

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 27 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2025

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 27, № 4. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 27, NO. 4. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2025

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — заместитель главного редактора, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузмичев Николай Дмитриевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Леонтьев Виктор Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, руководитель Высшей школы развития научно-образовательного потенциала, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Deputy Editor, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Scientific Center for Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics

and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Victor L. Leontiev — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of the Higher School for the Development of Scientific and Educational Potential, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering) (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Леонтьев В. Л. Об ортогональных кубических сплайнах Шенберга	411
--	-----

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Анкилов М. А. Оценки погрешности метода Галеркина при исследовании динамики бетонной плиты	422
Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х. Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина	435
Ткаченко П. П. , Баландин Д. В., Рябикова Т. В. Задачи о наилучших воздействиях на многомассовую упругую систему . .	451
Шаманаев П. А., Катин Д. А., Ошина Н. В. Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта	471

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Анкилов Г. А., Вельмисов П. А., Жаркова А. С. Исследование влияния сжимаемости потока на динамическую устойчивость упругой стенки воздуховода	488
Горбунова К. Д., Еркаев Н. В. 2D моделирование гидродинамического истечения планетарных атмосфер	500
Димитриев А. П., Лавина Т. А., Баженов Р. И., Копышева Т. Н. Лента достижимости J-сети, моделирующей применение алгоритма оптимизации последовательности отбора к одной задаче	517

Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	539
Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	543
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	547
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	553
Алфавитный указатель авторов	557

Contents

MATHEMATICS

V. L. Leontiev

On orthogonal cubic Schoenberg splines 411

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

M. A. Ankilov

Error estimates of Galerkin method in studying the dynamics of concrete slab 422

R. V. Zhالنin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina

Investigation of the Full Approximation Scheme Multigrid Approach for 1D
Nonlinear PDEs 435

P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova

The problems of the worst-case disturbances acting on multi-mass elastic system 451

P. A. Shamanaev, D. A. Katin, N. V. Oshina

A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an Inhomogeneous
Linear Oscillator Chain 471

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

G. A. Ankilov, P. A. Velmisov, A. S. Zharkova

Study of flow compressibility influence on dynamic stability of elastic wall of
air duct 488

K. D. Gorbunova, N. V. Erkaev

2D model of the hydrodynamic escape of planetary atmospheres 500

A. P. Dimitriev, T. A. Lavina, R. I. Bazhenov, T. N. Kopysheva

Reachability tape of J-net simulating the application of selection sequence
optimization algorithm to single problem 517

The rules of article design (in Russian) 539

The rules of article design (in English) 543

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 547

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 553

Author Index 557

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.651

Об ортогональных кубических сплайнах Шенберга

В. Л. Леонтьев

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
(г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)*

Аннотация. Проводится трансформация кубических сплайнов Шенберга с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, имеющих конечные носители, размеры которых меньше по сравнению с размером конечного носителя материнского сплайна. В результате построены восемь сеточных наборов ортогональных кубических сплайнов Шенберга, имеющих действительные значения. Выполнено исследование аппроксимативных свойств построенных ортогональных кубических сплайнов Шенберга. Показано, что порядок аппроксимации сплайнами Шенберга, модифицированными также сплайнами Шенберга, существенно выше по сравнению с порядком аппроксимации сплайнами Шенберга, модифицированными ступенчатыми функциями, и совпадает с порядком аппроксимации классическими кубическими сплайнами Шенберга. Дефект модифицированного сплайна Шенберга равен единице, как у классического сплайна Шенберга. Модифицированный сплайн является непрерывной функцией, у которой в точках сопряжения друг с другом частей материнского сплайна и частей сплайнов, используемых для модификации, нет разрывов также первой и второй производных.

Ключевые слова: кубические сплайны Шенберга, ортогонализация функций с компактными носителями, аппроксимация сплайнами

Для цитирования: Леонтьев В. Л. Об ортогональных кубических сплайнах Шенберга // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 411–421. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421

Об авторе:

Леонтьев Виктор Леонтьевич, д.ф.-м.н., профессор Научного Центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29В), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru



MSC2020 41A15

On orthogonal cubic Schoenberg splines

V. L. Leontiev*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)*

Abstract. The transformation of cubic Schoenberg splines is carried out using four auxiliary cubic Schoenberg splines having finite supports, whose sizes are smaller than the size of the mother spline's finite support. As a result, eight grid sets of orthogonal cubic real-valued Schoenberg splines are constructed. The approximation properties of these splines are investigated. It is shown that the approximation order of Schoenberg splines, that are also modified by Schoenberg splines, is significantly higher than the approximation order of step function-modified Schoenberg splines, and coincides with the approximation order of classical cubic Schoenberg splines. The defect of modified Schoenberg spline is equal to one, as that of classical Schoenberg spline. The modified spline is a continuous function which has no breaks in the first and the second derivatives at the points where the parts of the mother spline and the parts of the splines used for modification meet.

Keywords: cubic Schoenberg splines, orthogonalization of compactly supported functions, spline approximation

For citation: V. L. Leontiev. On orthogonal cubic Schoenberg splines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 411–421. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.411-421

About the author:

Victor L. Leontiev, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politechnicheskaya str., litera B, St. Petersburg, 195251, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru

1. Введение

Теория сплайнов возникла после создания кубических сплайнов Шенберга [1]. В книге [2] заявляется, что ортогональные сплайны не существуют, но это категоричное утверждение, как установлено в [3], имеет принципиальные исключения и означает лишь только то, что невозможно получить ортогональные сплайны с помощью процедуры ортогонализации Грама-Шмидта. Две авторские процедуры ортогонализации [3] компактно опертых функций без разрушения их конечных носителей привели к появлению ортогональных сплайнов [3] с широкой областью их применения, причем не только в алгоритмах смешанных вариационно-сеточных методов (СВСМ) [3]. Так, например, в [4] ортогональные сплайны применяются в наномеханике при построении потенциала взаимодействия атомов, в [5] - при создании алгоритма криптографии. Реализация геометрического алгоритма ортогонализации [3] с учетом особенностей кубических сплайнов Шенберга впервые излагается в статье [6], в которой показывается, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского кубического сплайна Шенберга достигается возможность ортогонализации порождаемого им

сеточного набора сплайнов без изменения конечного носителя материнского сплайна. В [6] найдены несколько вариантов ортогонализации кубических сплайнов Шенберга ступенчатыми функциями, имеющими не только действительные, но и комплексные коэффициенты, а также имеющими только действительные коэффициенты. Установлено [6], что для ортогонализации сплайнов Шенберга достаточно использовать только четыре ступенчатые функции. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции одного из использованных пространств Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга, но порядок аппроксимации оказался более низким, чем для неортогональных сплайнов Шенберга. Кроме того, ортогональные сплайны Шенберга [6] имеют разрывы первого рода, что снижает их аппроксимативные свойства.

Данная статья является продолжением статьи [6] и содержит результаты ортогонализации кубических сплайнов Шенберга с использованием только четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, с учетом результатов, полученных в статье [6]. Доказывается, что порядок аппроксимации любой функции одного из используемых пространств Соболева линейными комбинациями модифицированных кубических сплайнов Шенберга не уменьшается в результате такой ортогонализации по сравнению с порядком аппроксимации линейными комбинациями классических неортогональных кубических сплайнов Шенберга. Дефект предлагаемых ортогональных кубических сплайнов Шенберга равен единице, как и у классических кубических сплайнов Шенберга. Построенный здесь модифицированный материнский кубический сплайн Шенберга, в отличие от кубического сплайна Шенберга [6], модифицированного ступенчатыми функциями, является непрерывной функцией, у которой также нет разрывов первой и второй производных. Ортогональные кубические сплайны Шенберга, получаемые здесь на основе модификации классического материнского кубического сплайна Шенберга с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, создают новые возможности при построении алгоритмов СВСМ, основанных на смешанных вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу [3]. Применение ортогональных кубических сплайнов Шенберга в таких алгоритмах, по-видимому, приведет к повышению фактической точности аппроксимаций искомых точных решений краевых задач и к увеличению скорости сходимости их приближенных решений. При этом, в задачах механики деформируемого твердого тела ортогональные кубические сплайны Шенберга позволяют исключить узловые неизвестные, соответствующие силовым факторам и деформациям, до начала решения глобальной системы вариационно-сеточных уравнений на компьютере. Это делает такие СВСМ сравнимыми по вычислительным затратам с ВСМ, основанными на вариационном принципе Лагранжа. Но при этом, по гладкости и точности приближенных решений для силовых факторов и деформаций СВСМ превосходят ВСМ, связанные с вариационным принципом Лагранжа. Предлагаемые здесь ортогональные кубические сплайны Шенберга являются вкладом не только в теорию СВСМ, но и в теорию сплайнов, которая продолжает получать во многих теоретических и прикладных работах, например, [7–10], свое дальнейшее развитие и расширение применения.

2. Кубические сплайны Шенберга и новая процедура их ортогонализации, не изменяющая конечные носители сплайнов

Материнский кубический сплайн Шенберга имеет вид [1, 11]

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2, \\ (2-x)^3/6, & 1 \leq x \leq 2, \\ [1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6, & 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi^{(3)}(-x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

В соответствии с процедурой ортогонализации [6] конечными носителями вспомогательных функций являются отрезки $[6, 10]$, $[1, 5]$, $[-4, 0]$, $[-9, -5]$, расположенные на четырех равных по размеру частях конечного носителя материнского сплайна.

Для упрощения дальнейших преобразований и для создания дополнительных возможностей исследований материнский кубический сплайн Шенберга (2.1) масштабируется и принимает вид

$$\varphi_m^{(3)}(x) = \varphi^{(3)}(x/5) = \begin{cases} 0, & x \geq 10, \\ (2-x/5)^3/6, & 5 \leq x \leq 10, \\ [1 + 3(1-x/5) + 3(1-x/5)^2 - 3(1-x/5)^3]/6, & 0 \leq x \leq 5, \\ \varphi^{(3)}(-x/5), & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для новой по сравнению с [6] модификации масштабированного материнского кубического сплайна Шенберга (2.2) используются также кубические сплайны Шенберга

$$\varphi^{(3)}(x-8), \quad \varphi^{(3)}(x-3), \quad \varphi^{(3)}(x+2), \quad \varphi^{(3)}(x+7)$$

с соответствующими им конечными носителями $[6, 10]$, $[1, 5]$, $[-4, 0]$, $[-9, -5]$, имеющими размер равный 4, который в 5 раз меньше размера, равного 20, конечного носителя сплайна (2.2).

Возможность построения материнского кубического сплайна Шенберга, порождающего ортогональные сеточные наборы сплайнов Шенберга на каждой сетке, с помощью только четырех вспомогательных ступенчатых функций, обоснована в статье [6]. При этом в [6] показано, что восемь модифицирующих ступенчатых функций с ненулевыми коэффициентами позволяют построить только комплексный материнский сплайн Шенберга, порождающий ортогональные сеточные наборы сплайнов Шенберга на каждой сетке. Поэтому здесь для модификации материнского кубического сплайна Шенберга (2.2) используется четыре указанных вспомогательных кубических сплайна Шенберга, что приводит к построению на сетке ортогональных действительных кубических сплайнов Шенберга, характеризующихся более высокой гладкостью по сравнению с ортогональными сплайнами [6].

Масштабированный материнский сплайн Шенберга в результате его модификации с помощью четырех вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, порождаемых трансляциями не масштабированного материнского сплайна (2.1), принимает вид

$$\Phi(x) = \varphi_m^{(3)}(x) + A_1\varphi^{(3)}(x-8) + A_2\varphi^{(3)}(x-3) + A_3\varphi^{(3)}(x+2) + A_4\varphi^{(3)}(x+7), \quad (2.3)$$

где A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ – неизвестные постоянные коэффициенты, значения которых определяются тремя условиями ортогональности масштабированного материнского кубического сплайна (2.3) и трех кубических сплайнов $\Phi(x - 15)$, $\Phi(x - 10)$, $\Phi(x - 5)$, полученных его трансляциями, а именно, условиями

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x - 15) dx &= \int_5^{10} \Phi(x) \Phi(x - 15) dx = \\ &= \int_5^{10} [\varphi_m^{(3)}(x) + A_1 \varphi^{(3)}(x - 8)] [\varphi_m^{(3)}(x - 15) + A_4 \varphi^{(3)}(x - 8)] dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x - 10) dx &= \int_0^5 \Phi(x) \Phi(x - 10) dx + \int_5^{10} \Phi(x) \Phi(x - 10) dx = \\ &= \int_0^5 [\varphi_m^{(3)}(x) + A_2 \varphi^{(3)}(x - 3)] [\varphi_m^{(3)}(x - 10) + A_4 \varphi^{(3)}(x - 3)] dx + \\ &+ \int_5^{10} [\varphi_m^{(3)}(x) + A_1 \varphi^{(3)}(x - 8)] [\varphi_m^{(3)}(x - 10) + A_3 \varphi^{(3)}(x - 8)] dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x - 5) dx &= \int_{-5}^0 \Phi(x) \Phi(x - 5) dx + \int_0^5 \Phi(x) \Phi(x - 5) dx + \int_5^{10} \Phi(x) \Phi(x - 5) dx = \\ &= \int_{-5}^0 [\varphi_m^{(3)}(x) + A_3 \varphi^{(3)}(x + 2)] [\varphi_m^{(3)}(x - 5) + A_4 \varphi^{(3)}(x + 2)] dx + \\ &+ \int_0^5 [\varphi_m^{(3)}(x) + A_2 \varphi^{(3)}(x - 3)] [\varphi_m^{(3)}(x - 5) + A_3 \varphi^{(3)}(x - 3)] dx + \\ &+ \int_5^{10} [\varphi_m^{(3)}(x) + A_1 \varphi^{(3)}(x - 8)] [\varphi_m^{(3)}(x - 5) + A_2 \varphi^{(3)}(x - 8)] dx = 0. \end{aligned}$$

которые преобразуются в соответствующие им три алгебраических уравнения

$$\frac{1}{25} A_1 + \frac{1}{75} A_4 + \frac{151}{315} A_1 A_4 + \frac{1}{1008} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{8}{15} A_1 + \frac{1}{25} A_2 + \frac{1}{75} A_3 + \frac{31}{75} A_4 + \frac{151}{315} (A_1 A_3 + A_2 A_4) + \frac{10}{84} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{31}{75} (A_1 + A_3) + \frac{8}{15} (A_2 + A_4) + \frac{1}{75} A_2 + \frac{1}{25} A_3 + \frac{151}{315} (A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4) + \frac{397}{336} = 0. \quad (2.6)$$

3. Решения системы уравнений ортогональности и аппроксимации

Решение системы четырех уравнений для неизвестных постоянных коэффициентов A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, состоящей из трех уравнений (2.4), (2.5), (2.6) и необходимого условия аппроксимации [6], согласно которому сумма четырех этих коэффициентов должна быть равной нулю, дает восемь вариантов значений коэффициентов, в каждом из

которых они имеют действительные значения (с округлением десяти значащих цифр после запятой до четырех):

$$3.1) \quad A_1 = -0.7567, A_2 = 1.7548, A_3 = -0.9143, A_4 = -0.08379;$$

$$3.2) \quad A_1 = -0.08314, A_2 = -1.3883, A_3 = 1.5594, A_4 = -0.08799;$$

$$3.3) \quad A_1 = -0.03236, A_2 = 1.8098, A_3 = -1.6386, A_4 = -0.1388;$$

$$3.4) \quad A_1 = -0.02816, A_2 = -0.6639, A_3 = 1.5045, A_4 = -0.8124;$$

$$3.5) \quad A_1 = -0.02772, A_2 = -0.9167, A_3 = -1.6433, A_4 = 2.5877;$$

$$3.6) \quad A_1 = -0.02658, A_2 = -1.5956, A_3 = 1.5029, A_4 = 0.1193;$$

$$3.7) \quad A_1 = 0.1749, A_2 = 1.7532, A_3 = -1.8459, A_4 = -0.08220;$$

$$3.8) \quad A_1 = 2.6433, A_2 = -1.3930, A_3 = -1.1670, A_4 = -0.08335.$$

Все варианты решений содержат четыре действительные значения коэффициентов A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ функций $\varphi^{(3)}(x-8)$, $\varphi^{(3)}(x-3)$, $\varphi^{(3)}(x+2)$, $\varphi^{(3)}(x+7)$, модифицирующих материнский сплайн Шенберга (2.2). Действительная функция, равная сумме четырех сплайнов Шенберга $A_1\varphi^{(3)}(x-8)$, $A_2\varphi^{(3)}(x-3)$, $A_3\varphi^{(3)}(x+2)$, $A_4\varphi^{(3)}(x+7)$, умноженных на коэффициенты, имеющие найденные значения, не является четной или нечетной во всех восьми вариантах. Поэтому модифицированный кубический сплайн Шенберга (2.3), порождающий сеточные наборы ортогональных кубических сплайнов Шенберга, есть действительная функция, не являющаяся четной или нечетной. Но гладкость модифицированного кубического сплайна Шенберга (2.3) такая же высокая, как гладкость исходного материнского сплайна Шенберга (2.2). Модифицированный материнский сплайн Шенберга (2.3), так же, как и исходный не ортогональный материнский сплайн Шенберга (2.2), имеет дефект равный единице, поскольку не только он является непрерывным, но и его первая и вторая производные во всех точках области определения сплайна $(-\infty, \infty)$, в том числе, в точках $-5, 0, 5$ сопряжения четырех частей сплайна Шенберга $\varphi_m^{(3)}(x)$, а также в точках $-9, -5, -4, 0, 1, 5, 6, 10$ сопряжения модифицированных частей сплайна с его не модифицированными частями. Это следует из того, что значения вспомогательных сплайнов Шенберга $\varphi^{(3)}(x-8)$, $\varphi^{(3)}(x-3)$, $\varphi^{(3)}(x+2)$, $\varphi^{(3)}(x+7)$, а также их первых и вторых производных, на границах конечных носителей этих сплайнов равны нулю.

4. Исследование аппроксимативных свойств ортогональных кубических сплайнов Шенберга

Теорема 4.1. *Если*

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \quad (4.1)$$

то для любой функции $u(x) \in W_2^4(R)$ существуют такие коэффициенты $\{u_i\}$, что при $h \rightarrow 0$

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^s} \leq C_s \cdot h^{4-s} \|u\|_{W_2^4}, \quad s = 0, 1, 2, 3,$$

$$\sum_{(i)} |u_i|^2 \leq c \|u\|_{W_2^0}^2. \quad (4.2)$$

Здесь h – шаг равномерной сетки; C_s , c – постоянные, не зависящие от h , $u(x)$; $\Phi_i(x)$ – сеточные сплайны, полученные масштабированием и трансляциями модифицированного материнского кубического сплайна Шенберга $\Phi(x)$; W_2^s , W_2^0 , W_2^4 – гильбертовы пространства Соболева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование Фурье [6] модифицированного материнского сплайна Шенберга (2.3)

$$\Phi(x) = \varphi_m^{(3)}(x) + A_1 \varphi^{(3)}(x-8) + A_2 \varphi^{(3)}(x-3) + A_3 \varphi^{(3)}(x+2) + A_4 \varphi^{(3)}(x+7)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} (2\pi)^{1/2} \hat{\Phi}(\xi) &= \frac{1}{5^3 i^4 \xi^4} (e^{-10i\xi} - 4e^{-5i\xi} + 6 - 4e^{5i\xi} + e^{10i\xi}) + \\ &+ \frac{1}{i^4 \xi^4} [A_1 (e^{-10i\xi} - 4e^{-9i\xi} + 6e^{-8i\xi} - 4e^{-7i\xi} + e^{-6i\xi}) + \\ &+ A_2 (e^{-5i\xi} - 4e^{-4i\xi} + 6e^{-3i\xi} - 4e^{-2i\xi} + e^{-i\xi}) + \\ &+ A_3 (e^{4i\xi} - 4e^{3i\xi} + 6e^{2i\xi} - 4e^{i\xi} + 1) + \\ &+ A_4 (e^{9i\xi} - 4e^{8i\xi} + 6e^{7i\xi} - 4e^{6i\xi} + e^{5i\xi})] = \\ &= \frac{1}{5^3 i^4 \xi^4} (e^{i5\xi/2} - e^{-i5\xi/2})^4 + \frac{1}{\xi^4} (e^{2i\xi} - 4e^{i\xi} + 6 - 4e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) \cdot \\ &\cdot (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) = \\ &= 5 \left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^4 + \frac{1}{\xi^4} \left(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2} \right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) = \\ &= 5 \left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^4 + \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\Phi}(0) \neq 0, \quad (4.4)$$

так как в (4.3)

$$5 \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^4 = 5,$$

а

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) \right] = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

в соответствии с необходимым условием аппроксимации [6] и условием теоремы.

