

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 28 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 1

2026

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 28, № 1. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 28, NO. 1. 2026

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2026

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Пескова Елизавета Евгеньевна — заместитель главного редактора, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП «РЯЦ ВНИИЭФ» (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой цифрового моделирования ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мехатроники и теоретической механики ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — профессор, доктор физико-математических наук,

профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Леонтьев Виктор Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель института информатики, математики и робототехники ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий международной лабораторией динамических систем и приложений ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, руководитель Высшей школы развития научно-образовательного потенциала ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Институт математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь направления «Математическая робототехника и искусственный интеллект», Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

Язовцева Ольга Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Elizaveta E. Peskova — Deputy Editor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department «Higher Mathematics», Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys. and Math.), Chief Research Scientist, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — the Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Victor L. Leontiev — D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Scientific Supervisor of the Institute of Computer Science, Mathematics and Robotics, Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Head of the Department «Applied Mathematics and Informatics», Samara State Technical University (Samara, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of the Higher School for the Development of Scientific and Educational Potential of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nikolai A. Sidorov — Professor, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University (Irkutsk, Russia)

Nikolay V. Starostin — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of department, Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Lev A. Sukharev — Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University, President of the Middle Volga Mathematical Society (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Ph. D. (Phys. and Math.), Leading Research Engineer, Department of Mathematical Robotics and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

Olga S. Yazovtseva — Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

- О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Ю. Ястребова**
О некоторых свойствах многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на положительной полуоси по экспоненциальной норме 11
- П. Е. Маковеева, А. В. Егоров**
Построение функционала по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями . . . 31
- Ж. Ш. Сафаров**
Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области 48
- А. Н. Тында, Д. Р. Вечкасов**
Численное и теоретическое исследование интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором 67
- А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова**
Метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана 79
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

- Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский**
Численное моделирование распространения воздушной ударной волны на подвижной неструктурированной сетке 96
-

- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 117
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 121
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 125
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 131
-
- Алфавитный указатель авторов 135

Contents

MATHEMATICS

- O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, I. Yu. Yastrebova**
On some properties of polynomials that are least-deviating from zero on the positive semi-axis in the exponential norm 11
- P. E. Makoveeva, A. V. Egorov**
Construction of a functional with a prescribed derivative for a linear parabolic equation with homogeneous boundary conditions 31
- J. Sh. Safarov**
Classification of suspensions over Cartesian products of orientation-changing diffeomorphisms of a circle 48
- A. N. Tynda, D. R. Vechkasov**
Numerical and theoretical study of Volterra integral equations with a locally loaded operator 67
- A. V. Tsyganov, J. V. Tsyganova**
Automatic optimality control method for the distributed discrete-time Kalman filter 79
-

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

- E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky**
Numerical modeling of air shock wave propagation on a moving unstructured mesh 96
-

- The rules of article design (in Russian) 117
- The rules of article design (in English) 121
- The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 125
- The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 131
-
- Author Index 135

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.51

О некоторых свойствах многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на положительной полуоси по экспоненциальной норме

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Ю. Ястребова

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, играют важную роль в теории и практике использования численных методов. С их помощью можно решать задачи оптимизации свойств различных вычислительных алгоритмов. Наша работа посвящена изучению многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0, +\infty)$ в экспоненциальной норме. Экспоненциальная норма для любого $\alpha > 0$ и любого бесконечного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ определяется равенством $\|P\|_{\alpha, K} = \sup_{x \in K} e^{-|x|^\alpha} |P(x)|$.

В настоящей статье мы обсуждаем вопрос о существовании, единственности и характеристизации многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0; +\infty)}$, выводим систему уравнений, которым должны подчиняться такие многочлены, переформулируем для нормы $\|\cdot\|_{\alpha, [0; +\infty)}$ результаты Мхаскара и Саффа 1984 года, полученные ими для нормы $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$. Далее мы приближенно вычисляем многочлены первой и второй степени, наименее уклоняющиеся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1, [0; +\infty)}$, и получили (если ограничиться тремя цифрами после запятой), что они имеют вид $x - 0.279$ и $x^2 - 1.620x + 0.217$ соответственно. Применённый нами метод является альтернативным по отношению к алгоритму Ремеза. При вычислениях мы используем принцип сжимающих отображений, метод Ньютона и метод Галлея. Полученные нами результаты проиллюстрированы графиками.

Ключевые слова: экспоненциальная норма, многочлен наилучшего приближения, теорема Бернштейна-Чебышёва

Для цитирования: Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Ястребова И. Ю. О некоторых свойствах многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на положительной полуоси в экспоненциальной норме // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 11–30. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30



Об авторах:

Галкин Олег Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru

Ястребова Ирина Юрьевна, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5991-7466>, yastrebova@unn.ru

Original article

MSC2020 41A50, 41A81, 65D15

On some properties of polynomials that are least-deviating from zero on the positive semi-axis in the exponential norm

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, I. Yu. Yastrebova

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. Polynomials that are least-deviating from zero play an important role in the theory and practice of using numerical methods. They can be used to solve problems of optimizing the properties of various computational algorithms. So, our work is devoted to the study of polynomials that are least-deviating from zero on the ray $[0, +\infty)$ in the exponential norm. Such a norm for any $\alpha > 0$ and any infinite subset $K \subset \mathbb{R}$ is defined by the equality $\|P\|_{\alpha, K} = \sup_{x \in K} e^{-|x|^\alpha} |P(x)|$. In this article, we discuss the existence, uniqueness,

and characterization of polynomials that deviate least from zero in the norm $\|\cdot\|_{\alpha, [0; +\infty)}$, derive a system of equations that such polynomials must obey, and reformulate the results of Mhaskar and Saff (1984), obtained for the norm $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$, according to our kind of norm. Next, we approximately calculate the polynomials of the first and second degrees that deviate least from zero according to the norm $\|\cdot\|_{1, [0; +\infty)}$. Our method is an alternative to Remez algorithm. In the calculations, we use the principle of contracting mappings, Newton's method and Halley's method. Our results are illustrated by pictures.

Keywords: exponential norm, best approximation polynomial, Bernstein-Chebyshev theorem

For citation: O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, I. Yu. Yastrebova. On some properties of polynomials that are least-deviating from zero on the positive semi-axis in the exponential norm. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 11–30. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.11-30

About the authors:

Oleg E. Galkin, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, olegegalkin@ya.ru

Svetlana Yu. Galkina, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru

Irina Yu. Yastrebova, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5991-7466>, yastrebova@unn.ru

1. Введение

Работа посвящена изучению многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0, +\infty)$ в экспоненциальной норме.

Сначала приведём определения многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, и экспоненциальной нормы. При каждом $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ будем обозначать через \mathcal{P}_n пространство всех вещественных многочленов степени не выше n .

Определение 1.1. Пусть $\|\cdot\|$ – некоторая норма на \mathcal{P}_n . Многочлен $T_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$ называется многочленом степени n , наименее уклоняющимся от нуля (или многочленом Чебышёва) по норме $\|\cdot\|$, если он имеет минимальную норму среди норм всех многочленов из \mathcal{P}_n , имеющих единичный старший коэффициент. Это означает, что

$$\|T_n\| = \inf_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}} \|x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \dots - c_1x - c_0\| = \inf_{Q \in \mathcal{P}_{n-1}} \|x^n - Q(x)\|.$$

Замечание 1.1. а) Для многочленов с комплексными коэффициентами определение многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, аналогично.

б) Из определения 1.1 вытекает, что многочлен $T_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$ наименее уклоняется от нуля по норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда многочлен $R_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ является многочленом наилучшего приближения степени $n-1$ для функции $f(x) = x^n$ по норме $\|\cdot\|$ (см. далее определение 2.2).

Интересующая нас экспоненциальная норма определяется следующим образом:

Определение 1.2. Для любого числа $\alpha > 0$ и любого бесконечного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{\alpha, K}$ на пространстве \mathcal{P}_n задается равенством

$$\|P\|_{\alpha, K} = \sup_{x \in K} e^{-|x|^\alpha} |P(x)|, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

Замечание 1.2. а) Многочлены степени n , наименее уклоняющиеся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, K}$, будем обозначать через $T_n(\alpha, K)$, а их значения в точках $x \in \mathbb{R}$ – через $T_n(\alpha, K; x)$.

б) Величину минимального уклонения многочлена степени n от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, K}$ будем обозначать символом $E_n(\alpha, K)$. Таким образом, $E_n(\alpha, K) = \|T_n(\alpha, K)\|_{\alpha, K} = \inf_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}} \|x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \dots - c_1x - c_0\|_{\alpha, K}$.

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Ю. Ястребова. О некоторых свойствах многочленов, наименее...

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, одним из первых начал изучать П.Л. Чебышёв в работе [1], где он применил их для увеличения точности параллелограмма Уатта. В качестве нормы Чебышёв брал равномерную норму на отрезке $[-1; 1]$, в наших обозначениях $\|\cdot\|_{0,[-1;1]}$. Найденные им многочлены (многочлены Чебышёва первого рода) при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [-1; 1]$ можно записать с помощью формулы $T_n(0, [-1; 1]; x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n \arccos x)$.

Идеи Чебышёва были развиты его учениками Коркиным и Золотарёвым. В работе 1873 г. [2] они нашли явную формулу для так называемых многочленов Чебышёва второго рода U_n , наименее уклоняющихся от нуля по интегральной L^1 -норме $\|P\| = \int_{-1}^1 |P(x)| dx$. При $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (-1; 1)$ эти многочлены можно записать в следующем виде: $U_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Исследования многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, развивались далее другими учеными, и продолжаются до настоящего времени. Изучались как вещественные, так и комплексные многочлены. В качестве норм брались равномерные и интегральные L^r -нормы с различными весами. В том числе решалась задача поиска многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, при различных дополнительных ограничениях. Например, в работе [3] изучены вещественные наименее уклоняющихся от нуля по норме $L^r[-1; 1]$ с весом полиномы, имеющие постоянный знак. Комплексные многочлены, наименее уклоняющихся от нуля на различных компактных подмножествах комплексной плоскости по равномерной норме, изучались, например, в работах [4–7]. При этом в [7] от многочленов дополнительно требовалось, чтобы они не обращались в ноль в заданном открытом подмножестве из \mathbb{C} . Многочленам, наименее уклоняющимся от нуля, и другим экстремальным задачам, связанным с многочленами, посвящена прекрасная монография 1994 г. [8], содержащая обзор большого числа трудов на эту тему. Среди всех работ по данному вопросу нам особенно интересны две, результаты которых мы подробнее изложим далее: статья 1981 г. [9], где используется экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{1,[0;+\infty)}$, и статья 1984 г. [10], где применяется экспоненциальная норма $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$ при любых $\alpha > 0$.

В настоящей статье в параграфе 2 мы обсудили вопрос о существовании, единственности и характеристизации многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ (см. теорему 2.2), в параграфе 3 вывели систему уравнений, которым должны подчиняться такие многочлены (см. теорему 3.1), в параграфе 4 переформулировали для нормы $\|\cdot\|_{\alpha,[0;+\infty)}$ результаты, полученные в [10] для нормы $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$ (см. теорему 4.2). Далее в параграфе 5 мы приближенно вычислили многочлены первой и второй степени, наименее уклоняющиеся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0;+\infty)}$, и получили (ограничиваясь тремя цифрами после запятой), что $T_1(1, [0; +\infty); x) \approx x - 0.279$ и $T_2(1, [0; +\infty); x) \approx x^2 - 1.620x + 0.217$. Применённый нами метод является альтернативным по отношению к алгоритму Ремеза, изложенному в его монографии [11] (глава 2, §5). При вычислениях мы использовали принцип сжимающих отображений, метод Ньютона и метод Галлея [12]. Полученные нами результаты проиллюстрированы графиками.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, имеют многочисленные применения. В частности, они применяются для приближения функций телескопическим методом (описание этого метода можно найти, например, в учебнике [13] в пункте 7 параграфа 6 главы 4). Нули таких многочленов используются в качестве узлов интерполяции при

построении интерполяционных многочленов (см. например, параграф 9 главы 2 в [13]). Отметим также, что в евклидовой норме наименее уклоняющимися от нуля являются ортогональные многочлены, которые также широко используются.

2. Системы Чебышёва и теорема Бернштейна-Чебышёва

В этом параграфе мы даём общие определения, связанные с многочленами, наименее уклоняющимися от нуля, а также обсуждаем существование, единственность таких многочленов и наличие у них точек альтернанса. В своем изложении будем в основном следовать книгам Бернштейна [14] и Дзядыка [15].

Обозначим через $C_0[0, +\infty)$ класс всех непрерывных функций $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Очевидно, что множество $C_0[0, +\infty)$ является вещественным линейным пространством.

Нам понадобится следующее простое утверждение, которое для полноты изложения приведем с доказательством.

Предложение 2.1. *Для любой функции f из класса $C_0[0, +\infty)$ величина $\sup_{x \geq 0} |f(x)|$ конечна и достигается в некоторой точке луча $[0, +\infty)$, т.е. существует такое $a \in [0, +\infty)$, что $\sup_{x \geq 0} |f(x)| = |f(a)|$.*

Доказательство. В силу определения супремума существует такая последовательность неотрицательных чисел $(x_k)_{k=1}^\infty$, что

$$\sup_{x \geq 0} |f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k)|. \quad (2.1)$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$ ограничена, то, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует её подпоследовательность $(x_{k_i})_{i=1}^\infty$, сходящаяся к некоторой точке $a \in [0, +\infty)$. Тогда в силу непрерывности функции f из (2.1) вытекает нужное соотношение: $\sup_{x \geq 0} |f(x)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f(x_{k_i})| = |f(a)|$.

2) Если же последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$ неограничена, то у неё существует подпоследовательность $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$, сходящаяся к $+\infty$. Тогда из (2.1) и определения класса $C_0[0, +\infty)$ вытекает, что $\sup_{x \geq 0} |f(x)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |f(x_{k_j})| = 0$. Следовательно, $f(x) = 0$ при любом $x \in [0, +\infty)$, и можно взять $a = 0$.

Доказательство завершено.

Очевидно, что в пространстве $C_0[0, +\infty)$ отображение $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$ задает норму. Как обычно, будем называть ее равномерной нормой.

Определение 2.1. *Обобщённым полиномом по системе вещественнозначных функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ будем называть любую функцию вида $\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$, где $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.*

Определение 2.2. *Пусть даны вещественнозначные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и f , принадлежащие некоторому нормированному пространству X с нормой $\|\cdot\|_X$, а*

также числа $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Будем называть функцию $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$ обобщённым полиномом наилучшего приближения для функции f по системе $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ в норме $\|\cdot\|_X$, если для любого обобщённого полинома $\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ выполняется неравенство $\|f - \varphi\|_X \leq \|f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k\|_X$.

Определение 2.3. Систему функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, принадлежащих классу $C_0[0, +\infty)$, назовём системой Чебышёва порядка n на луче $[0, +\infty)$, если обобщённый полином $\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ может иметь более, чем n различных корней на $[0, +\infty)$ только в том случае, когда он тождественно равен нулю, то есть когда $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

Пример 2.1. При любых $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\alpha > 0$ система функций $\{e^{-x^\alpha}, e^{-x^\alpha} x, \dots, e^{-x^\alpha} x^n\}$ является системой Чебышёва порядка n на луче $[0, +\infty)$. Это вытекает из основной теоремы алгебры (см., например, в [16] теорему 1 в пункте 1 §3).

В силу предложения 2.1, частным случаем теоремы Бернштейна (см. § 5 первой главы книги [14], где она названа основной теоремой Чебышёва, а также следствие 1 из этой теоремы) является следующий результат, который можно назвать теоремой Бернштейна-Чебышёва об альтернансе для луча:

Теорема 2.1. Пусть функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ из класса $C_0[0, +\infty)$ образуют систему Чебышёва порядка n на луче $[0, +\infty)$. Тогда верны следующие два факта:

1) Для того, чтобы обобщённый полином $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$ был обобщённым полиномом наилучшего приближения для данной функции $f \in C_0[0, +\infty)$ в равномерной норме на луче $[0, +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы величина

$$\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f(x) - \varphi(x)|$$

достигалась не менее, чем в $n+2$ точках $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ луча $[0, +\infty)$, в которых знаки разностей $f(x_0) - \varphi(x_0), \dots, f(x_{n+1}) - \varphi(x_{n+1})$ последовательно противоположны, т.е. $f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1}) = -(f(x_i) - \varphi(x_i))$ при всех $i = \overline{0, n}$.

2) Для любой функции $f \in C_0[0, +\infty)$ обобщённый полином наилучшего приближения по системе $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ в равномерной норме на луче $[0, +\infty)$ существует и единственен.

Из этой теоремы вытекает другая теорема, которую можно было бы назвать теоремой Бернштейна-Чебышёва об альтернансе для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на луче по экспоненциальной норме:

Теорема 2.2. Пусть n – произвольное натуральное число и $\alpha > 0$. Тогда:

1) Для того, чтобы многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ был наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, необходимо и достаточно, чтобы величина $\|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)} = \sup_{x \geq 0} e^{-x^\alpha} |P_n(x)|$ достигалась не менее,

чем в $n+1$ точках $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ луча $[0, +\infty)$, в которых значения вырежений $e^{-x_0^\alpha} P_n(x_0), \dots, e^{-x_n^\alpha} P_n(x_n)$ последовательно противоположны, то есть $e^{-x_{i+1}^\alpha} P_n(x_{i+1}) = -e^{-x_i^\alpha} P_n(x_i)$ при всех $i = \overline{0, n-1}$.

2) Многочлен степени n , наименее уклоняющийся от нуля на луче $[0, +\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, существует и единственен.

Доказательство. Действительно, верно равенство

$$\|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)} = \sup_{x \geq 0} e^{-x^\alpha} |P_n(x)| = \sup_{x \geq 0} |e^{-x^\alpha} x^n - a_{n-1} e^{-x^\alpha} x^{n-1} - \dots - a_0 e^{-x^\alpha}| = \|f - \varphi\|_\infty,$$

где $f(x) = e^{-x^\alpha} x^n \in C_0[0, +\infty)$ и $\varphi(x) = a_{n-1} e^{-x^\alpha} x^{n-1} + \dots + a_0 e^{-x^\alpha} \in C_0[0, +\infty)$. Поэтому многочлен P_n тогда и только тогда является наименее уклоняющимся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, когда обобщённый полином φ по системе Чебышёва $\{e^{-x^\alpha}, e^{-x^\alpha} x, \dots, e^{-x^\alpha} x^n\}$ даёт наилучшее приближение для функции f по равномерной норме на луче $[0, +\infty)$, при этом $f(x) - \varphi(x) = e^{-x^\alpha} P_n(x)$. В силу теоремы 2.1, это равносильно тому, что величина $\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f(x) - \varphi(x)|$ достигается не менее,

чем в $n + 1$ точках $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ луча $[0, +\infty)$, в которых значения разностей $f(x_i) - \varphi(x_i) = e^{-x_i^\alpha} P_n(x_i)$ при $i = \overline{0, n}$ последовательно противоположны.

Доказательство завершено.

Точки x_0, x_1, \dots, x_n , упомянутые в теореме 2.2, называются точками альтернанса. Аналогично теореме 2.2 может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. При любом натуральном n и любом $\alpha > 0$ многочлен степени n , наименее уклоняющийся от нуля на всём \mathbb{R} по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$, существует и единственен.

3. Уравнения для поиска многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0, +\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$

Доказанная в предыдущем параграфе теорема 2.2 фактически является переформулировкой теоремы 2.1 Бернштейна-Чебышёва для интересующего нас частного случая. Система уравнений, полученная в следующей теореме 3.1, уже позволяет находить коэффициенты искомого экстремального полинома.

Теорема 3.1. Пусть n – произвольное натуральное число и $\alpha > 0$. Тогда

1) Многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на луче $[0, +\infty)$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, тогда и только тогда, когда существуют n положительных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, таких что выполняются равенства

$$\begin{cases} P_n(0) = (-1)^n \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)} \\ P_n(x_i) = (-1)^{n-i} e^{x_i^\alpha} \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)}, & i = 1, \dots, n \\ \alpha x_i^{\alpha-1} P_n(x_i) - P'_n(x_i) = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

2) Решение системы уравнений (3.1), в которой искомыми являются многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ и положительные числа $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, существует и единственно.

3) Пусть система уравнений

$$\begin{cases} P_n(0) = (-1)^n h_n \\ P_n(x_i) = (-1)^{n-i} e^{x_i^\alpha} h_n, & i = \overline{1, n} \\ \alpha x_i^{\alpha-1} P_n(x_i) - P'_n(x_i) = 0, & i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой искомыми являются многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ и положительные числа h_n , $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, имеет единственное решение. Тогда P_n является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, причем выполняется равенство $\|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)} = h_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1а) Пусть P_n – многочлен, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$. Тогда в силу теоремы 2.2 существуют точки альтернанса $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n$, такие что $e^{-x_i^\alpha} |P_n(x_i)| = \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ при всех $i = \overline{1, n}$ и $e^{-x_{i+1}^\alpha} P_n(x_{i+1}) = -e^{-x_i^\alpha} P_n(x_i)$ при всех $i = \overline{0, n-1}$. Отсюда следует равенство $P_n(x_i) = (-1)^{n-i} \text{sign}(P_n(x_n)) e^{x_i^\alpha} \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ при любых $i = \overline{0, n}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(1 - \frac{a_{n-1}}{x} - \dots - \frac{a_0}{x^n}\right) = +\infty$, то $P_n(x) > 0$ при всех достаточно больших x . Поскольку между соседними точками альтернанса x_{i-1} и x_i любым $i = \overline{1, n}$ многочлен P_n имеет хотя бы один корень z_i , а всего он имеет не более n корней, то при $x \geq x_n$ знак $P_n(x)$ не меняется. Следовательно, $P_n(x_n) > 0$. Таким образом, $P_n(x_i) = (-1)^{n-i} e^{x_i^\alpha} \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ при всех $i = \overline{0, n}$. Из предыдущих рассуждений следует также, что на каждом из n промежутков $[x_{i-1}, x_i)$, где $i = \overline{1, n}$, корень z_i является единственным, и вне этих промежутков корней у P_n нет. Поэтому многочлен P_n не имеет корней и на полуинтервале $[0; z_1)$.

Предположим, что $x_0 > 0$ и покажем, что это неверно. Поскольку на промежутке $[0; z_1)$ у P_n нет корней, функция $y = |P_n(x)|$ на нем убывает. Поэтому верно неравенство $e^{-x_0^\alpha} |P_n(x)| > e^{-x_0^\alpha} |P_n(x_0)|$ при всех $x \in [0; x_0)$, что противоречит наличию альтернанса в точке x_0 . Таким образом, $x_0 = 0$.

Далее, так как при любом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ точка x_i лежит внутри луча $[0, +\infty)$, то по теореме Ферма производная функции $e^{-x^\alpha} P_n(x)$ в точке $x = x_i$ обращается в ноль. Это означает, что верно равенство $-\alpha x_i^{\alpha-1} e^{-x_i^\alpha} P_n(x_i) + e^{-x_i^\alpha} P_n'(x_i) = 0$. Следовательно, $\alpha x_i^{\alpha-1} - P_n'(x_i) = 0$. Итак, получили нужную систему (3.1).

1б) Пусть многочлен $P_n(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ и точки $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ удовлетворяют системе (3.1). Покажем, что тогда многочлен P_n наименее уклоняется от нуля. Из первых $n+1$ уравнений системы (3.1) следует, что функция $e^{-x^\alpha} |P_n(x)|$ достигает своего супремума в точках $0, x_1, \dots, x_n$, в которых значения выражений $e^{-x_i^\alpha} P_n(x_i)$ последовательно противоположны. В силу теоремы 2.2 отсюда следует, что многочлен P_n является наименее уклоняющимся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$.

2) Существование и единственность решения системы (3.1) следует из доказанного пункта 1 данной теоремы и из теоремы 2.2.

3) Если взять любое решение системы (3.1) и положить $h_n = \|P_n\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, то получим решение системы (3.2). Поэтому третье утверждение нашей теоремы следует из второго, которое уже доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

4. Асимптотические свойства многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме

В данном параграфе мы переформулируем для нормы $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ некоторые результаты, полученные в [10] для нормы $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$, а также сравниваем полученные факты со свойствами многочленов, наименее уклоняющихся от нуля на луче $[0, +\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1, [0, +\infty)}$, доказанные ещё раньше в работе [9].

Для перехода от нормы $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$ к норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Тогда верны следующие утверждения:

1) Многочлены степеней n и $2n$, которые наименее уклоняются от нуля по нормам $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$ и $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$ соответственно, связаны равенством

$$T_n(\alpha, [0, +\infty), x) = T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}, \sqrt{x}) \quad \text{при всех } x \geq 0. \quad (4.1)$$

2) Имеет место равенство

$$E_n(\alpha, [0, +\infty)) = E_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}). \quad (4.2)$$

3) Обозначим через $\xi_n(\alpha, [0, +\infty))$ и $\xi_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})$ наибольшие точки альтернанса, соответствующие экстремальным многочленам $T_n(\alpha, [0, +\infty))$ и $T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})$ соответственно. Тогда

$$\xi_n(\alpha, [0, +\infty)) = (\xi_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}))^2. \quad (4.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из замечания 1.1 следует, что многочлен $T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})$ есть многочлен наилучшего приближения степени $2n - 1$ для функции $f(t) = t^{2n}$ по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$. В силу теоремы 2.3 он единственен. Поскольку приближаемая функция является чётной, то многочлен $T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})$ также является чётным, т.е. имеет вид $T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}; t) = t^{2n} - a_{n-1}t^{2n-2} - \dots - a_1t^2 - a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Поэтому верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}) &= \|T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})\|_{2\alpha, \mathbb{R}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|^{2\alpha}} |t^{2n} - a_{n-1}t^{2n-2} - \dots - a_1t^2 - a_0| = \\ &= \inf_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}} \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|^{2\alpha}} |t^{2n} - c_{n-1}t^{2n-2} - \dots - c_1t^2 - c_0|. \end{aligned}$$

Сделаем здесь замену $t^2 = x \in [0, +\infty)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} E_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}) &= \|T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R})\|_{2\alpha, \mathbb{R}} = \sup_{x \in [0, +\infty)} e^{-x^\alpha} |x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0| = \\ &= \inf_{c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, +\infty)} e^{-x^\alpha} |x^n - c_{n-1}x^{n-1} - \dots - c_1x - c_0|. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0 = T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}; \sqrt{x})$ степени n является наименее уклоняющимся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$. Таким образом, $T_n(\alpha, [0, +\infty), x) = T_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}, \sqrt{x})$ при всех $x \in [0, +\infty)$, т.е. равенство (4.1) доказано. Отсюда и из формулы (4.4) вытекают равенства (4.2) и (4.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В работе [10] авторы получили, в частности, следующие результаты: указали отрезки, на которых лежат все точки альтернанса многочленов $T_n(\alpha, \mathbb{R})$, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$ (в следствии 2.8 на странице 211); нашли асимптотику величин $E_n(\alpha, \mathbb{R})$ (в теореме 2.9 на странице 211); нашли предельное распределение корней многочленов $T_n(\alpha, \mathbb{R})$ (в теореме 2.10 на странице 212); а также вывели асимптотику наибольшей точки альтернанса $\xi_n(\alpha, \mathbb{R})$ (в следствии 2.11 на странице 212). Объединив упомянутые результаты в одно утверждение, их можно изложить следующим образом.

Теорема 4.1 (Мхаскар, Сафф [10]). Пусть $\alpha > 0$. Тогда

1) При любом $n \in \mathbb{N}$ все точки альтернанса многочлена $T_n(\alpha, \mathbb{R})$, наименее уклоняющегося от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, \mathbb{R}}$, лежат на отрезке $[-(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}, (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}]$, где $\lambda_\alpha = 2^{2-\alpha}\Gamma(\alpha)/\Gamma^2(\alpha/2)$ и $\Gamma(\alpha)$ – это гамма-функция Эйлера.

$$2) (E_n(\alpha, \mathbb{R}))^{1/n} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{n}{e\lambda_\alpha} \right)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[c, d] \subset [-1; 1]$ обозначим через $\mathcal{N}_n(\alpha, \mathbb{R}, [(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c, (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d])$ количество корней многочлена $T_n(\alpha, \mathbb{R})$, лежащих на отрезке $[(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c, (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d]$. Тогда

$$\mathcal{N}_n(\alpha, \mathbb{R}, [(n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}c, (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha}d]) \sim n \int_c^d v_\alpha(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$v_\alpha(t) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{|t|}^1 \frac{y^{\alpha-1}}{\sqrt{y^2-t^2}} dy \quad \text{при каждом } t \in [-1; 1]. \quad (4.5)$$

$$4) \xi_n(\alpha, \mathbb{R}) \sim (n/\lambda_\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Замечание 4.1. Предельные распределения корней и точек альтернанса многочленов, наименее уклоняющихся от нуля по экспоненциальной норме, совпадают, так как их корни чередуются с точками альтернанса, а значит на любом отрезке количество корней отличается от количества точек альтернанса не более, чем на единицу.

Из этих результатов, с учетом леммы 4.1, вытекает следующая теорема о свойствах многочленов $T_n(\alpha, [0, +\infty))$, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$:

Теорема 4.2. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

1) При любом $n \in \mathbb{N}$ все точки альтернанса многочлена $T_n(\alpha, [0, +\infty))$, наименее уклоняющегося от нуля по норме $\|\cdot\|_{\alpha, [0, +\infty)}$, лежат на отрезке $[0; (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}]$, где $\mu_\alpha = \lambda_{2\alpha}/2 = 2^{1-2\alpha}\Gamma(2\alpha)/\Gamma^2(\alpha)$.

$$2) (E_n(\alpha, [0, +\infty)))^{1/n} \sim \frac{1}{4} \left(\frac{n}{e\mu_\alpha} \right)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[a, b] \subset [0; 1]$ обозначим через $\mathcal{N}_n(\alpha, [0, +\infty), [(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a, (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b])$ количество точек альтернанса многочлена $T_n(\alpha, [0, +\infty))$ на отрезке $[(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a, (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]$. Тогда

$$\mathcal{N}_n(\alpha, [0, +\infty), [(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a, (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]) \sim n \int_a^b w_\alpha(s) ds \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $w_\alpha(s) = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{s}} \int_s^1 \frac{z^{\alpha-1}}{\sqrt{z-s}} dz$ при каждом $s \in [0; 1]$.

$$4) \xi_n(\alpha, [0, +\infty)) \sim (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) В силу пункта 1 теоремы 4.1 и формулы (4.3), у экстремального многочлена $T_n(\alpha, [0, +\infty))$ все точки альтернанса расположены на отрезке $[0; (2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}] = [0; (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}]$.

2) Из формулы (4.2) и пункта 2 теоремы 4.1 следует, что

$$(E_n(\alpha, [0, +\infty)))^{1/n} = \left((E_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}))^{1/(2n)} \right)^2 \sim \frac{1}{4} \left(\frac{2n}{e\lambda_{2\alpha}} \right)^{1/\alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{n}{e\mu_\alpha} \right)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

3) Из формулы (4.1) и пункта 3 теоремы 4.1 следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(\alpha, [0, +\infty), [(n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}a, (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha}b]) &= \\ &= \mathcal{N}_n(\alpha, [0, +\infty), [(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}a, (2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha}b]) = \\ &= 2\mathcal{N}_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}, [(2n/\lambda_{2\alpha})^{1/(2\alpha)}\sqrt{a}, (2n/\lambda_{2\alpha})^{1/(2\alpha)}\sqrt{b}]) \sim 4n \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} v_{2\alpha}(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

После замены $t = \sqrt{s}$ в интеграле, правая часть этой формулы примет вид $n \int_a^b \frac{v_{2\alpha}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} ds = n \int_a^b w_\alpha(s) ds$, где $w_\alpha(s) = \frac{2v_{2\alpha}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$. Применяя формулу (4.5) и делая там интегральную замену $y = \sqrt{z}$, при каждом $x \in [0; 1]$ получим:

$$w_\alpha(s) = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{s}} \int_{\sqrt{s}}^1 \frac{y^{2\alpha-1}}{\sqrt{y^2-s}} dy = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{s}} \int_s^1 \frac{z^{\alpha-1}}{\sqrt{z-s}} dz.$$

4) Из формулы (4.3) и пункта 4 теоремы 4.1 следует, что

$$\xi_n(\alpha, [0, +\infty)) = (\xi_{2n}(2\alpha, \mathbb{R}))^2 \sim (2n/\lambda_{2\alpha})^{1/\alpha} = (n/\mu_\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство завершено.

Для того, чтобы сравнить результаты, описанные в теореме 4.2, с результатами работы [9] Саффа и Варги 1981 года, в которой рассматривался интересующий нас случай $\alpha = 1$, сформулируем отдельно следствие из теоремы 4.2, соответствующее $\alpha = 1$. При этом мы учитываем, что $\mu_1 = \lambda_2/2 = 2^{-1}\Gamma(2)/\Gamma^2(1) = 1/2$.

Следствие 4.1. 1) При любом $n \in \mathbb{N}$ все точки альтернанса экстремального многочлена $T_n(1, [0, +\infty))$ лежат на отрезке $[0; 2n]$.

2) $(E_n(1, [0, +\infty)))^{1/n} \sim \frac{n}{2e}$ при $n \rightarrow \infty$.

