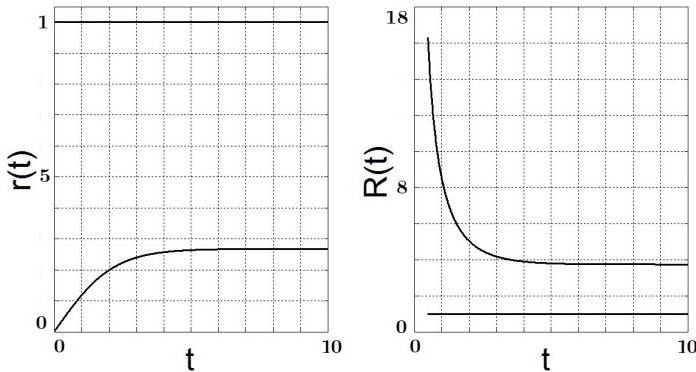
It means that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = e$ , where  $e$  is the unit of commutative algebra  $\mathbb{L}$ . On the other side the result (3.11) can be reformulated on the language of generating function (3.5), namely,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(z, t) = 1$ . Both languages are useful.

Further in correspondence with Remark 2.1 in this case the ring of analyticity  $K_t$  for generating function (3.5) evolves in time, namely, its internal  $r(t)$  and external  $R(t)$  radii depend on  $t$  as follows:  $r(t) = |\zeta(t)|$  and  $R(t) = \frac{1}{|\zeta(t)|}$ . Typical graphs of these functions are presented on Figure 3.2.



**Рис. 3.1.** Зависимость от времени первых трёх функций  $u_n(t)$  при  $a = 0.5$  и  $b = 0.25$

**Fig. 3.1.** Temporal evolution of the first functions  $u_n(t)$  under  $a = 0.5$  and  $b = 0.25$



**Рис. 3.2.** Зависимость от времени внутреннего (справа) и внешнего (слева) радиусов кольца аналитичности производящей функции  $U(z, t)$  при  $a = 0.5$  и  $b = 0.25$

**Fig. 3.2.** Temporal evolution of internal (on the left) and external (on the right) radii of the ring of analyticity of generating function  $U(z, t)$  under  $a = 0.5$  and  $b = 0.25$

From this Figure 3.1 one can see that graph of  $r(t)$  is monotone increasing and graph of  $R(t)$  is monotone decreasing. Moreover using expression (3.6) it is not difficult to obtain that:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} < 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} > 1. \quad (3.12)$$

It means graphs  $r(t)$  and  $R(t)$  possesses by horizontal asymptotes (see Figure 3.2). And inequalities (3.12) claim that there is a gap between this asymptotes therefore under  $t \rightarrow +\infty$  there is a limit ring  $K_\infty = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} < |z| < \left( a + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right\}$  on which the

generating function (3.5) is always analytical. Thus one can consider this generating function only on  $K_\infty$  at once. Further due to inequalities (3.12) the unit circle  $C_1 \subset K_\infty$  hence in formula (2.9) it is possible to integrate along the unit circle  $|z| = 1$  always because of deformation of the contour of integration.

In conclusion of this section let us perform the following observation, namely, let on change in the Laurent expansion (3.7) complex variable  $z$  on some its degree  $z^p$ , where  $p = 2, 3, 4, \dots$ , then:

$$\tilde{U}(z, t) \equiv U(z^p, t) = u_0(t) + u_1(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^{n-1}(t) (z^{np} + z^{-np}). \tag{3.13}$$

On the other hand equation (2.12) do not contain variable  $z$  explicitly therefore expression (3.13) represents exact solution of equation (2.12) too. But this solution corresponds to the next initial condition:

$$\tilde{U}^0(z) \equiv U^0(z^p) = a + \frac{b}{2} \left( z^p + \frac{1}{z^p} \right). \tag{3.14}$$

In other words expansion (3.13) gives one exact solution of the Cauchy problem (2.1) as follows:

$$\tilde{u}_0(t) = u_0(t), \quad \tilde{u}_{\pm np}(t) = u_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.15}$$

where  $u_n(t)$  are functions (3.2) and (3.3), and place between components of vector  $\tilde{u}(t) \in \mathbb{L}$  with numbers  $np$  and  $np + p$  both in initial condition (3.14) and exact solution (3.13) are filled by zeros.

From point of view of radio engineering procedure (3.15) just coincides with procedure of upsampling in digital signal processing [12].

This observation one may formulate as the following statement.

**Theorem 3.2.** *If generating function  $U(z, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (2.1) with initial condition representing by generating function  $U^0(z)$ , then for all  $p = 2, 3, 4, \dots$  generating function  $U(z^p, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (2.1) with initial condition representing by generating function  $U^0(z^p)$ .*

#### 4. General solution of countable-dimensional system of nonlinear partial differential equations

Let one consider the following Cauchy problem for vector  $u(x, t) \in \mathbb{L}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \star u = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x) \in \mathbb{L}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

This Cauchy problem may be interpreted as nonlinear transfer of initial condition  $u^0(x)$  in the space  $\mathbb{L}$ .

Using formula (1.7) one can rewrite equation (4.1) in components as countable-dimensional system of partial differential equations:

$$\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{n-k}(x, t) u_k(x, t) = 0, \quad u_n(x, 0) = u_n^0(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

It is easy to see that system (4.2) arises from the Cauchy problem for the following nonlinear integro-differential equation:

$$\frac{\partial \hat{U}(x, y, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \hat{U}(x, y, t)}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(x, y - \eta, t) \hat{U}(x, \eta, t) d\eta = 0. \quad (4.3)$$

namely, quantization of plain  $\mathbb{R}^2$  in  $y$ -direction with step  $\delta$  generates from function  $u(x, y, t)$  countable set of functions  $u_n(x, t) = \hat{U}(x, n\delta, t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . And after that change of integral in equation (4.3) by corresponding to it integral sum and further scaling  $\delta u_n \rightarrow u_n$  ought to give rise to system (4.2) exactly.

Exact solution of the Cauchy problem (4.1) (such as (4.2)) can be obtained by means of the following theorem.

**Theorem 4.1.** *General representation of exact solution of the Cauchy problem (4.2) is equal to:*

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{U^0(z; x - ct)}{1 + tU^0(z; x - ct)} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (4.4)$$

where

$$U^0(z; x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^0(x) z^n, \quad z \in K, \quad (4.5)$$

and  $K$  is the ring of analyticity of the integrand in formula (4.4), integration along the circle  $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\} \in K$  being counter clockwise.

**P r o o f.** Let us introduce the generating function for the solution  $u(x, t) \in \mathbb{L}$  of the Cauchy problem (4.2):

$$U(z; x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x, t) z^n. \quad (4.6)$$

Then, using the Laurent expansion (4.6) and formula (1.6) one can rewrite system (4.2) as follows:

$$\frac{\partial U(z; x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial U(z; x, t)}{\partial x} + U^2(z; x, t) = 0, \quad U(z; x, 0) = U^0(z; x). \quad (4.7)$$

Equation (4.7) is the first order partial differential equation, therefore, the Cauchy problem (4.7) can be easily solved in the framework of the well-known method of characteristics:

$$U(z; x, t) = \frac{U^0(z; x - ct)}{1 + tU^0(z; x - ct)}. \quad (4.8)$$

Expression (4.8) describes the nonlinear transfer of the initial condition (4.5) along the  $x$ -axis at a speed  $c$ .

Comparing expressions (4.6) and (4.8) and using the theory of analytical functions it is not difficult to find general representation (4.4) of exact solution of the Cauchy problem (4.2) (such as (4.1)).

**P r o o f f i n i s h e d.**

**Remark 4.1.** *Singular points of expression (4.8) may depend on time  $t$  and coordinate  $x$  hence internal and external radii of the analyticity ring  $K$  for function (4.8) may depend on time  $t$  and coordinate  $x$  too:  $r = r(x, t)$  and  $R = R(x, t)$ . Therefore radius  $\rho$  of the integration circle  $C_\rho \subset K$  in expression (4.4) generally speaking also depends on time  $t$  and coordinate  $x$ :  $\rho = \rho(x, t)$ .*

### 5. Examples of exact solutions of countable-dimensional system of nonlinear partial differential equations

In practice instead of usage of formula (4.4) it is more convenient to derive the Laurent expansion (4.6) and to extract exact solution  $u(x, t) \in \mathbb{L}$  of the Cauchy problem (4.1) from formula (4.8) straightforwardly.

The next theorem illustrates this approach.

**Theorem 5.1.** *Exact solution of the Cauchy problem (4.2) under the following nonzero values for initial condition  $u^0(x) \in \mathbb{L}$ :*

$$u_0^0(x) = a(x), \quad u_1^0(x) = u_{-1}^0(x) = \frac{b(x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

is equal to

$$u_0(x, t) = \frac{a(x - ct) + b(x - ct)\zeta(x, t)}{\sqrt{A^2(x, t) - B^2(x, t)}}, \tag{5.2}$$

$$u_1(x, t) = \frac{b(x - ct)\zeta^2(x, t) + 2a(x - ct)\zeta(x, t) + b(x - ct)}{2\sqrt{A^2(x, t) - B^2(x, t)}}, \tag{5.3}$$

$$u_n(x, t) = u_{-n}(x, t) = u_1(x, t)\zeta^{n-1}(x, t), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

$$\zeta(x, t) = -\frac{B(x, t)}{A(x, t) + \sqrt{A^2(x, t) - B^2(x, t)}}, \tag{5.5}$$

and  $A(x, t) = 1 + ta(x - ct)$ ,  $B(x, t) = tb(x - ct)$ .

**P r o o f.**

First of all let us construct from initial conditions (5.1) initial generating function (4.5):

$$U^0(z; x) = a(x) + \frac{b(x)}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right). \tag{5.6}$$

After that substituting function (5.6) in formula (4.8) one can obtain:

$$U(z; x, t) = \frac{2a(x - ct)z + b(x - ct)(z^2 + 1)}{2A(x, t)z + B(x, t)(z^2 + 1)}. \tag{5.7}$$

The structure of expression (5.7) coincides with the structure of expression (3.5). In particular, the denominator of the expression (5.7) has two zeros:  $z_1 = \zeta(x, t)$  and  $z_2 = \frac{1}{\zeta(x, t)}$ . Thus, in full analogy with formula (3.7), the Laurent series expansion of function (5.7) is:

$$U(z; x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^{n-1}(x, t) (z^n + z^{-n}). \tag{5.8}$$

The series (5.8) converges in the variable  $z$  in an open ring:

$$K_{x,t} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\zeta(x,t)| < |z| < \left| \frac{1}{\zeta(x,t)} \right| \right\}. \quad (5.9)$$

P r o o f f i n i s h e d.

**Remark 5.1.** *The exact solution (5.2)–(5.5) of the Cauchy problem (4.2) is given by two arbitrary functions  $a(x)$  and  $b(x)$ . It is obvious that these functions must be differentiable on the entire number line. In addition, at each point  $(x, t)$ , these functions must allow the existence of the open ring (5.9).*

To illustrate the application of Theorem 5.1, let us choose the following initial conditions:

$$a(x) = \frac{1}{2}, \quad b(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cos x, \quad (5.10)$$

and let the transfer rate be  $c = 0.2$ .

The functions (5.10) are periodic with a period  $2\pi$ , so in this case the exact solution (5.2)–(5.5) can only be considered for  $x \in [0, 2\pi]$ .

Let  $t \in [0, 10]$ . Figure 5.1 shows the graph of the auxiliary function (5.5), which corresponds to the functions (5.10), on the open rectangle  $\Pi = (0, 2\pi) \times (0, 10)$ .

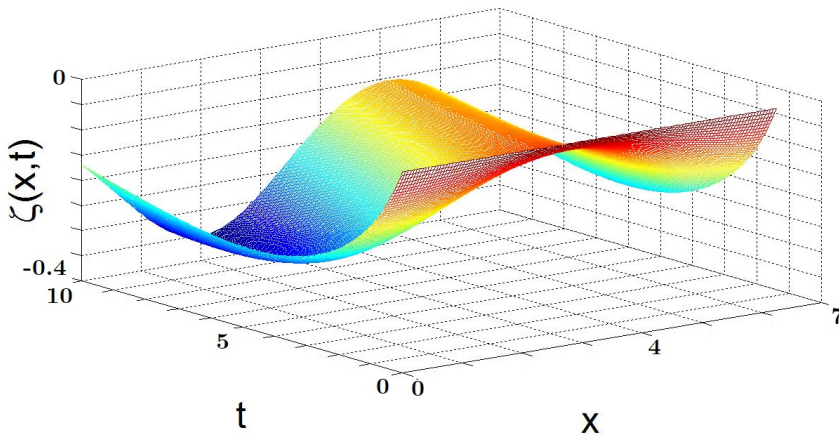


Рис. 5.1. Пространственно-временная эволюция вспомогательной функции  $\zeta(x, t)$

Fig. 5.1. Spatiotemporal evolution of auxiliary function  $\zeta(x, t)$

It can be seen from Figure 5.1 that  $\sup_{\Pi} |\zeta(x, t)| < 1$ , therefore,  $\inf_{\Pi} \left| \frac{1}{\zeta(x, t)} \right| > 1$ .

Further, let  $K_{\Pi} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sup_{\Pi} |\zeta(x, t)| < |z| < \inf_{\Pi} \left| \frac{1}{\zeta(x, t)} \right| \right\}$ . For all  $(x, t) \in \Pi$  this open ring lies inside the open ring (5.9):  $K_{\Pi} \subseteq K_{x,t}$ . It means that the Laurent series (5.8) converges in the open ring  $K_{\Pi}$ , and for the integration contour  $C_{\rho}$  in formula (4.4) we can set  $\rho = 1$ .

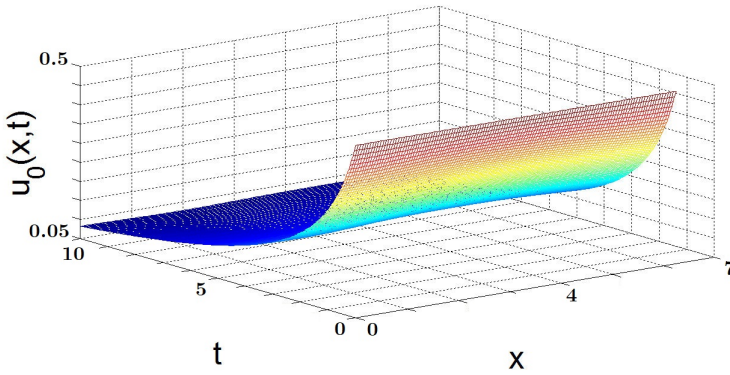


Рис. 5.2. Пространственно-временная эволюция функции  $u_0(x, t)$   
 Fig. 5.2. Spatiotemporal evolution of function  $u_0(x, t)$

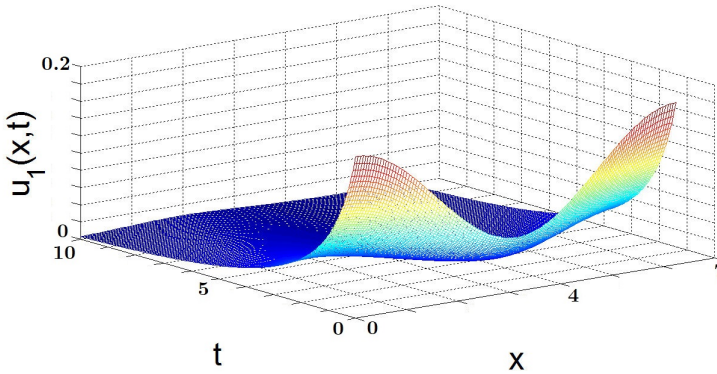


Рис. 5.3. Пространственно-временная эволюция функции  $u_1(x, t)$   
 Fig. 5.3. Spatiotemporal evolution of function  $u_1(x, t)$

The graphs of the first four functions  $u_n(x, t)$  ( $n = \overline{0, 3}$ ) on the rectangle  $\Pi$  are presented in Figures 5.2-5.5.

In conclusion of this section let one observe that equation (4.7) do not contain variable  $z$  explicitly. This means that the following statement is true, which is quite similar to Theorem 3.2, namely:

**Theorem 5.2.** *If generating function  $U(z; x, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (4.1) with initial condition representing by generating function  $U^0(z; x)$ , then for all  $p = 2, 3, 4, \dots$  generating function  $U(z^p; x, t)$  represents exact solution of the Cauchy problem (4.1) with initial condition representing by generating function  $U^0(z^p; x)$ .*

To illustrate Theorem 5.2, consider the following Laurent series expansion, constructed using the functions (5.2), (5.3) and (5.5):

$$\tilde{U}(z; x, t) \equiv U(z^p; x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^{n-1}(x, t) (z^{np} + z^{-np}). \quad (5.11)$$

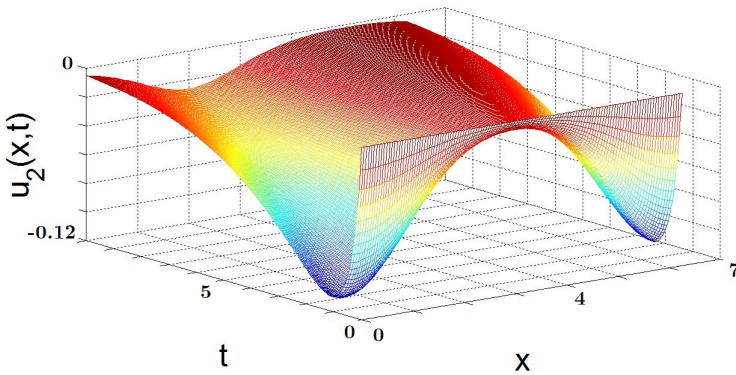


Рис. 5.4. Пространственно-временная эволюция функции  $u_2(x, t)$

Fig. 5.4. Spatiotemporal evolution of function  $u_2(x, t)$

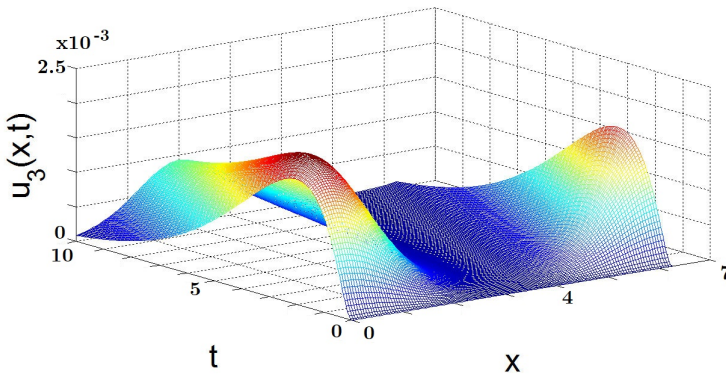


Рис. 5.5. Пространственно-временная эволюция функции  $u_3(x, t)$

Fig. 5.5. Spatiotemporal evolution of function  $u_3(x, t)$

According to Theorem 5.2, the function (5.11) is an exact solution of the equation (4.7), with the initial condition given by the function:

$$\tilde{U}^0(z; x) \equiv U^0(z^p; x) = a(x) + \frac{b(x)}{2} \left( z^p + \frac{1}{z^p} \right). \quad (5.12)$$

Thus, expansion (5.11) gives one exact solution of the countable-dimensional system of partial differential equations (4.2) with initial condition (5.12) as follows:

$$\tilde{u}_0(x, t) = u_0(x, t), \quad \tilde{u}_{\pm np}(x, t) = u_n(x, t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.13)$$

where  $u_n(x, t)$  are functions (5.2)–(5.4), and place between components of vector  $\tilde{u}(x, t) \in \mathbb{L}$  with numbers  $np$  and  $np + p$  both in initial condition (5.12) and exact solution (5.11) are filled by zeros.

Structure of exact solution (5.13) is completely analogous to structure of signal under procedure of unsumpling in digital signal processing [12].

## 6. Conclusion

The work deals with dynamical systems in the linear space  $\mathbb{L}$  of double-sided sequences. This countable-dimensional space is described by Definition 1.2.

In the article general solution (2.9) of the Cauchy problem (2.1) in this space has been done. This dynamical system arises from the spatial discretization of nonlinear integro-differential equation (2.3). Theorem 3.1 provides specific example of exact solution to Cauchy problem (2.1), and Theorem 3.2 demonstrates how this exact solution generates a countable set of exact solutions for the dynamical system (2.1). These specific examples of exact solutions are important for illustrating the application of general theorems in the theory of countable-dimensional systems of ordinary differential equations, which was introduced in article [13]. In addition, this result extends and complements our knowledge of the integrability of nonlinear countable-dimensional systems of ordinary differential equations, which dates back to works [14–15].

General solution (4.4) of the Cauchy problem (4.1) extends above-described approaches on the case of distributed dynamical system in the space of double-sided sequences.

Of significant interest is the extension of the approaches developed in this article to both analogues of discrete dynamical systems in the space  $\mathbb{L}$  and countable-dimensional analogues of systems of ordinary differential equations with the property of deterministic chaos [16–18].

**Acknowledgements.** The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University (grant No. 25-00-014 "A new numerical-analytical method for solving Cauchy problems for evolutionary equations and systems of evolutionary equations with quadratic nonlinearity").

## REFERENCES

1. S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus books, Massachusetts, 1994, 498 p.
2. L. P. Shilnikov, A. P. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I*, World Scientific, Singapore, 1998 DOI: 10.1142/9789812798596, 392 p.
3. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, New York, 2016 DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3, 295 p.
4. Yu. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, New York, 1998, 593 p.
5. E. A. Motorova, Yu. I. Neimark, "On stability of a nonlinear distributed model of natural circulation", *Avtomatika i Telemekhanika*, 1974, no. 3, 28–36 (In Russ.).
6. A. N. Kulikov, "Attractors of a nonlinear boundary value problem arising in aeroelasticity", *Differential Equations*, **37**:3 (2001), 425–429.
7. A. E. Rassadin, A. V. Stepanov, L. A. Fomin, "New explicit solution of the Kardar-Parisi-Zhang equation and its application", *Advanced science*, 2018, no. 1, 28–33 (In Russ.). DOI: 10.25730/VSU.0536.18.005

8. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsii i funtsionalnogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]*, Nauka, Moscow, 1989 (In Russ.), 624 p.
9. A. E. Rassadin, “On one countable-dimensional system of ordinary differential equations”, *XVI International Scientific and Technical Conference «Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems»: Proceedings* (Penza, December 1-4, 2021), PSU Publishers, Penza, 2021, 51–56.
10. A. E. Rassadin, “Exact Solutions of One Nonlinear Countable-Dimensional System of Integro-Differential Equations”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **25**:1 (2023), 542–563.
11. A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, N. Piscounoff, “Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”, *Bulletin de l'Université d'État de Moscou, Section A. Mathématiques et Mécanique*, **1**:6 (1937), 1–25 (In French.).
12. E. C. Heachor, B. W. Jervis, *Digital signal processing. A practical approach*, Addison Wesley, Wokingham, 2002, 933 p.
13. A. Tychonoff, “Über unendliche Systeme von Differentialgleichungen”, *Matematicheskii Sbornik*, **41**:4 (1934), 551–560 (In German.).
14. M. Toda, “Vibration of a chain with nonlinear interaction”, *Journal of the Physical Society of Japan*, **22**:2 (1967), 431–436.
15. O. I. Bogoyavlenskii, “Algebraic constructions of integrable dynamical systems — extensions of the Volterra system”, *Russian Mathematical Surveys*, **46**:3 (1991), 1–64.
16. A. E. Rassadin, “On some new results in the theory of countable-dimensional systems of ordinary differential equations”, *XXX Scientific session of Council on nonlinear dynamics of RAS: Proceedings* (Moscow, December 20-21, 2021), Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow, 2021, 34.
17. A. E. Rassadin, “Dynamical systems in the space of double-sided sequences and deterministic chaos”, *International Scientific Conference «Ufa autumn mathematical school»: Proceedings. Vol. II* (Ufa, October 6-9, 2021), Aetherna, Ufa, 2021, 85–87.
18. A. E. Rassadin, “Remark on the dynamical system in the space of double-sided sequences”, *International Conference-School «Shilnikov Workshop-2021»: Proceedings* (Nizhny Novgorod, December 16-17, 2021), NNGU, Nizhny Novgorod, 2021, 26.
19. E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin, “Exact solution of one nonlinear ordinary differential equation in Banach algebra  $l_1(\mathbb{R})$ ”, *Third International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, and School «Integrable and Nonlinear Days»: Proceedings* (Yaroslavl, October 4-8, 2021), YarSU, Yaroslavl, 2021, 11–12.
20. A. E. Rassadin, “Exact solution of one countable-dimensional system of nonlinear partial differential equations”, *Satellite International Conference on NONLINEAR DYNAMICS AND INTEGRABILITY and Scientific School «Nonlinear days»: Proceedings* (Yaroslavl, June 27 -July 1, 2022), YarSU, Yaroslavl, 2022, 83–86.

*Submitted 10.11.2021; Revised 19.02.2022; Accepted 24.02.2022*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Massachusetts: Perseus books, 1994. 498 p.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с. DOI: 10.1142/9789812798596
3. Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. New York: Springer, 2016. 295 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3.
4. Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.
5. Моторова Э. А., Неймарк Ю. И. Об устойчивости нелинейной распределённой модели естественной конвекции // *Автоматика и телемеханика*. 1974. № 3. С. 28–36.
6. Куликов А. Н. Аттракторы одной нелинейной краевой задачи, встречающейся в теории аэроупругости // *Дифференциальные уравнения*. 2001. Т. 37, № 3. С. 397–401.
7. Рассадин А. Э., Степанов А. В., Фомин Л. А. Новое явное решение уравнения Кардара-Паризи-Цванга и его применения // *Advanced science*. 2018. № 1. С. 28–33. DOI: 10.25730/VSU.0536.18.005
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
9. Рассадин А. Э. Об одной счётномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Материалы XVI Международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем» (Пенза, 1-4 декабря 2021 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2021. С. 51–56.
10. Рассадин А. Э. Точные решения одной нелинейной счётномерной системы интегродифференциальных уравнений // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 23, № 1. С. 542–563.
11. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюллетень МГУ. Серия А. Математика и механика*. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–26.
12. Ifeachor E. C., Jervis B. W. Digital signal processing. A practical approach. Wokingham: Addison Wesley, 2002. 933 p.

13. Tychonoff A. Über unendliche Systeme von Differentialgleichungen // *Математический сборник*. 1934. Т. 41, № 4. С. 551–560.
14. Toda M. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1967. Vol. 22, no. 2. P. 431–436.
15. Богоявленский О. И. Алгебраические конструкции интегрируемых динамических систем — расширение системы Вольтерра // *Успехи математических наук*. 1991. Т. 46, вып. 3(279). С. 3–48.
16. Рассадин А. Э. О некоторых новых результатах в теории счётномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // XXX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, 20-21 декабря 2021 г., Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН). Аннотации выступлений. С. 34.
17. Рассадин А. Э. Динамические системы в пространстве двусторонних последовательностей и детерминированный хаос // Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В 2 томах. Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. Уфа: Аэтерна, 2021. С. 85–87.
18. Rassadin A. E. Remark on the dynamical system in the space of double-sided sequences. *International Conference-School «Shilnikov Workshop-2021»: Proceedings* (Nizhny Novgorod, December 16 -17, 2021). NNGU, Nizhny Novgorod, 2021. P. 26
19. Alekseeva E. S., Rassadin A. E. Exact solution of one nonlinear ordinary differential equation in Banach algebra  $l_1(\mathbb{R})$ . *Third International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, and School «Integrable and Nonlinear Days»: Proceedings* (Yaroslavl, October 4-8, 2021). Yaroslavl, YarSU, 2021. P. 11–12.
20. Rassadin A. E. Exact solution of one countable-dimensional system of nonlinear partial differential equations. *Satellite International Conference on NONLINEAR DYNAMICS AND INTEGRABILITY and Scientific School «Nonlinear days»: Proceedings* (Yaroslavl, June 27 -July 1, 2022). Yaroslavl, YarSU, 2022. P. 83–86.

*Поступила 10.11.2021; доработана после рецензирования 19.02.2022;  
принята к публикации 24.02.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.5

## Синтез оптимальных линейных регуляторов с ограничением на область расположения корней

М. В. Сотникова, А. С. Томилова, Т. А. Лепихин

*Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В настоящее время синтез линейных квадратичных регуляторов (LQR-регуляторов) является одним из наиболее значимых и широко используемых на практике методов построения оптимальных стабилизирующих регуляторов. Данный метод гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы, то есть расположение корней её характеристического полинома в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. В данной работе предлагается расширение возможностей классического LQR-синтеза. Именно, рассматривается задача поиска оптимального линейного регулятора, минимизирующего квадратичный функционал качества, с дополнительным ограничением на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. В качестве такой области вводится сектор в левой полуплоскости комплексной плоскости, что позволяет влиять на показатели качества переходных процессов в замкнутой системе, например, на длительность и колебательность. Осуществлена параметризация области расположения корней с помощью векторов евклидова пространства. Показано, что поставленная задача параметрического синтеза о поиске оптимального регулятора с учетом модальных ограничений сводится к форме безусловной минимизации. Разработан вычислительный алгоритм поиска оптимального регулятора, опирающийся на решение линейного матричного уравнения Ляпунова на каждой итерации метода оптимизации, но не требующий решения нелинейного уравнения Риккати. Рассмотрен вопрос о поиске весовых матриц квадратичного функционала в задаче синтеза LQR-регулятора без ограничений, соответствующих найденному оптимальному регулятору в задаче с модальными ограничениями. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы практическим примером управления курсом морского судна.

**Ключевые слова:** линейный регулятор, квадратичный функционал, модальные ограничения, матричное уравнение Ляпунова, безусловная оптимизация, морское судно

**Для цитирования:** Сотникова М. В., Томилова А. С., Лепихин Т. А. Синтез оптимальных линейных регуляторов с ограничением на область расположения корней // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 47–61. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61

*Об авторах:*

**Сотникова Маргарита Викторовна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, [m.sotnikova@spbu.ru](mailto:m.sotnikova@spbu.ru)

**Томилова Анастасия Сергеевна**, аспирант кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8074-754X>, [nt4815@gmail.com](mailto:nt4815@gmail.com)

© М. В. Сотникова, А. С. Томилова, Т. А. Лепихин



**Лепихин Тимур Андреевич**, кандидат физико-математических наук, ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5218-8250>, [t.lepihin@spbu.ru](mailto:t.lepihin@spbu.ru)

*Original article*

*MSC2020 93B52*

## Synthesis of optimal linear controllers with constraints on the root domain

**M. V. Sotnikova, A. S. Tomilova, T. A. Lepikhin**

*Saint-Petersburg State University (St. Petersburg, Russian Federation)*

**Abstract.** Currently, the synthesis of LQR controllers (i.e., linear quadratic regulators) is one of the most significant and widely used method for designing optimal stabilizing controllers. This method guarantees the asymptotic stability of a closed-loop system, which means that the roots of its characteristic polynomial are placed in the open left half-plane of the complex plane. This paper proposes an extension for the capabilities of classical LQR synthesis. Namely, the considered problem is designing an optimal linear controller that minimizes a quadratic performance functional with an additional constraint on the root domain of the closed-loop system's characteristic polynomial. A sector in the left half-plane of the complex plane is introduced as such a region, which makes it possible to influence such performance indices of transient processes in a closed-loop system as the transient time and oscillation. The root domain is parameterized using Euclidean space vectors. It is shown that the parametric synthesis problem of obtaining an optimal controller, taking into account modal constraints, reduces to unconstrained minimization. A computational algorithm for obtaining the optimal controller is developed, which is based on solving a linear Lyapunov matrix equation at each iteration of the optimization method, but does not require solving the nonlinear Riccati equation. Searching for weight matrices of a quadratic functional in the synthesis of an LQR controller without constraints, corresponding to the optimal controller in a problem with modal constraints, is considered. The obtained theoretical results are illustrated with a practical example of vessel course control.

**Keywords:** linear controller, quadratic functional, modal constraints, Lyapunov matrix equation, unconstrained optimization, marine vessel

**For citation:** *M. V. Sotnikova, A. S. Tomilova, T. A. Lepikhin. Synthesis of optimal linear controllers with constraints on the root domain. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:2(2026), 47–61. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61*

*About the authors:*

**Margarita V. Sotnikova**, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Computer Applications and Systems, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, [m.sotnikova@spbu.ru](mailto:m.sotnikova@spbu.ru)

**Anastasiia S. Tomilova**, Postgraduate Student, Department of Computer Applications and Systems, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8074-754X>, [nt4815@gmail.com](mailto:nt4815@gmail.com)

**Timur A. Lepikhin**, Ph.D. (Phys. and Math.), Assistant, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5218-8250>, [t.lepikhin@spbu.ru](mailto:t.lepikhin@spbu.ru)

## 1. Введение

Работа посвящена вопросам синтеза оптимальных регуляторов для линейных стационарных систем. Широко известным классическим подходом к построению оптимального управления является LQR-синтез (Linear Quadratic Regulator), основанный на решении матричного уравнения Риккати [1]. При этом для найденного оптимального регулятора гарантируется, что собственные числа матрицы замкнутой системы расположены в открытой левой полуплоскости.

На практике к качеству функционирования систем управления, как правило, предъявляется совокупность требований, в том числе они предъявляются к таким показателям как длительность, перерегулирование, колебательность переходных процессов. Стремление к выполнению этих требований в случае LQR-синтеза приводит либо к необходимости ручной настройки весовых матриц квадратичного функционала качества, либо к решению дополнительных нелинейных оптимизационных задач. Изменение весовых матриц квадратичного функционала приводит к смещению корней характеристического полинома замкнутой системы и к соответствующему изменению переходных процессов. Однако возможности ручной настройки весьма ограничены, особенно для систем с большими размерностями векторов состояния и управления, для которых она обычно сводится к вариациям диагональных элементов весовых матриц.

В связи с этим в данной работе предлагается новый метод синтеза LQR-регулятора с дополнительным ограничением на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. Указанная область представляет собой сектор в левой полуплоскости комплексной плоскости. Введение этой области позволяет влиять на такие показатели качества, как длительность и колебательность переходных процессов, сужая допустимое множество регуляторов. При этом искомый регулятор является оптимальным по отношению к заданному квадратичному функционалу качества. Таким образом, целью работы является расширение возможностей классического LQR-синтеза, при котором помимо оптимальности регулятора гарантируется также расположение корней характеристического полинома замкнутой системы не только в левой полуплоскости, но и в заданной области.

В работе приведена формализованная постановка задачи синтеза оптимального регулятора. Далее вводится область расположения корней в виде сектора в левой полуплоскости и осуществляется ее параметризация при помощи  $n$ -мерных векторов евклидова пространства. Данный подход к параметризации области расположения корней был ранее предложен в работах [1–3] и нашел практическое применение в задачах синтеза динамических регуляторов для подвижных объектов [4–6].

Проблема расположения корней характеристического полинома замкнутой системы в заданной области для LQR-регулятора ранее рассматривалась, в частности, в работах [7–11]. Область расположения корней в работах [7, 8, 11] вводится также в виде сектора, но содержит дополнительную вертикальную линию, отсекающую часть угла. В статье [9] рассматривается круговая область, а в работе [10] вводится сектор, аналогичный рассматриваемому в данной работе. В исследованиях [7, 8, 11] предложен алгоритм решения поставленной задачи, в котором на каждой итерации решается матричное уравнение Ляпунова. В этом состоит его сходство с предлагаемым в данной работе алгоритмом. Однако предлагаемый в настоящей работе подход основан на параметризации области расположения корней и принципиально отличается от предложенных ранее решений.

Работа структурирована следующим образом. Во введении описана проблематика, включая краткий литературный обзор. Во втором параграфе приведена формализованная постановка задачи. В третьем параграфе рассматривается способ параметризации области расположения корней и доказываются утверждения, обосновывающие предложенный подход и позволяющие свести поставленную задачу к безусловной оптимизации. Приводится вычислительный алгоритм поиска оптимального регулятора и исследуется вопрос о поиске весовых матриц квадратичного функционала в задаче синтеза LQR-регулятора, соответствующих оптимальному решению в задаче с модальными ограничениями. В четвертом параграфе в качестве практического приложения полученных результатов рассматривается задача управления курсом морского судна. В заключении указаны основные результаты исследования.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную математическую модель объекта управления вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x} \in E^n$  – вектор состояния,  $u \in E^1$  – управляющий сигнал. Будем считать, что система (2.1) является полностью управляемой. Целью управления является стабилизация нулевого положения равновесия замкнутой системы.

Качество процессов управления будем характеризовать квадратичным функционалом

$$J(u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{R}\mathbf{x} + qu^2) dt, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{R}$  – положительно определенная, симметричная весовая матрица,  $q > 0$  – весовой множитель.