Из (4.3) также следует, что

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \hat{\Phi}(\xi) &= 20 \left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^3 \frac{\xi \cos(5\xi/2) - 2 \sin(5\xi/2)/5}{\xi^2} + \\
 &+ \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4 (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) \right] = \\
 &= 20 \left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^3 \frac{\xi \cos(5\xi/2) - 2 \sin(5\xi/2)/5}{\xi^2} + \\
 &+ 4 \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^3 \frac{\xi \cos(\xi/2)/4 - \sin(\xi/2)/2}{(\xi/2)^2} (A_1 e^{-8i\xi} + A_2 e^{-3i\xi} + A_3 e^{2i\xi} + A_4 e^{7i\xi}) + \\
 &+ \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4 (-8iA_1 e^{-8i\xi} - 3iA_2 e^{-3i\xi} + 2iA_3 e^{2i\xi} + 7iA_4 e^{7i\xi}). \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\xi} \hat{\Phi}(2\pi j) = 0 \quad \forall j: \quad 0 \neq j \in \mathbf{Z}. \quad (4.6)$$

Формула (4.5) также позволяет сделать вывод о том, что все члены, входящие в выражения для второй и третьей производных функции $\hat{\Phi}(\xi)$, полученной с помощью преобразования Фурье, содержат один из сомножителей вида

$$\left(\frac{\sin(5\xi/2)}{5\xi/2} \right)^k, \quad \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

и в силу этого

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \hat{\Phi}(2\pi j) = 0, \quad \frac{d^3}{d\xi^3} \hat{\Phi}(2\pi j) = 0 \quad \forall j: \quad 0 \neq j \in \mathbf{Z}. \quad (4.7)$$

В соответствии с (4.4), (4.6), (4.7) оценка погрешности аппроксимации

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^s} \leq C \cdot h^{p+1-s} \|u\|_{W_2^{p+1}}$$

из формулировки теоремы Стренга-Фикса [11], справедлива в данном случае для $p = 3$. Доказательство завершено.

Для значений $s = 0, 1, 2$ оценка (4.2) погрешности аппроксимации любой функции соответствующего пространства Соболева ортогональными сплайнами Шенберга записывается в трех формах

$$\begin{aligned}
 \left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^0} &\leq C_0 \cdot h^4 \|u\|_{W_2^4}, \\
 \left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^1} &\leq C_1 \cdot h^3 \|u\|_{W_2^4},
 \end{aligned}$$

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^2} \leq C_2 \cdot h^2 \|u\|_{W_2^4},$$

характеризующих высокую точность аппроксимации любой функции соответствующего пространства Соболева, а также ее первой и второй производных. Эти оценки и высокая гладкость кубических сплайнов создают предпосылки для эффективного применения линейных комбинаций созданных здесь ортогональных кубических сплайнов Шенберга, как для непосредственной аппроксимации функций, так и для аппроксимации искомых решений краевых задач, получаемых с помощью вариационно-сеточных или проекционно-сеточных методов [3].

5. Заключение

Согласно полученной здесь оценке (4.2) аппроксимативных свойств модифицированных сплайнов Шенберга последовательность линейных комбинаций сеточных наборов ортогональных кубических сплайнов Шенберга, обладающих свойством относительно высокой гладкости, при стремлении величины шага сетки к нулю сходится к аппроксимируемой функции $u(x)$ с достаточно высокой скоростью.

В данной статье с помощью геометрической процедуры ортогонализации финитных функций [3], развитой и детализированной в статье [6] применительно к кубическим сплайнам Шенберга, построены, с сохранением размеров конечных носителей исходных сплайнов, восемь различных модифицированных материнских кубических сплайнов Шенберга с действительными значениями, порождающих на каждой сетке систему ортогональных кубических сплайнов Шенберга.

Ортогональность сеточных наборов созданных сплайнов, их высокая гладкость и высокая степень аппроксимации, а также наличие у них компактных носителей, порождающих разреженные сеточные матрицы, существенно повышают эффективность алгоритмов вариационно-сеточных методов [3], а также рациональность различных других алгоритмов, например [4, 5], в частности, за счет значительного снижения для них вычислительных затрат.

Ортогональные кубические сплайны Шенберга, полученные в статье [6] с применением вспомогательных ступенчатых функций, а также ортогональные кубические сплайны Шенберга, построенные здесь с помощью вспомогательных кубических сплайнов Шенберга, являются вкладами в теорию ортогональных сплайнов [3] и в общую теорию сплайнов, связанными с обобщениями кубических сплайнов Шенберга, с которых началось развитие теории сплайнов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 349 с.
3. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с.

4. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // *Нано- и микросистемная техника*. 2011. Т. 9, № 134. С. 48–50.
5. Щуренко А. В., Леонтьев В. Л. Финитные функции в алгоритмах криптографии // *Прикладная дискретная математика*. 2017. № 36. С. 73–83. DOI: 10.17223/20710410/36/6
6. Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // *Журнал Средне-волжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126
7. Schoenberg I. J. Spline Functions and the problem of Graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*. 1964. Vol. 52, no. 4. P. 947–50. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947
8. Алексеев В. Г., Суходоев В. А. Полиномиальные В-сплайны Шенберга нечетных степеней. Краткий обзор применений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2012. Т. 52, № 10. С. 1756–1767. DOI: 10.1134/S096554251
9. Алексеев В. Г. В-сплайны Шенберга и их применения в радиотехнике и в смежных с ней дисциплинах // *Радиотехника*. 2003. Т. 12, № 12. С. 21–23.
10. Волков Ю. С., Субботин Ю. Н. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
11. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

*Поступила 15.08.2025; доработана после рецензирования 23.09.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. I. J. Schoenberg, “Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A and B”, *Quart. Appl. Math.*, **4:2** (1946), 45–99, 112–141.
2. G. Strang, G. Fix, *Teoriya metoda konechnih elementov*, Mir, M., 1977 (In Russ.), 349 p.
3. V. L. Leontiev, *Ortogonalnie finitnii funktsii i shislenie metodi*, UIGU, Ulyanovsk, 2003 (In Russ.), 178 p.
4. V. L. Leontiev, I. S. Milhaylov, “About the building the potential of the atomic interaction based on orthogonal finite functions”, *Nano- and microsystems technology*, **9:134** (2011), 48–50 (In Russ.).
5. A. V. Shurenko, V. L. Leontiev, “Finitnie funktsii v algoritmah kriptografii”, *Prikladnaia diskretnaia matematika*, **36** (2017), 73–83. DOI: 10.17223/20710410/36/6

6. V. L. Leontiev, “On orthogonalization of Schoenberg splines”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **27**:2 (2025), 111–126 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126
7. I. J. Schoenberg, “Spline Functions and the problem of Graduation”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, **52**:4 (October 1964), 947–950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947
8. V. G. Alekseev, V. A. Suhodoev, “Schoenberg’s polynomial B-splines of odd degrees: A brief review of application”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:10 (2012), 1331–1341. DOI: 10.1134/S096554251
9. V. G. Alekseev, “B-spliny Schoenberg i ih primeneniya v radiotekhnike i v smegnih s ney disciplinah”, *Radiotekhnika*, **12** (2003), 21–23 (In Russ.).
10. Yu. S. Volkov, Yu. N. Subbotin, “Fifty years of Schoenberg’s problem on the convergence of spline interpolation”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **288**:1 (2015), 222–237. DOI: 10.1134/S0081543815020236
11. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 p.

Submitted 15.08.2025; Revised 23.09.2025; Accepted 26.11.2025

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Оценки погрешности метода Галеркина при исследовании динамики бетонной плиты

М. А. Анкилов

Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)

Аннотация. При расчете на прочность элементов строительных конструкций одним из этапов является исследование динамики этих элементов при различных силовых нагрузках. В данной работе на основе классической модели свободных колебаний упругой пластины, в отличие от проведенных ранее численно-аналитических исследований, разрабатывается аналитический метод исследования динамики шарнирно закрепленной по краям бетонной плиты. Согласно методу Галеркина приближенное решение дифференциального уравнения в частных производных, используемого в модели, отыскивается в виде линейной комбинации базисных функций. В результате получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов этой комбинации. На основе построения функционала типа Ляпунова для дифференциального уравнения в частных производных и функции Ляпунова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений предложено несколько способов определения погрешности полученного приближенного решения. На основе численных расчетов показана точность полученных оценок этой погрешности. Для этого построены графики разности исследуемого приближения и приближения высшего порядка. Наилучшую оценку показал способ определения погрешности с помощью следующей базисной функции, коэффициент при которой найден из уравнения, полученного на основе исследования функционала типа Ляпунова для исходного дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, функционал типа Ляпунова, метод Галеркина, упругая пластина

Для цитирования: Анкилов М. А. Оценки погрешности метода Галеркина при исследовании динамики бетонной плиты // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 422–434. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

Об авторах:

Анкилов Михаил Андреевич, аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет (432007, Россия, г. Ульяновск, ул. Университетская Набережная, д. 1), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-2038-3096>, ankilov.2000@mail.ru



MSC2020 35Q74

Error estimates of Galerkin method in studying the dynamics of concrete slab

M. A. Ankilov

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. When calculating the strength of structural elements, one of the steps is to study the dynamics of these elements under various force loads. In this paper, based on the classical model of free vibrations of an elastic plate, in contrast to previous numerical and analytical studies, an analytical method for studying the dynamics of a concrete slab pinned at its edges is developed. According to the Galerkin method, an approximate solution of the partial differential equation used in the model is found as a linear combination of basis functions. This results in a system of ordinary differential equations for determining the coefficients of this combination. Based on the construction of a Lyapunov-type functional for the partial differential equation and on a Lyapunov function for the system of ordinary differential equations, several methods for determining the error of obtained approximate solution are proposed. Numerical calculations demonstrate the accuracy of error estimates. For this purpose, plots of the difference between the approximation under study and the higher-order approximation are constructed. The best estimate was shown by the method of error determination using the following basis function, whose coefficient was found from the equation obtained in study of the Lyapunov-type functional for the original partial differential equation.

Keywords: partial differential equations, Lyapunov-type functional, Galerkin method, elastic plate

For citation: M. A. Ankilov. Error estimates of Galerkin method in studying the dynamics of concrete slab. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 422–434. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.422-434

About the authors:

Mikhail A. Ankilov, Postgraduate Student, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (1 Universitetskaya Naberezhnaya St., Ulyanovsk 432007, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0003-2038-3096>, ankilov.2000@mail.ru

1. Введение

При проектировании наземных сооружений необходимо производить расчеты динамики их деформируемых элементов, моделируемых упругими стержнями и пластинами [1–4]. При математическом моделировании необходимо учитывать различные силовые нагрузки, воздействующие на деформируемые элементы этих сооружений, например, ударные, тепловые, ветровые и снеговые нагрузки. Любое из этих воздействий может привести к потере устойчивости [5, 6] возникающих при этом колебаний элементов, что говорит о необходимости точных расчетов параметров сооружений.

В данной работе для исследования динамики бетонной плиты используется математическая модель колебаний упругой пластины [7]. Модель описывается дифференциальным уравнением в частных производных с неизвестной функцией деформации пластины, решение которого отыскивается методом Галеркина [8]. В настоящее время метод Галеркина теряет популярность при решении дифференциальных уравнений в частных производных, так как большое количество исследований посвящено сходимости к точному решению, например, работы [9, 10], но отсутствуют работы по определению погрешности полученного приближенного решения. В отличие от проведенных ранее авторами исследований [11] для определения погрешности метода Галеркина используются аналитические, а не численно-аналитические методы.

2. Математическая модель и функционал

В работе методом Галеркина решается начально-краевая задача, описывающая динамику шарнирно закрепленной по краям упругой пластины:

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \beta_0 w(x, t) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (2.1)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (2.3)$$

Здесь $w(x, t)$ – функция, описывающая прогиб (деформацию) упругой пластины; штрих и точка обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно;

$M = h\rho$ и $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – масса и изгибная жесткость пластины; l, h – длина и толщина пластины; E, ρ – модуль упругости и линейная плотность пластины; β_0 – коэффициент жесткости основания; ν – коэффициент Пуассона.

В работе [11] для уравнения (2.1) с граничными и начальными условиями (2.2), (2.3) на основе исследования функционала типа Ляпунова

$$\Phi = \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx \quad (2.4)$$

получено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{M\dot{w}^2(x, t) + Dw''^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t)\} dx = \\ & = \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

и доказана теорема.

Теорема 2.1. *Решение $w(x, t)$ краевой задачи (2.1), (2.2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (2.3) и справедлива оценка*

$$w^2(x, t) \leq \frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \{Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x)\} dx. \quad (2.6)$$

3. Метод Галеркина и функция Ляпунова

Приближенное решение краевой задачи (2.1), (2.2) согласно методу Галеркина ищется в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x), \quad g_k(x) = \sin \gamma_k x, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{l}. \quad (3.1)$$

Условия (2.2) выполняются. Подставляя (3.1) в (2.1), (2.3), умножая на $g_k(x)$ и интегрируя от 0 до l , получим задачу Коши для системы уравнений:

$$M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t) = 0, \quad n = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) g_n(x) dx, \quad \dot{a}_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) g_n(x) dx. \quad (3.3)$$

В отличие от работы [11] для определения неизвестных функций $a_n(t)$ и определения погрешности метода Галеркина используются аналитические, а не численные методы. Решая задачу Коши (3.2), (3.3), получим решение

$$a_n(t) = a_n(0) \cos \left(\sqrt{\frac{D\gamma_n^4 + \beta_0}{M}} t \right) + \dot{a}_n(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_n^4 + \beta_0}} \sin \left(\sqrt{\frac{D\gamma_n^4 + \beta_0}{M}} t \right), \quad (3.4)$$

$n = 1, \dots, m$. Следовательно, приближенное решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3) примет вид

$$w(x, t) \approx w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \left(a_k(0) \cos \left(\sqrt{\frac{D\gamma_k^4 + \beta_0}{M}} t \right) + \dot{a}_k(0) \sqrt{\frac{M}{D\gamma_k^4 + \beta_0}} \sin \left(\sqrt{\frac{D\gamma_k^4 + \beta_0}{M}} t \right) \right) g_k(x). \quad (3.5)$$

Введем функцию Ляпунова для каждого обыкновенного дифференциального уравнения (3.2):

$$\Psi_n = M\dot{a}_n^2(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t). \quad (3.6)$$

Найдем производную от Ψ_n по t :

$$\dot{\Psi}_n = 2M\dot{a}_n(t)\ddot{a}_n(t) + 2(D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t)\dot{a}_n(t) = 2\dot{a}_n(t) (M\ddot{a}_n(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n(t)).$$

Тогда для функции $a_n(t)$, являющейся решением системы уравнений (3.2), имеет место равенство $\dot{\Psi}_n = 0$, интегрируя которое от 0 до t , получим:

$$\Psi_n(t) = \Psi_n(0). \quad (3.7)$$

Таким образом, из (3.7) получим равенство

$$M\dot{a}_n^2(t) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(t) = M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0) \quad (3.8)$$

и доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Решение $a_n(t), n = 1, \dots, m$ системы уравнений (3.2) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (3.3) и справедливо неравенство*

$$a_n^2(t) \leq \frac{1}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} (M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0)). \quad (3.9)$$

Тогда согласно (3.9) получим оценку ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} (M\dot{a}_n^2(0) + (D\gamma_n^4 + \beta_0) a_n^2(0)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\dot{a}_n^2(0)}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Первый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\dot{a}_n^2(0)}{(D\gamma_n^4 + \beta_0)}$ сходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. А для второго ряда получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) g_n(x) \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^l f_1^2(x) dx.$$

Следовательно, для любых функций $f_1(x) \in L_2[0, l]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(t)$ сходится и согласно [9] приближенное решение, полученное методом Галеркина, сходится к точному решению.

Из (3.9) получим оценку приближенного решения

$$\begin{aligned} w_m^2(x, t) &= \left(\sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x) \right)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^m a_k^2(t) g_k^2(x) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{2 (M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0))}{(D\gamma_k^4 + \beta_0)} g_k^2(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Остаточный член метода Галеркина

Рассмотрим остаточный член $R_m(x, t)$ разложения (3.1):

$$w(x, t) = w_m(x, t) + R_m(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin \gamma_k x + R_m(x, t). \quad (4.1)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (4.1) в уравнение (2.1), получим

$$\sum_{k=1}^m (M\ddot{a}_k(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k(t)) \sin \gamma_k x + M\ddot{R}_m(x, t) + DR_m'''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (4.2)$$

Согласно (3.2) из (4.2) окончательно получим

$$M\ddot{R}_m(x, t) + DR_m'''(x, t) + \beta_0 R_m(x, t) = 0. \quad (4.3)$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (4.1) в граничные условия (2.2) и начальные условия (2.3), получим

$$R_m(0, t) = 0, \quad R_m(l, t) = 0, \quad R_m''(0, t) = 0, \quad R_m''(l, t) = 0, \quad (4.4)$$

$$R_m(x, 0) = f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x, \quad \dot{R}_m(x, 0) = f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x, \quad (4.5)$$

где $a_k(0), \dot{a}_k(0)$ определяются согласно (3.3).

Для дифференциального уравнения в частных производных (4.3) с граничными и начальными условиями (4.4), (4.5) введем функционал типа Ляпунова

$$T = \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + DR_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx. \quad (4.6)$$

Аналогично исследованию функционала (2.4), получим

$$T(t) = T(0). \quad (4.7)$$

Таким образом, из (4.5), (4.7) получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + DR_m''^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx &= \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ &+ D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \Big\} dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как в силу сходимости метода Галеркина точное решение есть ряд

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) g_k(x), \quad (4.9)$$

то остаточный член имеет вид

$$R_m(x, t) = w(x, t) - w_m(x, t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k(t) g_k(x). \quad (4.10)$$

Учитывая ортогональность функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, получим

$$\int_0^l R_m(x, t) g_n(x) dx = 0, \quad n = 1, \dots, m. \quad (4.11)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения $\omega^{IV}(x) = -\lambda\omega''(x)$, $x \in [0, l]$ с краевыми условиями (4.2). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Согласно (4.11) для функции $R_m(x, t)$ запишем неравенство Рэлея [12]:

$$\int_0^l R_m(x, t) R_m^{IV}(x, t) dx \geq -\lambda_{m+1} \int_0^l R_m(x, t) R_m''(x, t) dx,$$

где $(m+1)$ -е собственное значение рассматриваемой краевой задачи $\lambda_{m+1} = \frac{\pi(m+1)}{l}$. Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде:

$$\int_0^l R_m'^2(x, t) dx \geq \lambda_{m+1} \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (4.12)$$

Согласно (4.12) из (4.8) получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + D \lambda_{m+1} R_m'^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx \leq \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ \left. + D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$R_m^2(x, t) \leq l \int_0^l R_m'^2(x, t) dx. \quad (4.14)$$

Согласно (4.14) из (4.13) окончательно получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{D \lambda_{m+1}}{l} R_m^2(x, t) + \int_0^l \left\{ M \dot{R}_m^2(x, t) + \beta_0 R_m^2(x, t) \right\} dx \leq \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ \left. + D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.15)$$

на основании которого доказана теорема.

Теорема 4.1. Если функция $R_m(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (4.4), то решение $R_m(x, t)$ уравнения (4.3) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных (4.5) и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} R_m^2(x, t) \leq \frac{l^2}{D \pi(m+1)} \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ \left. + D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

5. Улучшение оценки остаточного члена метода Галеркина

Будем искать остаточный член $R_m(x, t)$ в виде

$$R_m^{pr}(x, t) = a_{m+1}(t)g_{m+1}(x), \quad (5.1)$$

где индекс pr сверху обозначает приближенное значение остаточного члена, а функция $a_{m+1}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5), которое в силу ортогональности базисных функций примет вид:

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \\ - \sum_{k=1}^m (M\dot{a}_k^2(t) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(t)). \quad (5.2)$$

Учитывая (3.8), окончательно получим

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \\ - \sum_{k=1}^m (M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0)). \quad (5.3)$$

Введем обозначение

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ Mf_2^2(x) + Df_1''^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx - \sum_{k=1}^m (M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0) a_k^2(0)). \quad (5.4)$$

Тогда уравнение (5.3) примет вид

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t) + (D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0) a_{m+1}^2(t) = A_m. \quad (5.5)$$

Введем обозначения

$$k^2 = \frac{A_m}{M}, \quad b^2 = \frac{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}{M}. \quad (5.6)$$

Тогда уравнение (5.5) примет вид

$$\dot{a}_{m+1}(t) = \pm \sqrt{k^2 - b^2 a_{m+1}^2(t)}. \quad (5.7)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{da_{m+1}(t)}{b\sqrt{\left(\frac{k}{b}\right)^2 - a_{m+1}^2(t)}} = \pm dt. \quad (5.8)$$

Интегрируя (5.8), получим

$$\frac{1}{b} \arcsin \frac{ba_{m+1}(t)}{k} = \pm t + C. \quad (5.9)$$

Следовательно,

$$a_{m+1}(t) = \pm \frac{k}{b} \sin b(t + C). \quad (5.10)$$

Оценивая остаточный член вида (5.1) метода Бубнова-Галеркина, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon = |w(x, t) - w_m(x, t)| &= |R_m(x, t)| \approx |R_m^{pr}(x, t)| \leq |a_{m+1}(t)| \leq \\ &\leq \frac{k}{b} = \sqrt{\frac{A_m}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

6. Численный эксперимент

Будем считать, что плита (пластина) изготовлена из бетона В20, тогда коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность: $\nu = 0,2$ (безр.), $E = 2,75 \cdot 10^{10}$ (Па), $\rho = 2000$ (кг·м⁻³). Длина и толщина плиты $l = 2$ (м), $h = 0,1$ (м). Тогда масса и изгибная жесткость плиты: $M = h\rho = 200$ (кг·м⁻²), $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \approx 2,39 \cdot 10^6$ (Н·м).