3) Для любого натурального числа n и любого отрезка $[a, b] \subset [0; 1]$ количество $\mathcal{N}_n(1, [0, +\infty), [2na, 2nb])$ точек альтернанса многочлена $T_n(1, [0, +\infty))$, лежащих на отрезке $[2na, 2nb]$, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{N}_n(\alpha, [0, +\infty), [2na, 2nb]) \sim n \int_a^b \frac{2\sqrt{1-s}}{\pi\sqrt{s}} ds \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \tag{4.6}$$

4) $\xi_n(1, [0, +\infty)) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 4.1. При $a = 0, b = 1/2$ из формулы (4.6) следует, что при больших n примерно 82% точек альтернанса находятся на отрезке $[0, n]$, и около 18% – на промежутке $(n, 2n]$. Это видно из равенства $\int_0^{1/2} \frac{2\sqrt{1-s}}{\pi\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0.82$.

Пример 4.2. Результат пункта 1 следствия 4.1 имеется в работе 1981 г. [9] (см. теорему 4.2 на стр. 169), где, помимо прочего, для всех $n \in \mathbb{N}$ доказана оценка $\frac{(2n)!}{(2^{3n}n!)} \leq E_n(1, [0, +\infty)) \leq \frac{n!}{2^n}$ (см. теорему 4.3 на стр. 170). Кроме того, в этой работе авторы привели значения для наибольшей точки альтернанса $\xi_n(1, [0, +\infty))$ и для отклонения $E_n(1, [0, +\infty))$ при $n = \overline{1, \overline{11}}$ с 6-ю знаками после запятой. В частности, при $n = 1$ и $n = 2$ они вычислили, что $E_1(1, [0, +\infty)) \approx 0.278465$, $\xi_1(1, [0, +\infty)) \approx 1.278466$, $E_2(1, [0, +\infty)) \approx 0.216916$, $\xi_2(1, [0, +\infty)) \approx 3.009706$. При вычислениях, по словам авторов, они использовали алгоритм Ремеза. Однако подробности вычислений, а также коэффициенты многочленов $T_n(1, [0, +\infty))$ для значений $n = \overline{2, \overline{11}}$ в работе [9] не приведены.

5. Нахождение конкретного вида многочленов первой и второй степени, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1, [0, +\infty)}$

Этот параграф посвящён случаю $\alpha = 1$. В первом подразделе рассмотрен вариант $n = 1$, а в третьем – вариант $n = 2$.

5.1. Нахождение конкретного вида многочлена первой степени, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0, +\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1, [0, +\infty)}$

Применим пункт 3 теоремы 3.1. Будем решать систему (3.2), которая при $n = 1$ примет вид

$$\begin{cases} P_1(0) = -h_1 \\ P_1(x_1) = e^{x_1} h_1 \\ P_1(x_1) - P_1'(x_1) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Поскольку $P_1(x) = x - a_0$ и $P_1'(x) = 1$, то получаем следующую систему уравнений относительно a_0 , x_1 и h_1 :

$$\begin{cases} a_0 = h_1 \\ x_1 - a_0 = e^{x_1} h_1 \\ x_1 - a_0 - 1 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Отсюда $h_1 = a_0$ и $x_1 = a_0 + 1$, где коэффициент a_0 удовлетворяет уравнению

$$a_0 e^{a_0} - \frac{1}{e} = 0. \quad (5.3)$$

Таким образом, можно записать, что $a_0 = W\left(\frac{1}{e}\right)$, где функция $W: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ задается неявно с помощью уравнения $W(z)e^{W(z)} = z$. В работе [17] функция $W(z)$ называется функцией Ламберта.

Точная формула для решения уравнения (5.3) нам неизвестна, но можно решать его приближенно. Поскольку, очевидно, a_0 – это неподвижная точка отображения $[0, +\infty) \ni t \mapsto f(t) = e^{-t-1} \in [0, +\infty)$, то попробуем применить принцип сжимающих отображений. Луч $[0, +\infty)$ является полным метрическим пространством. Положим $q = \sup_{t \in [0, +\infty)} |f'(t)|$. Тогда $q = \sup_{t \in [0, +\infty)} |-e^{-t-1}| = \frac{1}{e} < 1$. Следовательно, отображение f

является сжимающим. В силу принципа сжимающих отображений (см., например, [18], теорема 1.4), f имеет единственную неподвижную точку $t_* = a_0$, которую можно найти как предел итераций: $t_* = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$, где начальную точку $t_0 \in [0, +\infty)$ можно брать произвольно, и $t_k = f(t_{k-1})$ при всех $k \in \mathbb{N}$. При этом для всех $k \in \mathbb{N}$ верна следующая оценка погрешности (см. [18], формула (1.13)):

$$|t_k - t_*| \leq Cq^k, \quad \text{где } C = \frac{|t_1 - t_0|}{1 - q}. \quad (5.4)$$

Положим $t_0 = 0$. Тогда $t_1 = f(t_0) = \frac{1}{e}$ и $t_k = e^{-t_{k-1}-1}$ при всех $k \geq 2$. Следовательно, $C = \frac{1}{e-1}$, откуда $|t_k - t_*| \leq \frac{1}{(e-1)e^k}$. Остается сделать достаточное число итераций, чтобы достигнуть требуемой точности вычислений. Например, если требуется достичь оценки $|t_k - t_*| \leq 10^{-3}$, то достаточно выполнения неравенства $\frac{1}{(e-1)e^k} \leq 10^{-3}$. Отсюда видно, что $k \geq 7$, т.е. достаточно сделать 7 итераций. Приведем вычисления с шестью цифрами после запятой:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{e} \approx 0.367879; & t_2 &= e^{-t_1-1} \approx 0.254646; & t_3 &= e^{-t_2-1} \approx 0.285177; \\ t_4 &= e^{-t_3-1} \approx 0.276602; & t_5 &= e^{-t_4-1} \approx 0.278984; \\ t_6 &= e^{-t_5-1} \approx 0.278320; & t_7 &= e^{-t_6-1} \approx 0.278505. \end{aligned}$$

При этом для погрешности получим оценку $|t_7 - t_*| \leq \frac{1}{(e-1)e^7} < 6 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$.

Итак, $h_1 = a_0 = t_* \approx 0.279$. Отсюда $P_1(x) = x - a_0 \approx x - 0.279$. Кроме того, из третьего уравнения системы (5.2) находим: $x_1 = a_0 + 1 \approx 1.279$.

Поскольку найденное решение системы (5.1) единственно, то, в силу пункта 3 теоремы 3.1, P_1 – искомый многочлен степени 1, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$, т.е. $T_1(1, [0, +\infty)) = P_1$.

Иллюстрация 1. На рис. 5.1 изображены следующие графики: график функции $y = P_1(x)e^{-x} = T_1(1, [0, +\infty); x)e^{-x}$ (сплошной синей линией), а также горизонтальные линии $y = h_1 = \|T_1(1, [0, +\infty))\|_{1,[0,+\infty)}$ и $y = -h_1$ (красным пунктиром). Положение точки альтернанса x_1 показано вертикальной синей пунктирной линией.

О дальнейшем уточнении значения a_0 .

Вычисления показывают, что для достижения погрешности $|t_k - a_0| \leq 10^{-15}$ надо сделать не менее 34 итераций сжимающего отображения f . Для ускорения вычисления значения a_0 с такой точностью, можно применить для решения уравнения (5.3), например, итеративный метод Галлея третьего порядка. В качестве начального приближения можно взять вычисленное ранее значение $w_0 = 0.279$. В общем случае для уравнения $g(w) = 0$ рекуррентная формула метода Галлея выглядит так [12] (в работе изучены условия сходимости этого метода):

$$w_{j+1} = w_j - \frac{g(w_j)}{g'(w_j) - 0.5g''(w_j)g(w_j)/g'(w_j)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В применении к интересующему нас случаю $g(w) = we^w - \frac{1}{e}$, метод Галлея принимает

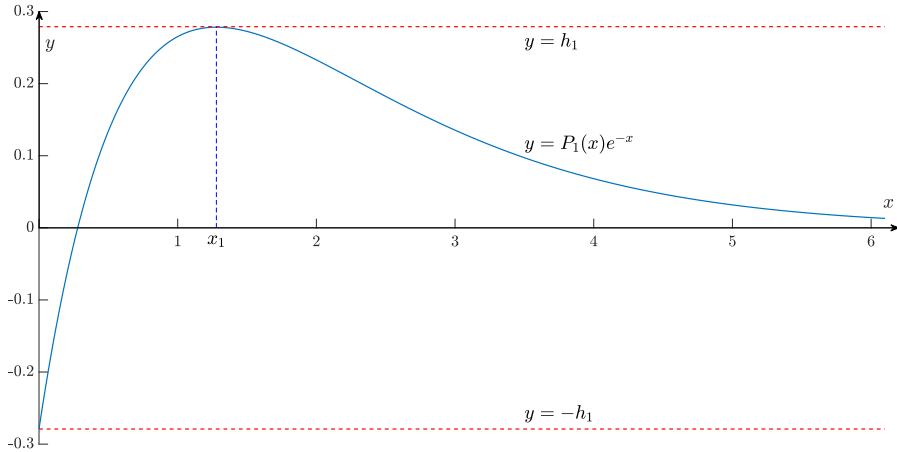


Рис. 5.1. График функции $y = P_1(x)e^{-x} = T_1(1, [0, +\infty); x)e^{-x}$

Fig. 5.1. Graph of the function $y = P_1(x)e^{-x} = T_1(1, [0, +\infty); x)e^{-x}$

следующий вид (см. формулу (5.9) на странице 355 в работе [17]):

$$w_{j+1} = w_j - \frac{w_j e^{w_j} - 1/e}{(w_j + 1)e^{w_j} - (w_j + 2)(w_j e^{w_j} - 1/e)/(2w_j + 2)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В соответствии с этой формулой будем иметь (результаты вычисления приводим с пятнадцатью цифрами после запятой): $w_0 = 0.279$; $w_1 \approx 0.278464542761090$; у следующих двух итераций все пятнадцать цифр совпадают: $w_2 \approx w_3 \approx 0.278464542817343$. Таким образом, $a_0 \approx 0.278464542817343$.

5.2. Один вариант метода Ньютона и оценка скорости его сходимости

В следующем подразделе нам понадобится метод Ньютона для решения нелинейного уравнения вида $g(t) = 0$, где $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Из рассуждений в главе 12, §1, пункт 5 (стр. 410-411) книги [19] можно извлечь доказательство следующей теоремы:

Теорема 5.1. Пусть функция $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет непрерывную вторую производную на $[a, b]$, причём $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, $g'(a) > 0$, и $g''(t) > 0$ при всех $t \in [a, b]$. Зададим рекуррентную последовательность $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, положив $t_0 = b$ и

$t_k = t_{k-1} - \frac{g(t_{k-1})}{g'(t_{k-1})}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) уравнение $g(t) = 0$ на отрезке $[a, b]$ имеет единственное решение $t = c$.
- 2) при любых $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $0 \leq t_{k+1} - c \leq t_k - c \leq \frac{g(t_k)}{g'(a)}$.
- 3) при любом $t \in [a, b]$ верно неравенство $|t - c| \leq \frac{|g(t)|}{g'(a)}$.

5.3. Нахождение конкретного вида многочлена второй степени, наименее уклоняющегося от нуля на луче $[0, +\infty)$ по норме $\|\cdot\|_{1,[0,+\infty)}$

При $n = 2$ снова применим пункт 3 теоремы 3.1. Система (3.2) примет вид:

$$\begin{cases} P_2(0) = h_2 \\ P_2(x_1) = -e^{x_1} h_2 \\ P_2(x_2) = e^{x_2} h_2 \\ P_2(x_1) - P_2'(x_1) = 0 \\ P_2(x_2) - P_2'(x_2) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Подставляя сюда $P_2(x) = x^2 - a_1x - a_0$ и $P_2'(x) = 2x - a_1$, придём к следующей нелинейной системе относительно a_0 , x_1 , x_2 и h_2 , где $0 < x_1 < x_2$ и $h_2 > 0$:

$$\begin{cases} -a_0 = h_2 \\ x_1^2 - a_1x_1 - a_0 = -e^{x_1} h_2 \\ x_2^2 - a_1x_2 - a_0 = e^{x_2} h_2 \\ x_1^2 - a_1x_1 - a_0 - (2x_1 - a_1) = 0 \\ x_2^2 - a_1x_2 - a_0 - (2x_2 - a_1) = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Находя a_0 и a_1 из последних двух уравнений, а затем подставляя эти выражения в первые три уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} a_0 = x_1 + x_2 - 2 - x_1x_2 \\ a_1 = x_1 + x_2 - 2 \\ h_2 = x_1x_2 - x_1 - x_2 + 2 \\ h_2 = e^{-x_1}(x_2 - x_1 - 2) \\ x_2 - x_1 + 2 = e^{x_2} h_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Подставим в системе (5.7) четвертое уравнение в пятое. Тогда получим равенство

$$x_2 - x_1 + 2 = e^{x_2 - x_1}(x_2 - x_1 - 2). \quad (5.8)$$

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. После замены $\tau = x_2 - x_1$ уравнение (5.8) примет вид $\tau = 2 + (\tau + 2)e^{-\tau}$. Отсюда следует, что $\tau > 2$. Таким образом, τ является неподвижной точкой отображения $[2, +\infty) \ni t \mapsto f(t) = 2 + (t + 2)e^{-t} \in [2, +\infty)$. Поэтому для его вычисления попробуем и здесь применить принцип сжимающих отображений. Найдем коэффициент сжатия q . Поскольку $f'(t) = -(t + 1)e^{-t} < 0$ и $f''(t) = te^{-t} > 0$ при всех $t \geq 2$, то функция f' возрастает, поэтому $q = \sup_{t \in [2, +\infty)} |f'(t)| = |f'(2)| = \frac{3}{e^2} < 1$.

Следовательно, отображение f – сжимающее, а значит (см. [18], теорема 1.4) оно имеет единственную неподвижную точку τ , которую можно вычислить как предел итераций: $\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$, где $t_k = f(t_{k-1})$ при всех $k \in \mathbb{N}$. При этом для всех $k \in \mathbb{N}$ верна оценка погрешности (5.4).

Положим $t_0 = 2$. Тогда $t_1 = f(t_0) = 2 + 4e^{-2}$ и $t_k = 2 + (t_{k-1} + 2)e^{-t_{k-1}}$ при всех $k \geq 2$, причём $|t_k - \tau| \leq \frac{4}{e^2} \cdot \left(\frac{3}{e^2}\right)^k$. Например, для получения оценки погрешности

$|t_k - \tau| \leq 10^{-4}$ достаточно потребовать, чтобы $\frac{4}{e^2} \cdot \left(\frac{3}{e^2}\right)^k \leq 10^{-4}$. Отсюда следует, что $k \geq 10$. Приведем начало и конец вычислений с шестью цифрами после запятой: $t_1 = 2 + 4e^{-2} \approx 2.541341$; $t_2 = f(t_1) \approx 2.357679$; ...; $t_{10} = f(t_9) \approx 2.399357$.

При этом для погрешности верна оценка $|\Delta\tau| = |t_{10} - \tau| \leq \frac{4}{e^2} \cdot \left(\frac{3}{e^2}\right)^{10} < 7 \cdot 10^{-5}$.

Итак, $\tau = x_2 - x_1 \approx \tilde{\tau} = 2.39936$.

Для вычисления точек x_1 и x_2 приравняем правые части третьего и четвертого уравнений системы (5.7), подставив в них равенство $x_2 = x_1 + \tau$. Получим следующее уравнение для x_1 : $x_1^2 + (\tau - 2)(x_1 - 1 - e^{-x_1}) = 0$. Таким образом, x_1 — это положительный корень уравнения $f(t) = 0$, где отображение $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой $f(t) = t^2 + (\tau - 2)(t - 1 - e^{-t})$. Имеем: $f(0) = -2(\tau - 2) < 0$, $f(1) = 1 - (\tau - 2)e^{-1} < 0$, $f'(t) = 2t + (\tau - 2)(1 + e^{-t}) > 0$ при всех $t \geq 0$. Поэтому функция f имеет единственный положительный корень, причём этот корень лежит на отрезке $[0; 1]$.

Далее хотелось бы применить теорему 5.1 для отрезка $[a, b] = [0; 1]$ в случае, когда $g = f$. Но мы не можем воспользоваться данной теоремой в полном объёме, поскольку величину $\tau \approx \tilde{\tau} = 2.39936$, а значит и функцию $f(t) = t^2 + (\tau - 2)(t - 1 - e^{-t})$, мы знаем лишь приближённо. Поэтому на первом этапе вместо последовательности $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ построим последовательность $\{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots\}$ для приближенного варианта функции $f(t)$, а именно, для функции $\tilde{f}(t) = t^2 + (\tilde{\tau} - 2)(t - 1 - e^{-t})$. Итак, положим: $\tilde{t}_0 = 1$ и

$$\tilde{t}_k = \tilde{t}_{k-1} - \frac{\tilde{f}(\tilde{t}_{k-1})}{\tilde{f}'(\tilde{t}_{k-1})} = \tilde{t}_{k-1} - \frac{\tilde{t}_{k-1}^2 + (\tilde{\tau} - 2)(\tilde{t}_{k-1} - 1 - e^{-\tilde{t}_{k-1}})}{2\tilde{t}_{k-1} + (\tilde{\tau} - 2)(1 + e^{-\tilde{t}_{k-1}})} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

для $k = 0, 1, 2, \dots$. В частности, получим (приводим результаты вычислений с шестью цифрами после запятой): $\tilde{t}_1 \approx 0.664982$; $\tilde{t}_2 \approx 0.611731$; $\tilde{t}_3 \approx 0.610351$.

На втором этапе для оценки погрешности $|\tilde{t}_3 - x_1|$ воспользуемся неравенством из третьего пункта теоремы 5.1, примененной к функции f : $|\tilde{t}_3 - x_1| \leq \frac{|f(\tilde{t}_3)|}{f'(0)}$. Сначала оценим $|f(\tilde{t}_3)|$. Имеем: $\tau = \tilde{\tau} + \Delta\tau$, где $\Delta\tau < 7 \cdot 10^{-5}$. Поэтому

$$|f(\tilde{t}_3)| = |\tilde{t}_3^2 + (\tilde{\tau} + \Delta\tau - 2)(\tilde{t}_3 - 1 - e^{-\tilde{t}_3})| \leq |\tilde{t}_3^2 + (\tilde{\tau} - 2)(\tilde{t}_3 - 1 - e^{-\tilde{t}_3})| + |\Delta\tau| \cdot |\tilde{t}_3 - 1 - e^{-\tilde{t}_3}| \leq |f(\tilde{t}_3)| + 7 \cdot 10^{-5} \cdot |\tilde{t}_3 - 1 - e^{-\tilde{t}_3}|.$$

Кроме того, $f'(0) = 2(\tau - 2) > 2(2.399 - 2) = 0.798$. Поэтому

$$|\tilde{t}_3 - x_1| \leq \frac{|f(\tilde{t}_3)|}{f'(0)} \leq \frac{|f(\tilde{t}_3)| + 7 \cdot 10^{-5} \cdot |\tilde{t}_3 - 1 - e^{-\tilde{t}_3}|}{0.798} < 9 \cdot 10^{-5}.$$

Итак, $x_1 \approx 0.61035$, причём $|\Delta x_1| = |\tilde{t}_3 - x_1| < 9 \cdot 10^{-5}$.

Теперь можно найти точку x_2 : $x_2 = x_1 + \tau \approx 0.61035 + 2.39936 = 3.00971$.

Для вычисления коэффициентов a_0 и a_1 подставим в первое и второе уравнения системы (5.7) вместо x_2 выражение $x_1 + \tau$. После преобразований придём к равенствам

$$\begin{cases} a_0 = x_1(2 - x_1) + \tau(1 - x_1) - 2, \\ a_1 = 2x_1 + \tau - 2. \end{cases}$$

Отсюда найдем приближённые значения для a_0 и a_1 :

$$\begin{cases} a_0 \approx 0.61035(2 - 0.61035) + 2.39936(1 - 0.61035) - 2 \approx -0.216916; \\ a_1 \approx 2 \cdot 0.61035 + 2.39936 - 2 = 1.62006. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы (5.6) видим, что $h_2 = -a_0 \approx 0.217$.

Далее оценим погрешности вычисления величин a_0 и a_1 :

$$\begin{cases} |\Delta a_0| \leq |\Delta x_1| \cdot |2 - x_1| + |x_1| \cdot |\Delta x_1| + |\Delta \tau| \cdot |1 - x_1| + |\tau| \cdot |\Delta x_1| < 5 \cdot 10^{-4} \\ |\Delta a_1| \leq 2|\Delta x_1| + |\Delta \tau| < 3 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$

Итак, решение системы (5.5) единственно. Поэтому в силу пункта 3 теоремы 3.1, P_2 – искомый многочлен степени 2, наименее уклоняющийся от нуля по норме $\| \cdot \|_{1,[0,+\infty)}$, т.е. $T_2(1, [0, +\infty; x]) = P_2(x) = x^2 - a_1x - a_0 \approx x^2 - 1.620x + 0.217$.

Иллюстрация 2. На рис. 5.2 изображены следующие графики: график функции $y = P_2(x)e^{-x} = T_2(1, [0, +\infty; x])e^{-x}$ (сплошной синей линией), а также прямые $y = h_2 = \|T_2(1, [0, +\infty])\|_{1,[0,+\infty)}$ и $y = -h_2$ (красным пунктиром). Положение точек альтернанса x_1 и x_2 показано вертикальными пунктирными синими линиями.

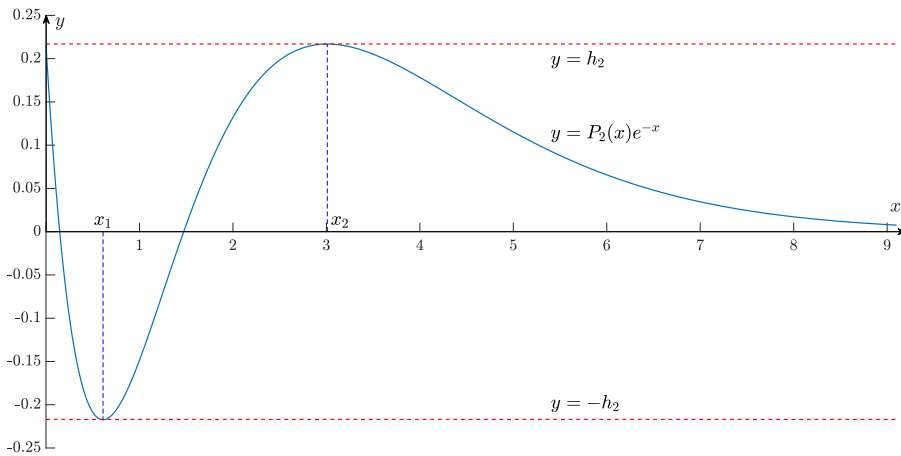


Рис. 5.2. График функции $y = P_2(x)e^{-x} = T_2(1, [0, +\infty; x])e^{-x}$

Fig. 5.2. Graph of the function $y = P_2(x)e^{-x} = T_2(1, [0, +\infty; x])e^{-x}$

Иллюстрация 3. На рис. 5.3 изображены: график многочлена $y = P_2(x)$ (сплошной синей линией), а также графики $y = h_2e^x$ и $y = -h_2e^{-x}$ (красным пунктиром). Положение точек альтернанса x_1 и x_2 показано синим пунктиром.

6. Дальнейшее направление исследований

В дальнейшем планируется распространить результаты, полученные для случаев $n = 1$ и $n = 2$ на более общий вариант.

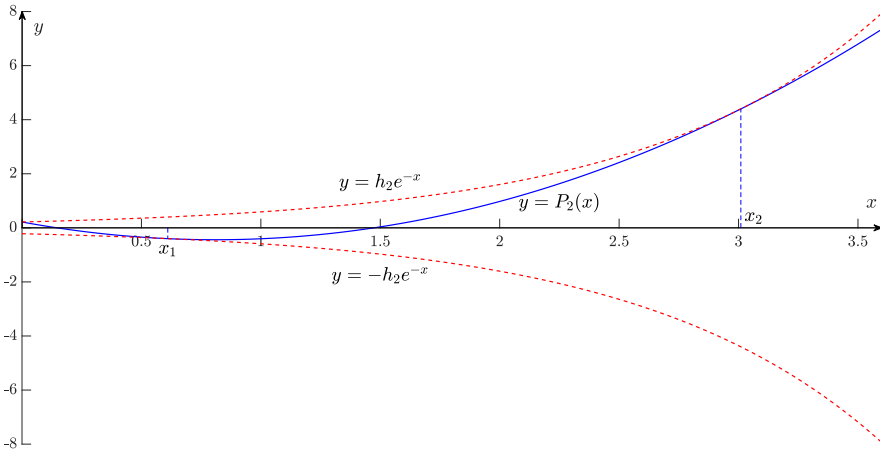


Рис. 5.3. График функции $y = P_2(x) = T_2(1, [0, +\infty; x])$

Fig. 5.3. Graph of the function $y = P_2(x) = T_2(1, [0, +\infty; x])$

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chebyshev P. L. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. Mémoires présentés à l'Académie des sciences de St.-Petersbourg par divers savants. 1854. Vol. VII. P. 539–568.
2. Korkine A., Zolotareff G. Sur un certain minimum. Nouvelles Annales de Mathématiques: 2e série. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire. 1873. Vol. 12. P. 337–355.
3. Бабенко В. Ф., Кофанов В. А. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в пространствах L_p // *Матем. заметки*. 1985. Т. 37, № 2. С. 176–185.
4. Fischer V. Chebyshev polynomials for disjoint compact sets. *Constr. Approx.* 1992. Vol. 8. P. 309–329. DOI: 10.1007/BF01279022
5. Peherstorfer F. Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane. *Constr. Approx.* 1996. Vol. 12, No. 4. P. 481–488. DOI: 10.1007/BF02437504
6. Байрамов Э. Б. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2018. Т. 24, № 3. С. 5–15.
7. Пестовская А. Э. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с ограничением на расположение корней // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2022. Т. 28, № 3. С. 166–175.

8. Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias T. M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Comp., 1994. 821 p.
9. Saff E. B., Varga R. S. On incomplete polynomials. II. *Pacific J. Math.* 1981. Vol. 92, No. 1. P. 161–172. DOI: 10.2140/pjm.1981.92.161
10. Mhaskar H. N., Saff E. B. Extremal problems for polynomials with exponential weights. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. Vol. 285. P. 203–234. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0748838-0>
11. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышёвского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 625 с.
12. Alefeld G. On the convergence of Halley’s method. *Amer. Math. Monthly.* 1981. Vol. 88. P. 530–536.
13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
14. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной действительной переменной. М.: ОНТИ, 1937. 205 с.
15. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
16. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: Физико-математическая литература, 2000. 272 с.
17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W Function. *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5. P. 329–359.
18. Дерр В. Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2016. 464 с.
19. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Физматлит, 2021. 648 с.

*Поступила 04.12.2025; доработана после рецензирования 16.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. P. L. Chebyshev, “Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes”, *Mémoires présentés à l’Académie des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants*, VII (1854), 539–568.
2. A. Korkine, G. Zolotareff, “Sur un certain minimum”, *Nouvelles Annales de Mathématiques: 2e série*, 12 (1873), 337–355.

3. V. F. Babenko, V. A. Kofanov, “Polynomials of fixed sign that deviate least from zero in the spaces L_p ”, *Matem. Zametki*, **37**:2 (1985), 176–185 (In Russ.).
4. B. Fischer, “Chebyshev polynomials for disjoint compact sets”, *Constr. Approx.*, **8**:3 (1992), 309–329. DOI: 10.1007/BF01279022
5. F. Peherstorfer, “Minimal polynomials for the compact sets of the complex plane”, *Constr. Approx.*, **12**:4 (1996), 481–488. DOI: 10.1007/BF02437504
6. E. B. Bayramov, “Polynomials least deviating from zero on a square of the complex plane”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **307** (2019), 13–22 (In Russ.). DOI: 10.1134/S0081543819070022
7. A. E. Pestovskaya, “Polynomials least deviating from zero with a constraint on the location of roots”, *Trudi Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, **28**:3 (2022), 166–175 (In Russ.).
8. G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, T. M. Rassias, *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Publ. Comp., Singapore, 1994, 821 p.
9. E. B. Saff, R. S. Varga, “On incomplete polynomials. II”, *Pacific J. Math.*, **92**:1 (1981), 161–172. DOI: 10.2140/pjm.1981.92.161
10. H. N. Mhaskar, E. B. Saff, “Extremal problems for polynomials with exponential weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285** (1984), 203–234.
11. E. Ya. Remez, [*Fundamentals of numerical methods of Chebyshev approximation*], Naukova Dumka, Kyiv, 1969 (In Russ.), 625 p.
12. G. Alefeld, “On the convergence of Halley’s method”, *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 530–536.
13. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, [*Numerical methods [Electronic resource]*], BINOM Laboratoriya Znaniy, Moscow, 2015 (In Russ.), 639 p.
14. S. N. Bernshtein, [*Extreme properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable*], ONTI, Moscow, 1937 (In Russ.), 205 p.
15. V. K. Dzyadik, *Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 512 p.
16. A. I. Kostrikin, [*Introduction to Algebra. Part 1. Fundamentals of algebra*], Fiziko-matematicheskaya literatura, Moscow, 2000 (In Russ.), 272 p.
17. R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, “On the Lambert W Function”, *Adv. Comput. Math.*, **5** (1996), 329–359.
18. V. Ya. Derr, *Functional analysis. Lectures and exercises*, Knorus, Moscow, 2016 (In Russ.), 464 p.
19. V. A. Ilin, E. G. Pozdnyak, *Fundamentals of mathematical analysis. Part 1*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2021 (In Russ.), 648 p.

Submitted 04.12.2025; Revised 16.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4

Построение функционала по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями

П. Е. Маковеева, А. В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. В работе к линейному уравнению параболического типа с однородными граничными условиями применяется метод функционалов Ляпунова. В рамках этого подхода строится функционал, производная которого вдоль решений системы представляет собой заданную отрицательно определённую квадратичную форму. Ключевую роль в построении функционала играет матрица Ляпунова, исследованию которой посвящена значительная часть работы. В статье предложены два определения данной матрицы. Первое основано на представлении ее в виде ряда. Второе, альтернативное, связывает матрицу Ляпунова с функцией Грина для соответствующего стационарного уравнения. Показана совместимость предложенных определений и доказано, что любая функция, удовлетворяющая второму определению, одновременно удовлетворяет и первому, что подтверждает согласованность двух подходов. Важным преимуществом второго определения является его конструктивность: оно позволяет получить явное аналитическое выражение для матрицы Ляпунова при произвольных параметрах краевой задачи. Кроме того, показано, что данный подход даёт возможность строить функционалы с заданной производной без требования экспоненциальной устойчивости, что существенно расширяет область его применения.

Ключевые слова: матрица Ляпунова, уравнение параболического типа, функционал Ляпунова, функционал с заданной производной, экспоненциальная устойчивость

Для цитирования: Маковеева П. Е., Егоров А. В. Построение функционала по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 31–47. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47

Об авторах:

Маковеева Полина Евгеньевна, аспирант факультета прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2846-4829>, p.e.makoveeva@spbu.ru

Егоров Алексей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7671-2467>, alexey.egorov@spbu.ru

© П. Е. Маковеева, А. В. Егоров



MSC2020 35K10

Construction of a functional with a prescribed derivative for a linear parabolic equation with homogeneous boundary conditions

P. E. Makoveeva, A. V. Egorov

St. Petersburg State University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The Lyapunov functional method is applied to a linear parabolic-type equation with homogeneous boundary conditions. Within this framework, a Lyapunov functional is constructed whose derivative along the solutions of the system is a prescribed negative definite quadratic form. A central role in this construction is played by the Lyapunov matrix, whose properties are investigated in detail. In the paper, two definitions of the Lyapunov matrix are proposed. The first one is based on its representation in the form of a series. The second alternative definition relates the matrix to the Green's function for a corresponding stationary equation. The consistency of the proposed definitions is established, and it is proved that any function satisfying the second definition simultaneously satisfies the first one, thereby confirming the equivalence of the two approaches. An important advantage of the second definition lies in its constructive nature: this makes it possible to derive an explicit analytical representation of the Lyapunov matrix for arbitrary parameters of the boundary value problem. Moreover, it is shown that this approach allows construction of Lyapunov functionals with a prescribed derivative without imposing the requirement of exponential stability. This significantly broadens the scope of potential applications.

Keywords: Lyapunov matrix, parabolic equation, Lyapunov functional, functional with a prescribed derivative, exponential stability

For citation: P. E. Makoveeva, A. V. Egorov. Construction of a functional with a prescribed derivative for a linear parabolic equation with homogeneous boundary conditions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 31–47. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.31-47

About the authors:

Polina E. Makoveeva, Postgraduate Student, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia) ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2846-4829>, p.e.makoveeva@spbu.ru

Alexey V. Egorov, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Department of Control Theory, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7671-2467>, alexey.egorov@spbu.ru

1. Введение

Уравнения параболического типа занимают центральное место в математической физике, моделируя широкий круг явлений и процессов. Среди наиболее известных приложений можно отметить процессы теплопроводности [1], диффузии и распространения

волн в вязких средах [2–3]. Основные результаты, касающиеся существования, единственности и устойчивости решений уравнений такого типа, подробно представлены в классических работах [4–5].