Обратную связь будем искать в форме линейного регулятора:

$$u = \mathbf{k}\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Введем дополнительное требование на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3). В качестве такой области примем область  $\mathbf{C}_{\Delta}$  комплексной плоскости, показанную на рис. 2.1, которая формально задается следующим образом [1, 2]:

$$\mathbf{C}_{\Delta} = \{s = x \pm jy \in \mathbf{C}^1 : x \leq -\alpha, 0 \leq y \leq (-x - \alpha) \operatorname{tg} \beta\},$$

где  $x = \text{Re}(s)$ ,  $y = \text{Im}(s)$ ,  $s$  – произвольная точка комплексной плоскости,  $\alpha > 0$  и  $0 \leq \beta < \pi/2$  – заданные вещественные числа.

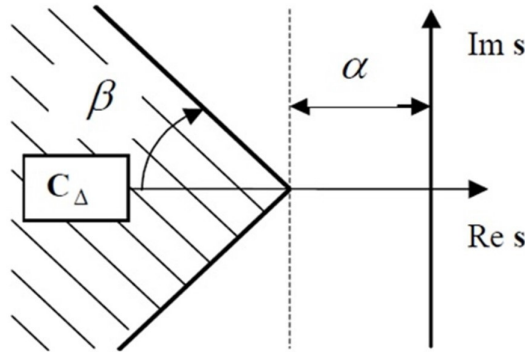


Рис. 2.1. Область  $C_\Delta$

Fig. 2.1. Region  $C_\Delta$

Введение области  $C_\Delta$  позволяет регулировать такие показатели качества переходного процесса, как длительность и колебательность. При этом параметр  $\alpha$  формирует ограничения на вещественную часть собственных чисел и влияет на длительность процессов в замкнутом контуре, а параметр  $\beta$  задает ограничения на мнимую часть собственных чисел и влияет на колебательность.

Поставим задачу поиска оптимального регулятора вида (2.3), доставляющего минимум квадратичному функционалу (2.2) на движениях объекта управления (2.1) и обеспечивающего расположение корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3) внутри области  $C_\Delta$ .

Формализовано данную задачу можно записать в следующем виде:

$$J(\mathbf{k}) \longrightarrow \min_{\mathbf{k} \in \Omega_K}, \tag{2.4}$$

где  $\Omega_K = \{\mathbf{k} : \Delta(s_i, \mathbf{k}) = 0, s_i \in C_\Delta, i = \overline{1, n}\}$  – допустимое множество регуляторов,  $\Delta(s, \mathbf{k}) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$  – характеристический полином замкнутой системы (2.1), (2.3),  $s_i$  – корни характеристического полинома.

Важно отметить, что применение классического подхода к решению задачи минимизации интегрального квадратичного функционала (2.2) на основе матричного уравнения Риккати гарантирует лишь расположение корней характеристического полинома в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, но при этом не позволяет выполнить заданное ограничение на область расположения корней.

В связи с этим в данной работе предлагается иной подход, основанный на параметризации области  $C_\Delta$ , который позволяет свести исходную существенно нелинейную задачу параметрического синтеза (2.4) к форме задачи на безусловный экстремум.

### 3. Метод синтеза оптимального регулятора

Рассмотрим сначала вопрос о параметризации области  $C_\Delta$ . Приведем здесь утверждение, которое позволяет параметризовать данную область с помощью вектора ев-

клидового пространства  $\gamma \in E^n$  [1, 2].

**Теорема 3.1.** Для любого вектора  $\gamma \in E^n$  все корни полинома

$$\Delta^*(s, \gamma) = \begin{cases} \tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n - \text{ четное;} \\ (s + a_{d+1}(\gamma, \alpha))\tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n - \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (3.1)$$

принадлежат области  $\mathbf{C}_\Delta$ , и обратно, если все корни некоторого полинома  $\Delta(s)$  принадлежат этой области, то можно указать такой вектор  $\gamma \in E^n$ , что справедливо тождество  $\Delta(s) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$ , причем

$$\tilde{\Delta}^*(s, \gamma) = \prod (s^2 + a_i^1(\gamma, \alpha)s + a_i^0(\gamma, \alpha)), \quad d = \left[ \frac{n}{2} \right], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} a_i^1(\gamma, \alpha) &= 2\alpha + 2\gamma_{i1}^2, \\ a_i^0(\gamma, \alpha) &= \alpha^2 + 2\gamma_{i1}^2\alpha + f(\gamma_{i2})\frac{\gamma_{i1}^4}{\cos^2(\beta)}, \quad i = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$a_{d+1}(\gamma, \alpha) = \gamma_{d0}^2 + \alpha, \quad \gamma = \{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{d1}, \gamma_{d2}, \gamma_{d0}\}. \quad (3.4)$$

При этом функция  $f(\cdot) : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, 1)$  удовлетворяет условию существования обратной функции во всей области задания.

Таким образом, при любом выборе вектора  $\gamma \in E^n$  корни полинома  $\Delta^*(s, \gamma)$  расположены внутри области  $\mathbf{C}_\Delta$ , и наоборот, каждому фиксированному распределению корней в области  $\mathbf{C}_\Delta$  соответствует единственный вектор  $\gamma \in E^n$  [1], т.е. существует взаимно однозначное соответствие между расположением корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3) внутри области  $\mathbf{C}_\Delta$  и значениями вектора  $\gamma \in E^n$ .

Пользуясь этой теоремой, установим взаимосвязь между векторами  $\mathbf{k} \in \Omega_K$  регулятора (2.3) и соответствующими векторами  $\gamma \in E^n$ . Для этого запишем уравнения замкнутой системы (2.1), (2.3) в изображениях по Лапласу:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{G}(s)}{A(s)}u + \frac{\mathbf{G}_0(s)}{A(s)}, \quad u = \mathbf{k}\mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\mathbf{G}(s) = (G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s))^T$  – вектор-столбец, в состав которого входят полиномиальные компоненты

$$G_i(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_i = g_1^i s_{n-1} + \dots + g_{n-1}^i + g_n^i, \quad i = \overline{1, n},$$

где

матрицы  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_i$  получены из характеристической матрицы  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  заменой  $i$ -ых столбцов на вектор  $\mathbf{b}$ ;

$A(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  – характеристический полином матрицы  $\mathbf{A}$ ;

$\mathbf{G}_0(s) = A(s)(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$  – полиномиальный вектор-столбец, определяемый заданными начальными условиями  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  по вектору состояния.

Приведем уравнения замкнутой системы (3.5) к одному уравнению относительно скалярного управления:

$$u = \mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{G}(s)}{A(s)}u + \frac{\mathbf{G}_0(s)}{A(s)} \right) \quad \text{или} \quad (A(s) - \mathbf{k}\mathbf{G}(s))u = \mathbf{k}\mathbf{G}_0(s).$$

Отсюда следует, что характеристический полином замкнутой системы (2.1), (2.3) равен

$$\Delta(s, \mathbf{k}) = A(s) - \mathbf{kG}(s). \tag{3.6}$$

Пусть  $s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни характеристического полинома (3.6), которые расположены в области  $\mathbf{C}_\Delta$ . В соответствии с теоремой 3.1 такому набору корней взаимно однозначно соответствуют вектор  $\gamma \in E^n$  и полином

$$\Delta^*(s, \gamma) = \prod_{i=1}^m (s - s_i) \equiv s^n + \chi_1 s^{n-1} + \dots + \chi_{n-1} s + \chi_n,$$

равный характеристическому полиному (3.6). Здесь коэффициенты  $\chi_i = \chi_i(\gamma)$ ,  $i = \overline{1, n}$  вычисляются с использованием формул (3.1)–(3.4).

Введем обозначения:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$  – вектор-столбец коэффициентов полинома  $A(s)$ ;  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in E^n$  – вектор-столбец коэффициентов полинома  $\Delta^*(s, \gamma)$ ;

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \dots \\ \mathbf{g}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \dots & g_1^n \\ g_2^1 & g_2^2 & \dots & g_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n^1 & g_n^2 & \dots & g_n^n \end{pmatrix},$$

где  $\Gamma$  – матрица с вектор-строками  $\mathbf{g}^j = (g_j^1, g_j^2, \dots, g_j^n) \in E^n$ , состоящими из коэффициентов полиномов  $G_i(s)$  при одинаковых степенях  $j$  переменной  $s$ .

Найдем вектор  $\mathbf{k}$  регулятора (2.3), обеспечивающий выполнение тождества

$$\Delta(s, \mathbf{k}) \equiv \Delta^*(s, \gamma).$$

С учетом формулы (3.6), получаем

$$\mathbf{kG}(s) \equiv A(s) - \Delta^*(s, \gamma). \tag{3.7}$$

В результате, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим линейную систему алгебраических уравнений

$$\Gamma \mathbf{k}^T = \mathbf{a} - \chi(\gamma). \tag{3.8}$$

Если объект (2.1) является вполне управляемым по Калману, то матрица  $\Gamma$  является неособой. Следовательно, решение алгебраической системы (3.8) можно записать в виде:

$$\mathbf{k}^T(\gamma) = \Gamma^{-1}(\mathbf{a} - \chi) = \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1 \chi(\gamma), \tag{3.9}$$

где  $\mathbf{l}_0 = \Gamma^{-1} \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{l}_1 = -\Gamma^{-1}$ .

Выражение (3.9) устанавливает искомую связь между вектором  $\mathbf{k}$  линейного регулятора (2.3) и произвольными векторами  $\gamma \in E^n$  евклидова пространства.

Введем вспомогательные обозначения:

$$\overline{\mathbf{A}}(\gamma) = \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}(\gamma), \quad \overline{\mathbf{R}}(\gamma) = \mathbf{R} + \mathbf{q} \mathbf{k}^T(\gamma) \mathbf{k}(\gamma).$$

Докажем следующее утверждение, которое позволяет вычислить значение квадратичного функционала (2.2) для произвольного вектора  $\gamma \in E^n$ .

**Теорема 3.2.** Для любого  $\gamma \in E^n$  значение квадратичного функционала (2.2) вычисляется по формуле

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma) \mathbf{x}_0, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{P}$  – решение матричного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} = -\bar{\mathbf{R}}.$$

**Доказательство.** Пусть вектор  $\gamma \in E^n$ . Построим соответствующий ему линейный регулятор  $\mathbf{k}(\gamma)$  по формуле (3.9) и запишем уравнения замкнутой системы (2.1), (2.3):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}(\gamma)\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}(\gamma))\mathbf{x} = \bar{\mathbf{A}}(\gamma)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.11)$$

Заметим, что матрица  $\bar{\mathbf{A}}(\gamma)$  является гурвицевой и ее собственные числа принадлежат области  $\mathbf{C}_\Delta$ . В соответствии с формулой Коши, решение системы уравнений (3.11) задается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}(\gamma)t} \mathbf{x}_0. \quad (3.12)$$

Далее, подставив в функционал (2.2) выражение для закона управления (2.3), получим:

$$\begin{aligned} J(\gamma) &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + qu^2) dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + qu^T u) dt = \\ &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + q \mathbf{x}^T \mathbf{k}^T(\gamma) \mathbf{k}(\gamma) \mathbf{x}) dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T (\mathbf{R} + q \mathbf{k}^T(\gamma) \mathbf{k}(\gamma)) \mathbf{x} dt = \\ &= \int_0^\infty \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{R}}(\gamma) \mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим, что весовая матрица  $\bar{\mathbf{R}}$  является симметричной и положительно определенной. Подставляя решение (3.12) в функционал (3.13), получим

$$J(\gamma) = \int_0^\infty \mathbf{x}_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}^T(\gamma)t} \bar{\mathbf{R}}(\gamma) e^{\bar{\mathbf{A}}(\gamma)t} \mathbf{x}_0 dt = \mathbf{x}_0^T \left( \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}^T(\gamma)t} \bar{\mathbf{R}}(\gamma) e^{\bar{\mathbf{A}}(\gamma)t} dt \right) \mathbf{x}_0. \quad (3.14)$$

Поскольку матрица  $\bar{\mathbf{A}}(\gamma)$  является гурвицевой, то несобственный интеграл в выражении (3.14) сходится. Обозначим его значение матрицей

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}^T(\gamma)t} \bar{\mathbf{R}}(\gamma) e^{\bar{\mathbf{A}}(\gamma)t} dt. \quad (3.15)$$

Нетрудно заметить, что выражение (3.15) задает решение матричного уравнения Ляпунова [12]

$$\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} = -\bar{\mathbf{R}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, подставляя матрицу  $\mathbf{P}$  в функционал (3.14), получаем искомую формулу для вычисления значения функционала:

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma) \mathbf{x}_0.$$

Доказательство завершено.

Подводя итог изложенным рассуждениям, можно сделать вывод, что на основе теорем 3.1 и 3.2 исходная нелинейная задача параметрического синтеза (2.4) может быть сведена к эквивалентной задаче безусловной оптимизации следующего вида

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma) \mathbf{x}_0 \longrightarrow \min_{\gamma \in E^n}. \quad (3.17)$$

Для численного решения данной задачи может быть применен любой градиентный метод безусловной оптимизации.

Обозначим вектором  $\gamma^*$  решение оптимизационной задачи (3.17). Тогда соответствующий ему вектор оптимального линейного регулятора (2.3) вычисляется по формуле (3.9) и равен  $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}(\gamma^*)$ .

Найдем весовую матрицу  $\tilde{\mathbf{R}}$  и весовой множитель  $\tilde{q}$  квадратичного функционала вида (2.2), соответствующие найденному оптимальному регулятору. Заметим, что для искомых величин  $\tilde{\mathbf{R}}$  и  $\tilde{q}$  должны выполняться следующие равенства, вытекающие из алгебраического уравнения Риккати и известного выражения для оптимального LQR-регулятора:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}(\gamma^*) + \mathbf{P}(\gamma^*) \overline{\mathbf{A}} - \frac{1}{q} \mathbf{P}(\gamma^*) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}(\gamma^*) + \tilde{\mathbf{R}} &= 0, \\ \mathbf{k}^* &= \frac{1}{q} \mathbf{b}^T \mathbf{P}(\gamma^*). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассматривая (3.18) как систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\tilde{\mathbf{R}}$  и  $\tilde{q}$ , находим ее решение:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \frac{|\mathbf{b}^T \mathbf{P}(\gamma^*)|}{|\mathbf{k}^*|}, \\ \tilde{\mathbf{R}} &= -\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}(\gamma^*) - \mathbf{P}(\gamma^*) \overline{\mathbf{A}} + \frac{1}{q} \mathbf{P}(\gamma^*) \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P}(\gamma^*). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В качестве результата сформулируем вычислительный алгоритм нахождения оптимального линейного регулятора в поставленной задаче.

1. Сформировать вектор  $\mathbf{a}$  коэффициентов полинома  $A(s)$  и матрицу  $\mathbf{\Gamma}$ .
2. Вычислить вспомогательные матрицу  $\mathbf{l}_1$  и вектор  $\mathbf{l}_0$  по формулам

$$\mathbf{l}_1 = -\mathbf{\Gamma}^{-1}, \quad \mathbf{l}_0 = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{a}.$$

3. Задать произвольную начальную точку  $\gamma = \gamma_0 \in E^n$ .
4. Построить полином  $\Delta^*(s, \gamma)$  по формулам (3.1)–(3.4) и выделить вектор его коэффициентов  $\chi(\gamma)$ .
5. Вычислить вектор  $\mathbf{k}(\gamma)$  регулятора (2.3) в соответствии с формулой (3.9).

6. Вычислить матрицы  $\bar{\mathbf{A}}(\gamma)$  и  $\bar{\mathbf{R}}(\gamma)$ .
7. Решить матричное уравнение Ляпунова (3.16) и найти матрицу  $\mathbf{P}$ .
8. Вычислить значение квадратичного функционала

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma) \mathbf{x}_0.$$

9. С помощью любого допустимого численного метода решения задачи (3.17) на безусловный экстремум задать новую точку  $\gamma$  и, повторяя пункты 4–8, минимизировать функцию  $J(\gamma)$ .
10. По нахождении точки

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in E^n} J(\gamma)$$

определить вектор  $\mathbf{k}(\gamma^*)$  регулятора (2.3), который будет принят в качестве решения поставленной задачи (2.4).

#### 4. Пример управления морским судном

В качестве объекта управления примем морское судно, движущееся в горизонтальной плоскости. Целью управления является разворот судна по курсу на 10 градусов.

Линейная математическая модель динамики судна задается следующей системой дифференциальных уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= a_{11}V_z + a_{12}\omega_y + b_1\delta, \\ \dot{\omega}_y &= a_{21}V_z + a_{22}\omega_y + b_2\delta, \\ \dot{\varphi} &= \omega_y, \\ \dot{\delta} &= u. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь  $V_z$  – боковая скорость судна,  $\omega_y$  – угловая скорость по курсу,  $\varphi$  – угол курса,  $\delta$  – угол перекладки вертикального руля,  $u$  – управляющий сигнал, определяющий скорость перекладки руля. Для скорости хода  $V = 10$  м/с коэффициенты модели (4.1) равны:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.083769, & a_{12} &= 16.23, & b_1 &= -0.17038, \\ a_{21} &= 0.002582, & a_{22} &= -0.52989, & b_2 &= -0.024459. \end{aligned}$$

Зададим функционал, характеризующий качество процессов управления в следующем виде

$$J = \int_0^{\infty} (0.01V_z^2 + 0.01\omega_y^2 + 10(\varphi - \varphi_z)^2 + 0.01\delta^2 + u^2) dt. \tag{4.2}$$

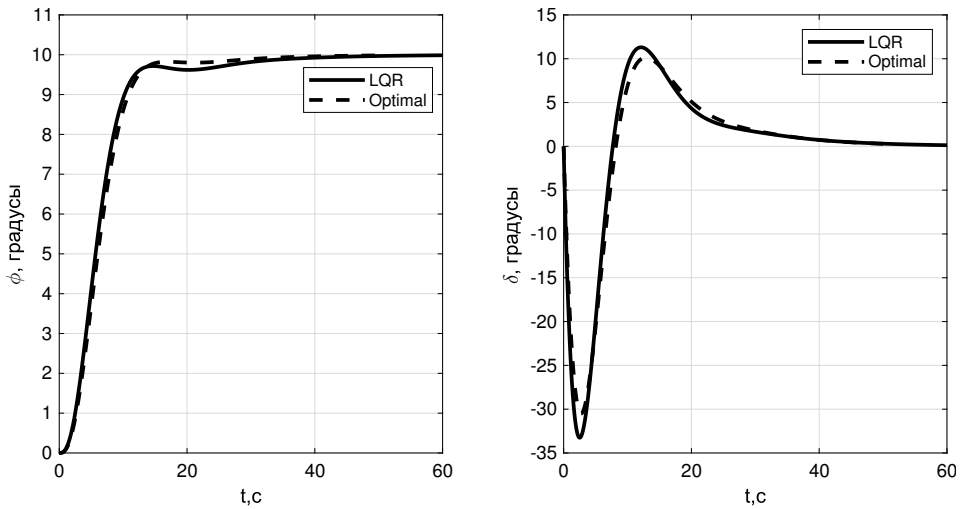
Выполним синтез LQR-регулятора для модели (4.1) по отношению к функционалу (4.2). В результате получим следующее значение вектора  $\mathbf{k}$  оптимального регулятора

$$\mathbf{k}_{LQR} = (0.0715, 6.8349, 3.1623, -0.6072),$$

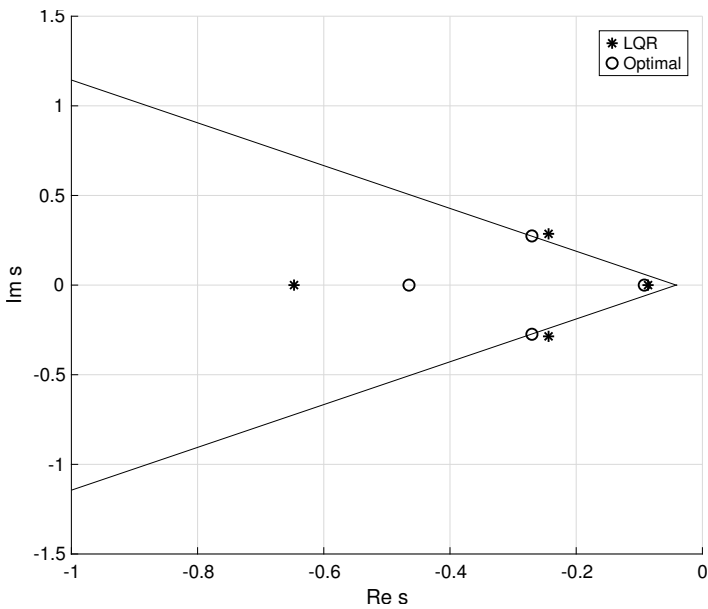
при этом собственные числа для замкнутой им системы равны

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.6472, & s_2 &= -0.0861, \\ s_3 &= -0.2438 + 0.2859i, & s_4 &= -0.2438 - 0.2859i. \end{aligned}$$

Графики переходных процессов по углам курса и перекладки вертикального руля показаны на рис. 4.1. На рис. 4.2 показано расположение корней характеристического полинома замкнутой LQR-регулятором системы.



**Рис. 4.1.** Изменение углов курса и перекладки руля  
**Fig. 4.1.** Transient processes for heading and rudder angles



**Рис. 4.2.** Расположение корней характеристического полинома замкнутой системы

**Fig. 4.2.** Eigenvalues location of a closed-loop system

Введем область  $C_{\Delta}$ , определяя её параметрами  $\beta = 50^{\circ}$  и  $\alpha = 0.04$ . Из рис. 4.2 видно, что два корня, построенные для LQR-регулятора, находятся вне заданной области  $C_{\Delta}$ , обозначенной на рисунке двумя лучами.

Выполним теперь все шаги алгоритма поиска оптимального регулятора, обеспечивающего попадание корней характеристического полинома замкнутой системы в заданную область  $C_{\Delta}$ . В результате получим следующий вектор оптимального регулятора

$$\mathbf{k}_{opt} = (0.0476, 7.5504, 2.5405, -0.4816). \quad (4.3)$$

Соответствующие графики переходных процессов представлены на рис. 4.1. При этом собственные числа матрицы замкнутой системы (4.1), (4.3) равны

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.0921, & s_2 &= -0.4626, \\ s_3 &= -0.2703 + 0.2744i, & s_4 &= -0.2703 - 0.2744i. \end{aligned}$$

Их расположение на комплексной плоскости показано на рис. 4.2, откуда видно, что все собственные числа принадлежат области  $C_{\Delta}$ , причем два из них расположены на её границе.

Отметим, что длительность переходного процесса, оцениваемая попаданием в двухпроцентную окрестность заданного значения угла курса, составляет 15 с для оптимального регулятора и 30 с – для LQR-регулятора. При этом энергетические затраты приводов руля для оптимального регулятора ниже, чем для LQR-регулятора.

Найдем весовой множитель и весовую матрицу квадратичного функционала, соответствующие найденному оптимальному регулятору, в соответствии с формулой (3.19). В результате получим

$$\tilde{q} = 0.9372, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0.0111 & 0.0128 & 0.0355 & -0.007 \\ 0.0128 & 3.6874 & 0.9297 & -0.1737 \\ 0.0355 & 0.9297 & 11.1919 & -0.2333 \\ -0.007 & -0.1737 & -0.2333 & 0.0557 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что приведенные весовые матрицы практически невозможно подобрать в случае ручной настройки весовых коэффициентов. Таким образом, полученные в примере результаты свидетельствуют о возможности улучшения качества переходных процессов при использовании LQR-синтеза в случае задания дополнительных модальных ограничений.

## 5. Заключение

В работе рассмотрена задача синтеза оптимального линейного регулятора для квадратичного функционала с учетом дополнительных модальных ограничений. Доказаны утверждения, обосновывающие возможность сведения поставленной задачи к безусловной оптимизации. Разработан вычислительный алгоритм, позволяющий выполнить синтез оптимального регулятора для произвольной линейной стационарной системы со скалярным управлением. Приведен практический пример управления курсом морского судна.

Предложенный подход расширяет возможности классического LQR-синтеза, позволяя вводить дополнительное ограничение на область расположения корней и тем самым влиять на такие показатели качества, как длительность и колебательность переходных процессов в замкнутой системе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веремей Е. И. Численные методы среднеквадратичного синтеза при наличии модальных ограничений // *АН УССР. Автоматика*. 1990. № 2. С. 22–27.
2. Коровкин М. В. Методы и алгоритмы оптимизации систем управления движением судов в нестационарных режимах : специальность 05.13.01 : диссертация ... кандидата физ.-мат. наук. 2002. 153 с.
3. Modal Parametric Optimization of Control Laws with Special Structure / E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, V. V. Ereemeev, M. V. Korovkin. *Proceedings of 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*. (Gyeonggi-do, Korea). P. 1278–1283. DOI:10.1109/ICCAS.2014.6987753
4. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10*. 2011. Вып. 1. С. 116–133.
5. Томилова А. С. Оптимизация робастных свойств системы управления при ограничениях на качество переходного процесса // *Навигация и управление движением: Материалы XXI конференции молодых ученых с международным участием*. Под общей редакцией В. Г. Пешехонова. 2019. С. 37–39.
6. Веремей Е. И., Еремеев В. В. Задачи SISO H-оптимизации с учетом структурных и модальных ограничений // *Системы управления и информационные технологии*. 2013. Т. 54, № 4. С. 8–15.
7. Shieh L. S., Dib H. M., Ganesan S. Linear quadratic regulators with eigenvalue placement in a specified region. *Automatica*. 1988. Vol. 24, no. 6. P. 819–823. DOI:10.1016/0005-1098(88)90058-1
8. Kawasaki N., Shimemura E. Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region. *Automatica*. 1983. Vol. 19, no. 5. P. 557–560. DOI:10.1016/0005-1098(83)90011-0
9. Haddad W. M., Bernstein D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1992. Vol. 37, no. 1. P. 54–69. DOI:10.1109/9.109638.
10. Yuan L., Achenie L. E. K., Jiang W. Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region. *International Journal of Control*. 1996. Vol. 64, no. 6. P. 1151–1164. DOI:10.1080/00207179608921679
11. Kawasaki N., Shimemura E. Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator. *International Journal of Control*. 1988. Vol. 48, no. 1. P. 225–240. DOI:10.1080/00207178808906171
12. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: учеб. пособие. Санкт-Петербург: издательство Лань, 2013. 448 с.
13. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов: монография / Е. И. Веремей, В. М. Корчанов, М. В. Коровкин, С. В. Погожев. Санкт-Петербург: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 370 с.

Поступила \*\*.\*\*.2026; доработана после рецензирования \*\*.\*\*.2026;  
принята к публикации \*\*.\*\*.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. E. I. Veremey, “Numerical methods of root-mean-square synthesis in the presence of modal constraints”, *AN USSR, Avtomatika*, **2** (1990), 22–27 (In Russ.).
2. M. V. Korovkin, *Methods and algorithms for optimizing ship traffic control systems in non-stationary modes. PhD thesis*, 2002 (In Russ.), 153 p.
3. E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, V. V. Ereemeev, M. V. Korovkin, “Modal Parametric Optimization of Control Laws with Special Structure”, *Proceedings of 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*, 2014, 1278–1283. DOI: 10.1109/ICCAS.2014.6987753
4. E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, “Plasma Stabilization Based on Prediction with Stable Linear Approximation”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, **10**:1 (2011), 116–133 (In Russ.).
5. A. S. Tomilova, “Optimization of Robust Properties of a Control System with Constraints on the Quality of the Transient Process”, *Navigation and Motion Control: Proceedings of the XXI Conference of Young Scientists with International Participation, General editor V.G. Peshekhonov*, 2019, 37–39 (In Russ.).
6. E. I. Veremey, V. V. Ereemeev, “SISO H-Optimization Problems Taking into Account Structural and Modal Constraints”, *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii*, **54**:4 (2013), 8–15 (In Russ.).
7. L. S. Shieh, H. M. Dib, S. Ganesan, “Linear quadratic regulators with eigenvalue placement in a specified region”, *Automatica*, **24**:6 (1988), 819–823. DOI: 10.1016/0005-1098(88)90058-1
8. N. Kawasaki, E. Shimemura, “Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region”, *Automatica*, **19**:5 (1983), 557–560. DOI: 10.1016/0005-1098(83)90011-0
9. W. M. Haddad, D. S. Bernstein, “Controller design with regional pole constraints”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**:1 (1992), 54–69. DOI: 10.1109/9.109638
10. L. Yuan, L. E. K. Achenie, W. Jiang, “Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region”, *International Journal of Control*, **64**:6 (1996), 1151–1164. DOI: 10.1080/00207179608921679
11. N. Kawasaki, E. Shimemura, “Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator”, *International Journal of Control*, **48**:1 (1988), 225–240. DOI: 10.1080/00207178808906171
12. E. I. Veremey, *Linear systems with feedback: a textbook*, Lan, St. Petersburg, 2013 (In Russ.), 448 p.

13. E. I. Veremey, V. M. Korchanov, M. V. Korovkin, S. V. Pogozhev, *Computer Modeling of Motion Control Systems for Marine Mobile Objects: A Monograph*, St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University, 2002 (In Russ.), 370 p.

*Submitted \*\*.\*\*.2026; Revised \*\*.\*\*.2026; Accepted \*\*.\*\*.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

**Численный анализ уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области с входящим углом****А. В. Рукавишников***Институт прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск, Россия)*

**Аннотация.** В работе рассмотрена система нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме с неоднородными граничными условиями Дирихле. Область, в которой изучается система уравнений, представляет собой ограниченный невыпуклый многоугольник с входящим углом на границе. Исследована задача в кососимметричной, а не в общеизвестной конвективной форме, вследствие того, что при приближённом решении последней часто нарушается баланс кинетической энергии в турбулентных течениях. В результате дискретизации по времени и линеаризации исходной системы уравнений на каждом временном слое получена задача типа Озеена. Определено понятие  $R_\nu$ -обобщённого решения в множествах весовых пространств Соболева и на его основе построена схема весового метода конечных элементов (МКЭ). Введено понятие приближённого  $R_\nu$ -обобщённого решения. Произведены сравнительные численные анализы погрешностей решений в кососимметричной и конвективной формах, а также весового и классического методов конечных элементов рассматриваемой задачи, выявившие преимущество предложенного в работе подхода.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, кососимметричная форма, весовой метод конечных элементов, входящий угол

**Для цитирования:** Рукавишников А. В. Численный анализ уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области с входящим углом // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 62–82. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82

*Об авторах:*

**Рукавишников Алексей Викторович**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (680038, Россия, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 60), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7585-4559>, 78321a@mail.ru

© А. В. Рукавишников



MSC2020 65N30, 65Z05, 35Q30

# Numerical analysis of the Navier-Stokes equations in skew-symmetric form in a domain with an incoming corner

A. V. Rukavishnikov

*Institute of Applied Mathematics FEB RAS (Khabarovsk, Russian Federation)*

**Abstract.** In the paper a system of non-stationary incompressible Navier-Stokes equations in skew-symmetric form with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions is considered. The domain is a bounded non-convex polygon with an incoming corner at the boundary. The problem is described in skew-symmetric form, rather than in the well-known convective form, due to the fact that an approximate solution of the latter one often disrupts the kinetic energy balance in turbulent flows. By discretizing the initial system of equations in time and linearizing it, an Oseen-type problem is obtained at each time layer. A concept of an  $R_\nu$ -generalized solution in sets of S.L. Sobolev weighted spaces is defined. A scheme of weighted finite element method is constructed based on this concept. A definition of an approximate  $R_\nu$ -generalized solution is introduced. A comparative numerical analysis of the errors in solutions in skew-symmetric and convective forms is conducted, as well as in the weighted and classical finite element methods of the problem under consideration. In both comparisons, the advantage of the approach proposed is demonstrated.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, skew-symmetric form, weighted FEM, incoming angle

**For citation:** A. V. Rukavishnikov. Numerical analysis of the Navier-Stokes equations in skew-symmetric form in a domain with an incoming corner. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 62–82. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82

*About the authors:*

**Alexey V. Rukavishnikov**, Ph.D. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Science, Far Eastern Branch) (60 Serysheva Str., Khabarovsk, 680038, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7585-4559>, 78321a@mail.ru

## 1. Введение

Большое количество исследований посвящено численному решению нестационарных нелинейных уравнений Навье-Стокса. Исследователями рассматриваются различные формы уравнений: конвективная, вихревая, консервативная, кососимметричная и др. [1–6]. Хорошо известно, что при дискретизации уравнений Навье-Стокса закон сохранения массы справедлив лишь в слабом (интегральном) смысле. Это означает невыполнение важных законов сохранения, таких как энергии, импульса, момента импульса и др. [7–13].

В частности, с точки зрения закона сохранения энергии не подходит применение часто используемой конвективной формы уравнений Навье-Стокса [7]. В контексте вышеупомянутого факта предпочтительнее применять другие формы уравнений, удовлетворяющие этому закону [2], [14–17]. В представленной работе рассмотрим кососимметричную форму уравнений и проведём её численный анализ.

Из всего множества работ по тематике следует выделить класс задач, который рассматривается в многоугольной области  $\Omega$  с входящим углом  $\omega$  на границе, т.е. в случае, когда угол  $\omega \in (\pi, 2\pi)$ . Впервые в работе [18] описано поведение потока несжимаемой жидкости в окрестности входящего угла между двумя неподвижными стенками. Автор показал, что функция потока  $\psi$  имеет асимптотический вид

$$\psi \sim r^{1+\lambda},$$

если вершина  $\omega$  находится в полюсе полярной системы координат  $(r, \varphi)$ . При этом показатель  $\lambda$  – наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin(\lambda\omega_0) = -\lambda \sin \omega_0,$$

где  $\omega_0$  – величина входящего угла  $\omega$ . Например, если величина угла  $\omega$  равна  $3\pi/2$ , то показатель  $\lambda$  приблизительно равен 0.54448. Функция потока  $\psi$  и вектор-функция скорости  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , компоненты которой имеют асимптотический вид

$$u_i \sim r^\lambda,$$

регулярны, в то время как завихрённости и напряжения ведут себя асимптотически как  $r^{\lambda-1}$ . Это означает, что они сингулярны вблизи  $\omega$ . При этом для компонент вектора скоростей  $u_i$  известно, что  $u_i \notin W_2^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega)$  [19]. В силу этого не существует классического приближённого подхода, который обеспечит скорость сходимости к истинному решению, превосходящую  $\mathcal{O}(h^\lambda)$ . При этом показатель  $\lambda$  тем меньше, чем больше раствор  $\omega$  (более подробно см. [1]). Аналогичная ситуация встречается при рассмотрении двумерного потока между двумя неподвижными стенками со ступенькой [20] и в задаче сжатого потока [21].

Для того, чтобы порядок сходимости был равен единице относительно величины шага сетки  $h$ , необходимо определять не обобщённое, а  $R_\nu$ -обобщённое решение. В работе [22] впервые было введено данное понятие для дифференциальных задач эллиптического типа. В [23–24] изучены дифференциальные свойства решения.

Целями настоящей работы являются:

- дискретизация по времени и линеаризация исходной системы Навье-Стокса в кососимметричной форме на основании схемы Кранка-Николсона;
- определение на каждом временном слое понятия  $R_\nu$ -обобщённого решения;
- построение схемы специального метода конечных элементов [25] в качестве приближённого подхода;
- сравнительный анализ и иллюстрация превосходства предложенного метода для исходной задачи в кососимметричной форме над подходом решения задачи в конвективной форме, а также над стандартным МКЭ.

Существуют и другие подходы, которые условно можно поделить на три группы. Первая из них – разрывный метод Галёркина (DG-метод) [26]. Метод позволяет использовать геометрическое сгущение сетки в окрестности рассматриваемой особенности [27–30]. Вторая группа основана на разделении регулярных и сингулярных составляющих решения [31–34], третья – на специальной корректировке матрицы жесткости МКЭ в окрестности  $\omega$  [35–36].

Работа состоит из введения, трёх параграфов и заключения. В параграфе 2 дана постановка нестационарной системы в кососимметричной форме с неоднородными граничными условиями Дирихле, введены определения и обозначения, определено понятие  $R_\nu$ -обобщённого решения задачи, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации исходной задачи. В параграфе 3 предложен приближённый метод её решения. В параграфе 4 произведён сравнительный численный анализ: во-первых, погрешностей решений системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной и конвективной формах; во-вторых, построенного весового и классического (основанного на определении обобщённого решения) МКЭ. В обоих сравнениях получено преимущество предложенного в работе подхода. В заключении сделаны выводы и приведены необходимые комментарии.