Возьмем коэффициент жесткости основания $\beta_0 = 4$ (Па·м⁻¹). Пусть начальные условия (в метрах) имеют вид: $w(x, 0) = 0.01 \cdot x^5 \cdot (l - x)^4$; $\dot{w}(x, 0) = -0.005x^3 \cdot (l - x)^5$.

С помощью математической системы Mathematica получим график функции $w(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x)$ при $m = 5$ в точке $x_* = \frac{l}{2}$:

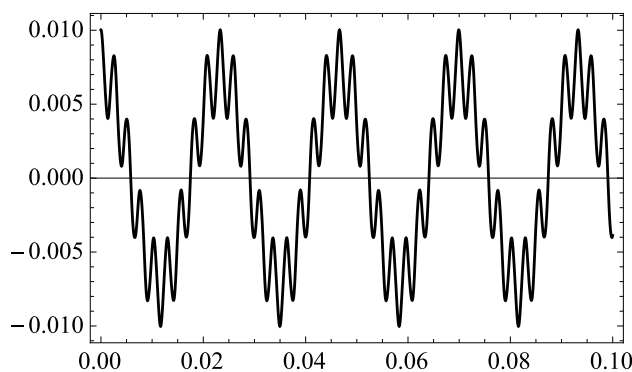


Рис. 6.1. Деформация пластины $w(x, t)$ в точке $x_* = l/2$ при $t \in [0; 0.1]$

Fig. 6.1. Deformation of plate $w(x, t)$ at point $x_* = l/2$ at $t \in [0; 0.1]$

Рассчитаем полученные оценки (2.6), (3.11), (4.16), (5.11) при $m = 5$.

Грубая оценка амплитуды колебаний (2.6):

$$|w(x, t)| \leq \sqrt{\frac{l^2}{\pi D} \int_0^l \left\{ M f_2^2(x) + D f_1'^2(x) + \beta_0 f_1^2(x) \right\} dx} \approx 0.0816626. \quad (6.1)$$

Уточненная оценка амплитуды колебаний (3.11):

$$|w_m(x_*, t)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{2(M\dot{a}_k^2(0) + (D\gamma_k^4 + \beta_0)a_k^2(0))}{(D\gamma_k^4 + \beta_0)}} g_k^2(x_*) \approx 0.0109459. \quad (6.2)$$

Рассчитаем грубую оценку погрешности (4.16):

$$R_m^2(x, t) \leq \frac{l^2}{D\pi(m+1)} \int_0^l \left\{ M \left(f_2(x) - \sum_{k=1}^m \dot{a}_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \right. \\ \left. + D \left(f_1''(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 + \beta_0 \left(f_1(x) - \sum_{k=1}^m a_k(0) \sin \gamma_k x \right)^2 \right\} dx.$$

Следовательно,

$$|R_m(x, t)| \leq \varepsilon \approx 0.0023465. \quad (6.3)$$

Уточненная оценка погрешности (5.11):

$$|R_m^{pr}(x, t)| \leq \sqrt{\frac{A_m}{D\gamma_{m+1}^4 + \beta_0}} \approx 0.0000573. \quad (6.4)$$

Как видим из рис. 6.1, оценка (6.1) очень грубая и не показывает точно амплитуду колебаний плиты.

Из (6.2), (6.3), получим точнее оценку $|w(x, t)| \leq |w_m(x_*, t)| + |R_m(x, t)|$. Следовательно,

$$|w(x, t)| \leq 0.0132924 \quad (6.5)$$

с относительной погрешностью

$$\left| \frac{R_m(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 21.4\%. \quad (6.6)$$

Из (6.2), (6.4), получим еще точнее оценку

$$|w(x, t)| \leq 0.0110032 \quad (6.7)$$

с относительной погрешностью

$$\left| \frac{R_m^{pr}(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 0.5\%. \quad (6.8)$$

Для доказательства достоверности предложенного метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Галеркина, на рис. 6.2 построен график разности приближений $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$ в точке $x_* = \frac{l}{2}$.

Как видим из рисунка 6.2 разность $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)| \leq 0.0000425$, что достаточно хорошо согласуется с оценкой остаточного члена (6.4).

Возьмем $m = 15$. Оценки (3.11), (4.16), (5.11) и относительные погрешности примут вид

$$|w_m(x_*, t)| \leq 0.0109460, \quad |R_m(x, t)| \leq 0.0002384, \quad \left| \frac{R_m(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 2.2\%,$$

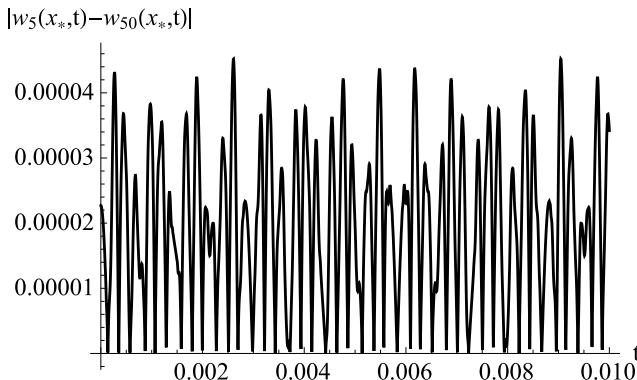


Рис. 6.2. Разность приближенных решений $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$ в точке $x_* = l/2$ при $t \in [0; 0.01]$

Fig. 6.2. The difference between the approximate solutions $|w_5(x, t) - w_{50}(x, t)|$ at the point $x_* = l/2$ for $t \in [0; 0.01]$

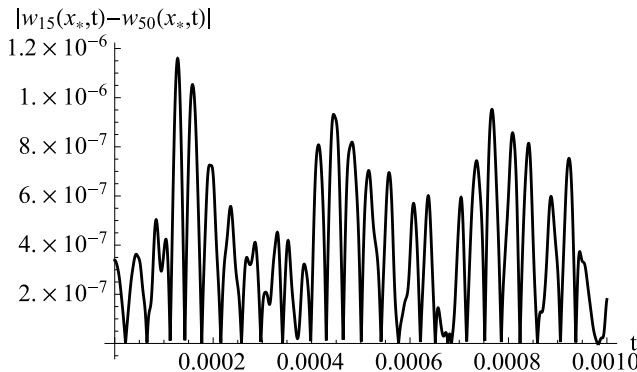


Рис. 6.3. Разность приближенных решений $|w_{15}(x, t) - w_{50}(x, t)|$ в точке $x_* = l/2$ при $t \in [0; 0.001]$

Fig. 6.3. The difference between the approximate solutions $|w_{15}(x, t) - w_{50}(x, t)|$ at the point $x_* = l/2$ for $t \in [0; 0.001]$

$$|R_m^{pr}(x, t)| \leq 0.0000013, \quad \left| \frac{R_m^{pr}(x_*, t)}{w_m(x_*, t)} \right| \cdot 100\% \approx 0.012\%.$$

Найдено приближенное решение (график аналогичен рис. 6.1) начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). Для пятнадцатого приближения погрешность составила 0.012%, что подтверждается рис. 6.3.

7. Заключение

Описанию метода Галеркина и сходимости приближенного решения, полученного этим методом, к точному решению посвящено большое количество научных работ (см., например, [8, 9, 10]). В данной статье на простейшем примере свободных колебаний

шарнирно закрепленной по краям упругой пластины показана возможность использования функционалов и функций Ляпунова для определения погрешности полученного методом Галеркина приближенного решения. В дальнейшем, с помощью предложенного метода планируется провести исследование динамики бетонной плиты, моделируемой упругой пластиной, с учетом взаимодействия с окружающей средой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // *Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН*. 2023. Т. 29, № 2. С. 27–40.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Попов В. С., Попова А. А. Динамика взаимодействия пульсирующего слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании // *Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки*. 2024. Т. 114, № 3. С. 45–69.
4. Суслов А. В., Ярославкина Е. Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // *Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер.* 2024. Т. 30, № 2. С. 45–53. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53
5. Божанов Е. Т., Ержанов Ж. С. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек и их приложения. Алматы, 2001.
6. Сухотерин М. В., Сосновская А. А. Потеря устойчивости защемленной по контуру прямоугольной нанопластины // *Науч.-тех. вестн. информ. техн. мех. опт.* 2024. Т. 24, № 4. С. 629–636. DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
7. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.
8. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
9. Келдыш М. В. О методе В. Г. Галеркина для решения краевых задач // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1942. Т. 6, Вып. 6. С. 309–330.
10. Репина А. И. Сходимость метода Галеркина решения нелинейной задачи о собственных модах микродисковых лазеров // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 163, № 1. С. 5–20. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20
11. Анкилов М. А., Андреев А. С. Численно-аналитический метод исследования динамики шарнирно закрепленной упругой пластины // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2025. Т. 242. С. 3–10. DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10
12. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

*Поступила 21.08.2025; доработана после рецензирования 28.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. A. Bochkarev, V. P. Matveenko, “Analysis of natural oscillations of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with liquid”, *Proceedings of the Inst. of Mat. Mech. Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.*, **29**:2 (2023), 27-40.
2. A. S. Volmir, *Nonlinear dynamics of plates and shells*, Nauka, Moscow, 1972 (In Russ.).
3. V. S. Popov, A. A. Popova, “Dynamics of interaction of a pulsating layer of a viscous compressible fluid with a plate on a nonlinear elastic foundation”, *Vestn. of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences.*, **114**:3 (2024), 45-69 (In Russ.).
4. A. V. Suslov, E. E. Yaroslavkina, “Study of the influence of temperature stresses on the natural oscillations of plates”, *Vestn. Samara University. Natural Science Series.*, **30**:2 (2024), 45–53 (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53
5. E. T. Bozhanov, Zh. S. Erzhanov, *Study of stability problems of elastic bodies, flexible plates and shells and their applications*, Almaty, 2001 (In Russ.).
6. M. V. Sukhoterlin, A. A. Sosnovskaya, “Loss of stability of a rectangular nanoplate clamped along the contour”, *Nauch.-tech. vestn. inform. tech. mech. opt.*, **24**:4 (2024), 629–636 (In Russ.). DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-4-629-636
7. I. M. Babakov, *Theory of oscillations*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.).
8. K. Fletcher, *Numerical methods based on the Galerkin method*, Mir, Moscow, 1988 (In Russ.), 352 p.
9. M. V. Keldysh, “On V. G. Galerkin’s method for solving boundary value problems”, *Izvestiya AN SSSR. Ser. Mat.*, **6**:6 (1942), 309-330 (In Russ.).
10. A. I. Repina, “Convergence of the Galerkin method for solving a nonlinear problem of the eigenmodes of microdisk lasers”, *Uch. zap. Kazan. University. Series: Phys.-Math. Sciences.*, **163**:1 (2021), 5–20 (In Russ.). DOI: 10.26907/2541-7746.2021.1.5-20
11. M. A. Ankilov, A. S. Andreev, “Numerical-analytical method for studying the dynamics of a hinged elastic plate”, *Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Reviews.*, **242** (2025), 3–10 (In Russ.). DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-3-10
12. L. Collatz, *Eigenvalue problems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

Submitted 21.08.2025; Revised 28.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина

Р. В. Жалнин, М. С. Нефедов, С. Х. Зинина

МГУ им. Н. П. Огарёва (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. В статье рассматривается многосеточный метод с полной аппроксимацией для разрывного метода Галёркина с неявной дискретизацией по времени. Целью исследования является применение данного метода для эффективного решения задач, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных. Разработан вычислительный алгоритм, который реализует многосеточный метод с полной аппроксимацией с применением метода Ньютона и усовершенствованного метода Ньютона-Крылова для решения возникающих нелинейных уравнений на каждом уровне сетки многосеточного метода. Такой подход позволяет существенно повысить эффективность алгоритма и сократить количество необходимых вычислительных ресурсов. Проведены численные эксперименты с применением обоих подходов к уравнению Хопфа. Исследовано влияние регуляризующего параметра и числа Куранта на скорость сходимости внешних итераций метода Ньютона. Экспериментально показано, что использование метода Ньютона-Крылова значительно улучшает общую производительность вычислительного процесса по сравнению с традиционным методом Ньютона, хотя оба подхода демонстрируют схожий порядок сходимости, приближающийся ко второму порядку при применении квадратичных базисов.

Ключевые слова: многосеточный метод, FAS, разрывный метод Галёркина, неявная дискретизация по времени, h-мультигрид, p-мультигрид, метод Ньютона-Крылова

Для цитирования: Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х. Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 435–450. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

Об авторах:

Жалнин Руслан Викторович, канд. физ.-мат. н., декан факультета математики и ИТ, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

Нефедов Михаил Сергеевич, аспирант кафедры прикладной математики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, snef7@yandex.ru

Зинина Светлана Халиловна, канд. мат. н., доцент кафедры прикладной математики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, zininaskh@math.mrsu.ru

© Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 76-10

Application of the Full Approximation Scheme Multigrid Method to solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the Discontinuous Galerkin Method

R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. This paper considers the Full Approximation Scheme (FAS) multigrid method for the Discontinuous Galerkin method with implicit time discretization. The objective of the research is to apply this method to efficient solution of problems governed by nonlinear partial differential equations. A computational algorithm has been developed that implements the Full Approximation Scheme multigrid method using Newton's method and an improved Newton-Krylov method to solve the arising nonlinear equations at each grid level of the multigrid method. This approach significantly improves the efficiency of the algorithm and reduces required computational resources. Numerical experiments were conducted applying both approaches for solving the Hopf equation. The influence of the regularization parameter and of the Courant number on the convergence rate of Newton's method outer iterations was investigated. It has been experimentally demonstrated that the use of the Newton-Krylov method significantly improves the overall performance of the computational process compared to the traditional Newton's method, although both approaches demonstrate a similar order of convergence, approaching second order when using quadratic basis functions.

Keywords: multigrid method, FAS, discontinuous Galerkin method, implicit time discretization, h-multigrid, p-multigrid, Newton-Krylov method

For citation: R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina. Application of the Full Approximation Scheme Multigrid Method to solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the Discontinuous Galerkin Method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 435–450. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.435-450

About the authors:

Ruslan V. Zhalnin, Ph.D. (Phys. and Math.), Dean of the Faculty of Mathematics and IT, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

Mikhail S. Nefedov, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, snef7@yandex.ru

Svetlana K. Zinina, Ph.D. (Math.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3002-281X>, zininaskh@math.mrsu.ru

1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) является эффективным инструментом для численного решения уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов [1–6]. Метод обеспечивает высокий порядок точности на неструктурированных сетках, обладает естественным параллелизмом и демонстрирует устойчивость при решении задач с преобладанием конвективных членов.

При решении, например, уравнений Навье-Стокса для малых чисел Маха явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными вследствие жёстких ограничений на шаг по времени, определяемых условием Куранта. Применение неявных схем, таких как неявные схемы Рунге-Кутты или методы дифференцирования назад [7], позволяет использовать большие шаги по времени; однако на каждом временном слое возникает необходимость решения больших систем нелинейных уравнений, которые часто оказываются плохо обусловленными. Классические итерационные методы могут демонстрировать существенное снижение скорости сходимости с ростом числа степеней свободы и увеличением порядка аппроксимации, что требует применения более эффективных решателей.

Многосеточные методы представляют собой перспективный подход к решению плохо обусловленных задач. В настоящее время можно выделить несколько основных направлений развития многосеточных методов для DG: p -multigrid и h -multigrid [8–13].

Эффективным для DG высокого порядка, является p -multigrid, при котором иерархия уровней строится на основе полиномиальных пространств различного порядка на фиксированной пространственной сетке. Эффективность этого подхода для численного решения уравнений Навье-Стокса продемонстрирована в работах [8, 9]. Для схем с порядком точности не выше третьего эффективно использование h -multigrid. В этом случае иерархия уровней строится на основе полиномиальных пространств с сетками разной размерности при фиксированном порядке точности каждого пространства [10]. Также имеется множество исследований, направленных на развитие гибридных hp -multigrid методов, сочетающих оба подхода [11–13].

Для решения систем нелинейных уравнений хорошо зарекомендовал себя многосеточный метод с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme Multigrid, FAS MG). Этот метод эффективно применяется как в сочетании с конечно-объемными методами [15–17], так и с DG [11].

Таким образом, сочетание неявных схем и многосеточных методов представляет собой важное направление в развитии эффективных DG-решателей для сложных многомасштабных задач.

В данной работе рассматривается применение многосеточного метода (h -multigrid) для неявной схемы разрывного метода Галёркина с использованием метода Ньютона и безматричного метода Ньютона-Крылова [18–21] для решения нелинейного уравнения Хопфа. Показывается, что использование метода Ньютона-Крылова значительно улучшает общую производительность вычислительного процесса по сравнению с традиционным методом Ньютона, хотя оба подхода демонстрируют схожий порядок сходимости, приближающийся ко второму порядку при применении квадратичных базисов

2. Вычислительный алгоритм

В данной работе рассматривается использование многосеточного метода с полной аппроксимацией (Full Approximation Scheme, FAS) [14] на основе разрывного метода

Галеркина [1] для решения нелинейных уравнений в частных производных.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (2.1)$$

где $u = u(x, t)$, с периодическими граничными условиями и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

2.1. Метод Галёркина с разрывными базисными функциями (разрывный метод Галёркина) с неявной дискретизацией по времени

Для численного решения уравнения (2.1) введём равномерную сетку

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

с шагом $h = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, N$.

Приближенное решение будем искать разрывным методом Галеркина [1], как элемент пространства

$$V_h^p = \{u_h \in L^2(0, 1) : u_h|_{I_i} \in P_p(I_i), \quad i = 1, \dots, N\}, \quad (2.3)$$

где $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $P_p(I_i)$ – пространство полиномов степени не выше p на интервале I_i .

В каждой ячейке $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ приближенное решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде проекции на пространство $P_p(I_i)$ в базисе $\{\psi_k(x)\}$:

$$u_h(x, t)|_{I_i} = \sum_{k=0}^p u_{ik}(t) \psi_{ik}(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

В работе рассматриваются случаи $p = 0, 1, 2$. В качестве базиса выберем полиномы Лежандра:

$$\begin{aligned} \psi_{i0}(x) &= \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad \psi_{i1}(x) = 2\sqrt{\frac{3}{h}} \frac{x - x_i}{h}, \\ \psi_{i2}(x) &= \sqrt{\frac{5}{h}} \left(6 \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} \right), \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$.

Согласно разрывному методу Галеркина для нахождения решения в ячейке I_i получим следующую систему [1]:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u_h}{\partial t} \psi_{il}(x) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \frac{\partial}{\partial x} \psi_{il}(x) dx + \\ & + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il}(x_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 0, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}$, $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ – дискретные потоки, которые определяются по значениям слева и справа от соответствующей границы ячейки:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i-\frac{1}{2}} &= \hat{f}(u_{i-\frac{1}{2}}^L, u_{i-\frac{1}{2}}^R), u_{i-\frac{1}{2}}^L = u_h(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_{i-1}}, u_{i-\frac{1}{2}}^R = u_h(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_i}, \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} &= \hat{f}(u_{i+\frac{1}{2}}^L, u_{i+\frac{1}{2}}^R), u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_i}, u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \Big|_{I_{i+1}}\end{aligned}$$

и должны удовлетворять условиям согласования $\hat{f}(u, u) = f(u)$.

Из (2.4) получим:

$$\begin{aligned}\frac{du_{il}}{dt} &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \psi'_l dx - \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}, \\ i &= 1, \dots, N; \quad l = 0, \dots, p.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Неявная дискретизация по времени приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{u_{il} - \bar{u}_{il}}{\tau} &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u_h) \psi'_l dx - \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} + \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \psi_{il} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}, \\ i &= 1, \dots, N; \quad l = 0, \dots, p.\end{aligned}\tag{2.8}$$

2.2. Метод Ньютона

Неявную схему (2.8) запишем в следующем виде:

$$\frac{U_h - \bar{U}_h}{\tau} = \mathcal{L}(U_h),\tag{2.9}$$

где \mathcal{L} – оператор, соответствующий правой части уравнения (2.8); $U_h = (u_{00}, \dots, u_{ik}, \dots, u_{Np})^T$ – коэффициенты разложения решения по базису; \bar{U}_h – коэффициенты разложения решения по базису, соответствующие предыдущему шагу по времени.