Для исследования динамических систем широко применяются методы Ляпунова [6]. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений ключевым инструментом анализа устойчивости являются функции Ляпунова. В случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием [7–8] используется их естественное обобщение – функционалы Ляпунова–Красовского [9]. Аналогичные идеи находят применение и в теории уравнений в частных производных, где строятся функционалы Ляпунова. Они позволяют анализировать устойчивость, получать экспоненциальные оценки решений и формулировать критерии устойчивости краевых задач.

В работах [10–12] был разработан подход к построению функционалов по заданной производной для систем с запаздыванием, при котором сначала задаётся производная функционала вдоль решений системы в виде отрицательно определённой квадратичной формы, а затем по этой производной строится сам функционал.

В настоящей работе будет построен функционал Ляпунова по заданной производной для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями. Ключевым элементом этого функционала является функциональная матрица Ляпунова. В статье предлагаются два определения этой матрицы. Первое естественным образом возникает при построении функционала, матрица Ляпунова представляет собой тригонометрический ряд. Второе, альтернативное, определение связывает матрицу Ляпунова с функцией Грина. Доказана эквивалентность этих определений, что подтверждает внутреннюю согласованность предлагаемого подхода. Существенным преимуществом второго определения является то, что оно позволяет получить явное выражение для матрицы Ляпунова при произвольных параметрах без предположения об экспоненциальной устойчивости исходной задачи. Это существенно расширяет область применения метода и делает его более универсальным.

В работе использованы следующие обозначения: \mathbb{R}, \mathbb{N} – множества вещественных и натуральных чисел соответственно, $\|\cdot\|_{L_2}$ – интегральная норма в пространстве Лебега $L_2((0, 1), \mathbb{R})$; через $\mathbf{C}(\Omega)$ обозначено пространство функций, непрерывных на произвольном множестве $\Omega \in \mathbb{R}^n$; через $\mathbf{C}^2(\Omega)$ – пространство функций, имеющих непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно на Ω ; $\sinh x$, $\cosh x$ и $\coth x$ – гиперболические функции синуса, косинуса и котангенса.

2. Решение краевой задачи

Рассматриваем краевую задачу, содержащую уравнение в частных производных второго порядка, однородные граничные условия, а также соответствующие начальные условия:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) + bu(x, t), & x \in (0, l), t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь начальная функция φ – абсолютно непрерывная с областью определения $[0, 1]$ и значениями из \mathbb{R} , $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ – параметры модели. Далее будем считать $l = 1$, поскольку к этому случаю всегда можно свести задачу посредством масштабирования пространственной переменной x .

Для построения указанного функционала требуется найти решение задачи (2.1) в зависимости от функции φ . Для это применим метод Фурье, следуя методике, изложенной в книге [13].

Решение краевой задачи (2.1) строится методом разделения переменных Фурье. Представим решение в виде произведения

$$u(x, t) = f(x)g(t), \quad (2.2)$$

где $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$.

Подставив (2.2) в (2.1), получим две задачи

$$g'(t) = (b - \mu)g(t) \quad (2.3)$$

и

$$\begin{cases} af''(x) = -\mu f(x), \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Рассмотрим только случай $\mu > 0$, так как при остальных значениях задача (2.4) имеет только тривиальное решение.

Решение задачи Коши для уравнения (2.3) имеет вид

$$g_i(t) = K_i(t)g_i(0), \quad K_i(t) = e^{(b-\mu_i)t}.$$

Решениями краевой задачи (2.4) являются собственные функции

$$f_i(x) = \sin(\pi i x), \quad i \in \mathbb{N},$$

соответствующие собственным значениям $\mu_i = a(\pi i)^2$.

Тогда решение исходной краевой задачи (2.1) представляется в виде ряда по собственным функциям

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \sin(\pi i x) g_i(0),$$

сходимость которого легко доказать для всех $t > 0$, в силу того, что K_i является затухающей экспонентой.

Для того чтобы решение u удовлетворяло начальным условиям, необходимо потребовать выполнения равенств $g_i(0) = \varphi_i$, $i \in \mathbb{N}$, где φ_i – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции φ по системе взаимно ортогональных функций f_1, f_2, \dots

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Лемма 2.1. [13] *Решение краевой задачи (2.1) представимо в виде ряда*

$$u(x, t, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \sin(\pi i x) \varphi_i, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

где коэффициенты разложения в ряд Фурье функции φ имеют вид

$$\varphi_i = 2 \int_0^1 \sin(\pi i x) \varphi(x) dx, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.1. *Состоянием краевой задачи в момент времени $t \geq 0$ будем называть некоторую функцию $\hat{u}(t, \varphi) = u(\cdot, t, \varphi)$ из пространства Лебега $L_2((0, 1), \mathbb{R})$.*

Аргумент φ мы будем опускать для краткости, когда его значение несущественно.

3. Построение функционала v_0

В этом параграфе будет построен функционал v_0 с заданной отрицательно определённой квадратичной производной вдоль решений краевой задачи (2.1):

$$\left. \frac{d}{dt} v_0(\varphi) \right|_{(2.1)} = - \|\varphi\|_{L_2}^2. \quad (3.1)$$

Определение 3.1. Функцию $U(y_1, y_2)$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, которая имеет вид

$$U(y_1, y_2) = H(y_1 - y_2) - H(y_1 + y_2), \quad (3.2)$$

где

$$H(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi i x)}{2a\pi^2 i^2 - 2b}, \quad x \in [-1, 2], \quad (3.3)$$

будем называть матрицей Ляпунова для краевой задачи (2.1).

Замечание 3.1. Заметим, что ряд (3.3) сходится абсолютно и равномерно на $[0, 1]$ при $b \neq a\pi^2 i^2$, $i \in \mathbb{N}$.

Замечание 3.2. Функция U является скалярной функцией двух переменных u , строго говоря, матрицей не является. Однако в этой статье мы следуем терминологии из работ [10] и [11], где аналогичный подход был применён для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Определение 3.2. Краевая задача (2.1) называется экспоненциально устойчивой, если существуют константы $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что для всех начальных функций φ и всех $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\|u(t, \varphi)\|_{L_2} \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_{L_2}.$$

Теорема 3.1. Пусть краевая задача (2.1) экспоненциально устойчива. Если производная вдоль решений этой задачи задана равенством (3.1), то функционал имеет вид

$$v_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(y_2) \int_0^1 U(y_1, y_2) \varphi(y_1) dy_1 dy_2, \quad (3.4)$$

где функция U – матрица Ляпунова.

Доказательство. Производная v_0 вдоль решений краевой задачи (2.1):

$$\frac{d}{dt} v_0(\hat{u}(t, \varphi)) = - \|\hat{u}(t, \varphi)\|_{L_2}^2 = - \int_0^1 u^2(x, t, \varphi) dx. \quad (3.5)$$

Далее подставляем решение (2.5) в (3.5), полученное равенство интегрируем на отрезке $[0, T]$, где $T > 0$, затем выполняем предельный переход, устремляя T к бесконечности:

$$v_0(\varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_i(t) \sin(\pi i x) \varphi_i \right)^2 dx dt.$$

Возводим в квадрат подынтегральное выражение. От двойного суммирования переходим к однократному в силу ортогональности системы синусов. Получаем выражение

$$v_0(\varphi) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} K_i^2(t) \varphi_i^2 \int_0^1 \sin^2(\pi i x) dx dt.$$

Вычислив интеграл от квадрата синуса, поменяв порядок суммирования и интегрирования (что возможно в силу сходимости ряда по признаку Вейерштрасса) и подставив явные выражения для φ_i , $i \in \mathbb{N}$, получим

$$v_0(\varphi) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{2(b-\mu_i)t} dt \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi i y_1) \sin(\pi i y_2) \varphi(y_1) \varphi(y_2) dy_2 dy_1.$$

В силу экспоненциальной устойчивости выполняются неравенства $\mu_i > b$, $i \in \mathbb{N}$, значит, несобственные интегралы сходятся:

$$v_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_i - b)} \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi i y_1) \sin(\pi i y_2) \varphi(y_1) \varphi(y_2) dy_2 dy_1.$$

Меняем порядок интегрирования и суммирования, это возможно, так как представленный ряд сходится по признаку Вейерштрасса. Подставляем явное значение $\mu_i = a(\pi i)^2$ и получаем функцию вида

$$U(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi i y_1) \sin(\pi i y_2)}{a\pi^2 i^2 - b}.$$

Далее, применяя стандартное тригонометрическое тождество для произведения синусов, несложно убедиться, что полученная функция полностью совпадает с матрицей Ляпунова (3.2) из условий теоремы.

Доказательство завершено.

Ниже будет найдена функция, для которой (3.3) является разложением в ряд Фурье. Искать её по определению 3.1 затруднительно. Поэтому далее воспользуемся альтернативным определением матрицы Ляпунова, где она будет построена по функции Грина соответствующей краевой задачи.

4. Альтернативное определение матрицы Ляпунова и дифференцирование функционала v_0

В этом разделе вводится альтернативное определение матрицы Ляпунова, которое позволяет отказаться от предположения об экспоненциальной устойчивости краевой задачи при доказательстве равенства (3.1) для производной квадратичного функционала.

Определение 4.1 (параграф 10 в [14], стр. 38 в [15]). *Функция $G(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, называется функцией Грина одномерной краевой задачи Дирихле.*

$$\begin{cases} au''(y) + bu(y) = f(y), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

если

$$G \in \mathbf{C}([0, 1] \times [0, 1]) \cap \mathbf{C}^2(\{(y_1, y_2) \in (0, 1) \times (0, 1) : y_1 \neq y_2\}),$$

и удовлетворяет следующему набору свойств:

1. Функция G удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a \frac{\partial^2 G(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} + bG(y_1, y_2) = 0, \quad y_1, y_2 \in (0, 1), \quad y_1 \neq y_2.$$

2. Функция G удовлетворяет граничным условиям

$$G(0, y) = G(1, y) = 0, \quad y \in [0, 1].$$

3. Производная функции G имеет скачок

$$\frac{\partial G(y, y+0)}{\partial y_2} - \frac{\partial G(y, y-0)}{\partial y_2} = \frac{1}{a}, \quad y \in (0, 1),$$

где под $+0$ и -0 мы подразумеваем правый и левый пределы соответственно.

Если функция G является функцией Грина краевой задачи Дирихле, то решение задачи (4.1) может быть представлено в виде

$$u(y_1) = \int_0^1 G(y_1, y_2) f(y_2) dy_2, \quad y_1 \in [0, 1].$$

Замечание 4.1. Краевая задача (4.1) в зависимости от значения параметра b сводится к одной из следующих классических задач математической физики:

- при $b > 0$ — одномерному уравнению Гельмгольца;
- при $b < 0$ — одномерному модифицированному уравнению Гельмгольца;
- при $b = 0$ — уравнению Пуассона.

Лемма 4.1 (стр. 43 в [15]). Функция Грина G краевой задачи (4.1) обладает свойством симметрии:

$$G(y_1, y_2) = G(y_2, y_1), \quad y_1, y_2 \in [0, 1].$$

Определение 4.2. Матрицей Ляпунова для краевой задачи (2.1) назовем функцию

$$U(y_1, y_2) = -\frac{1}{2}G(y_1, y_2), \quad y_1, y_2 \in [0, 1].$$

При построении функционала v_0 ранее предполагалась экспоненциальная устойчивость краевой задачи. Теперь же мы отказываемся от этого предположения. Необходимо показать, что производная функционала вдоль решений краевой задачи имеет вид (3.1), опираясь исключительно на определение 4.2 матрицы Ляпунова.

Теорема 4.1. Если функция U определяется через функцию Грина в соответствии с определением 4.2, и при этом функционал имеет вид (3.4), то его производная вдоль решений краевой задачи (2.1) удовлетворяет равенству (3.1).

Доказательство. Рассмотрим функционал v_0 из условия теоремы. Производная вдоль решений краевой задачи (2.1), учитывая лемму 4.1 и определение 4.2, может быть записана следующим образом:

$$\frac{dv_0(\widehat{u}(t))}{dt} = 2a \underbrace{\int_0^1 u(y_2, t) \int_0^1 U(y_1, y_2) u_{y_1 y_1}(y_1, t) dy_1 dy_2}_{=: I_1} + 2b \int_0^1 u(y_2, t) \int_0^1 U(y_1, y_2) u(y_1, t) dy_1 dy_2.$$

Для вычисления производной необходимо к I_1 два раза применить интегрирование по частям, после этого в формуле появятся слагаемые, содержащие частные производные матрицы Ляпунова. Однако из свойств функции Грина и определения 4.2 производная имеет разрыв в точке $y_1 = y_2$, поэтому при втором интегрировании по частям будем разбивать интеграл на интервале $(0, 1)$ на два и рассматривать их на области непрерывности. После первого интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} I_1 = 2a \int_0^1 u(y_2, t) \left[u_{y_1}(1, t) U(1, y_2) - u_{y_1}(0, t) U(0, y_2) \right] dy_2 - \\ - 2a \int_0^1 u(y_2, t) \int_0^{y_2-0} u_{y_1}(y_1, t) \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} dy_1 dy_2 - \\ - 2a \int_0^1 u(y_2, t) \int_{y_2+0}^1 u_{y_1}(y_1, t) \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} dy_1 dy_2. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое формулы (4.2) равно нулю в силу граничных условий функции Грина и определения 4.2. Проинтегрируем по частям полученное выражение второй раз. С учетом непрерывности функции u , полная производная имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_0(\widehat{u}(t))}{dt} = 2a \int_0^1 u(y_2, t) \left[u(0, t) \frac{\partial U(0, y_2)}{\partial y_1} - u(1, t) \frac{\partial U(1, y_2)}{\partial y_1} \right] dy_2 + \\ + 2 \int_0^1 u(y_2, t) \int_0^{y_2-0} u(y_1, t) \left[a \frac{\partial^2 U(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} + b U(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 + \\ + 2 \int_0^1 u(y_2, t) \int_{y_2+0}^1 u(y_1, t) \left[a \frac{\partial^2 U(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} + b U(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 + \\ + 2a \int_0^1 u^2(y_2, t) \left[\frac{\partial U(y_2 + 0, y_2)}{\partial y_1} - \frac{\partial U(y_2 - 0, y_2)}{\partial y_1} \right] dy_2. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Из граничных условий краевой задачи (2.1) следует равенство нулю первого слагаемого формулы (4.3). Второе и третье слагаемые этой формулы обращаются в нуль в силу свойства 1 функции Грина и определения 4.2.

Далее рассматривая последнее слагаемое, учитывая свойство 3 функции Грина и определение 4.2, имеем, что производная функционала удовлетворяет равенству (3.1).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Стоит отметить, что совпадение матрицы Ляпунова для граничной задачи (2.1) для уравнения параболического типа с функцией Грина для соответствующей стационарной задачи (4.1) представляется нетривиальным фактом. Матрица Ляпунова является компонентой функционала, производная которого в силу граничной задачи совпадает с заданным функционалом, тогда как функция Грина входит в представление общего решения задачи Дирихле. Таким образом, указанные объекты имеют принципиально различное функциональное назначение. Обнаруженное соответствие, по-видимому, указывает на наличие более глубокой взаимосвязи, природа которой требует дополнительного исследования.

5. Построение матрицы Ляпунова и функции H

В этом разделе мы вычислим матрицу Ляпунова и покажем, что функция U из определения 4.2, удовлетворяет также исходному определению 3.1.

Идея доказательства заключается в следующем. Сначала мы построим матрицу Ляпунова по определению 4.2, используя свойства функции Грина задачи (4.1). Получим явное выражение для матрицы Ляпунова U . Затем по ней построим вспомогательную функцию H , разложим её в ряд Фурье и сравним результат с рядом (3.3) из определения 3.1.

Построить функцию H по известной матрице Ляпунова U позволяет следующая лемма.

Лемма 5.1. *Если U – матрица Ляпунова из определения 4.2, функция H удовлетворяет уравнению (3.2) и справедливо равенство*

$$\int_0^1 H(s) ds = 0, \quad (5.1)$$

то функция H может быть представлена в виде

$$H(x) = \int_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) ds - U\left(\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{2}\right), \quad x \in [-1, 2]. \quad (5.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в формулу (3.2) $y_1 = y_2 = \frac{x}{2}$ и выразим из нее $H(x)$, получаем

$$H(x) = H(0) - U\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad x \in [0, 2]. \quad (5.3)$$

Из граничных условий функции Грина, определения 4.2 и формулы (3.2) следует, что функция H является четной, так как

$$H(-x) - H(x) = U(0, x) = 0.$$

Поэтому продолжаем функцию H по четности на отрицательный интервал. Остается найти значение $H(0)$. Для этого рассматриваем интеграл (5.1) из условия теоремы

$$\int_0^1 H(s) ds = H(0) - \int_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) ds = 0,$$

отсюда получаем

$$H(0) = \int_0^1 U\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) ds. \quad (5.4)$$

Из равенств (5.3) и (5.4) следует формула (5.2).

Доказательство завершено.

Замечание 5.1. Функция H определяется по формуле (3.2) с точностью до константы. Чтобы в разложении в ряд Фурье функции H свободная константа равнялась нулю, в условие леммы 5.1 добавлено равенство (5.1).

Лемма 5.1 показывает, что для построения функции H необходимо знать функцию U на диагонали.

Заметим, что явный вид функции Грина задачи (4.1), а следовательно и матрицы Ляпунова U , зависит от знака коэффициента b . Поэтому рассмотрим три случая.

5.1. Случай $b > 0$

Как уже было отмечено выше, в этом случае матрица Ляпунова U совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для одномерного уравнения Гельмгольца с однородными условиями Дирихле.

В работе [16] получена явная формула для функции Грина. Тогда, матрица Ляпунова, в соответствии с определением 4.2, имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\sin k(1 - y_2) \sin ky_1}{2ak \sin k}, & y_2 \geq y_1, \\ \frac{\sin k(1 - y_1) \sin ky_2}{2ak \sin k}, & y_2 \leq y_1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Теперь нужно восстановить из нее функцию H , чтобы затем сравнить ее с рядом (3.3) из определения 3.1. Воспользуемся леммой 5.2, которая показывает, что для построения функции H необходимо знать функцию U на диагонали. Из формулы (5.5) следует, что

$$U\left(\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{2}\right) = \frac{1}{2ak} \left(\cos k \frac{x}{2} - \cot k \sin k \frac{|x|}{2} \right) \sin k \frac{|x|}{2}. \quad (5.6)$$

Из формул (5.6) и (5.2) получаем явный вид для функции

$$H(x) = -\frac{1}{4ak} \left(\cot k \cos kx + \sin k|x| - \frac{1}{k} \right), \quad x \in [-1, 2]. \quad (5.7)$$

Теперь мы можем сравнить полученную функцию H и H из определения 3.1, представленную в виде ряда. Сперва заметим, что H является 2-периодической. На отрезке $[-1, 1]$ разложим в ряд Фурье функцию (5.7). Так как она чётная, то коэффициенты

при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Переходим к нахождению коэффициентов при косинусах. Вычисляем все необходимые интегралы. В итоге получаем значения

$$a_i = \frac{1}{2a\pi^2 i^2 - 2b}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Значит, разложение в ряд Фурье функции (5.7) совпадает с рядом (3.3) из определения 3.1.

5.2. Случай $b < 0$

Здесь матрица Ляпунова совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для модифицированного уравнения Гельмгольца с однородными условиями Дирихле, но явного вида функции Грина для этого случая нам найти не удалось. Его несложно построить, используя теорию из книги [14], или же непосредственно, используя свойства функции Грина задачи (4.1) при $b < 0$.

Воспользуемся вторым способом и введём константу $k = \sqrt{-b/a}$. Построим решение уравнения из свойства 1 функции Грина с учётом определения 4.2 в области $y_1 > y_2$. Затем по свойству симметрии функции Грина, а следовательно, и матрицы Ляпунова, продолжим решение на область $y_1 < y_2$. В итоге получаем, что матрица Ляпунова будет иметь вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} C_1(y_2) \exp(ky_1) + C_2(y_2) \exp(-ky_1), & y_2 \geq y_1, \\ C_1(y_1) \exp(ky_2) + C_2(y_1) \exp(-ky_2), & y_2 \leq y_1. \end{cases}$$

Из свойства 3 функции Грина и однородных граничных условий с учетом определения 4.2 находим явное выражение для функции

$$C_1(y) = \frac{1}{4ak} \left(\cosh ky - \coth k \sinh ky \right).$$

В итоге матрица Ляпунова, найденная по определению 4.2, имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\sinh k(1 - y_2) \sinh ky_1}{2ak \sinh k}, & y_2 \geq y_1, \\ \frac{\sinh k(1 - y_1) \sinh ky_2}{2ak \sinh k}, & y_2 \leq y_1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Используя лемму 5.1, найдем явный вид функции H :

$$H(x) = \frac{1}{4ak} \left(\coth k \cosh kx - \sinh k|x| - \frac{1}{k} \right), \quad x \in [-1, 2]. \quad (5.9)$$

Затем разложим функцию (5.9) в ряд Фурье и сравним полученное разложение с рядом из определения 3.1. В силу чётности функции H коэффициенты при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Теперь вычислим коэффициенты при косинусах:

$$a_i = \frac{1}{2a\pi^2 i^2 - 2b}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

5.3. Случай $b = 0$

Из определения 4.2 естественно следует, что в этом случае матрица Ляпунова U совпадает с точностью до мультипликативной константы с функцией Грина для уравнения Пуассона. В работе [14] для параметра $a = -1$ эта функция представлена в виде

$$G(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1(1 - y_2), & y_2 \geq y_1, \\ y_2(1 - y_1), & y_2 \leq y_1. \end{cases}$$

Значит, матрица Ляпунова при $b = 0$ имеет вид

$$U(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{y_1(1 - y_2)}{2a}, & y_2 \geq y_1, \\ \frac{y_2(1 - y_1)}{2a}, & y_2 \leq y_1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Теперь по полученной функции U , используя лемму 5.1, построим

$$H(x) = \frac{1}{4a} \left(\frac{x^2}{2} - |x| + \frac{1}{3} \right), \quad x \in [-1, 2]. \quad (5.11)$$

Далее, как и в предыдущих случаях, разложим функцию (5.11) в ряд Фурье и сравним полученный ряд с формулой (3.3).

Функция (5.11) чётная, следовательно, коэффициенты при синусах равны нулю. По построению H аддитивная константа также равна нулю. Вычислим оставшиеся коэффициенты при косинусах:

$$a_i = \frac{1}{4a} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - |x| + \frac{1}{3} \right) \cos(\pi i x) dx = \frac{1}{2a\pi^2 i^2}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

После рассмотрения трёх случаев, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 5.1. Пусть $k = \sqrt{\frac{|b|}{a}}$. Матрица Ляпунова, построенная по определению 4.2, имеет вид

- (5.5) при $b > 0$ и $\sin k \neq 0$,
- (5.8) при $b < 0$,
- (5.10) при $b = 0$.

В остальных случаях матрицы Ляпунова не существует.

Теорема 5.2. Матрица Ляпунова, определённая через функцию Грина задачи (4.1), также удовлетворяет определению 3.1.

Можно показать, что построенная функция U действительно совпадает с функцией $-\frac{1}{2}G$, где G – функция Грина задачи (4.1). Также нетрудно показать, что она представима в виде разности значений функции H , ряд которой совпадает с рядом из формулы (3.3). Из этих рассуждений можно сформулировать следующий результат.

Теорема 5.3. Определение 3.1 и определение 4.2 эквивалентны.

6. Пример

Рассмотрим краевую задачу (2.1). Отметим, что ее решение будет экспоненциально устойчивым при выполнении следующего условия: $b < a\pi^2$.

Для иллюстрации полученных результатов построим матрицу Ляпунова при различных значениях параметров краевой задачи (2.1).

Рассмотрим случай $b > 0$. На рис. 6.1 представлены графики матрицы U и соответствующей функции H для экспоненциально устойчивой краевой задачи. На рис. 6.2 изображён график U для неустойчивого случая — видно, что часть его лежит в области отрицательных значений. Также отметим, что функция H пересекает ось ординат ниже нуля в отличие от предыдущего случая.

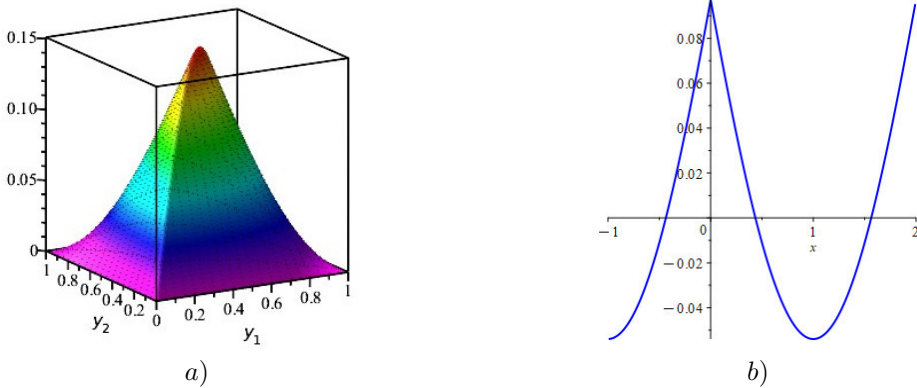


Рис. 6.1. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = 2$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, б) функция $H(x)$

Fig. 6.1. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = 2$:
а) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, б) function $H(x)$

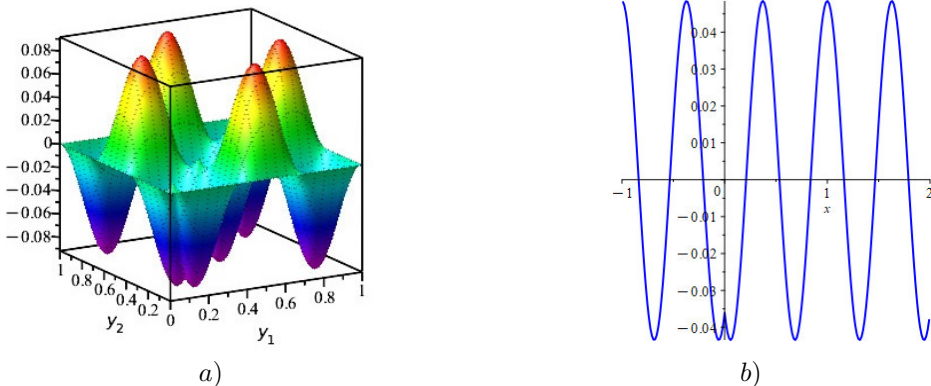


Рис. 6.2. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = 100$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, б) функция $H(x)$

Fig. 6.2. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = 100$:
а) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, б) function $H(x)$

Далее рассмотрим задачу (2.1) при значении параметра $b < 0$, который также соответствует экспоненциально устойчивой краевой задаче. График матрицы Ляпунова приведён на рис. 6.3. Аналогично, при $b = 0$ краевая задача остаётся экспоненциально устойчивой, соответствующие графики U и H представлены на рис. 6.4.

Представленные наблюдения в дальнейшем могут быть использованы для вывода критерия экспоненциальной устойчивости более общей краевой задачи.

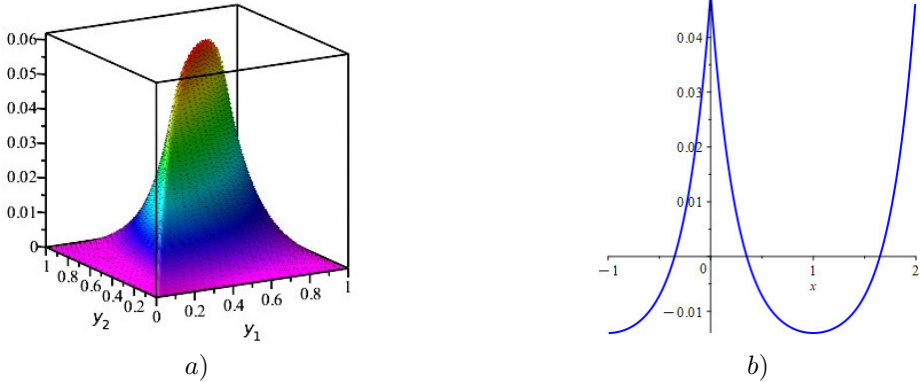


Рис. 6.3. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = -15$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, б) функция $H(x)$

Fig. 6.3. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = -15$:
а) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, б) function $H(x)$

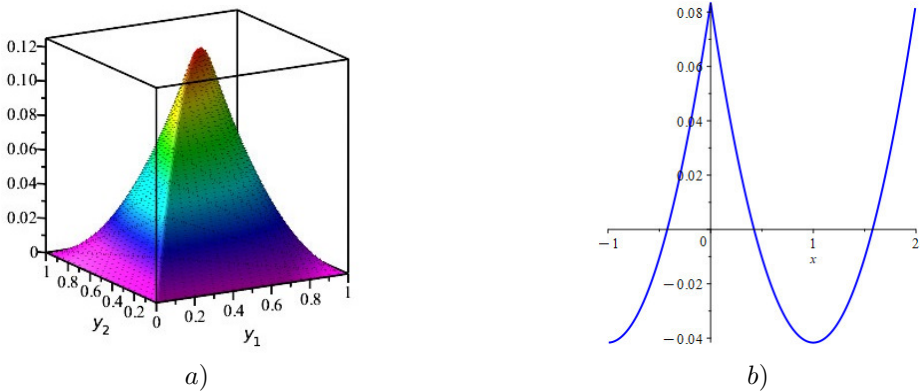


Рис. 6.4. Параметры краевой задачи $a = 1$, $b = 0$:
а) матрица Ляпунова $U(y_1, y_2)$, б) функция $H(x)$

Fig. 6.4. Parameters of the boundary value problem $a = 1$, $b = 0$:
а) Lyapunov matrix $U(y_1, y_2)$, б) function $H(x)$

7. Заключение

В работе для уравнения параболического типа построен функционал с заданной отрицательно определённой производной, ключевым элементом которого является функциональная матрица Ляпунова. В статье введены два определения этой матрицы. Первое возникает непосредственно при построении функционала по заданной производной, матрица Ляпунова представляет собой тригонометрический ряд. Второе определение было сформулировано через функцию Грина для соответствующего стационарного уравнения. На основе второго определения получена явная формула для построения матрицы Ляпунова. Доказано, что всякая функция, удовлетворяющая второму определению, автоматически удовлетворяет и первому. Построенные функционалы и матрицы Ляпунова могут быть применены для исследования устойчивости и робастной устойчивости краевых задач, а также для построения экспоненциальных оценок решений.

Кроме того, полученные в работе результаты могут быть перенесены на уравнения параболического типа с запаздыванием, которые применяются в некоторых прикладных задачах [17], в частности, в биологических системах, где такие уравнения описывают динамику популяции с пространственным распределением и запаздывающей реакцией на изменения окружающей среды [18].

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, <https://rscf.ru/project/23-71-10099/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rogolino P., Kovács R., Ván P., Cimmelli V. A. Generalized heat-transport equations: parabolic and hyperbolic models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2018. Vol. 30, no. 6. P. 1245–1258. DOI: 10.1007/s00161-018-0643-9.
2. Szabo T. L., Wu J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. Vol. 107, no. 5. P. 2437–2446. DOI: 10.1121/1.428630.
3. Rubinow S. I., Keller J. B. Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. Vol. 88, no. 1. P. 181–203. DOI: 10.1017/S0022112078002049.
4. Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Malabar, FL: R. E. Krieger Publishing Co., 1983. 347 p.
5. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968. 648 p.
6. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.
7. Fridman E. New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*. 2001. Vol. 43, no. 4. P. 309–319.
8. Egorov A. V., Mondié S. Necessary stability conditions for linear delay systems. *Automatica*. 2014. Vol. 50, no. 12. P. 3204–3208.

9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 211 с.
10. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*. 2003. Vol. 39, no. 1. P. 15–20.
11. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 316 p.
12. Egorov A. V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10*. 2013. № 1. С. 106–115.
13. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
14. Arfken H., Weber G., Harris F. Mathematical Methods for Physicists. Amsterdam: Elsevier, 2013. 1220 p.
15. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 528 с.
16. de Castro A. S. Green’s function for the one-dimensional Helmholtz equation: closed-form solution from its Fourier sine series. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 2021. Vol. 43. e20210068. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0068.
17. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. Ordinary and Partial Differential Equations with Delay. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2023. 712 p.
18. Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry: Proceedings of a Meeting Held at the University of Utah (May 9–11, 1985). Ed. by H. G. Othmer. Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. 353 p.