## 2. Постановка задачи. Понятие $R_\nu$ -обобщённого решения

Введем необходимые обозначения и определения:

- $\Omega$  есть невыпуклый многоугольник с границей  $\partial\Omega$ , который содержит входящий угол  $\omega$ ,  $\pi < \omega < 2\pi$ ;
- $R^2$  есть евклидово двумерное пространство;
- точка пересечения координатных осей  $R^2$  –  $\mathcal{O}$ , т.е.  $\mathcal{O} = (0, 0)$ , вершина  $\omega$  с ней совпадает;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – элемент из  $R^2$ ,  $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  и  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$  его норма и мера соответственно;
- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Пусть заданы векторные поля  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  и скалярное поле  $c$ , тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \text{дивергенция поля } \mathbf{a};$$

$$\nabla c = \left( \frac{\partial c}{\partial x_1}, \frac{\partial c}{\partial x_2} \right)^T - \text{градиент поля } c;$$

$$\Delta c = \operatorname{div} (\nabla c) = \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} - \text{оператор Лапласа поля } c;$$

$$\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2)^T = \left( \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} \right)^T - \text{оператор Лапласа поля } \mathbf{a};$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^2 a_i b_i \quad \text{и} \quad \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial b_i}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим течение ньютоновской жидкости, описанной с помощью системы нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области  $\Omega$ . Пусть  $t$  – переменная времени,  $t \in (0, T)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$  и  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times (0, T)$ ,  $T > 0$ , тогда для заданных векторных полей  $\mathbf{f} : Q \rightarrow R^2$ ,  $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow R^2$ . Требуется найти векторное поле скоростей  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{u} : Q \rightarrow R^2$  и скалярное поле давления  $p : Q \rightarrow R$ , такие, что выполнены соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \theta \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{Q}, \quad (2.2)$$

$$\text{начальное условие:} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad (2.3)$$

$$\text{и граничное условие:} \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

где  $\theta > 0$  – коэффициент кинематической вязкости, а известное векторное поле  $\mathbf{g}$  удовлетворяет условию  $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall t \in (0, T)$ .

Проведём дискретизацию по времени задачи (2.1)–(2.4). Введём обозначения:  $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^n(\mathbf{x})$  для векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, n\Delta t)$  и  $p^n = p^n(\mathbf{x})$  для скалярного поля  $p(\mathbf{x}, n\Delta t)$ ,  $n = \overline{0, N}$ ,  $T = N \cdot \Delta t$ ,  $\Delta t$  – шаг дискретизации по переменной  $t$ . Пусть  $\alpha := 1/\Delta t$ ,  $z^{n+0.5} := 0.5(z^{n+1} + z^n)$  и  $\mathbf{U}^n$  – подходящая аппроксимация к  $\mathbf{u}$  в (2.1) в момент времени  $t_n = n\Delta t$ .

Следовательно, для  $n = \overline{0, N-1}$  решаем последовательность линейризованных задач. При известных  $\mathbf{u}^n, \mathbf{U}^n, p^n, \mathbf{f}^n, \mathbf{f}^{n+1}$  и  $\mathbf{g}^{n+1}$ : найти  $\mathbf{u}^{n+1}$  и  $p^{n+1}$  как решение системы уравнений:

$$\alpha \mathbf{u}^{n+1} - \theta \Delta \mathbf{u}^{n+0.5} + (\mathbf{U}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+0.5} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{U}^n) \mathbf{u}^{n+0.5} + \nabla p^{n+0.5} = \alpha \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^{n+0.5} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (2.7)$$

Для того чтобы ввести понятие  $R_\nu$ -обобщённого решения задачи (2.5)–(2.7) необходимо определить весовые пространства и множества обобщённых функций.

Через  $\Omega_\delta$  обозначим область, образованную в пересечении круга радиуса  $\delta$ ,  $0 < \delta \ll 1$ , с центром в начале координат  $\mathcal{O}$  и  $\bar{\Omega}$ . Определим в  $\Omega$  функцию  $\rho(\mathbf{x})$ , которая совпадает с функцией расстояния от точки  $\mathbf{x}$  до точки  $\mathcal{O}$  в  $\Omega_\delta$  и продолжена по непрерывности в  $\bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta$ , т.е.

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \\ \delta, & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Такую функцию  $\rho(\mathbf{x})$  будем называть весовой функцией. Пусть

$$D^k z(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|k|} z(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}},$$

$k = (k_1, k_2)$ ,  $|k| = k_1 + k_2$ ,  $k_i$  – неотрицательное целое число.

Через  $W_{2,\gamma}^l(\Omega)$  ( $\gamma \geq 0$ ) обозначим пространство функций  $z(\mathbf{x})$  с ограниченной нормой

$$\|z\|_{W_{2,\gamma}^l(\Omega)} := \left( \sum_{0 \leq |k| \leq l} \|\rho^\gamma(\mathbf{x}) |D^k z(\mathbf{x})|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Если  $l = 0$ , то пространство  $W_{2,\gamma}^0(\Omega)$  функций  $z(\mathbf{x})$  будем обозначать через  $L_{2,\gamma}(\Omega)$  с нормой

$$\|z\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} := \|z\|_{W_{2,\gamma}^0(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Пусть  $\overset{\circ}{W}_{2,\gamma}^1(\Omega) = \{z \in W_{2,\gamma}^1(\Omega) : D^1 z|_{\partial\Omega} = 0\}$  с ограниченной нормой (2.8) при  $l = 1$ . Далее, обозначим через  $\overset{\circ}{W}_{\infty,\gamma}^1(\Omega, C_1)$  пространство функций  $z(\mathbf{x})$ , удовлетворяющих условию  $\|z\|_{\overset{\circ}{W}_{\infty,\gamma}^1(\Omega, C_1)} = \max\{\text{vrai max}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\rho^\gamma(\mathbf{x}) z(\mathbf{x})|, \text{vrai max}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\rho^{\gamma+1}(\mathbf{x}) D^1 z(\mathbf{x})|\} \leq C_1$ .

Пусть функция  $z(\mathbf{x})$  удовлетворяет условиям:

$$0 < C_2 \leq \|z\|_{L_{2,\gamma}(\Omega \setminus \Omega_\delta)}, \tag{2.10}$$

$$|D^s z(\mathbf{x})| \leq C_3 \delta^{\gamma-\varepsilon} \rho^{\varepsilon-\gamma-s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, s = 0, 1, \tag{2.11}$$

константа  $C_3$  не зависит от  $s$ , а малый параметр  $\varepsilon$  не зависит от  $s, \delta, \gamma$  и  $z(\mathbf{x})$ .

Будем обозначать

- $W_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)(\overset{\circ}{W}_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta))$  – множество  $z(\mathbf{x})$  из  $W_{2,\gamma}^1(\Omega)(\overset{\circ}{W}_{2,\gamma}^1(\Omega))$ , удовлетворяющих (2.10) и (2.11), с ограниченной нормой (2.8) при  $l = 1$ ;
- $L_{2,\gamma}(\Omega, \delta)$  множество функций  $z(\mathbf{x})$  из пространства  $L_{2,\gamma}(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям (2.10) и (2.11) при  $s = 0$ , с ограниченной нормой (2.9);
- $L_{2,\gamma}^0(\Omega, \delta) = \{z \in L_{2,\gamma}(\Omega, \delta) : \|\rho^\gamma z\|_{L_1(\Omega)} = 0\}$  с ограниченной нормой (2.9).

Будем говорить, что  $g(\mathbf{x}) \in W_{2,\gamma}^{1/2}(\partial\Omega, \delta)$ , если существует такая функция  $G(\mathbf{x}) \in W_{2,\gamma}^1(\Omega, \delta)$ , что  $G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  на  $\partial\Omega$  и  $\|g\|_{W_{2,\gamma}^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{G|_{\partial\Omega}=g} \|G\|_{W_{2,\gamma}^1(\Omega)}$ .

Далее жирным шрифтом выделены пространства и множества векторных полей  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Здесь  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)$ , если компоненты  $v_i \in L_{2,\gamma}(\Omega)$  с ограниченной векторной нормой  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)} = \left( \|v_1\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ .

**Определение 2.1.** Набор функций  $(\mathbf{u}_\nu^{n+1}, p_\nu^{n+1})$  из декартова произведения множеств  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  назовем  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (2.5), (2.6), если для каждого набора функций  $(\mathbf{v}, s)$  из декартова произведения множеств  $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  справедливы тождества:

$$\int_{\Omega} \left[ \alpha \mathbf{u}_\nu^{n+1} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \theta \nabla \mathbf{u}_\nu^{n+0.5} : \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \left( (\mathbf{U}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_\nu^{n+0.5} \right) \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) + \frac{1}{2} (\text{div } \mathbf{U}^n) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{u}_\nu^{n+0.5} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) - p_\nu^{n+0.5} \text{div}(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( \alpha \mathbf{u}_\nu^n + \mathbf{f}^{n+0.5} \right) \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \tag{2.12}$$

$$\int_{\Omega} \rho^{2\nu} s \text{div } \mathbf{u}_\nu^{n+1} d\mathbf{x} = 0, \tag{2.13}$$

где  $\mathbf{v}_\nu$  удовлетворяет условию (2.7) на  $\partial\Omega$ ,  $(\mathbf{f}^{n+0.5}, \mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{U}^n) \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega) \times \mathbf{W}_{2,\kappa}^{1/2}(\partial\Omega, \delta) \times \mathbf{W}_{\infty,\gamma}^1(\Omega, C_1)$ ,  $\nu \geq \beta \geq 0$ ,  $\nu \geq \kappa \geq 0$ ,  $\gamma \leq 1$ ,  $n = 0, N - 1$ .

**Замечание 2.1.** Вариационная постановка задачи (2.12)–(2.13) является несимметричной.

**Замечание 2.2.** Существует единственное  $R_\nu$ -обобщенное решение  $(\mathbf{u}_\nu^{n+1}, p_\nu^{n+1})$  задачи (2.5)–(2.7) в постановке (2.12)–(2.13) (Теорема 1 в [37]).

**Замечание 2.3.** Чтобы найти приближённое решение задачи (2.1)–(2.4), необходимо построить численный метод последовательного нахождения приближённых решений задач (2.5)–(2.7) в постановке (2.12)–(2.13) при  $n = 0, N - 1$ .

### 3. Построение приближённого метода решения задачи

Построим приближённый метод решения задачи (2.5)–(2.7), основанный на определении  $R_\nu$ -обобщённого решения. С этой целью выполним квазиравномерную триангуляцию  $T^h$  области  $\bar{\Omega}$ , т.е. разобьём область  $\bar{\Omega}$  на треугольники  $K_i$ , стороны которых имеют длины порядка  $h$  [38]. Величину  $h$  назовём параметром триангуляции  $T^h$ , а треугольники  $K_i$  – макроэлементами. Каждый такой макроэлемент  $K_i$  с помощью точки пересечения медиан представим как объединение трёх непересекающихся частей  $L_i^j$ ,  $j = 1, 2, 3$  – треугольников. Построенные треугольники будем называть конечными элементами  $T^h$ .

На триангуляции  $T^h$  определим пару конечно-элементных пространств Скотта-Вогелиуса (С-В) второго порядка [39]. Кратко опишем основные положения (более подробно они приведены в работах [40–41]). Через  $R_l$  и  $S_k$  обозначим вершины и середины сторон конечных элементов  $L_i^j$  соответственно, которые назовём узлами.

Определим два множества  $X_h$  и  $Y_h$ :

- $X_h = X_h^\Omega \cup X_h^{\partial\Omega} = \{R_l \cup S_k\}$ , где подмножества  $X_h^\Omega (X_h^{\partial\Omega})$  – совокупность узлов, принадлежащих  $\Omega (\partial\Omega)$ ;
- $Y_h$  – совокупность узлов, таких, что  $N_m$  совпадает с узлом  $R_l$  на треугольнике.

Здесь  $N_m$  и  $N_s$ , совпадающие с одним  $R_l$ , но относящиеся к соседним элементам, являются разными узлами.

**Замечание 3.1.**  $X_h$  и  $Y_h$  – совокупности узлов для компонент векторного поля скоростей и скалярного поля давления соответственно.

На триангуляции  $T^h$  определим пару пространств С-В [39]:

1.  $S_h = \{v^h \in C(\bar{\Omega}) : v^h|_L \in P_2(L) \forall L \in T^h\}$  – для компонент векторного поля скоростей,  $\varphi_k(\mathbf{x})$  есть базисные функции  $S_h$ ;
2.  $G_h = \{q^h \in L_2(\Omega) : q^h|_L \in P_1(L) \forall L \in T^h\}$  – для скалярного поля давления,  $\psi_l(\mathbf{x})$  есть базисные функции  $G_h$ .

**Замечание 3.2.** Функции  $q^h$  терпят разрыв в узлах, а значит и на сторонах конечных элементов  $L$ .

Отметим, что пространство  $X_h$  для компонент векторного поля скоростей есть соответствующее пространство пары конечно-элементных пространств Тейлора-Худа (Т-Х) второго порядка [42], в то время как пространство  $G_h$  значительно больше по размерности соответствующего пространства пары Т-Х [39].

Благодаря определённой конечно-элементной паре  $\mathbf{S}_h \times G_h (\mathbf{S}_h = S_h \times S_h)$  построим базисные функции специального вида [40].

Для компонент векторного поля скоростей:

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{-\nu^*}(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}), \quad \varphi_k(\mathbf{x}) \in S_h, \quad \varphi_k(M_l) = \delta_{kl},$$

где  $\theta_k$  – базисная функция, соответствующая узлу  $M_k \in X_h$ .

Для скалярного поля давления:

$$\chi_s(\mathbf{x}) = \rho^{-\mu^*}(\mathbf{x}) \psi_s(\mathbf{x}), \quad \psi_s(\mathbf{x}) \in G_h, \quad \psi_s(N_m) = \delta_{sm},$$

где  $\chi_s$  – базисная функция, соответствующая узлу  $N_s \in Y_h$ .

Показатели степеней весовой функции  $\nu^*$  и  $\mu^*$  есть вещественные числа, которые являются свободными параметрами подхода,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Определим пространство  $W_h$  для компонент векторного поля скоростей. Если  $\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x}) = (u_{1,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}), u_{2,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}))$ , то

$$u_{1,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim W_h} u_{1,k}^{n+1} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \quad u_{2,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim W_h} u_{2,k}^{n+1} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

$$u_{1,k}^{n+1} = \rho^{\nu^*}(M_k) \cdot \tilde{u}_{1,k}^{n+1}, \quad u_{2,k}^{n+1} = \rho^{\nu^*}(M_k) \cdot \tilde{u}_{2,k}^{n+1}. \quad (3.2)$$

Определим пространство  $Q_h$  для скалярного поля давления  $p_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x})$ :

$$p_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\dim Q_h} p_s^{n+1} \cdot \chi_s(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$$p_s^{n+1} = \rho^{\mu^*}(N_s) \cdot \tilde{p}_s^{n+1}. \quad (3.4)$$

Коэффициенты  $u_{1,k}^{n+1}, u_{2,k}^{n+1}$  в (3.1) и  $p_s^{n+1}$  в (3.3) являются значениями решения системы (3.5)–(3.6) (см. ниже), а коэффициенты  $\tilde{u}_{1,k}^{n+1}, \tilde{u}_{2,k}^{n+1}$  в (3.2) и  $\tilde{p}_s^{n+1}$  в (3.4) есть приближённые значения решения (компонент векторного поля скоростей и скалярного поля давления) задачи (2.5)–(2.7) в узлах  $M_k \in X_h^\Omega$  и  $N_s \in Y_h$  соответственно.

Определим подпространство  $\overset{\circ}{W}_h$  в пространстве  $W^h$ :

$$\overset{\circ}{W}_h = \{v^h \in W_h : v^h(M_k) = 0, \text{ если } M_k \in X_h^{\partial\Omega}\}$$

и введём обозначения:  $\mathbf{W}_h = W_h \times W_h$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_h = \overset{\circ}{W}_h \times \overset{\circ}{W}_h$ , причём  $\mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_h \subset \overset{\circ}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$  и  $Q_h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ . Пусть  $W = \dim \overset{\circ}{W}_h, Q = \dim Q_h$ .

Построенный приближённый подход будем называть весовым МКЭ. Определим на его основе приближённое  $R_\nu$ -обобщённое решение задачи (2.5)–(2.7).

**Определение 3.1.** Пару  $(\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}, p_\nu^{n+1,h}) \in \mathbf{W}_h \times Q_h$  назовем приближённым по весовому методу конечных элементов  $R_\nu$ -обобщённым решением задачи (2.5)–(2.6),  $\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}$  удовлетворяет условию (2.7) в узлах  $X_h^\Omega$ , если для всех пар  $(\mathbf{v}^h, s^h) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_h \times Q_h$  справедливы интегральные тождества:

$$\int_{\Omega} \left[ \alpha \mathbf{u}_\nu^{n+1,h} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) + \theta \nabla \mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h} : \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) + \left( (\mathbf{U}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h} \right) \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left( \operatorname{div} \mathbf{U}^n \right) \mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) - p_\nu^{n+0.5,h} \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) \Big] d\mathbf{x} = \\
& = \int_{\Omega} \left( \alpha \mathbf{u}_\nu^{n,h} + \mathbf{f}^{n+0.5} \right) \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}^h) d\mathbf{x}, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \rho^{2\nu} s^h \operatorname{div} \mathbf{u}_\nu^{n+1,h} d\mathbf{x} = 0, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (3.6)$$

Систему (3.5)–(3.6) представим в следующем виде:

$$A_n \mathbf{w}^{n+1} + B \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{F}_n, \quad (3.7)$$

$$C^T \mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$\mathbf{w}^{n+1} = (u_{1,1}^{n+1}, \dots, u_{1,W}^{n+1}, u_{2,1}^{n+1}, \dots, u_{2,W}^{n+1})^T$ ,  $\mathbf{q}^{n+1} = (p_1^{n+1}, \dots, p_Q^{n+1})^T$  и  $\mathbf{F}_n$  – вектор, составленный из величин правой части (3.5) при  $v_i^h := \theta_k$ ,  $k = \overline{1, W}$ ,  $i = 1, 2$ .

Для отыскания решения задачи (3.5)–(3.6), как решения системы линейных алгебраических уравнений (3.7)–(3.8), применим сходящуюся итерационную процедуру с переобуславливанием её матрицы [43]:

1. Выберем какие-либо векторы  $\mathbf{w}_0^{n+1}$ ,  $\mathbf{q}_0^{n+1}$  в качестве начального приближения для решения (3.7)–(3.8).
2. Определим последовательность итераций  $k = 0, 1, 2, \dots$ , пока не будет выполнено условие окончания итерационной процедуры:
  - a)  $\mathbf{w}_{k+1}^{n+1} := \mathbf{w}_k^{n+1} + \hat{A}_n^{-1} (\mathbf{F}_n - A_n \mathbf{w}_k^{n+1} - B \mathbf{q}_k^{n+1})$ ,
  - b)  $\mathbf{q}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{q}_k^{n+1} + \hat{S}_n^{-1} C^T \mathbf{w}_{k+1}^{n+1}$ ,
  - c) если момент остановки не выполнен, то  $k := k + 1$  и переходим к пункту 2а.

Здесь  $\hat{A}_n(\hat{S}_n)$  есть переобуславливающая матрица для  $A_n(C^T A_n^{-1} B)$ .

Для построения переобуславливателя  $\hat{A}_n$  в пункте 2а [44] используем неполное  $LU$  разложение матрицы  $A_n - ILU(0)$  [9], т.е.  $\hat{A}_n = \hat{L}_n \cdot \hat{U}_n$ , где  $\hat{L}_n$  и  $\hat{U}_n$  есть нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно. В пункте 2а решаем задачу  $A_n \mathbf{s} = \mathbf{z}$  с левым переобуславливанием  $\hat{A}_n$ , используя обобщённый метод минимальных невязок – GMRES(m)-метод [9]. Пусть  $\mathbf{r}_* = \hat{A}_n^{-1} (\mathbf{z} - A_n \mathbf{s})$ , тогда процедура Арнольди порождает ортогональный базис в подпространстве Крылова размерности  $m$  с минимальной невязкой:  $\operatorname{Span}\{\mathbf{r}_*, (\hat{A}_n^{-1} A_n)^1 \mathbf{r}_*, \dots, (\hat{A}_n^{-1} A_n)^{m-1} \mathbf{r}_*\}$ ,  $m = 5$ .

Теперь построим  $\tilde{S}_n$ . Для этой цели определим матрицу  $\tilde{S}$  следующим образом: пусть  $M_p^{\nu, \mu^*}$  есть так называемая весовая матрица масс пространства давления [46], так, что на каждом  $L \in T^h$ :  $(M_p^{\nu, \mu^*})_{i,j} = \int_L \rho^{2(\nu - \mu^*)} \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ,  $i, j = \overline{1, Q}$ . Определим

диагональную матрицу  $\bar{S}$ :  $\bar{S} = \bar{M}_p^{\nu, \mu^*}$ ,  $(\bar{M}_p^{\nu, \mu^*})_{ii} = \sum_{k=1}^Q (M_p^{\nu, \mu^*})_{ik}$ ,  $i = \overline{1, Q}$ , которая

является эффективным переобуславливателем для  $\tilde{S} = M_p^{\nu, \mu^*}$ . Таким образом, для того, чтобы найти вектор  $\boldsymbol{\kappa} := \hat{S}_n^{-1} \boldsymbol{\omega}$  в пункте 2b необходимо организовать следующую внутреннюю итерационную процедуру:

- (1)  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$ ;
- (2)  $\mathbf{d}_{l+1} = \mathbf{d}_l + \bar{S}^{-1} (\boldsymbol{\omega} - \tilde{S} \mathbf{d}_l)$  ( $l = 0, \dots, L_* - 1$ );
- (3)  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}_{L_*}$ ,

используя перезапускающийся обобщённый метод минимальных невязок:

$$\text{Span}\{\bar{\mathbf{r}}, (\bar{S}^{-1}\tilde{S})^1\bar{\mathbf{r}}, (\bar{S}^{-1}\tilde{S})^2\bar{\mathbf{r}}\}, \text{ где } \bar{\mathbf{r}} = \bar{S}^{-1}(\boldsymbol{\omega} - \tilde{S}\mathbf{d}_l).$$

#### 4. Результаты численных экспериментов. Сравнительный анализ

Представим результаты численных экспериментов по нахождению приближенного решения системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме (2.1)–(2.4) как последовательности отыскания приближённых решений задачи (2.5)–(2.7) с помощью весового метода конечных элементов в вариационной постановке (3.5)–(3.6).

Проведём сравнительный анализ как с результатами приближённого решения системы уравнений Навье-Стокса в конвективной форме [41], т.е. когда отсутствует четвёртое слагаемое в левой части уравнения (2.1), так и с результатами численного решения задачи (2.1)–(2.4), когда в вариационной постановке (3.5)–(3.6) имеем  $\nu = \nu^* = \mu^* = 0$ ,  $\delta \equiv 1$  – классический МКЭ (конечно-элементная пара пространств Скотта–Вогелиуса  $\mathbf{S}_h \times G_h$  2-го порядка). Покажем преимущества предложенного в настоящей статье подхода в обоих случаях, представленных на рис. 4.1–4.4 и в таблицах 4.1–4.2.

**Таблица 4.1.** Относительные погрешности  $E(\mathbf{u}_G)$  классического МКЭ ( $\nu = \nu^* = \mu^* = 0, \delta = 1$ ) в различные моменты времени

**Table 4.1.** Relative errors  $E(\mathbf{u}_G)$  of the classical FEM ( $\nu = \nu^* = \mu^* = 0, \delta = 1$ ) at various time points

$t_n =$	$\Delta t$	$0.5T$	$T$
$h = 0.025$	$4.72 \cdot 10^{-2}$	$4.80 \cdot 10^{-2}$	$4.79 \cdot 10^{-2}$
$h = 0.0125$	$3.27 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$
$\text{Val}_1(\mathbf{u}_G)$	1.444	1.451	1.454
$h = 0.00625$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$2.27 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$
$\text{Val}_2(\mathbf{u}_G)$	1.453	1.456	1.458

**Таблица 4.2.** Относительные погрешности  $E(\mathbf{u}_\nu)$  и  $E(\mathbf{v}_\nu)$  весового МКЭ ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) для кососимметричной и конвективной (см. таблицу 1 в [41]) форм соответственно в различные моменты времени

**Table 4.2.** Relative errors of  $E(\mathbf{u}_\nu)$  and  $E(\mathbf{v}_\nu)$  of the weighted FEM ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) for skew-symmetric and convective (see Table 1 in [41]) forms respectively, at different points in time

$t_n =$	кососимметричная форма			конвективная форма		
	$\Delta t$	$0.5T$	$T$	$\Delta t$	$0.5T$	$T$
$h = 0.025$	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-2}$	$3.29 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$
$h = 0.0125$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$
$\text{Val}_1(\cdot)$	1.994	1.993	2.004	1.990	1.991	2.000
$h = 0.00625$	$7.70 \cdot 10^{-3}$	$7.79 \cdot 10^{-3}$	$7.69 \cdot 10^{-3}$	$8.27 \cdot 10^{-3}$	$8.40 \cdot 10^{-3}$	$8.25 \cdot 10^{-3}$
$\text{Val}_2(\cdot)$	1.997	1.998	2.006	1.999	1.988	2.014

В качестве многоугольной области  $\Omega$  с входящим углом  $\omega$  на границе рассмотрим  $L$ -образную область следующего вида:

$$\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 0\}.$$

В качестве решения  $(\mathbf{u}, p)$  в полярных координатах  $(r, \varphi)$  возьмём функции [41]:

$$u_j(r, \varphi, t) = e^{-t} r^\lambda \varpi_j(\varphi), \quad p(r, \varphi, t) = e^{-t} r^{\lambda-1} \varpi_3(\varphi), \quad j = 1, 2.$$

Показатель  $\lambda$  в степени решения является наименьшим положительным корнем уравнения  $\sin\left(\frac{3\pi\lambda}{2}\right) = \lambda$ , который приблизительно равен 0.54448, и

$$\begin{pmatrix} \varpi_1(\varphi) \\ \varpi_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)\Theta(\varphi) & \Theta'_\varphi(\varphi) \\ \Theta'_\varphi(\varphi) & -(\lambda + 1)\Theta(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\varpi_3(\varphi) = \frac{1}{\lambda - 1} \left( (\lambda + 1)^2 \Theta'_\varphi(\varphi) + \Theta''_{\varphi\varphi}(\varphi) \right),$$

$$\Theta(\varphi) = \cos\left(\frac{3\pi\lambda}{2}\right) \left( \frac{\sin((\lambda + 1)\varphi)}{\lambda + 1} - \frac{\sin((\lambda - 1)\varphi)}{\lambda - 1} \right) + \cos((\lambda - 1)\varphi) - \cos((\lambda + 1)\varphi).$$

Вследствие того, что  $\lambda$  меньше единицы,  $u_i \notin W_2^2(\Omega)$  и  $p \notin W_2^1(\Omega)$ . В численных экспериментах полагаем:  $\Delta t = 0.01$ ,  $T = 0.5$ ,  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 0.5445$ , а шаг разбиения по каждому из пространственных измерений имеет порядок  $h_i = 2^{1-i} s$ ,  $s = 0.025$ . Следовательно, число отрезков разбиения по каждому из декартовых координатных направлений  $N_i = 80 \cdot 2^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Замечание 4.1.** Обозначим через  $\mathbf{u}_G$ ,  $\mathbf{u}_\nu$  и  $\mathbf{v}_\nu$  в определённый момент времени: обобщённое ( $\nu = \nu^* = \mu^* = 0$ ,  $\delta \equiv 0$ ),  $R_\nu$ -обобщённое в кососимметричной и конвективной формах соответственно решения. Аналогично обозначим их приближённые решения:  $\mathbf{u}_G^{h_i}$  и  $\mathbf{u}_\nu^{h_i}$ ,  $\mathbf{v}_\nu^{h_i}$  в определённый момент времени по классическому и весовому МКЭ соответственно.

**Замечание 4.2.** На самом деле точные решения  $\mathbf{u}_\nu$  и  $\mathbf{v}_\nu$  системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной и конвективной формах соответственно в каждый момент времени совпадают, а их приближённые решения  $\mathbf{u}_\nu^h$  и  $\mathbf{v}_\nu^h$  являются разными.

Полагаем, что в (3.5)–(3.6):

$$\mathbf{U}^n := \frac{3}{2} \mathbf{u}_G^{n,h} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_G^{n-1,h} \quad \text{и} \quad \mathbf{U}^n := \frac{3}{2} \mathbf{u}_\nu^{n,h} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_\nu^{n-1,h}, \quad \mathbf{V}^n := \frac{3}{2} \mathbf{v}_\nu^{n,h} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_\nu^{n-1,h}$$

для классического и весового МКЭ соответственно,  $n = \overline{0, N-1}$ . Причём  $\mathbf{u}_G^{-1,h} := \mathbf{u}_G^{0,h}$ ,  $\mathbf{u}_\nu^{-1,h} := \mathbf{u}_\nu^{0,h}$  и  $\mathbf{v}_\nu^{-1,h} := \mathbf{v}_\nu^{0,h}$ .

Введём обозначения необходимых нам относительных погрешностей:

$$E_i(\mathbf{u}_G) = \frac{\|\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_G^{h_i}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{u}_G\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega_{h_i})}}, \quad E_i(\mathbf{u}_\nu) = \frac{\|\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu^{h_i}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{u}_\nu\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}},$$

$$E_i(\mathbf{v}_\nu) = \frac{\|\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_\nu^{h_i}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{v}_\nu\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}, \quad i = 1, 2, \quad Val_j(\cdot) = \frac{E_j(\cdot)}{E_{j+1}(\cdot)}, \quad j = 1, 2$$

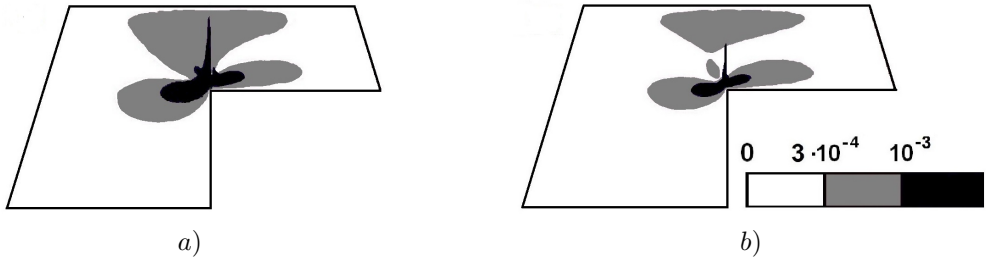


Рис. 4.1. Погрешности классического МКЭ при  $t = \Delta t$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$

Fig. 4.1. Errors of classical FEM at  $t = \Delta t$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$

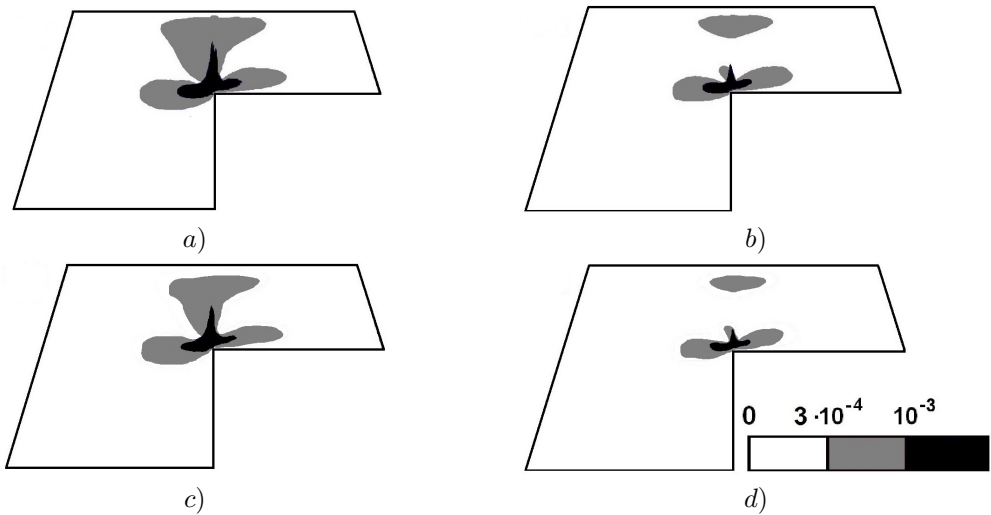


Рис. 4.2. Погрешности весового МКЭ ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) при  $t = \Delta t$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$  – конвективная форма задачи; в)  $N = 80$ , г)  $N = 160$  – кососимметричная форма задачи

Fig. 4.2. Errors of weighted FEM ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) at  $t = \Delta t$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$  – convective form of the problem; в)  $N = 80$ , г)  $N = 160$  – skew-symmetric form of the problem

в рассматриваемый момент времени. В таблицах 4.1–4.2 и на рис. 4.1–4.5 приведены результаты численных испытаний. Экспериментально установлено, что оптимальные значения, с точки зрения наименьшей погрешности, достигаются в случае когда  $\mu^*$  и  $\nu^*$  равны между собой и принимают неотрицательное значение. На рис. 4.5 отображены области подходящих параметров весового МКЭ для конвективной (см. [41]) и кососимметричной форм уравнений Навье-Стокса. Исследование проведено, как и в [41], для следующих диапазонов свободных параметров метода:  $\nu \in (0; 2], \mu^* = \nu^* \in [0, 1 - \lambda]$ . Шаг изменения по  $\nu^*$  равен 0.005, а по переменной  $\nu$  – 0.025. Точка с координатами  $(\nu, \nu^*)$  попадает в область подходящих параметров численного решения задачи (2.1)–(2.4), если погрешность отличается от оптимального значения не более чем на 5% в

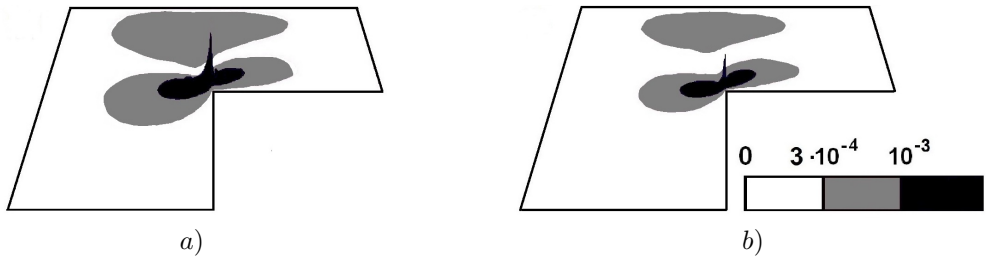


Рис. 4.3. Погрешности классического МКЭ при  $t = T$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$

Fig. 4.3. Errors of classical FEM at  $t = T$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$

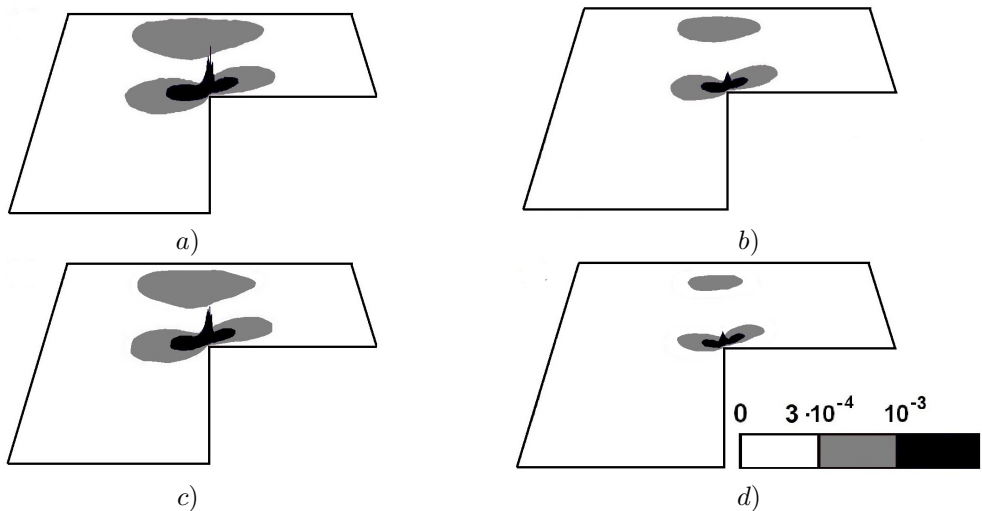


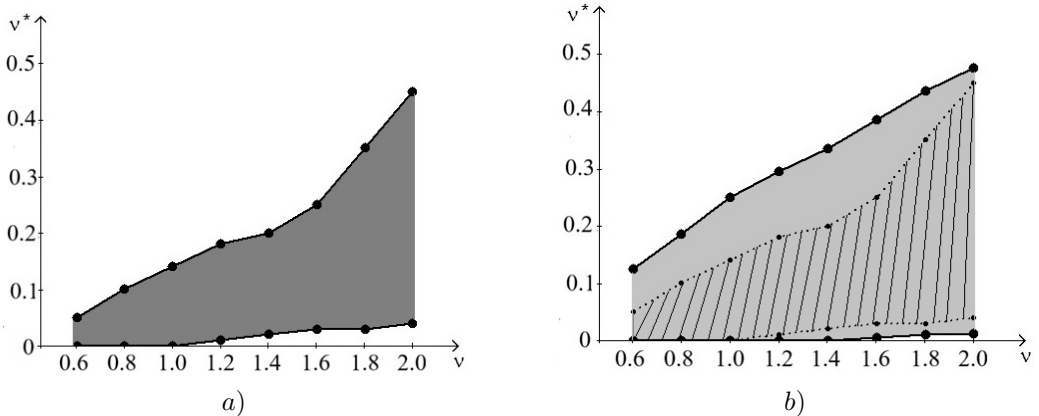
Рис. 4.4. Погрешности весового МКЭ ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) при  $t = T$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$  – конвективная форма задачи; в)  $N = 80$ , г)  $N = 160$  – кососимметричная форма задачи

Fig. 4.4. Errors of weighted FEM ( $\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$ ) at  $t = T$ : а)  $N = 80$ , б)  $N = 160$  – convective form of the problem; в)  $N = 80$ , г)  $N = 160$  – skew-symmetric form of the problem

каждый момент  $t_n$  для всех  $h_i, i = 1, 2, 3$ . Диапазон изменения  $\delta \in [0.0225, 0.0375]$ .