Далее перепишем систему (2.9) в виде

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h,\tag{2.10}$$

где

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = \frac{1}{\tau} U_h - \mathcal{L}(U_h), \quad F_h = \frac{1}{\tau} \bar{U}_h.\tag{2.11}$$

При решении системы (2.10) методом Ньютона на каждой итерации находим новое приближение решения как

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta \Delta U_h, \quad \alpha = 0, 1, \dots; \quad U_h^{(0)} = \bar{U}_h,$$

где θ – параметр регуляризации, который вводится для управления сходимостью метода Ньютона; приращение ΔU_h находится, как решение системы линейных алгебраических уравнений вида

$$J_h^{(\alpha)} \Delta U_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)}), \quad J_h^{(\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial U_h^\alpha} \Big|_{U_h^{(\alpha)}}.\tag{2.12}$$

2.3. Безматричный метод Ньютона-Крылова

Основная идея безматричного метода Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov method – JFNK) заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби [18–20].

Рассмотрим невязку системы (2.10):

$$R_h(U_h) = \mathcal{Q}_h(U_h) - F_h = \frac{1}{\tau}(U_h - \bar{U}_h) - \mathcal{L}(U_h). \quad (2.13)$$

Алгоритм, как и классический метод Ньютона, состоит из внешних итераций:

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta \Delta U_h, \quad (2.14)$$

где приращение ΔU_h находится решением задачи минимизации в подпространстве Крылова:

$$\Delta U_h \approx \arg \min_{\Delta U \in \mathcal{K}_m} \left\| R_h(U_h^{(\alpha)}) + J \Delta U \right\|_2, \quad (2.15)$$

где $J = \left. \frac{\partial R_h}{\partial U_h} \right|_{U_h^{(\alpha)}}$ и $\mathcal{K}_m = \text{span} \langle r_0, J r_0, J^2 r_0, \dots, J^{m-1} r_0 \rangle$, $r_0 = R_h(U_h^{(\alpha)})$.

Ключевой особенностью JFNK является безматричная аппроксимация действия якобиана на вектор:

$$Jv \approx \frac{R_h(U_h^{(\alpha)} + \varepsilon v) - R_h(U_h^{(\alpha)})}{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

где ε — малое возмущение, выбираемое с учётом машинной точности. Таким образом, отпадает необходимость формирования и явного хранения в памяти якобиана (2.12), как в классическом методе Ньютона; вместо этого требуется только вычисление значения невязки (2.13).

В данной работе для решения внутренних линейных систем используется метод LGMRES [21], который представляет собой модификацию GMRES с ограниченным размером подпространства Крылова и возможностью перезапуска. Этот выбор обусловлен его эффективностью для нелинейных задач и возможностью контроля памяти. Для обеспечения устойчивости применяется регуляризация шага с параметром θ .

2.4. Многосеточный метод с полной аппроксимацией

При решении задач большой размерности вычислительная сложность может оставаться высокой, поэтому для дальнейшего ускорения сходимости и снижения вычислительных затрат в данной работе используется многосеточный подход. Основная идея многосеточного метода заключается в использовании иерархии сеток для эффективного подавления погрешностей различных частот. Высокочастотные составляющие погрешности эффективно устраняются на мелких сетках, в то время как низкочастотные компоненты переносятся на более грубые сетки, где их устранение требует меньших вычислительных ресурсов.

Чтобы найти решение U_h системы (2.10) воспользуемся многосеточным методом с полной аппроксимацией.

Рассмотрим набор вложенных пространств:

$$V_h^p \supset V_{2h}^p \supset \dots \supset V_{2^{l-1}h}^p \quad (2.17)$$

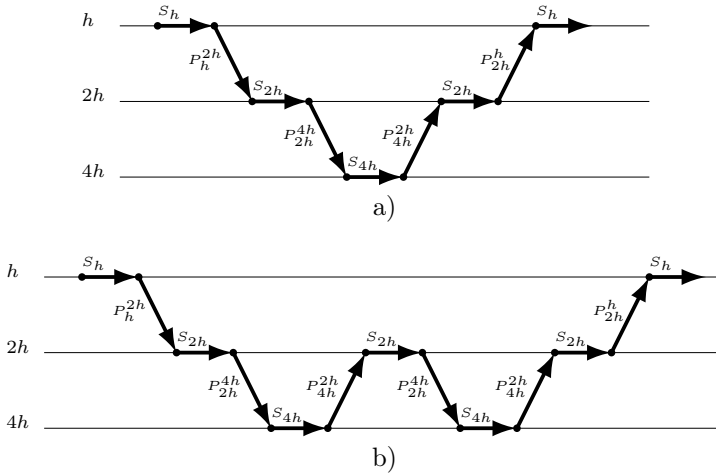


Рис. 2.1. Варианты проекции на сеточные уровни трехсеточного метода (S_α – оператор сглаживания на уровне α ; P_α^β – оператор проекции с уровня α на уровень β): а) V-цикл; б) W-цикл.

Fig 2.1. Projection schemes for grid levels in a three-grid method (S_α —smoothing operator at level α ; P_α^β —projection operator from level α to level β): а) V-cycle; б) W-cycle.

Здесь l – это фиксированное число, равное количеству уровней.

Далее рассмотрим два последовательных пространства из набора (2.17), которые обозначим $V_h \supset V_H$. В дальнейших рассуждениях будем говорить, что пространство V_h соответствует подробному уровню, а пространство V_H – грубому уровню.

Также определим операторы ортогональной проекции:

$$\mathcal{P}_h^H : V_h \rightarrow V_H, \quad \mathcal{P}_H^h : V_H \rightarrow V_h,$$

Выполнив несколько итераций метода Ньютона или безматричного метода Ньютона-Крылова, найдем приближение к искомому решению \tilde{U}_h . Невязка для данного приближения будет равна

$$R_h = F_h - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.18)$$

Вычтем $\mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h)$ из левой и правой частей (2.10) и получим

$$\mathcal{Q}_h(U_h) - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h) = F_h - \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.19)$$

Из (2.18) получим

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = R_h + \mathcal{Q}_h(\tilde{U}_h). \quad (2.20)$$

Далее аналогично (2.11) определим оператор $\mathcal{Q}_H : V_H \rightarrow V_H$ и найдем на грубом уровне решение $U_H \in V_H$ для системы

$$\mathcal{Q}_H(U_H) = F_H, \quad (2.21)$$

где $F_H = \mathcal{P}_h^H R_h + \mathcal{Q}_H(\mathcal{P}_h^H \tilde{U}_h)$.

Вычислив ошибку

$$\varepsilon_H = U_H - \tilde{U}_H,$$

найдем решение на подробной сетке

$$U_h = \tilde{U}_h + \mathcal{P}_H^h \varepsilon_H. \tag{2.22}$$

Затем выполним несколько итераций метода Ньютона или безматричного метода Ньютона-Крылова для системы (2.10), взяв в качестве начального приближения вычисленное U_h .

При решении системы (2.21) можно рекурсивно применить этот же алгоритм. Таким образом, комбинируя различную глубину огрубления расчетной сетки и повторные переходы на грубый уровень, можно получить модификации данного многосеточного алгоритма (например, V-, W-циклы, как показано на рисунке 2.1).

3. Результаты расчетов

Рассматривалось нелинейное уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0 \tag{3.1}$$

с начальным условием $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ и периодическими граничными условиями.

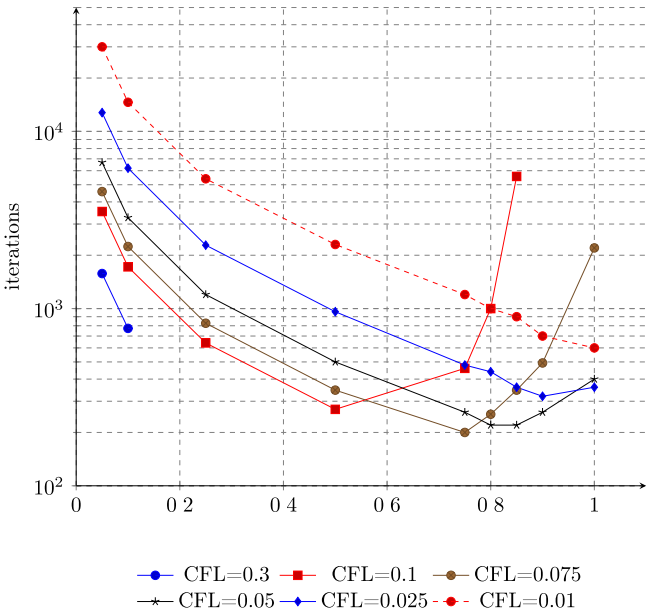


Рис. 3.1. Общее количество итераций метода Ньютона, при выполнении $1/CFL$ шагов по времени.

Fig. 3.1. Total number of iterations of Newton's method, performing $1/CFL$ time steps.

Таблица 3.1. Зависимость количества итераций метода Ньютона от параметра θ для различных значений CFL и p до достижения условия $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$

Table 3.1. Dependence of the number of iterations of Newton's method on parameter θ for various values of CFL and p until reaching the condition $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$

$p = 0$						
θ	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	473	353	343	334	319	300
0.1	232	172	168	163	155	146
0.25	>500	64	62	60	57	54
0.5	>500	27	26	25	24	23
0.75	>500	46	15	13	12	12
0.8	>500	100	19	11	11	10
0.85	>500	557	26	11	9	9
0.9	>500	>500	37	13	8	7
1	>500	>500	165	20	9	6
$p = 1$						
θ	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	385	362	357	348	334	315
0.1	188	177	174	170	163	154
0.25	69	65	64	63	60	57
0.5	29	27	27	26	25	24
0.75	>500	14	14	13	13	12
0.8	>500	13	12	12	11	11
0.85	>500	16	11	10	10	9
0.9	>500	20	14	9	8	8
1	>500	30	20	14	9	6
$p = 2$						
θ	CFL					
	0.3	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
0.05	492	368	359	349	334	315
0.1	242	180	175	170	163	154
0.25	>500	66	64	63	60	57
0.5	>500	28	27	26	25	24
0.75	>500	55	18	13	13	12
0.8	>500	107	24	12	11	11
0.85	>500	>500	32	12	10	9
0.9	>500	>500	46	15	8	8
1	>500	>500	164	23	10	6

Для выбора оптимального параметра θ была выполнена серия расчетов без использования многосеточного метода классическим методом Ньютона для различных значений параметров θ и $CFL = \tau/h$. В каждом расчете было выполнено $1/CFL$ шагов по времени.

В таблице 3.1 приведено количество внутренних итераций метода Ньютона на одном шаге по времени, необходимое для достижения оценки $\|\Delta U_h\| < 10^{-10}$ для значений параметра $p = 0, 1, 2$. На рисунке 3.1 представлены графики зависимости количества итераций от значения параметра θ при $p = 2$. Анализ таблицы и графиков показывает, что для параметра $p = 2$ наиболее оптимальным по количеству внутренних итераций является набор параметров $CFL = 0.1$ и $\theta = 0.5$.

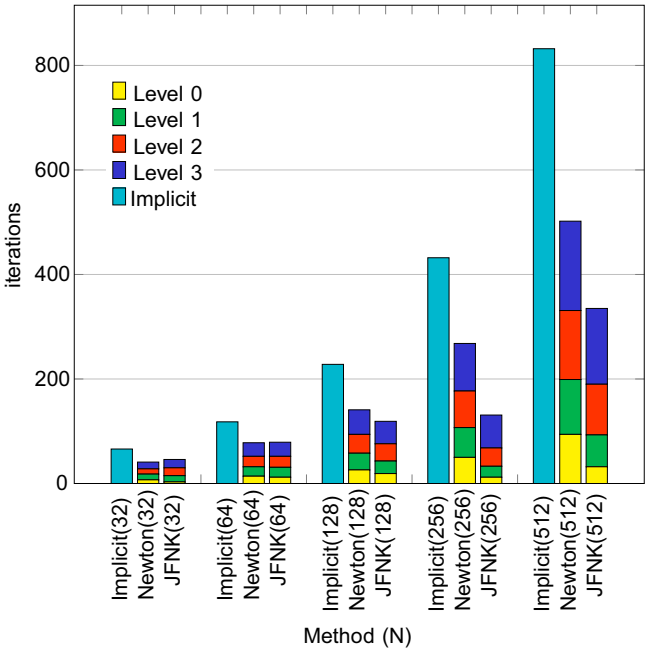


Рис. 3.2. Количество внешних итераций по уровням при различных N .

Fig. 3.2. The number of outer iterations per level for different N .

Затем были выполнены расчеты методом FAS с использованием методов Ньютона и Ньютона-Крылова на сетках с уровнем вложенности до 4. Количество итераций на каждом уровне приведено на рисунке 3.2, где сравниваются результаты, полученные вышеуказанными методами и классическим методом Ньютона без использования многосеточного подхода. Видно, что с увеличением количества ячеек сетки значительное преимущество демонстрирует расчет с использованием метода Ньютона-Крылова.

Для сравнения ускорения метода были выполнены расчеты для различных значений CFL . На рисунке 3.3 показано достигаемое ускорение (отношение времени вычислений метода Ньютона-Крылова к методу Ньютона) в зависимости от размера сетки N и числа Куранта (CFL). Для каждого метода подсчитывается суммарное число внешних итераций по всем уровням многосеточной иерархии.

Метод Ньютона-Крылова демонстрирует преимущество для сеток размером $N \geq 128$, достигая ускорения до 3.3 раза при $N = 512$ и малых CFL . Для малых сеток

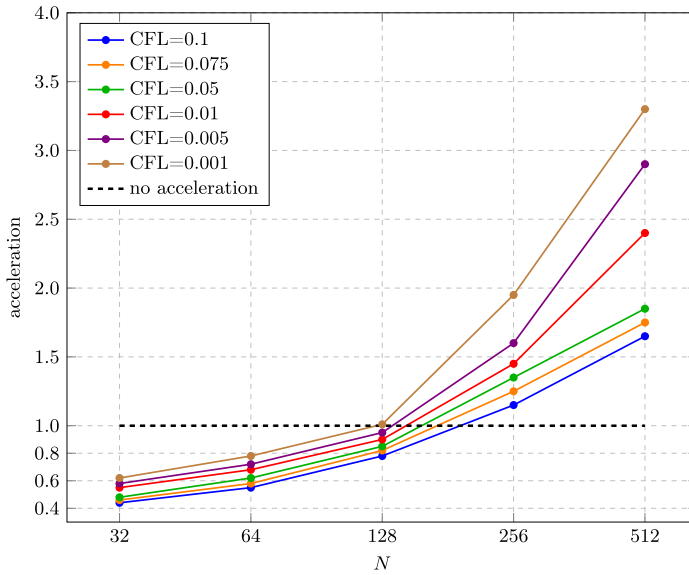


Рис. 3.3. График ускорения метода Ньютона-Крылова относительно классического Ньютона по времени вычисления

Fig. 3.3. Graph of the acceleration of the Newton-Krylov method relative to classical Newton in terms of computation time.

($N < 128$) классический метод Ньютона может быть предпочтительнее из-за низких накладных расходов.

График ускорения демонстрирует существенную зависимость эффективности от размера сетки. При $N = 32, 64$: ускорение меньше 1.0 для всех CFL . Накладные расходы итерационного решения внутренних систем перевешивают выгоду от отсутствия явной факторизации матрицы Якоби. При $N = 128$: появляется положительное ускорение для малых $CFL = 0.001, 0.005$, достигая значений 1.2 – 1.5. При $N = 256, 512$: ускорение становится существенным для всех CFL , достигая максимума ~ 3.3 при $N = 512$ и $CFL = 0.001$.

Также наблюдается и существенная зависимость от значений CFL . Малые $CFL = 0.001, 0.005$: максимальное ускорение. При $N = 512$ и $CFL = 0.001$ ускорение ~ 3.3 . Это связано с увеличением числа итераций у классического метода Ньютона для плохообусловленных систем, тогда как метод Ньютона-Крылова использует безматричные операции и лучше справляется с такими условиями. Большие $CFL = 0.1$ – меньшее ускорение, но положительное для больших N . При $N = 512$ достигается ускорение ~ 1.5 . Интересно, что при $CFL = 0.1$ метод Крылова показывает больше итераций (1003 против 832), но все равно быстрее за счет меньшей стоимости итерации.

Таблица 3.2. Порядки сходимости для методов Ньютона и Ньютона-Крылова
($p = 2$; p_1, p_2 – численные порядки сходимости для погрешности в
соответствующей норме).

Table 3.2. Convergence orders for Newton’s method and Newton-Krylov method
($p = 2$; p_1, p_2 are the numerical convergence orders for the error in the
corresponding norm).

Кол-во ячеек	Метод Ньютона				Метод Ньютона-Крылова			
	L_1		L_2		L_1		L_2	
	err_1	p_1	err_2	p_2	err_1	p_1	err_2	p_2
32	1.5581×10^{-5}	–	1.9917×10^{-5}	–	1.5581×10^{-5}	–	1.9916×10^{-5}	–
64	3.4445×10^{-6}	2.18	4.4335×10^{-6}	2.17	3.4444×10^{-6}	2.18	4.4334×10^{-6}	2.17
128	8.7216×10^{-7}	1.98	1.0584×10^{-6}	2.07	8.7216×10^{-7}	1.98	1.0584×10^{-6}	2.07
256	4.0786×10^{-7}	1.78	4.8282×10^{-7}	1.82	4.0783×10^{-7}	1.78	4.8279×10^{-7}	1.82

Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках. В таблице 3.2 показаны абсолютные погрешности и порядки сходимости для методов Ньютона и Ньютона-Крылова. В первой колонке указано количество ячеек самого подробного уровня сетки. Оба метода демонстрируют порядок сходимости близкий ко второму при использовании базисных полиномов степени не выше 2.

4. Заключение

В работе предложен вычислительный алгоритм на основе разрывного метода Галеркина с использованием многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных. Эффективность алгоритма исследована на примере начально краевой задачи для уравнения Хопфа с периодическими граничными условиями. Для решения нелинейной системы уравнений, получающейся на каждом уровне сетки, использованы два метода – метод Ньютона и метод Ньютона-Крылова. Выполнено сравнение результатов в плане экономичности, то есть минимального количества итераций, необходимых для достижения заданного уровня точности на каждом уровне сетки. Показано, что метод JFNK демонстрирует значительное преимущество при увеличении количества ячеек расчетной сетки.

При этом безматричный метод Ньютона-Крылова демонстрирует такую же точность и порядок сходимости, как и классический метод Ньютона. Это позволяет говорить о том, что этот метод является эффективным инструментом, позволяющим решать нелинейные уравнения с частными производными с наименьшими вычислительными затратами.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems. Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations : Lecture Notes in Mathematics. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Hesthaven J. S., Warburton T. Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications. New York: Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-72067-8
3. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Применение разрывного метода Галёркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2016. Т. 9, № 3. С. 144-151. DOI: 10.14529/mmp160313
4. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т. 56, № 6. С. 989-998. DOI: 10.7868/S0044466916060247
5. Брагин М. Д., Криксин Ю. А., Тишкин В. Ф. Энтропийно устойчивый разрывный метод Галеркина для двумерных уравнений Эйлера // *Матем. Моделирование*. 2021. Т. 33, № 2. С. 125-140. DOI: 10.20948/mm-2021-02-09
6. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. Применение неявной схемы разрывного метода Галеркина к решению задач газовой динамики на графических ускорителях NVIDIA. // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*. 2022. Т. 15, № 2. С. 86-99. DOI: 10.14529/mmp220207
7. Persson P.-O., Peraire J. Newton-GMRES Preconditioning for Discontinuous Galerkin Discretizations of the Navier-Stokes Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 30, no. 6. P. 2709-2733. DOI: 10.1137/070692108
8. Franciolini M., Botti L., Colombo A., Crivellini A. p-multigrid matrix-free discontinuous galerkin solution strategies for the under-resolved simulation of incompressible turbulent flows. *Computers Fluids*. 2020. DOI: 10.48550/arXiv.1809.00866
9. Lei N., Zhang D., Zheng W. P-multigrid method for the discontinuous galerkin discretization of elliptic problems. *Journal of Scientific Computing*. 2025. Vol. 105, no. 76. DOI: 10.1007/s10915-025-03105-7
10. Botti L., Colombo A., Bassi F. h-multigrid agglomeration based solution strategies for discontinuous galerkin discretizations of incompressible flow problems. *Journal of Computational Physics*. 2017. P. 382-415. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.07.002
11. Волков А. В. Применение многосеточного подхода к решению 3D уравнений Навье-Стокса на гексаэдральных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 3. С. 517-531. DOI: 10.1134/S0965542510030103

12. Antonietti P. F., Sarti M., Verani M. Multigrid algorithms for hp-discontinuous galerkin discretizations of elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2015. Vol. 53, no. 1. P. 598–618. DOI: 10.1137/130947015
13. Fu G., Kuang W. hp-Multigrid Preconditioner for a Divergence-Conforming HDG Scheme for the Incompressible Flow Problems. *J. Sci Comput.* 2024. Vol. 100, no. 16. DOI: 10.1007/s10915-024-02568-4
14. Brandt A. Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics : Technical Report AIAA-79-1455. Williamsburg : AIAA, 1979.
15. Feng W., Guo Z., Lowengrub J.S., Wise S.M. A mass-conservative adaptive FAS multigrid solver for cell-centered finite difference methods on block-structured, locally-cartesian grids. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 352. P. 463-497. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.09.065
16. Горобец А.В. Подход к реализации многосеточного метода с полной аппроксимацией для задач вычислительной гидродинамики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63, № 11. С. 1922-1933. DOI: 10.31857/S0044466923110133
17. Горобец А.В., Суков С.А., Магомедов А.Р. Гетерогенная параллельная реализация многосеточного метода с полной аппроксимацией в программном комплексе NOISETTE // *Матем. моделирование*. 2024. Т. 36, № 2. С. 129-146. DOI: 10.20948/mm-2024-02-08
18. Chan T. F., Jackson K.R. Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1984. Vol. 5. P. 533-542.
19. Brown P.N., Saad Y. Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1990. Vol. 11. P. 450-481.
20. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357-397. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.010
21. Baker A.H., Jessup E.R., Manteuffel T. A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2005. Vol. 26, No. 4. P. 962-984. DOI: 10.1137/S0895479803422014

*Поступила 15.09.2025; доработана после рецензирования 27.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. B. Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection Dominated Problems”, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1697**, Springer, Berlin, 1998, 151–268.