*Поступила 25.05.2025; доработана после рецензирования 29.10.2025;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. P. Rogolino, R. Kovács, P. Ván, V. A. Cimmelli, “Generalized heat-transport equations: parabolic and hyperbolic models”, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **30**:6 (2018), 1245–1258. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0643-9>
2. T. L. Szabo, J. Wu, “A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**:5 (2000), 2437–2446. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.428630>
3. S. I. Rubinow, J. B. Keller, “Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid”, *J. Fluid Mech.*, **88**:1 (1978), 181–203. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112078002049>

4. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, R. E. Krieger Publishing Co., Malabar, Fla., 1983, ISBN: 0-89874-660-4, 347 p.
5. O. A. Ladyzhenskaia, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968, ISBN: 978-0-8218-8653-3
6. A. M. Lyapunov, *Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya [The General Problem of Motion Stability]*, GITTL, Moscow–Leningrad, 1950 (In Russ.), 472 p.
7. E. Fridman, “New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems”, *Syst. Control Lett.*, **43**:4 (2001), 309–319.
8. A. V. Egorov, S. Mondié, “Necessary stability conditions for linear delay systems”, *Automatica*, **50**:12 (2014), 3204–3208.
9. N. N. Krasovskii, *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya [Some Problems of the Theory of Motion Stability]*, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., Moscow, 1959 (In Russ.), 211 p.
10. V. L. Kharitonov, A. P. Zhabko, “Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems”, *Automatica*, **39**:1 (2003), 15–20.
11. V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhäuser, Basel, 2013, 316 p.
12. A. V. Egorov, S. Mondié, “A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix”, *Vestn. Saint Petersburg Univ., Ser. 10.*, 2013, no. 1, 106–115.
13. A. D. Polyinin, *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook on Linear Equations of Mathematical Physics]*, FIZMATLIT, Moscow, 2001 (In Russ.), 576 p.
14. H. Arfken, G. Weber, F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, **66**, Elsevier, Amsterdam, 2013, 1220 p.
15. M. A. Naimark, *Lineinye differentsialnye operatory [Linear Differential Operators]*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.
16. de Castro A. S., “Green’s function for the one-dimensional Helmholtz equation: closed-form solution from its Fourier sine series”, *Rev. Bras. Ensino Fís.*, **43** (2021), e20210068.
17. A. D. Polyinin, V. G. Sorokin, A. I. Zhurov, *Ordinary and Partial Differential Equations with Delay*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2023, 712 p.
18. H. G. Othmer (Ed.), *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry: Proceedings of a Meeting Held at the University of Utah, (May 9–11, 1985)*, **66**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, 353 p.

Submitted 25.05.2025; Revised 29.10.2025; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958

Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области

Ж. Ш. Сафаров^{1,2}

¹Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразми (г. Ташкент, Узбекистан)

²Институт Математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан)

Аннотация. В работе исследуются обратные задачи определения ядра, зависящего от временной переменной, в интегральном члене многомерного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. Сначала рассматривается прямая задача при предположении, что ядро интегрального члена известно. С использованием метода Фурье прямая задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно решения. Для решения получены априорные оценки, а также оценки его производных второго порядка. Далее в работе исследуются две обратные задачи. Первая обратная задача связана с определением ядра памяти волнового процесса по интегральному условию переопределения. Во второй обратной задаче ядро интегрального члена определяется по известному значению решения прямой задачи в фиксированной точке. В обоих случаях обратные задачи сводятся к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода типа свертки. С помощью принципа сжимающих отображений доказывается существование и единственность решений обратных задач в пространстве непрерывных функций с весовой нормой, а также устанавливается оценка условной устойчивости решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, метод Фурье, ядро интеграла, спектральная задача, теорема Банаха, неравенство Гронуолла

Для цитирования: Сафаров Ж.Ш. Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области // *Журнал Средневожского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 48–66. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66

Об авторах:

Сафаров Журабек Шакарович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада аль-Хоразми (100084, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Тимура, д. 108), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9249-835X>, j.safarov65@mail.ru

© Ж. Ш. Сафаров



MSC2020 35R30

Problems of Determining the Kernel of an Integro-Differential Equation in a Bounded Domain

J. Sh. Safarov^{1,2}¹ *Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi (Tashkent, Uzbekistan)*² *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics AS of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)*

Abstract. The paper studies the inverse problem of the depending on a time variable kernel of the integral term of a multidimensional hyperbolic-type integro-differential equation. First, a direct problem is investigated, assuming that the kernel of the integral term is known. The Fourier method reduces this problem to solving a Volterra-type integral equation of the second kind with respect to the unknown function. A priori estimates for the desired function and for its second-order derivatives are obtained. Next, two inverse problems are studied. The first is determining the memory kernel of a wave process with an integral overdetermination condition. In the second inverse problem, the kernel of the integral term is found from the known solution of the direct problem at some fixed point. In both cases, the inverse problem is reduced to a nonlinear convolution-type Volterra integral equation of the second kind. The method of contracting mappings is used to prove the unique solvability of the posed inverse problems in the space of continuous functions with weighted norms, and an estimate for the conditional stability of the solution is obtained.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, Fourier method, integral kernel, spectral problem, Banach theorem, Gronwall inequality

For citation: *J. Sh. Safarov. Problems of Determining the Kernel of an Integro-Differential Equation in a Bounded Domain. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:1(2026), 48–66. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.48-66*

About the authors:

Safarov J. Shkarovich, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi (108, Timur St., Tashkent 100084, Uzbekistan), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9249-835X>, j.safarov65@mail.ru

1. Введение и постановка задачи

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика, астрономия и другие. Состояние исследуемой среды, в которой распространяются упругие и электромагнитные волны, в момент времени проведения эксперимента существенно зависит от её состояния во все предшествующие моменты времени. Математически данный эффект учитывается за счёт добавления в правые части классических уравнений распространения волн интегральных членов типа свёртки,

Ж. Ш. Сафаров. Задачи определения ядра интегро-дифференциального уравнения в ограниченной...

описывающих явление запаздывания. В результате возникает необходимость исследования интегро-дифференциальных уравнений.

К настоящему времени исследование обратных задач, посвящённых определению одномерного или многомерного ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения, является объектом научных интересов многих авторов. С различными постановками обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка можно ознакомиться в монографиях и обзорных работах [1, 2].

Следует отметить вклад итальянского математика А. Лоренции и его соавторов, которыми были получены первые фундаментальные результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений [3, 4]. В работах [5–8] исследованы одномерные обратные задачи определения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части либо в граничном условии. Для указанных задач доказаны теоремы существования и единственности решений на основе принципа сжимающих отображений, а также получены оценки условной устойчивости. Подобные задачи с распределёнными источниками возмущений изучены в работах [9, 10], где доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач.

Работы [11–14] посвящены исследованию обратных задач нахождения многомерного ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В этих работах доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости поставленных задач в классе аналитических по пространственным переменным и непрерывных по временной переменной функций.

В настоящей работе исследуются две обратные задачи, заключающиеся в нахождении одномерного ядра свёртки интегрального члена многомерного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором общего вида в главной части. При исследовании первой обратной задачи используется интегральное условие переопределённости, во второй задаче в качестве дополнительного условия выступает след решения прямой задачи в фиксированной точке n -мерной области. Основными результатами работы являются теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач и устойчивости их решений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области $D := \Omega \times (0, T]$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Lu - k \cdot u = g(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (1.1)$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.2)$$

и граничным условиями

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D, \quad (1.3)$$

где $\partial D = \partial\Omega \times [0, T]$, $L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - c(x)$ – равномерный эллиптический оператор ($n \geq 1$), коэффициенты которого удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$, $c(x) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x, t)$ – заданные функции и

$$k \cdot u = \int_0^t k(t - \tau) u(x, \tau) d\tau.$$

Нахождение функции $u(x, t)$ из (1.1)-(1.3) при известной $k(t)$ называется прямой задачей.

Определение 1.1. Решением прямой задачи (1.1)-(1.3) называется функция $u(x, t)$ из класса $C^2(\bar{D})$, удовлетворяющая всем условиям задачи (1.1)-(1.3).

Обратная задача 1. Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t > 0$, если относительно решения прямой задачи (1.1)-(1.3) известна дополнительная информация

$$\Lambda[u(\cdot, t)] = \int_{\Omega} u(x, t)h(x)dx = f(t), t \in [0, T], \quad (1.4)$$

где $h(x)$, $f(t)$ – заданные функции.

В дальнейшем мы покажем, что для разрешимости обратной задачи функция $h(x)$ не должна быть ортогональна функции $\varphi(x)$, т. е. $(h(x), \varphi(x)) \neq 0$, где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Обратная задача 2. Требуется найти ядро $k(t)$ по имеющейся дополнительной информации о решении прямой задачи (1.1)-(1.3) в некоторой точке $x_0 \in \Omega$,

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

где $h(t)$ – заданная функция.

2. Исследование прямой задачи

Исследование прямой задачи начнем с рассмотрения следующей спектральной задачи

$$Lv + \lambda^2 v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.2)$$

Задача (2.1)-(2.2) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $v_m(x)$, $m \geq 1$ и счетное множество положительных собственных значений λ_m [15].

Предположим, что решение задачи (1.1)-(1.3) представляется в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)v_m(x), \quad (2.3)$$

где $v_m(x)$ – собственные функции задачи (2.1)-(2.2), $W_m(t)$ – коэффициенты Фурье, определяемые формулой

$$W_m(t) = (u, v_m) = \int_{\Omega} u(x, t)v_m(x)dx. \quad (2.4)$$

Подставляя ряд (2.3) в уравнения (1.1)-(1.2) относительно функции $W_m(t)$, получим следующую задачу

$$W_m''(t) + \lambda_m^2 W_m(t) - \int_0^t k(t - \theta)W_m(\theta) d\theta = g_m(t), \quad (2.5)$$

$$W_m(0) = \varphi_m, \quad W'_m(0) = \psi_m. \quad (2.6)$$

где

$$\varphi_m = (\varphi, v_m), \quad \psi_m = (\psi, v_m), \quad g_m(t) = (g, v_m)(t),$$

коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x, t)$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m v_m(x), \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m v_m(x), \quad g(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) v_m(x). \quad (2.7)$$

После переноса интегрального члена в правую часть уравнение (2.5) рассматривается как линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с заданной функцией $G_m(t)$. Решение задачи (2.5)-(2.6) будем искать в виде суммы

$$W_m(t) = W_m^{(0)}(t) + W_m^{(1)}(t),$$

где $W_m^{(0)}$ решения задачи

$$W_m^{(0)''} + \lambda_m^2 W_m^{(0)} = 0, \quad W_m^{(0)}(0) = \varphi_m, \quad (W_m^{(0)})'(0) = \psi_m,$$

функция $W_m^{(1)}$ выбирается как решение уравнения (2.5) с нулевыми начальными данными:

$$W_m^{(1)''} + \lambda_m^2 W_m^{(1)} = G_m(t), \quad W_m^{(1)}(0) = 0, \quad (W_m^{(1)})'(0) = 0.$$

Решая эти задачи, получим следующее интегральное уравнение

$$W_m(t) = \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) G_m(s) ds, \quad (2.8)$$

где

$$G_m(t) := g_m(t) + \int_0^t k(t-\theta) W_m(\theta) d\theta. \quad (2.9)$$

Наличие искомой функции под знаком сверточного интеграла в (2.5) не препятствует применению метода функции Коши. Меняется лишь статус получаемого интегрального уравнения: оно становится не просто явной формулой, а интегральным уравнением Вольтерры второго рода относительно функции $W_m(t)$.

Из теории интегральных уравнений следует, что решение интегрального уравнения вольтерровского типа второго рода единственно и может быть получено методом последовательных приближений.

Легко можно получить оценки для $|W_m(t)|$ и $|W_m''(t)|$. Из формулы (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} |W_m(t)| &= \left| \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) G_m(s) ds \right| \leq \\ &\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \left| \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) \left[g_m(s) + \int_0^s k(s-\theta) W_m(\theta) d\theta \right] (s) ds \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|T + \frac{\|k\|}{\lambda_m} \int_0^t (t - \theta) |W_m(\theta)| d\theta. \quad (2.10)$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получим оценку

$$|W_m(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|T \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m}, \quad (2.11)$$

где $\|g_m\| = \max_{0 \leq t \leq T} |g_m(t)|$, $\|k\| = \max_{0 \leq t \leq T} |k(t)|$.

Далее, продифференцировав уравнение (2.8) дважды по переменной t и используя оценку (2.11), получаем следующую оценку для $|W_m''(t)|$

$$|W_m''(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|T \right) \left(\lambda_m^2 + \|k\|T \left(1 + \frac{T}{2} \lambda_m \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m} \right). \quad (2.12)$$

Для дальнейших исследований воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. Пусть $W_m^{(1)}(t)$ и $W_m^{(2)}(t)$ – два решения уравнения (2.8), соответствующие функциям $k^{(1)}(t)$, $k^{(2)}(t)$. Тогда имеет место следующая оценка

$$|W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_m} \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|T \right) e^{(\|k^{(2)}\| + \|k^{(1)}\|)T^2/2\lambda_1} \frac{T^2}{2} \|k^{(1)} - k^{(2)}\|. \quad (2.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы $W_m^{(1)}(t)$, $W_m^{(2)}(t)$ – два решения уравнения (2.8). Рассмотрим модуль разности этих функций

$$\begin{aligned} |W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| &\leq \\ &\leq \left| \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t - \theta) \int_0^\theta \left[k^{(1)}(\tau) W_m^{(1)}(\theta - \tau) - k^{(2)}(\tau) W_m^{(2)}(\theta - \tau) \right] d\tau d\theta \right|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$|\varphi_k^{(1)} \varphi_s^{(1)} - \varphi_k^{(2)} \varphi_s^{(2)}| \leq |\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}| |\varphi_s^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| |\varphi_s^{(1)} - \varphi_s^{(2)}|. \quad (2.15)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} |W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |\sin \lambda_m(t - \theta)| \int_0^\theta \left[|k^{(1)}(\tau)| \left| W_m^{(1)}(\theta - \tau) - W_m^{(2)}(\theta - \tau) \right| + \right. \\ &\quad \left. + |W_m^{(2)}(\theta - \tau)| \left| k^{(1)}(\tau) - k^{(2)}(\tau) \right| \right] d\tau d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |\sin \lambda_m(t - \theta)| \int_0^\theta \left[|W_m^{(2)}(\theta - \tau)| \left| k^{(1)}(\tau) - k^{(2)}(\tau) \right| + \right. \\ &\quad \left. + |k^{(1)}(\tau)| \left| W_m^{(1)}(\theta - \tau) - W_m^{(2)}(\theta - \tau) \right| \right] d\tau d\theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Каждое слагаемое в правой части (2.16) оценим отдельно. Для оценки первого слагаемого воспользуемся формулой (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |\sin \lambda_m(t-\theta)| \int_0^\theta |W_m^{(2)}(\theta-\tau)| |k^{(1)}(\tau) - k^{(2)}(\tau)| d\tau d\theta &\leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \frac{T^2}{2} \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\| T \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m} \|k^{(1)} - k^{(2)}\|, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\|k^{(1)} - k^{(2)}\| = \max_{0 \leq t \leq T} |k^{(1)}(t) - k^{(2)}(t)|$. Для оценки второго слагаемого (2.13), изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |\sin \lambda_m(t-\theta)| \int_0^\theta |k^{(1)}(\tau)| |W_m^{(1)}(\theta-\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau)| d\tau d\theta &\leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |W_m^{(1)}(\tau) - W_m^{(2)}(\tau)| \int_\tau^t |k^{(1)}(\theta-\tau)| d\theta d\tau = \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t |W_m^{(1)}(\tau) - W_m^{(2)}(\tau)| k_1(\tau-t) d\tau, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $k_1(t) = \int_0^t |k^{(1)}(\theta)| d\theta$. Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.16), находим

$$\begin{aligned} |W_m^{(1)}(t) - W_m^{(2)}(t)| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \left[\frac{T^2}{2} \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\| T \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m} \|k^{(1)} - k^{(2)}\| + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |W_m^{(1)}(\tau) - W_m^{(2)}(\tau)| k_1(t-\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Применив лемму Гронуолла к данному неравенству, получим оценку (2.13).
Доказательство завершено.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $k(t) \in C[0, T]$. Кроме того выполнены условия:

1. $a_{ij}(x) \in C^{[n/2]+2}(\bar{\Omega}) \cap C^{1,\gamma}(\Omega)$, $c(x) \in C^{[n/2]+1}(\bar{\Omega}) \cap C^{0,\gamma}(\Omega)$, $0 < \gamma \leq 1$;
2. $\varphi(x) \in H^{[n/2]+3}(\Omega)$, $\psi(x) \in H^{[n/2]+2}(\Omega)$;
3. $g(\cdot, t) \in H^{[n/2]+2}(\Omega)$, $g(x, \cdot) \in C[0, T]$;
4. $\varphi, L\varphi, \dots, L^{[(n+4)/4]}\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi, L\psi, \dots, L^{[(n+2)/4]}\psi \in H_0^1(\Omega)$;
5. $g(\cdot, t), Lg(\cdot, t), \dots, L^{[(n+2)/4]}g(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.1)-(1.3).

Здесь H^s – соболевское пространство порядка s в области Ω , построенное на норме L_2 , а H_0^1 – соболевское пространство первого порядка с нулевым следом на границе.

До к а з а т е л ь с т в о. Продифференцировав (формально) ряд (2.3) по переменным x и t , получаем ряды

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m''(t)v_m(x), \tag{2.20}$$

$$Lu(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)Lv_m(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t)v_m(x). \tag{2.21}$$

Докажем сходимость рядов (2.3), (2.20), (2.21).

Используя представление (2.3) и оценку (2.11), получим

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)v_m(x) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |W_m(t)||v_m(x)| \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |v_m(x)| \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|t \right) e^{\|k\|t^2/2\lambda_m} \leq \\ &\leq e^{\|k\|t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\psi_m|}{\lambda_m} |v_m(x)| + t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|g_m(t)|}{\lambda_m} |v_m(x)| \right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Все ряды, находящиеся в скобках последней строки, сходятся по условиям 1-5 теоремы 2.1, поэтому ряд (2.3) сходится абсолютно и равномерно, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом.

Аналогичным образом доказываются сходимости рядов (2.20) и (2.21). На самом деле

$$\begin{aligned} |u_{tt}(x, t)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |\varphi_m v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |\psi_m v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |g_m(t)||v_m(x)| + \\ &+ \|k\|t e^{\|k\|t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{2} \lambda_m \right) |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{t}{2} \right) |\psi_m||v_m(x)| + \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + t \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{t}{2} \right) |g_m(t)||v_m(x)| \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Lu(x, t)| &\leq \\ &\leq e^{\|k\|t^2/2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |\varphi_m||v_m(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |\psi_m||v_m(x)| + t \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |g_m(t)||v_m(x)| \right). \end{aligned}$$

Так как все ряды в правых частях этих неравенств мажорируются сходящимися числовыми рядами, то ряды (2.20) и (2.21) сходятся абсолютно и равномерно, а функция $u(x, t)$, определяемая рядом (2.3), является решением задачи (1.1)-(1.3) в области D .

Переходим к доказательству единственности этого решения. При $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ и $g(x, t) \equiv 0$ получаем тождества $\varphi_m \equiv 0$, $\psi_m \equiv 0$, $g_m(t) \equiv 0$. Тогда из формулы (2.8)

следует, что $W_m \equiv 0$, так как W_m является решением однородного уравнения:

$$W_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t W_m(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \sin \lambda_m(t-\tau-s) k(s) ds.$$

Если подставить $W_m \equiv 0$, то из равенства (2.4) следует

$$\int_{\Omega} u(x, t) v_m(x) dx = 0.$$

Поскольку система функций v_m полна в пространстве $L_2(\Omega)$, функция $u(x, t) = 0$ почти всюду в Ω при любом $t \in [0, T]$. Так как функция $u(x, t) \in C^1(\bar{D})$, заключаем, что $u(x, t) \equiv 0$ в D .

Доказательство завершено.

Таким образом, согласно теореме 2.1, решение задачи (1.1)-(1.3) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) G_m(s) ds \right] v_m(x). \quad (2.23)$$

3. Теорема о разрешимости обратной задачи 1

Умножив обе части уравнения (1.1) на $h(x)$, проинтегрировав по x в области Ω , используя дополнительное условие (1.4) и (2.21), имеем

$$f''(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t) \Lambda[v_m] = \int_0^t k(\tau) f(t-\tau) d\tau + \Lambda[g].$$

Продифференцировав это уравнение по t , получим

$$k(t) = \frac{1}{f(0)} \left[f'''(t) - \Lambda[gt] + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m'(t) \Lambda[v_m] - \int_0^t k(\tau) f'(t-\tau) d\tau \right], \quad (3.1)$$

где

$$W_m'(t) = \left[-\lambda_m \varphi_m \sin \lambda_m t + \psi_m \cos \lambda_m t + \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) g_m(s) ds + \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(s-\tau) W_m(\tau) d\tau ds \right].$$

Теорема 3.1. Пусть $f(t) \in C^3[0, T]$, $f(0) \neq 0$ и выполнены следующие условия

1. $\varphi(x) \in H^{[n/2]+4}(\Omega)$, $\psi(x) \in H^{[n/2]+3}(\Omega)$;
2. $g(\cdot, t) \in H^{[n/2]+3}(\Omega)$, $g(x, \cdot) \in C^1[0, T]$;

3. $\varphi, L\varphi, \dots, L^{[(n+4)/4]}\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi, L\psi, \dots, L^{[(n+2)/4]}\psi \in H_0^1(\Omega)$;
 4. $g(\cdot, t), Lg(\cdot, t), \dots, L^{[(n+2)/4]}g(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.1)-(1.3) и (1.4) – функция $k(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющая уравнению (3.1).

До к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.1) представим в виде операторного уравнения

$$k = Ak. \quad (3.2)$$

Оператор A имеет вид

$$Ak = k_0 + \frac{1}{f(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(s-\tau) W_m(\tau) d\tau ds - \frac{1}{f(0)} \int_0^t k(\tau) f'(t-\tau) d\tau,$$

где

$$k_0(t) = \frac{1}{f(0)} \left[f'''(t) - \Lambda[g_t] + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \left[-\lambda_m \varphi_m \sin \lambda_m t + \psi_m \cos \lambda_m t + \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) g_m(s) ds \right] \right].$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденное семейством весовых норм

$$\|k\|_\sigma = \left\{ \max_{t \in [0, T]} |k(t)e^{-\sigma t}| \right\}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|k\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t} \|k\| \leq \|k\|_\sigma \leq \|k\|,$$

нормы $\|k\|_\sigma$ и $\|k\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0, \infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $P_\sigma(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_\sigma : \|k - k_0\|_\sigma \leq \|k_0\|\}$ – шар радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства C_σ ($\sigma \geq 0$).

Нетрудно заметить, что для $k \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ имеет место оценка

$$\|k\|_\sigma \leq \|k_0\|_\sigma + \|k_0\| \leq 2\|k_0\|.$$

Пусть $k(t) \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в себя, т.е. $A \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Проверим выполнение условий теоремы Банаха о неподвижной точке [16],

$$\begin{aligned} |Ak - k_0| &= \max_{t \in [0, T]} |(Ak - k_0)e^{-\sigma t}| = \\ &= \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{f(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(\tau) W_m(s-\tau) e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau ds - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{f(0)} \int_0^t k(\tau) f'(t-\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right| \leq \\
& \leq \frac{2}{|f(0)|} \left[T \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \|f_m\| \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\| T \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_m} + \|f'\| \right] \frac{\|k_0\|}{\sigma} =: \\
& =: \frac{\|k_0\|}{\sigma} \alpha_0,
\end{aligned}$$

где $\|f'\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)|$. Выбирая $\sigma \geq \alpha_0$, получим, что A переводит $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$.

Проверим выполнение второго условия

$$\begin{aligned}
\|(Ak^1 - Ak^2)\|_\sigma &= \max_{t \in [0, T]} |(Ak^1 - Ak^2)e^{-\sigma t}| = \\
&= \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{f(0)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s [k^{(1)}(\tau) W_m^{(1)}(s-\tau) - \right. \\
&\quad \left. - k^{(2)}(\tau) W_m^{(2)}(s-\tau)] e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau ds - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{f(0)} \int_0^t [k^{(1)}(\tau) - k^{(2)}(\tau)] f'(t-\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Используя неравенство (2.15) и оценки (2.11), (2.13), получим

$$\begin{aligned}
& \|(Ak^1 - Ak^2)\|_\sigma \leq \\
& \leq \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{|f(0)|} \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \Lambda[v_m] |\cos \lambda_m(t-\theta)| \left[|W_m^{(1)}(\theta-\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau)| |k^1(\tau)| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + |W_m^{(2)}(\theta-\tau)| |k^1(\tau) - k^2(\tau)| \right] e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\theta \right] d\tau \leq \\
& \leq \frac{1}{|f(0)|} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \|f_m\| \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\|k\|T^2/2\lambda_1} + \|f'\| \right\} \cdot \\
& \quad \cdot \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} = \frac{\alpha_1}{\sigma} \|k^1 - k^2\|.
\end{aligned}$$

Как следует из полученных оценок, если число σ выбрать из условия $\sigma \gg \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$, то оператор A является сжимающим на $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (3.2) имеет единственное решение в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$ [16].

Доказательство завершено.

4. Исследование обратной задачи 2

В дальнейших исследованиях воспользуемся следующей записью формулы (2.8)

$$W_m(t) - (ZW)_m(t) = \Phi_m(t), \quad (4.1)$$

здесь введены обозначения

$$\Phi_m(t) = \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) g_m(s) ds,$$

$$(ZW)_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t r_m(t-\theta) W_m(\theta) d\theta,$$

$$r_m(t) = \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) k(s) ds.$$

Используя выражение (2.3), дополнительное условие (1.5) примет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) v_m(x_0) = h(t). \quad (4.2)$$

Подставив в (4.2) вместо $W_m(t)$ выражение, найденное из (4.1), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t k(s) M[k](t-s) ds = f(t), \quad (4.3)$$

где

$$M[k](t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} v_m(x_0) \int_0^t W_m(\theta) \sin \lambda_m(t-\theta) d\theta,$$

$$f(t) = h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) v_m(x_0).$$

Уравнение (4.3) перепишем в удобном для исследования виде

$$h(t) = \int_0^t k(s) M[k](t-s) ds + F(t), \quad (4.4)$$

где $F(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) v_m(x_0)$.

Из (4.4) следует

$$h(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m v_m(x_0) = \varphi(x_0).$$

Для получения интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно функции $k(t)$ продифференцируем уравнение (4.4) три раза по переменной t . При этом мы попутно находим $h'(0) = \psi(x_0)$ и $h''(0) = g(x_0, 0) + L\varphi(x_0)$. Таким образом, получаем интегральное уравнение Вольтерры второго рода относительно функции $k(t)$:

$$k(t) = \frac{1}{h(0)} \left[h'''(t) - F'''(t) - \int_0^t k(s) M'''[k](t-s) ds \right], \quad t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

Теорема 4.1. Пусть $h(t) \in C^3[0, T]$, $h(0) = \varphi(x_0) \neq 0$, $h'(0) = \psi(x_0)$, $h''(0) = g(x_0, 0) + L\varphi(x_0)$ и выполнены условия 1-4 Теоремы 3.1. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.1)-(1.3) и (1.5) – функция $k(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющая уравнению (4.5).

Доказательство. Как и в предыдущем случае, уравнение (4.5) представим в виде операторного уравнения

$$k = Bk. \quad (4.6)$$

Оператор B имеет вид:

$$Bk = k_0 - \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t - \tau)k(\tau)d\tau,$$

где $k_0(t) = \frac{1}{h(0)} [h'''(t) - F'''(t)]$. Нетрудно заметить, что функция $F'''(t)$ является непрерывной функций, это следует из условий Теоремы 3.1. Аналогично ядро $M'''[k]$ также является непрерывной функцией.

Как и при доказательстве Теоремы 3.1 введем банахово пространство непрерывных функций C_σ , порожденное семейством весовых норм

$$\|k\|_\sigma = \left\{ \max_{t \in [0, T]} |k(t)e^{-\sigma t}| \right\}, \sigma \geq 0.$$

Рассмотрим шар $P_\sigma(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_\sigma : \|k - k_0\|_\sigma \leq \|k_0\|\}$ радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства $C_\sigma (\sigma \geq 0)$. Пусть $k(t) \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$.

Покажем выполнения условий теоремы Банаха о неподвижной точке [16],

$$\begin{aligned} \|Bk - k_0\| &= \max_{t \in [0, T]} |(Bk - k_0)e^{-\sigma t}| = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t - \tau)k(\tau)e^{-\sigma\tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right| \\ &\leq \frac{2T}{|h(0)|} \left[\|h'\| + T \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m v_m(x_0) \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|g_m\|T \right) e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}} \right] \frac{\|k_0\|}{\sigma} =: \frac{\|k_0\|}{\sigma} \beta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(Bk^1 - Bk^2)\|_\sigma &= \max_{t \in [0, T]} |(Bk^1 - Bk^2)e^{-\sigma t}| \leq \\ &\leq \frac{T}{|h(0)|} \left[\|h'\| + T \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\|T \right) e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}} \right]. \\ &\quad \cdot \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} = \frac{\beta_1}{\sigma} \|k^1 - k^2\|. \end{aligned}$$

Следовательно, если число σ выбрать из условия $\sigma > \max\{\beta_0, \beta_1\}$, то оператор B является сжимающим на $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (4.6) имеет, и притом единственное, решение в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$ [16].

Доказательство завершено.

5. Оценка условной устойчивости

Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Тогда решение уравнения (4.6) принадлежит множеству $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ и

$$\max_{t \in [0, T]} |k(t)| \leq 2\|k_0\| := k^0.$$

Обозначим через $K(k^0)$ – множество функций $k(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющих для $t \in [0, T]$ неравенству

$$\|k(t)\|_{C[0, T]} \leq k^0 \quad (5.1)$$

с фиксированной постоянной k^0 .

Определение 5.1. *Решение обратной задачи называется условно устойчивым, если непрерывная зависимость решения от исходных данных устанавливается лишь при наложении априорных ограничений на класс допустимых решений.*

Иными словами, в отличие от классической устойчивости, понимаемой как непрерывная зависимость решения от данных на всём пространстве, в обратных задачах, как правило, имеет место лишь условная устойчивость. Она устанавливается при введении дополнительных ограничений на искомую функцию (например, ограничений по норме, гладкости или энергии) [2]. Оценка условной устойчивости, доказанная в настоящей работе, справедлива при выполнении условия (5.1).

Теорема 5.1. *Если выполнены условия Теоремы 4.1 и функции k_1 и k_2 два решения обратной задачи (1.1)-(1.3), (1.5), соответствующие двум наборам данных $\{\varphi^{(1)}, \psi^1, g^1, h^1\}$ и $\{\varphi^{(2)}, \psi^2, g^2, h^2\}$, то имеет место следующая оценка условной устойчивости:*

$$\|k^1 - k^2\|_{C[0, T]} \leq C \left(\|\tilde{\varphi}\|_{H^{[n/2]+4}(\Omega)} + \|\tilde{\psi}\|_{H^{[n/2]+3}(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^{[n/2]+3}(\Omega) \times C^1[0, T]} \right), \quad (5.2)$$

где $C = C(k^0, T)$ – некоторая положительная постоянная.

Доказательство.

Пусть ϕ^j , $j = 1, 2$ – вектор функций, являющихся решениями (3.1) с наборами данных $\{\varphi^j(x), \psi^j(x), g^j(x, t), h^j(t)\}$, $j = 1, 2$ соответственно, т.е. справедливы уравнения $\phi^j = A\phi^j$ для $j = 1, 2$. Заданные функции $\varphi^j(x)$, $\psi^j(x)$, $j = 1, 2$ входят в свободные члены этих интегральных уравнений соответствующим образом через сложные функции $M^j[k(t)]$, $j = 1, 2$. В дальнейшем будем обозначать разность двух функций, наименования которых отличаются только верхним индексом, той же буквой со знаком \sim , как в работе [17]. Например, $\tilde{u} = u^1 - u^2$, $\tilde{h} = h^1 - h^2$ и т.д. Тогда из (4.5) получаем уравнение относительно функции $\tilde{k}(t)$

$$\tilde{k}(t) = \frac{1}{h(0)} \left[\tilde{h}'''(t) - \tilde{F}'''(t) - \int_0^t \left[k^1(s) \tilde{M}'''[k](t-s) + \tilde{k}(s) M^{2''''}[k](t-s) \right] ds \right], \quad t \in [0, T],$$

где

$$\tilde{M}'''[k](t) = \tilde{h}'(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \int_0^t \tilde{A}_m(\theta) \cos \lambda_m(t-\theta) d\theta.$$

Заметим, что входящие в это уравнение функции могут быть оценены на основе априорной информации о данных задачи. Используя указанную априорную информацию и применяя неравенство Гронуолла, получаем оценку (5.2).

Доказательство завершено.

6. Пример восстановления ядра при заданной дополнительной информации

Рассмотрим одномерный случай $\Omega = (0, \pi)$ при $T > 0$; $L = \frac{d^2}{dx^2}$ ($a_{11}(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv 0$) с однородными граничными условиями $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Пусть в прямой задаче (1.1)-(1.3) заданы функции

$$\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = 0, \quad g(x, t) \equiv 0,$$

а дополнительная информация в обратной задаче 1 имеет вид

$$\Lambda[u(\cdot, t)] = \int_0^{\pi} u(x, t) \sin x \, dx = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.1)$$

где функция $f \in C^3[0, T]$ известна и удовлетворяет условию $f(0) \neq 0$.