**Замечание 4.3.** В таблице 4.2 величины  $E_i(\mathbf{v}_\nu)$  для приближённого решения в конвективной форме при  $\nu^* = \mu^* = 0.275$  являются оптимальными, в то время как для кососимметричной формы это не так. Даже в этом случае величины погрешности  $E_i(\mathbf{u}_\nu)$  приближённого решения системы (2.1)–(2.4) меньше, а оптимальные их значения достигаются при  $\nu^* = \mu^*$ , близких к величине 0.325.

**Замечание 4.4.** Величины  $Val_j(\mathbf{u}_G)$  и  $Val_j(\mathbf{u}_\nu)$  ( $Val_j(\mathbf{v}_\nu)$ ) показывают, что порядки сходимости приближённого решения к точному решению задачи равны  $\mathcal{O}(h^{0.54})$  и  $\mathcal{O}(h^1)$  для классического и весового МКЭ соответственно.



**Рис. 4.5.** Области подходящих параметров весового МКЭ в переменных  $(\nu, \nu^*)$ :  
 а) конвективная (рис. 3 в [41]), б) кососимметричная форма задачи

**Fig. 4.5.** Regions of suitable parameters of the weighted FEM in variables  $(\nu, \nu^*)$ :  
 а) convective (Fig. 3 in [41]), б) skew-symmetric form of the problem

На рис. 4.1 и 4.3 показана абсолютная погрешность классического МКЭ в моменты времени  $t : \Delta t$  и  $T$ , а на рис. 4.2 и 4.4 – весового МКЭ для конвективной [41] и кососимметричной форм уравнений Навье-Стокса в разные моменты времени.

## 5. Заключение

Рассмотрена система уравнений (2.1)–(2.4) в кососимметричной форме. Построен весовой МКЭ для приближённого решения задачи. Экспериментально определены области выбора подходящих параметров подхода в переменных  $(\nu, \nu^*)$ . На основании анализа численных экспериментов сделаны выводы:

- порядок точности весового МКЭ равен  $\mathcal{O}(h)$ , что гораздо выше чем у классического МКЭ  $\mathcal{O}(h^{0.54})$ ;
- область выбора подходящих параметров при использовании кососимметричной формы системы (2.1)–(2.4) существенно шире, чем при использовании конвективной формы системы;
- малому изменению свободных параметров  $(\nu, \nu^*)$  соответствует малое изменение погрешности.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00). Результаты получены с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Дальневосточный вычислительный ресурс» ИАПУ ДВО РАН (<https://cc.dvo.ru>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1986. 374 p.
2. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса: пер. с англ. М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Turek S. Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects. In: Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering, vol. 6, Berlin-Heidelberg: Springer, 1999. 358 p. DOI: 10.1007/978-3-642-58393-3
4. Lukaszewicz G., Kalita P. Navier–Stokes equations. An introduction with applications. In: Advanced in Mechanical and Mathematics. Berlin: Springer, 2016. 390 p. DOI:10.1007/978-3-319-27760-8
5. Salvi R. The Navier–Stokes equations: Theory and numerical methods. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2018. 308 p.
6. Hieber M., Robinson J. C., Shibata Y. Mathematical analysis of the Navier–Stokes equations. In: Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 2020. 464 p. DOI: 10.1007/978-3-030-36226-3
7. Charnyi S., Heister T., Olshanskii M. A., Rebholz L. G. On conservation laws of Navier–Stokes Galerkin discretizations. *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 337, no. 2. P. 289–308. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.02.039
8. Li X., Rui H. A modified convective formulation in Navier–Stokes simulations. *Journal of Scientific Computing*. 2023. Vol. 96. 69. DOI: 10.1007/s10915-023-02286-3
9. Palha A., Gerritsma M. A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (MEEVC) mimetic spectral element discretization for the 2D incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 328. P. 200–220. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.10.009
10. Coppola G., Capuano F., De Luca L. Discrete energy-conservation properties in the numerical simulations of the Navier–Stokes equations *Applied Mechanics Reviews*. 2019. Vol. 71, no. 1. 010803. DOI: 10.1115/1.4042820
11. Ingimarson S. An energy, momentum, and angular momentum conserving scheme for a regularization model of incompressible flow. *Journal of Numerical Mathematics*. 2022. Vol. 30, no. 1. DOI:10.1515/jnma-2020-0080
12. Zhang Y., Dong H., Wang K. Mass, momentum and energy identical-relation-preserving scheme for the Navier–Stokes equations with variable density. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023. Vol. 137. P. 73–92. DOI:10.1016/j.camwa.2023.02.004
13. Van Gastelen T., Edeling W., Sanderse B. Energy-conserving neural network for turbulence closure modeling. *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 508. 113003. DOI:10.1016/j.jcp.2024.113003

14. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2023. Vol. 429. 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218
15. Nordström J. A skew-symmetric energy stable almost dissipation free formulation of the compressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 512. 113145. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113145
16. Petrova L. I. Role of skew-symmetric differential forms in mathematical physics and field theory. *Trends Journal of Sciences Research*. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.31586/ujpr.2022.345
17. Petrova L. I. Hidden unique possibilities of mathematical physics equations (The formalism of skew-symmetric forms). *Comput. Math. Model.* 2023. Vol. 33. P. 121–135.
18. Moffatt H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964. Vol. 18, no. 1. P.1–18. DOI: 10.1017/S0022112064000015
19. Dauge M. Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989. Vol. 20. P. 74–97.
20. Almaly B., Durst F., Pereira J., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1983. Vol. 127. P. 473–496. DOI: 10.1017/S0022112083002839
21. Boger D. V., Rama Murthy A. V. Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction. *Rheologica Acta*. 1972. Vol. 11. P. 61–69. DOI: 10.1007/BF01992871
22. Рукавишников В. А. О дифференциальных свойствах  $R_\nu$ -обобщённого решения задачи Дирихле // *Доклады АН СССР*. 1990. Т. 309, № 6. С. 1318–1320.
23. Рукавишников В. А. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщённого решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // *Доклады академии наук*. 2014. Т. 458, № 3. С. 261–263. DOI: 10.7868/S0869565214270061
24. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 6. 889. DOI: 10.3390/math10060889
25. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. *Comput. Math. Appl.* 2023. Vol. 151. P. 408–417.
26. Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. Vol. 40, no. 1. P. 319–343.
27. Hou Y., Han Y., Wen J. An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2021. Vol. 93, no. 1. P. 58–65. DOI: 10.1016/j.camwa.2021.03.031

28. Kim H. H., Chung E., Lee C. S. A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.* 2013. Vol.51, no. 6. P. 3327–3350.
29. Schötzau D., Wihler T. Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. *Numer. Math.* 2003. Vol. 96. P. 339–361.
30. Zhang F., Cheng J., Liu T. A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics.* 2020. Vol. 418. 109580.
31. Jang D. K., Pyo J. H. Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *J. Korean Soc. Ind. App. Math.* 2019. Vol. 23, no. 2. P. 115–138.
32. Pyo J. H., Jang D. K. An optimal finite element method with Uzawa iteration for Stokes equations including corner singularity. *Journal of Mathematics.* 2021. Vol. 2021. 5592982. DOI: 10.1155/2021/5592982
33. Choi H. J., Kweon J. R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 292, no. 3. P. 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006
34. Anjam Y. N. Singularities and regularity of stationary Stokes and Navier–Stokes equations on polygonal domains and their treatments. *AIMS Mathematics.* 2020. Vol. 5, no. 1. P. 440–466. DOI: 10.3934/math.2020030.
35. John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U. Energy-corrected finite element methods for the Stokes system // *IMA J. Numer. Anal.* 2017. Vol. 37. P. 687–729.
36. John L., Swierczynski P., Wohlmuth B. Energy corrected FEM for optimal Dirichlet boundary control problems. *Numer. Math.* 2018. Vol. 139. P. 913–938. DOI: 10.1007/s00211-018-0952-8
37. Рукавишников А. В. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в весовых множествах // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.* 2025. Т. 53. С. 102–117. DOI: 10.26516/1997-7670.2025.53.102
38. Ciarlet P. The finite element methods for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland, 1978. 529 p.
39. Scott L. R., Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials. *Math. Model. Numer. Anal.* 1985. Vol. 19. P. 111–143.
40. Рукавишников В. А., Рукавишников А. В. Метод численного решения одной стационарной задачи гидродинамики в конвективной форме в  $L$ -образной области // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2020. Т. 12, № 6. С. 1291–1306. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1291-1306
41. Рукавишников А. В. Определение тела подходящих параметров численного метода решения уравнений Навье-Стокса в невыпуклой области // *Информатика и системы управления.* 2025. № 1(83). С. 15–25. DOI: 10.22250/18142400\_2025\_83\_1\_15

42. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. *Mixed finite element methods and applications*. Berlin: Springer, 2013. 685 p.
43. Bramble J. H., Pasciak J. E., Vassilev A. T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 1997. Vol. 34. P. 1072–1092.
44. Рукавишников А. В. Стабилизационный численный метод решения задачи типа Озеена с особенностью // *Вычислительные технологии*. 2018. Т. 23, № 2. С. 102–116. DOI: 10.22250/18142400\_2025\_83\_1\_15
45. Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. 547 p.
46. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *J. Comput. Appl. Math.* 2018. Vol. 341. P. 144–156.

*Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 10.02.2022;  
принята к публикации 24.02.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. V. Girault, P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 374 p.
2. R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979, 519 p.
3. S. Turek, *Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999 DOI: 10.1007/978-3-642-58393-3, 358 p.
4. G. Lukaszewicz, P. Kalita, *Navier–Stokes equations. An introduction with applications*. In: *Advanced in Mechanical and Mathematics*, Springer, Berlin, 2016 DOI: 10.1007/978-3-319-27760-8, 390 p.
5. R. Salvi, *The Navier–Stokes equations: Theory and numerical methods*. In: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 2018, 308 p.
6. M. Hieber, J. C. Robinson, Y. Shibata, *Mathematical analysis of the Navier–Stokes equations*. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 2020 DOI: 10.1007/978-3-030-36226-3, 464 p.
7. S. Charnyi, T. Heister, M. A. Olshanskii, L. G. Rebholz, “On conservation laws of Navier–Stokes Galerkin discretizations”, *J. Comput. Phys.*, **337**:2 (2017), 289–308. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.02.039
8. X. Li, H. Rui, “A modified convective formulation in Navier–Stokes simulations”, *J. Sci. Comput.*, **96** (2023), 69. DOI: 10.1007/s10915-023-02286-3

9. A. Palha, M. Gerritsma, “A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (MEEVC) mimetic spectral element discretization for the 2D incompressible Navier–Stokes equations”, *J. Comput. Phys.*, **328** (2017), 200–220. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.10.009
10. G. Coppola, F. Capuano, L. De Luca, “Discrete energy-conservation properties in the numerical simulations of the Navier–Stokes equations”, *Applied Mechanics Reviews*, **71** (2019), 010803. DOI: 10.1115/1.4042820
11. S. Ingimarnson, “An energy, momentum, and angular momentum conserving scheme for a regularization model of incompressible flow”, *Journal of Numerical Mathematics*, **30**:1 (2022). DOI: 10.1515/jnma-2020-0080
12. Y. Zhang, H. Dong, K. Wang, “Mass, momentum and energy identical-relation-preserving scheme for the Navier–Stokes equations with variable density”, *Computers & Mathematics with Applications Appl.*, **137** (2023), 73–92. DOI: 10.1016/j.camwa.2023.02.004
13. T. Van Gastelen, W. Edeling, B. Sanderse, “Energy-conserving neural network for turbulence closure modeling”, *Journal of Computational Physics*, **508** (2024), 113003. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113003
14. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, “Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier–Stokes equations in rotation form with corner singularity”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **429** (2023), 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218
15. J. Nordström, “A skew-symmetric energy stable almost dissipation free formulation of the compressible Navier–Stokes equations”, *Journal of Computational Physics*, **512** (2024), 113145. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113145
16. L. I. Petrova, “Role of skew-symmetric differential forms in mathematical physics and field theory”, *Trends Journal of Sciences Research*, **1**:2 (2022), 32–47. DOI: 10.31586/ujpr.2022.345
17. L. I. Petrova, “Hidden unique possibilities of mathematical physics equations (The formalism of skew-symmetric forms)”, *Comput. Math. Model.*, **33** (2023), 121–135.
18. H. K. Moffatt, “Viscous and resistive eddies near a sharp corner”, *Journal of Fluid Mechanics*, **18**:1 (1964), 1–18. DOI: 10.1017/S0022112064000015
19. M. Dauge, “Stationary Stokes and Navier–Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20** (1989), 74–97.
20. B. Almaly, F. Durst, J. Pereira, B. Schoenung, “Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, **127** (1983), 473–496. DOI: 10.1017/S0022112083002839
21. D. V. Boger, A. V. Rama Murthy, “Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction”, *Rheologica Acta*, **11** (1972), 61–69. DOI: 10.1007/BF01992871

22. V. A. Rukavishnikov, “Differential properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem”, *Soviet Math. Dokl.*, **40** (1990), 653–655.
23. V. A. Rukavishnikov, “On the existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of a boundary value problem with uncoordinated degeneration of the input data”, *Dokl. Math.*, **90** (2014), 562–564.
24. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, “On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation”, *Mathematics*, **10**:6 (2022), 889. DOI: 10.3390/math10060889
25. V. A. Rukavishnikov, E. I. Rukavishnikova, “Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity”, *Comput. Math. Appl.*, **151** (2023), 408–417.
26. B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, C. Schwab, “Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**:1 (2002), 319–343.
27. Y. Hou, Y. Han, J. Wen, “An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, **93**:1 (2021), 58–65. DOI: 10.1016/j.camwa.2021.03.031
28. H. H. Kim, E. Chung, C. S. Lee, “A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **51**:6 (2013), 3327–3350.
29. D. Schötzau, T. Wihler, “Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons”, *Numer. Math.*, **96** (2003), 339–361.
30. F. Zhang, J. Cheng, T. Liu, “A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids”, *Journal of Computational Physics*, **418** (2020), 109580.
31. D. K. Jang, J. H. Pyo, “Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities”, *J. Korean Soc. Ind. App. Math.*, **23** (2019), 115–138.
32. J. H. Pyo, D. K. Jang, “An optimal finite element method with Uzawa iteration for Stokes equations including corner singularity”, *J. Math.*, **2021** (2021), 5592982. DOI: 10.1155/2021/5592982
33. H. J. Choi, J. R. Kweon, “A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **292** (2016), 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006
34. Y. N. Anjam, “Singularities and regularity of stationary Stokes and Navier–Stokes equations on polygonal domains and their treatments”, *AIMS Mathematics*, **5**:1 (2020), 440–466. DOI: 10.3934/math.2020030
35. L. John, P. Pustejovska, B. Wohlmuth, U. Rude, “Energy-corrected finite element methods for the Stokes system”, *IMA J. Numer. Anal.*, **37** (2017), 687–729.
36. L. John, P. Swierczynski, B. Wohlmuth, “Energy corrected FEM for optimal Dirichlet boundary control problems”, *Numer. Math.*, **139** (2018), 913–938. DOI: 10.1007/s00211-018-0952-8

37. A. V. Rukavishnikov, “On existence and uniqueness of the  $R_\nu$ -generalized solution of Oseen problem in skew-symmetric form in weighted sets”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **53** (2025), 102–117 (In Russ.). DOI: 10.26516/1997-7670.2025.53.102
38. P. Ciarlet, *The finite element methods for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978, 529 p.
39. L. R. Scott, M. Vogelius, “Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials”, *Math. Model. Numer. Anal.*, **19** (1985), 111–143.
40. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, “The method of numerical solution of the one stationary hydrodynamics problem in convective form in  $L$ -shaped domain”, *Computer Research and Modeling*, **12:6** (2020), 1291–1306 (In Russ.). DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1291-1306
41. A. V. Rukavishnikov, “Determination of the body of suitable parameters of the numerical method for solving the Navier – Stokes equations in a non-convex domain”, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **1(83)** (2025), 15–25 (In Russ.). DOI: 10.22250/18142400\_2025\_83\_1\_15
42. D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed finite element methods and applications*, Springer, Berlin, 2013, 685 p.
43. J. H. Bramble, J. E. Pasciak, A. T. Vassilev, “Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34** (1997), 1072–1092.
44. A. V. Rukavishnikov, “Stabilized numerical methods for solving the Oseen type problem with a singularity”, *Computational Technologies*, **23:2** (2018), 102–116 (In Russ.). DOI: 10.22250/18142400\_2025\_83\_1\_15
45. Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Minneapolis, 2003, 547 p.
46. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, “Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity”, *J. Comput. Appl. Math.*, **341** (2018), 144–156.

*Submitted 01.12.2021; Revised 10.02.2022; Accepted 24.02.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

## Предобуславливатель на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона

Е. А. Чекменёва<sup>1</sup>, Т. С. Хачкова<sup>2</sup>, В. В. Лисица<sup>2</sup><sup>1</sup>Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация)<sup>2</sup>Институт математики СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация)

**Аннотация.** В статье рассматривается способ построения предобуславливателя, основанного на методах машинного обучения, для его применения к численному решению уравнения Пуассона при моделировании пористых сред. При решении задачи используется итерационный метод сопряженных градиентов. Для предобуславливания системы линейных алгебраических уравнений предлагается аппроксимировать обратный оператор Лапласа с помощью сверточной нейронной сети архитектуры U-net. Рассматриваются два альтернативных подхода к формированию обучающего набора данных для нейронной сети. Первый метод основан на использовании пар векторов и результатов применения оператора Лапласа к ним. Во втором методе пары для обучения представляют собой векторы невязок, полученные при реализации метода сопряженных градиентов, и результаты применения оператора Лапласа к ним. При этом процесс обучения нейронной сети основан на минимизации относительной ошибки по норме  $L^2$ . Показано, что при применении каждого из представленных методов обучения нейронная сеть архитектуры U-net с пятью сверточными слоями обеспечивает недостаточную точность аппроксимации обратного оператора Лапласа для сокращения количества итераций в применяемом методе сопряженных градиентов. Поэтому построенный модифицированный метод сопряженных градиентов стабилизируется и обладает неустранимой невязкой.

**Ключевые слова:** уравнение Пуассона, метод сопряженных градиентов, предобуславливатель, машинное обучение

**Для цитирования:** Чекменёва Е. А., Хачкова Т. С., Лисица В. В. Предобуславливатель на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 83–98. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98

*Об авторах:*

**Чекменёва Екатерина Антоновна**, студент Новосибирского государственного университета (630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2), ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8509-0534>, e.chekmeneva@ngs.ru

**Хачкова Татьяна Станиславовна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-7142>, hachtanu@mail.ru

**Лисица Вадим Викторович**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института математики СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3544-4878>, v.v.lisitsa@math.nsc.ru

MSC2020 65R20

© Е. А. Чекменёва, Т. С. Хачкова, В. В. Лисица



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

# Machine learning-based preconditioner to solve Poisson equation

E. A. Chekmeneva<sup>1</sup>, T. S. Khachkova<sup>2</sup>, V. V. Lisitsa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation)*

<sup>2</sup>*Sobolev Institute of Mathematics (Novosibirsk, Russian Federation)*

**Abstract.** In this paper, we present a method of constructing a preconditioner based on machine learning methods for use in the numerical solution of the Poisson equation in porous media modelling. The iterative conjugate gradient method is used to solve the problem. To precondition a system of linear algebraic equations, we propose to approximate the inverse Laplace operator using a convolutional neural network of the U-net architecture. We consider two alternative approaches to the formation of a training dataset for a neural network. The first method is based on the use of pairs of vectors and on the results of applying the Laplace operator to them. In the second method, the training pairs are residual vectors obtained by implementing the conjugate gradient method and results of applying the Laplace operator to them. The neural network learning process is based on minimizing the  $L^2$ -norm relative error. We show that while using each of the presented learning methods, the U-net neural network with five convolutional layers approximating the inverse Laplace operator provides insufficient accuracy to reduce the number of iterations in the conjugate gradient method. Therefore, the modified conjugate gradient method is stabilized and has an irreducible residual.

**Keywords:** Poisson equation, method of conjugate gradients, preconditioner, machine learning

**For citation:** E. A. Chekmeneva, T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa. Machine learning-based preconditioner to solve Poisson equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 83–98. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98

*About the authors:*

**Ekaterina A. Chekmeneva**, student at Novosibirsk State University (2 Pirogova Street, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8509-0534>, e.chekmeneva@g.nsu.ru

**Tatyana S. Khachkova**, Ph.D. (Phys. and Math.), senior researcher at the Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Science (4 Koptug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-7142>, hachtanya@mail.ru

**Vadim V. Lisitsa**, D.Sc. (Phys. and Math.), head of laboratory at the Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Science (4 Koptug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3544-4878>, v.v.lisitsa@math.nsc.ru

## 1. Введение

Численное решение уравнения Пуассона в гетерогенных средах является актуальной задачей, в том числе при моделировании распределений электрического потенциала в гетерогенных материалах [1, 2], стационарных температурных полей [3], распределения частиц, определяемых диффузионными процессами. Кроме того, решение

уравнения Пуассона является важным этапом при моделировании потоков жидкости, в частности, при рассмотрении многофазных потоков в открытых каналах [4–6], а также многофазных потоков в пористых средах [7, 8].

Дискретизованное уравнение Пуассона – система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица которой является самосопряженной и положительно определённой. Такие системы эффективно решаются с использованием методов Крыловского типа, среди которых широко распространён метод сопряженных градиентов [9]. Однако скорость сходимости данного метода может снижаться с увеличением числа обусловленности матрицы при увеличении размера СЛАУ и появлении неоднородностей среды.

Поэтому для увеличения скорости сходимости применяются различные методы предобуславливания: алгебраические методы, в том числе метод Якоби, неполная LU-факторизация [9–11] и малоранговая аппроксимация матрицы или её LU-разложения [12–14]. Распространены многосеточные методы [15–17]. Также эффективны методы, основанные на построении оператора, обратного к оператору Лапласа, для упрощенных моделей [18, 19].

Развитие методов машинного и глубокого обучения привело к появлению нового направления в построении предобуславливателей [20–24]. Как правило, общий принцип разработки предобуславливателей на основе машинного обучения заключается в ускорении неполной LU-факторизации, разложения Холецкого или непосредственном приближении обратного оператора Лапласа. В настоящей работе исследуется применимость архитектуры U-net для аппроксимации обратного оператора Лапласа с последующим использованием в качестве предобуславливателя. В параграфе 2 приводится постановка математической задачи. Принципы работы предобуславливателя на основе машинного обучения обсуждаются в параграфе 3. Численные эксперименты представлены в параграфе 4.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Математическая постановка

Рассматривается уравнение Пуассона в области  $\Omega = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ :

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y) \nabla \psi(x, y)) = f(x, y). \quad (2.1)$$

Предполагается, что коэффициент  $\sigma(x, y)$  строго положителен и ограничен. В данной статье рассматриваются смешанные граничные условия. Условия Дирихле заданы при  $x = X_1$  и  $x = X_2$ , условия Неймана заданы при  $y = Y_1$  и  $y = Y_2$ :

$$\begin{aligned} \psi(X_1, y) &= \psi^1, & \psi(X_2, y) &= \psi^2, \\ \nabla \psi \cdot \vec{n}(x, Y_1) &= 0, & \nabla \psi \cdot \vec{n}(x, Y_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этих обозначениях  $f(\vec{x})$  – это правая часть,  $\psi^1$  и  $\psi^2$  – граничные условия.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать консервативные конечно-разностные схемы с гармоническим усреднением коэффициента  $\sigma$  при использовании на гранях ячеек, как описано в [1], [18, 19], [25].

Дискретизированная задача может быть представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$A\vec{\psi} = \vec{g}, \quad (2.3)$$

где матрица  $A$  является самосопряженной положительно определенной размерности  $N_x N_y \times N_x N_y$ ,  $\vec{\psi}$  – векторное представление неизвестных,  $\vec{g}$  – вектор, содержащий дискретизированные правые части и граничные условия,  $N_x$  и  $N_y$  – количество точек сетки в каждом пространственном направлении.

## 2.2. Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием

Матрица  $A$  системы (2.3) симметрична и положительно определена, следовательно, для её решения применим метод сопряженных градиентов. Однако скорость сходимости данного метода существенно зависит от числа обусловленности матрицы [9]. Число обусловленности системы может быть большим, более того, оно возрастает с увеличением размера задачи и контрастности среды, коэффициента  $\sigma$  [19]. Для уменьшения числа обусловленности и ускорения скорости сходимости используется предобуславливание. Тогда модифицированная задача принимает вид

$$B^{-1/2} A B^{-1/2} B^{1/2} \vec{\psi} = B^{-1/2} \vec{g}.$$

Здесь оператор  $B$  – предобуславливатель. Новая матрица  $B^{-1/2} A B^{-1/2}$  также симметрична и положительно определена. Легко показать, что предобусловленный метод сопряженных градиентов представим в виде:

1.  $\vec{r}_0 = \vec{g} - A\vec{\psi}_0$ ,  $\vec{p}_0 = B^{-1}\vec{r}_0$ ,  $\vec{q}_0 = \vec{p}_0$ ;  
do until converge
2.  $\alpha_j = \frac{(\vec{q}_j, \vec{r}_j)}{(A\vec{p}_j, \vec{p}_j)}$ ;
3.  $\vec{\psi}_{j+1} = \vec{\psi}_j + \alpha_j \vec{p}_j$ ;
4.  $\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j - \alpha_j A\vec{p}_j$ ,  $\vec{q}_{j+1} = B^{-1}\vec{r}_{j+1}$ ;
5.  $\beta_j = \frac{(\vec{q}_{j+1}, \vec{r}_{j+1})}{(\vec{q}_j, \vec{r}_j)}$ ;
6.  $\vec{p}_{j+1} = \vec{q}_{j+1} + \beta_j \vec{p}_j$ .

В данных обозначениях  $\vec{\psi}$  – вектор решения,  $\vec{g}$  – исходная правая часть,  $\vec{r}$  – вектор невязки, а  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$  – вспомогательные векторы.

Наиболее трудозатратной частью алгоритма является вычисление действия предобуславливателя на невязку  $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$ . Существует несколько различных способов построения  $B$  и вычисления действия  $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$ . Наиболее универсальный подход основан на алгебраических принципах. Например, предобуславливатель Якоби требует обращения главной диагонали исходной матрицы. Предобуславливатели, основанные на неполном LU-разложении и разложении Холецкого, улучшают сходимость, но требуют хранения коэффициентов, что приводит к высоким требованиям к памяти. Эффективным подходом к решению уравнения Пуассона является использование многосеточных методов как напрямую, так и в качестве предобуславливателя [9], [15]. Однако эффективность многосеточных методов сильно зависит от контраста, коэффициента уравнения  $\sigma$ . С другой стороны, если  $B = A$ , то итерационный процесс сходился бы за одну итерацию. Однако обращение матрицы  $B$  эквивалентно решению исходной задачи. Поэтому был предложен набор подходов, где матрица  $B \approx A$ , но при этом её относительно

легко обращаться. В частности, может быть рассмотрен оператор, соответствующий однородной модели  $\sigma = const$ , обрабатываемый с использованием псевдоспектрального метода [18], [26], или с помощью спектрального одномерного матричного разложения. Такой подход значительно улучшает сходимость метода сопряжённых градиентов для уравнения Пуассона, но его эффективность снижается с увеличением контрастности коэффициентов уравнения. Кроме того, использование псевдоспектрального и спектрального подходов требует трудозатратных вычислений на каждой итерации. Чтобы ускорить вычисление действия предобуславливателя, т.е.  $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$  для любой матрицы  $B$ , в настоящей работе использованы методы машинного обучения.

### 3. Предобуславливатель на основе машинного обучения

Основное предположение предлагаемого подхода заключается в том, что необходимо решить уравнение Пуассона для фиксированной модели  $\sigma(x, y)$  для множества различных правых частей. В этом случае разумно обучить нейронную сеть, которая приближала бы действие оператора  $B^{-1}$ , а затем многократно применять ее в качестве предобуславливателя для решения системы. В данной работе предлагается способ построения предобуславливателя для аппроксимации обратного оператора, вместо уменьшения числа обусловленности матрицы или её нормы напрямую, как описано в работе [20]. Итак, необходимо построить отображение

$$\mathcal{F}[\vec{r}] = \vec{q}_F \approx B^{-1}\vec{r}.$$

В данном исследовании используется нейронная сеть архитектуры U-net [27], которая представляет собой сверточную нейросеть, широко используемую для обработки изображений, обработки сейсмических данных [28–30]. Архитектура U-net с пятью сверточными слоями показана на рис. 3.1. Для обучения такой нейронной сети рассматривается серия изображений  $U_1, \dots, U_m$  размером  $128 \times 128$  пикселей. Изображения могут быть представлены в виде векторов  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$  длиной  $128^2$ . Далее вычислялось действие оператора Лапласа на набор данных для получения второй серии векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ , таких, что  $\vec{v}_k = A\vec{u}_k$ , их аналогично можно представить в виде изображений  $V_1, \dots, V_m$ . Далее сеть U-net была обучена отображать множество  $V_1, \dots, V_m$  на множество  $U_1, \dots, U_m$ . Таким образом, нейросеть обучена обращать матрицу  $A$ . Используемая функция потерь имеет вид:

$$Loss = \sum_{k=1}^m \left[ \lambda_{rel} \frac{\|\vec{u}_k - \mathcal{F}[\vec{u}_k]\|_2^2}{\|\vec{u}_k\|_2^2} + \lambda_{pos} \max\{0, -(\vec{u}_k, \mathcal{F}[\vec{u}_k])\} \right],$$

где  $\lambda_{rel}$  и  $\lambda_{pos}$  – веса, а  $(\cdot, \cdot)$  – обозначение стандартного скалярного произведения векторов. Второй член используется для обеспечения положительной определённости отображения  $\mathcal{F}[\vec{u}_k]$ , важнейшего свойства предобуславливателя метода сопряженных градиентов.

В работе рассматриваются альтернативные подходы к формированию обучающего набора, каждый из которых обладает достоинствами и ограничениями. Первый подход предполагает обучение с использованием 768 пар изображений в качестве обучающего набора данных и 256 пар в качестве набора данных для валидации. В качестве выходных данных предлагается использовать результаты применения действия оператора Лапласа к входным изображениям с целью обучения нейросети восстановлению

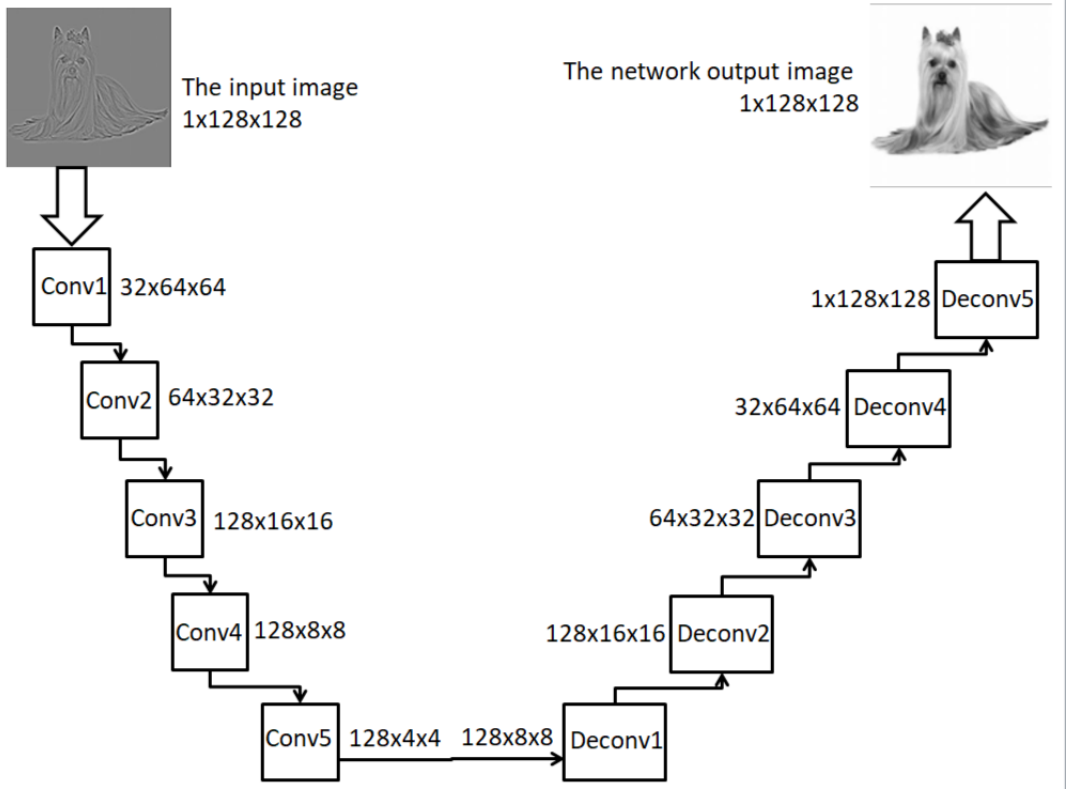
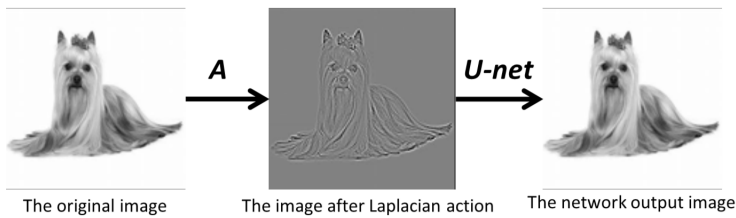


Рис. 3.1. Архитектура нейронной сети U-net

Fig. 3.1. U-net neural network architecture

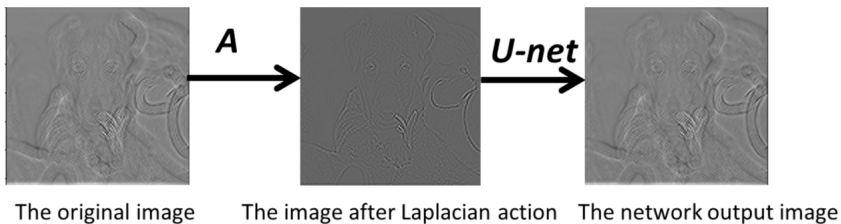
изображений. Пример исходного изображения, результат действия оператора Лапласа и восстановленное изображение представлены на рис. 3.2. Использование таких изображений упрощает визуальную интерпретацию результатов работы нейросети U-net. Однако такой подход может быть неэффективным при преобуславливании в методе сопряженных градиентов, где необходимо применять преобуславливающий оператор к вектору невязки.

Идея второго подхода следует из специфики применения нейронной сети в качестве преобуславливателя в итерационном методе. Поскольку входными данными для сети в методе сопряженных градиентов с преобуславливанием являются невязки, возникающие на каждой итерации, обоснованным является использование таких промежуточных невязок в качестве обучающих образцов, т.е. использовались изображения из набора, описанного выше, на них вычислялось действие оператора Лапласа для получения правых частей. Далее производился запуск итераций метода сопряженных градиентов без преобуславливания. В результате была получена серия векторов  $\vec{p}_j$  и  $A\vec{p}_j$ , которые были использованы для обучения нейронной сети. Примеры исходных и восстановленных векторов приведены на рис. 3.3.