2. J. S. Hesthaven, T. Warburton, “Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications.”, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-72067-8
3. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Discontinuous finite-element galerkin method for numerical solution of parabolic problems in anisotropic media on triangle grids”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming, Computer Software*, **9:3** (2016), 144–151. DOI: 10.14529/mmp160313
4. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56:6** (2016), 977–986. DOI: 10.1134/S0965542516060245
5. M. D. Bragin, Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Entropy stable discontinuous Galerkin method for two-dimensional Euler equations”, *Math. Models Comput. Simul.*, **13:5** (2021), 897–906. DOI: 10.20948/mm-2021-02-09
6. V. F. Masyagin, R. V. Zhalnin, V. F. Tishkin, “Application of an implicit scheme of the discontinuous galerkin method to solving gas dynamics problems on NVIDIA graphic accelerators”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming, Computer Software*, **15:2** (2022), 86–99. DOI: 10.14529/mmp220207
7. P.-O. Persson, J. Peraire, “Newton-GMRES Preconditioning for Discontinuous Galerkin Discretizations of the Navier-Stokes Equations.”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30:6** (2008), 2709–2733.. DOI: 10.1137/070692108
8. M. Franciolini, L. Botti, A. Colombo, A. Crivellini, “p-multigrid matrix-free discontinuous galerkin solution strategies for the under-resolved simulation of incompressible turbulent flows”, *Computers Fluids*, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.1809.00866
9. N. Lei, D. Zhang, W. Zheng, “P-multigrid method for the discontinuous galerkin discretization of elliptic problems”, *Journal of Scientific Computing*, **105:76** (2025). DOI: 10.1007/s10915-025-03105-7
10. L. Botti, A. Colombo, F. Bassi, “h-multigrid agglomeration based solution strategies for discontinuous galerkin discretizations of incompressible flow problems”, *Journal of Computational Physics*, 2017, 382–415. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.07.002
11. A. V. Wolkov, “Application of the multigrid approach for solving 3D NavierStokes equations on hexahedral grids using the discontinuous Galerkin method”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:3** (2010), 495–508. DOI: 10.1134/S0965542510030103
12. P. F. Antonietti, M. Sarti, M. Verani, “Multigrid algorithms for hp-discontinuous galerkin discretizations of elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53:1** (2015), 598–618. DOI: 10.1137/130947015
13. G. Fu, W. Kuang, “hp-Multigrid Preconditioner for a Divergence-Conforming HDG Scheme for the Incompressible Flow Problems”, *J. Sci Comput.*, **100:16** (2024). DOI: 10.1007/s10915-024-02568-4

14. A. Brandt, *Multi-level Adaptive Computations in Fluid Dynamics*, Williamsburg, 1979 (Technical Report AIAA-79-1455).
15. W. Feng, Z. Guo, J. S. Lowengrub, S. M. Wise, “A mass-conservative adaptive FAS multigrid solver for cell-centered finite difference methods on block-structured, locally-cartesian grids”, *Journal of Computational Physics*, **352** (2018), 463–497. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.09.065
16. A. V. Gorobets, “An approach to the implementation of the multigrid method with full approximation for CFD problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **63**:11 (2023), 2150–2161. DOI: 10.1134/S0965542523110106
17. A. V. Gorobets, S. A. Sukov, A. R. Magomedov, “Heterogeneous Parallel Implementation of the Full Approximation Scheme Multigrid Method in the NOISETTE Software Package”, *Math. Models Comput. Simul.*, **16**:4 (2024), 609–619. DOI: 10.1134/S2070048224700261
18. T. F. Chan, K. R. Jackson, “Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5** (1984), 533–542.
19. P. N. Brown, Y. Saad, “Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11** (1990), 450–481.
20. D. A. Knoll, D. E. Keyes, “Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications”, *Journal of Computational Physics*, **193**:2 (2004), 357–397. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.010
21. A. H. Baker, E. R. Jessup, T. Manteuffel, “A Technique for Accelerating the Convergence of Restarted GMRES”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **26**:4 (2005), 962–984. DOI: 10.1137/S0895479803422014

Submitted 15.09.2025; Revised 27.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977

Задачи о наихудших воздействиях на многомассовую упругую систему

П. П. Ткаченко, Д. В. Баландин, Т. В. Рябикова

Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предложен аналитический подход к синтезу наихудших внешних воздействий для линейных динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование проводится для трёх классических функциональных пространств (L_2 , L_∞ , L_1) на фиксированном временном интервале, что соответствует задачам поиска воздействия с ограниченной энергией, ограниченной амплитудой и ограниченным импульсом. В качестве объекта анализа выбраны линейные упругие механические системы, что позволяет наглядно интерпретировать результаты. Для количественной оценки получаемых решений вводится специальный унифицированный показатель – отношение целевого выхода системы (например, максимального отклонения) к L_p -норме воздействия (нормированный отклик системы). В представленной работе получены явные аналитические выражения для наихудших воздействий и соответствующих им значений показателей. Показана взаимосвязь между показателями, полученными для различных классов воздействий. Приведены результаты численного моделирования для систем с одной и несколькими степенями свободы, представляющие собой цепочки материальных точек, соединённых упругими и диссипативными элементами между собой и подвижным основанием.

Ключевые слова: многомассовая упругая система, максимальная деформация, наихудшее воздействие, линейная система ОДУ, показатели колебательной активности, L_p -норма

Для цитирования: Ткаченко П. П., Баландин Д. В., Рябикова Т. В. Задачи о наихудших воздействиях на многомассовую упругую систему // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 451–470. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

Об авторах:

Ткаченко Полина Павловна, младший научный сотрудник направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5132-234X>, P Tkachen@gmail.com

Баландин Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dbalandin@yandex.ru

Рябикова Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., специалист-исследователь направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0302-2064>, tanya.dovid@gmail.com



MSC2020 70Q05

The problems of the worst-case disturbances acting on multi-mass elastic system

P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova

Sirius University of Science and Technology (Sirius, Russian Federation)

Abstract. An analytical framework for synthesizing worst-case external disturbances for linear dynamical systems described by ordinary differential equations is presented in the paper. The study is conducted for three classical functional spaces L_2, L_∞, L_1 over a fixed time interval, which corresponds to identifying disturbances with bounded energy, bounded amplitude, and bounded impulse, respectively. Linear elastic mechanical systems are chosen as a illustrative object of analysis, thus providing an intuitive interpretation of the results. A unified performance metric is introduced for quantitative assessment of solutions. This metrics is the ratio of a system's target output (e.g., maximum deviation) to the L_p -norm of the disturbance (i.e. the normalized system response). Explicit analytical expressions for the worst-case disturbances and their corresponding performance indices are derived. The interrelations between the indices obtained for different disturbance classes are examined. Numerical simulation results are provided for single- and multiple-degree-of-freedom systems, represented as chains of point masses interconnected by elastic and damping elements, and connected to a movable base.

Keywords: multi-mass elastic system, maximal deformation, worst-case disturbance, linear ODE system, indicators of oscillatory activity, L_p -norm

For citation: P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova. The problems of the worst-case disturbances acting on multi-mass elastic system. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 451–470. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

About the authors:

Polina P. Tkachenko, Research Assistant at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5132-234X>, P Tkachen@gmail.com

Dmitry V. Balandin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dbalandin@yandex.ru

Tatiana V. Ryabikova, PhD. Sci. (Phys.-Math.), Research Assistant at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0302-2064>, tanya.dovid@gmail.com

1. Введение

В теории управления задача определения наихудших воздействий занимает важное место при проектировании механических систем для определения пределов надежности. Под наихудшим воздействием (worst-case disturbance) будем понимать внешнее возмущение или силу, которая приводит к наиболее негативному или нежелательному результату, такому как максимальное смещение, отказ или значительное отклонение от желаемого состояния. Другая сфера применения связана с синтезом оптимального управления в критических условиях. Информация о наихудшем воздействии используется для проектирования контроллеров, позволяющих поддерживать требуемый режим работы. Математически можно сформулировать задачу, как поиск наихудшего воздействия из заданного класса на динамическую систему, позволяющего получить некоторые предельное значение (экстремум функционала), описывающее свойства системы. Типичными примерами таких функционалов служат максимальные деформации упругих элементов или максимальные напряжения/усилия, возникающие в механических системах; максимальные электрические напряжения или максимальные величины протекающих токов в электрических системах.

Исторически данное направление восходит к классической работе Б.В. Булгакова «задача о накоплении возмущений в линейной системе» 1946 года, посвященной проблеме накопления возмущений [1]. В последующем происходило активное развитие этих идей, задача усложнялась и модифицировалась о чем свидетельствуют публикации (см. например, [2, 3]). Со временем задача поиска наихудшего воздействия получила новое развитие в теории H_∞ -управления [4]. Характерная особенность задач H_∞ -управления – внешние возмущения, принадлежащие классу L_2 , т.е. классу интегрируемых с квадратом функций. Задача состоит в синтезе управления по полному состоянию системы или по измеряемому выходу, цель которого наилучшим (в смысле заданного показателя) образом парировать наиболее опасное (наихудшее) из класса допустимых внешнее возмущение [5]. В работе [6] синтез управления в задаче парирования наихудшего внешнего возмущения предлагается проводить с учетом неизвестных начальных условий системы. Задача с неопределенными начальными условиями получила дальнейшее развитие для управляемых систем на конечном интервале времени для систем с переменными параметрами [7–9] и бесконечном интервале времени для систем с постоянными параметрами [10]. В последней работе основной результат формулируется в терминах линейных матричных неравенств, тогда как в предшествующих указанных работах формулировка результата дается в терминах решений дифференциального матричного уравнения Риккати.

Статья посвящена нахождению наихудших воздействий, действующих на линейную динамическую систему на фиксированном временном интервале для трёх классических функциональных пространств (L_2 , L_∞ , L_1). Актуальность исследования обусловлена задачами анализа робастности и оценкой предельных возможностей систем управления и механических конструкций. Для удобства интерпретации рассматривается механическая система. В качестве величины, характеризующей отклик линейной системы на внешнее воздействие, используется максимальное по времени значение абсолютной величины линейной комбинации фазовых переменных системы (в интерпретации линейной механической системы используется максимальная деформация одного из упругих элементов).

Статья включает в себя пять разделов. Во втором разделе приводится постановка задачи о наихудших воздействиях. В третьем разделе приводятся подробные решения и

явные формулы для наихудших воздействий и показателей для классов L_2 , L_∞ и L_1 , а также подход к вычислению $J_T^{(2)}$ как решение задачи полуопределенного программирования. Четвертый раздел посвящен примерам механических систем с одной и многими степенями свободы, описываемыми однородными цепочками упругосвязанных материальных точек. В последнем разделе приводятся краткие результаты исследования.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим механическую конструкцию, состоящую из материальных точек, связанных линейными упругими и демпфирующими элементами и описываемую системой линейных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Bv, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (2.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор, компоненты которого определяют координаты материальных точек; $v \in \mathbb{R}^1$ – возмущения, действующие на конструкцию; симметрические положительно определенные $n \times n$ – матрицы M , C , K определяют массы материальных точек, коэффициенты демпфирующих и упругих линейных элементов соответственно; B – $n \times 1$ – матрица, характеризующая материальные точки конструкции, на которые действуют возмущения. Будем предполагать, что возмущения, действующие на конструкцию, есть скалярные функции $v = v(t)$, принадлежащие классу функций $L_p[0, T]$.

В качестве изучаемой характеристики примем деформацию одного из упругих элементов рассматриваемой конструкции, которую выразим в виде

$$z(t) = l^\top q(t),$$

где l^\top – заданная $1 \times n$ – матрица. Для анализа переходных процессов введем показатель, характеризующий максимальную деформацию на классе возмущений L_p

$$J_T^{(p)} = \sup_{v \neq 0} \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_p}, \quad (2.2)$$

где

$$\|v\|_p = \left\{ \int_0^T |v(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad p = 1, 2;$$

$$\|v\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|, \quad p = \infty.$$

Кратко поясним смысл введенного показателя. В числителе обсуждаемой характеристики фигурирует максимальная величина деформации выбранного упругого элемента для заданного возмущения, а в знаменателе – L_p -норма действующего возмущения. Ясно, что рассматриваемое отношение

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_p}$$

зависит от заданного возмущения. Если теперь найти максимальное (на классе всех возможных возмущений) значение этого отношения, то получаемый таким образом показатель будет характеризовать рассматриваемую механическую конструкцию по отношению ко всему классу возмущений. Заметим также, что нижний индекс T показателя

$J_T^{(p)}$ определяет рассматриваемый временной интервал, а верхний индекс указывает на класс возмущений. При изменении величины T будет изменяться и показатель (2.2).

В данной статье изучается вопрос о вычислении показателя (2.2) и возмущения $v_*(t)$, при котором этот показатель достигается. В теории управления возмущение из заданного класса, обеспечивающее максимальное значение показателя системы, часто называется «наихудшим» воздействием (возмущением).

3. Решение задачи о наихудшем возмущении

Дальнейшее исследование будет сфокусировано на анализе трех фундаментальных классов возмущений, соответствующих значениям параметра $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Выбор этих случаев продиктован их ключевым значением в прикладной механике. Случай $p = 1$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченным импульсом, что важно для оценки кратковременных ударных воздействий. Случай $p = 2$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченной энергией, что является стандартным предположением при анализе устойчивости и долговременного поведения систем. Случай $p = \infty$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченной амплитудой, что моделирует ситуации, когда физические ограничения накладывают верхний предел на мгновенное значение внешней силы.

Прежде чем изучить каждый из указанных случаев, представим решение системы (2.1) в подходящей форме. Обозначим $\Psi(t)$ $n \times n$ -матрицу, являющуюся решением системы матричных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\Psi} + C\dot{\Psi} + K\Psi = 0 \quad (3.1)$$

с начальными условиями $\Psi(0) = 0$ и $\dot{\Psi}(0) = M^{-1}$. В качестве столбцов матрицы $\Psi(t)$ берутся линейно независимые решения уравнения (3.1) при всех $t > 0$. Тогда решение системы (2.1) при $v(t) \neq 0$ и начальных условиях $q(0) = 0$ и $\dot{q}(0) = 0$ представляется в следующей форме

$$q(t) = \int_0^t \Psi(t - \tau) B v(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

3.1. Возмущения с ограниченной энергией

Исследование задачи о наихудшем возмущении начнем со случая $p = 2$. Имеем

$$|z(t)| = \left| l^\top \int_0^t \Psi(t - \tau) B v(\tau) d\tau \right|. \quad (3.3)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|z(t)| \leq \left\{ \int_0^t |l^\top \Psi(t - \tau) B|^2 d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t |v(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

откуда с учетом замены $t - \tau = \theta$ следует, что

$$\frac{|z(t)|}{\left\{ \int_0^t |v(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}} \leq \left\{ \int_0^t |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^t |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta,$$

как функция верхнего предела является монотонно возрастающей функцией. Таким образом, имеем, что максимум функции достигается в конечный момент времени

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_2} \leq \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Следовательно, получена верхняя оценка для изучаемого показателя $J_T^{(2)}$. Остается выяснить, существует ли возмущение $v_*(t)$, для которого полученная оценка достигается. В качестве искомого наихудшего возмущения рассмотрим возмущение

$$v_*^{(2)}(t) = l^\top \Psi(T-t)B.$$

Окончательно с учетом (3.3) получаем

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_*\|_2} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Итак, для заданного значения T решение поставленной задачи имеет следующий вид

$$v_*^{(2)}(t) = l^\top \Psi(T-t)B, \quad J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}. \quad (3.4)$$

3.2. Альтернативный способ вычисления показателя $J_T^{(2)}$

Как следует из формул (3.4), для вычисления показателя $J_T^{(2)}$ следует найти матрицу $\Psi(t)$, а затем вычислить определенный интеграл, под знаком которого фигурирует найденная матрица $\Psi(t)$. Представим альтернативный способ получения решения поставленной задачи с использованием результатов работ [11], [12]. Запишем систему (2.1) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 v, & x(0) &= 0, \\ z(t) &= l^\top x(t), \end{aligned}$$

где $x \in R^{2n}$ – вектор, определяющий состояние системы,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [11] изучаемый показатель $J_T^{(2)}$ назван максимальным уклонением выхода линейной системы. Сформулирована и доказана теорема [11], на основе которой предлагается способ вычисления этого показателя. Применительно к рассматриваемой задаче имеем

$$J_T^{(2)} = (l^\top Y(T)l)^{1/2},$$

где симметрическая положительно определенная матрица $Y(t)$ есть решение дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Y} = AY + YA^\top + B_1 B_1^\top, \quad Y(0) = 0.$$

В работе [11] показано, что показатель $J_T^{(2)}$ является неубывающей функцией T , и при неограниченном увеличении T показатель $J_T^{(2)}$ стремится к величине

$$J_\infty^{(2)} = (l^\top Y_* l)^{1/2}, \quad (3.5)$$

где матрица Y_* есть решение матричного уравнения Ляпунова

$$AY + YA^\top + B_1 B_1^\top = 0.$$

3.3. Возмущения с ограниченным размахом колебаний

Рассмотрим случай $p = \infty$. Из соотношения (3.3) следует что

$$|z(t)| \leq \max_{\tau \in [0, t]} |v(\tau)| \int_0^t |l^\top \Psi(t - \tau) B| d\tau,$$

тогда

$$\frac{|z(t)|}{\max_{\tau \in [0, t]} |v(\tau)|} \leq \int_0^t |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta.$$

Поскольку

$$\max_{t \in [0, T]} |v(t)| = \|v\|_\infty,$$

то

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_\infty} \leq \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta.$$

Следовательно, наихудшим возмущением в этом случае является

$$v_*^{(\infty)}(t) = \text{sign}[l^\top \Psi(T - t) B], \quad (3.6)$$

при этом

$$J_T^{(\infty)} = \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta. \quad (3.7)$$

3.4. Возмущения с ограниченным импульсом

Наконец рассмотрим случай $p = 1$. Из соотношения (3.3) следует

$$|z(t)| \leq \max_{\tau \in [0, t]} |l^\top \Psi(t - \tau) B| \int_0^t |v(\tau)| d\tau.$$

Тогда,

$$\frac{|z(t)|}{\int_0^t |v(\tau)| d\tau} \leq \max_{\tau \in [0, t]} |l^\top \Psi(t - \tau) B|.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_1} \leq \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

Нетрудно проверить, что полученная оценка достигается при возмущении

$$v_*^{(1)}(t) = \delta(t), \quad (3.8)$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, соответствующее значение показателя

$$J_T^{(1)} = \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

3.5. Взаимосвязь между показателями

Установим простые соотношения между вычисленными выше показателями. Заметим вначале, что

$$J_T^{(\infty)} = \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta \leq \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T d\theta \right\}^{1/2} = J_T^{(2)} T^{1/2}.$$

Далее получим

$$J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2} \leq \left\{ \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|^2 T \right\}^{1/2} = J_T^{(1)} T^{1/2}.$$

Окончательно имеем

$$J_T^{(\infty)} \leq J_T^{(2)} T^{1/2} \leq J_T^{(1)} T,$$

или в развернутой форме

$$\frac{\int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta}{T} \leq \left\{ \frac{\int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta}{T} \right\}^{1/2} \leq \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

4. Механическая система со многими степенями свободы

В качестве базового примера рассмотрим простейшую модель – механическая система со многими степенями свободы, представляющий собой одномерную однородную цепочку материальных точек, последовательно соединенных между собой упругими и демпфирующими элементами. Цепочка материальных точек связана с подвижным основанием, совершающим прямолинейное движение относительно инерциальной системы отсчета (см. рис 4.1)

Динамика цепочки описывается системой дифференциальных уравнений

$$M\ddot{q} + C_0\dot{q} + K_0q = -B_0\ddot{q}_0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (4.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор, определяющий координаты материальных точек относительно основания, q_0 – координата основания относительно инерциальной системы отсчета;

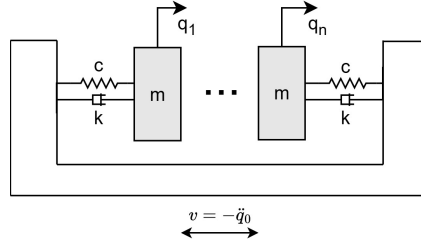


Рис. 4.1. Система с \$n\$ степенями свободы

Fig. 4.1. Mechanical system with \$n\$ degrees of freedom

\$M = mI\$, \$C_0 = cK\$, \$K_0 = kK\$ и \$B_0 = mB\$, где

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

положительные параметры \$m\$, \$c\$, \$k\$ определяют массу каждой материальной точки, \$c\$ – коэффициент демпфирования, а \$k\$ – коэффициент жесткости демпфирующих и упругих элементов соответственно.