Покажем, что выполнено условие теоремы $(h, \varphi) \neq 0$, где $h(x) = \sin x$:

$$(h, \varphi) = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

В качестве дополнительной информации (6.1) возьмем конкретную функцию

$$f(t) = \frac{\pi}{2}(1 + t^2), \quad t \in [0, T].$$

Очевидно, что $f \in C^3[0, T]$ и $f(0) = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Собственные функции спектральной задачи (2.1)-(2.2) для $\Omega = (0, \pi)$:

$$v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx), \quad \lambda_m = m, \quad m \geq 1.$$

Так как $\varphi(x) = \sin x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_1(x)$, то в разложении (2.8) решение имеет вид

$$u(x, t) = W_1(t)v_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} W_1(t) \sin x.$$

Подставляя это выражение в (6.1), получаем явную связь между функцией $f(t)$ и коэффициентом $W_1(t)$

$$\Lambda[u(\cdot, t)] = \int_0^{\pi} u(x, t) \sin x \, dx = f(t),$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} W_1(t) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} W_1(t), \quad W_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(t).$$

Согласно теореме о разрешимости обратной задачи 1, существует единственное ядро $k(t) \in C[0, T]$ и оно удовлетворяет уравнению (3.1). В данном примере (при $g \equiv 0$) это дает формулу восстановления

$$k(t) = \frac{1}{f(0)} \left(f'''(t) + f'(t) - \int_0^t k(\tau) f'(t - \tau) d\tau \right), \quad t \in [0, T]. \quad (6.2)$$

Для выбранной функции $f(t) = \frac{\pi}{2}(1 + t^2)$ имеем

$$f'(t) = \pi t, \quad f'''(t) = 0, \quad f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (6.2), получаем следующее интегральное уравнение относительно функции $k(t)$:

$$k(t) = 2t - 2 \int_0^t (t - \tau) k(\tau) \, d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Решая данное уравнение, находим явный вид функции $k(t)$:

$$k(t) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t), \quad t \in [0, T].$$

7. Заключение

В работе исследованы прямая и две обратные задачи для многомерного гиперболического интегро-дифференциального уравнения с памятью. Прямая задача при известном ядре интегрального члена сведена методом Фурье к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для решения получены априорные оценки и оценки вторых производных, обеспечивающие корректность постановки. Рассмотрены две обратные задачи восстановления ядра: по интегральному условию переопределения и по значению решения в фиксированной точке области. В обоих случаях задачи сведены к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра свёрточного типа. С применением принципа сжимающих отображений доказаны существование и единственность решения в пространстве непрерывных функций с весовой нормой и установлена условная устойчивость.

Таким образом, в работе построена единая схема исследования задач определения одномерного ядра интегрального члена гиперболического интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области. Полученные результаты развивают теорию обратных задач для сред с последствием и могут быть использованы при математическом моделировании волновых процессов в средах с памятью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984, 264 с.
2. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005, 296 с.
3. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory. *Ren. Sem. Math. Univ*1992. №87. P. 105–138.
4. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1994. Vol. 22. no. 1. P. 21–44. Zbl 0818.93014.
5. Рахмонов А. А, Дурдиев У. Д, Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // *ТМФ*. 2021. Vol. 207, no. 1. P. 112–132. DOI: 10.4213/tmf10035
6. Сафаров Ж. Ш. Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области // *Журнал Средневожского математического общества*. 2015. Т. 17, № 3. P. 44–55.
7. Дурдиев У. Д. Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // *Дифференциальные уравнения*. 2022. Т. 58, № 1, С. 37–44. DOI: 10.31857/S0374064122010058
8. Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2024. Т. 28, №1. С. 29–44. DOI: 10.14498/vsgtu1997
9. Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для неоднородного интегродифференциального уравнения гиперболического типа // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 141–151. DOI: 10.21638/spbu01.2024.109
10. Safarov J. Sh., Kalandarov U. N., Safarova M. J. Inverse Problem of Determining a Kernel of the Viscoelasticity Equation with Distributed Data in a Limited Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, no. 7. P. 3380–3390. DOI: 10.1134/S1995080224604077
11. Дурдиев Д. К, Рахмонов А. А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. Т. 23, № 2. 63–80. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205
12. Safarov J. Sh. Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2022. Vol. 15, no. 5. P. 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662
13. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow. *J.Inv.Ill-PosedProblems*. 1996. Vol. 4, no. 1. P. 39–66.

14. Safarov J. The problem of determining two coefficients of the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous environment. *UzMathJournal*. 2023. № 3. P. 145–155. DOI:10.29229/uzmj.2023-3-15
15. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *Успехи мат. наук*. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
16. Колмогоров А. Н, Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
17. Safarov J. Sh, Durdiev D. K, Rakhmonov A. A. An inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation in a bounded domain. *Siberian Advances in Mathematics*. 2024. Vol.34, no. 2. P. 91–103. DOI: 10.1134/S1055134424020068

*Поступила 22.02.2025; доработана после рецензирования 13.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Nauka, M., 1984 (In Russ.), 264 p.
2. V. G. Romanov, *Stability in inverse problems*, Nauchniy mir, M., 2005 (In Russ.), 296 p.
3. A. Lorenzi, E. Paparoni, “Direct and inverse problems in the theory of materials with memory”, *Ren. Sem. Math. Univ*, **87** (1992), 105–138.
4. A. Lorenzi, “An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation”, *Applications*, **22**:1 (1994), 21–44.
5. A. A. Rahmonov, U. D. Durdiev, Z. R. Bozorov, “Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium”, *Theoretical and mathematical physics*, **207**:1 (2021), 112–132. DOI: 10.4213/tmf9480
6. J. Sh. Safarov, “One-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in a bounded region”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **17**:3 (2015), 44–55 (In Russ.).
7. U. D. Durdiev, “Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation”, *Differential Equations*, **58**:1 (2022), 37–44 (In Russ.). DOI: 10.31857/S0374064122010058
8. J. Sh. Safarov, “Inverse problem for integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special type in a bounded domain”, *Vestn. Sam. state tech. un-ta. Ser. Phys.-math. sciences*, **28**:1 (1924), 29–44 (In Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1997

9. J. Sh. Safarov, “Inverse problem for non-homogeneous integro-differential equation of hyperbolic type”, *Vestnik of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, **11**:69 (1924), 141-151 (In Russ.). DOI: 10.21638/spbu01.2024.109
10. J. Sh. Safarov, U. N. Kalandarov, M. J. Safarova, “Inverse Problem of Determining a Kernel of the Viscoelasticity Equation with Distributed Data in a Limited Domain”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:7 (1924), 3380-3390. DOI: 10.1134/S1995080224604077
11. D. K. Durdiev, A. A. Rakhmonov, “The problem of determining a two-dimensional kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium”, *Sib. J. Ind. Math.*, **23**:2 (2020), 63–80 (In Russ.). DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205
12. J. Sh. Safarov, “Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type”, *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.*, **15**:5 (2022), 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662
13. J. Janno, L. Von Wolfersdorf, “Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow”, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **4**:1 (1996), 39–66.
14. J. Sh. Safarov, “The problem of determining two coefficients of the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous environment”, *UzMathJournal*, **3** (2023), 145–155. DOI: 10.29229/uzmj.2023-3-15
15. V. A. Il'in, “The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **15**:2 (1960), 85–142 (In Russ.).
16. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Nauka, M., 1976 (In Russ.), 544 p.
17. J. Sh. Safarov, D. K. Durdiev, A. A. Rakhmonov, “An Inverse Problem for a Hyperbolic Integro-Differential Equation in a Bounded Domain”, *Siberian Advances in Mathematics*, **34**:2 (2024), 91–103 (In Russ.). DOI: 10.1134/S1055134424020068

Submitted 22.02.2025; Revised 13.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Численное и теоретическое исследование интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором

А. Н. Тында, Д. Р. Вечкасов

ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена исследованию уравнений Вольтерра с интегральным оператором, содержащим след искомого решения в виде его значений в некоторых точках множества. К уравнениям с нагрузками сводится ряд классических краевых задач эллиптического, гиперболического, параболического, а также смешанного типа. В частности, краевая задача Гурса для уравнения гиперболического типа эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Вопросы численного решения нагруженных функциональных уравнений в интегральной форме в литературе недостаточно изучены. В рамках данной работы установлены условия существования и единственности решений интегральных уравнений с локальными нагрузками. Построен коллокационный численный метод, основанный на аппроксимации решения полиномиальными сплайнами переменного порядка. Порядки многочленов, из которых составлен сплайн, определяются адаптивно и согласуются с максимальным шагом на каждом участке сетки узлов, которая, в свою очередь, строится с учетом распределения неизвестных нагрузок. В процессе дискретизации для определения коэффициентов системы уравнений интегралы аппроксимируются квадратурными суммами Гаусса и формируется общая система линейных алгебраических уравнений относительно всех неизвестных параметров сплайна. Доказана сходимость такой аппроксимации, приведен ряд численных результатов, подтверждающих эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, нагруженный оператор, существование решения, аппроксимация сплайнами, сходимость, оценка погрешности

Для цитирования: Тында А. Н., Вечкасов Д. Р. Численное и теоретическое исследование интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 67–78. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

Об авторах:

Тында Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

Вечкасов Данила Романович, магистрант кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8349-9173>, vechkasov.danila@yandex.ru

MSC2020 65R20

© А. Н. Тында, Д. Р. Вечкасов



Numerical and theoretical study of Volterra integral equations with a locally loaded operator

A. N. Tynda, D. R. Vechkasov

Penza State University (Penza, Russian Federation)

Abstract. The paper is devoted to the study of Volterra equations with an integral operator containing the trace of the unknown solution in the form of its values at certain points of the set. A number of classical boundary value problems of elliptic, hyperbolic, parabolic, and mixed types are reduced to equations with loads. In particular, the Goursat boundary value problem for a hyperbolic type equation is equivalent to a loaded Volterra integral equation of the second kind. The issues of numerical solution of loaded functional equations in integral form have not been sufficiently studied in the literature. Within the framework of this work, the conditions for the existence and uniqueness of solutions to integral equations with local loads are established. A collocation-type numerical method is constructed based on the approximation of the solution by polynomial splines of variable order. The orders of the polynomials that make up the spline are determined adaptively and are consistent with the maximum step in each section of the node grid, which is constructed taking into account the distribution of unknown loads. In the process of discretization, in order to determine the coefficients of the system of equations, the integrals are approximated by Gauss quadrature sums and a general system of linear algebraic equations is formed with respect to all unknown parameters of the spline. The convergence of such an approximation is proved, a number of numerical results are given, confirming the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: Volterra integral equations, loaded operator, existence of a solution, spline approximation, convergence, error estimate

For citation: A. N. Tynda, D. R. Vechkasov. Numerical and theoretical study of Volterra integral equations with a locally loaded operator. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 67–78. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

About the authors:

Aleksandr N. Tynda, Ph. D. (Phys. and Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, tyndaan@mail.ru

Danila R. Vechkasov, Master's student of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8349-9173>, vechkasov.danila@yandex.ru

1. Введение и постановка задачи

Функциональные уравнения различных типов с нагрузками операторов систематизированы в монографии А.М. Нахушева [1]. В ней поставлен широкий спектр задач, а также показано, как к уравнениям с нагрузками сводится ряд классических краевых задач всех типов (эллиптических, гиперболических, параболических, а также смешанного типа), дана обширная библиография. Однако для уравнений с нагруженными интегральными операторами в литературе практически отсутствует какая-либо

информация о численных подходах к их решению, вероятно, ввиду их сложности. Это обстоятельство мотивировало постановку задачи в данной работе.

Рассмотрим, следуя книге [1], интегральное уравнение следующего вида

$$a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) = \lambda \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad t \in \Omega = [t_0, T], \quad (1.1)$$

где $K(t, s)$ – ядро интегрального оператора, $t_j, j = \overline{1, m-1}$ – заданные фиксированные точки сегмента $[t_0, T]$, причем $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$; λ – постоянный параметр; $f(t), a_j(t) \in C_{[t_0, T]}, j = \overline{0, m-1}$.

Уравнение (1.1) можно записать в операторном виде

$$Vx(t) = f(t),$$

где оператор V , определенный следующим образом

$$Vx(t) \equiv a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) - \lambda \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds,$$

является локально нагруженным оператором, так как содержит след искомого решения в виде его значений $x(t_j), j = \overline{1, m-1}$, в некоторых точках множества Ω .

Численный метод решения уравнений вида (1.1), основанный на аппроксимации решения кусочно-линейной функцией предложен в [2]. В работе [3] проводится теоретическое исследование уравнений с нагрузками в виде функционалов. В работе [4] исследуется интегральное уравнение Гаммерштейна с нагрузками, имеющее тривиальное решение при любом значении параметра, входящего в уравнение. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты уравнения и те значения параметра (точки бифуркации), в окрестности которых уравнение имеет нетривиальные вещественные решения, исследована асимптотика таких ветвей решений.

Численному исследованию интегральных динамических моделей, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра и Фредгольма с разрывными ядрами, посвящены работы [5] и [6], интегральными уравнениями Вольтерра с задержками – работа [7]. В работе [8] исследована нелокальная задача для нагруженного уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа с интегральным оператором в двусвязной области. В работе [9] одномерная краевая задача для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной сведена к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, содержащим функцию типа Райта.

В данной работе предлагается сплайн-коллокационный метод: решение аппроксимируется полиномиальными сплайнами переменного порядка, который определяется на каждом участке сетки узлов с учетом распределения неизвестных нагрузок.

2. Существование и единственность решения

Для исследования разрешимости уравнения (1.1) перепишем его в виде

$$b(t)x(t) + \sum_{k=0}^m a_k(t)x(t_k) - \lambda \int_A^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad (2.1)$$

где $t \in \Omega = [A, B]$, $f(t)$, $b(t)$ и $a_0(t), a_1(t), \dots, a_m(t) \in C(\Omega)$, λ – свободный параметр, $A < t_0 < t_1 < \dots < t_m < B$.

Предполагая, что $b(t) \neq 0$ на всем сегменте Ω , разделим обе части уравнения (2.1) на $b(t)$. Получим следующую задачу:

$$\tilde{V}x = \tilde{f} - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)x(t_k), \quad (2.2)$$

где $\tilde{V}x = x(t) - \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)x(s)ds$; $\tilde{a}_k(t) = \frac{a_k(t)}{b(t)}$, $k = \overline{0, m}$; $\tilde{K}(t, s) = \frac{K(t, s)}{b(t)}$, $b(t) \neq 0$, $\forall t \in \Omega$.

Пусть существуют функции $\tilde{x}_{\tilde{f}}(t), \tilde{x}_0(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t)$, такие, что

$$\tilde{V}\tilde{x}_{\tilde{f}} = \tilde{f}, \quad \tilde{V}\tilde{x}_0 = -\tilde{a}_0(t), \quad \tilde{V}\tilde{x}_1 = -\tilde{a}_1(t), \quad \dots, \quad \tilde{V}\tilde{x}_m = -\tilde{a}_m(t).$$

Тогда решением уравнения (2.2), а, значит, и (2.1) является функция

$$x(t) = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t) + \sum_{k=0}^m x(t_k)\tilde{x}_k(t). \quad (2.3)$$

Обозначим $x_k = x(t_k)$, $k = \overline{0, m}$, $\tilde{x}_j(t_i) = \tilde{x}_j^i$.

Определить x_k можно из системы

$$\begin{cases} x_0 = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_0) + x_0\tilde{x}_0^0 + x_1\tilde{x}_1^0 + \dots + x_m\tilde{x}_m^0, \\ x_1 = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_1) + x_0\tilde{x}_0^1 + x_1\tilde{x}_1^1 + \dots + x_m\tilde{x}_m^1, \\ \dots \\ x_m = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_m) + x_0\tilde{x}_0^m + x_1\tilde{x}_1^m + \dots + x_m\tilde{x}_m^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

В матричной форме система (2.4) имеет следующий вид:

$$QX = -\tilde{X}_f,$$

где $X = (x_0, x_1, \dots, x_m)^T$, $\tilde{X}_f = (\tilde{x}_{\tilde{f}}(t_0), \dots, \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_m))^T$, q_{ij} – компоненты матрицы Q :

$$q_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_i^i - 1, & i = j \\ \tilde{x}_i^j, & i \neq j. \end{cases}$$

Получив все x_k , можно однозначно определить функцию $x(t)$ из (2.3).

Решение уравнения (2.2) существует и единственно при выполнении следующих условий:

1. Функции $b(t)$, $a_0(t)$, $a_1(t)$, \dots , $a_m(t)$, $f(t)$ непрерывны на Ω .
2. Функция $K(t, s)$ непрерывна в области $S = \{A \leq t \leq B, A \leq s \leq B\}$.
3. Система (2.4) имеет единственное решение при условии $\det Q \neq 0$.

3. Аппроксимация полиномиальными сплайнами

Пусть на сегменте Ω задана сетка v из множества точек $v_i, i = \overline{0, N}$, включающая в себя точки t_0, t_1, \dots, t_m .

Построим на этой сетке сплайн из $l+1$ многочленов Лагранжа $L_0(t), L_1(t), \dots, L_l(t)$, каждый из которых производит интерполяцию по n_0, n_1, \dots, n_l точкам сетки v . Наборы узлов интерполяции обозначим через $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_l$, соответственно

$$\Psi_0 = \{\psi_0^0, \psi_1^0, \dots, \psi_{n_0-1}^0\}, \quad \Psi_1 = \{\psi_0^1, \psi_1^1, \dots, \psi_{n_1-1}^1\}, \quad \dots, \quad \Psi_l = \{\psi_0^l, \psi_1^l, \dots, \psi_{n_l-1}^l\}.$$

При этом узлы выбираются таким образом, чтобы сплайн, составленный из интерполяционных полиномов, был непрерывным.

$$\psi_0^k = \psi_{n_{k-1}-1}^{k-1}, \quad k = \overline{1, l}.$$

Многочлены Лагранжа имеют вид

$$L_0(t) = \sum_{k=0}^{n_0-1} x(\psi_k^0)l_k^0(t), \quad L_1(t) = \sum_{k=0}^{n_1-1} x(\psi_k^1)l_k^1(t), \quad \dots, \quad L_l(t) = \sum_{k=0}^{n_l-1} x(\psi_k^l)l_k^l(t),$$

где

$$l_j^i(t) = \frac{(t - \psi_0^i)(t - \psi_1^i) \dots (t - \psi_{j-1}^i)(t - \psi_{j+1}^i) \dots (t - \psi_{n_i}^i)}{(\psi_j^i - \psi_0^i)(\psi_j^i - \psi_1^i) \dots (\psi_j^i - \psi_{j-1}^i)(\psi_j^i - \psi_{j+1}^i) \dots (\psi_j^i - \psi_{n_i}^i)}.$$

Пусть $r = \{r_0, r_1, \dots, r_{l+1}\}$ – индексы точек сетки $v_i, i = \overline{0, N}$, которые используются в качестве последнего узла для многочлена $L_{k-1}(t)$ и начального узла для $L_k(t)$, за исключением многочлена $L_0(t)$, который не имеет предшествующего, и многочлена $L_l(t)$, который не имеет последующего. В индексы r включим 0 и N .

Среди индексов r обязательно должны быть такие, что

$$r_0 = 0, \quad t_k = v_i, \quad k = \overline{0, m}, \quad i \in r, \quad r_{l+1} = N.$$

Множество индексов r включают в себя такие индексы r_i , в которых точки v_{r_i} совпадают с точками нагрузки t_0, t_1, \dots, t_m .

В результате будет получен непрерывный сплайн $S_{v_xr}(t)$, составленный из многочленов Лагранжа $L_0(t), L_1(t), \dots, L_l(t)$, построенных с использованием наборов v, x, r :

$$S_{v_xr}(t) = S[v, x, r],$$

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_N\}, \quad x = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \quad r = \{r_0, r_1, \dots, r_{l+1}\}.$$

Введем также множество индексов $q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, q \subset r$, таких что

$$v_{q_k} = t_k, \quad k = \overline{0, m}.$$

Переобозначим точки внутри отрезка $[A, B]$:

$$\varphi = \{A, t_0, t_1, \dots, t_m, B\} = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+2}\}, \\ \varphi_0 = A, \quad \varphi_k = t_{k-1}, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad \varphi_{m+2} = B.$$

Пусть также

$$\Delta_k = [\varphi_k, \varphi_{k+1}], \quad |\Delta_k| = \varphi_{k+1} - \varphi_k, \quad k = \overline{0, m+1}.$$

Отдельно рассмотрим случай, когда на каждом сегменте Δ_k задана равномерная сетка с длиной шага h_k . Число узлов на сегменте составляет

$$n_k = \left[\frac{|\Delta_k|}{h_k} \right] + 1.$$

В данном случае узлы сетки v_i и точки ψ_i^k, q_i можно определить следующим образом

$$v_{i+j} = \varphi_i + jh_i, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n_i - 1},$$

$$q_0 = n_0 - 1, \quad q_i = i + 1 + \sum_{k=1}^{i+1} (n_k - 2), \quad i = \overline{1, m}.$$

В зависимости от выбора индексов r можно задать различные виды сплайнов из многочленов Лагранжа. В данном случае ограничимся лишь случаем, когда на каждом из сегментов Δ_k задан сплайн из многочленов Лагранжа по P_k точкам с расстоянием между узлами меньше, чем наперед заданное h .

Число узлов n_k на каждом сегменте для данного типа сетки можно определить следующим образом

$$\alpha_k = \left[\frac{|\Delta_k| + h(1 - P_k)}{h(P_k - 1)} \right] + 2, \quad n_k = P_k + (P_k - 1)(\alpha_k - 1).$$

Здесь α_k определяет число многочленов Лагранжа степени $P_k - 1$ на сегменте Δ_k . Число l определяется как общее число многочленов Лагранжа на множестве Ω

$$l = \sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k.$$

Индексы r_k можно определить следующим образом

$$r_0 = 0, \quad r_{j+k} = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i(P_i - 1) + k(P_j - 1), \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{1, \alpha_j + 1},$$

где j удовлетворяет условию $\alpha_j \leq r_{j+k} \leq \alpha_{j+1}$.

После того как была построена сетка узлов, можно применить метод коллокаций для решения уравнения (2.1). Подставим некоторую точку v_i в уравнение (2.1). Получим

$$b(v_i)x(v_i) + \sum_{k=0}^m a_k(v_i)x(t_k) - \lambda \int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds = f(v_i).$$

Введем функцию от индексов p, q, k, i и j :

$$I(p, q, k, i, j) = \int_{v_p}^{v_q} K(v_k, s)l_j^i(s)ds.$$

Пусть также

$$x(v_k) = x_k, \quad k = \overline{0, N}.$$

Тогда

$$\int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds = x_0\nu + \sum_{k=0}^{u-1} \sum_{j=r_k+1}^{r_{k+1}-1} x_j I(r_k, r_{k+1}, i, k, j - r_k) +$$

$$+ \sum_{j=r_u+1}^{r_{u+1}} x_j I(r_u, i, i, u, j - r_u) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{u-1} (x_{r_k} (I(r_{k-1}, r_k, i, k - 1, r_k - r_{k-1}) + I(r_k, r_{k+1}, i, k, 0))) +$$

$$+ x_{r_u} (I(r_{u-1}, r_u, i, u - 1, r_u - r_{u-1}) + I(r_u, i, i, u, 0)), \quad (3.1)$$

где $r_u \leq i \leq r_{u+1}$.

Величина ν определяется как

$$\nu = \begin{cases} I(0, i, i, 0, 0), & u = 0 \\ I(0, r_1, i, 0, 0), & u \neq 0. \end{cases}$$

Интеграл представляется в таком виде, чтобы каждый из $x_j, j = \overline{0, r_{u+1}}$ присутствовал в сумме лишь один раз. Это необходимо для формирования системы линейных алгебраических уравнений

$$QX = F, \quad (3.2)$$

$$X = \{x_i\}, F = \{f(v_i)\}, \quad i = \overline{0, N}.$$

Для упрощения выкладок матрицу Q составим построчно, представив каждую строку в виде вектора Q_i

$$Q_i = M_i + H_i - \lambda D_i, \quad i = \overline{0, N},$$

где

$$(M_i)_j = \begin{cases} b(v_i), & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad j = \overline{0, N},$$

$$(H_i)_j = \begin{cases} a_k(v_i), & j = q_k \\ 0, & j \neq q_k \end{cases}, \quad j = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Вектор D_i содержит в себе коэффициенты, полученные в результате аппроксимации функции, являющейся результатом вычисления интеграла $\int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds$.

Компоненты вектора D_i можно получить следующим образом

$$(D_i)_j = \begin{cases} I(0, i, i, 0, 0), & j = 0, \quad u = 0, \\ I(0, r_1, i, 0, 0), & j = 0, \quad u \neq 0, \\ I(r_k, r_{k+1}, i, k, j - r_k), & k = \overline{0, u-1}, \quad j = \overline{r_k+1, r_{k+1}-1}, \\ I(r_{k-1}, r_k, i, k-1, r_k - r_{k-1}) + I(r_k, r_{k+1}, i, k, 0), & k = \overline{1, u-1}, \quad j = r_k, \\ I(r_u, i, i, u, j - r_u), & j = \overline{r_u+1, r_{u+1}}, \\ I(r_{u-1}, r_u, i, u-1, r_u - r_{u-1}) + I(r_u, i, i, u, 0), & j = r_u, \quad u \neq 0, \\ 0, & j > r_{u+1}. \end{cases}$$

4. Сходимость метода

Будем рассматривать некоторый сегмент Δ_h^P , на котором искомая функция приближается многочленом Лагранжа $L_h^P(t)$ по P точкам с расстоянием h между ними

$$L_h^P(t) = \sum_{i=0}^{P-1} x_i l_i(t).$$

Уравнение (2.2) представим в операторном виде

$$x = Hx + \tilde{f}, \quad Hx = \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)x(s)ds - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)x(t_k). \quad (4.1)$$

Пусть существует последовательность множеств непрерывных функций $C_{h_1}^P, C_{h_2}^P, \dots$, определенных на $\Delta_{h_1}^P, \Delta_{h_2}^P, \dots$ соответственно. На каждом из множеств $C_{h_1}^P, C_{h_2}^P, \dots$ определим проекторы $P_{h_1}^P, P_{h_2}^P, \dots$ на множество интерполяционных многочленов Лагранжа $L_{h_i}^P$. Определим на каждом из множеств $\Delta_{h_i}^P$ множество многочленов $E_{h_i}^P$ степени $P - 1$, построенных по P точкам с расстоянием h_i между ними.

Каждый проектор $P_{h_i}^P$ отображает любой многочлен $x_{h_i}^P \in E_{h_i}^P$ в себя

$$P_{h_i}^P x_{h_i}^P = x_{h_i}^P, \quad \forall x_{h_i}^P \in E_{h_i}^P.$$

Применим проектор к уравнению (4.1)

$$\begin{aligned} P_{h_i}^P x_{h_i}^P &= P_{h_i}^P H x_{h_i}^P + \tilde{f}, \\ x_{h_i}^P &= P_{h_i}^P H x_{h_i}^P + \tilde{f}. \end{aligned}$$

Пусть

$$P^{(n)} = I - P_{h_i}^P.$$

Пусть также последовательность h_i такова, что $\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0$.

Тогда, в случае если оператор $I - H$ является непрерывно обратимым, а также при выполнении условий

$$\begin{cases} \|P_P^{(i)} H\|_{\Delta_{h_i}^P} \rightarrow 0 \\ \|P_P^{(i)} f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \rightarrow 0 \end{cases} \quad i \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

будет выполняться

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|L_{h_i}^P(t) - X_{h_i}^P(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0, \quad (4.3)$$

где $X_{h_i}^P(t)$ – точное решение на множестве $\Delta_{h_i}^P$.

Непрерывную обратимость оператора $I - H$ можно установить по предыдущему пункту. Рассмотрим условия (4.2). Первое из них:

$$\|P_P^{(i)} H\|_{\Delta_{h_i}^P} = \sup_{t \in \Delta_k} \left\{ \frac{\|P_P^{(i)} H y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}}{\|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}} \right\}, \quad y \in C_{h_i}^P, \quad \|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \neq 0,$$

$$P_P^{(i)}Hy = P_P^{(i)}(Hy),$$

$$Hy = \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)y(s)ds - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)y(t_k) = F(t).$$

В результате применения оператора H к функции y получили некоторую непрерывную на множестве $\Delta_{h_i}^P$ функцию $F(t)$. Применим к ней оператор $P_P^{(i)}$:

$$P_P^{(i)}(Hy) = P_P^{(i)}F = F - P_{h_i}^P.$$

Рассмотрим $P_{h_i}^P F$. Пусть s_0, s_1, \dots, s_{P-1} – точки, по которым строится многочлен Лагранжа. Тогда

$$P_{h_i}^P F = L_F(t), \quad L_F(t) = \sum_{k=0}^{P-1} F(s_k)l_k(t).$$

Найдем погрешность интерполяции

$$\|F(t) - L_F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \leq \frac{\|F^{(P)}(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}}{P!} (P-1)^P h_i^P.$$

Предполагая, что норма $\|F^{(P)}(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}$ ограничена на $\Delta_{h_i}^P$, получим

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \|F(t) - L_F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} (P_{h_i}^P F) = F.$$

Значит

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(P_P^{(i)}Hy)(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \|F(t) - P_{h_i}^P F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Первое условие доказано, при условии $\|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \neq 0$.

Аналогичным образом можно доказать второе условие (4.2):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|P_P^{(i)}f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \|f - P_{h_i}^P f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Таким образом, доказаны условия (4.2), из которых следует сходимость предложенного метода.

5. Результаты численных расчетов

Для иллюстрации сходимости предложенного метода при различных значениях параметров рассмотрим уравнение (1.1) со следующим набором параметров

$$t \in [0, 1]; \quad m = 3; \quad t_1 = \frac{3}{10}; \quad t_2 = \frac{1}{2};$$

$$a_0(t) = t^2 + 1; \quad a_1(t) = 1 - t^3; \quad a_2(t) = t - 2; \quad K(t, s) = t - 2s^2; \quad (5.1)$$

$$f(t) = (t^2 + 1) \cos t + (1 - t^3) \cos \frac{3}{10} + (t - 2) \cos \frac{1}{2} - \lambda \left((4 + t - 2t^2) \sin t - 4t \cos t \right).$$

Точным решением уравнения (1.1) с параметрами (5.1) является функция $x(t) = \cos(t)$.

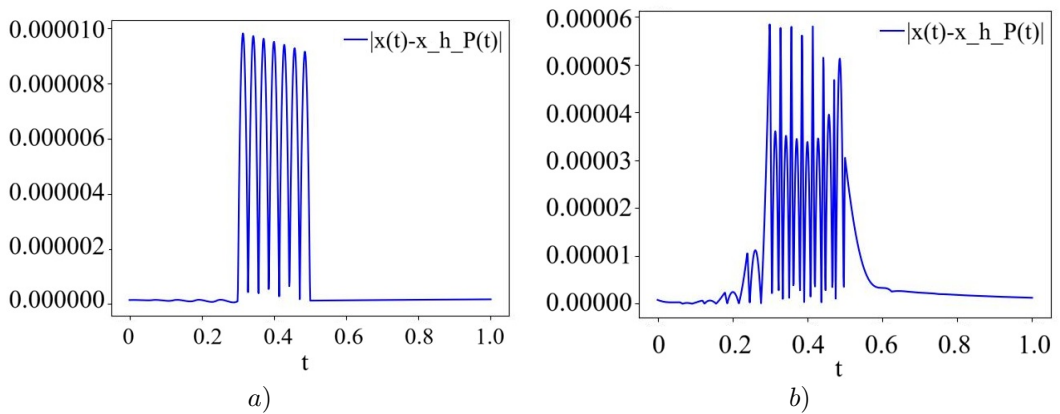
Результаты расчетов при различных λ приведены в табл. 5.1-5.4 и на рис. 5.1.

Таблица 5.1. Погрешность при $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1/4$ **Table 5.1.** The error for $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1/4$

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
ε	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-4}$	$9.80 \cdot 10^{-6}$	$2.85 \cdot 10^{-5}$	$7.12 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-6}$

Таблица 5.2. Погрешность при $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1000$ **Table 5.2.** The error for $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1000$

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
ε	$7.74 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$4.42 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$

**Рис. 5.1.** а) Погрешность при $h = 1/32, \lambda = 1/4$,
б) погрешность при $h = 1/32, \lambda = 1000$ **Fig. 5.2.** а) The error for $h = 1/32, \lambda = 1/4$,
б) the error for $h = 1/32, \lambda = 1000$ **Таблица 5.3.** Погрешность аппроксимации сплайнами порядка 3 при $\lambda = 1/4$ **Table 5.3.** Approximation error by splines of order 3 with $\lambda = 1/4$

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
ε	$9.73 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-5}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$2.55 \cdot 10^{-8}$	$3.19 \cdot 10^{-9}$

Таблица 5.4. Погрешность аппроксимации сплайнами порядка 5 при $\lambda = 1/4$ **Table 5.4.** Approximation error by splines of order 5 with $\lambda = 1/4$

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
ε	$6.48 \cdot 10^{-7}$	$2.24 \cdot 10^{-8}$	$7.31 \cdot 10^{-10}$	$2.32 \cdot 10^{-11}$	$7.32 \cdot 10^{-13}$	$2.29 \cdot 10^{-14}$

Представленные результаты позволяют судить о сходимости предложенного метода независимо от параметра λ и эффективности его применения при достаточной гладкости входных данных. При этом основной вклад в качество аппроксимации вносит шаг h , а максимальный порядок полиномов в составе сплайна достаточно брать не выше пятого. Результаты приведенных расчетов коррелируют с оценками качества аппроксимации гладких функций полиномиальными сплайнами, эмпирическая оценка погрешности имеет вид $O(h^m)$, где m – максимальный порядок полиномов, из которых составлен сплайн. Распределение погрешности, приведенное на рис. 5.1, свидетельствует о значительном влиянии на ее величину того участка Ω , на котором сконцентрированы точки нагрузки.