**Рис. 3.2.** Пример применения нейросети U-net к изображению. Слева – исходное изображение, в центре – действие оператора Лапласа, справа – изображение, полученное на выходе

**Fig. 3.2.** An example of applying a U-net neural network to an image. The source image is on the left, the Laplace operator effect is in the middle, the output image is on the right



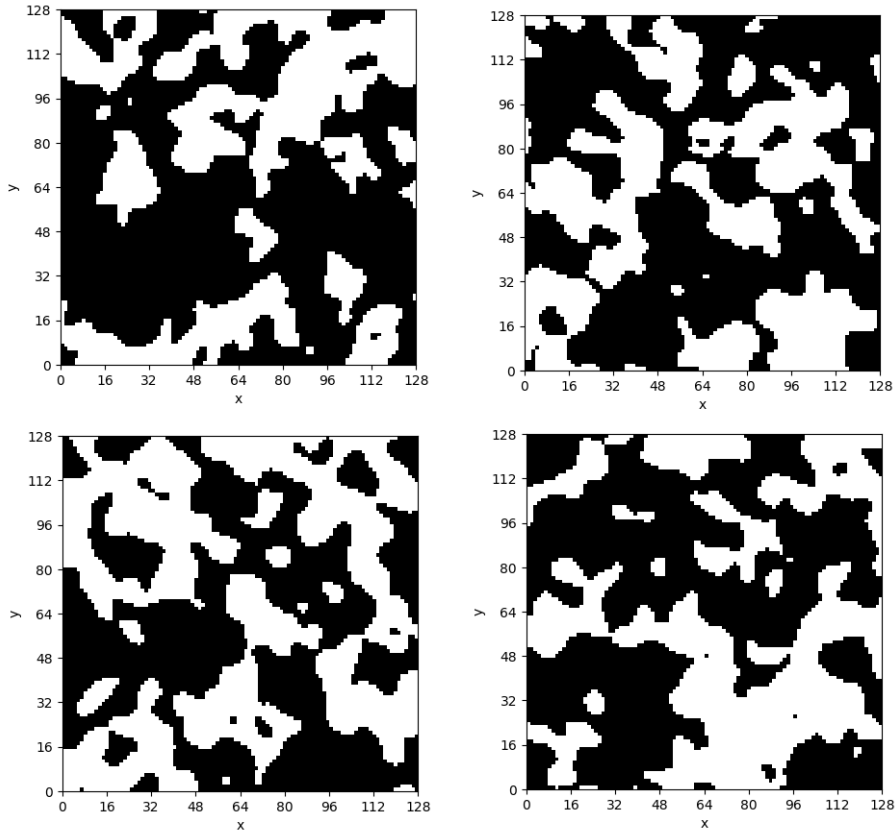
**Рис. 3.3.** Пример применения нейросети U-net к вектору  $\vec{p}_j$ , возникающему при итерациях метода сопряжённых градиентов. Слева – исходное изображение, в центре – действие оператора Лапласа, справа – изображение, полученное на выходе

**Fig. 3.3.** An example of applying the U-net neural network to the vector  $\vec{p}_j$  that occurs during iterations of the conjugate gradient method. The source image is on the left, the Laplace operator effect is in the middle, the output image is on the right

#### 4. Численные эксперименты

В рамках численных экспериментов рассматривались неоднородные модели среды, где  $\sigma = \sigma(x, y)$  – биномиальное распределение, определяемое как усеченное гауссово распределение с длиной корреляции, равной 10 узлам сетки, и общей пористостью, изменяющейся в пределах  $\{30\%, 35\%, 40\%, 45\%, 50\%\}$ . Примеры моделей с различными пористостями приведены на рис. 4.4. Предполагается, что проводимость материала, заполняющего поры  $\sigma_1$  (цветная точка на рис. 4.4), так же, как и проводимость  $\sigma_2$  (черная) варьировалась в пределах заданных значений  $\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$ . Эти модели близки к реальным образцам горных пород, где проводимость жидкости, заполняющей поры, намного выше, чем у изолирующей фракции. Более того, геометрия порового пространства песчаников хорошо предсказывается двухточечной статистикой, поэтому может быть аппроксимирована усеченным гауссовым распределением.

Для изучения влияния неоднородности модели на сходимость метода сопряженных



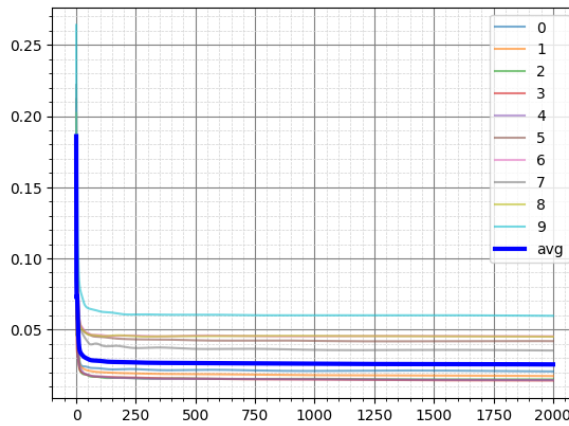
**Рис. 4.4.** Примеры моделей среды с пористостью: сверху слева – 35%, сверху справа – 40%, снизу слева – 45%, снизу справа – 50%

**Fig. 4.4.** Examples of media models with porosity of 35% is top left, 40% is top right, 45% is bottom left, 50% is bottom right

градиентов с предобуславливанием, были рассмотрены 10 реализаций статистической модели для каждого фиксированного контраста пористости и электропроводности. Всего было рассмотрено 200 различных моделей. Для каждой модели была обучена нейронная сеть U-net, что может не являться оптимальным решением, однако ожидается, что оно обеспечит максимально возможную точность. Фактически, нейросеть была обучена строить обратный оператор Лапласа без каких-либо дополнительных приближений.

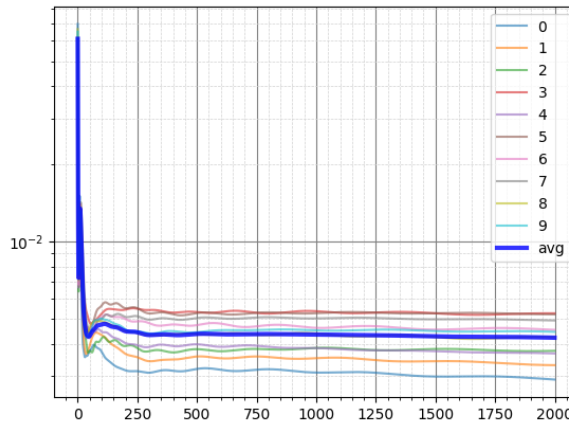
На каждой из 200 моделей среды решались с помощью метода сопряжённых градиентов системы уравнений для нескольких различных правых частей. В качестве точного решения использовались изображения из нашей коллекции. Для получения правых частей применялся неоднородный оператор Лапласа, затем использовался метод сопряжённых градиентов с предобуславливанием для восстановления исходного решения. К сожалению, разработанный алгоритм не сходил к точному решению. Таким образом, было рассмотрено поведение невязок в методе сопряжённых градиентов с предобуславливанием на основе машинного обучения на различных моделях среды. На рис. 4.5-4.8 представлены зависимости величин невязок от номера итераций для 10 реализаций

модели с фиксированной пористостью, равной 45%, но с различными контрастами проводимости.



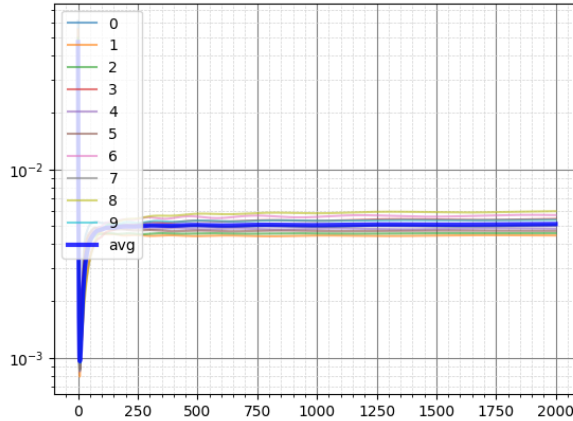
**Рис. 4.5.** Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^1$ . Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

**Fig. 4.5.** Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^1$ . The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments



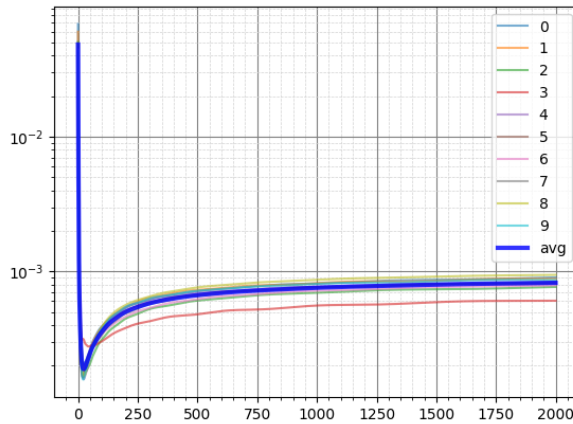
**Рис. 4.6.** Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^2$ . Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

**Fig. 4.6.** Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^2$ . The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values for over experiments



**Рис. 4.7.** Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^3$ . Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

**Fig. 4.7.** Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^3$ . The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments



**Рис. 4.8.** Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^4$ . Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

**Fig. 4.8.** Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast  $\sigma_1/\sigma_2 = 10^4$ . The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments

Согласно представленным рисункам величина невязки быстро снижается на пер-

вых итерациях, а затем достигает асимптотического значения, далекого от нуля. Эти значения не зависят от пористости модели, но чувствительны к контрасту проводимости. Чтобы оценить эту зависимость, была произведена оценка неустранимой невязки для всех экспериментов, и вычислено ее среднее значение по всем моделям среды и реализациям. Также было оценено среднее значение функции потерь нейросети U-net по статистическим моделям и реализациям. Кроме того, значения функции потерь при обучении U-net и неустранимой невязки приведены в таблице 4.1. Можно видеть, что функция потерь достигает примерно одного и того же значения – около 30% для всех контрастов проводимости. Однако неустранимый остаточный эффект уменьшается с увеличением контраста.

**Таблица 4.1.** Погрешность действия нейросети в пространстве  $L^2$  и значение неустранимой невязки для различных контрастов проводимости

**Table 4.1.** The error of the neural network in the  $L^2$  space and the value of the irremovable residual for different conductivity contrasts

$\sigma_1/\sigma_2$	Погрешность в $L^2$	Неустранимая невязка
$10^4$	0.28	$9.48 \cdot 10^{-4}$
$10^3$	0.24	$5.22 \cdot 10^{-3}$
$10^2$	0.28	$4.57 \cdot 10^{-3}$
$10^1$	0.34	$1.76 \cdot 10^{-2}$

## 5. Заключение

В данной работе представлен подход к построению предобуславливателя на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона методом сопряженных градиентов. Предложен предобуславливатель для аппроксимации обратного оператора Лапласа для пространственно изменяющихся коэффициентов модели пористой среды. Была использована нейронная сеть архитектуры U-Net для аппроксимации действия обратного оператора Лапласа с прямой минимизацией относительной ошибки (не невязки). Удалось достичь точности аппроксимации на основе машинного обучения, которая составила всего 30%. Такой точности оказалось недостаточно для обеспечения сходимости метода сопряженных градиентов. Разработанный «предобусловленный» алгоритм не сходится к решению, но стабилизируется, обладая неустранимой невязкой порядка  $10^{-3}$ . В данном исследовании также был проигнорирован тот факт, что предобуславливатель в методе сопряженных градиентов должен быть линейным самосопряженным и положительно определенным оператором. Таким образом, возможным способом улучшения качества предобуславливания на основе машинного обучения является включение этих условий для ограничения функции потерь при обучении нейронной сети.

**Благодарности.** Постановка задачи выполнена В. Лисицей, разработка и реализация предобуславливателя выполнена Е. Чекменёвой при финансовой поддержке РФФ в рамках гранта N 22-11-00004-П. Численные эксперименты выполнены Т. Хачковой в рамках гос. задания ИМ СО РАН FWNF-2026-0025.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хачкова Т. С., Лисица В. В., Решетова Г. В., Чеверда В. А. Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических со-процессоров. // *Вычислительные методы и программирование*. 2020. Т. 21, вып. 3. С. 306–318. DOI:10.26089/NumMet.v21r326
2. Zhan X., Schwartz L. M., Toksöz M. N., Smith W. C., Morgan F. D. Pore-scale modeling of electrical and fluid transport in berea sandstone. *Geophysics*. 2010. Vol. 75, no. 5. P. F135–F142. DOI:10.1190/1.3463704
3. Dorn C., Schneider M. Lippmann-schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2019. Vol. 118, no. 11. P. 631–653. DOI:10.1002/nme.6030
4. Kim J. Phase-field models for multi-component fluid flows. *Communications in Computational Physics*. 2012. Vol. 12, no. 3. P. 613–661. DOI:10.4208/cicp.301110.040811a
5. Blunt M. J., Bijeljic B., Dong H., Gharbi O., Iglauer S., Mostaghimi P., Paluszny A., Pentland C. Pore-scale imaging and modelling. *Advances in Water Resources*. 2013. Vol. 51. P. 197–216. DOI:10.1016/j.advwatres.2012.03.003
6. Li M., Foroughi S., Zhao J., Bijeljic B., and Blunt M. J. Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers. *Journal of Power Sources*. 2023. Vol. 584. 233539. DOI:10.1016/j.jpowsour.2023.233539
7. Lee S., Wheeler M. F. Enriched Galerkin methods for two-phase flow in porous media with capillary pressure. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 367. P. 65–86. DOI:10.1016/j.jcp.2018.03.031
8. Redondo C., Rubio G., Valero E. On the efficiency of the impes method for two phase flow problems in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2018. Vol. 164. P. 427–436. DOI:10.1016/j.petrol.2018.01.066
9. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2003. DOI:10.1137/1.9780898718003.ch4
10. Haber E., Ascher U. M., Aruliah D. A., and Oldenburg D. W. Fast simulation of 3d electromagnetic problems using potentials. *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 163, no. 1. P. 150–171. DOI:10.1006/JCPH.2000.6545
11. Lee B., Min C. Optimal preconditioners on solving the poisson equation with neumann boundary conditions. *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 433. 110189.
12. Xia J. A robust inner–outer hierarchically semi-separable preconditioner. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2012. Vol. 19, no. 6. P. 992–1016. DOI:10.1002/nla.1850

13. Соловьев С. А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 441–460.
14. Воронин К. В., Соловьев С. А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобуславливателя // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 268–280.
15. Stuben K. A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 128. P. 281–309. DOI:10.1016/S0377-0427(00)00516-1
16. Evstigneev N. M., Ryabkov O. I., Gerke K. M. Stationary stokes solver for single-phase flow in porous media: A blazingly fast solution based on algebraic multigrid method using gpu. *Advances in Water Resources*. 2023. Vol. 171. 104340. DOI:10.1016/j.advwatres.2022.104340
17. Ye Z., Hu X., Pan W. A multigrid preconditioner for spatially adaptive high-order meshless method on fluid–solid interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 400, no. 3. 115506. DOI:10.1016/j.cma.2022.115506
18. Манаев А. А., Лисица В. В. Спектральный предобуславливатель для решения уравнения Пуассона. *Вычислительные методы и программирование*. 2025. Т. 26, № 2. С. 111–128. DOI: 10.26089/NumMet.v26r208
19. Манаев А. А., Хачкова Т. С., Лисица В. В. Численный алгоритм оценки параметра пористости образцов горных пород. *Вычислительные методы и программирование*. 2025. Т. 26, № 4. С. 479–501. DOI:10.26089/NumMet.v26r432
20. Li Y., Chen P. Y., Du T., Matusik W. Learning preconditioners for conjugate gradient PDE solvers. *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning* (Honolulu, Hawaii, USA, 2023). PMLR, 2023. P. 19425–19439. DOI:10.48550/arXiv.2305.16432
21. Li M., Wang H., Jimack P. K. Generative modeling of sparse approximate inverse preconditioners. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 14834 of *Computational Science– ICCS 2024*. Switzerland: Springer Nature, 2024. P. 378–392. DOI:10.48550/arXiv.2405.11007
22. Azulay Y., Treister E. Multigrid-augmented deep learning preconditioners for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2023. Vol. 45, no. 3. P. S127–S151.
23. Li K., Khan S. M., Mehmani Y. Machine learning for preconditioning elliptic equations in porous microstructures: A path to error control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024. Vol. 427, no. 2. 117056. DOI:10.1016/j.cma.2024.117056
24. Sakharov D. I., Tsgoev C. A., Mullyadzhanov R. I. A hybrid method for solving the two-dimensional poisson equation: Combining u-net and conjugate gradient method. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025. Vol. 46, no. 8. P. 3777–3790. DOI: 10.1134/S1995080225610124

25. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
26. Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. 3d numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver. *Geophysics*. 2018. Vol. 83, no. 6. P. T333–T344. DOI:10.1190/geo2017-0710.1
27. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, volume 9351 of LNCS. 2015. P. 234–241. Springer, 2015.
28. Gadylshin K., Vishnevsky D., Gadylshina K., Lisitsa V. Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling. *Geophysics*. 2022. Vol. 87, no. 3. P. T237–T249. DOI:10.1190/geo2021-0242.1
29. Gadylshin K., Lisitsa V., Vishnevsky D., Gadylshina K. Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network. *Computers and Geosciences*. 2023. Vol. 180. 105438. DOI:10.1016/j.cageo.2023.105438
30. Gondyul E., Lisitsa V., Gadylshin K., Vishnevsky D. Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction. *Computers and Geosciences*. 2025. Vol. 196. 105806. DOI:10.1016/j.cageo.2024.105806

*Поступила 01.12.2025; доработана после рецензирования 24.02.2026;  
принята к публикации 01.03.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, V. A. Tcheverda, “Numerical Estimation of Electrical Resistivity in DigitalRocks Using GPUs”, *Numerical methods and programming*, **21**:3 (2020), 306–318 (In Russ.). DOI: 10.26089/NumMet.v21r326
2. X. Zhan, L. M. Schwartz, M. N. Toksöz, W. C. Smith, F. D. Morgan, “Pore-scale modeling of electrical and fluid transport in berea sandstone.”, *Geophysics*, **75**:5 (2010), F135–F142.. DOI: 10.1190/1.3463704
3. C. Dorn, M. Schneider, “Lippmann-schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **118**:11 (2019), 631–653. DOI: 10.1002/nme.6030
4. J. Kim, “Phase-field models for multi-component fluid flows”, *Communications in Computational Physics*, **12**:3 (2012), 613–661. DOI: 10.4208/cicp.301110.040811a
5. M. J. Blunt, B. Bijeljic, H. Dong, O. Gharbi, S. Iglauer, P. Mostaghimi, A. Paluszny, C. Pentland, “Pore-scale imaging and modelling”, *Advances in Water Resources*, **51** (2013), 197–216. DOI: 10.1016/j.advwatres.2012.03.003
6. M. Li, S. Foroughi, J. Zhao, B. Bijeljic, M. J. Blunt, “Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers”, *Journal of Power Sources*, **584** (2023). DOI: 10.1016/j.jpowsour.2023.233539

7. S. Lee, M. F. Wheeler, “Enriched galerkin methods for two-phase flow in porous media with capillary pressure”, *Journal of Computational Physics*, **367** (2018), 65–86. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.03.031
8. C. Redondo, G. Rubio, E. Valero, “On the efficiency of the impes method for two phase flow problems in porous media”, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **164** (2018), 427–436. DOI: 10.1016/j.petrol.2018.01.066
9. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.*, SIAM, 2003 DOI: 10.1137/1.9780898718003.ch4.
10. E. Haber, U. M. Ascher, D. A. Aruliah, D. W. Oldenburg, “Fast simulation of 3d electromagnetic problems using potentials”, *Journal of Computational Physics*, **163**:1 (2000), 150–171. DOI: 10.1006/JCPH.2000.6545
11. B. Lee, C. Min, “Optimal preconditioners on solving the poisson equation with neumann boundary conditions jour Journal of Computational Physics”, **433** (2021).
12. J. Xia, “A robust inner–outer hierarchically semi-separable preconditioner”, *Numerical Linear Algebra with Applications*, **19**:6 (2012), 992–1016. DOI: 10.1002/nla.1850
13. S. A. Solovyev, “Application of the Low-Rank Approximation Technique in the Gauss Elimination Method for Sparse Linear Systems”, *Numerical Methods and Programming*, **15** (2014), 441–460 (In Russ.).
14. K. V. Voronin, S. A. Solovyev, “Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned LowRank Approximation Technique”, *Numerical Methods and Programming*, **16** (2015), 268–280 (In Russ.).
15. K. Stuben, “A review of algebraic multigrid”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **128** (2001), 281–309. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00516-1
16. N. M. Evstigneev, O. I. Ryabkov, K. M. Gerke, “Stationary stokes solver for single-phase flow in porous media: A blazingly fast solution based on algebraic multigrid method using gpu”, *Advances in Water Resources*, **171** (2023). DOI: 10.1016/j.advwatres.2022.104340
17. Z. Ye, X. Hu, W. Pan, “A multigrid preconditioner for spatially adaptive high-order meshless method on fluid–solid interaction problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **400**:3 (2022). DOI: 10.1016/j.cma.2022.115506
18. A. A. Manaev, V. V. Lisitsa, “Spectral preconditioner for solving the Poisson equation”, *Numerical methods and programming*, **26**:2 (2025), 111–128. DOI: 10.26089/NumMet.v26r208
19. A. A. Manaev, T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, “Numerical algorithm for estimating the formation factor of digital rocks”, *Numerical methods and programming*, **26**:4 (2025), 479–501. DOI: 10.26089/NumMet.v26r432
20. Y. Li, P. Y. Chen, T. Du, W. Matusik, “Learning preconditioners for conjugate gradient PDE solvers.”, *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning*. Vol. 202 of Proceedings of Machine Learning Research (23–29 Jul 2023), PMLR, 19425–19439.

21. M. Li, H. Wang, P. K. Jimack, “Generative modeling of sparse approximate inverse preconditioners”, *In Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 14834 of Computational Science– ICCS 2024, Springer Nature, Switzerland, 2024, 378–392 DOI: 10.48550/arXiv.2405.11007.
22. Y. Azulay, E. Treister, “Multigrid-augmented deep learning preconditioners for the helmholtz equation”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **45**:3 (2023), S127–S151.
23. K. Li, S. M. Khan, Y. Mehmani, “Machine learning for preconditioning elliptic equations in porous microstructures: A path to error control”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **427**:2 (2024). DOI: 10.1016/j.cma.2024.117056
24. D. I. Sakharov, C. A. Tsgoev, R. I. Mullyadzhyanov, “A hybrid method for solving the two-dimensional poisson equation: Combining u-net and conjugate gradient method”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46**:8 (2025), 3777–3790. DOI: 10.1134/S1995080225610124
25. A. A. Samarsky, *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 616 p.
26. M. Belonosov, V. Kostin, D. Neklyudov, V. Tcheverda, “3d numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver”, *Geophysics*, **83**:6 (2018), T333–T344. DOI: 10.1190/geo2017-0710.1
27. O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox., “U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation.”, *In Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*. Vol. 9351 of LNCS, Springer, 2015, 234–241.
28. K. Gadylshin, D. Vishnevsky, K. Gadylshina, V. Lisitsa, “Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling”, *Geophysics*, **87**:3 (2022), T237–T249. DOI: 10.1190/geo2021-0242.1
29. K. Gadylshin, V. Lisitsa, D. Vishnevsky, K. Gadylshina, “Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network”, *Computers and Geosciences*, **180** (2023). DOI: 10.1016/j.cageo.2023.105438
30. E. Gondyul, V. Lisitsa, K. Gadylshin, D. Vishnevsky, “Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction”, *Computers and Geosciences*, **196** (2025). DOI: 10.1016/j.cageo.2024.105806

*Submitted 01.12.2025; Revised 24.02.2026; Accepted 01.03.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

## Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона–Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина

Р. В. Жалнин, А. Д. Мулюгин, В. В. Вдовин

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

**Аннотация.** Проведено сравнительное исследование эффективности методов решения линейных систем в составе безматричного метода Ньютона–Крылова (JFNK) для численного моделирования двумерных уравнений газовой динамики на основе разрывного метода Галёркина. Рассматривались классический метод минимальных невязок (MINRES) и современный метод индуцированной размерности IDR(s) с различными значениями параметра  $s$ . Исследование выполнено на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Проанализировано качество получаемых численных решений, спектральные характеристики течения, а также вычислительная производительность алгоритмов. Показано, что все варианты метода IDR(s) обеспечивают сопоставимое с MINRES качество воспроизведения вихревых структур и энергетических спектров. При этом все методы семейства IDR(s) демонстрируют существенно меньшее время выполнения одного шага по времени по сравнению с MINRES, обеспечивая ускорение от 1.5 до 2.5 раз в зависимости от размерности вспомогательного подпространства. Наилучший баланс между скоростью сходимости и вычислительными затратами показал метод IDR(4), что позволяет рекомендовать его в качестве эффективного линейного решателя в составе JFNK для нестационарных задач вычислительной гидродинамики.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галёркина, неявная схема, безматричный метод Ньютона–Крылова, метод MINRES, метод IDR(s)

**Для цитирования:** Жалнин Р. В., Мулюгин А. Д., Вдовин В. В. Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона–Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 99–114. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114

*Об авторах:*

**Жалнин Руслан Викторович**, декан факультета математики и ИТ, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhalnirvr@yandex.ru

**Мулюгин Александр Дмитриевич**, лаборант-исследователь кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2721-1390>, alexandermulyugin@yandex.ru

**Вдовин Владислав Владимирович**, лаборант-исследователь кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2558-4324>, vdovinv05@mail.ru

© Р. В. Жалнин, А. Д. Мулюгин, В. В. Вдовин



MSC2020 76-10

# Comparative analysis of linear solvers for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method

R. V. Zhalnin, A. D. Mulyugin, V. V. Vdovin

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** A comparative study of the efficiency of linear solvers within the Jacobian-free Newton–Krylov (JFNK) framework for the numerical simulation of two-dimensional gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method is presented. The classical MINRES method and the modern induced dimension reduction method IDR( $s$ ) with various values of parameter  $s$  are considered. The study is performed on the example of the Kelvin–Helmholtz instability problem. The accuracy of the obtained numerical solutions, spectral characteristics of the flow, and computational performance of the algorithms are analyzed. All IDR( $s$ ) variants are shown to provide a quality of vortex structure resolution and energy spectra comparable to that of MINRES. Meanwhile, all methods from the IDR( $s$ ) family require significantly less wall-clock time per time step compared to MINRES, achieving a speedup factor from 1.5 to 2.5, depending on the dimension of the auxiliary subspace. The IDR(4) method demonstrates the best balance between convergence rate and computational cost, which allows us to recommend it as an efficient linear solver within the JFNK approach for unsteady computational fluid dynamics problems.

**Keywords:** Discontinuous Galerkin Method, Implicit Scheme, Jacobian-free Newton–Krylov Method, MINRES method, IDR( $s$ ) method

**For citation:** R. V. Zhalnin, A. D. Mulyugin, V. V. Vdovin. Comparative analysis of linear solvers

for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 99–114. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114

*About the authors:*

**Zhalnin Ruslan Viktorovich**, Dean of the Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhalninrvv@yandex.ru

**Mulyugin Alexander Dmitrievich**, Laboratory research assistant, Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2721-1390>, alexandermulyugin@yandex.ru

**Vdovin Vladislav Vladimirovich**, Laboratory research assistant, Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2558-4324>, vdovinvv05@mail.ru

## 1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) является эффективным инструментом для численного решения уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов [1–5]. Метод обеспечивает высокий порядок точности на неструктурированных сетках, обладает естественным параллелизмом и демонстрирует устойчивость при решении задач с преобладанием конвективных членов.

При решении, например, уравнений газовой динамики для малых чисел Маха [6, 7] явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными вследствие жёстких ограничений на шаг по времени, определяемых условием Куранта. Применение неявных схем [4] позволяет использовать большие шаги по времени; однако на каждом временном слое возникает необходимость решения больших систем нелинейных уравнений, которые часто оказываются плохо обусловленными [8]. Классические итерационные методы могут демонстрировать существенное снижение скорости сходимости с ростом числа степеней свободы и увеличением порядка аппроксимации, что требует применения более эффективных решателей.

Для решения систем нелинейных уравнений хорошо зарекомендовал себя безматричный метод Ньютона–Крылова (Jacobian-free Newton–Krylov method, JFNK) [9, 10]. Основная идея этого метода заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби. Ключевым компонентом JFNK является выбор итерационного метода для решения внутренней линейной системы.

В данной работе проводится сравнительный анализ двух классов линейных решателей: классического метода минимальных невязок (MINRES) [11] и современного метода индуцированной размерности IDR(s) [12, 13]. Методы сравниваются в контексте их применения внутри JFNK для решения двумерных уравнений газовой динамики на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [14, 15].

## 2. Система уравнений газовой динамики

Рассматривается двумерная система уравнений газовой динамики, записанная в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho c \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(U) = \left( \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \\ \rho uc \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho vc \end{Bmatrix} \right),$$

$\rho$  – плотность,  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $p$  – давление,  $E$  – полная энергия,  $c$  – массовая концентрация.

Уравнение состояния

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1) \quad (2.2)$$

замыкает систему.

Начальные и граничные условия ставятся в соответствии с решаемой задачей.

### 3. Численный метод

Для дискретизации системы уравнений (2.1) будем использовать метод Галёркина с разрывными базисными функциями [1–5]. Для этого покроем расчётную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  сеткой  $\Omega_h = \{C_j \mid j = \overline{1, N_h}\}$ , где  $C_j$  – ячейки сетки. Введём пространство

$$V_h^p = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{C_j} \in P_p(C_j), j = \overline{1, N_h}\},$$

где  $P_p(C_j)$  – пространство полиномов степени не выше  $p$  на элементе  $C_j$ .

Зададим в  $V_h^p$  базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}\right)^{\alpha_k} \left(\frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j}\right)^{\beta_k}, & \text{если } (x, y) \in C_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (3.2)$$

здесь  $\alpha_k + \beta_k \leq p$ ,  $k = \overline{1, N_\varphi}$ ,  $N_\varphi = p(p+1)/2$ ,  $(x_{cj}, y_{cj})$  – центр масс ячейки  $C_j$ .

Приближенное решение ищется в виде

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \quad (3.3)$$

После подстановки в слабую форму уравнений и интегрирования по частям получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{d}{dt} U_{jk}(t) \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV = \int_{C_j} \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV - \oint_{\partial C_j} (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} dS, \quad (3.4)$$

где  $m = \overline{1, N_\varphi}$ ,  $j = \overline{1, N_h}$ . Здесь  $\hat{\mathbf{F}}$  – численный поток, который определяется как приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва (например, решатели Лакса–Фридрихса–Русанова, HLLC и т. д.).

Запишем (3.4) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A \frac{dU_h}{dt} = \mathcal{L}(U_h), \quad (3.5)$$

где

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_{N_h}),$$

$$U_h = (U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1N_\varphi}, \dots, U_{N_h 1}, U_{N_h 2}, \dots, U_{N_h N_\varphi})^T,$$

$A_j$  – матрица, составленная из элементов  $a_{mk}^j = \int_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV$ .

Для интегрирования (3.5) по времени будем использовать неявную схему

$$\frac{U_h - \bar{U}_h}{\tau} = A^{-1} \mathcal{L}(U_h), \quad (3.6)$$

где  $U_h$  – искомые коэффициенты разложения решения по базису на текущий момент времени;  $\bar{U}_h$  – коэффициенты разложения решения по базису, соответствующие предыдущему шагу по времени.

Перепишем систему (3.6) в виде

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h, \quad (3.7)$$

где

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = \frac{1}{\tau}U_h - A^{-1}\mathcal{L}(U_h), \quad F_h = \frac{1}{\tau}\bar{U}_h.$$

Для решения системы (3.7) используется безматричный метод JFNK [9, 10]. Основная идея этого метода заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби.

Алгоритм состоит из внешних итераций:

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta \Delta_h, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad U_h^{(0)} = \bar{U}_h, \quad (3.8)$$

где  $\theta$  – параметр регуляризации, который вводится для управления сходимостью метода Ньютона [5]

Приращение  $\Delta_h$  находится как решение системы линейных алгебраических уравнений вида

$$J \Delta_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)}), \quad (3.9)$$

где

$$J = \left. \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial U_h} \right|_{U_h^{(\alpha)}}. \quad (3.10)$$

Ключевой особенностью JFNK является применение какого-либо крыловского метода для решения (3.9) и безматричная аппроксимация действия якобиана (3.10) на вектор:

$$Jv \approx \frac{\mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)} + \varepsilon_J v) - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)})}{\varepsilon_J}, \quad (3.11)$$

где  $\varepsilon_J$  – малое возмущение, выбираемое из соображений баланса между погрешностью аппроксимации и ошибками округления. При слишком большом  $\varepsilon_J$  возрастает погрешность аппроксимации из-за нелинейных свойств оператора  $\mathcal{Q}_h$ , при слишком малом – начинают доминировать ошибки округления при вычитании близких чисел. На практике  $\varepsilon_J$  для каждой задачи может быть различным и выбирается исходя из ее постановки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (3.9) в данной работе применяются метод минимальных невязок (MINRES) и метод IDR(s).

Для системы вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Итерационная схема MINRES имеет вид:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \tau_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{Ax}_k - \mathbf{b}, \quad \tau_k = \frac{(\mathbf{Ar}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{Ar}_k, \mathbf{Ar}_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Метод обладает гарантированной сходимостью для симметричных (или близких к симметричным) невырожденных систем, но может медленно работать на плохо обусловленных системах, характерных для DG-дискретизаций высокого порядка.

В основе метода IDR(s) лежит следующая

**Теорема 3.1** (IDR [12]). Пусть  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  – произвольная матрица,  $\vartheta_0 \in \mathbb{C}^N$  – ненулевой вектор,  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{K}^N(A, \vartheta_0)$  – полное крыловское пространство. Пусть  $S \subset \mathbb{C}^N$  – произвольное собственное подпространство матрицы  $A$ , не имеющее с  $\mathcal{G}_0$  нетривиального инвариантного подпространства. Определим последовательность подпространств:

$$\mathcal{G}_j = (I - \omega_j A)(\mathcal{G}_{j-1} \cap S), \quad \text{где } \omega_j \neq 0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j &\subset \mathcal{G}_{j-1} \quad \forall j > 0, \\ \mathcal{G}_j &= \{0\} \quad \text{для } j \leq N. \end{aligned}$$

---

**Листинг 3.1.** Алгоритм IDR(s) [12]

---

**Require:**  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ;  $\mathbf{x}_0, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$ ;  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N \times s}$ ;  $TOL \in (0, 1)$ ;  $MAXIT > 0$

**Ensure:**  $\mathbf{x}_n$  such that  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_n\| \leq TOL$

▷ Инициализация.

```

1:  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ;
2:  $\mathbf{P} = \text{orth}([\mathbf{r}_0, \text{rand}(N, s-1)])$ 
3: for  $n = 0$  to  $s-1$  do                                ▷ Выполнить  $s$  шагов, чтобы построить векторы в  $\mathcal{G}_0$ 
4:    $\mathbf{v} = A\mathbf{r}_n$ ;  $\omega = (\mathbf{v}^T \mathbf{r}_n) / (\mathbf{v}^T \mathbf{v})$ ;
5:    $d\mathbf{x}_n = \omega \mathbf{r}_n$ ;  $d\mathbf{r}_n = -\omega \mathbf{v}$ ;
6:    $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + d\mathbf{r}_n$ ;  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n$ ;
7: end for
8:  $d\mathbf{R}_{n+1} = (d\mathbf{r}_n \cdots d\mathbf{r}_0)$ ;  $d\mathbf{X}_{n+1} = (d\mathbf{x}_n \cdots d\mathbf{x}_0)$ ;
                                               ▷ Построение подпространств  $\mathcal{G}_j$  для  $j = 1, 2, 3, \dots$ 
9:  $n = s$ 
10: while  $\|\mathbf{r}_n\| > TOL$  or  $n < MAXIT$  do                ▷ Цикл по подпространствам  $\mathcal{G}_j$ 
11:   for  $k = 0$  to  $s$  do                                    ▷ Цикл внутри подпространства  $\mathcal{G}_j$ 
12:     Найти  $\mathbf{c}$  из  $\mathbf{P}^T d\mathbf{R}_n \mathbf{c} = \mathbf{P}^T \mathbf{r}_n$ 
13:      $\mathbf{v} = \mathbf{r}_n - d\mathbf{R}_n \mathbf{c}$ ;
14:     if  $k = 0$  then                                       ▷ Первые векторы в  $\mathcal{G}_{j+1}$ 
15:        $\mathbf{t} = A\mathbf{v}$ ;
16:        $\omega = (\mathbf{t}^T \mathbf{v}) / (\mathbf{t}^T \mathbf{t})$ ;
17:        $d\mathbf{r}_n = -d\mathbf{R}_n \mathbf{c} - \omega \mathbf{t}$ ;
18:        $d\mathbf{x}_n = -d\mathbf{X}_n \mathbf{c} + \omega \mathbf{v}$ ;
19:     else                                                   ▷ Последующие векторы в  $\mathcal{G}_{j+1}$ 
20:        $d\mathbf{x}_n = -d\mathbf{X}_n \mathbf{c} + \omega \mathbf{v}$ ;
21:        $d\mathbf{r}_n = -A d\mathbf{x}_n$ ;
22:     end if
23:      $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + d\mathbf{r}_n$ ;
24:      $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n$ ;
25:      $n = n + 1$ ;
26:      $d\mathbf{R}_n = (d\mathbf{r}_{n-1} \cdots d\mathbf{r}_{n-s})$ ;
27:      $d\mathbf{X}_n = (d\mathbf{x}_{n-1} \cdots d\mathbf{x}_{n-s})$ ;
28:   end for
29: end while

```

---

На практике [13] алгоритм IDR(s) заключается в построении последовательности приближений, невязки которых вытесняются из последовательности вложенных под-

пространств, называемых подпространствами IDR. Каждое такое подпространство имеет размерность на единицу меньше предыдущего. Параметр  $s$  определяет глубину редукции и финальную размерность «рабочего» подпространства. Подробный алгоритм приведен в листинге 3.1.