Приведем теперь решение задач о наилучших воздействиях для указанной системы в случае оценки деформации упругого элемента, связывающего крайнюю точку цепочки с основанием, т.е. полагая, что

$$z = l^\top q, \quad \text{где } l^\top = (1, 0, 0 \cdots, 0).$$

Выполним преобразование системы (4.1). Введем безразмерные переменные:

$$q(t) = \tilde{L}\tilde{q}(\tilde{t}), \quad t = \tilde{T}\tilde{t},$$

где \$\tilde{L}, \tilde{T}\$ – коэффициенты масштабирования. Система (4.1) примет вид:

$$m \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}^2} \frac{d^2 \tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + c \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}} K \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + k \tilde{L} K \tilde{q} = -mB \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}^2} \frac{d^2 \tilde{q}_0}{d\tilde{t}^2}.$$

Полагая \$\tilde{L} = 1\$ и \$\tilde{T} = \sqrt{m/k}\$, преобразуем последнюю систему к виду:

$$\frac{d^2 \tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + \beta K \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + K \tilde{q} = Bv, \quad (4.2)$$

где \$\beta = c/\sqrt{mk}\$, \$v = -d^2 \tilde{q}_0 / d\tilde{t}^2\$. В дальнейшем волнистую черту будем опускать. Тогда рассматриваемая система в безразмерных переменных будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \beta K \dot{q} + Kq &= Bv, \\ z &= l^\top q, \\ q(0) &= 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь вектор координат \$q\$ и целевой выход \$z\$ описаны в безразмерных величинах.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как практически найти показатели $J_T^{(1)}$, $J_T^{(2)}$ и $J_T^{(\infty)}$. Из приведенных выше формул для указанных показателей следует, что требуется найти $n \times n$ -матрицу $\Psi(t)$, являющуюся решением системы (3.1)

$$\ddot{\Psi} + \beta K \dot{\Psi} + K \Psi = 0, \quad \Psi(0) = 0, \quad \dot{\Psi}(0) = I. \quad (4.4)$$

Представим матрицу Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

где ψ_i – вектор-столбец с компонентами $(\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, \dots, \psi_i^{(n)})$. Для вычисления показателей требуется знание функции $\gamma(t) = l^\top \Psi(t) B$. С учетом заданных для рассматриваемой системы вектор-строки l^\top и вектор-столбца B получаем

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i^{(1)}(t). \quad (4.5)$$

Тогда, имеем

$$J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T \gamma^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2}, \quad J_T^{(\infty)} = \int_0^T |\gamma(\theta)| d\theta, \quad J_T^{(1)} = \max_{t \in [0, T]} |\gamma(t)|.$$

Соответствующие наихудшие возмущения выглядят следующим образом

$$v_*^{(2)}(t) = \gamma(T - t), \quad v_*^{(\infty)}(t) = \text{sign}[\gamma(T - t)], \quad v_*^{(1)}(t) = \delta(t).$$

Вообще говоря, матрица $\Psi(t)$ может быть построена путем численного решения системы дифференциальных уравнений (4.4), однако учет некоторой специфики системы ($K = K^\top$) позволяет построить решение иным способом. Заметим, что система (4.4) может быть представлена в виде

$$\ddot{\Phi} + \beta \Lambda \dot{\Phi} + \Lambda \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \dot{\Phi}(0) = I, \quad (4.6)$$

где Λ и $\Phi(t)$ – диагональные матрицы такие, что

$$S^\top K S = \Lambda, \quad S^\top \Psi(t) S = \Phi(t). \quad (4.7)$$

Диагональные элементы матрицы Λ являются собственными числами матрицы K , а нормированные собственные векторы матрицы K составляют столбцы ортогональной матрицы S . Введем обозначения Λ следующим образом

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2). \quad (4.8)$$

Элементы ω_i^2 упорядочены от наименьшего к наибольшему и представляют собой квадраты частот собственных колебаний недемпфированной ($\beta = 0$) механической системы. Диагональные элементы $\phi_i(t)$ матрицы $\Phi(t)$ есть решения дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{\phi}_i + \beta \omega_i^2 \dot{\phi}_i + \omega_i^2 \phi_i = 0, \quad \phi_i(0) = 0, \quad \dot{\phi}_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Таким образом, для нахождения показателей и соответствующих наихудших возмущений требуется найти $\phi_i(t)$, решив уравнения (4.9), затем найти матрицу $\Psi(t) = S\Phi(t)S^T$ и определить функцию $\gamma(t)$ (4.5). Введем обозначение

$$\eta_i = \frac{\beta\omega_i}{2},$$

тогда система (4.9) переписывается в виде

$$\ddot{\phi}_i + 2\eta_i\omega_i\dot{\phi}_i + \omega_i^2\phi_i = 0, \quad \phi_i(0) = 0, \quad \dot{\phi}_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение представляется в аналитической форме

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\omega_i\sqrt{1-\eta_i^2}}e^{-\eta_i\omega_i t} \sin[\omega_i\sqrt{1-\eta_i^2}t] \quad \text{при } \eta_i \leq 1,$$

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\lambda_{2i} - \lambda_{1i}}[-e^{\lambda_{1i}t} + e^{\lambda_{2i}t}] \quad \text{при } \eta_i > 1,$$

где

$$\lambda_{1i} = -\omega_i[\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 - 1}], \quad \lambda_{2i} = -\omega_i[\eta_i - \sqrt{\eta_i^2 - 1}].$$

4.1. Система с одной степенью свободы

В качестве примера рассмотрим простейшую систему с одной степенью свободы (см. рис. 4.2).

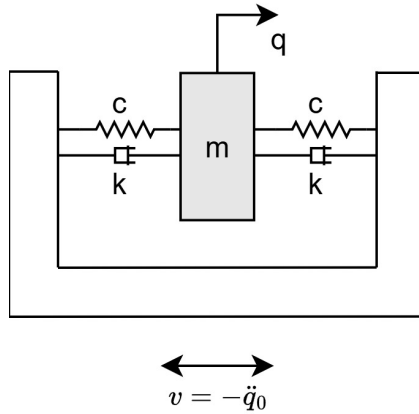


Рис. 4.2. Система с одной степенью свободы

Fig. 4.2. Single-Degree-of-Freedom (SDOF) system

Динамика объекта описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{q} + 2c\dot{q} + 2kq = -m\ddot{q}_0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (4.10)$$

где $q \in \mathbb{R}^1$ – смещение объекта относительно основания, q_0 – смещение основания относительно инерциальной системы отсчета, m – масса объекта, c и k – коэффициенты

демпфирующего и упругого элементов. Заменой переменных и параметров (4.10) сводится к уравнению

$$\ddot{q} + 2\eta\dot{q} + 2q = v, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (4.11)$$

Решение последнего уравнения при $\eta \in [0, \sqrt{2})$, согласно (3.2), имеет вид

$$q(t) = \int_0^t \psi(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad \psi(t) = \mu^{-1}e^{-\eta t} \sin(\mu t), \quad (4.12)$$

где

$$\mu = (2 - \eta^2)^{1/2}.$$

Для системы (4.11) можем получить аналитические решения для трех классов возмущений Пусть $p = 2$. Формулы (3.4) будут иметь:

$$\begin{aligned} J_T^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{\mu} \int_0^T e^{-2\eta\theta} \sin^2(\mu\theta) d\theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta T}}{\mu\eta} + \frac{e^{-2\eta T} (2\eta \cos(2\mu T) - 2\mu \sin(2\mu T)) - 2\eta}{2\mu\eta^2 + \mu^2}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$v_*^{(2)} = \frac{e^{-\eta(T-t)}}{\mu} \sin(\mu(T-t)). \quad (4.14)$$

Рассмотрим случай при $p = \infty$. Формула (3.6) будет иметь вид:

$$J_T^\infty = \frac{1}{\mu} \int_0^T e^{-\eta\theta} |\sin(\mu\theta)| d\theta. \quad (4.15)$$

Для вычисления интеграла с учетом периодичности и знака функции $\sin(\mu\theta)$ интервал разбивается на отрезки $\Delta_k = \left[\frac{(k-1)\pi}{\mu}, \frac{k\pi}{\mu} \right]$, $k = (\overline{1, n})$. Тогда:

$$J_T^{(\infty)} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[F\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) - F\left(\frac{(k-1)\pi}{\mu}\right) \right] + (-1)^n \left[F(T) - F\left(\frac{n\pi}{\mu}\right) \right] \right), \quad (4.16)$$

где

$$F(\theta) = \frac{-\mu e^{-2\eta\theta} \cos(\mu\theta) - 2\eta e^{-2\eta\theta} \sin(\mu\theta)}{4\eta^2 + \mu^2}.$$

Согласно (3.7) наихудшее возмущение примет вид:

$$v_T^\infty = \text{sign}(\sin(\mu(T-t))). \quad (4.17)$$

Рассмотрим случай $p = 1$. Согласно формуле (3.8):

$$J_T^{(1)} = \max \left| \frac{e^{-\eta t}}{\mu} \sin(\mu t) \right|.$$

Решение задачи на максимум дает значение отклонение в виде:

$$J_T^{(1)} = \frac{e^{-\eta t_{\max}}}{\mu} \sin(\mu t_{\max}), \quad \text{где} \quad t_{\max} = \frac{1}{\mu} \left(\arctan \frac{\mu}{\eta} \right).$$

Результаты моделирования значения показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ и возмущений от времени для $p = 2, p = \infty$ и параметров $\eta = 0.05, T = [0, 20\pi]$ приведены на рисунках 4.3, 4.4. Для сравнения рассматриваем гармонические возмущения $v_0(t) = \sin(\tilde{\omega}t)$, где $\tilde{\omega} = \sqrt{2}$ – частота собственных колебаний. Анализ отклика системы на синусоидальное воздействие:

$$I_T^{(2)} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_0\|_2}, \quad I_T^{(\infty)} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_0\|_\infty},$$

позволяет выявить резонансные частоты, что важно для практического применения.

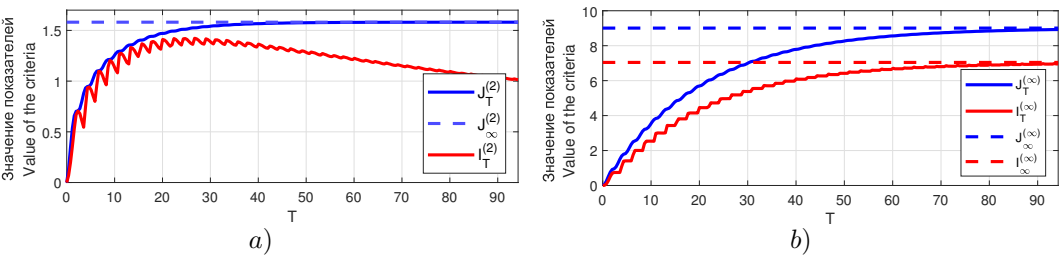


Рис. 4.3. Зависимость показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с одной степенью свободы:

a) ограниченная энергия, b) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.3. Performance indices $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ versus parameter T for SDOF system:

a) bounded energy, b) bounded range of oscillations

Графики на рисунке 4.3 а) показывают, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, отвечающие наихудшему и гармоническому воздействиям соответственно, имеют близкие значения (некоторые значения представлены в таблице 4.1). При увеличении параметра T значения показателей расходятся, при этом, показатель $J_T^{(2)}$ стремится к значению показателя $J_\infty^{(2)}$, определяемому формулой (3.5), а значение показателя $I_T^{(2)}$ стремится к нулю.

Графики на рисунке 4.3 б) напротив демонстрируют, что значения наихудшего возмущения и гармонического начинают отличаться уже при малых значениях T .

Таблица 4.1. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.1. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1358	0.0703	0.07
π	0.7977	0.6118	0.19
3π	1.2208	1.1911	0.03
5π	1.4046	1.3691	0.04

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.4.

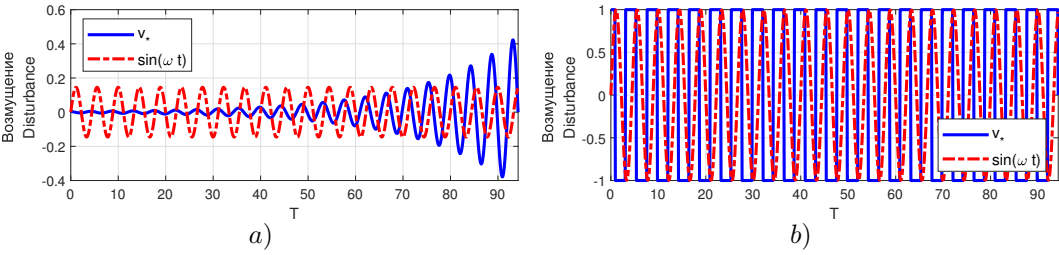


Рис. 4.4. Наихудшее и гармоническое возмущения для системы с одной степенью свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.4. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for SDOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

4.2. Система с двумя степенями свободы

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы рис. 4.5. Динамика такого объекта будет описываться системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2c\dot{q}_1 - c\dot{q}_2 + 2kq_1 - kq_2 = -m\ddot{q}_0, \\ m\ddot{q}_2 - c\dot{q}_1 + 2c\dot{q}_2 - kq_1 + 2kq_2 = -m\ddot{q}_0, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0. \end{cases}$$

с целевым выходом:

$$z = q_1,$$

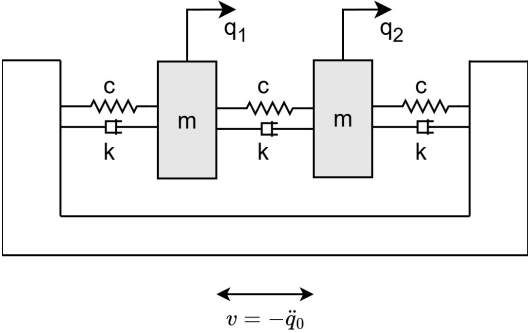


Рис. 4.5. Система с двумя степенями свободы

Fig. 4.5. 2-Degree-of-Freedom (2-DOF) system

Выполнив замену переменных и параметров, придем к задаче, которая может быть представлена в матричной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \beta K \dot{q} + Kq &= Bv, \\ z &= l^\top q, \quad l^\top = (1 \ 0), \quad B^\top = (1 \ 1). \end{aligned}$$

Для приведенного примера матрица K будет иметь вид:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (4.6)–(4.8) представим систему в виде:

$$\ddot{q} + \beta \Lambda \dot{q} + \Lambda q = \tilde{B}v, \\ z = \tilde{l}^\top q,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tilde{B} = S^{-1}B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{l}^\top = l^\top S = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}).$$

В результате произведение $\tilde{l}^\top \Psi \tilde{B} = \psi_1$, где ψ_1 определяется формулой (4.12) с параметром $\mu = \sqrt{1 - \eta^2}$, $\eta = \beta/2$. Таким образом, для максимальных отклонений и наихудших возмущений мы получим формулы аналогичные (4.13) – (4.17).

На рисунках 4.6, 4.7 приведены результаты моделирования значения показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ и возмущений от времени с параметрами $\beta = 0.1$, $T = [0, 20\pi]$, $\omega = 1$.

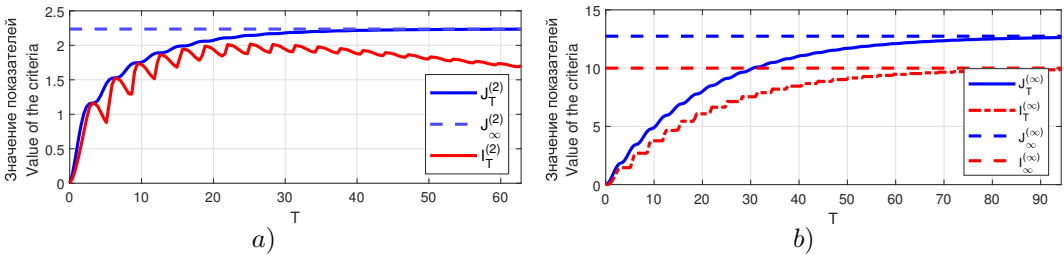


Рис. 4.6. Зависимость показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с двумя степенями свободы:

a) ограниченная энергия, b) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.6. Performance indices $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ versus parameter T for 2-DOF system: a) bounded energy, b) bounded range of oscillations

Графики на рисунке 4.6 а) показывают, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, отвечающие наихудшему и гармоническому воздействиям соответственно, имеют близкие значения (некоторые значения представлены в таблице 4.2), причем таких значений оказывается больше, чем для случая с одной массой. При увеличении параметра T значения показателей расходятся, однако делают это медленнее, чем для случая с одной массой. Показатель $J_T^{(2)}$ также стремится к значению показателя $J_\infty^{(2)}$, определяемому формулой (3.5), а значение показателя $I_T^{(2)}$ стремится к нулю.

Графики на рисунке 4.6 б) демонстрируют такую же тенденцию. Значения наихудшего возмущения и гармонического начинают отличаться уже при малых значениях T .

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.7.

Таблица 4.2. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.2. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1379	0.0703	0.07
π	1.1616	1.1612	$4 \cdot 10^{-4}$
3π	1.7476	1.7328	0.01
5π	1.9906	1.9428	0.05

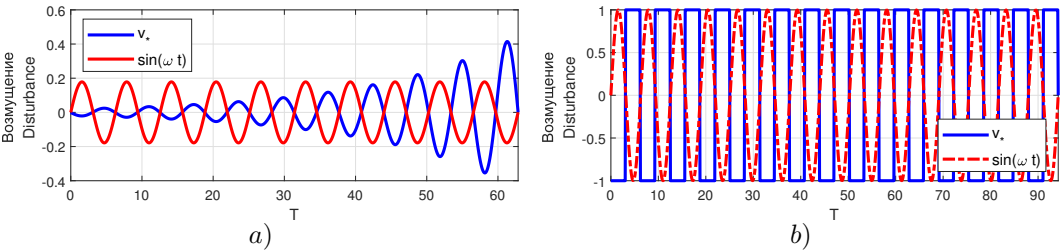


Рис. 4.7. Наихудшее и гармоническое возмущения для системы с двумя степенями свободы:
а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.7. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for 2-DOF system:
а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

4.3. Система с n степенями свободы

Для системы с n степенями свободы опустим математические выкладки и приведем сразу результаты моделирования. На рисунках 4.8, 4.9 приведены графики описывающие значения показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ (рис.4.8) и возмущений (рис.4.9) с течением времени. Параметры моделирования: $n = 10, \beta = 0.1, T = [0, 20\pi], \omega = 0.2846$

Графики на рисунке 4.8 а) демонстрируют, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, соответствующие наихудшему и гармоническому возмущениям, имеют близкие значения на всем рассматриваемом интервале (некоторые значения представлены в таблице 4.3).

Графики на рисунке 4.8 б) демонстрируют такую же тенденцию, при этом расхождение между графиками более значительное.

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.9.