В дальнейшем авторы предполагают рассмотреть нелинейные уравнения такого типа с ядрами, удовлетворяющими условию Липшица по третьей переменной, а также другие виды нагрузок.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00743, <https://rscf.ru/project/25-21-00743/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Byankin V., Tynda A., Sidorov D., Dreglea A. Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations. *Computation*. 2025. Vol. 13, № 5. DOI: 10.3390/computation13050121
3. Sidorov N. A., Sidorov D. N. Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions. *Diff. Equat.* 2021. Vol. 57. P. 1640–1651. DOI: 10.1134/S00122661211120107
4. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. 2023. Т. 43. С. 78–90. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.78
5. Tynda A., Noeiaghdam S., Sidorov D. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind. *Bull. Irkutsk. State Univ. Ser. Math.* 2022. Vol. 39. P. 62–79. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.62
6. Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 1. С. 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24
7. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577
8. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2016. Т. 20, № 2. С. 220–240. DOI: 10.14498/vsgtu1485

9. Космакова М. Т., Хамзеева А. Н. О разрешимости интегрального уравнения, связанного с дробно-нагруженной задачей теплопроводности // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*. 2024. Т. 233, №3. С. 27–36. DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-27-36

*Поступила 01.12.2025; доработана после рецензирования 11.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. M. Nahushev, *Loaded equations and their application*, Nauka, Moscow, 2012 (In Russ.), 232 p.
2. V. Byankin, A. Tynda, D. Sidorov, A. Dreglea, “Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations”, *Computation*, **13**:5 (2025). DOI: 10.48550/arXiv.2503.21452
3. N. A. Sidorov, D. N. Sidorov, “Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions.”, *Diff Equat.*, **57** (2021), 1640–1651.
4. N. A. Sidorov, L. R. D. Dreglea Sidorov, “On the Solution of Hammerstein Integral Equations with Loads and Bifurcation Parameters.”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.*, **43** (2023), 78–90. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.78
5. A. Tynda, S. Noeiaghdam, D. Sidorov, “Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind”, *Bull. Irkutsk. State Univ. Ser. Math.*, **39** (2022), 62–79. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.62
6. O. V. Germider, V. N. Popov, “On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.*, **27**:1 (2025), 11–24 (In Russ.).
7. A. N. Tynda, “Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.*, **25**:1 (2023), 565–577 (In Russ.).
8. O. H. Abdullayev, “A non-local problem for a loaded mixed-type equation with an integral operator”, *Bulletin of Samara state technical university. Phys.-math. sciences*, **20**:2 (2016), 220–240 (In Russ.).
9. M. T. Kosmakova, A. N. Khamzeyeva, “On the solvability of an integral equation associated with the fractional loaded heat conduction problem”, *Itoqi nauki i tehniki. Sovremennaya matematika i prilozheniya. Tematicheskie obzory.*, **233**:3 (2024), 27–36 (In Russ.).

Submitted 01.12.2025; Revised 11.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:681.5.017

Метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана

А. В. Цыганов¹, Ю. В. Цыганова^{1,2}

¹ Ульяновский государственный педагогический университет
имени И. Н. Ульянова (ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова»)
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

² Университет Иннополис (АНО ВО «Университет Иннополис»)
(г. Иннополис, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассмотрена задача автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного информационного фильтра Калмана в мультисенсорных сетях. Целью исследования является разработка нового метода обнаружения потери оптимальности распределенного дискретного фильтра, вызванной резким изменением параметров динамической системы с распределенной сетью сенсоров. Рассматривается сеть с полностью связной топологией. Предложен новый подход, основанный на анализе градиента отрицательной логарифмической функции правдоподобия, вычисляемого в терминах распределенного информационного фильтра. Метод использует уравнения чувствительности, позволяющие децентрализованно рассчитывать значения критерия оптимальности и его градиента в каждом узле сети, что обеспечивает масштабируемость и отказоустойчивость мультисенсорной системы. Основным теоретическим результатом являются выражения для вычисления критерия оптимальности в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия и его градиента в терминах распределенного дискретного фильтра. Результаты компьютерного моделирования, проведенного на языке MATLAB, иллюстрируют работоспособность предложенного подхода. Разработанный метод может быть использован в системах мониторинга, управления движением и слежения с использованием распределенных сенсорных сетей. Полученные результаты показывают, что предложенный подход позволяет обеспечить контроль оптимальности дискретного фильтра и, следовательно, может быть интегрирован в адаптивные алгоритмы для автоматической перенастройки параметров модели динамической системы с распределенной сетью сенсоров.

Ключевые слова: автоматический контроль оптимальности, дискретная линейная стохастическая система, распределенные измерения, распределенный фильтр Калмана, градиент критерия оптимальности

Для цитирования: Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 79–95. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95



Об авторах:

Цыганов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова» (432071, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, andrew.tsyganov@gmail.com

Цыганова Юлия Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор, Институт анализа данных и искусственного интеллекта, АНО ВО «Университет Иннополис» (420500, Россия, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Original article

MSC2020 93E10, 93E11

Automatic optimality control method for the distributed discrete-time Kalman filter

A. V. Tsyganov¹, J. V. Tsyganova^{1,2}

¹ *Ulyanovsk State Pedagogical University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

² *Innopolis University (Innopolis, Russian Federation)*

Abstract. The paper considers the problem of automatic optimality control of a distributed discrete information Kalman filter in multisensory networks. The aim of the study is to develop a new method for detecting the loss of optimality of a distributed discrete filter caused by an abrupt change in the parameters of a dynamic system with a distributed network of sensors. A network with a fully connected topology is considered. A new approach is proposed based on the analysis of the gradient of the negative log likelihood function calculated in terms of a distributed information filter. The method uses sensitivity equations that allow decentralized calculation of the optimality criterion and its gradient in each node of the network, which ensures scalability and fault tolerance of the multisensory system. The main theoretical result is expressions for calculating the optimality criterion in the form of a negative logarithmic likelihood function and its gradient in terms of a distributed discrete filter. The results of computer modeling conducted in MATLAB validate the proposed approach. The developed method can be used in monitoring, motion control and tracking systems using distributed sensor networks. The results obtained show that the proposed approach makes it possible to control the optimality of a discrete filter and, therefore, can be integrated into adaptive algorithms for automatically reconfiguring the parameters of a dynamic system model with a distributed network of sensors.

Keywords: automatic optimality control, discrete-time linear stochastic system, distributed measurements, distributed Kalman filter, gradient of optimality criterion

For citation: A. V. Tsyganov, J. V. Tsyganova. Automatic optimality control method for the distributed discrete-time Kalman filter. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 79–95. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.79-95

About the authors:

Andrey V. Tsyganov, Ph.D. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University (4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4173-5199>, andrew.tsyganov@gmail.com

Julia V. Tsyganova, D.Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Data Science and Artificial intelligence, Innopolis University (1 Universitetskaya Str., Innopolis, 420500, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

1. Введение

Фильтр Калмана является стандартным инструментом оценки состояния линейных стохастических систем [1]. Его оптимальность гарантируется при выполнении ряда предпосылок: корректности модели динамики, гауссовости шумов и точного знания их ковариационных матриц. Однако в реальных условиях эти предположения часто нарушаются из-за неучтенных возмущений, отказов датчиков или изменений параметров системы. Это приводит к потере эффективности фильтра, занижению апостериорной дисперсии и возможному выходу системы из-под контроля.

В настоящее время коммуникационные сети, состоящие из недорогих, но технически совершенных сенсоров, широко используются в системах сопровождения целей, наблюдения и охраны, мониторинга окружающей среды, управления воздушным движением и др. Использование множества сенсоров, позволяющих наряду с измерениями выполнять обработку и передачу данных с использованием различных коммуникационных схем, позволяет повысить качество управления сложными системами.

Одной из эффективных реализаций является распределенная мультисенсорная сеть с децентрализованной обработкой данных, которая обладает свойствами отказоустойчивости и масштабируемости. Выход из строя одного из сенсоров не приводит к потере работоспособности алгоритма оценивания, поскольку в каждый дискретный момент времени каждый узел имеет свою «копию» глобальной оценки.

Для подобных систем разработаны многочисленные алгоритмы распределенной калмановской фильтрации [2]. Такие алгоритмы работают эффективно, если в них для вычисления оценок вектора состояния используется модель данных, которая адекватно описывает саму динамическую систему. В случае непредвиденного изменения параметров системы в процессе ее функционирования алгоритм распределенной дискретной фильтрации может потерять свойство оптимальности, и качество вычисляемых оценок перестанет удовлетворять заданным требованиям. В связи с этим актуальной является задача автоматического контроля оптимальности распределенного фильтра, заключающаяся в своевременном обнаружении таких нарушений и, при необходимости, адаптации модели.

Цель данной работы состоит в построении нового метода автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана.

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс дискретных линейных стохастических мультисенсорных систем \mathcal{S} , моделируемых в пространстве состояний с помощью уравнений следующего

вида

$$x_k = F_{k-1}(\theta)x_{k-1} + D_k(\theta)u_k + G_k(\theta)w_k, \quad (2.1)$$

$$z_{i,k} = H_{i,k}(\theta)x_k + v_{i,k}, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(\theta) &\triangleq \mathbb{E}\{x_0\}, \quad \Pi_0(\theta) \triangleq \mathbb{E}\{[x_0 - \bar{x}_0(\theta)][x_0 - \bar{x}_0(\theta)]^T\}; \\ \mathbb{E}\{w_k\} &= 0, \quad \mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = Q_k(\theta) > 0; \quad \mathbb{E}\{v_{i,k}\} = 0, \quad \mathbb{E}\{v_{i,k} v_{i,k}^T\} = R_{i,k}(\theta) > 0; \\ \mathbb{E}\{v_{i,k} w_k^T\} &= 0, \quad \mathbb{E}\{x_0 w_k^T\} = 0, \quad \mathbb{E}\{x_0 v_{i,k}^T\} = 0, \quad \mathbb{E}\{v_{i,k} v_{j,k}^T\} = 0 \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим сеть сенсоров с полносвязной топологией, состоящую из N узлов, в которой каждый узел i имеет возможность вычислять собственные оценки $\hat{x}_{i,k}$ вектора состояния x_k . Измерения и оценки, получаемые в узлах, называют локальными [3]. Предположим, что модель динамики исследуемого процесса (2.1) одинаковая в каждом узле, локальные измерения описываются уравнением (2.2), причем шумы измерений $v_{i,k}$ и $v_{j,k}$ в узлах i и j ($i, j = \overline{1, N}$) некоррелированы. Кроме того, модель (2.1)–(2.2) параметризована по $\theta \in \mathbb{R}^p$, где θ – модельный параметр, характеризующий режим функционирования исследуемой динамической системы \mathcal{S} .

Предположим, что $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$, где \mathcal{D} – компакт в \mathbb{R}^p . Далее считаем, что динамическая система \mathcal{S} , представленная моделью (2.1)–(2.2), функционирует в квазистационарном режиме и ее «нормальному» режиму работы соответствует конкретное значение модельного параметра $\theta = \theta^*$. Рассмотрим задачу автоматического контроля возможных внезапных нарушений нормального режима функционирования динамической системы \mathcal{S} .

Задача дискретной фильтрации заключается в вычислении оценок \hat{x}_k вектора состояния x_k по данным измерений z_k в каждый дискретный момент времени k [1]. Для дискретных линейных стохастических систем с гауссовскими шумами оптимальным алгоритмом оценивания является дискретный фильтр Калмана. Если структура модели (2.1)–(2.2) известна, но ее матрицы зависят от модельного параметра θ , то алгоритм оценивания строят в форме адаптивного фильтра Калмана, в котором матрицы-параметры фильтра также зависят от настраиваемого параметра θ . Пусть в адаптивном фильтре $\theta = \theta^*$. При нормальном режиме работы системы \mathcal{S} такой адаптивный фильтр будет оптимальным. В случае непредвиденного изменения значения параметра θ нормальный режим работы динамической системы нарушается, и алгоритм фильтрации теряет свойство оптимальности. Таким образом, возникает задача контроля оптимальности адаптивного фильтра, решением которой является построение специального решающего правила, которое должно быть включено в алгоритм адаптивной фильтрации.

Существует множество различных подходов к решению задачи контроля [4–6] и др. Основные методы решения тесно связаны с хорошо известной задачей о разладке [7]. Основой для диагностики в этом случае служит невязка измерений:

$$\nu_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1},$$

которая при корректной модели является независимой гауссовой последовательностью с нулевым средним и ковариацией $B_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$. Любое отклонение от этих свойств сигнализирует о «разладке» – то есть о том, что распределение невязки измерений изменилось после некоторого момента τ , называемого моментом разладки. Это

делает задачу контроля оптимальности частным случаем последовательного обнаружения разладки, как показано в [5], [8].

Математические методы контроля на основе аналитической избыточности изложены в [9]. Их удобно применять для контроля оптимальности рекуррентных алгоритмов обработки информации, каким и является дискретный фильтр Калмана. В [10] предложен метод автоматического контроля номинального режима функционирования динамической системы, основанный на сочетании метода вспомогательного функционала качества [6], который позволяет контролировать оптимальность адаптивного дискретного фильтра по критерию близости к нулю градиента вспомогательного функционала качества, и численно эффективной модификации адаптивного фильтра, основанной на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта, позволяющей организовать численно устойчивые к ошибкам машинного округления вычисления в адаптивном фильтре.

В мультисенсорных сетях контроль усложняется отсутствием единого центра и зависимостью между узлами, а для решения задачи автоматического контроля оптимальности необходимо применять так называемые распределенные или децентрализованные алгоритмы дискретной фильтрации (Consensus KF, CI-KF и др.) [2]. Контроль оптимальности фильтра в этом случае может выполняться как локально, так и на глобальном уровне. Подходы к диагностике в таких системах развивались в контексте задачи обнаружения и локализации нарушений [11–12].

В децентрализованных системах оптимальность фильтра зависит от строгого соблюдения предположений о полноте информации и независимости данных. При наличии неопределенности происхождения измерений или неполного знания глобальной модели, стандартный распределенный фильтр Калмана становится несостоятельным: его апостериорная ковариация занижает истинную дисперсию ошибки, что эквивалентно потере оптимальности. Для решения этой проблемы были разработаны специализированные алгоритмы, которые активно поддерживают согласованность оценок, например:

1. Double Debaised Distributed Kalman Filter (DЗKF) [13] – метод устраняет смещение оценки состояния и ее ковариационной матрицы за счет введения двух поправочных матриц. Он особенно эффективен в сценариях с неопределенностью данных, где традиционные методы дают смещенные результаты. DЗKF позволяет восстановить состояние, делая его пригодным для надежного контроля оптимальности через метрики типа NEES (Normalized Estimation Error Squared).
2. Hypothesizing Distributed Kalman Filter (HKF) [14] – подход снимает требование полного знания глобальной модели. Вместо этого каждый узел формулирует гипотезу о структуре измерений. Алгоритм остается оптимальным, если гипотеза верна, и обеспечивает согласованные оценки даже при ограниченной коммуникации. HKF можно рассматривать как механизм самонастройки, поддерживающий оптимальность в условиях неполной информации.

Таким образом, современные подходы к контролю оптимальности в распределенных системах переходят от внешнего мониторинга к встроенным механизмам самодиагностики и коррекции.

В данной работе для контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана предлагается использовать градиент критерия оптимальности, который строится на основе отрицательной логарифмической функции правдоподобия. Значения критерия децентрализованно вычисляются всеми узлами сети на основе величин,

получаемых с помощью распределенного дискретного информационного фильтра Калмана [3]. Новым результатом является алгоритм децентрализованного вычисления градиента критерия оптимальности.

3. Распределенный дискретный информационный фильтр

Идея распределенной обработки измерительных данных состоит в возможности выражения глобальных обновлений информационного вектора и информационной матрицы через локальные [15]. Локальные обновления вычисляются в каждом узле и передаются всем остальным узлам. Распределенный дискретный информационный фильтр Калмана представим алгоритмом 1, в предположении, что все матрицы могут зависеть от модельного параметра θ , то есть $F_k = F_k(\theta)$, $D_k = D_k(\theta)$, $G_k = G_k(\theta)$ и т. д. Также предполагаем, что матрицы $F_k(\theta)$ являются неособенными для $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$, где $\mathcal{D}(\theta)$ – область определения параметра θ .

Алгоритм 1. Распределенный информационный фильтр Калмана.

For $k = \overline{1, K}$

I. Локальное обновление по времени

$$A_k = F_k^{-T} \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1}, \quad (3.1)$$

$$C_k = G_k^T A_k G_k + Q_k^{-1}, \quad (3.2)$$

$$L_k = A_k G_k C_k^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\tilde{y}_k = [I - L_k G_k^T] F_k^{-T} (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k), \quad (3.4)$$

$$\tilde{Y}_k = [I - L_k G_k^T] A_k. \quad (3.5)$$

II. Локальное обновление по измерениям

$$\Delta y_{i,k} = H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k}, \quad (3.6)$$

$$\Delta Y_{i,k} = H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T. \quad (3.7)$$

III. Коммуникация и ассимиляция

$$\hat{Y}_{i,k} = \tilde{Y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \Delta Y_{j,k}, \quad (3.8)$$

$$\hat{y}_{i,k} = \tilde{y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \Delta y_{j,k}. \quad (3.9)$$

Здесь $i = \overline{1, N}$. В любой момент времени k в каждом из N узлов мультисенсорной сети доступна оценка вектора состояния $\hat{x}_{i,k} = \hat{Y}_{i,k}^{-1} \hat{y}_{i,k}$.

End For

Как показано в [3], децентрализованный фильтр (3.1)–(3.9) эквивалентен централизованному (стандартному) алгоритму Калмана.

Для построения метода автоматического контроля оптимальности нам необходимо записать так называемые уравнения чувствительности, которые получаются в результате дифференцирования уравнений алгоритма фильтрации [16].

Применяя правила матричного-векторного дифференцирования, запишем уравнения чувствительности распределенного дискретного информационного фильтра. Предположим, что элементы всех матриц и векторов являются дифференцируемыми функциями по параметру $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$. Для простоты изложения считаем, что θ – скаляр.

Алгоритм 2. Уравнения чувствительности распределенного информационного фильтра.

For $k = \overline{1, K}$

I. Локальное обновление по времени

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} A_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-T} \right) \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} + F_k^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{k-1} \right) F_k^{-1} + F_k^{-T} \hat{Y}_{k-1} \frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1} &= -F_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k \right) F_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} C_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right) A_k G_k + G_k^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_k \right) G_k + G_k^T A_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k - Q_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} Q_k \right) Q_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} L_k &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_k \right) G_k C_k^{-1} + A_k \left(\frac{\partial}{\partial \theta} G_k \right) C_k^{-1} - A_k G_k C_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} C_k \right) C_k^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{y}_k &= - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_k \right) G_k^T + L_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right] F_k^{-T} (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k) + \\ &\quad + [I - L_k G_k^T] \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-T} \right) (\hat{y}_{k-1} + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} D_k u_k) + \\ &\quad + [I - L_k G_k^T] F_k^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}_{k-1} + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{k-1} \right) F_k^{-1} D_k u_k + \right. \\ &\quad \left. + \hat{Y}_{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_k^{-1} \right) D_k u_k + \hat{Y}_{k-1} F_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} D_k \right) u_k \right), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{Y}_k &= - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_k \right) G_k^T + L_k \frac{\partial}{\partial \theta} G_k^T \right] A_k + [I - L_k G_k^T] \frac{\partial}{\partial \theta} A_k. \end{aligned}$$

II. Локальное обновление по измерениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta y_{i,k} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T \right) R_{i,k}^{-1} z_{i,k} - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R_{i,k} \right) R_{i,k}^{-1} z_{i,k}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Y_{i,k} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T \right) R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T - H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R_{i,k} \right) R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^T + H_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} H_{i,k}^T. \end{aligned}$$

III. Коммуникация и ассимиляция

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{Y}_{i,k} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{Y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta Y_{j,k}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}_{i,k} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{y}_{i,k} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta y_{j,k}. \end{aligned}$$

Здесь $i = \overline{1, N}$.

End For

4. Новый метод автоматического контроля оптимальности

В качестве критерия оптимальности выберем отрицательную логарифмическую функцию правдоподобия [16]

$$\mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^K \left[\ln \det B_k + \|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 \right], \quad (4.1)$$

где m – общий размер векторов измерений; ν_k – невязка измерений; B_k – ковариационная матрица невязки измерений в стандартном алгоритме Калмана.

Обычно критерий (4.1) применяют для решения задачи идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем. Минимизация данного критерия позволяет получить оптимальные оценки параметра θ по данным измерений $Z_1^K = [z_1, \dots, z_K]^T$. Главная идея данной работы заключается в том, что критерий (4.1) позволяет использовать его не только в качестве инструмента идентификации параметров модели динамической системы, но и для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра. Условие близости к нулю градиента $\mathcal{J}(\theta, Z_1^K)$ должно выполняться в точке, соответствующей оптимальному значению параметра θ^* алгоритма калмановской фильтрации.

В случае дискретных линейных стохастических систем с обычной моделью измерений предложенный подход является очевидным. Однако, в случае стохастической системы с мультисенсорной моделью измерений для решения задачи контроля необходимо разработать метод вычисления значений критерия (4.1) и его градиента в терминах распределенного дискретного фильтра Калмана. Для этого в каждом узле сети должна быть доступна информация из всех других узлов, чтобы можно было вычислить полное значение критерия оптимальности и его градиента [17]. Это позволит автоматически контролировать оптимальность алгоритма фильтрации в каждом узле и скорейшим образом принять меры при нарушении «нормального» режима.

Предположим, что в текущий дискретный момент времени k значение параметра $\theta = \theta^*$. Тогда значение градиента критерия оптимальности теоретически равно нулю. Если затем в некоторый момент времени k_1 значение модельного параметра θ , соответствующее текущему режиму функционирования динамической системы, изменится, а в алгоритме распределенного дискретного фильтра значение модельного параметра θ останется равным θ^* , то значение градиента критерия (4.1) будет отлично от нуля с некоторым пороговым значением $\varepsilon > 0$, что свидетельствует о потере алгоритмом распределенной дискретной фильтрации свойства оптимальности. Изложенная идея была впервые представлена в [10] в отношении критерия вспомогательного функционала качества и дискретной линейной стохастической системы со стандартной моделью измерений.

Таким образом, критерий автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана будет иметь вид:

$$\|\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K)\| < \varepsilon, \quad (4.2)$$

где K – текущий отсчет времени. Следует отметить, что задача нахождения теоретической оценки порога ε в решающем правиле (4.2) выходит за рамки данной работы и будет рассмотрена в дальнейших исследованиях.

Для практической реализации метода автоматического контроля оптимальности разработаем алгоритм вычисления градиента критерия (4.1) в терминах алгоритмов 1 и 2.

Сформулируем основной теоретический результат работы.

Предложение 4.1. *Значения критерия оптимальности (4.1) и его градиента в терминах распределенного дискретного информационного фильтра Калмана можно вычислить согласно выражениям*

$$\mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \det \tilde{Y}_k - \ln \det \hat{Y}_k + \sum_{i=1}^N \ln \det R_{i,k} + \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k}^2 - \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k}^2 + \sum_{i=1}^N z_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} \right] \quad (4.3)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det \tilde{Y}_k - \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det \hat{Y}_k + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det R_{i,k} + \frac{\partial}{\partial \theta} \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k}^2 - \frac{\partial}{\partial \theta} \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \left(z_{i,k}^T R_{i,k}^{-1} z_{i,k} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Доказательство. Докажем, что выражения (4.1) и (4.3) алгебраически эквивалентны. Сначала покажем, что

$$\ln \det B_k = \ln \det R_k + \ln \det \tilde{Y}_k - \ln \det \hat{Y}_k \quad (4.5)$$

и

$$\ln \det R_k = \sum_{i=1}^N \ln \det R_{i,k}. \quad (4.6)$$

Пусть \tilde{S}_k и \hat{S}_k – квадратные корни Холецкого в разложении информационных матриц \tilde{Y}_k и \hat{Y}_k , то есть $\tilde{Y}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{S}_k$ и $\hat{Y}_k = \hat{S}_k^T \hat{S}_k$. Верхняя треугольная матрица $R_k^{1/2}$ – квадратный корень Холецкого в разложении ковариационной матрицы R_k . Используя уравнения квадратно-корневой модификации фильтра Калмана [18], нетрудно показать, что

$$\det B_k = \left(\frac{\det R_k^{1/2} \det \tilde{S}_k}{\det \hat{S}_k} \right)^2 = \frac{\det R_k^{1/2} \cdot \det R_k^{1/2} \cdot \det \tilde{S}_k \cdot \det \tilde{S}_k}{\det \hat{S}_k \cdot \det \hat{S}_k} = \frac{\det R_k \cdot \det \tilde{Y}_k}{\det \hat{Y}_k},$$

откуда по свойствам логарифма произведения и частного получаем (4.5).

В силу (2.3) ковариационная матрица $R_k = \text{diag}[R_{1,k}, \dots, R_{N,k}]$ – блочно-диагональная. Следовательно,

$$\det R_k = \sum_{i=1}^N \det R_{i,k},$$

откуда из свойств логарифма произведения следует выражение (4.6).

Теперь покажем, что

$$\|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k^{-1}}^2 - \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k^{-1}}^2 + \|R_k^{-1/2} z_k\|^2. \quad (4.7)$$

Учитывая связь между стандартным и квадратно-корневым информационными фильтрами, можно показать [17], что

$$\|\nu_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|\tilde{s}_k\|^2 - \|\hat{s}_k\|^2 + \|R_k^{-1/2} z_k\|^2, \quad (4.8)$$

где

$$\tilde{y}_k = \tilde{Y}_k \tilde{x}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{S}_k \tilde{x}_k, \quad \tilde{y}_k = \tilde{S}_k^T \tilde{s}_k, \quad \tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k = \tilde{s}_k$$

и

$$\hat{y}_k = \hat{Y}_k \hat{x}_k = \hat{S}_k^T \hat{S}_k \hat{x}_k, \quad \hat{y}_k = \hat{S}_k^T \hat{s}_k, \quad \hat{S}_k^{-T} \hat{y}_k = \hat{s}_k.$$

Тогда

$$\|\tilde{s}_k\|^2 = \|\tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k\|^2 = \tilde{y}_k^T \tilde{S}_k^{-1} \tilde{S}_k^{-T} \tilde{y}_k = \tilde{y}_k^T \tilde{Y}_k^{-1} \tilde{y}_k = \|\tilde{y}_k\|_{\tilde{Y}_k^{-1}}^2 \quad (4.9)$$

Аналогично,

$$\|\hat{s}_k\|^2 = \|\hat{y}_k\|_{\hat{Y}_k^{-1}}^2. \quad (4.10)$$

Подставив (4.9) и (4.10) в (4.8), получаем (4.7). Таким образом, эквивалентность выражений (4.1) и (4.3) доказана.

Выражение (4.4) получается прямым дифференцированием выражения (4.3).

Доказательство завершено.

Уточним некоторые детали реализации градиента критерия оптимальности (4.2).

1. Если параметр $\theta \in \mathbb{R}^p$ является векторным, то

$$\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \mathcal{J}(\theta, Z_1^K) \right]^T,$$

где каждый элемент вектора-градиента определяется выражением (4.4).

2. Пусть $A \equiv A(\theta)$ – параметризованная по θ квадратная невырожденная матрица. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \det A = \frac{1}{\det A} \frac{\partial}{\partial \theta} \det A = \text{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} A \right),$$

где $\text{tr}(A)$ – след матрицы A .

3. Пусть $x \equiv x(\theta)$ – вектор в \mathbb{R}^n , параметризованный по θ , $A \equiv A(\theta)$ – параметризованная по θ квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \|x\|_{A^{-1}}^2 &= \frac{\partial}{\partial \theta} (x^T A^{-1} x) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} x^T \right) A^{-1} x - x^T A^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A \right) A^{-1} x + x^T A^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} x \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} x^T \right) A^{-1} x - x^T A^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} A \right) A^{-1} x. \end{aligned}$$

5. Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение

Рассмотрим модель кругового движения объекта на плоскости, описываемую векторно-матричным уравнением [19]:

$$x_k = Fx_{k-1} + D^R u_k + Gw_k, \quad (5.1)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau & \omega^{-1} \sin \omega \tau \\ -\omega \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix},$$

$$D^R = \begin{bmatrix} (x_{1,0} + \omega^{-1} x_{4,0})(1 - \cos \omega \tau) \\ (\omega x_{1,0} + x_{4,0}) \sin \omega \tau \\ (x_{3,0} - \omega^{-1} x_{2,0})(1 - \cos \omega \tau) \\ (\omega x_{3,0} - x_{2,0}) \sin \omega \tau \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

k – дискретный отсчет времени, $x_k = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]_k^T$ – вектор состояния, τ – шаг дискретизации, $\omega = \frac{|v_0|}{r} > 0$, r – радиус поворота, $v_0 = \begin{bmatrix} x_{2,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix}$ – вектор скорости в начальной точке с координатами $(x_{1,0}, x_{3,0})$, $u_{k-1} \equiv 1$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$.

Модель (5.1) описывает движение объекта по часовой стрелке (поворот направо) из заданной начальной точки с постоянной скоростью.

Рассмотрим модель измерений с двумя сенсорами, измеряющими, соответственно, координаты x и y объекта:

$$z_{i,k} = H_{i,k} x_k + v_{i,k}, \quad i = 1, 2,$$

$$H_{1,k} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad R_{1,k} = 0.1; \quad H_{2,k} = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad R_{2,k} = 0.1.$$

Моделирование движения объекта и процесса контроля оптимальности будем проводить в системе MATLAB. Пусть $\tau = 0.1$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, 0.001I_2)$, $x_0 = [0 \ 2 \ 0 \ 2]^T$, $\theta = r$ и истинное значение параметра $\theta^* = 4$. Таким образом, подконтрольным параметром модели, значение которого может меняться, является радиус поворота. На рис. 5.1 приведен график траектории движения объекта и зашумленных измерений для $K = 50$, а на рис. 5.2 – соответствующие графики критерия оптимальности и его градиента, полученные по результатам 50 измерений для $\theta \in [1; 7]$.

Из приведенных на рис. 5.2 графиков видно, что вычисление критерия оптимальности и его градиента в обоих сенсорах происходит одинаково. Критерий оптимальности имеет минимум в точке θ^* , соответствующей оптимальному значению, а градиент критерия оптимальности при этом значении равен нулю.

Для настройки параметра θ могут быть использованы встроенные процедуры оптимизации MATLAB, например, `fminunc` для безусловной минимизации и `fmincon` для условной, причем предложенный в работе метод вычисления градиента критерия оптимальности позволяет использовать градиентные версии указанных функций. Для этого в настройках оптимизаторов нужно установить опцию `'SpecifyObjectiveGradient' = true` и запрограммировать целевую функцию для вычисления значений критерия идентификации и его градиента по выражениям (4.3) и (4.4).

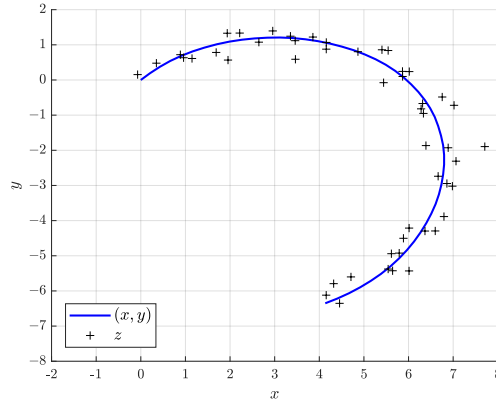


Рис. 5.1. Траектория объекта и измерения

Fig. 5.1. Object trajectory and measurements

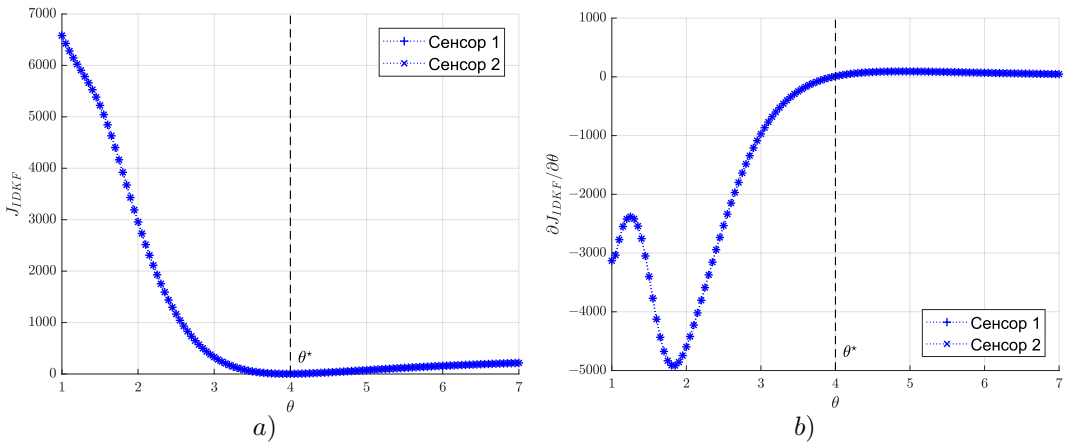


Рис. 5.2. а) Критерий оптимальности, б) градиент критерия оптимальности
Fig. 5.2. а) The optimality criterion, б) the gradient of the optimality criterion

В табл. 5.1 приведены усредненные результаты идентификации значения параметра θ обеими функциями для серии из 500 экспериментов. В качестве области поиска для функции `fmincon` использовался отрезок $[1; 7]$, а в качестве начального приближения для обеих функций в каждом эксперименте выбиралось случайное значение из данного отрезка. Из таблицы видно, что результаты идентификации значения параметра функциями `fmincon` и `fminunc` совпадают.