#### 4. Задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

В качестве тестовой была выбрана задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Начальные условия задавались следующим образом [14, 15]:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + 0.5(\tanh(y_1) - \tanh(y_2)), \\ p &= 10, \\ u &= (\tanh(y_1) - \tanh(y_2) - 1), \\ v &= 0.01 \sin(2\pi x) (\exp(-\tilde{y}_1^2) - \exp(-\tilde{y}_2^2)), \\ c &= 0.5(\tanh(y_1) - \tanh(y_2) + 2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $y_1 = \frac{y - 0.5}{0.05}$ ,  $y_2 = \frac{y - 1.5}{0.05}$ ,  $\tilde{y}_1 = \frac{y - 0.5}{0.2}$ ,  $\tilde{y}_2 = \frac{y - 1.5}{0.2}$ .

Расчётная область:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ . На границе расчётной области задавались периодические граничные условия.

Предварительно были выполнены расчеты для оценки влияния значений параметра  $\varepsilon_J$  на точность и скорость сходимости метода.

**Таблица 4.1.** Зависимость итерационных параметров от значения  $\varepsilon_J$   
**Table 4.1.** Dependence of the iteration parameters on the value of  $\varepsilon_J$

Измеряемый параметр	$\varepsilon_J$		
	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Среднее число итераций Ньютона	2.00	2.03	2.05
Макс. число итераций Ньютона	3	2	3
Среднее число внутренних итераций	2.92	3.03	3.13
Средняя внутренняя невязка	$4.79 \cdot 10^{-5}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$	$5.11 \cdot 10^{-5}$
Среднее время шага, с	0.110505	0.099850	0.110435

Из таблицы 4.1 видно, что при  $\varepsilon_J = 10^{-5}$  достигается наименьшее среднее время выполнения для линейного решателя. При этом средняя невязка остаётся того же порядка, что и для остальных значений  $\varepsilon_J$ , то есть уменьшение параметра до  $10^{-6}$  не даёт заметного выигрыша по точности, но приводит к увеличению времени расчёта. Поэтому в качестве оптимального компромисса между скоростью вычислений и качеством решения в расчетах использовалось значение  $\varepsilon_J = 10^{-5}$ .

Расчеты были выполнены на гибридной системе CPU+GPU (CPU: Intel Xeon @ 2.00 GHz, 12 ГБ RAM; GPU: NVIDIA T4 Tensor Core, 16 ГБ VRAM) с параметрами, приведенными в таблице 4.2.

На рис. 4.1 представлены шлирен-картины течения в нижней половине расчётной области в момент времени  $t = 3$ . Видно формирование характерных вихревых структур, что согласуется с известными результатами [14, 15].

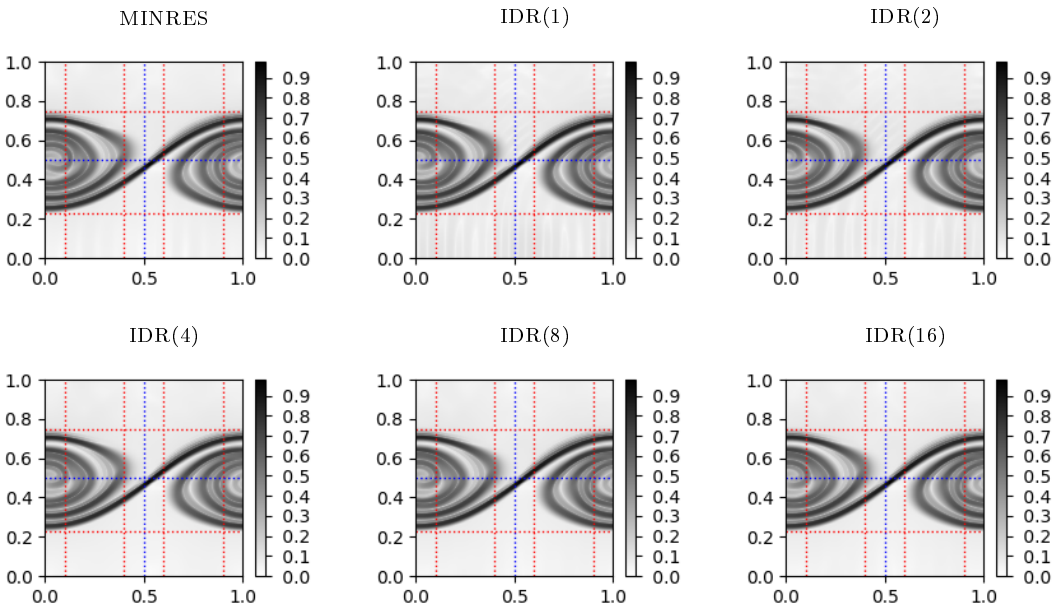
**Таблица 4.2.** Основные численные параметры расчёта  
**Table 4.2.** Main numerical calculation parameters

Параметр	Значение	Описание
$\varepsilon_J$	$1.0 \times 10^{-5}$	Точность для якобиана
$\varepsilon_{\text{lin}}$	$1.0 \times 10^{-4}$	Точность линейного решателя
$\varepsilon_{\text{Newton}}$	$1.0 \times 10^{-4}$	Точность метода Ньютона
$N_{\text{lin}}^{\text{max}}$	100	Максимальное число итераций линейного решателя
$N_{\text{Newton}}^{\text{max}}$	10	Максимальное число итераций метода Ньютона
$N_x$	256	Число узлов сетки по направлению $x$
$N_y$	512	Число узлов сетки по направлению $y$
$\tau$	$1.0 \times 10^{-4}$	Шаг по времени

Вычисление шlieren-сигнала осуществлялось на основе значений распределения поля плотности по следующей формуле:

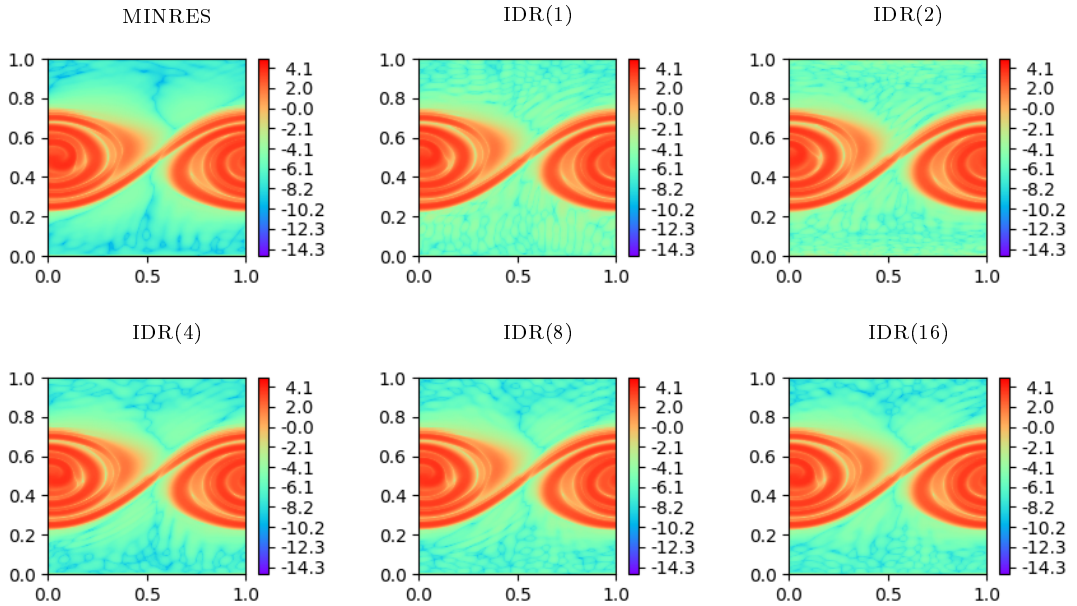
$$S = \left( \frac{|\nabla \rho|}{\rho_*} \right)^\kappa, \quad \rho_* = \max_{\Omega} |\nabla \rho|, \quad (4.2)$$

где  $\kappa$  – параметр, введенный для настройки контрастности изображения (в данном случае использовалось значение  $\kappa = 0.4$ ).



**Рис. 4.1.** Шлирен картина течения в области  $[0, 1] \times [0, 1]$  на момент времени  $t = 3$  с. Синие линии:  $x = 0.5$  и  $y = 0.5$ . Красные линии:  $x = 0.1, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.9, y = 0.23, y = 0.75$

**Fig. 4.1.** Schlieren image of the flow in the domain  $[0, 1] \times [0, 1]$  at time  $t = 3$  s. Blue lines:  $x = 0.5$  and  $y = 0.5$ . Red lines:  $x = 0.1, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.9, y = 0.23, y = 0.75$



**Рис. 4.2.** Распределение значений  $\omega^*$  в области  $[0, 1] \times [0, 1]$  на момент времени  $t = 3$  с

**Fig. 4.2.** Distribution of  $\omega^*$  values in the domain  $[0, 1] \times [0, 1]$  at time  $t = 3$  s

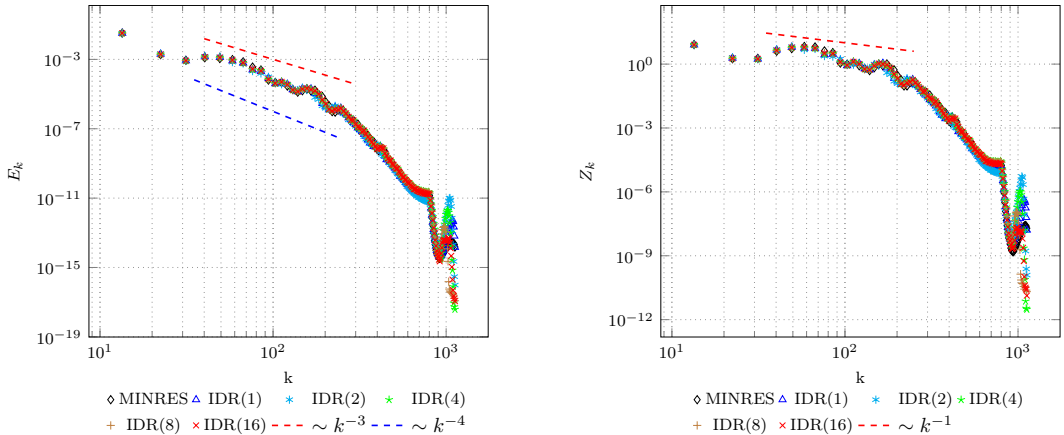
Сопоставление всех полученных изображений показывает, что основные вихревые структуры воспроизводятся единообразно во всех расчётах: на каждом рисунке вихри локализованы в пределах одних и тех же границ, обозначенных красными линиями. Это свидетельствует о совпадении как положения, так и характерных размеров вихрей вне зависимости от выбранного метода. Положение центральной сдвиговой области также практически идентично во всех вариантах расчёта, что подтверждает корректность воспроизведения течения в целом. Вместе с тем, для методов MINRES, IDR(4), IDR(8) и IDR(16) шпирен-картины имеют более гладкий вид и лучше соответствуют ожидаемой физической картине решения, в то время как для методов IDR(1) и IDR(2) вблизи нижней границы расчётной области наблюдаются периодические возмущения. Таким образом, увеличение параметра  $s$  в методе IDR( $s$ ) позволяет уменьшить влияние численных артефактов.

На рис. 4.2 показано распределение значений величины  $\omega^*$  для различных итерационных методов. Значения  $\omega^*$  вычисляются следующим образом:

$$\omega^* = \log(|\omega| + 10^{-5}), \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из рис. 4.2 видно, что при использовании методов IDR(1) и IDR(2) результаты отличаются от результатов, полученных другими методами, незначительно. При этом основная вихревая структура течения сохраняется: в левой и правой частях области наблюдаются характерные области повышенной завихренности, соответствующие развитию неустойчивости.

Анализ энергетического спектра  $E_k$  и спектра энтропии  $Z_k$ , представленных на рис. 4.3, показывает, что графики практически совпадают во всём диапазоне волновых



**Рис. 4.3.** Энергетические спектры  $E_k$  (слева) и спектры энтропии  $Z_k$  (справа) на момент времени  $t = 3$  с

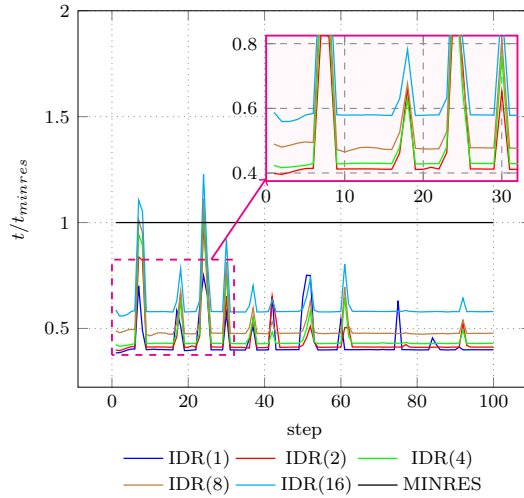
**Fig. 4.3.** Energy spectra  $E_k$  (left) and enstrophy spectra  $Z_k$  (right) at time  $t = 3$  s

чисел  $k$ , за исключением области высоких  $k$ , где заметен небольшой разброс значений. Но эти расхождения не выходят за рамки вычислительной погрешности и не играют принципиальной роли. Основная энергия сосредоточена в области малых и средних волновых чисел. Из рисунка также видно, что в инерционном интервале энергетический спектр располагается между кривыми  $\sim k^{-4}$  и  $\sim k^{-3}$ . Такой наклон характерен для двумерной турбулентности с преобладанием энстрофийного каскада, где энергия передаётся от крупных вихрей к более мелким медленнее, чем в трёхмерном случае. При этом из графика для спектра энтропии видно, что она практически не убывает с ростом  $k$  в инерционном интервале ( $Z_k \sim k^{-1}$ ), что соответствует классической картине двумерной турбулентности.

Таким образом, сравнение MINRES и методов семейства IDR( $s$ ) не выявило между ними существенной разницы в распределении энергии по спектру. Это говорит о том, что переход к IDR( $s$ ) не вносит искажений в энергетический спектр и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

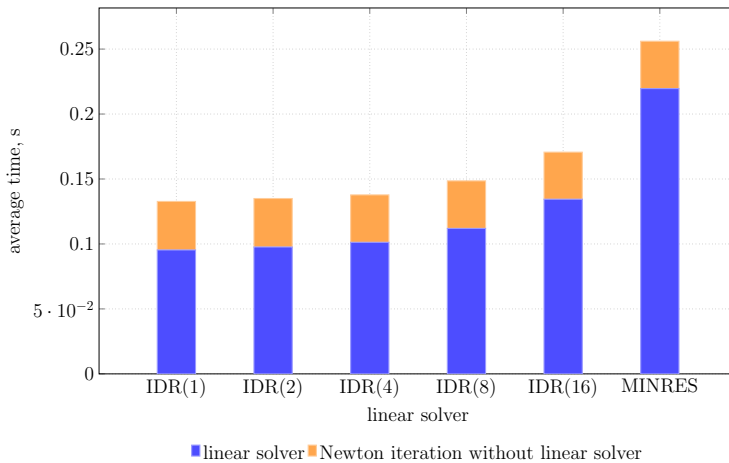
На рис. 4.4 приведено сравнение времени выполнения методов IDR( $s$ ) со временем работы метода MINRES. Из графика видно, что все варианты метода IDR( $s$ ) в среднем оказываются быстрее MINRES практически на всех временных шагах. Наименьшие значения нормированного времени демонстрируют методы IDR(1), IDR(2) и IDR(4): для большинства шагов их время выполнения составляет примерно 0.4–0.45 от времени MINRES, то есть ускорение составляет около 2–2.5 раз. Метод IDR(8) также устойчиво быстрее MINRES, однако его нормированное время немного выше и находится примерно на уровне 0.48–0.5. Метод IDR(16) имеет наибольшее время среди рассмотренных вариантов IDR( $s$ ): его значения в основном располагаются около 0.58–0.6, что всё равно соответствует заметному ускорению по сравнению с MINRES.

На отдельных временных шагах наблюдаются резкие локальные увеличения времени выполнения. Эти пики особенно хорошо видны на увеличенном фрагменте графика, где показаны первые шаги расчёта. В такие моменты время работы некоторых методов IDR( $s$ ) приближается к уровню MINRES или кратковременно превышает характерные для себя средние значения. Наиболее выраженные пики наблюдаются у методов с боль-



**Рис. 4.4.** Время вычислений (нормированное)  
**Fig. 4.4** Computing time (normalized)

шими значениями параметра  $s$ , в частности у IDR(16), а также у IDR(4) и IDR(8) на отдельных шагах. Это может быть связано с усложнением сходимости итерационного процесса на данных шагах или с увеличением числа внутренних операций, необходимых для построения подпространства в методе IDR( $s$ ). При этом важно отметить, что даже с учётом локальных всплесков все кривые IDR( $s$ ) в основном остаются ниже линии MINRES.



**Рис. 4.5.** Сравнение скорости внутренних линейных итераций IDR( $s$ ) и времени итераций Ньютона  
**Fig. 4.5.** Comparison of the internal linear iteration speed of IDR( $s$ ) and Newton iteration time

На рис. 4.5 показано среднее время выполнения одного шага для различных линейных решателей с разделением на время работы самого линейного решателя и оставшуюся часть итерации Ньютона. Видно, что методы IDR( $s$ ) работают заметно быстрее MINRES: минимальное суммарное время наблюдается для IDR(1), IDR(2) и IDR(4), тогда как при увеличении параметра  $s$  время постепенно возрастает. Наибольшие затраты соответствуют методу MINRES, причём основная часть времени во всех случаях приходится именно на решение линейной системы. Вклад остальных операций итерации Ньютона меняется слабо, поэтому различие в общей скорости определяется главным образом эффективностью выбранного линейного решателя.

**Таблица 4.3.** Невязки при решении СЛАУ в момент времени 3 секунды  
**Table 4.3.** Residuals in solving systems of linear equations at a time of 3 seconds

Итерация	IDR(1)	IDR(2)	IDR(4)	IDR(8)	IDR(16)	MINRES
1	2.167e-03	2.064e-03	2.067e-03	2.076e-03	2.076e-03	2.228e-03
2	1.113e-04	1.002e-04	9.049e-05	9.016e-05	9.016e-05	5.821e-05
3	8.399e-05	8.022e-04	-	-	-	-
4	-	3.978e-04	-	-	-	-
5	-	6.682e-05	-	-	-	-

В таблице 4.3 представлены невязки при решении СЛАУ в момент времени  $t = 3$  с для методов MINRES и IDR( $s$ ). Видно, что начальное значение невязки для всех методов имеет один порядок и составляет примерно  $10^{-3}$ . Уже после первой итерации все методы существенно уменьшают невязку до уровня порядка  $10^{-4}$ , что говорит о достаточно быстрой начальной сходимости рассматриваемых итерационных алгоритмов.

Наиболее быстрое уменьшение невязки демонстрирует метод MINRES, который уже ко второй итерации достигает наименьшего значения среди показанных методов. Метод IDR(2) ведёт себя менее монотонно: после уменьшения невязки на второй итерации наблюдается её временный рост, после чего к пятой итерации она снова снижается до уровня порядка  $10^{-4}$ . Таким образом, по данной таблице можно сделать вывод, что все методы обеспечивают уменьшение невязки, однако наиболее устойчивую и быструю сходимость на рассматриваемом временном шаге показывают MINRES, IDR(16), IDR(8) и IDR(4), тогда как IDR(2) требует большего числа итераций и имеет менее стабильный характер сходимости.

В результате вычислительных экспериментов получено, что IDR(4) требует в среднем 3 итерации линейного решателя для достижения требуемой точности; обеспечивает финальную невязку Ньютона гораздо меньшую, чем при использовании MINRES; общее время на один временной шаг сокращается с  $\sim 0.438$  с (MINRES) до  $\sim 0.396$  с (IDR(4)), что даёт ускорение в  $\sim 1.5$  раза.

Таким образом, метод IDR(4) является предпочтительным выбором в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики. Его использование позволяет сократить общее время расчёта более чем в 1,5 раза и улучшить сходимость внешних итераций Ньютона

## 5. Заключение

В работе проведено сравнительное исследование эффективности классического метода минимальных невязок (MINRES) и семейства методов индуцированной размерно-

сти IDR(s) в составе безматричного метода Ньютона-Крылова. Рассмотрение выполнено в контексте численного решения двумерных уравнений газовой динамики с помощью неявной схемы для разрывного метода Галёркина на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина—Гельмгольца.

Анализ полученных численных решений, включающий сопоставление шпирен-картин течения и распределений завихренности, показал, что все рассмотренные методы воспроизводят идентичную крупномасштабную вихревую структуру. Сравнение энергетических спектров и спектров энтропии не выявило между методами значимых различий. Это свидетельствует о том, что замена MINRES на IDR(s) не вносит искажений в физическую картину течения и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

Методы семейства IDR(s) обеспечивают устойчивое ускорение расчётов по сравнению с MINRES в 1,5–2,5 раза, причём наиболее экономичные варианты IDR(1), IDR(2) и IDR(4) затрачивают лишь 40–45% времени MINRES. Хотя при больших  $s$  наблюдается возрастание времени счёта на некоторых шагах по времени, производительность IDR(8) и IDR(16) даже в эти моменты не опускается ниже уровня MINRES. Оптимальным выбором по совокупности критериев — быстродействию, стабильности сходимости и качеству решения — является метод IDR(4).

Таким образом, метод IDR(s) является эффективной и целесообразной альтернативой традиционному MINRES в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики, решаемых с помощью DG-дискретизаций высокого порядка. Полученные результаты особенно актуальны для крупномасштабных расчетов, где сокращение времени выполнения является критически важным. В качестве рекомендованного значения параметра метода обоснован выбор  $s = 4$ , обеспечивающий оптимальное сочетание быстродействия и надежности на гибридных вычислительных системах с GPU.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

Авторы выражают благодарность Зининой С.Х. и Нефедову М.С. за интерес к работе и ценные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cockburn B. An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1998. Vol. 1697. P. 151–268.
2. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2016. Т. 9, № 3. С. 144–151.
3. Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Modeling the Richtmyer–Meshkov instability development using the discontinuous Galerkin method and locally adaptive meshes. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2021. Vol. 13, No. 3. P. 474–482.

4. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. Применение неявной схемы разрывного метода Галеркина к решению задач газовой динамики на графических ускорителях NVIDIA // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2022. Т. 15, № 2. С. 86–99.
5. Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х. Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина // *Журнал Средневожского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 435–450.
6. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27, № 4. С. 608–617.
7. Gubaydullin I. M., Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2021. Vol. 13, No. 3. P. 437–444.
8. Persson P.-O., Peraire J. Newton-GMRES preconditioning for Discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 30, No. 6. P. 2709–2733.
9. Chan T. F., Jackson K. R. Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1984. Vol. 5, No. 3. P. 533–542.
10. Knoll D. A., Keyes D. E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357–397.
11. Paige C. C., Saunders M. A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1975. Vol. 12, No. 4. P. 617–629.
12. Sonneveld P., van Gijzen M. B. IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 31, No. 2. P. 1035–1062.
13. van Gijzen M. B., Sonneveld P. Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2009. Vol. 38, No. 1. P. 1–19.
14. Lecoanet D., McCourt M., Quataert E., Burns K. J., Vasil G. M., Oishi J. S., Brown B. P., Stone J. M., O’Leary R. M. A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. Vol. 455, No. 4. P. 4274–4288.
15. Tricco T. S. The Kelvin–Helmholtz instability and smoothed particle hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2019. Vol. 488, No. 4. P. 5210–5224.

Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 10.02.2022;  
принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. B. Cockburn, *Lecture Notes in Mathematics*, **1697**, Springer, 1998.
2. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Application of the discontinuous Galerkin method for solving parabolic problems in anisotropic media on triangular grids”, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematicheskoe Modelirovanie i Programirovanie [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming]*, **9:3** (2016), 144–151.
3. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, “Modeling the Richtmyer–Meshkov instability development using the discontinuous Galerkin method and locally adaptive meshes”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13:3** (2021), 474–482.
4. V. F. Masyagin, R. V. Zhalnin, V. F. Tishkin, “Application of an implicit scheme of the discontinuous Galerkin method to solving gas dynamics problems on NVIDIA graphics accelerators”, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematicheskoe Modelirovanie i Programirovanie [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming]*, **15:2** (2022), 86–99.
5. R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina, “Application of the full approximation storage multigrid method for solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the discontinuous Galerkin method”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva [Middle Volga Mathematical Society Journal]*, **27:4** (2025), 435–450.
6. R. V. Zhalnin, E. E. Peskova, O. A. Stadnichenko, V. F. Tishkin, “Modeling of multi-component reacting gas flow using high-order accuracy algorithms”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]*, **27:4** (2017), 608–617.
7. I. M. Gubaydullin, R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, “Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13:3** (2021), 437–444.
8. P.-O. Persson, J. Peraire, “Newton-GMRES preconditioning for Discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30:6** (2008), 2709–2733.
9. T. F. Chan, K. R. Jackson, “Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms”, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **5:3** (1984), 533–542.
10. D. A. Knoll, D. E. Keyes, “Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications”, *Journal of Computational Physics*, **193:2** (2004), 357–397.

11. C. C. Paige, M. A. Saunders, “Solution of sparse indefinite systems of linear equations”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **12**:4 (1975), 617–629.
12. P. Sonneveld, M. B. van Gijzen, “IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**:2 (2008), 1035–1062.
13. M. B. van Gijzen, P. Sonneveld, “Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **38**:1 (2009), 1–19.
14. D. Lecoanet, M. McCourt, E. Quataert, K. J. Burns, G. M. Vasil, J. S. Oishi, B. P. Brown, J. M. Stone, R. M. O’Leary, “A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **455**:4 (2016), 4274–4288.
15. T. S. Tricco, “The Kelvin–Helmholtz instability and smoothed particle hydrodynamics”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **488**:4 (2019), 5210–5224.

*Submitted 01.12.2021; Revised 10.02.2022; Accepted 24.02.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.115-129

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## Моделирование зонной структуры одиночного гетероперехода

И. В. Бодрова<sup>1</sup>, А. Б. Дюбуа<sup>1</sup>, С. И. Кучерявый<sup>2</sup>, А. С. Сафошкин<sup>1</sup><sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (г. Рязань, Российская Федерация)<sup>2</sup>Обнинский институт атомной энергетики ИАТЭ НИЯУ МИФИ (г. Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация)

**Аннотация.** Для описания кинетических процессов, протекающих в низкоразмерной квантовой структуре (например, электрон-электронных взаимодействий), необходим расчет распределения потенциала  $V(z)$  и волновых функций  $\Psi(z)$  её зоны проводимости. В качестве внешнего возмущения выступает потенциал экранирования, который включает в себя диэлектрическую функцию электронного газа. В большинстве работ потенциальная яма аппроксимируется прямоугольным профилем, однако попытка применения аналитических результатов оказалась неудачной. В работе приведено совместное самосогласованное решение системы дифференциальных уравнений Шредингера и Пуассона для расчета волновых функций и распределения потенциала одиночного умеренно легированного гетероперехода  $AlGaAs(Si)/GaAs$ . Решение этой системы необходимо для описания кинетических процессов в двумерном электронном газе, прежде всего, электрон-электронных взаимодействий, которые являются определяющими при низких температурах. В работе показано, что эти уравнения удобно решать в безразмерных величинах потенциала и волновых функций. Построение потенциального профиля квантовой ямы, т.е. решение системы уравнений Шредингера и Пуассона, является одной из важных задач при исследовании графеновых структур со схожей геометрией.

**Ключевые слова:** моделирование зонной структуры гетероперехода, совместное решение дифференциальных уравнений Шредингера и Пуассона, электрон-электронные взаимодействия

**Для цитирования:** Бодрова И. В., Дюбуа А. Б., Кучерявый С. И., Сафошкин А. С. Моделирование зонной структуры одиночного гетероперехода // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 115–129. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.115-129

© И. В. Бодрова, А. Б. Дюбуа, С. И. Кучерявый, А. С. Сафошкин



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

*Об авторах:*

**Бодрова Ирина Валерьевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-6677-7461>, [bodrovamilyutina@mail.ru](mailto:bodrovamilyutina@mail.ru)

**Дюбуа Александр Борисович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5924-4128>, [abd-69@mail.ru](mailto:abd-69@mail.ru)

**Кучерявый Сергей Иванович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и специальной физики Обнинского института атомной энергетики ИАТЭ НИЯУ МИФИ (249039, г. Обнинск, Калужская область, тер. Студгородок, д. 1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6030-9286>, [kucheryavyu@iate.obninsk.ru](mailto:kucheryavyu@iate.obninsk.ru)

**Сафoshкин Алексей Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1419-979X>, [safoshkin.a.s@rsreu.ru](mailto:safoshkin.a.s@rsreu.ru)

*Original article*

MSC2020 57N10

## Modeling of the band structure of a single heterojunction

I. V. Bodrova<sup>1</sup>, A. B. Dubois<sup>1</sup>, S. I. Kucheryavy<sup>2</sup>, A. S. Safoshkin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*V.F. Utkin Ryazan State Radioengineering University (Ryazan, Russian Federation)*

<sup>2</sup>*Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering (OINPE) NRNU MEPhI (Obninsk, Russian Federation)*

**Abstract.** To describe the kinetic processes occurring in a low-dimensional quantum structure (e.g., electron-electron interactions), it is necessary to calculate the potential distribution  $V(z)$  and the wave functions  $\Psi(z)$  of its conduction band. The screening potential, which includes the dielectric function of an electron gas, acts as an external perturbation. In most studies, the potential well is approximated by a rectangular profile, but attempts to apply analytical results were unsuccessful. The paper presents a joint self-consistent solution of the system of Schrodinger and Poisson differential equations for calculating wave functions and potential distribution of a single moderately doped heterojunction  $AlGaAs(Si)/GaAs$ . Solving this system is necessary to describe kinetic processes in a two-dimensional electron gas, primarily electron-electron interactions, which are dominant at low temperatures. The paper demonstrates that these equations can be conveniently solved for dimensionless potential and wave functions. Constructing a quantum well potential profile, i.e., solving the system of Schrodinger and Poisson equations, is an important task in studying graphene structures with similar geometries.

**Keywords:** modeling of the band structure of a heterojunction, joint solution of Schrodinger and Poisson differential equations, electron-electron interactions

**For citation:** I. V. Bodrova, A. B. Dubois, S. I. Kucheryavy, A. S. Safoshkin. Modeling of the band structure of a single heterojunction. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 115–129. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.115-129

*I. V. Bodrova, A. B. Dubois, S. I. Kucheryavy, A. S. Safoshkin. Modeling of the band structure of a single ...*

*About the authors:*

**Irina V. Bodrova**, Ph.D. (Engineering), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, V.F. Utkin Ryazan State Radioengineering University (59/1 Gagarina St., Ryazan 390005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-6677-7461>, [bodrovamilyutina@mail.ru](mailto:bodrovamilyutina@mail.ru)

**Alexander B. Dubois**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, V.F. Utkin Ryazan State Radioengineering University (59/1 Gagarina St., Ryazan 390005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5924-4128>, [abd69@mail.ru](mailto:abd69@mail.ru)

**Sergei I. Kucheryavyy**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of General and Special Physics, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering (OINPE) NRNU MEPhI (1 Studgorodok, Obninsk 249039, Kaluga region, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6030-9286>, [kucheryavyy@iate.obninsk.ru](mailto:kucheryavyy@iate.obninsk.ru)

**Alexey S. Safoshkin**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, V.F. Utkin Ryazan State Radioengineering University (59/1 Gagarina St., Ryazan 390005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1419-979X>, [safoshkin.a.s@rsreu.ru](mailto:safoshkin.a.s@rsreu.ru)

## 1. Введение

Изучение кинетических процессов в низкоразмерных квантовых структурах представляет собой одну из главных задач современной наноэлектроники. В ряде работ (например, [1] - [14]) по исследованию многочастичных взаимодействий была показана подавляющая роль электрон-электронных взаимодействий в гетероструктурах, которые при низких температурах (2-30 К) играют определяющую роль по сравнению с остальными процессами. В настоящей работе в качестве объекта исследований была принята гетероструктура  $AlGaAs(Si)/GaAs$ , однако приведенные расчеты позволяют определить кинетические зависимости и для других структур, например,  $InAs/GaSb$ . Кроме того, намечены пути решения задачи об электрон-электронных взаимодействиях в графеновых наноструктурах.

В настоящей работе проведены следующие исследования:

1. Расчет зонной структуры гетероперехода. С этой целью проведено совместное решение дифференциальных уравнений Пуассона и Шредингера при заданных начальных условиях: геометрия структуры и распределение объемного заряда.
2. Анализ экспериментально наблюдаемых осцилляций поперечного магнитосопротивления в квантующем магнитном поле (эффект Шубникова – де Гааза [12]). Данные осцилляции позволяют построить экспериментальные температурные и концентрационные зависимости электрон-электронных взаимодействий  $\tau_{ee}^{exp}(T, n_s)$ .
3. Построение теоретических зависимостей  $\tau_{ee}^{th}(T, n_s)$  при гелиевых ( $T \leq 15K$ ) температурах. Для умеренно легированного гетероперехода ( $n_s \leq 10^{12} \text{см}^{-2}$ ) при заполнении одной подзоны размерного квантования решение кинетического уравнения Больцмана не представляет особых трудностей и может нуждаться лишь в некоторых математических уточнениях. В этом случае будет присутствовать лишь внутриподзонное электрон-электронное взаимодействие, т. е.  $\tau_{ee}^{th}(T, n_s) \approx \tau_{ee}^{intra}(T, n_s)$ . В сильно легированных гетеропереходах ( $n_s > 10^{12} \text{см}^{-2}$ ) происходит заполнение нескольких подзон размерного квантования. В этом случае

наряду с внутриподзонным будет присутствовать межподзонное взаимодействие. Это приводит к появлению дополнительных каналов рассеяния, которое может ограничивать электронную подвижность в обеих подзонах [3].

В случае как одной заполненной подзоны, так и для нескольких подзон в интеграл столкновений в уравнении Больцмана входит тензор Фурье-образа полного потенциала экранирования  $V_{tot}^{ijkl}(\mathbf{q}, \omega)$  [4], [5] как функция реакции электронной системы от внешнего возмущения. Непосредственное интегрирование уравнения Больцмана в случае двух заполненных подзон размерного квантования представляет собой достаточно громоздкую математическую задачу. В настоящей работе показано, что для корректной интерпретации особенностей экспериментально наблюдаемых температурных и концентрационных зависимостей времени электрон-электронной релаксации необходимы не только учет реального профиля гетероперехода [6] (что уже представляет определенные математические трудности), но и возможные переходы между подзонами с учетом их тонкой структуры [7–8].

## 2. Решение уравнений Шредингера и Пуассона

Исследуемая наноструктура представляет собой *i*-легированную тонкую пленку арсенида галлия *GaAs* толщиной 200 Å, в которой реализуется двумерный электронный газ (2DEG) с концентрацией электронов  $n_s \sim 10^{12} \text{ см}^{-2}$  (рис. 2.1).