5. Заключение

В данной статье предложен подход для решения задач о наихудших воздействиях на механические конструкции, описываемые системами линейных дифференциальных уравнений второго порядка. При помощи неравенства Коши-Буняковского полу-

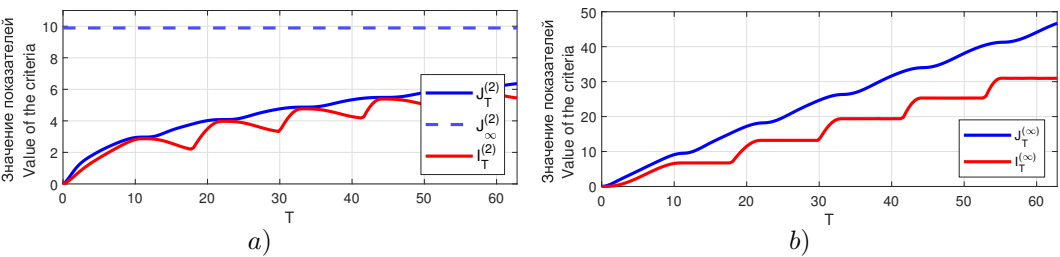


Рис. 4.8. Зависимость показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с 10-ю степенями свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.8. Performance indices $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ versus parameter T for 10-DOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

Таблица 4.3. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.3. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1379	0.0699	0.07
3π	2.8932	2.7267	0.17
4π	3.0105	2.8438	0.17
7π	4.0809	3.9731	0.11

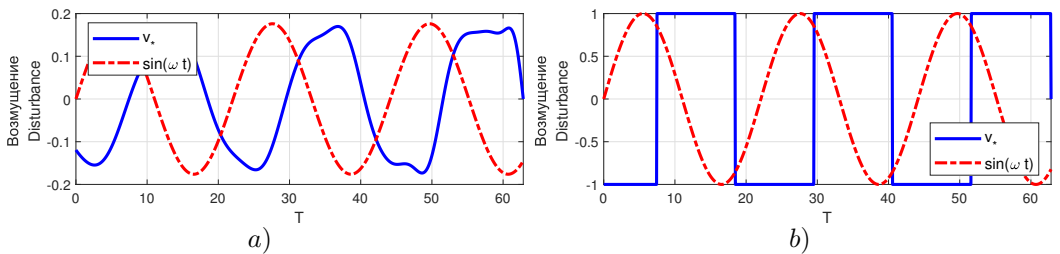


Рис. 4.9. Наихудшее и гармоническое возмущение для системы с 10-ю степенями свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.9. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for 10-DOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

чены верхние оценки показателей $J_T^{(p)}$, а также аналитические формулы, позволяющие определить вид наихудшего воздействия и соответствующие показатели максимальной деформации заданного упругого элемента для трех функциональных пространств: L_2 , L_∞ , L_1 . Для показателя $J_T^{(2)}$ представлен альтернативный способ вычисления, основанный на решении дифференциального матричного уравнения Ляпунова. Выведены

неравенства, устанавливающие взаимосвязь между показателями, отвечающими наилучшим воздействиям из этих трех функциональных пространств. Для возмущений из пространства L_2 представлено выражение для показателя на бесконечном интервале времени через решение алгебраического матричного уравнения Ляпунова.

В последнем разделе статьи представлены результаты численного моделирования для механических систем с одной и несколькими степенями свободы. Для сравнения рассматривался отклик системы на наиболее часто используемое гармоническое возмущение, вызывающее резонансные явления. Для системы с несколькими степенями свободы рассматривалось гармоническое возмущение на наименьшей частоте собственных колебаний.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект №24-11-20023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // *Доклады академии наук СССР*. 1946. Т. 51, № 5. С. 339–342.
2. Александров В. В. К задаче Булгакова о накоплении возмущений // *Доклады академии наук СССР. Сер. Кибернетика и теория регулирования*. 1969. Т. 186. № 3. С. 526–528.
3. Жермоленко В. Н. О максимальном отклонении линейной системы // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 7. С. 3–14. DOI: 10.1134/S0005117912070016
4. Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1981. Vol. 26, no. 2. P. 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603
5. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989. Vol. 34, no. 8. P. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
6. Khargonekar P. P., Nagpal K. M., Poolla K. R. H_∞ -Control with Transients. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 1991. Vol. 29, no. 6. P. 1373–1393. DOI: 10.1137/0329070
7. Lu W. W., Balas G. J., Lee E. B. A Variational Approach to H_∞ Control with Transients. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. Vol. 44. P. 1875–1879.
8. Foo Y. K. H_∞ Control with Initial Conditions. *IEEE Trans. Circuits and Systems*. 2006. Vol. 53, no. 9. P. 867–871. DOI: 10.1109/TCSII.2006.881807
9. Iannelli A., Seiler P., Marcos A. Worst-Case Disturbances for Time-Varying Systems with Application to Flexible Aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 1261–1271. DOI: 10.2514/1.G004023
10. Balandin D. V., Kogan M. M. LMI-based H_∞ -optimal control with transients. *International Journal of Control*. 2010. Vol. 83, no. 8. P. 1664–1673. DOI: 10.1080/00207179.2010.487222

11. Баландин Д. В., Бирюков Р. С., Коган М. М. Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // *Автоматика и телемеханика*. 2019. № 10. С. 37–61. DOI: 10.1134/S0005231019100027
12. Balandin D. V., Kogan M. M. Multi-objective Generalized H_2 -Control. *Automatica*. 2019. Vol. 99, no. 8. P. 317–322. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.006

*Поступила 12.09.2025; доработана после рецензирования 22.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. B. V. Bulgakov, “On the accumulation of disturbances in linear oscillatory systems with constant parameters”, *DAN SSSR*, **51**:5 (1946), 339–342 (In Russ.).
2. V. V. Aleksandrov, “[K zadache Bulgakova o nakoplenii vozmushchenii]”, *Dokl. AN SSSR. Ser. Kibernetika i teoriya regulirovaniya*, **186**:3 (1969), 526–528 (In Russ.).
3. V. N. Zhernolenko, “On the maximum deviation of a linear system”, *Autom Remote Control*, **73**:7 (2012), 1117–1125. DOI: 10.1134/S0005117912070016
4. G. Zames, “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**:2 (1981), 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603
5. J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, “State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**:8 (1989), 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
6. P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal, K. R. Poolla, “ H_∞ -Control with Transients”, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**:6 (1991), 1373–1393. DOI: 10.1137/0329070
7. W. W. Lu, G. J. Balas, E. B. Lee, “A Variational Approach to H_∞ Control with Transients”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44** (1999), 1875–1879.
8. Y. K. Foo, “ H_∞ Control with Initial Conditions”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **53**:9 (2006), 867–871. DOI: 10.1109/TCSII.2006.881807
9. A. Iannelli, P. Seiler, A. Marcos, “Worst-Case Disturbances for Time-Varying Systems with Application to Flexible Aircraft”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **42**:6 (2019), 1261–1271. DOI: 10.2514/1.G004023
10. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “LMI-based H_∞ -optimal control with transients”, *International Journal of Control*, **83**:8 (2010), 1664–1673. DOI: 10.1080/00207179.2010.487222
11. D. V. Balandin, R. S. Biryukov, M. M. Kogan, “Optimal control of maximum deviations of outputs of a linear nonstationary system on a finite time interval”, *Autom Remote Control*, **80**:10 (2019), 1783–1802. DOI: 10.1134/S0005117919100023

12. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “Multi-objective Generalized H_2 -Control”, *Automatica*, **99**:8 (2019), 317–322. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.006

Submitted 12.09.2025; Revised 22.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

УДК 517.926

Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта

П. А. Шаманаев¹, Д. А. Катин², Н. В. Ошина²

¹ Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия),

² Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск, Россия)

Аннотация. Исследуются продольные колебания неоднородной цепочки линейных осцилляторов, соединённых пружинами. Крайние пружины цепочки жёстко закреплены на неподвижных опорах. Система находится под действием внешних периодических сил. Неоднородность цепочки (возмущенная система) обусловлена тем, что коэффициенты жёсткости пружин различны. Коэффициенты жёсткости мало отклоняются от некоторого номинального значения и зависят от безразмерных параметров отклонения. Нулевое значение безразмерных параметров отклонения соответствует однородной (невозмущённой) системе. Рассматривается резонансный случай, когда частота внешней периодической силы совпадает с одной из собственных частот невозмущенной системы. Для построения точного периодического решения возмущенной системы применяется метод Ляпунова-Шмидта. Благодаря линейности задачи, этот метод позволяет свести её к конечномерной алгебраической задаче построения обобщённой жордановой цепочки для вырожденного линейного оператора. Получены необходимые и достаточные условия на безразмерные параметры отклонения, при которых длина такой цепочки равна 1 или 2. Для каждого случая выведены точные явные формулы для элементов цепочки, дающие полное описание периодического решения. Показано, что при длине обобщенной жордановой цепочки, равной 1, и стремлении малого параметра ε к нулю периодическое решение возмущенной системы непрерывно переходит в некоторое периодическое решение невозмущенной системы. Если же длина обобщенной жордановой цепочки равна 2, то периодическое решение возмущенной системы имеет полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$, а при $\varepsilon = 0$ переходит в однопараметрическое семейство периодических решений невозмущенной системы. Численное моделирование проводилось на примере цепочки из восьми осцилляторов. Построены графики периодических решений и фазовых траекторий возмущенной системы при различных значениях малого параметра.

Ключевые слова: цепочка связанных линейных осцилляторов, вынужденные периодические колебания, амплитуда колебаний, резонанс, метод Ляпунова-Шмидта, обобщенный жорданов набор

Для цитирования: Шаманаев П. А., Катин Д. А., Ошина Н. В. Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 4. С. 471–487. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.471-487

Об авторах:

Шаманаев Павел Анатольевич, к.ф.-м.н., ведущий инженер-исследователь направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

Катин Дмитрий Александрович, магистрант факультета математики и информационных технологий, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Больше-вистская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, dmitriykatinn@gmail.com

Ошина Наталья Владиславовна, магистрант факультета математики и информационных технологий, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Больше-вистская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, natali.oshina@mail.ru

Original article

MSC2020 34C10, 34C25

A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an Inhomogeneous Linear Oscillator Chain

P. A. Shamanaev¹, D. A. Katin², N. V. Oshina²

¹ *Sirius University of Science and Technology (Sirius, Russian Federation)* ²

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Longitudinal oscillations of an inhomogeneous chain of linear oscillators coupled by springs are investigated. Both outer springs of the chain are rigidly fixed to immovable supports. The system is subjected to external periodic forces. The inhomogeneity of the chain (the perturbed system) is due to the different stiffness coefficients of the springs. These coefficients deviate slightly from a certain nominal value and depend on dimensionless deviation parameters. Zero values of these parameters correspond to a homogeneous (unperturbed) system. The resonant case is considered when the frequency of the external periodic force coincides with one of the eigenfrequencies of the unperturbed system. To construct an exact periodic solution of the perturbed system, the Lyapunov–Schmidt method is applied. As the problem is linear, this method allows to reduce it to a finite-dimensional algebraic problem of constructing a generalized Jordan chain for a degenerate linear operator. Necessary and sufficient conditions on the dimensionless deviation parameters are obtained, under which the length of such a chain is equal to 1 or 2. For each case, explicit exact formulas for the chain are derived, providing a complete description of the periodic solution. It is shown that for a generalized Jordan chain of length 1, the periodic solution of the perturbed system continuously transforms into a certain periodic solution of the unperturbed system as the small parameter ε tends to zero. If the length of the generalized Jordan chain is 2, the periodic solution of the perturbed system possesses a first-order pole at $\varepsilon = 0$ and, reduces to a one-parameter family of periodic solutions of the unperturbed system. Numerical simulation was performed for a chain of eight oscillators. Plots of periodic solutions and phase trajectories of the perturbed system are constructed for various values of the small parameter.

Keywords: chain of coupled linear oscillators, forced periodic oscillations, oscillation amplitude, resonance, Lyapunov–Schmidt method, generalized Jordan chain

For citation: P. A. Shamanaev, D. A. Katin, N. V. Oshina. A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an Inhomogeneous Linear Oscillator Chain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 471–487. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.471-487

P. A. Shamanaev, D. A. Katin, N. V. Oshina. A Lyapunov–Schmidt Analysis of Forced Oscillations in an ...

About the authors:

Pavel A. Shamanaev, Ph.D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, korspa@yandex.ru

Dmitry A. Katin, student of the Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6335-6016>, dmitriykatinn@gmail.com

Natalya V. Oshina, student of the Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9193-3590>, natali.oshina@mail.ru

1. Введение

Одной из классических задач теории малых колебаний систем со многими степенями свободы является исследование поперечных колебаний невесомой идеально гибкой нити, подробно рассмотренное в работе [1]. В настоящее время объём публикаций, посвящённых теории малых линейных колебаний таких систем, чрезвычайно велик. Фундаментальное изложение основных положений данной теории представлено в монографиях [2, 3]. Современные подходы и методы описаны в работах [4–6]. Особый интерес представляют задачи о колебаниях в цепочках однородных и периодически неоднородных элементов, рассмотренные в [7].

Опираясь на эти результаты, в настоящей работе ставится задача о малых линейных колебаниях цепочки при малых возмущениях её параметров. Для решения этой задачи применяется метод Ляпунова-Шмидта, изложенный в [8]. Современный обзор применения метода Ляпунова-Шмидта содержится в монографии [9].

Настоящее исследование основывается на результатах работы [10], в которой установлены условия существования и единственности периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого.

Кратко изложим содержание работы. В параграфе 2 описывается математическая модель и излагается постановка задачи. В 3-м параграфе излагаются предварительные преобразования уравнения движения. В параграфе 4 рассматривается применение метода Ляпунова-Шмидта для решения возмущенного уравнения. В параграфе 5 описывается численное моделирование цепочки из восьми осцилляторов.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим механическую систему (см. рис. 2.1), состоящую из r одинаковых частиц массы m и соединённых последовательно $r + 1$ невесомыми пружинами с коэффициентами жесткости k_s ($s = 1, \dots, r + 1$). Крайние пружины (с номерами $s = 1$ и $s = r + 1$) закреплены на неподвижных опорах в точках $A(0)$ и $B((r + 1)l)$ соответственно, где l — длина каждой пружины в свободном (недеформированном) состоянии. Поскольку в равновесии длина каждой пружины в точности равна l , все они не деформированы, и их натяжение равно нулю. Таким образом, частицы ($s = 1, \dots, r$) находятся в точках $X_s = sl$ [6].

Изучаются малые продольные колебания частиц вдоль оси OX , под действием внешних периодических сил $F_s(t)$, приложенных к соответствующим частицам ($s = 1, \dots, r$).

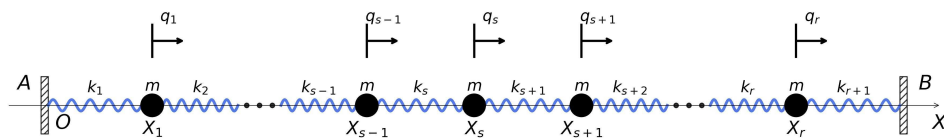


Рис. 2.1. Математическая модель механической системы из r частиц, соединенных $r + 1$ пружинами

Fig. 2.1. Mathematical model of a mechanical system of r particles connected by $r + 1$ springs

Обозначим через q_s продольное смещение s -й частицы из положения равновесия. Тогда уравнение движения имеет вид

$$M\ddot{q} + Kq = F(t), \quad (2.1)$$

где $q = (q_1, \dots, q_r)^\top$, $F(t) = (F_1(t), \dots, F_r(t))^\top$ – вектор внешних сил, $M = mI_r$ – матрица масс системы, K – матрица жёсткости системы, имеющая трёхдиагональную структуру:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k_r \\ 0 & \cdots & 0 & -k_r & k_r + k_{r+1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты жёсткости пружин k_s мало отклоняются от некоторого номинального значения k_0 :

$$k_s = k_0(1 - d_s\varepsilon), \quad s = 1, \dots, r + 1, \quad (2.3)$$

где d_s – безразмерные параметры отклонения, ε – малый параметр.

Подставляя (2.3) в (2.2), представим матрицу жёсткости K в виде

$$K = k_0(K_0 - \varepsilon D), \quad (2.4)$$

где K_0 – матрица жёсткости невозмущённой (одинаковые пружины) цепочки с закреплёнными концами:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

а матрица возмущения D сохраняет трёхдиагональную структуру:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -d_r \\ 0 & \cdots & 0 & -d_r & d_r + d_{r+1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и вводя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}, \quad (2.7)$$

получим возмущенное уравнение движения

$$\ddot{q} + \omega_0^2(K_0 - \varepsilon D)q = \frac{1}{m}F(t). \quad (2.8)$$

В работах [1, 2] показано, что матрица K_0 имеет r различных вещественных положительных собственных значений $\omega_1^2, \dots, \omega_r^2$, а соответствующие им собственные векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$ образуют ортонормированный базис.

Тогда для невозмущённого уравнения

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 K_0 \zeta = 0 \quad (2.9)$$

собственные частоты равны

$$\tilde{\omega}_k = \omega_0 \omega_k, \quad k = 1, \dots, r, \quad (2.10)$$

и каждому из них соответствует периодическое решение.

Зафиксируем некоторый номер k ($1 \leq k \leq r$) и рассмотрим резонансный случай, когда частота внешней периодической силы $F(t)$ совпадает с собственной частотой $\tilde{\omega}_k$. Полагая

$$F(t) \equiv F^{(k)}(t) = \tilde{h}^{(k)} \cos(\tilde{\omega}_k t + \theta_k), \quad (2.11)$$

где $\tilde{h}^{(k)} \in R^r$ – амплитудный вектор внешней силы, $\theta_k \in R$, уравнение (2.8) примет вид

$$\ddot{q}^{(k)} + \omega_0^2(K_0 - \varepsilon D)q^{(k)} = \frac{1}{m}F^{(k)}(t). \quad (2.12)$$

Предположим, что для невозмущенного уравнения

$$\ddot{z} + \omega_0^2 K_0 z = \frac{1}{m}F^{(k)}(t) \quad (2.13)$$

амплитудный вектор $\tilde{h}^{(k)} \in R^r$ ортогонален собственному вектору $a^{(k)}$ матрицы K_0

$$(\tilde{h}^{(k)}, a^{(k)}) = 0. \quad (2.14)$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в \mathbb{R}^r .

Условие является необходимым и достаточным условием для существования периодического решения с частотой $\tilde{\omega}_k$ для уравнения (2.13) [3].

Определим период, соответствующий частоте $\tilde{\omega}_k$, как

$$\tilde{T}_k = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_k} \quad (2.15)$$

и сформулируем следующую задачу [8], [10]: при достаточно малых вещественных ε найти \tilde{T}_k - периодическое решение $q^{(k)}(t, \varepsilon)$ уравнения (2.12), удовлетворяющее условию $q^{(k)}(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ — одно из \tilde{T}_k -периодических решений невозмущенного уравнения (2.13).

3. Предварительные преобразования уравнения движения

3.1. Приведение уравнения движения к безразмерному виду

Введём безразмерное время τ и безразмерный вектор смещения $\eta \in \mathbb{R}^r$ по формулам

$$t = \frac{\tau}{\omega_0}, \quad \eta(\tau) = \frac{1}{q_0} q \left(\frac{\tau}{\omega_0} \right), \quad (3.1)$$

где переменная масштаба q_0 (имеющая размерность длины) будет выбрана ниже.

Вычислим производные по времени

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_0 \frac{d\eta}{d\tau} = \omega_0 q_0 \dot{\eta}, \quad \ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2} = \omega_0^2 q_0 \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \omega_0^2 q_0 \ddot{\eta}. \quad (3.2)$$

Здесь и далее точка обозначает производную по безразмерному времени τ .

Подставляя (3.1) и (3.2) в уравнение (2.12), получим

$$\ddot{\eta} + (K_0 - \varepsilon D)\eta = \frac{1}{m\omega_0^2 q_0} F^{(k)} \left(\frac{\tau}{\omega_0} \right). \quad (3.3)$$

Выберем теперь переменную масштаба q_0 так, чтобы правая часть уравнения также стала безразмерной. Для этого положим

$$q_0 = \frac{\tilde{F}}{m\omega_0^2}, \quad (3.4)$$

где \tilde{F} — переменная масштаба относительно амплитуды внешней силы. Тогда, учитывая (2.10), (3.1), (3.2) и (3.4) уравнение (3.3) примет следующий безразмерный вид

$$\ddot{\eta} + (K_0 - \varepsilon D)\eta = F_0(\tau), \quad (3.5)$$

где

$$F_0^{(k)}(\tau) = h^{(k)} \cos(\omega_k \tau + \theta_k), \quad h^{(k)} = \frac{1}{\tilde{F}} \tilde{h}^{(k)}. \quad (3.6)$$

3.2. Переход к нормальным координатам

Составим ортогональную матрицу $S = [a^{(1)}, \dots, a^{(r)}]$ из собственных векторов и диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \dots, \omega_r^2]$ из собственных значений матрицы K_0 так, что

$$K_0 S = S \Lambda, \quad (3.7)$$

Выполняя в уравнении (3.5) замену переменных

$$\eta = Sx, \quad (3.8)$$

где x — вектор нормальных координат, получим

$$\ddot{x} + \Lambda x = \varepsilon SDSx + f^{(k)}(\tau), \quad (3.9)$$

где

$$f^{(k)}(\tau) = SF_0^{(k)}(\tau). \quad (3.10)$$

Соответствующее невозмущенное уравнение имеет вид

$$\ddot{y} + \Lambda y = f^{(k)}(\tau). \quad (3.11)$$

4. Применение метода Ляпунова-Шмидта для решения возмущенного уравнения

4.1. Переход к системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром

Будем искать T_k -периодические решение уравнения (3.9) в виде

$$x^{(k)}(\tau, \varepsilon) = v^{(k)}(\varepsilon) \cos(\omega_k \tau + \theta_k), \quad (4.1)$$

где $v^{(k)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Вектор-функцию $v^{(k)}(\varepsilon)$ будем называть амплитудным вектором колебаний на частоте ω_k для возмущенного уравнения (3.9).