Теперь добавим к траектории объекта, изображенной на рис. 5.1, участок с поворотом против часовой стрелки длиной 20 тактов с тем же радиусом (рис. 5.3а). Модель кругового движения против часовой стрелки (поворот налево) отличается от мо-

Таблица 5.1. Результаты идентификации

Table 5.1. Identification results

Функция/Function	Среднее/Mean	RMSE	MAPE
fminunc	4.005086	0.059714	1.197523
fmincon	4.005086	0.059714	1.197523

дели (5.1) только матрицей управления:

$$D^L = \begin{bmatrix} (x_{1,0} - \omega^{-1}x_{4,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{1,0} - x_{4,0}) \sin \omega\tau \\ (x_{3,0} + \omega^{-1}x_{2,0})(1 - \cos \omega\tau) \\ (\omega x_{3,0} + x_{2,0}) \sin \omega\tau \end{bmatrix}.$$

Пусть истинное значение параметра $\theta^* = 4$ известно. На участке траектории, соответствующем повороту направо, значение градиента будет оставаться близким к нулю и удовлетворять условию $|\partial J/\partial\theta| < \varepsilon$, где ε – некоторый заданный порог, так как модель (5.1) с данным значением параметра будет являться оптимальной для распределенного фильтра. При смене режима движения значение модуля градиента начинает расти (рис. 5.3б), что говорит о необходимости повторной идентификации режима движения и перенастройки модельного параметра θ .

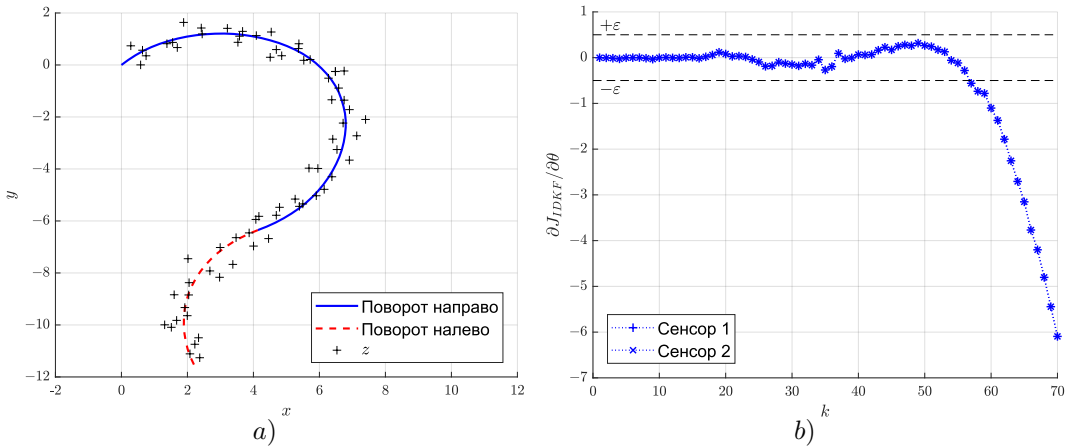


Рис. 5.3. а) Траектория объекта и измерения со сменой режима движения, б) градиент критерия оптимальности

Fig. 5.3. a) Object trajectory and measurements with changing motion mode, b) the gradient of the optimality criterion

6. Заключение

В работе предложен новый метод автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного фильтра Калмана, основанный на уравнениях чувствительности алгоритма распределенной дискретной фильтрации и равенстве нулю градиента

критерия оптимальности по модельному векторному параметру θ . Достоинства предложенного решения заключаются в следующем:

1. Выбор структуры адаптивного фильтра в виде распределенного дискретного информационного фильтра Калмана, дополненного возможностью вычисления функций чувствительности по модельному векторному параметру θ , позволяет вычислять градиент критерия оптимальности на каждом шаге работы алгоритма.
2. Выбор критерия оптимальности в форме квадратичного функционала позволяет автоматически контролировать оптимальность адаптивного дискретного распределенного фильтра по условию близости к нулю градиента критерия в точке минимума, что соответствует оптимальному значению θ^* модельного параметра θ .
3. Алгоритм вычисления градиента критерия оптимальности в адаптивном распределенном дискретном фильтре Калмана представлен в удобной рекуррентной форме и позволяет вычислить значение градиента критерия в каждом узле мультисенсорной сети.

Основным теоретическим результатом работы является Предложение 4.1, включающее все аспекты представленного вычислительного метода автоматического контроля оптимальности распределенного дискретного информационного фильтра Калмана.

Результаты работы могут найти применение при решении задач совместного контроля и идентификации параметров в классе дискретных линейных стохастических систем с мультисенсорной моделью измерений.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2025-066/1 от 19.03.2025 г. к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering : Theory and practice using MATLAB. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 401 p.
2. Mahmoud M., Khalid H. Distributed Kalman filtering: A bibliographic review. *IET Control Theory and Applications*. 2013. Vol. 7, no. 4. P. 483–501. DOI: 10.1049/iet-cta.2012.0467
3. Rao B. S., Durrant-Whyte H. F. Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. 1991. Vol. 138, no. 5. P. 413–420. DOI: 10.1049/ip-d.1991.0057
4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста; пер. с англ. И. Б. Вильховченко и др. М.: Мир, 1989. 280 с.

5. Lai T. L. Sequential Analysis: Some Classical Problems and New Challenges. *Statistica Sinica*. 2001. Vol. 11. P. 303–408.
6. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения : коллективная монография / И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова, М. В. Куликова и др. Ульяновск : УлГУ, 2011. 298 с. ISBN 978-5-88866-399-8.
7. Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. 2-е изд., новое. М. : МЦНМО, 2014. 144 с.
8. Basseville M., Nikiforov I. V. Detection of Abrupt Changes: Theory and Applications. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. 528 p.
9. Голован А. А., Мироновский Л. А. Алгоритмический контроль фильтра Калмана // *Автомат. и телемех.* 1993. № 7. С. 173–185.
10. Семушин И. В., Цыганова Ю. В., Цыганов А. В. Применение вспомогательного функционала качества для автоматического контроля оптимальности дискретного фильтра Калмана // *Вычислительные технологии*. 2020. Т. 25, № 3. С. 77–87. DOI: 10.25743/ICT.2020.25.3.009
11. Lai T. L. Sequential multiple testing and effective fault detection-isolation in stochastic systems. *IEEE Trans. Information Theory*. 2000. Vol. 46. P. 595–608. DOI: 10.1109/18.825826
12. Zhang Q., Basseville M., Benveniste A. Early Warning of Slight Changes in Systems and Plants with Application to Condition Based Maintenance. *Automatica*. 1994. Vol. 30, no. 1. P. 95–114.
13. Govaers F., Charlish A., Koch W. Covariance debiasing for the Distributed Kalman Filter. *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion (FUSION)*. Istanbul, Turkey, 2013. P. 61–67.
14. Reinhardt M., Noack B., Hanebeck U. D. The Hypothesizing Distributed Kalman Filter. *2012 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)*. Hamburg, Germany, 2012. P. 305–312. DOI: 10.1109/MFI.2012.6343017
15. Hidayat Z., Babuška R., De Schutter B., Núñez A. Decentralized Kalman filter comparison for distributed-parameter systems: A case study for a 1D heat conduction process. *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*. Toulouse, France, 2011. P. 1–8. DOI: 10.1109/ETFA.2011.6059054
16. Gibbs B. P., Andrews A. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011. 632 p.
17. Tsyganov A. V., Tsyganova Y. V. Parameter identification of discrete-time linear stochastic systems based on decentralized square-root information filtering. *Cybernetics and Physics*. 2025. Vol. 14, no. 2. P. 191–199.

18. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации. // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. DOI: 10.14529/mmp180401
19. Семушин И. В., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Голубков А. В., Винокуров С. Д. Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2017. Т. 10, № 3. С. 108–119. DOI: 10.14529/mmp170309

*Поступила 03.11.2025; доработана после рецензирования 12.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. M. S. Grewal, A. P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB*, Prentice Hall, New Jersey, 2001, 401 p.
2. M. Mahmoud, H. Khalid, “Distributed Kalman filtering: A bibliographic review”, *IET Control Theory and Applications*, **7**:4 (2013), 483–501. DOI: 10.1049/iet-cta.2012.0467
3. B. S. Rao, H. F. Durrant-Whyte, “Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering”, *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, **138**:5 (1991), 413–420. DOI: 10.1049/ip-d.1991.0057
4. M. Basseville, A. Benveniste (Eds.), *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*, Mir, Moscow, 1989, 280 p.
5. T. L. Lai, “Sequential analysis: some classical problems and new challenges”, *Statistica Sinica*, **11** (2001), 303–408.
6. I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova, M. V. Kulikova et al., *Adaptive Systems of Filtering, Control and Fault Detection*, USU, Ulyanovsk, 2011 (In Russ.), 298 p.
7. A. N. Shiryaev, *Veroyatnostno-statisticheskie metody v teorii prinjatija reshenij [Probabilistic-Statistical Methods in Decision Making Theory]*, 2nd ed., new, MCNMO, M., 2014 (In Russ.), 144 p.
8. M. Basseville, I. V. Nikiforov, *Detection of abrupt changes: theory and applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993, 528 p.
9. A. A. Golovan, L. A. Mironovskii, “Algorithmic control of a Kalman filter”, *Autom. Remote Control*, **54**:7 (1993), 1183–1194.
10. I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova, A. V. Tsyganov, “Application of an auxiliary quality functional for automatic control of the optimality of a discrete Kalman filter”, *Vychislitel’nye Tekhnologii [Computational Technologies]*, **25**:3 (2020), 77–87 (In Russ.). DOI: 10.25743/ICT.2020.25.3.009

11. T. L. Lai, “Sequential multiple testing and effective fault detection-isolation in stochastic systems”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **46** (2000), 595–608. DOI: 10.1109/18.825826
12. Q. Zhang, M. Basseville, A. Benveniste, “Early Warning of Slight Changes in Systems and Plants with Application to Condition Based Maintenance”, *Automatica*, **30**:1 (1994), 95–114.
13. F. Govaers, A. Charlish, W. Koch, “Covariance debiasing for the Distributed Kalman Filter”, *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion (FUSION)* (Istanbul, Turkey, 2013), IEEE, 2013, 61–67.
14. M. Reinhardt, B. Noack, U.D. Hanebeck, “The Hypothesizing Distributed Kalman Filter”, *2012 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)* (Hamburg, Germany, 2012), IEEE, 2012, 305–312 DOI: 10.1109/MFI.2012.6343017.
15. Z. Hidayat, R. Babuška, B. De Schutter, A. Núñez, “Decentralized Kalman filter comparison for distributed-parameter systems: A case study for a 1D heat conduction process”, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)* (Toulouse, France, 2011), IEEE, 2011, 1–8 DOI: 10.1109/ETFA.2011.6059054.
16. B. P. Gibbs, *Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011, 632 p.
17. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, “Parameter identification of discrete-time linear stochastic systems based on decentralized square-root information filtering”, *Cybernetics and Physics*, **14**:2 (2025), 191–199.
18. Yu. V. Tsyganova, M. V. Kulikova, “On modern array algorithms for optimal discrete filtering”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **11**:4 (2018), 5–30 (In Russ.). DOI: 10.14529/mmp180401
19. I. V. Semushin, A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. V. Golubkov, S. D. Vinokurov, “Modelling and estimation of a moving object trajectory”, *Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Model. Progr. Comput. Softw.*, **10**:3 (2017), 108–119. DOI: 10.14529/mmp170309

Submitted 03.11.2025; Revised 12.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

**Численное моделирование распространения
воздушной ударной волны на подвижной
неструктурированной сетке****Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский***Всероссийский научно исследовательский институт экспериментальной
физики (ВНИИЭФ) (г. Саров, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье представлена методика расчета для задач двумерной газовой динамики на геометрически адаптивных подвижных неструктурированных сетках. Геометрическая адаптация хорошо согласуется с подходом, основанным на выделении ударных волн и контактных разрывов как особенностей решения. Смещение внутренних узлов сетки восстановлено через интерполяцию смещения граничных узлов. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определены из задачи Римана о распаде разрыва. Проведена дискретизация исходных уравнений в интегральной форме. Повышение точности расчета достигнуто за счет определения предраспадных параметров потока с использованием линейной или квадратичной реконструкций решения. В сферически-симметричных задачах применен алгоритм доворота вектора скорости предраспадных векторов потока. Методика опробована на тестовых задачах и применена для решения задачи о распространении ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда на большое расстояние. На основе расчетных результатов получены зависимости избыточного давления от пройденного волной расстояния. Проведено численное исследование структуры потока за волной для больших пройденных расстояний. Численное исследование показало, что волна принимает N-форму, что согласуется с полученными ранее результатами исследований.

Ключевые слова: газовая динамика, ударная волна, неструктурированная сетка, метод Годунова, ЛОГОС-ВОЛНА

Для цитирования: Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. Численное моделирование распространения воздушной ударной волны на подвижной неструктурированной сетке // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 96–116. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116

Об авторах:

Веселова Елена Александровна, старший научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Дерюгин Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Зеленский Дмитрий Константинович, начальник лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), zdk@vniief.ru

© Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский



MSC2020 76L05, 65M50

Numerical modeling of air shock wave propagation on a moving unstructured mesh

E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky*Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics (RFNC-VNIIEF) (Sarov, Russian Federation)*

Abstract. The paper presents a methodology for numerical solution of two-dimensional gas dynamics problems using geometrically adaptive moving unstructured meshes. Geometric adaptation agrees well with an approach based on highlighting of shock waves and contact discontinuities as solution features. Displacement of internal mesh nodes is found via displacement of boundary nodes. Velocities of discontinuities and other their parameters are determined using Riemann's problem on a discontinuity breakup. Discretization of initial equations in an integral form is provided. Accuracy increase for the calculation is achieved by determination of pre-breakup flow parameters and by linear or quadratic reconstruction of the flow. In spherically-symmetric problems the algorithm of additional turn of pre-breakup flow velocity is applied. The method is tried out on test problems and applied to modelling of a shock wave that is induced by a spherical charge explosion and propagates over a large distance. Basing on calculation results dependencies of excessive pressure on a distance covered by the wave are obtained. Numerical investigation of the flow structure behind a wave is provided for large distances covered by this wave. Also numerical modelling demonstrated that the wave has N-form that is consequent with earlier results.

Keywords: gas dynamics, shock wave, unstructured mesh, Godunov method, LOGOS-WAVE

For citation: *E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky. Numerical modeling of air shock wave propagation on a moving unstructured mesh. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:1(2026), 96–116. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116*

About the authors:

Elena A. Veselova, Senior Researcher, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Yuriy N. Deryugin, D. Sci. (Phys. and Math.), Chief Researcher, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Dmitry K. Zelensky, Head of the Laboratory, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), zdk@vniief.ru

1. Введение

В ряде приложений возникает необходимость моделировать ударные волны на больших временах и расстояниях от места взрыва, когда на форму и скорость ударной волны могут влиять различные факторы [1–4].

В принципе, расчет распространения ударных волн возможен по любому многомерному газодинамическому коду. Однако в большинстве созданных программ расчет ударных волн проводится «сквозным» методом, который требует либо построения сеточной модели для всей области распространения волны, либо разработки специализированных алгоритмов адаптации сетки к области, где находится волна. Все это приводит к большим затратам вычислительных ресурсов.

В работах [5–6] был развит подход, основанный на выделении ударной волны в сочетании с адаптивной сеткой, подстраиваемой под ее движение. На основе такого подхода был создан ряд двумерных и трехмерных математических методик на блочных структурированных сетках. Однако использование структурированных сеток приводит к сильному ограничению на счетный шаг из-за малых размеров ячеек в области центра.

В данной работе рассматривается методика расчета двумерных задач газовой динамики на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Построение неструктурированной сетки в центральной части позволяет существенно увеличить счетный шаг и сократить время расчета. Геометрическая адаптация связана с выделением в решении основных особенностей, таких как ударные волны и контактные разрывы. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определяются из решения задачи Римана о распаде разрыва. Смещение внутренних узлов сетки определяется методом интерполяции по смещению граничных узлов.

Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме. При решении уравнений Эйлера численные конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной [7] либо квадратичной [8] реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности в численном решении применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [9]. Методика проверена на ряде тестовых и модельных задач [10–11].

Возможности методики иллюстрируются на задаче о распространении ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ) на большое расстояние. Для близких расстояний результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [12–13]. Для больших расстояний получена аппроксимационная зависимость избыточного давления от пройденного расстояния. Численно определена структура потока за волной, которая, с некоторого расстояния, принимает форму N-волны, предсказанной в работе [14].

2. Математическая модель

Рассматривается двумерное газодинамическое движение многокомпонентной сплошной среды. Исходные уравнения в виде законов сохранения имеют следующий вид [15]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial (y^\nu F_y)}{y^\nu \partial y} = \frac{\nu}{y^\nu} H, \quad (2.1)$$

где $\nu = 0$ для плоской и $\nu = 1$ для цилиндрической геометрии.

Вектора Q , F_x , F_y и H имеют следующие компоненты:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho C_\alpha \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho u E + p u \\ \rho u C_\alpha \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v E + p v \\ \rho v C_\alpha \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) замыкаются уравнением состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon, C_\alpha), \quad (2.3)$$

где

$$\varepsilon = E - \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (2.4)$$

Здесь используются общепринятые обозначения: t – время, (x, y) – декартовые либо цилиндрические координаты, ρ – плотность, (u, v) – компоненты вектора скорости, p – давление, ε – внутренняя энергия, E – полная энергия, C_α – массовая концентрация компонента α .

Границами расчетной области являются: границы симметрии потока, «жесткий» поршень, на котором задается нормальная скорость границы, «мягкий» поршень, когда задано давление, и ударная волна, на которой ставятся соотношения Ренкина-Гюнио [15].

3. Вычислительный алгоритм

Как и в работе [16], построение вычислительного алгоритма основано на конечно-объемном методе, в котором ячейки сетки являются произвольными многоугольниками. При описании дискретизации уравнений будем использовать обозначения из [16]. Рассматриваемую ячейку будем обозначать буквой P , грани ячейки – буквой f , соседнюю ячейку через грань f будем обозначать буквой E , узлы сетки – буквой k , периметр ячейки – $\partial\sigma$, площадь ячейки – σ , объем ячейки – Ω , поверхность, ограничивающую объем ячейки – $\partial\Omega$.

Определение нового положения сетки проводится по алгоритму из [16], в котором сначала разрешаются граничные условия на внешних и внутренних границах регионов методом распада разрыва [6], затем находится новое положение границ регионов, а затем по смещению границ регионов определяются смещения внутренних узлов разностной сетки. По вычисленным координатам разностной сетки определяется скорость движения узлов каждой грани. В результате на два момента времени t^n и t^{n+1} определены координаты узлов сетки.

Для построения дискретных уравнений умножим уравнения (2.1) на y^ν и проинтегрируем их по подвижной области ячейки. В результате, на основании формулы Гаусса-Остроградского и правила Лейбница, получим следующую форму уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial\Omega} (F_n - QW_n) dS = \int_{\Omega} \frac{\nu}{y^\nu} H dV, \quad (3.1)$$

где $dV = y^\nu dx dy$ – объем ячейки, $dS = y^\nu \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – площадь грани, $F_n - QW_n = n_x F_x + n_y F_y - QW_n$ – вектор конвективного потока через подвижную грань ячейки,

$\vec{n} = (n_x, n_y)$ – единичный вектор нормали к грани, W_n – нормальная скорость движения грани, которая определяется по величине заметаемого объема.

Будем аппроксимировать интегралы в (3.1) по квадратурной формуле трапеций со средней точкой. В качестве среднего значения функции в ячейке примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани примем ее значение в центре грани. Тогда получим следующие полудискретные уравнения:

$$\frac{(Q \Delta V)_P^{n+1} - (Q \Delta V)_P^n}{\tau} + \sum_f (F_n - QW_n)_f \Delta S_f = \left(\frac{\nu}{y^\nu} H \right)_P^n. \quad (3.2)$$

Для того, чтобы при движении сетки постоянное поле потока ($\rho^0, u^0, v = 0, p^0$) оставалось постоянным в осесимметричном случае (постоянное течение в осесимметричном случае возможно только по осевой координате), должно выполняться дополнительное условие:

$$\oint_{\partial\Omega} p n_y dS = \int_{\Omega} \frac{p}{y} dV, \quad (3.3)$$

которое в разностях принимает вид:

$$\sum_f (n_y \Delta S)_f = \frac{\Delta V_P^n + \Delta V_P^{n+1}}{2y_P}. \quad (3.4)$$

Откуда определяется значение y_P как координата y центра ячейки P на текущий момент времени:

$$y_P = \frac{0.5(\Delta V_P^n + \Delta V_P^{n+1})}{\sum_f (n_y \Delta S)_f}. \quad (3.5)$$

В нестационарных расчетах значение давления в центре ячейки в правой части уравнения (3.3) определяется по формуле

$$p_P = \frac{\sum_f P_f \Delta S_f}{\sum_f \Delta S_f}, \quad (3.6)$$

где P_f – давление на грани ячейки, определяемое из решения задачи о распаде разрыва.

Отметим, что при использовании такого алгоритма расчета правой части уравнения сохранения количества движения по координате y в осесимметричном случае постоянное поле на подвижной сетке при ее движении по x и y направлениям сохраняется с точностью машинного округления.

Для расчета конвективных потоков в целях повышения разрешающей способности разностной схемы проводится реконструкция решения, заключающаяся в определении предраспадных параметров потока слева и справа от грани. Левое и правое направление на грани определяется направлением нормали на этой грани.

В стандартной схеме Годунова потоки на гранях определяются из решения задачи о распаде разрыва при кусочно-постоянном распределении параметров. Относительно направления внешней нормали на грани f ячейки P кусочно-постоянную реконструкцию расчетных параметров потока $\varphi_f = (\rho, u, v, p, \varepsilon)_f$ можно записать в виде

$$\varphi_{f,L} = \varphi_P, \quad \varphi_{f,R} = \varphi_E. \quad (3.7)$$

Входящее в формулы (3.15) и (3.16) значение градиента примитивных параметров ($\nabla\varphi$) в ячейках сетки определяется методом Грина-Гаусса либо методом наименьших квадратов [17].

Необходимым условием невозрастания полной вариации (условие TVD) [8] для схем реконструкции первого порядка точности является ограничение функции $\psi(r)$ следующими условиями:

$$0 \leq \psi(r) \leq \min\{2r, 2\}, \quad (3.18)$$

а для схем второго порядка точности условием:

$$\psi_{\min}(r) \leq \psi(r) \leq \psi_{\max}(r), \quad (3.19)$$

где

$$\psi_{\min}(r) = \max\{0, \min(1, r)\}, \quad (3.20)$$

$$\psi_{\max}(r) = \max\{0, \min(2r, 1), \min(r, 2)\}. \quad (3.21)$$

В ряде работ были предложены различные алгоритмы определения функции ограничителя потока. В данной работе использовались новые ограничители, которые мы назвали Gibrid-1 и Gibrid-2:

$$1) \psi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r^{3/4}, & 0 < r \leq 1, \\ r^{1/4}, & 1 < r < 16, \\ 2, & 16 < r, \end{cases} \quad \text{Gibrid-1}, \quad (3.22)$$

$$2) \psi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r^{7/8}, & 0 < r \leq 1, \\ r^{1/8}, & 1 < r < 256, \\ 2, & 256 < r. \end{cases} \quad \text{Gibrid-2}. \quad (3.23)$$

Графики функций ограничителей потока Gibrid-1 и Gibrid-2 в допустимой области приведены на рис. 3.2.

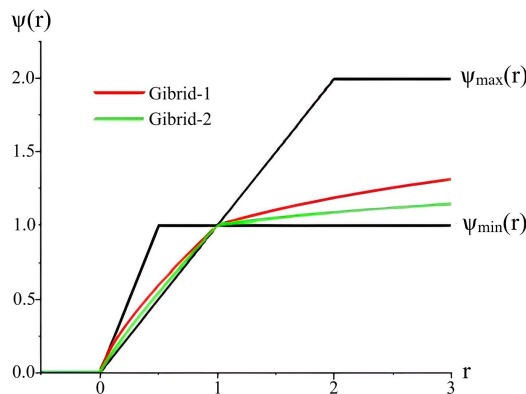


Рис. 3.2. Графики изменения функции ограничителя потока

Fig. 3.2. Flow limiter function graphs

Для одномерной квадратичной реконструкции параметров на неструктурированной сетке строится шаблон из четырех точек (рис. 3.3), которые определяются на прямой, проходящей ортогонально через центр грани. Координаты точек шаблона находятся пересечением прямой с ортогональными линиями, проведенными через центры ячеек. Значение параметров в точках шаблона определяются с использованием вычисления градиентов в центрах ячеек:

$$\varphi_{P'} = \varphi_P + ((\nabla\varphi)_P \cdot \Delta R_{PP'}). \tag{3.24}$$

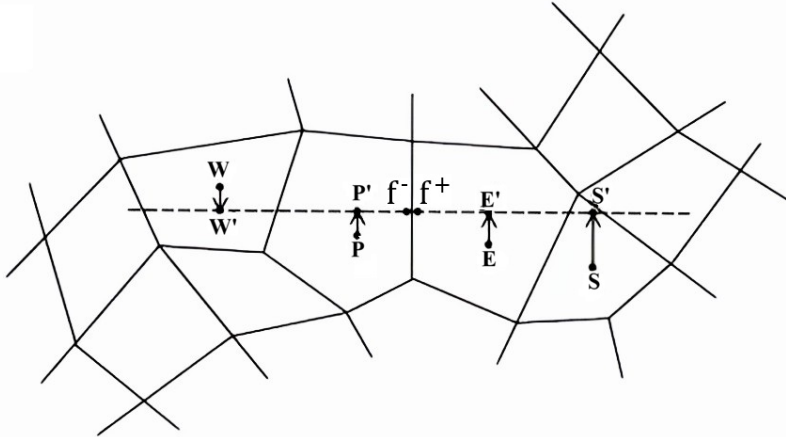


Рис. 3.3. Шаблон точек для квадратичной реконструкции решения

Fig. 3.3. The stencil points for quadratic reconstruction

В квадратичной реконструкции [8] параметры слева и справа от грани f определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_{f-} &= \varphi_{P'} + \frac{1}{6} \left[2(\Delta\varphi)_{P'}^+ + (\Delta\varphi)_{P'}^- \right], \\ \varphi_{f+} &= \varphi_{E'} - \frac{1}{6} \left[2(\Delta\varphi)_{E'}^- + (\Delta\varphi)_{E'}^+ \right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi)_{P'}^+ &= \text{minmod} \left\{ (\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), 2 \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{W'P'}|} (\varphi_{P'} - \varphi_{W'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{P'}^- &= \text{minmod} \left\{ 2(\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{W'P'}|} (\varphi_{P'} - \varphi_{W'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{E'}^- &= \text{minmod} \left\{ (\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), 2 \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{S'E'}|} (\varphi_{S'} - \varphi_{E'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{E'}^+ &= \text{minmod} \left\{ 2(\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{S'E'}|} (\varphi_{S'} - \varphi_{E'}) \right\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для решения самой задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) могут использоваться различные допущения, приводящие к различным алгоритмам. В данной работе используются модификация алгоритмов из монографии [5]: звуковой (приближенный) распад разрыва и точное решение автомодельной задачи о распаде разрыва с кусочно-постоянными начальными параметрами потока.

Для расчета задачи о распаде разрыва, когда среды описываются сложными уравнениями состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon, C_\alpha), \quad (3.27)$$

созданные алгоритмы, в которых это уравнение состояния аппроксимируется двучленным уравнением состояния, требуют еще и обращенного уравнения состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$, что для табличных уравнений состояния является весьма проблематичным. В модифицированном алгоритме при решении задачи о распаде разрыва не требуется обращенного уравнения состояния.

В этом алгоритме внутренняя энергия на ударной волне определяется по соотношению на ударной волне

$$E = \varepsilon + \frac{1}{2}(P + p) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.28)$$

а на волне разрежения по двучленному уравнению состояния

$$E = \left(\frac{P + \gamma p_0}{R} - z_0 \right) \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (3.29)$$

где γ , p_0 и z_0 – параметры двучленного уравнения состояния [6].

Такой способ определения внутренней энергии за волной разрежения хорошо отражает постоянство энтропии, что было проверено на ряде тестовых расчетов.

При расчете осесимметричных задач возникает один счетный феномен, который проявляется в нарушении симметрии сферически симметричных течений. Одним из факторов, приводящих к нарушению симметрии, является ошибка в определении направления вектора скорости в предраспадных параметрах. В данной работе для уменьшения возникающей счетной ошибки в расчете осесимметричных задач используется алгоритм «доворота» вектора скорости.

Для этого вектор скорости в ячейках сетки представляется в виде

$$U = (u, w) = (U \cos \psi, U \sin \psi) = (U, \psi), \quad (3.30)$$

где U – вектор скорости, а ψ – угол между вектором скорости и осью x . Значение угла вектора скорости на грани определяется по формуле

$$\psi_f = \psi_P + (\nabla \psi)_P \cdot \Delta R_{Pf}, \quad (3.31)$$

где градиент $(\nabla \psi)_P$ в ячейках сетки определяется методом Грина-Гаусса. Модуль вектора скорости на грани определяется по используемому в расчете алгоритму реконструкции определение предраспадных параметров потока.

Для применения параллельных вычислений проводится декомпозиция расчетной модели на заданное число процессоров. При этом на каждом процессоре формируется массив координат узлов внешних и внутренних границ всех регионов расчетной сетки. Затем для каждого фрагмента сетки формируются обменные слои ячеек. В процессе вычислений в конце каждого расчетного этапа выполняется обмен данными между процессорами. Межпроцессорное взаимодействие осуществляется с помощью асинхронных

функций библиотеки MPI – MPI_Irecv, MPI_Isend. По завершению расчётного шага выполняются коллективные операции при вычислении невязок решения, расчёта интегральных величин и определения нового значения расчётного шага по времени.

Расчетная методика проверена на ряде тестовых и модельных задач, принятых для тестирования двумерных методик [10–11]. В частности, была решена задача о сферически-симметричном движении газа, возникающем в результате взрыва в однородном веществе без противодействия [10]. Постановка задачи принята следующей.

В шаре радиусом $R_1^0 = 0.1$ (область 1) задана начальная внутренняя энергия единицы массы $\varepsilon_1^0 = 10^7$. Этот шар находится в бесконечном пространстве среды, имеющей начальную энергию $\varepsilon_2^0 = 0$, в расчетах задаваемым сферическим слоем $0.1 \leq R_2^0 \leq 0.2$ (область 2). Начальная плотность в областях 1 и 2 $\rho^0 = 1$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 1.4$. Закон движения фронта ударной волны $R(t)$ описывается соотношением [18]:

$$R(t) = \alpha \left(\frac{E_B}{\rho^0} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad (3.32)$$

где $E_B = \frac{4}{3} \pi (R_1^0)^3 \rho^0 \varepsilon_1^0 = 4.189 \cdot 10^4$ – энергия взрыва, α – константа, равная 1.0328 для случая $\gamma = 1.4$.

Расчеты для этой задачи были проведены на различном числе точек по радиусу. В области 1 по радиусу задавалось 10, 20 и 40 точек, в области 2: 100, 200 и 400 точек. По углу в обеих областях задавалось 30 точек. Ударная волна выделялась с $R = 0.2$. Расчет проводился до момента времени, когда ударная волна выходит на радиус $2000 R_1^0$. На рис. 3.4 приведены $R(t)$ -диаграммы движения фронта ударной волны, полученные в расчетах на разных сетках в сравнении с точным решением (3.32). Видно, что кривые практически совпадают.