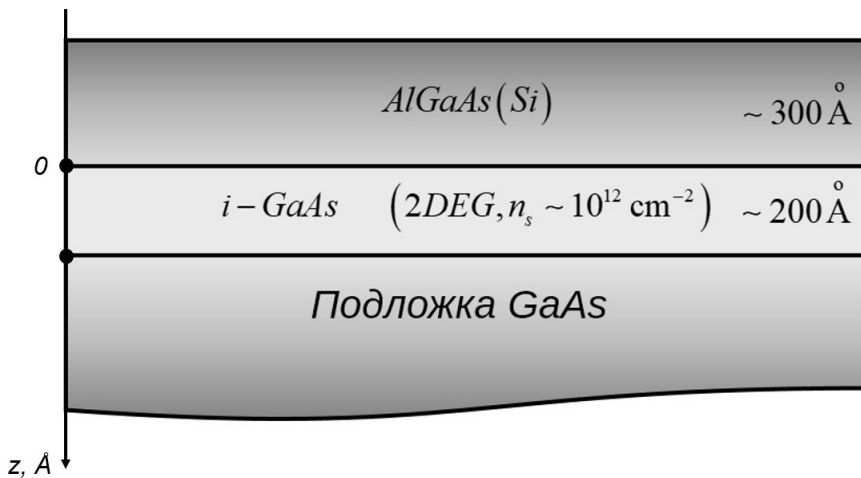


Рис. 2.1. Фрагмент геометрии наноструктуры

Fig. 2.1. Fragment of the nanostructure geometry

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Шредингера и Пуассона

$$E_F \left( -\frac{1}{k_F^2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{E(z)}{E_F} \right) \psi_j(z) = \varepsilon_j \psi_j(z) \quad (2.1)$$

$$-\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{4\pi\rho(z)}{\chi} \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\psi_j(\infty) = 0, \quad E(\infty) = 0, \quad -\frac{dV}{dz}\Big|_{z=0} = E_0, \quad (2.3)$$

где  $E(z) = -eV(z)$ ,  $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}$  – энергия Ферми,  $k_F = \sqrt{2\pi n_s}$  – волновой вектор,  $n_s$  – поверхностная плотность электронов,  $\chi$  – диэлектрическая функция 2D-электронного газа,  $m^* = 0.06m_e$  – эффективная масса электрона. Для  $n_s \approx 8 \cdot 10^{11} \text{см}^{-2}$  получим  $E_F = 26.2 \text{meV}$ ,  $k_F = 2.24 \cdot 10^6 \text{см}^{-1}$ . Диэлектрическая функция  $\chi$  определяется формулой:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e^2}{\varepsilon q^2 L^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(E_{\mathbf{k}}) - f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\omega - i\hbar\alpha}, \quad (2.4)$$

где  $f$  – функция распределения Ферми-Дирака,  $L^2$  – площадь, занимаемая структурой. При температуре абсолютного нуля и использовании простейшего закона дисперсии  $E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m^*$  выражение для диэлектрической функции может быть представлено в виде суммы двух слагаемых  $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ , каждое из которых имеет вид [15]:

$$\chi_1 = \frac{2m^* e^2 n_s}{\hbar^2 k_F q^3} \left\{ \frac{q}{k_F} - C_- \left[ \left( \frac{q}{2k_F} - \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - C_+ \left[ \left( \frac{q}{2k_F} + \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\},$$

$$\chi_2 = \frac{2m^* e^2 n_s}{\hbar^2 k_F q^3} \left\{ D_- \left[ 1 - \left( \frac{q}{2k_F} - \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right)^2 \right]^{1/2} - D_+ \left[ 1 - \left( \frac{q}{2k_F} + \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right)^2 \right]^{1/2} \right\},$$

где при  $\left| \frac{q}{2k_F} \pm \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right| > 1$  имеем  $C_{\pm} = \text{sgn} \left( \frac{q}{2k_F} \pm \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right)$ ,  $D_{\pm} = 0$ , а при  $\left| \frac{q}{2k_F} \pm \frac{m^* k_F \omega q}{\hbar} \right| < 1$  имеем  $C_{\pm} = 0$ ,  $D_{\pm} = 1$ .

Уравнения (2.1) и (2.2) удобно решать в безразмерных величинах. Для этого введем следующие обозначения:

$$\frac{\varepsilon_j}{E_F} = E_j, \quad \frac{E(z)}{E_F} = \varphi(z), \quad \tilde{z} = zk_F, \quad \rho(z) = -en(\tilde{z})k_F^3, \quad \psi(z) = \tilde{\psi}(\tilde{z})k_F^{1/2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, получаем систему уравнений в безразмерных переменных:

$$-\frac{d^2 \varphi}{d\tilde{z}^2} = \kappa n(\tilde{z}), \quad (2.6)$$

$$-\frac{d^2 \psi(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} + [\varphi(\tilde{z}) - E_j] \psi(\tilde{z}) = 0, \quad (2.7)$$

где  $\kappa = 8\pi m e^2 k_F / \chi \hbar^2$ . Удобно искать решение системы в виде

$$\varphi(\tilde{z}) = c(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n e^{-(n+1)\lambda \tilde{z}}, \quad (2.8)$$

где  $\lambda$  и  $\beta < 1$  – некоторые подгоночные параметры, а

$$c(\beta) = \frac{E_0}{E_F \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n} = \frac{E_0}{E_F} (\beta + 1), \quad (2.9)$$

где  $E_0 = E(z=0)$ . Уравнение (2.6) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \varphi(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} = c(\beta) \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n (n+1)^2 e^{-(n+1)\lambda\tilde{z}} \quad (2.10)$$

с граничными условиями:

$$\varphi(\infty) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \kappa Q, \quad Q = \int_0^{+\infty} n(\tilde{z}) d\tilde{z}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\varphi(\tilde{z}) = -\frac{V_0}{E_F \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n e^{-(n+1)\lambda\tilde{z}}. \quad (2.12)$$

Переходя к исходным переменным, получим:

$$E(z) = -E_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n e^{-(n+1)\lambda k_F z}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n}. \quad (2.13)$$

На рис. 2.2 представлены графики профиля для различного количества учитываемых членов разложения.

Так как ряд в (2.13) равномерно сходится, рассмотрим первые два члена разложения в выражении для профиля потенциальной ямы:

$$V(z) \cong -\frac{V_0}{1-\beta} (e^{-\lambda k_F z} - \beta e^{-2\lambda k_F z}), \quad (2.14)$$

где  $V_0 = V(z=0)$ .

Подставляя (2.14) в (2.2), получим:

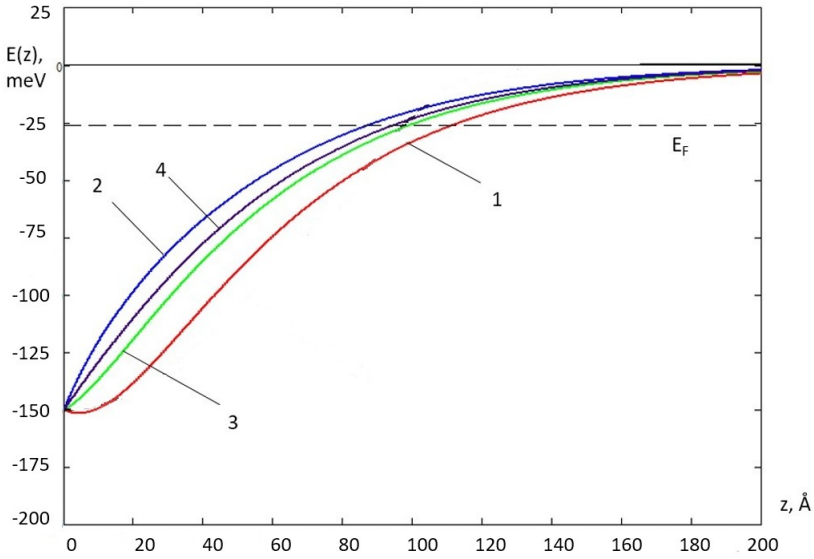
$$-\frac{d^2}{dz^2} \left( -\frac{V_0}{1-\beta} (e^{-\lambda k_F z} - \beta e^{-2\lambda k_F z}) \right) = \frac{4\pi\rho(z)}{\chi}, \quad (2.15)$$

откуда следует

$$\frac{V_0 \lambda k_F (1-2\beta)}{1-\beta} = \kappa Q. \quad (2.16)$$

Поскольку суммарный интеграл равен нулю:

$$Q = \int_0^{+\infty} \rho(z) dz = 0, \quad (2.17)$$



**Рис. 2.2.** Зависимость профиля потенциальной ямы от количества  $n$  учитываемых членов разложения. Кривая (1) –  $n = 2$ , кривая (2) –  $n = 3$ , кривая (3) –  $n = 4$ , кривая (4) –  $n \rightarrow \infty$ . Параметры  $\lambda = 1.0$ ,  $\beta = 0.55$

**Fig. 2.2.** Dependence of the potential well profile on the number  $n$  of expansion terms taken into account. Curve (1) –  $n = 2$ , curve (2) –  $n = 3$ , curve (3) –  $n = 4$ , curve (4) –  $n \rightarrow \infty$ . Parameters  $\lambda = 1.0$ ,  $\beta = 0.55$

то получаем, что можно выделить две области:  $z < D$  и  $z > D$  с условием  $\rho(z = D) = 0$ . Так как  $\rho(z = 0) = eN_0^{2/3}$ , то наиболее простое решение для уравнения Больцмана имеет вид:

$$\begin{cases} \rho(z) = eN_0^{2/3} \left(1 - \frac{z}{D}\right), & z < D, \\ \rho(z) = -A(z - D)e^{-\frac{z-D}{a}}, & z > D, \end{cases} \quad (2.18)$$

где  $D \cong 2/k_F = 89 \text{ \AA}$ ,  $a$  – длина потенциала экранирования Томаса-Ферми [16] - [18]. Подставим (2.18) в (2.17) и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^D \rho(z) dz + \int_D^{+\infty} \rho(z) dz = \int_0^D eN_0^{2/3} \left(1 - \frac{z}{D}\right) dz - \int_D^{+\infty} A(z - D)e^{-\frac{z-D}{a}} dz = \\ &= eN_0^{2/3} \left(z - \frac{z^2}{2D}\right) \Big|_0^D - A \left(-a(z - D)e^{-\frac{z-D}{a}} \Big|_D^{+\infty} + a \int_D^{+\infty} e^{-\frac{z-D}{a}} dz\right) = \\ &= \frac{eN_0^{2/3} D}{2} - A \left(-a^2 e^{-\frac{z-D}{a}} \Big|_D^{+\infty}\right) = \frac{eN_0^{2/3} D}{2} - Aa^2 = 0. \end{aligned}$$

Получим выражение для нормировочной постоянной:

$$A = \frac{eN_0^{2/3} D}{2a^2}. \quad (2.19)$$

Подставим (2.18) в уравнение Шредингера (2.1), получим распределение потенциала:

Для  $z < D$ :

$$\begin{aligned} V(z) &= -\frac{4\pi}{\chi} \int_0^z \left( \int_0^z e N_0^{2/3} \left(1 - \frac{z}{D}\right) dz \right) dz = -\frac{4\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \int_0^z \left( z - \frac{z^2}{2D} \right) dz = \\ &= -\frac{4\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6D} \right) + V(0) = -\frac{2\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \left( z^2 - \frac{z^3}{3D} \right) + V(0). \end{aligned}$$

Для  $z > D$ :

$$\begin{aligned} V(z) &= -\frac{4\pi}{\chi} \int_0^z \left( \int_0^z \left[ -A(z-D) e^{-\frac{z-D}{a}} \right] dz \right) dz = \\ &= \frac{4\pi A}{\chi} \int_0^z \left( -a^2 e^{-\frac{z-D}{a}} - a(z-D) e^{-\frac{z-D}{a}} \right) dz = \\ &= -\frac{4\pi Aa}{\chi} \left( -2a^2 e^{-\frac{z-D}{a}} - a(z-D) e^{-\frac{z-D}{a}} \right) + C = \\ &= \frac{4\pi Aa^2}{\chi} (z-D+2a) e^{-\frac{z-D}{a}} + C = \\ &= \frac{2\pi e N_0^{2/3} D}{\chi} (z-D+2a) e^{-\frac{z-D}{a}} + C. \end{aligned}$$

С учетом условия  $V(+\infty) = 0$  получим  $C = 0$ .

Сшивка решений при  $z = D$ :

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \left( D^2 - \frac{D^3}{3D} \right) + V(0) &= \frac{2\pi e N_0^{2/3} D}{\chi} 2a \\ V(0) &= \frac{4\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \left( \frac{1}{3} D^2 + aD \right). \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$V(z) = -\frac{2\pi}{\chi} \left[ e N_0^{2/3} \left( z^2 - \frac{z^3}{3D} \right) \right] + \frac{4\pi e N_0^{2/3}}{\chi} \left( \frac{1}{3} D^2 + Da \right), \quad z < D, \quad (2.20)$$

$$V(z) = \frac{2\pi e N_0^{2/3} D}{\chi} (z-D+2a) e^{-\frac{z-D}{a}}, \quad z > D. \quad (2.21)$$

С учетом граничных условий (2.3) получим:

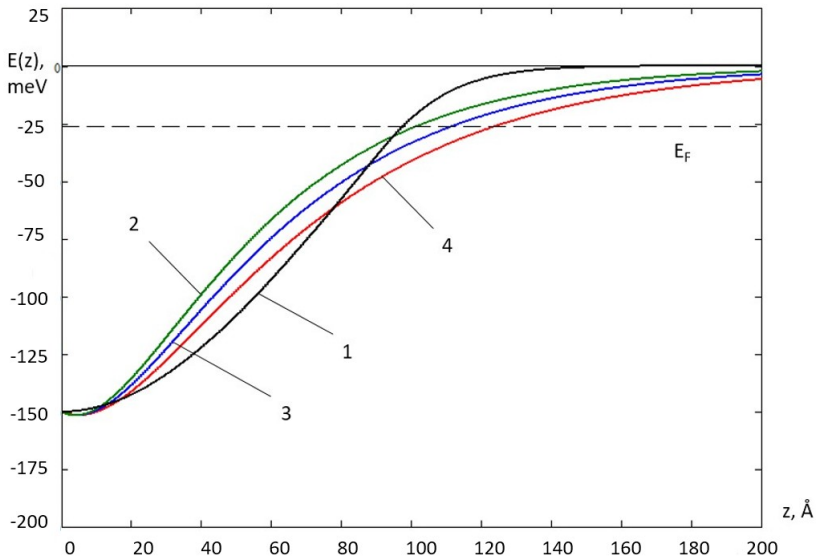
$$E(0) = eV_0 = \frac{4\pi e^2 N_0^{2/3}}{\chi} \left( \frac{1}{3} D^2 + aD \right), \quad (2.22)$$

тогда длина потенциала экранирования Томаса-Ферми может быть выражена следующим образом:

$$a = \frac{\chi E(0)}{4\pi e^2 N_0^{2/3} D} - \frac{1}{3} D. \quad (2.23)$$

Для рассматриваемой структуры в длинноволновом пределе ( $\omega = 0$ ) получим  $\chi \approx 3.5 \cdot 10^{-6}$  см, откуда  $a \approx 10.9 \text{ \AA}$ .

На рис. 2.3–2.4 построены по формуле (2.13) кривые  $E(z) = eV(z)$  как функции от подгоночных параметров  $\lambda$  и  $\beta$ , проведено сравнение данных кривых с профилем, построенным по формулам (2.20)–(2.21).



**Рис. 2.3.** Зависимость профиля потенциальной ямы от значения параметра  $\lambda$ . Кривая (1) – профиль потенциальной ямы, рассчитанный по формулам (2.20)–(2.21), кривые (2)–(4) – вычисленные по формуле (2.13) профили потенциальной ямы для значений параметра  $\lambda = 1.1$ ,  $\lambda = 1.0$  и  $\lambda = 0.9$  соответственно

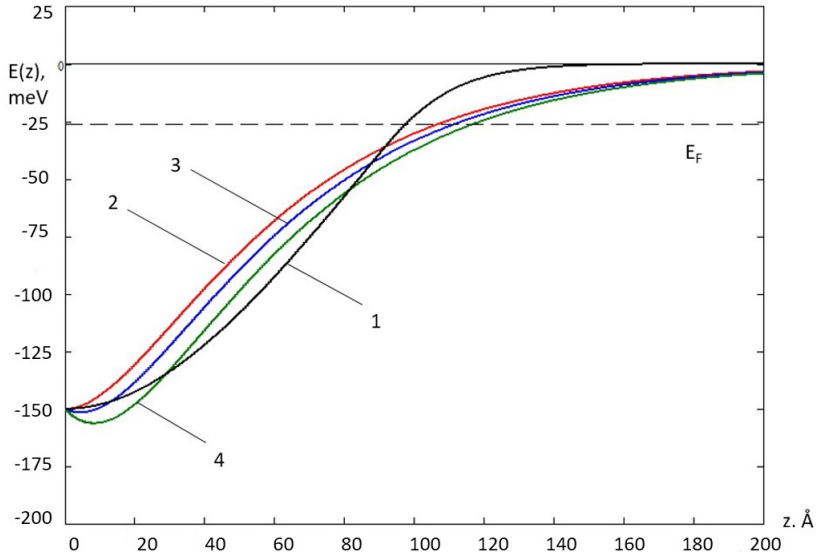
**Fig. 2.3.** Dependence of the potential well profile on the value of the parameter  $\lambda$ . Curve (1) is the potential well profile calculated using formulas (2.20)–(2.21), curves (2)–(4) are the potential well profiles calculated using formula (2.13) for the parameter values  $\lambda = 1.1$ ,  $\lambda = 1.0$  and  $\lambda = 0.9$ , respectively

Анализ зависимостей профилей от параметров позволяет подобрать значения  $\lambda = 1.0$  и  $\beta = 0.55$ , при которых аппроксимация профиля наиболее точно соответствует профилю, построенному по формулам (2.20)–(2.21).

### 3. Обсуждение результатов

Представим решение уравнения (2.7) в виде

$$\psi_k^+(\tilde{z}) = e^{ik\tilde{z} + i\eta(k)} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) e^{-j\lambda\tilde{z}} \tag{3.1}$$



**Рис. 2.4.** Зависимость профиля потенциальной ямы от значения параметра  $\beta$ .  
Кривая (1) – профиль потенциальной ямы, рассчитанный по формулам (2.20)–(2.21), кривые (2)–(4) – вычисленные по формуле (2.13) профили потенциальной ямы для значений параметра  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 0.55$  и  $\beta = 0.6$  соответственно

**Fig. 2.4.** Dependence of the potential well profile on the value of the parameter  $\beta$ .  
Curve (1) is the potential well profile calculated using formulas (2.20)–(2.21), curves (2)–(4) are the potential well profiles calculated using formula (2.13) for the parameter values  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 0.55$  and  $\beta = 0.6$ , respectively

и подставим в уравнение (2.7). Получим следующие выражения для коэффициентов дифференциального уравнения:

$$\left[ -k^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) - 2ik\lambda \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k)j + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k)j^2 + \left[ \frac{E_0}{E_F} (\beta + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \exp(-(n+1)\lambda\tilde{z}) - \frac{E_j}{E_F} \right] \sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) \right] \exp(-j\lambda\tilde{z}) = 0, \quad (3.2)$$

$$b_1(k) = -\frac{E_0(\beta + 1)}{E_F\lambda(\lambda^2 + 4k^2)}(\lambda + 2ik), \quad (3.3)$$

$$b_j(k) = -\frac{E_0(\beta + 1)}{E_F\lambda(j^3\lambda^2 + 4k^2j)} [j\lambda + 2ik] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n b_{j-(n+1)} \quad (3.4)$$

при начальных условиях  $b_0 = 1$  и фазовом сдвиге:

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(k) = -e^{-i\eta(k)}. \quad (3.5)$$

Решим уравнение (2.1), преобразовав его к виду:

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \varphi(z) - k^2\right) \psi_k^+(z) = 0. \tag{3.6}$$

Запишем решение уравнения (3.6) в виде (3.1) и после подстановки в уравнение (3.6) и сокращения на фазовый множитель получим уравнение:

$$\sum b_j(k) \left(\frac{j^2 \lambda^2 - 2ikj\lambda}{P(1-\beta)} + 1\right) = 0 \tag{3.7}$$

Тогда при  $b_0 = 1$  и фазовом сдвиге (3.5) получим:

$$b_j(k) = -\frac{P(b_{j-1} - \beta b_{j-2})}{\lambda^2 j^2 - 2ikj\lambda}. \tag{3.8}$$

Тогда волновая функция будет иметь вид:

$$\psi_1^+(z) = e^{iz} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(1) e^{-j\lambda z}. \tag{3.9}$$

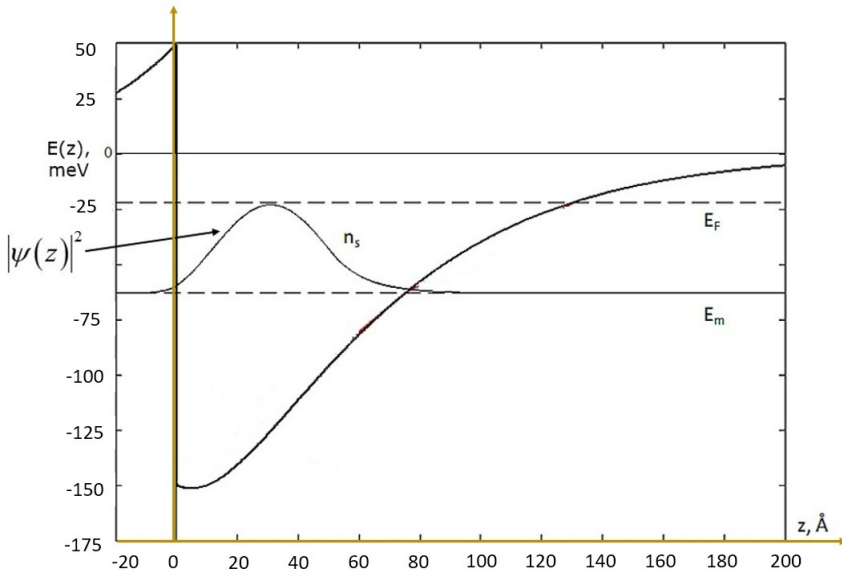


Рис. 3.1. Профиль потенциальной ямы умеренно легированного гетероперехода и волновая функция

Fig. 3.1. Potential well profile of moderately doped heterojunction and wave function

На рис. 3.1 показан профиль потенциальной ямы гетероперехода и волновая функция. В случае умеренно легированного гетероперехода  $AlGaAs(Si)/GaAs$  заполнена одна подзона размерного квантования ( $k = 1$ ).

Приведенный расчет зонной структуры гетероперехода используется для расчета времени электрон-электронных взаимодействий [19], а также для описания дифракционных процессов, происходящих в схожих по геометрии графеновых структурах [20–21].

#### 4. Заключение

Таким образом, в работе приведено совместное самосогласованное решение системы дифференциальных уравнений Шредингера и Пуассона для расчета волновых функций и распределения потенциала одиночного умеренно легированного гетероперехода  $AlGaAs(Si)/GaAs$ . Получено аналитическое решение системы уравнений Шредингера и Пуассона, т.е. найдены удобные для дальнейшего использования выражения для потенциала экранирования и волновых функций. Полученное решение не накладывает ограничений на геометрию и материалы наноструктуры и используется для расчета времени электрон-электронных взаимодействий в умеренно и сильнолегированных гетероструктурах  $AlGaAs(Si)/GaAs$  [19–21].

**Благодарности.** Авторы выражают признательность проф. Глазову С.Ю. и проф. Трегулову В.В. за плодотворное сотрудничество и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coleridge P. T. Small-angle scattering in two-dimensional electron gases. *Phys. Rev. B*. 1991. Vol. 44, no. 8. P. 3793–3801. DOI: 10.1103/PhysRevB.44.3793
2. Coleridge P. T. Inter-subband scattering in a 2D electron gas. *Semicond. Sci. Technol.* 1990. Vol. 5. P. 961–966.
3. Slutzky M., Entin-Wohlman O., Berk Y., Palevski A., Shtrikman H. Electron-electron scattering in coupled quantum wells. *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 53. P. 4065–4072. DOI: 10.1103/PhysRevB.53.4065
4. Lee S.-C., Galbraith I. Intersubband and intrasubband electronic scattering rates in semiconductor quantum wells. *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 59. P. 15796–15805. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.15796
5. Levitov L. S., Shtyk A. V., Feigelman M. V. Electron-electron interactions and plasmon dispersion in graphene. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88. 235403. DOI: 10.1103/PhysRevB.88.235403
6. De-Leon S., Shvartsman L. D., Laikhtman B. Band structure of coupled InAs/GaSb quantum wells. *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 60. P. 1861–1870. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.1861
7. Itskovsky M. A., Maniv T. Fourier analysis of the de Haas – van Alphen oscillations in two-dimensional electron systems with background reservoir states *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 64. 174421. DOI: 10.1103/PhysRevB.64.174421
8. Пайнс Д., Нозьер Ф. Теория квантовых жидкостей: пер. с англ. М.: Мир, 1967. 382 с.
9. Рыбина Н. В., Рыбин Н. Б., Трегулов В. В., Скопцова Г. Н. Исследование влияния режимов термической обработки на информационно-корреляционные свойства поверхности пленки пористого кремния // *Вестник РГРТУ*. 2023. № 84. С. 207–214. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-84-207-214

10. Трегулов В. В., Скопцова Г. Н., Рыбин Н. Б., Рыбина Н. В. Влияние отжига на механизмы переноса носителей заряда в полупроводниковой структуре с пленкой пористого кремния // *Вестник РГРТУ*. 2023. № 84. С. 215–224. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-84-215-224
11. Трегулов В. В., Скопцова Г. Н., Рыбин Н. Б., Рыбина Н. В. Особенности зонной диаграммы полупроводниковой структуры со сформированной металл-стимулированным травлением пленкой пористого кремния // *Вестник РГРТУ*. 2023. №86. С. 172–178. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-86-172-178
12. Sotirelis P., von Allmen P., Hess K. Electron intersubband relaxation in doped quantum wells. *Phys. Rev. B*. 1993. Vol. 47. 12744. DOI: 10.1103/PhysRevB.47.12744
13. Глазов С. Ю., Мещерякова Н. Е., Подгорная И. А. Проводимость однослойных углеродных нанотрубок полупроводникового типа с учетом ионизации примесных центров // *Известия Российской академии наук. Серия физическая*. 2022. Т. 86, № 1. С. 58–62. DOI: 10.31857/S0367676522010124
14. Глазов С. Ю., Мещерякова Н. Е., Подгорная И. А. Определение параметров многослойных примесных углеродных нанотрубок полупроводникового типа на основе анализа проводимости в статическом и переменном электрических полях // *Ученые записки физического факультета Московского университета*. 2024. № 5. 2450501.
15. Андо Т., Фаулер А., Стерн Ф. Электронные свойства двумерных систем: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 416 с.
16. Дюбуа А. Б., Зилотова М. А., Кучерявый С. И., Сафошкин А. С. Кинетические процессы в умеренно легированном гетеропереходе // *Вестник РГРТУ*. 2013. Т. 45, № 3. С. 88–92.
17. Дюбуа А. Б. Электрон-электронные взаимодействия в умеренно легированном гетеропереходе  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$  // *Труды МФТИ*. 2010. Т. 2, №1(5). С. 24–27.
18. Baukov A. A., Bukhenskiy K. V., Dubois A. B., Kucheryavyy S. I., Mashina S. N., Safoshkin A. S., Shchigorev E. Yu. Temperature dependences of the time of electron-electron interactions in two-dimensional heterojunction. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 941. 012059. DOI:10.1088/1742-6596/941/1/012059
19. Дюбуа А. Б., Кучерявый С. И., Сафошкин А. С. Межподзонные электрон-электронные взаимодействия в двумерном электронном газе // *Известия вузов. Физика*. 2021. Том 64, №4(761). С. 163–169.
20. Bukhenskiy K. V., Dubois A. B., Konukhov A. N., Kucheryavyy S. I., Safoshkin A. S. Surface propagation in structure with a graphene layer. *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 2022. Vol. 15, №6. P. 742–752. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-6-742-752
21. Бухенский К. В., Дюбуа А. Б., Конюхов А. Н., Кучерявый С. И., Сафошкин А. С. Распространение электромагнитного излучения в графеновых структурах // *Ученые записки Физического факультета Московского университета*. 2023. №1. 2310301.

*Поступила XX.XX.2025; доработана после рецензирования XX.XX.2025;  
принята к публикации XX.XX.2025*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. P. T. Coleridge, “Small-angle scattering in two-dimensional electron gases”, *Phys. Rev. B*, **44** (1991), 3793–3801. DOI: 10.1103/PhysRevB.44.3793
2. P. T. Coleridge, “Inter-subband scattering in a 2D electron gas”, *Semicond. Sci. Technol.*, **5** (1990), 961–966.
3. M. Slutzky, O. Entin-Wohlman, Y. Berk, A. Palevski, H. Shtrikman, “Electron-electron scattering in coupled quantum wells”, *Phys. Rev. B*, **53** (1996), 4065–4072. DOI: 10.1103/PhysRevB.53.4065
4. S.-C. Lee, I. Galbraith, “Intersubband and intrasubband electronic scattering rates in semiconductor quantum wells”, *Phys. Rev. B*, **59** (1999), 15796–15805. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.15796
5. L. S. Levitov, A. V. Shtyk, M. V. Feigelman, “Electron-electron interactions and plasmon dispersion in graphene”, *Phys. Rev. B*, **88** (2013), 235403. DOI: 10.1103/PhysRevB.88.235403
6. S. De-Leon, L. D. Shvartsman, B. Laikhtman, “Band structure of coupled InAs/GaSb quantum wells”, *Phys. Rev. B*, **60** (1999), 1861–1870. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.1861
7. M. A. Itskovsky, T. Maniv, “Fourier analysis of the de Haas – van Alphen oscillations in two-dimensional electron systems with background reservoir states”, *Phys. Rev. B*, **64** (2001), 174421. DOI: 10.1103/PhysRevB.64.174421
8. D. Pines, Ph. Nozieres, *The Theory of Quantum Liquids*, New York, W.A. Benjamin, 1966, 355 p.
9. N. V. Rybina, N. B. Rybin, V. V. Tregulov, G. N. Skoptsova, “Study of heat treatment modes influence on information-correlation properties of porous silicon film surface”, *Vestnik of RSREU*, 2023, no. 84, 207–214. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-84-207-214
10. V. V. Tregulov, G. N. Skoptsova, N. B. Rybin, N. V. Rybina, “The effect of thermal annealing of semiconductor structure with porous silicon film on mechanisms of carrier transfer”, *Vestnik of RSREU*, 2023, no. 84, 215–224. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-84-215-224
11. V. V. Tregulov, G. N. Skoptsova, N. B. Rybin, N. V. Rybina, “Features of band diagram of semiconductor structure with porous silicon film formed by metal-stimulated etching”, *Vestnik of RSREU*, 2023, no. 86, 172–178. DOI: 10.21667/1995-4565-2023-86-172-178
12. P. Sotirelis, P. von Allmen, K. Hess, “Electron intersubband relaxation in doped quantum wells”, *Phys. Rev. B*, **47** (1993), 12744. DOI: 10.1103/PhysRevB.47.12744

13. S. Y. Glazov, N. E. Mescheryakova, I. A. Podgornaya, “Conductivity of Semiconductor Single-Walled Carbon Nanotubes with Allowance for the Ionization of Impurity Centers”, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, **86**:1 (2022), 58-62. DOI: 10.31857/S0367676522010124
14. S. Y. Glazov, N. E. Mescheryakova, I. A. Podgornaya, “Determination of the parameters of multilayer impurity semiconductor-type carbon nanotubes based on the analysis of conductivity in static and alternating electric elds”, *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, **5** (2024), 2450501.
15. T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, “Electronic Properties of Two-Dimensional Systems”, *Reviews of Modern Physics*, **54** (1982), 437.
16. A. B. Dubois, M. A. Zilotova, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin, “Kinetic processes in moderately doped heterojunction”, *Vestnik of RSREU*, **3**:45 (2013), 88–92.
17. A. B. Dubois, “Electron-electron interactions in the moderately doped heterojunction AlxGa1-xAs/GaAs”, *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*, **2**:1(5) (2010), 24–27.
18. A. A. Baukov, K. V. Bukhenskyy, A. B. Dubois, S. I. Kucheryavyy, S. N. Mashnina, A. S. Safoshkin, E. Yu. Shchigorev, “Temperature dependences of the time of electron-electron interactions in two-dimensional heterojunction”, *Journal of Physics: Conference Series*, **941** (2017), 012059. DOI: 10.1088/1742-6596/941/1/012059
19. A. B. Dubois, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin, “Inter-subband electron-electron interactions in two-dimensional electron gas”, *Russian Physics Journal*, **64**:4 (2021), 753–760.
20. K. V. Bukhenskyy, A. B. Dubois, A. N. Konukhov, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin, “Surface propagation in structure with a graphene layer”, *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*, **15**:6 (2022), 742-752. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-6-742-752
21. K. V. Bukhenskyy, A. B. Dubois, A. N. Konukhov, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin, “Propagation of electromagnetic radiation in graphene structures”, *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, **1** (2023), 2310301.

*Submitted XX.XX.2025; Revised XX.XX.2025; Accepted XX.XX.2025*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144

*Оригинальная статья*

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63: 539.3: 616.314

## Численное моделирование напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава на основе адаптивной конечно-элементной триангуляции

Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских

*ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа,  
Российская Федерация)*

**Аннотация.** Целью исследования является расчет распределения напряжений в височно-нижнечелюстном суставе (ВНЧС) и в его элементах при различных функциональных состояниях (окклюзиях). Для расчетов использован метод конечных элементов (МКЭ). Предложен оригинальный алгоритм адаптивной триангуляции сложной трехмерной области, позволяющий строить неструктурированные тетраэдральные сетки с управляемой плотностью в зонах предполагаемой концентрации напряжений. Эффективность вычислительной процедуры достигнута за счет реализации специального алгоритма перенумерации узлов, минимизирующего ширину ленты глобальной матрицы жесткости, и использования компактной ленточной схемы хранения с применением разложения Холецкого. На созданной модели, учитывающей анатомические особенности и различные физико-механические свойства тканей, проведены расчеты для трех ключевых фаз жевательного цикла: центральной, передней и боковой окклюзии. Установлены количественные закономерности распределения полей главных напряжений. Полученные данные коррелируют с клиническими наблюдениями о высокой частоте патологий диска и дисфункций ВНЧС. Разработанный вычислительный комплекс может быть использован в прикладных целях для планирования ортопедических и хирургических вмешательств.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, триангуляция Делоне, адаптивная сетка, биомеханика, височно-нижнечелюстной сустав, жевательный цикл, окклюзия

**Для цитирования:** Морозкин Н. Д., Колонских Д. М. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава на основе адаптивной конечно-элементной триангуляции // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 130–144. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144

*Об авторах:*

**Морозкин Николай Данилович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-5051-7094>, morozkinnd@mail.ru

**Колонских Денис Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5450-7677>, deniskolonskikh@gmail.com

© Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских



MSC2020 65N30, 74L15

# Numerical simulation of the stress-strain state of the temporomandibular joint based on adaptive finite-element triangulation

N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh

*Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)*

**Abstract.** The aim of this study is to compute the stress distribution in the temporomandibular joint (TMJ) and its components under various functional occlusal states. Finite element method (FEM) is employed for the computations. An original adaptive triangulation algorithm for a complex three-dimensional domain is proposed, which enables the generation of unstructured tetrahedral meshes with controllable element density in regions of expected stress concentration. The computational efficiency is achieved through a specialized node renumbering algorithm that minimizes the bandwidth of the global stiffness matrix, combined with a compact storage scheme using Cholesky decomposition. Using a model that incorporates anatomical features and different physical and mechanical properties of tissues, simulations are performed for three key phases of the masticatory cycle: central, anterior, and lateral occlusion. Quantitative patterns of principal stress distribution are established. The results obtained correlate with clinical observations regarding high incidence of disc pathologies and TMJ dysfunctions. The computational framework developed in the paper can be applied for practical purposes, including planning of orthopedic and surgical interventions.

**Keywords:** stress-strain state, finite element method, Delaunay triangulation, adaptive mesh, biomechanics, temporomandibular joint, masticatory cycle, occlusion

**For citation:** N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh. Numerical simulation of the stress-strain state of the temporomandibular joint based on adaptive finite-element triangulation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:2(2026), 130–144. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144

## *About the authors:*

**Nikolay D. Morozkin**, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-5051-7094>, morozkinnd@mail.ru

**Denis M. Kolonskikh**, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5450-7677>, deniskolonskikh@gmail.com

## 1. Введение

Исследование биомеханических процессов, происходящих в зубочелюстной системе, представляет собой междисциплинарную задачу, находящуюся на стыке медицины,

биологии и механики сплошных сред. Центральным элементом этой системы является височно-нижнечелюстной сустав (ВНЧС) – один из наиболее сложных и нагружаемых суставов организма человека [1, 2]. Его дисфункции, связанные с нарушением координированной работы мышц, суставных элементов и зубных рядов, относятся к числу распространенных патологий, влияющих на качество жизни [3]. Традиционные методы диагностики, такие как клинический осмотр, рентгенография и магнитно-резонансная томография (МРТ), позволяют оценить морфологическое состояние структур, но не дают прямой информации о распределении внутренних механических напряжений [4]. Именно напряжения являются причиной развития дегенеративных изменений, болевых синдромов и функциональных ограничений [5].

Математическое моделирование открывает возможности для количественного анализа напряженно-деформированного состояния биологических тканей [6]. Первые попытки расчета напряжений в ВНЧС с помощью МКЭ были предприняты еще в конце XX века, но вычислительные мощности того времени накладывали существенные ограничения на точность моделей [7]. Современные исследования позволяют учитывать сложную геометрию костных структур, однако создание адекватной трехмерной модели ВНЧС требует преодоления нескольких принципиальных трудностей [8, 9].

Одной из основных проблем является необходимость учета сложной, невыпуклой и многосвязной геометрии костных структур и суставного диска; задание анизотропных и нелинейных свойств биологических тканей; корректное моделирование контактного взаимодействия между суставной головкой, диском и суставной впадиной [10]; определение реальных направлений и величин мышечных усилий для различных функциональных состояний; решение возникающих в результате дискретизации систем уравнений высокой размерности [11].

В работе предлагается подход к автоматизированному построению качественных конечно-элементных сеток для областей сложной геометрии и приведен эффективный способ численного решения трехмерной задачи линейной упругости. Контактное взаимодействие моделируется заданием условий жесткого закрепления в соответствующих фазах движения нижней челюсти, а также верхней поверхности суставного диска. Выполнены вычислительные эксперименты и проведен сравнительный анализ распределения напряжений в элементах ВНЧС при основных типах окклюзии, составляющих жевательный цикл. Отметим, что результаты расчетов настоящей работы коррелируют с результатами работы [12], где рассматривался частный случай расчета напряжений в ВНЧС в случае латеральной окклюзии.

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается трехмерная область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , представляющая собой тело нижней челюсти с зубными рядами, суставными и венечными отростками, а также суставными дисками. Предполагается, что область состоит из нескольких подобластей с различными упругими свойствами: кортикальная кость, дентин зубов и фиброзный хрящ суставного диска. Материал каждой подобласти считается линейно-упругим, изотропным и однородным.

Напряженно-деформированное состояние описывается системой дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$  – тензор напряжений второго ранга.

Уравнения (2.1) дополняются граничными условиями:

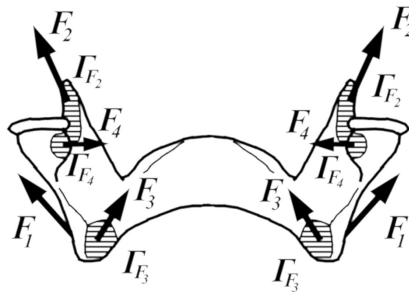
а) в области приложения мышечных сил к границе области  $\Gamma_F$ :

$$\begin{cases} F_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z, \\ F_y = \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z, \\ F_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z. \end{cases} \quad (2.2)$$

б) на границе области жесткого закрепления  $\Gamma_S$ :

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad (2.3)$$

где  $u_x, u_y, u_z$  – перемещения по направлениям  $x, y, z$ ;  $\Gamma_F$  – граница области приложения сил;  $F = \{F_x, F_y, F_z\}$  – сила, действующая на границу области  $\Gamma_F$ ;  $n_x = \cos(x, n)$ ,  $n_y = \cos(y, n)$ ,  $n_z = \cos(z, n)$  – направляющие косинусы внешней нормали к границе  $\Gamma_F$  [14]. Направления сил и области их приложения в ВНЧС приведены на рис. 2.1.



**Рис. 2.1.** Направления векторов мышечных усилий и области их приложения (вид сзади)

**Fig. 2.1.** The directions of the vectors of muscle effort and the areas of their application (back view)

Условные обозначения мышечных сил:  $F_1$  – жевательная мышца (m. masseter),  $F_2$  – височная мышца (m. temporalis),  $F_3$  – медиальная крыловидная мышца (m. pterygoideus medialis),  $F_4$  – латеральная крыловидная мышца (m. pterygoideus lateralis). Поверхности приложения мышечных усилий на рис. 2.1 имеют соответствующие обозначения  $\Gamma_{F_1}$ – $\Gamma_{F_4}$ .

Соотношения, описывающие связь между деформациями и перемещениями, записываются в виде

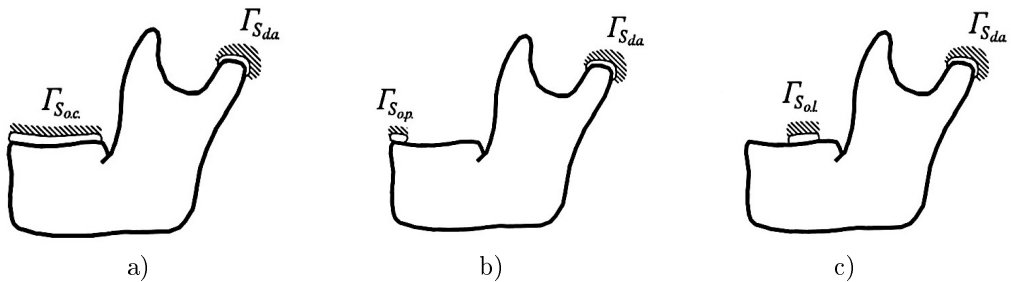
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.4)$$

а связь между деформациями и напряжениями для изотропного материала задается следующими уравнениями (обобщенный закон Гука) [14]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})), \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – компоненты вектора линейной деформации,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для имитации смыкания челюсти в зависимости от функционального положения зубных рядов в различных окклюзиях добавлен упругий пищевой комок, верхняя часть которого жестко закреплена. Граница  $\Gamma_S$  жесткого закрепления модели показана на рис. 2.2.



**Рис. 2.2.** Схема жесткого закрепления модели нижней челюсти при: а) центральной, б) передней, в) боковой окклюзиях

**Fig. 2.2.** Scheme of rigid fixation of the mandible model under: а) central, б) anterior, в) lateral occlusion

При центральной окклюзии (рис. 2.2а) область закрепления располагается симметрично в зоне контакта фронтальных и боковых групп зубов. В передней окклюзии (рис. 2.2б) закрепление также задается симметрично, но со смещением в область режущих краев фронтальных зубов при одновременном разобщении боковых зубных рядов. При боковой окклюзии (рис. 2.2в) задача становится асимметричной: на рабочей стороне пищевой комок располагается в области контакта премоляров и моляров, тогда как на балансирующей стороне контакт отсутствует. Во всех трех вариантах задачи верхняя поверхность суставного диска ВНЧС упирается в височную кость и также неподвижна (на рис. 2.2 граница  $\Gamma_{Sda}$ ). Как видно из рис. 2.2, граница области жесткого закрепления  $\Gamma_S$  различна при разных видах окклюзии.

### 3. Численное решение задачи

#### 3.1. Алгоритм построения адаптивной конечно-элементной сетки

Основной проблемой при моделировании сложных биологических объектов является генерация объемной сетки. Алгоритм построения адаптивной конечно-элементной структуры реализует многоэтапную процедуру [15]. Процесс начинается с задания геометрии объекта, которая аппроксимируется набором треугольных граней и преобразуется в трехмерный растровый (воксельный) шаблон. На основе этого шаблона определяется характеристическая функция  $W(x, y, z)$ . Каждому вокселю сопоставляется значение весовой функции  $W \in [0, 255]$ :  $W = 0$  соответствует внешней среде,  $W = 255$  – внутренним точкам вдали от границ. Значение  $W$  возрастает при приближении к границе области, а также в зонах интереса, заданных пользователем (например, в ВНЧС и суставном диске). Такое распределение значений характеристической функции обеспечивает последующее сгущение сетки в областях предполагаемого высокого градиента решения.

Следующим этапом является генерация характеристического множества опорных точек. Начальное множество точек формируется стохастически. Используется метод Неймана-Монте-Карло: точки распределяются случайно в ограничивающем пространстве с вероятностью пропорциональной значению функции  $W(x, y, z)$ . Далее точки взаимодействуют по закону отталкивания, причем сила взаимодействия обратно пропорциональна  $W$ . Это приводит к равномерному распределению точек внутри однородных областей и сгущению вблизи границ и особых зон. Точки, покинувшие область ( $W = 0$ ), возвращаются на границу по нормали и помечаются как граничные.

На полученном таким образом множестве точек строится объемная триангуляция, удовлетворяющая строгому критерию Делоне [16] (условию пустоты описанной сферы). Построение имеет инкрементальный характер, начиная с первого тетраэдра и последовательно присоединяя новые элементы к «активным» граням. После построения производится очистка сетки от элементов, геометрические центры которых лежат вне исходной области (такие элементы могут возникать на вогнутых участках). Завершающим шагом является контроль качества сетки с помощью метрики  $q = k \cdot r_{in}/l_{max}$ , где  $r_{in}$  – радиус вписанной сферы,  $l_{max}$  – длина наибольшего ребра,  $k$  – нормирующий коэффициент ( $k = 6\sqrt{2}$  для правильного тетраэдра, чтобы  $q_{max} = 1$ ).

Для построенной модели нижней челюсти среднее значение  $q$  составило 0.61, а 68 % элементов имеют  $q > 0.5$ , что свидетельствует о приемлемом качестве сетки для обеспечения сходимости МКЭ.

#### 3.2. Реализация метода конечных элементов и решение СЛАУ

Реализация метода конечных элементов для поставленной трехмерной задачи линейной упругости связана с решением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокой размерности [17]. Глобальная матрица жесткости  $K$  размерностью  $3N \times 3N$  (где  $N$  – число узлов), получаемая после дискретизации области, является симметричной, положительно определенной и обладает свойством ярко выраженной разреженности. Непосредственная работа с такой матрицей в стандартном формате хранения неэффективна из-за чрезмерных требований к оперативной памяти.

Для преодоления этой проблемы применена стратегия оптимизации, направленная на минимизацию вычислительных затрат. На первом этапе выполняется перенумерация узлов конечно-элементной сетки с целью уменьшения ширины профиля матрицы  $K$ .

Для этого использован алгоритм, основанный на построении структур уровней графа модели (разновидность алгоритма Катхилла–Макки), который группирует близлежащие в топологическом смысле узлы, обеспечивая концентрацию ненулевых элементов вблизи главной диагонали.

Благодаря такой перенумерации матрица  $K$  приобретает четко выраженный ленточный вид, что позволяет перейти к компактной схеме хранения. Используется диагональный (ленточный) формат, при котором хранятся только ненулевые элементы нижнего треугольника в пределах заданной полуширины ленты. Это сокращает объем используемой памяти в десятки раз. Для решения полученной СЛАУ  $KU = F$  выбран метод Холецкого, адаптированный для работы с ленточными матрицами. Метод заключается в разложении  $K = L \cdot L^T$ , где  $L$  – нижняя треугольная матрица, с последующим прямым и обратным ходом. Указанный набор методов (генерация объемной конечно-элементной модели, оптимизация нумерации, ленточное хранение матриц и разложение Холецкого) реализован в виде комплекса программ для персональных вычислительных систем, что позволило проводить расчеты в автоматизированном режиме.

#### 4. Результаты моделирования

Исходные данные для расчёта напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти и ВНЧС в различных окклюзиях приведены в таблицах 4.1 и 4.2.

**Таблица 4.1.** Физико-механические характеристики материалов  
**Table 4.1.** Physico-mechanical characteristics of materials

Область модели	Модуль Юнга, $E$ (МПа)	Коэффициент Пуассона, $\nu$	Примечание
Кортикальная кость	$1.37 \cdot 10^4$	0.28	Тело челюсти, отростки
Дентин зуба	$1.567 \cdot 10^4$	0.30	Зубные ряды
Суставной диск	$4.38 \cdot 10^3$	0.46	Фиброзный хрящ

На основе реальной анатомической геометрии построена конечно-элементная модель, состоящая из 18656 тетраэдральных элементов. Расчеты проведены для трех вариантов окклюзии.

##### 4.1. Центральная окклюзия

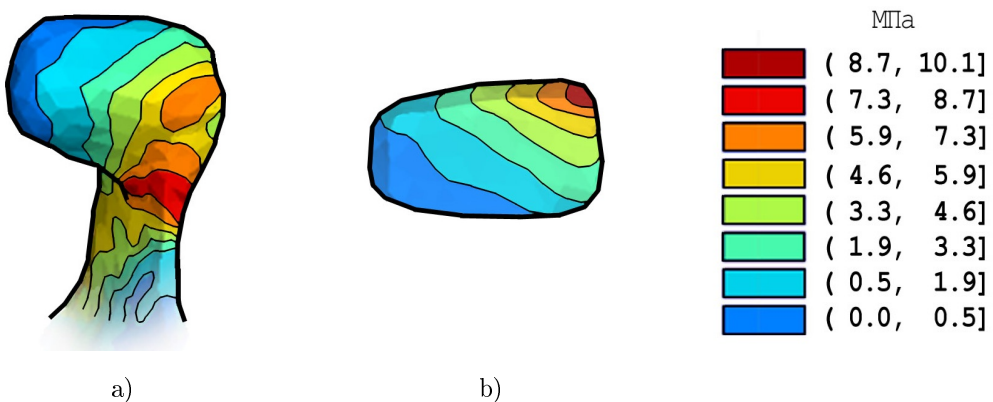
Поле главных напряжений симметрично, поэтому на рисунке представлены расчеты для ВНЧС левой стороны (рис. 4.1a).

Максимальные растягивающие напряжения ( $\sigma_{max} = 10.06$  МПа) зафиксированы в области основания суставного отростка. Это совпадает с типичной локализацией переломов нижней челюсти при травме, когда происходит мощное рефлекторное смыкание челюстей. Второй участок концентрации ( $\sigma_{max} = 8.7$  МПа) обнаружен в передне-наружном отделе суставного диска (рис. 4.1b). Важно отметить, что напряжения в диске в 1.2–1.5 раза превышают напряжения в непосредственно прилегающих участках суставной головки. Это прямое количественное подтверждение амортизирующей

**Таблица 4.2.** Граничные условия для различных окклюзий  
**Table 4.2.** Boundary conditions for various types of occlusion

Тип окклюзии	Жесткое закрепление, $\Gamma_S$	Нагрузка, $\Gamma_F$	Величина усилий, $H$
Центральная	Суставные диски, окклюзионные поверхности всех зубов	Все жевательные мышцы	$F_{mass} = 375$ , $F_{temp} = 400$ , $F_{pt.med} = 200$ , $F_{pt.lat} = 30$
Передняя	Передний отдел суставных дисков, режущие края фронтальных зубов	Все жевательные мышцы	Снижены пропорционально $\sim 40\%$ от центральной
Боковая	Рабочая сторона (левая): внутренне-передняя часть диска. Балансирующая сторона (правая): внешне-задняя часть диска. Контакт пищевого комка* на рабочей стороне	Все жевательные мышцы. Сила на балансирующей стороне $\sim 70\%$ от рабочей	$F_{mass.w} = 258$ , $F_{mass.b} = 181$ (индекс $w$ – рабочая, $b$ – балансирующая)

\* Пищевой комок моделировался как упругое тело с  $E = 1.0$  МПа,  $\nu = 0.45$ .



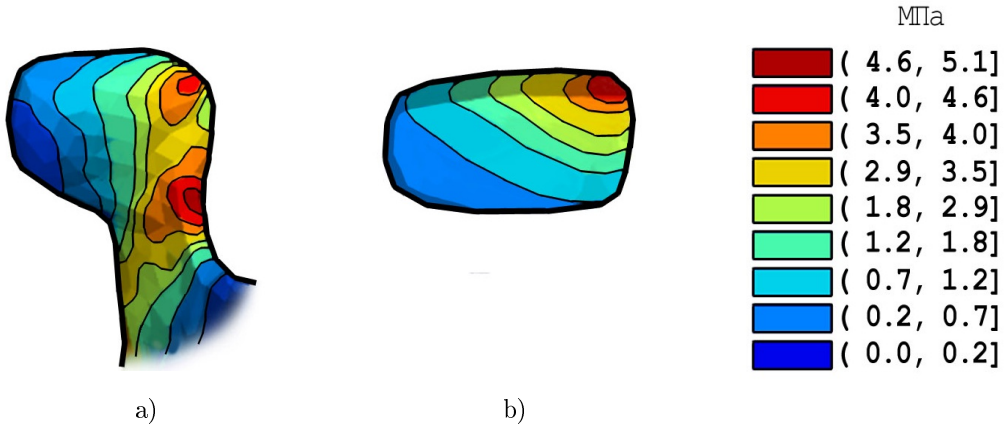
**Рис. 4.1.** Распределение поля напряжений ВНЧС в центральной окклюзии:  
 а) ВНЧС, б) суставной диск

**Fig. 4.1.** Stress field distribution in the TMJ under central occlusion:  
 а) TMJ, б) articular disc

функции диска: более мягкая фиброзно-хрящевая ткань принимает на себя и перераспределяет нагрузку, защищая костные структуры и суставную впадину височной кости [18].

#### 4.2. Передняя окклюзия

Качественная картина распределения напряжений в ВНЧС сохраняется – концентрация в передне-наружном отделе диска (рис. 4.2). Однако абсолютные значения снижаются (максимум в кости  $\sim 5.18$  МПа, в диске  $\sim 4.07$  МПа) из-за меньшего общего мышечного усилия, необходимого для откусывания пищи.



**Рис. 4.2.** Распределение поля напряжений ВНЧС в передней окклюзии:

а) ВНЧС, б) суставной диск

**Fig. 4.2.** Stress field distribution in the TMJ under anterior occlusion:

а) TMJ, б) articular disc

Основная нагрузка переносится на фронтальные зубы и передние пучки височных мышц. Полученный результат подтверждает, что передняя окклюзия, несмотря на смещение суставных головок вперед, является менее нагруженной для собственно суставных элементов, но создает существенную нагрузку на пародонт передних зубов.

#### 4.3. Боковая окклюзия

Данный сценарий наиболее интересен и клинически значим. Наблюдается выраженная асимметрия напряженно-деформированного состояния (рис. 4.3).

На рабочей стороне (левой) максимум напряжений в суставной головке составляет 5.33 МПа. Напряжения в диске достигают 6.45 МПа. На балансирующей стороне (правой) картина иная. Выявлены две четкие зоны концентрации: на передней поверхности шейки суставного отростка (7.81 МПа) и в центрально-медиальной части суставного диска (10.78 МПа – абсолютный максимум для всех расчетов).

Таким образом, на балансирующей стороне напряжения в костной ткани на 47% выше, а в суставном диске – на 70%, чем на рабочей стороне, несмотря на то, что жевательное усилие приложено к рабочей стороне. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат имеет четкое биомеханическое объяснение. При боковом смещении челюсти балансирующая суставная головка совершает движение вниз, вперед и внутрь, натягивая капсулу сустава и связки. Суставной диск на этой стороне подвергается значительным сдвиговым и растягивающим деформациям. Полученные количественные данные полностью согласуются с клинической статистикой [5], указывающей на большую частоту диагностирования щелчков, болезненности и деструктивных изменений именно



Анализ показывает, что наиболее высокие нагрузки в костной ткани возникают при центральной окклюзии, а в мягком суставном диске – при боковой окклюзии на балансирующей стороне. Это указывает на разные патогенетические механизмы: перегрузка кости может вести к стресс-переломам и артрозам, а хроническая перегрузка диска – к его перфорации, дислокации и развитию болевой дисфункции [19].

## 5. Заключение

1. Разработан и программно реализован алгоритм адаптивной триангуляции сложных трехмерных областей, позволяющий строить неструктурированные тетраэдральные сетки с управляемой плотностью. Алгоритм основан на генерации характеристического множества точек и построении триангуляции Делоне.
2. Создан эффективный вычислительный комплекс для решения трехмерных задач линейной упругости МКЭ. Удалось существенно снизить требования к оперативной памяти и времени расчета за счет применения алгоритмов перенумерации узлов и компактного ленточного хранения матриц.
3. На основе построенной модели проведен комплексный анализ напряженно-деформированного состояния нижней челюсти и ВНЧС. Установлены и количественно оценены зоны концентрации напряжений для трех основных фаз жевательного цикла.
4. Получено важное для клинической практики подтверждение: максимальная асимметричная нагрузка на суставной диск возникает на балансирующей стороне при боковой окклюзии. Это объясняет высокую частоту соответствующих патологий и подчеркивает важность восстановления симметричной окклюзии и двустороннего жевания.
5. Показано, что суставной диск выполняет роль основного амортизатора, принимая на себя напряжения, возникающие в костной ткани.

Созданный инструментарий и полученные результаты могут быть использованы для обоснования методов лечения и планирования зубного протезирования.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность сотрудникам отделения челюстно-лицевой хирургии ГКБ № 21 г. Уфы за консультативную помощь и обсуждение клинических аспектов работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дударь О. И., Бобина Д. И., Пешин С. Е. Сравнение способов теоретического определения усилий в жевательных мышцах и реакции в височно-нижнечелюстном суставе // *Master's Journal*. 2018. № 1. С. 172–185.
2. Шахалиева Л. Р., Сорокина Н. Д., Польша Л. В. Междисциплинарные аспекты в изучении дисфункции ВНЧС // *Ортодонтия*. 2024. № 1(105). С. 2–9.
3. Сиволапов К. А., Яцук А. В. Характеристика качества жизни пациентов при лечении мышечной дисфункции ВНЧС // *Вестник новых медицинских технологий. Электронное издание*. 2024. Т. 18, № 1. С. 17–22.

4. Кварацхелия А. Г., Семьнин К. Е., Савченко Н. А. Значение знаний строения височно-нижнечелюстного сустава в зубочелюстной патологии // Однораловские морфологические чтения : Сборник научных трудов, посвященный 120-летию со дня рождения профессора Н. И. Одноралова и 100-летию ВГМУ им. Н. Н. Бурденко (Воронеж, 15 декабря 2017 г.). Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2018. С. 113–115.
5. Шаров А. М., Орешака О. В. Распространенность нозологических форм заболеваний ВНЧС и особенности их клинических проявлений у пациентов // *Medicus*. 2024. № 1(55). С. 16–19.
6. Трунин Д. А., Ревякин А. В., Постников М. А. Исследование напряженно-деформированного состояния математической модели челюстных костей методом конечных элементов // *Аспирантский вестник Поволжья*. 2019. № 1–2. С. 131 – 139.
7. Лазарев С. А. Клиническое значение изучения напряжений в височно-нижнечелюстном суставе при различных окклюзиях методом конечных элементов : специальность 14.01.14 "Стоматология": автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата медицинских наук / Лазарев Сергей Анатольевич. Казань, 1998. – 20 с.
8. Чадова М., Галло Л. М. Подходит ли OpenSim для анализа жевательной системы? // *Российский журнал биомеханики*. 2013. Т. 17, № 3. С. 64–81.
9. Wang Y., Daraqel B., Wang Ya Biomechanical effects of different mandibular movements and torque compensations during mandibular advancement with clear aligners: a finite element analysis. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2024. Vol. 12.
10. Мишутин Е. А. Результаты функциональных методов исследования состояния ВНЧС у пациентов с внутренними нарушениями ВНЧС и пациентов группы сравнения // Актуальные проблемы стоматологии детского возраста и ортодонтии : Сборник научных статей XV региональной научно-практической конференции с международным участием по детской стоматологии. (Хабаровск, 10 октября 2025 г.). Хабаровск: ЗАО "Издательство "Антар 2025. С. 127–133.
11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в анализе напряженного состояния упругих тел // *Информационные технологии и математическое моделирование в экономике, технике, экологии, образовании, педагогике и торговле*. 2016. № 9. С. 51–68.
12. Морозкин Н. Д., Колонских Д. М. Математическое моделирование напряженного состояния ВНЧС в латеральной окклюзии // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVII Международной научной конференции. (Саранск, 29-31 июля 2025 г.). С. 180–184.
13. Елисеев В. В. Механика деформируемого твердого тела. Санкт-Петербург : Издательство СПбГПУ, 2003. 201 с.
14. Андреев В. К. Математические модели механики сплошных сред. Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2015. 240 с.

15. Морозкин Н. Д., Чудинов В.В., Попков В. С., Колонских Д. М. Адаптивная триангуляция трехмерных областей со сложной геометрией // Вестник Башкирского университета. 2005. Т. 10, № 4. С. 3–7.
16. Тырин Д. А. Триангуляция делоне // Наука молодых : Сборник материалов Межрегиональной молодежной научной конференции, посвященной памяти Н. А. Фролова. (Сыктывкар, 23–24 мая 2024 г.) Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2024. С. 24–28.
17. Труфанова Е. В., Коженев В. Ю., Кулиничев А. С., Хохлов М. Н. Применение метода подконструкций для решения задач больших размерностей МКЭ // Актуальные проблемы науки и техники. 2023 : Материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. (Ростов-на-Дону, 15–17 марта 2023 г. ) / Ответственный редактор Н. А. Шевченко. Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2023. С. 896–897.
18. Ключников О. В., Подкорытов Ю. М., Никитин О. Н. Изменение в височно-нижнечелюстном суставе при функциональной патологии зубочелюстной системы // Актуальные проблемы и перспективы развития стоматологии в условиях Севера : Сборник статей Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 55-летию профессиональной деятельности доцента кафедры терапевтической, хирургической, ортопедической стоматологии и стоматологии детского возраста ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова" Михайловой Розалии Ивановны. (Якутск, 21 ноября 2025 г.). Якутск: Издательский дом СВФУ, 2025. С. 140–144.
19. Шахалиева Л. Р., Сорокина Н. Д., Польша Л. В. Нейрофизиологические показатели и оценка болевого синдрома в диагностике начальных форм дисфункции ВНЧС // Физико-химическая биология МАТЕРИАЛЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ ИНТЕРНЕТ – КОНФЕРЕНЦИИ, (Ставрополь, 30 марта 2023 г.). Ставрополь: Ставропольский государственный медицинский университет, 2023. С. 88–91.

*Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 10.02.2022;  
принята к публикации 24.02.2022*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. O.I. Dudar, D.I. Bobina, S.E. Peshin, "Comparison of methods for theoretical determination of forces in masticatory muscles and reactions in the temporomandibular joint", *Master's Journal*, 2018, no. 1, 172–185 (In Russ.).
2. L.R. Shakhaliyeva, N.D. Sorokina, L.V. Polma, "Interdisciplinary aspects in the study of temporomandibular joint dysfunction", *Orthodontics*, 2024, no. 1(105), 2–9 (In Russ.).

3. K. A. Sivolapov, A. V. Yatsuk, “Quality of life characteristics of patients during treatment of muscular temporomandibular joint dysfunction”, *Bulletin of New Medical Technologies. Electronic Edition*, **18**:1 (2024), 17–22 (In Russ.).
4. A. G. Kvaratskheliya, K. E. Semynin, N. A. Savchenko, “The importance of knowledge of the temporomandibular joint structure in dentoalveolar pathology” (December 15, 2017), *Odnoralov Morphological Readings: Collection of Scientific Papers Dedicated to the 120th Anniversary of the Birth of Professor N. I. Odnoralov and the 100th Anniversary of Voronezh State Medical University named after N. N. Burdenko*, 2018, 113–115 (In Russ.).
5. A. M. Sharov, O. V. Oreshaka, “Prevalence of nosological forms of temporomandibular joint diseases and features of their clinical manifestations in patients”, *Medicus*, 2024, no. 1(55), 16–19 (In Russ.).
6. D. A. Trunin, A. V. Revyakin, M. A. Postnikov, “Finite element study of the stress-strain state of a mathematical model of jaw bones”, *Postgraduate Bulletin of the Volga Region*, 2019, no. 1–2, 131–139 (In Russ.).
7. S. A. Lazarev, “Clinical significance of studying stresses in the temporomandibular joint under various occlusions using the finite element method: specialty 14.01.14 "Dentistry": abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Medical Sciences”, *Lazarev Sergey Anatolevich*, 1998 (In Russ.), 20 p.
8. M. Chadova, L. M. Gallo, “Is OpenSim suitable for analyzing the masticatory system?”, *Russian Journal of Biomechanics*, **17**:3 (2013), 64–81 (In Russ.).
9. Y. Wang, B. Daraqel, Ya. Wang, “Biomechanical effects of different mandibular movements and torque compensations during mandibular advancement with clear aligners: a finite element analysis”, *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, **12** (2024).
10. E. A. Mishutin, “Results of functional methods for studying the state of the temporomandibular joint in patients with internal temporomandibular joint disorders and in a comparison group”, *Current Issues in Pediatric Dentistry and Orthodontics: Collection of Scientific Articles of the XV Regional Scientific-Practical Conference with International Participation on Pediatric Dentistry, (October 10, 2025)*, ZAO Publishing House «Antar», Khabarovsk, 2025, 127–133 (In Russ.).
11. A. D. Matveev, “Multigrid finite element method in the analysis of the stress state of elastic bodies”, *Information Technologies and Mathematical Modeling in Economics, Engineering, Ecology, Education, Pedagogy and Trade*, 2016, no. 9, 51–68 (In Russ.).
12. N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh, “Mathematical modeling of the stress state of the temporomandibular joint in lateral occlusion” (July 29–31, 2025), *Differential Equations and Their Applications in Mathematical Modeling: Proceedings of the XVII International Scientific Conference*, 2025, 180–184 (In Russ.).
13. V. V. Eliseev, *Mechanics of a Deformable Solid Body*, Publishing House of SPbSPU, St. Petersburg, 2003 (In Russ.), 201 p.
14. V. K. Andreev, *Mathematical Models of Continuum Mechanics*, Publishing House «Lan», St. Petersburg, 2015 (In Russ.), 240 p.

15. N. D. Morozkin, V. V. Chudinov, V. S. Popkov, D. M. Kolonskikh, “Adaptive triangulation of three-dimensional domains with complex geometry”, *Bulletin of Bashkir University*, **10**:4 (2005), 3–7 (In Russ.).
16. D. A. Tyrin, “Delaunay triangulation”, *Young Science: Proceedings of the Interregional Youth Scientific Conference Dedicated to the Memory of N. A. Frolov* (May 23–24, 2024), Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 2024, 24–28 (In Russ.).
17. E. V. Trufanova, V. Yu. Kozhenov, A. S. Kulinichev, M. N. Khokhlov, “Application of the substructure method for solving large-scale finite element problems”, *Current Problems of Science and Technology. 2023: Proceedings of the All-Russian (National) Scientific-Practical Conference / Executive Editor N. A. Shevchenko* (March 15–17, 2023), Don State Technical University, Rostov-on-Don, 2023, 896–897 (In Russ.).
18. O. V. Klyushnikov, Yu. M. Podkorytov, O. N. Nikitin, “Changes in the temporomandibular joint in functional pathology of the dentoalveolar system”, *Current Problems and Prospects for the Development of Dentistry in the North: Collection of Articles of the All-Russian Scientific-Practical Conference with International Participation Dedicated to the 55th Anniversary of the Professional Activity of Associate Professor Mikhailova Rozaliya Ivanovna* (November 21, 2025), NEFU Publishing House, Yakutsk, 2025, 140–144 (In Russ.).
19. L. R. Shakhaliyeva, N. D. Sorokina, L. V. Polma, “Neurophysiological indicators and pain syndrome assessment in the diagnosis of initial forms of temporomandibular joint dysfunction”, *Physicochemical Biology: Proceedings of the XI International Scientific Internet Conference* (March 30, 2023), Stavropol State Medical University, Stavropol, 2023, 88–91 (In Russ.).

*Submitted 01.12.2021; Revised 10.02.2022; Accepted 24.02.2022*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиция автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются переносом основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать **BGN/PCGN** упрощенная без диакритических знаков.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р. А. Шаманаев, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р. А. Шаманаев, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the `svmobib.sty` style package. This package is developed based on the `amsbib.sty` package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadrat functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnyimi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

*Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.*

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

*Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.*

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О. }.

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Название таблицы на английском языке}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца на русском языке & Название второго столбца на русском языке \\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

**Оформление рисунков.** Все вставляемые рисунки в текст статьи должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript). В редакцию журнала также необходимо предоставить те же рисунки в формате JPG с разрешением 300 точек на дюйм (dpi).

Для вставки рисунков в текст статьи можно пользоваться следующими командами:

а) вставка одного рисунка

```
\begin{figure}[ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Название рисунка на русском языке:}
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Название рисунка на англ. языке}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}
```

б) вставка двух рисунков в одну строку

```
\begin{figure}[ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
}
```

```

\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a}$
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b}$
\end{minipage}
\caption{Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на русском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на русском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на русском языке,
\medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на английском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на английском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на английском языке }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`**

### Статьи в журналах на русском языке

**В разделе `thebibliography`:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\par О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. VelmisoV, A. V. KorneeV
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}  
\by В. Г. Малинов  
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике  
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды  
\bookvol II  
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ ФИЦ ИУ РАН  
\publaddr М.
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}  
\by V. G. Malinov  
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator  
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings  
\bookvol II  
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ FRC CSC RAS Publ.  
\publaddr Moscow
```

## The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmo.sty` and `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** *To format article headings in English, use the following commands:* `\headerFirstEn` *u* `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment `equation`. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the `equation*` environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` and `Example`. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the `table` environment with the nested `tabular` environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name in English}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Table name in Russian}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
```

```

First column name in English & Second column name in English \\
First column name in Russian & Second column name in Russian \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Title of the drawing in English: \\
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Title of the drawing in Russian}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

b) inserting two pictures into one line

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center {$a}$
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center {$b}$
\end{minipage}
\caption{Common name of two drawings a and b in Russian: \\
$a)$ the title of the picture a in English,  $b)$  the title of the picture b in English,
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Common name of two drawings a and b in Russian: \\

```

```

$a)$ the title of the drawing a in Russian, $b)$ the title of the drawing b in Russian }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

### Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

#### Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

#### Journal articles in English:

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

#### Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

```

---



---

```

\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Articles in collections in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Books (monographs and collections) in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Conference proceedings in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

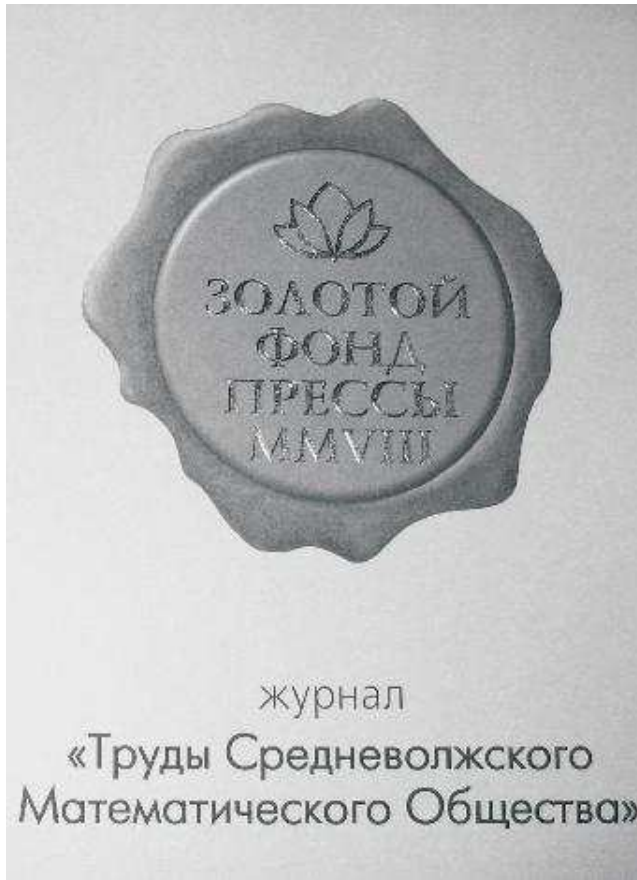
## Алфавитный указатель авторов

Бодрова И. В.	115	Мулюгин А. Д.	99
Вдовин В. В.	99	Одинабеков Д. М.	11
Дюбуа А. Б.	115	Рассадин А. Э.	28
Жалнин Р. В.	99	Рукавишников А. В.	62
Колонских Д. М.	130	Сафošкин А. С.	115
Кучерявый С. И.	115	Сотникова М. В.	47
Лепихин Т. А.	47	Томилова А. С.	47
Лисица В. В.	83	Хачкова Т. С.	83
Морозкин Н. Д.	130	Чекменёва Е. А.	83

## Author Index

I. V. Bodrova	115	A. D. Mulyugin	99
V. V. Vdovin	99	J. M. Odinabekov	11
A. B. Dubois	115	A. E. Rassadin	28
R. V. Zhalnin	99	A. V. Rukavishnikov	62
D. M. Kolonskikh	130	A. S. Safoshkin	115
S. I. Kucheryavyy	115	M. V. Sotnikova	47
T. A. Lepikhin	47	A. S. Tomilova	47
V. V. Lisitsa	83	T. S. Khachkova	83
N. D. Morozkin	130	E. A. Chekmeneva	83

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е., Иванова-Тюрькина В. А.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Язовцева О. С.*

Подписано в печать 25.06.2026. Дата выхода в свет 30.06.2026. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 14,7 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 435.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova, V. A. Ivanova-Tyurkina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *O. S. Yazovtseva*

Signed to print 25.06.2026. Date of publishing 30.06.2026. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 14,7

Number of copies 100. Order no. 435.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia