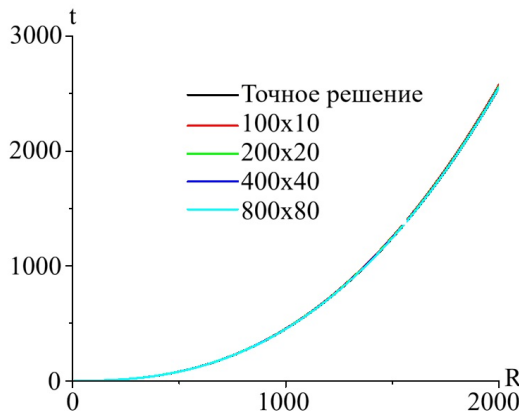


Рис. 3.4. $R(t)$ -диаграммы движения фронта ударной волны

Fig. 3.4. $R(t)$ -diagram of the shock front motion

На рис. 3.5 показаны изменения относительной погрешности

$$\delta = \left| \frac{R_{\text{уб}} - R(t)}{R(t)} \right| \quad (3.33)$$

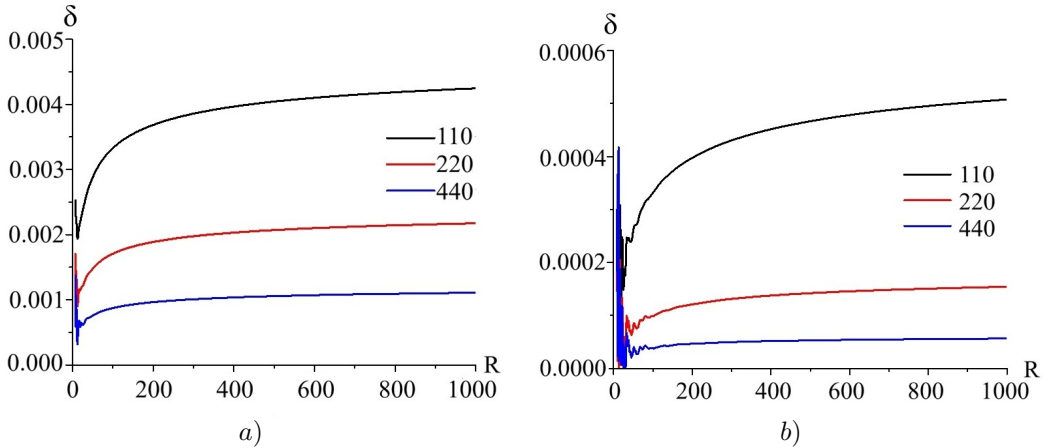


Рис. 3.5. Зависимости относительной погрешности определения координаты ударной волны от числа точек по радиальной координате: а) базовая схема Годунова, б) схема с линейной реконструкцией

Fig. 3.5. Dependences of the relative error in determining the coordinates of a shock wave on the number of points along the radial coordinate: а) basic Godunov scheme, б) scheme with linear reconstruction

определения положения ударной волны ($R_{УВ}$) на разных сетках без реконструкции (рис. 3.5а) и с использованием линейной реконструкции (рис. 3.5б). Оценка порядка сходимости (β) численного решения по формуле

$$\beta = \frac{1}{\ln 2} \frac{\ln \varepsilon_h}{\ln \varepsilon_{h/2}}, \quad (3.34)$$

для базовой схемы дает значение $\beta_B \approx 1$, а для схемы с линейной реконструкцией $\beta_R \approx 1.5$.

В то же время отношение погрешностей базовой схемы ($\varepsilon_B = M_B h^{\beta_B}$) к погрешности схемы с реконструкцией ($\varepsilon_R = M_R h^{\beta_R}$) в большей степени определяется отношением M_B/M_R , которое говорит о разрешающей способности разностной схемы. На этой задаче $M_B/M_R \approx 10$, т.е. расчеты с реконструкцией на порядок точнее, чем расчеты без реконструкции. Расчеты для этой задачи были проведены с использованием различных ограничителей. Наилучшие результаты были получены с предложенным ограничителем Gibrid-2. Результаты расчетов с квадратичной реконструкцией показали такую же погрешность, что и результаты расчетов с линейной реконструкцией.

4. Результаты расчетов распространения воздушной ударной волны

Рассматривается задача о распространении на значительные расстояния от эпицентра взрыва воздушной ударной волны, образующейся при взрыве горючих или взрывчатых веществ. Из опытов известно [12–13], что действие взрыва компактного заряда ВВ

произвольной формы на расстояниях, превышающих его характерные размеры, эквивалентно действию взрыва сферического заряда той же массы. Из теории подобия и размерности [18] следует, что при взрыве на границе области возмущенного движения газа на расстояниях, превышающих характерные размеры области выделения энергии, параметры на волне и структура потока за волной зависят только от параметров невозмущенного воздуха и энергии, выделившейся при взрыве. Все зависимые размерные параметры зависят только от трех безразмерных величин:

$$\gamma, \quad \lambda = \frac{\rho_1^{1/5} x}{E_{\text{ВВ}}^{1/5} t^{2/5}}, \quad \tau = \frac{p_1^{5/6} t}{E_{\text{ВВ}}^{1/3} \rho_1^{1/2}}, \quad (4.1)$$

где γ – показатель адиабаты, ρ_1 и p_1 – плотность и давление невозмущенного воздуха, а $E_{\text{ВВ}}$ – энергия взрыва.

Основным параметром ударной волны, определяющим ее воздействие на различные объекты, является избыточное давление Δp , которое зависит от определяющих параметров

$$\Delta p = \Psi(E_{\text{ВВ}}, \gamma, p_1, \rho_1, t, x_W), \quad (4.2)$$

где x_W – координата волны.

Для определения зависимости (4.2) для различных энергий взрыва при фиксированных параметрах невозмущенного воздуха достаточно провести один прецизионный расчет при взрыве произвольного ВВ с заданной энергией взрыва и получить две табличные зависимости:

$$\lambda = \lambda(\tau), \quad (4.3)$$

и

$$\Delta p = \Delta p(\lambda). \quad (4.4)$$

Отметим, что первая зависимость (4.3) является $R(t)$ -диаграммой ударной волны в безразмерных переменных, а вторая зависимость – изменением избыточного давления (амплитуды) на ударной волне в зависимости от безразмерного положения ударной волны.

По заданному избыточному давлению интерполяцией по таблице $\Delta p(\lambda)$ определяется безразмерная координата λ . Затем по таблице $\lambda = \lambda(\tau)$ определяется параметр τ . Для заданного расстояния x , на котором должен реализовываться заданный перепад давления, энергия взрыва и время прихода волны определяются из системы уравнений (4.1).

Поскольку для сферической ударной волны избыточное давление не зависит от формы и свойства ВВ, а определяется только энергией взрыва и параметрами воздуха, то в качестве взрывчатого вещества был взят тротил (ГНТ), поскольку энергия взрыва измеряется в тротиловом эквиваленте [19]. При взрыве 1 грамма тротила выделяется 1000 термохимических калорий или 4184 джоуля энергии.

Расчеты проводились в двухобластной постановке: область ВВ и область воздуха. В расчетах выделялась контактная граница и ударная волна. В области ВВ строилась неструктурированная сетка. В области воздуха строилась «лучевая» структурированная сетка с 30 точками по углу и 1000 точками по радиусу. Для описания термодинамических свойств тротила использовалось уравнение состояния Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) [12]. Невозмущенные параметры воздуха полагались следующими:

$$\rho_1 = 0.001225 \text{ г/см}^3, \quad p_1 = 1.01325 \text{ бар.}$$

На рис. 4.1 приведены расчетные зависимости $\lambda = \lambda(\tau)$. На рис. 4.2 – расчетная зависимость изменения избыточного давления на волне $\Delta p/p_1 = \Psi(\lambda)$. Эти зависимости были рассчитаны для значений энергии взрыва, приведенных на рисунках. Как видно из графиков, эти кривые полностью совпадают.

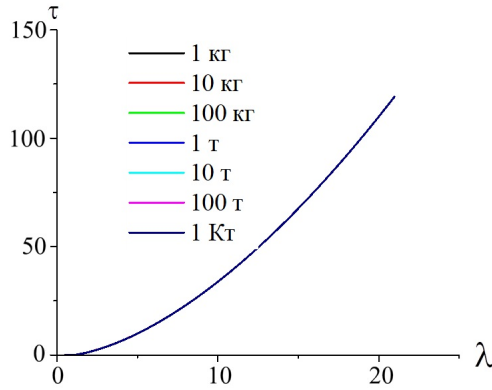


Рис. 4.1. $R(t)$ -диаграммы ударной волны для различных мощностей взрыва в безразмерных переменных $\lambda = \lambda(\tau)$

Fig. 4.1. $R(t)$ -diagram of the shock wave for various explosion energies in dimensionless variables $\lambda = \lambda(\tau)$

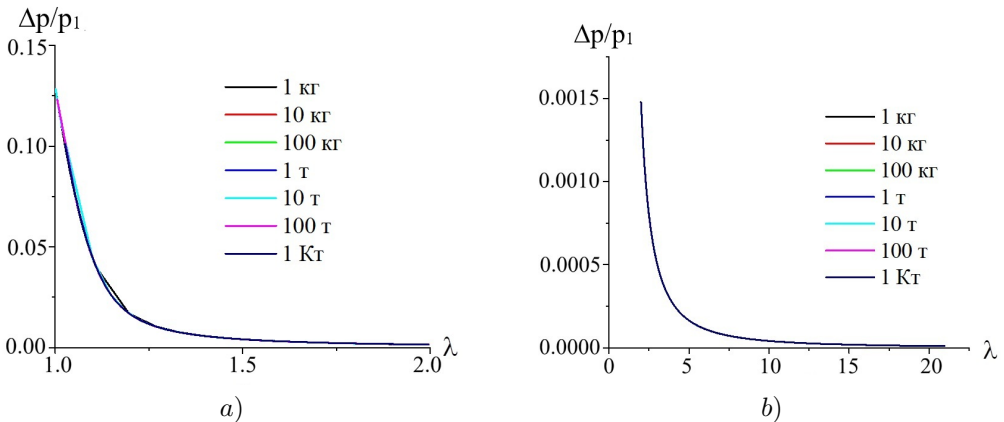


Рис. 4.2. Изменение избыточного давления на волне в зависимости от безразмерного параметра $\lambda = \lambda(\tau)$

Fig. 4.2. Overpressure variation on the wave depending on the dimensionless parameter $\lambda = \lambda(\tau)$

Для определения избыточного давления при взрыве заряда с заданной энергией вместо табличных зависимостей можно воспользоваться следующими аппроксимаци-

онными формулами:

$$\lambda(\tau) = \sum_{j=1}^7 C_j \tau^{1+\frac{1}{4}(j-1)}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda) = 10^4 \cdot \sum_{j=1}^7 C_j \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+\frac{1}{4}(j-1)}, \tag{4.6}$$

которые с погрешностью менее одного процента воспроизводят табличные зависимости. Значение констант аппроксимационных формул приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Константы аппроксимационных формул
Table 4.1. Constants of approximation formulas

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\lambda(\tau)$	1.6555	-0.68564	0.1251	-0.012425	$6.9912 \cdot 10^{-4}$	$-2.0997 \cdot 10^{-5}$	$2.6213 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda), \lambda < 50$	12.248	-123.75	498.74	-1024	1134.6	-642.41	144.26
$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda), \lambda > 50$	0.42468	-8.6729	74.543	-332.05	804.68	-1008.8	525.48

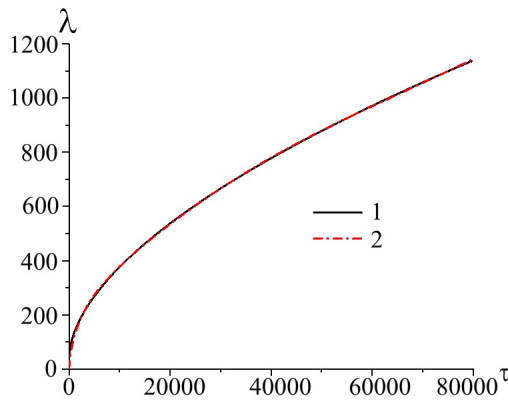


Рис. 4.3. Зависимость безразмерного положения ударной волны от безразмерного времени: 1 – расчетное значение, 2 – значение по аппроксимационной формуле (4.5)

Fig. 4.3. Dependence of dimensionless shock position on dimensionless time: 1 – computed value, 2 – value, approximated by (4.5)

Сравнение расчетных и аппроксимационных зависимостей приводится на рис. 4.3-4.4. На рис. 4.3 показаны зависимости безразмерного положения ударной волны от безразмерного времени $\lambda = \lambda(\tau)$, а на рис. 4.4 приведены зависимости безразмерного значения избыточного давления от безразмерного положения ударной волны $\Delta p/p_1 = \Psi(\lambda)$.

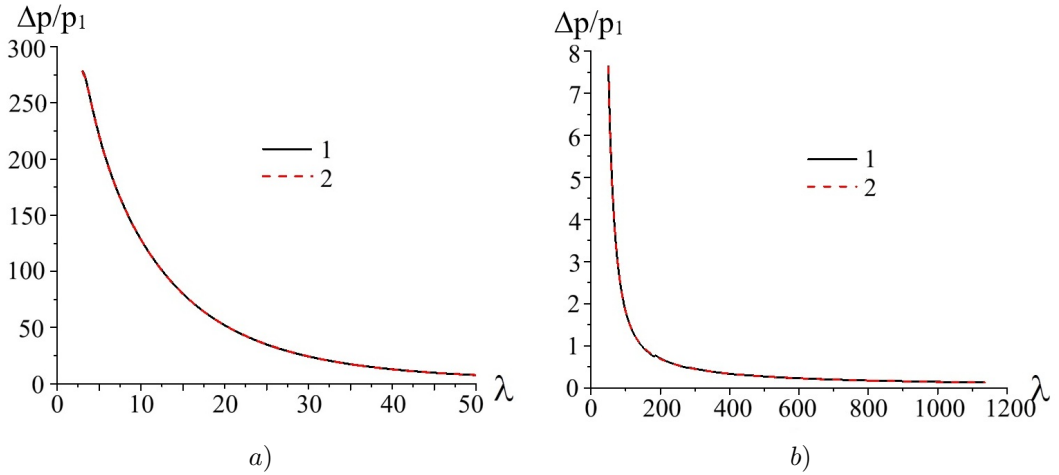


Рис. 4.4. Зависимость избыточного давления от безразмерного положения ударной волны, 1 – расчетное значение, 2 – значение по аппроксимационной формуле: а) изменение избыточного давления в интервале $5 < \lambda < 50$, б) изменение избыточного давления в интервале $50 < \lambda < 1200$

Fig. 4.4. Dependence of overpressure on the dimensionless position of the shock wave, 1 – the calculated value, 2 – the value according to the approximation formula: а) change in excess pressure in the range $5 < \lambda < 50$, б) change in excess pressure in the range $50 < \lambda < 1200$

Интересно отметить, что расчетные структуры потока на расстояниях $R_{УВ}/R_{ВВ} < 100$ полностью воспроизводят структуры потока за волной, исследованные экспериментально и расчетно в целом ряде работ, обобщение которых дано в монографиях [12–13]. В данной работе с использованием алгоритма выделения ударной волны и подвижных сеток была численно определена структура потока для $100 < R_{УВ}/R_{ВВ} < 10000$. Начиная с расстояния $R_{УВ}/R_{ВВ} \geq 200$ происходит отрыв волновой структуры от эпицентра взрыва, где образуется зона неподвижного газа с атмосферным давлением. Отошедшая волновая структура приобретает форму уединенной N-волны, предсказанной в работе [14]. На рис. 4.5 показано распределение давления и модуля вектора скорости на момент времени, в который $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$. Избыточное давление на этот момент времени составляет 160 Па, т.е. на расстояния $R_{УВ}/R_{ВВ} > 5000$ ударная волна вырождается в звуковую волну. Профили волны имеют подобное распределение для различных мощностей взрыва, а длительность звукового удара определяется только массой заряда.

Для описания распространения N-волны был проведен расчет взрыва сферического заряда массой 1 кг в воздухе. На момент времени, когда ударная волна прошла расстояние 36.7 м, были записаны профили расчетных параметров. На рис. 4.6 показаны расчетные кривые распределений давления и модуля вектора скорости по радиальной координате на этот момент времени.

С использованием полученных данных был проведен расчет распространения N-волны до расстояния 350 м. Расчет проводился в цилиндрических координатах на подвижной сетке. В этой задаче верхняя и нижняя границы являются границами удар-

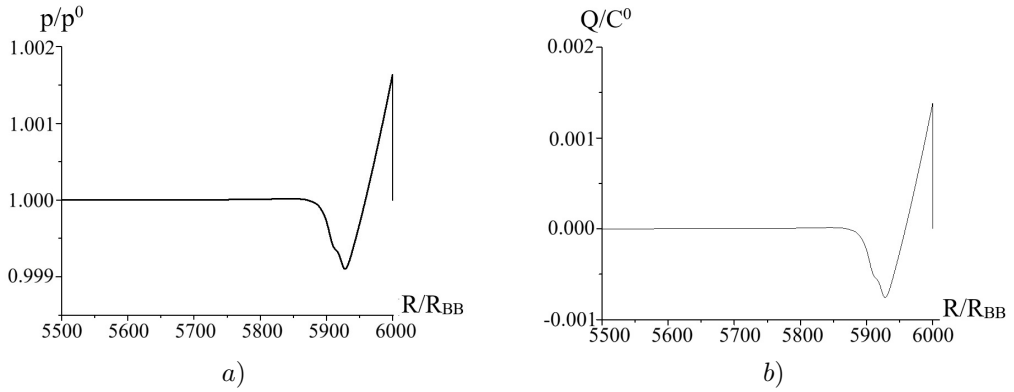


Рис. 4.5. Распределение параметров на момент времени $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$:
а) давление, б) модуль скорости

Fig. 4.5. Distribution of parameters at the time $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$:
а) pressure, б) velocity module

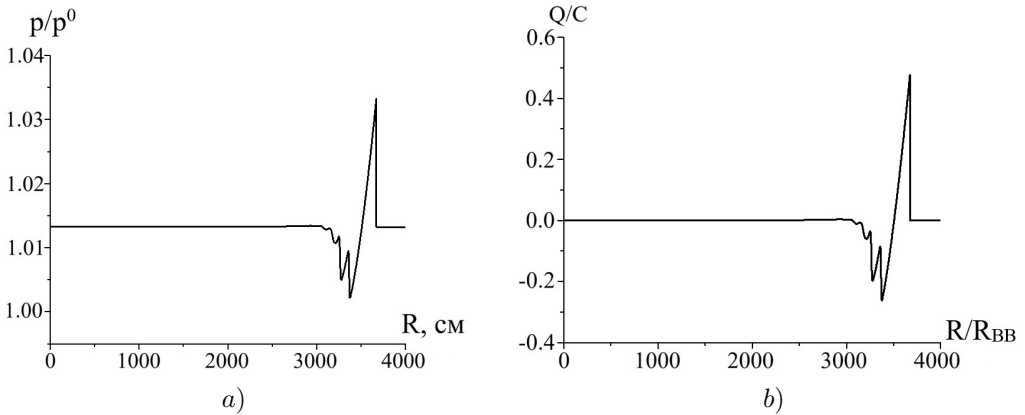


Рис. 4.6. Распределение параметров на момент времени $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$:
а) давление, б) модуль скорости

Fig. 4.6. Distribution of parameters at the moment of time $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$:
а) pressure, б) velocity module

ной волны. Боковые границы являются осями симметрии. Расчетная сетка содержит 180×400 точек. На рис. 4.7 показана расчетная геометрия и поле давления на начальный момент времени. На рис. 4.8 показана расчетная геометрия и поле давления на момент времени, когда ударная волна достигла 300 м. На рис. 4.9 показаны профили давлений на последовательные моменты времени, когда ударная волна выходит на заданные радиусы. На этом рисунке в качестве нулевой координаты взято значение радиуса, где избыточное давление обращается в ноль. Из анализа результатов следует, что фаза отрицательного избыточного давления имеет практически постоянный размер и постоянную длительность. С течением времени ее минимальное значение асимптотиче-

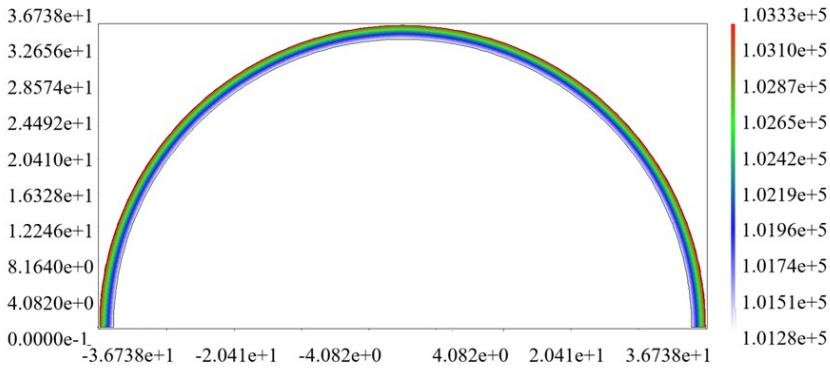


Рис. 4.7. Геометрия области и распределение давления на начальный момент времени: $R_{УВ} = 36.7$ м, $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$

Fig. 4.7. Domain geometry and pressure distribution at the initial moment of time: $R_{УВ} = 36.7$ м, $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$

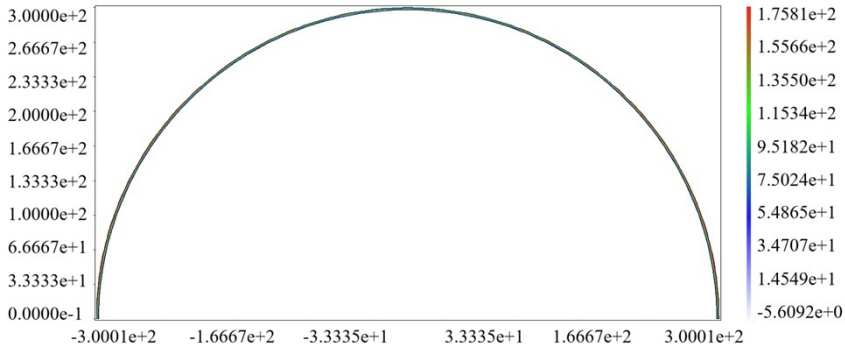


Рис. 4.8. Геометрия области и распределение давления на момент времени, когда $R_{УВ} = 300$ м

Fig. 4.8. Domain geometry and pressure distribution at the time when $R_{УВ} = 300$ m

ски стремится к нулю. Фаза положительного избыточного давления увеличивается с течением времени пропорционально $(R_{УВ}/R_{УВ}^0)^{1/3}$, а максимальное избыточное давление асимптотически стремится к нулю, что хорошо описывается зависимостями (4.5)–(4.6).

5. Заключение

В работе создана двумерная параллельная методика расчета уравнений газовой динамики на подвижной неструктурированной сетке. Методика предназначена для расчета распространения ударной волны в различных средах. С использованием методики проведены расчеты распространения воздушной ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда ВВ на большие расстояния. Для близких расстояний результаты

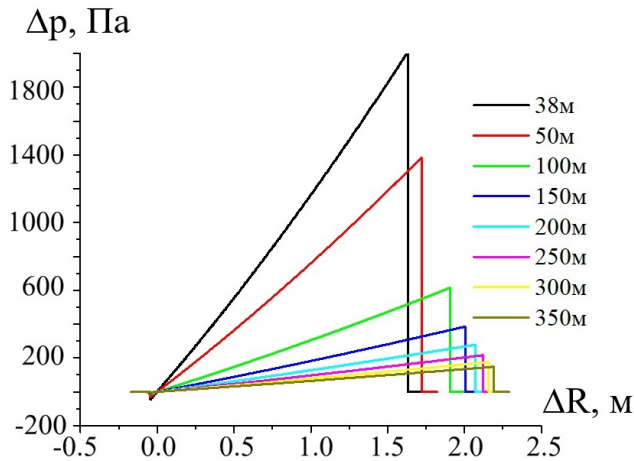


Рис. 4.9. Профили давления на последовательные моменты времени

Fig. 4.9. Pressure profiles at successive time moments

расчетов хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными, представленными в [12–13]. Для больших расстояний получена аппроксимационная зависимость избыточного давления от пройденного расстояния. Численно определена структура потока за волной, которая после прохождения некоторого расстояния принимает форму N-волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бруд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ. Подземные взрывы (Сб. «Механика», № 3). М.: Мир, 1975. 164 с.
2. Зайдель Р. М. Влияние начальной разноплотности на движение ударной волны // *Изв. АН СССР, МЖГ*. 1968. № 4. С. 152–162.
3. Vishiac E. T. The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks. *Astrophysical Journal*. 1983. Vol. 274, No. 1. P. 152–167.
4. Ктиторов В. М. // *ВАНТ. Сер. ТуПФ*. 1984. № 2(2). С. 28.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // *ЖВМиМФ*. Т. 1, № 6. С. 1020–1050.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ*. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.

8. Hirsch Ch. Numerical computation of internal & external flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Wiley, 1988. 515 p.
9. Матяш С. В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации // *Ученые записки ЦАГИ*. 2005. Т. 36, № 3–4. С. 42–50.
10. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требование к тестам. Тесты 1–7 // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 2. 1991. С. 3–9.
11. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 2. Требование к тестам. Тесты 8–13 // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 2. 1992. С. 3–13.
12. Физика взрыва. Т. 1 / Под ред. Л. П. Орленко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 824 с.
13. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 855 с.
14. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 504–512.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
16. Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. Методика «ЛОГОС-ВОЛНА» расчета двумерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности на подвижных неструктурированных сетках // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 4. 2021. С. 50–66.
17. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. 3rd rev. ed. Springer, 2002. 596 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99693-6
18. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 438 с.
19. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.

*Поступила 25.12.2025; доработана после рецензирования 06.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. H. L. Brode, *Computer calculations of explosions. Underground explosions*, Mir, Moscow, 1975 (In Russ.), 164 p.

2. R. M. Zaidel', "Influence of initial density difference on shock wave motion", *Izv. AN SSSR, MZhG*, 1968, no. 4, 152–162 (In Russ.).
3. E. T. Vishiac, "The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks", *Astrophysical Journal*, **274**:1 (1983), 152–167.
4. V. M. Kitorov, *VANT, Ser. TiPF*, 1984, no. 2, 28 (In Russ.).
5. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, G. P. Prokopov, "Difference scheme for two-dimensional unsteady gas dynamics problems and calculation of flow with a detached shock wave", *ZhVMiMF*, **1**:6, 1020–1050 (In Russ.).
6. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, A. N. Kraiko, G. P. Prokopov, *Numerical solution of multidimensional gas dynamics problems*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 400 p.
7. V. P. Kolgan, "Application of the principle of minimum derivative values to the construction of finite-difference schemes for calculating discontinuous solutions of gas dynamics", *Uchenye zapiski TsAGI*, **3**:6 (1972), 68–77 (In Russ.).
8. Ch. Hirsch, *Numerical computation of internal & external flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, 1988.
9. S. V. Matyash, "A new method for using the principle of minimum increments in second-order approximation numerical schemes", *Uchenye zapiski TsAGI*, **36**:3–4 (2005), 42–50 (In Russ.).
10. Yu. A. Bondarenko, B. L. Voronin, V. I. Delov et al., "Description of a test system for two-dimensional gas-dynamic techniques and programs. Pt. 1. Requirements for tests. Tests 1–7", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 1991, no. 2, 3–9 (In Russ.).
11. Yu. A. Bondarenko, B. L. Voronin, V. I. Delov et al., "Description of a test system for two-dimensional gas-dynamic techniques and programs. Pt. 2. Requirements for tests. Tests 8–13", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 1992, no. 2, 3–13 (In Russ.).
12. *Physics of Explosion. Vol. 1*, ed. L. P. Orlenko, FIZMATLIT, Moscow, 2002 (In Russ.), 824 p.
13. K. P. Stanyukovich, *Unsteady Motion of Continuous Media*, Nauka, Moscow, 1971 (In Russ.), 855 p.
14. L. D. Landau, "On shock waves at large distances from their place of origin", *Collected Works. Vol. 1*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.).
15. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Hydrodynamics*, Nauka, Moscow, 1988 (In Russ.), 733 p.
16. E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, "'LOGOS-VOLNA' technique for calculating two-dimensional gas dynamics problems with heat conduction on moving unstructured meshes", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 2021, no. 4, 50–66 (In Russ.).
17. J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, 3rd rev. ed., Springer, 2002, 596 p.

18. L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Nauka, Moscow, 1981 (In Russ.), 438 p.
19. Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russ.), 688 p.

Submitted 25.12.2025; Revised 06.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются переносом основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать **BGN/PCGN** упрощенная без диакритических знаков.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadrat functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnyimi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О. }.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Название таблицы на английском языке}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца на русском языке & Название второго столбца на русском языке \\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Все вставляемые рисунки в текст статьи должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript). В редакцию журнала также необходимо предоставить те же рисунки в формате JPG с разрешением 300 точек на дюйм (dpi).

Для вставки рисунков в текст статьи можно пользоваться следующими командами:

а) вставка одного рисунка

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Название рисунка на русском языке:}
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Название рисунка на англ. языке}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}
```

б) вставка двух рисунков в одну строку

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
}
```

```

\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a}$
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b}$
\end{minipage}
\caption{Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на русском языке: \\
$a)$ название рисунка  $a$  на русском языке,  $b)$  название рисунка  $b$  на русском языке,
\medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на английском языке: \\
$a)$ название рисунка  $a$  на английском языке,  $b)$  название рисунка  $b$  на английском языке }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\par О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. VelmisoV, A. V. KorneeV  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Выш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}  
\by В. Г. Малинов  
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике  
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды  
\bookvol II  
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ ФИЦ ИУ РАН  
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}  
\by V. G. Malinov  
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator  
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings  
\bookvol II  
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ FRC CSC RAS Publ.  
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmo.sty` and `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. *To format article headings in English, use the following commands:* `\headerFirstEn` *u* `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment `equation`. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the `equation*` environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` and `Example`. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the `table` environment with the nested `tabular` environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name in English}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Table name in Russian}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
```

```

First column name in English & Second column name in English \\
First column name in Russian & Second column name in Russian \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Title of the drawing in English: \\
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Title of the drawing in Russian}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

b) inserting two pictures into one line

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center {$a}$
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center {$b}$
\end{minipage}
\caption{Common name of two drawings a and b in Russian: \\
$a)$ the title of the picture a in English,  $b)$  the title of the picture b in English,
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Common name of two drawings a and b in Russian: \\

```

```

$a)$ the title of the drawing a in Russian, $b)$ the title of the drawing b in Russian }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Journal articles in English:

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

```

```

\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-
kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-
ciklicheskoj-redukcii

```

Articles in collections in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Books (monographs and collections) in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Conference proceedings in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

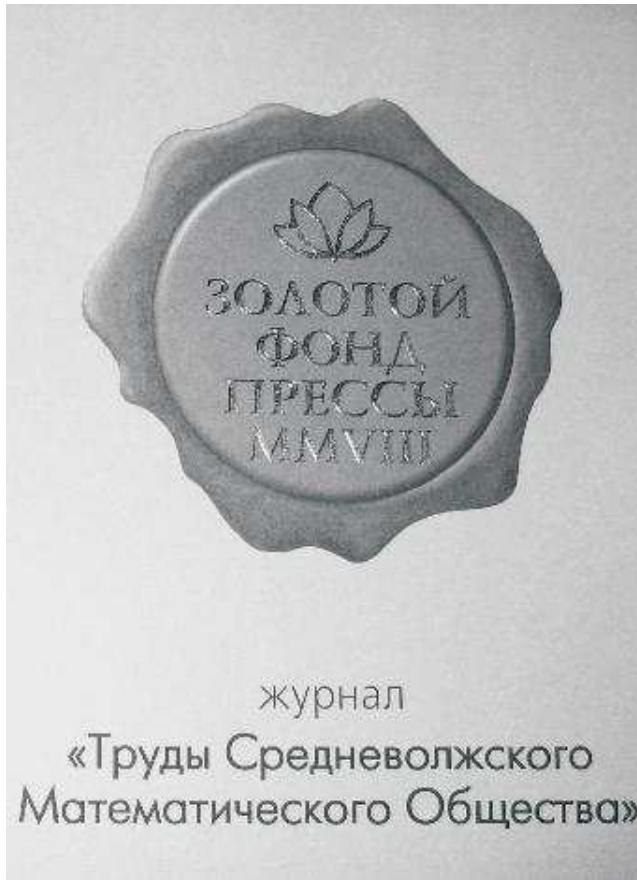
Алфавитный указатель авторов

Веселова Е. А.	96	Маковеева П. Е.	31
Вечкасов Д. Р.	67	Сафаров Ж. Ш.	48
Галкин О. Е.	11	Тында А. Н.	67
Галкина С. Ю.	11	Цыганов А. В.	79
Дерюгин Ю. Н.	96	Цыганова Ю. В.	79
Егоров А. В.	31	Ястребова И. Ю.	11
Зеленский Д. К.	96		

Author Index

E. A. Veselova	96	P. E. Makoveeva	31
D. R. Vechkasov	67	J. Sh. Safarov	48
O. E. Galkin	11	A. N. Tynda	67
S. Yu. Galkina	11	A. V. Tsyganov	79
Yu. N. Deryugin	96	Yu. V. Tsyganova	79
A. V. Egorov	31	I. Yu. Yastrebova	11
D. K. Zelensky	96		

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е., Иванова-Тюрькина В. А.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Язовцева О. С.*

Подписано в печать 20.03.2026. Дата выхода в свет 31.03.2026. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 12,25 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 143.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova, V. A. Ivanova-Tyurkina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *O. S. Yazovtseva*

Signed to print 20.03.2026. Date of publishing 31.03.2026. Free price.

Sheet size $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 12,25

Number of copies 100. Order no. 143.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