Подставляя (4.1) в (3.9) и учитывая (3.6), (3.10), приходим к системе линейных алгебраических уравнений с малым параметром

$$B_k v^{(k)} = \varepsilon SDS v^{(k)} + S h^{(k)}, \quad (4.2)$$

где

$$B_k = \Lambda - \omega_k^2 I. \quad (4.3)$$

Здесь I — единичная квадратная матрица размерности r .

Так как согласно условию (3.6), вектор $h^{(k)}$ отличается от $\tilde{h}^{(k)}$ лишь скалярным множителем, то из условия (2.14) следует

$$(h^{(k)}, a^{(k)}) = 0, \quad (4.4)$$

что обеспечивает разрешимость невозмущенной системы

$$B_k w^{(k)} = S h^{(k)}, \quad (4.5)$$

где $w^{(k)} \in \mathbb{R}^r$. Вектор $w^{(k)}$ будем называть амплитудным вектором колебаний на частоте ω_k для невозмущенного уравнения (3.11).

4.2. Условия существования полного обобщенного жорданова набора

Получим условия существования полного SDS -жорданова набора матрицы B_k , выраженные через безразмерные параметры отклонения d_s ($s = 1, \dots, r + 1$).

Согласно [8] k -й SDS -жордановой цепочкой длины p_k матрицы B_k будем называть совокупность элементов

$$\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(p_k)}, \quad (4.6)$$

где первый элемент $\varphi_k^{(1)}$ является решением системы

$$B_k \varphi_k^{(1)} = 0 \quad \text{или} \quad [\Lambda - \omega_k^2 I] \varphi_k^{(1)} = 0, \quad (4.7)$$

остальные элементы $\varphi_k^{(j)}$, $j = 2, \dots, p_k$ удовлетворяют соответствующим системам

$$B_k \varphi_k^{(j)} = SDS \varphi_k^{(j-1)} \quad \text{или} \quad [\Lambda - \omega_k^2 I] \varphi_k^{(j)} = SDS \varphi_k^{(j-1)}. \quad (4.8)$$

Здесь нижний индекс k – номер цепочки (совпадает с номером частоты), а верхний индекс j – номер элемента в цепочке.

Определим условия на безразмерные параметры отклонения d_s ($s = 1, \dots, r + 1$), обеспечивающие существование цепочек длины $p_k = 1$ или $p_k = 2$.

Поскольку все собственные значения $\omega_1^2, \dots, \omega_r^2$ матрицы K_0 различны, матрица B_k имеет ровно одно нулевое собственное значение (кратности 1). Следовательно, её ядро $\text{Ker } B_k$ одномерно. Поэтому для каждого фиксированного k может существовать не более одной линейно независимой SDS -жордановой цепочки, то есть $n = 1$.

Поскольку $(SDS)^T = SDS$ и матрицы B_k являются вещественными и диагональными, то

$$B_0^* \psi_k^{(1)} = 0, \quad B_0^* \psi_k^{(j)} = SDS \psi_k^{(j-1)} \quad (4.9)$$

совпадают с системами (4.7) и (4.8), соответственно, а, следовательно, в качестве элементов k -й сопряженной обобщенной жордановой цепочки $\psi_k^{(1)}, \dots, \psi_k^{(p_k)}$ можно взять соответствующие элементы цепочки (4.6).

Первый элемент $\varphi_k^{(1)}$ цепочки (4.6) можно выбрать в виде

$$\varphi_k^{(1)} = e^{(k)}, \quad (4.10)$$

где $e^{(k)}$ – k -й единичный орт из \mathbb{R}^r .

Получим условие разрешимости системы (4.8) при $j = 2$. Так как матрица Λ является диагональной, то в левой части k -я координата вектора $[\Lambda - \omega_k^2 I] b^{(k)}$ равна нулю, следовательно, для разрешимости этой системы, в правой части k -я координата вектора $SDS e^{(k)}$ так же должна быть равна нулю.

Учитывая, что $S e^{(k)} = a^{(k)}$, представим коэффициенты матрицы SDS в виде

$$(SDS)_{sk} = \left(D a^{(k)}, a^{(s)} \right), \quad k, s = 1, \dots, r. \quad (4.11)$$

Тогда условие того, что k -я координата вектора $SDS e^{(k)}$ равна нулю примет вид

$$\left(D a^{(k)}, a^{(k)} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Таким образом, для существования решения $\varphi_k^{(2)}$ (4.8) при $j = 2$, необходимо и достаточно, что бы выполнялось равенство (4.12).

Замечание 4.1. Условие разрешимости (4.12) системы (4.8) при $j = 2$ может быть так же получено из условия

$$(SDSe^{(k)}, e^{(k)}) = 0. \quad (4.13)$$

Действительно,

$$(SDSe^{(k)}, e^{(k)}) = (Da^{(k)}, a^{(k)}). \quad (4.14)$$

Замечание 4.2. Равенство (4.12) так же возможно, в случае

$$Da^{(k)} = 0. \quad (4.15)$$

Но тогда решением системы (4.8) при $j = 2$ является $\varphi_k^{(2)} = c\varphi_k^{(1)}$, где c – произвольная константа. Отсюда следует, что и все системы (4.8) при любом $j = 2, 3, \dots$ имеют решения, отличающиеся от $\varphi_k^{(1)}$ лишь константой. В этом случае получаем бесконечную цепочку линейно зависимых элементов и результат работы [8] не применим.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$Da^{(k)} \neq 0. \quad (4.16)$$

Учитывая вышеизложенное сформулируем условия существования k -й обобщенной жордановой цепочки для случая $p_k = 1$.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (4.16). Тогда, для того, что бы длина k -й обобщенной жордановой цепочки была равна 1, то есть состояла только лишь из одного элемента $\varphi_k^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(Da^{(k)}, a^{(k)}) \neq 0. \quad (4.17)$$

В случае выполнения условия разрешимости (4.12) система (4.8) при $j = 2$ координаты вектора $\varphi_k^{(2)}$ находятся по формулам

$$b_s^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_s^2 - \omega_k^2} (Da^{(k)}, a^{(s)}), & s \neq k, \\ c, & s = k, \end{cases} \quad (4.18)$$

где $s = 1, \dots, r$, c – произвольная константа. В дальнейшем будем полагать $b_k^{(k)} = 0$.

Замечание 4.3. Если

$$(Da^{(k)}, a^{(s)}) = 0, \quad \text{для всех } s = 1, \dots, r, \quad (4.19)$$

то $\varphi_k^{(2)} = c\varphi_k^{(1)}$ и приходим так же как и в замечании 4.2 к бесконечной обобщенной жордановой цепочке.

В дальнейшем будем предполагать, что для некоторого номера s ($s = 1, \dots, r$) такого, что $s \neq k$ выполняется условие

$$(Da^{(k)}, a^{(s)}) \neq 0. \quad (4.20)$$

Сформулируем условия существования k -й обобщенной жордановой цепочки для случая $p_k = 2$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (4.16) и (4.20). Тогда для того, чтобы длина обобщенной жордановой цепочки, начинающейся с элемента $\varphi_k^{(1)}$, была равна 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (4.12) и условие

$$\left(SDSb^{(k)}, e^{(k)} \right) \neq 0. \quad (4.21)$$

Действительно, условия (4.16) и (4.20) обеспечивают, что длина k -й обобщенной жордановой цепочки будет конечна. Справедливость равенства (4.12) есть необходимые и достаточные условия разрешимости системы (4.8) при $j = 2$, решением которой является элемент $\varphi_k^{(2)}$.

Для завершения доказательства следует заметить, что условием разрешимости системы (4.8) при $j = 3$ является условие

$$\left(SDSb^{(k)}, e^{(k)} \right) = 0, \quad (4.22)$$

которое не выполняется в силу условия (4.21), и следовательно, длина k -й обобщенной жордановой цепочки не может быть больше 2.

Условия (4.17) и (4.21) обеспечивают полноту обобщенных жордановых наборов в случаях $p_k = 1$ и $p_k = 2$, соответственно.

4.3. Биортогонализация обобщенных жордановых наборов

Построим биортогональный обобщенный жорданов набор. Пусть определена k -я обобщенная жордановая цепочка длины p_k ($p_k = 1$ или $p_k = 2$). Определим элементы [8, 10]

$$z_k^{(j)} = SDS\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \quad \gamma_k^{(j)} = SDS\psi_k^{(p_k+1-j)}, \quad j = \overline{1, p_k}. \quad (4.23)$$

Поскольку ранее было установлено, что $\psi_k^{(j)} = \varphi_k^{(j)}$ элементы $z_k^{(j)}$ и $\gamma_k^{(j)}$ совпадают, но не удовлетворяют условиям биортогональности [11]. Для выполнения условий биортогональности перейдем к новым элементам $\hat{\psi}_k^{(j)}$ ($k = 1, \dots, p_k$).

Для $p_k = 1$ биортогонализация сводится к вычислению

$$\hat{\psi}_k^{(1)} = \frac{1}{(Da^{(k)}, a^{(k)})} \psi_k^{(1)}, \quad \hat{\gamma}_k^{(1)} = SDS\hat{\psi}_k^{(1)}. \quad (4.24)$$

Для $p_k = 2$ вычислим

$$\left(z_k^{(1)}, \psi_k^{(1)} \right) = (SDSb^{(k)}, e^{(k)}), \quad (4.25)$$

$$\left(z_k^{(2)}, \psi_k^{(2)} \right) = (e^{(k)}, SDSb^{(k)}). \quad (4.26)$$

Поскольку матрица SDS является вещественной и симметричной и вектор $b^{(k)}$ так же вещественен, то

$$\left(z_k^{(1)}, \psi_k^{(1)} \right) = \left(z_k^{(2)}, \psi_k^{(2)} \right). \quad (4.27)$$

Далее учитывая, что

$$\left(z_k^{(2)}, \psi_k^{(1)} \right) = \left(SDS e^{(k)}, e^{(k)} \right) = \left(Da^{(k)}, a^{(k)} \right) = 0, \quad (4.28)$$

для нахождения новых элементов $\hat{\psi}_k^{(j)}$ ($k = 1, \dots, p_k$) применяются результаты работы [11].

В дальнейшем не ограничивая общности будем считать, что наборы $z_k^{(j)}$ и $\psi_k^{(j)}$ ($k = 1, \dots, p_k$) являются биортогональными.

4.4. Вычисление компоненты решения, ортогональной обобщённому жорданову набору

Ортогональное обобщённому жорданову набору слагаемое представим в следующем виде [12]

$$[I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)} = \mu [\mu I - \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.29)$$

где $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\Gamma_k = \tilde{B}_k^{-1}, \quad \tilde{B}_k = B_k + G_k, \quad G_k = \gamma_k^{(1)} \left(z_k^{(1)} \right)^\top. \quad (4.30)$$

Для вычисления резольвенты матрицы $\Gamma_k SDS$ использовался алгоритм, основанный на нахождении собственных значений и собственных векторов этой матрицы [13].

4.5. Построение амплитудных векторов колебаний

Для построения решений возмущённой системы (4.2) и невозмущённой системы (4.5) воспользуемся алгоритмом из работы [12], основанным на методе Ляпунова-Шмидта [8].

Решения возмущённой системы (4.2) (при $\varepsilon \neq 0$) и невозмущённой системы (4.5) (при $\varepsilon = 0$) будут иметь вид

– в случае $p_k = 1$:

$$v^{(k)}(\varepsilon) = [I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.31)$$

$$w^{(k)} = c \varphi_k^{(1)} + \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.32)$$

где $c \in \mathbb{R}$,

– в случае $p_k = 2$:

$$v^{(k)}(\varepsilon) = -\frac{c_{k2}}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)} \right) + [I - \varepsilon \Gamma_k SDS]^{-1} \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.33)$$

$$w^{(k)} = c \varphi_k^{(1)} + \Gamma_k S h^{(k)}, \quad (4.34)$$

где $c_{k2} = \left(h^{(k)}, \psi_k^{(2)} \right)$.

Приведём оценку для малого параметра [8] и [10]

$$0 < \varepsilon < \|\Gamma_k SDS\|^{-1}, \quad (4.35)$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма [14].

Из формул (4.31) и (4.32) следует, что при длине обобщенной жордановой цепочки равной 1 и стремлении малого параметра ε к нулю амплитудный вектор $v^{(k)}$ стремится к амплитудному вектору $w^{(k)}$ (при $c = 0$).

Если же длина обобщенной жордановой цепочки равна 2, то амплитудный вектор $v^{(k)}$ имеет полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$, а при $\varepsilon = 0$ переходит в однопараметрическое семейство амплитудных векторов $w^{(k)}$.

5. Численное моделирование цепочки из восьми осцилляторов

Проведём численное моделирование для цепочки осцилляторов с параметрами $r = 8$, $k_0 = 1$ и $m = 1$. Из формул (2.7) и (2.10) следует $\omega_0 = 1$ и $\tilde{\omega}_s = \omega_s$ для всех $s = 1, \dots, r$. Далее с учетом формулы (3.1) получим $t = \tau$. Тогда полагая $\tilde{F} = 1$ заключаем, что уравнения (2.8) и (3.5) совпадают.

Рассмотрим резонансный случай, когда частота внешней периодической силы совпадает с собственной частотой $\omega_5 = 2 \sin \frac{5\pi}{18}$ (соответствует $k = 5$). Причем будем предполагать, что внешняя сила действует только на первую ($s = 1$) и последнюю ($s = 8$) частицы. В этом случае $\tilde{h}_s^{(5)} = 0$ при $s = 2, \dots, 7$. Положим $\tilde{h}_1^{(5)} = 0.5$ и $\tilde{h}_1^{(8)} = -0.5$, тогда условие (2.14) выполнено и, следовательно, невозмущенное уравнение (2.13) имеет T_5 -периодические решения.

Выберем безразмерные параметры отклонения d_s так, чтобы выполнялось условие (4.12). В качестве примера рассмотрим значения

$$\begin{aligned} d_s &= -1, \quad s = 1, \dots, 4, \\ d_5 &= 0, \\ d_j &= 1, \quad j = 6, \dots, 9. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что выполняются все условия теоремы 4.2, и, следовательно, длина обобщенной жордановой цепочки равна 2.

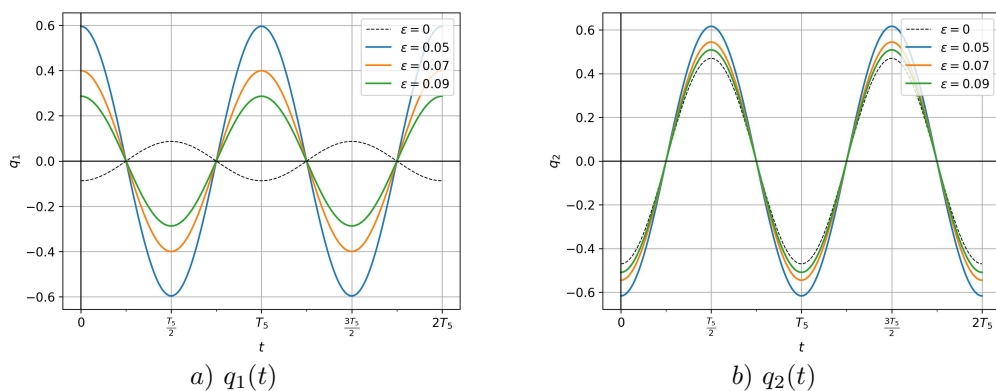
Формулы для вычисления T_5 -периодических колебаний возмущенного уравнения (2.12) и невозмущенного уравнения (2.13) будут иметь вид

$$q(t, \varepsilon) = Sv^{(5)}(\varepsilon) \cos \omega_5 t, \quad (5.2)$$

$$z(t) = Sw^{(5)} \cos \omega_5 t. \quad (5.3)$$

При этом полагаем $\theta_5 = 0$. Соответствующие амплитуды колебаний будем рассчитывать по формулам (4.33) и (4.34) при $k = 5$.

На рисунке 5.1 показаны графики компонент $q_s(t)$ ($s = 1, \dots, 8$) T_5 -периодических решений: для возмущенного уравнения (2.12) при различных $\varepsilon \neq 0$ и для невозмущенного уравнения (2.13).



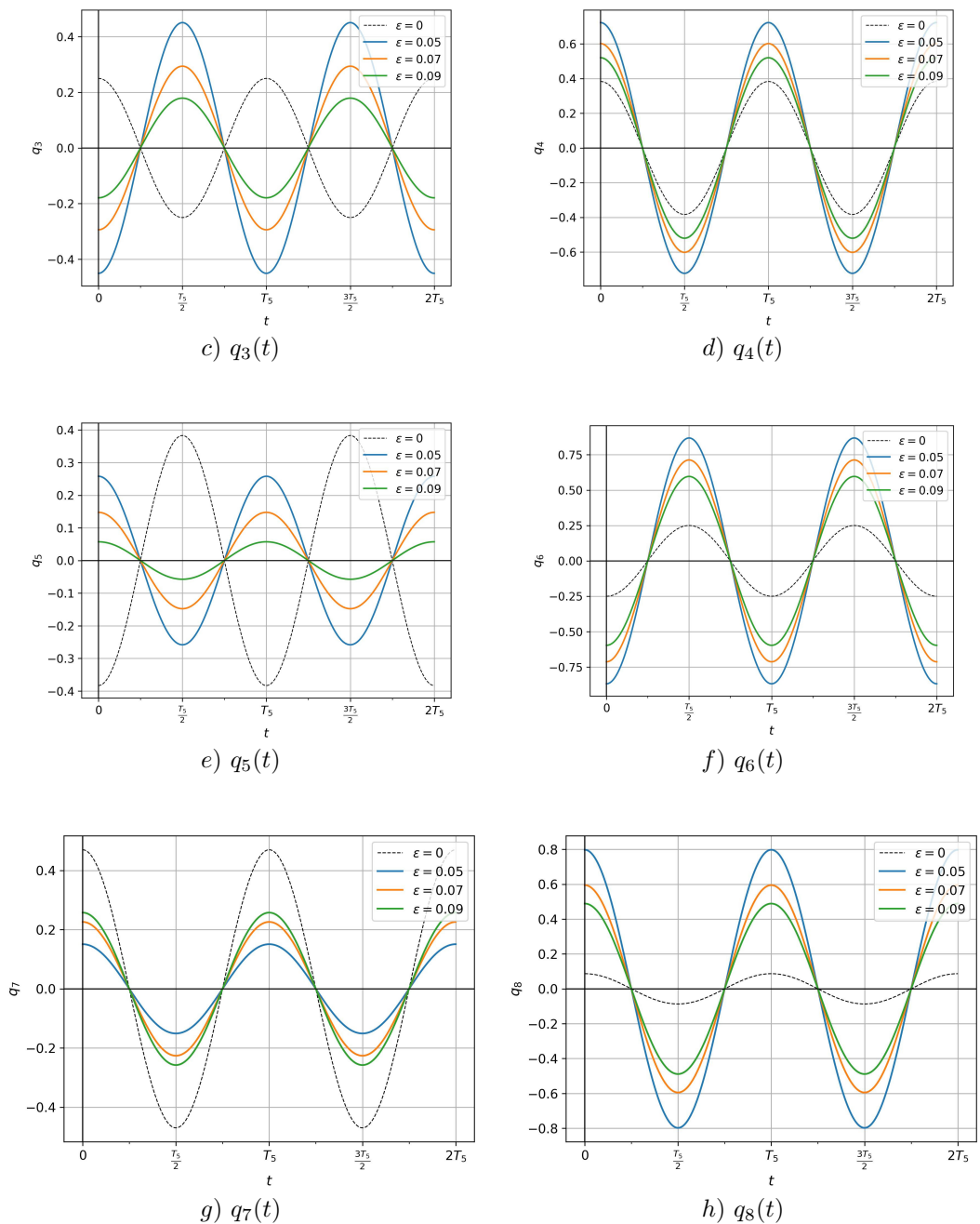


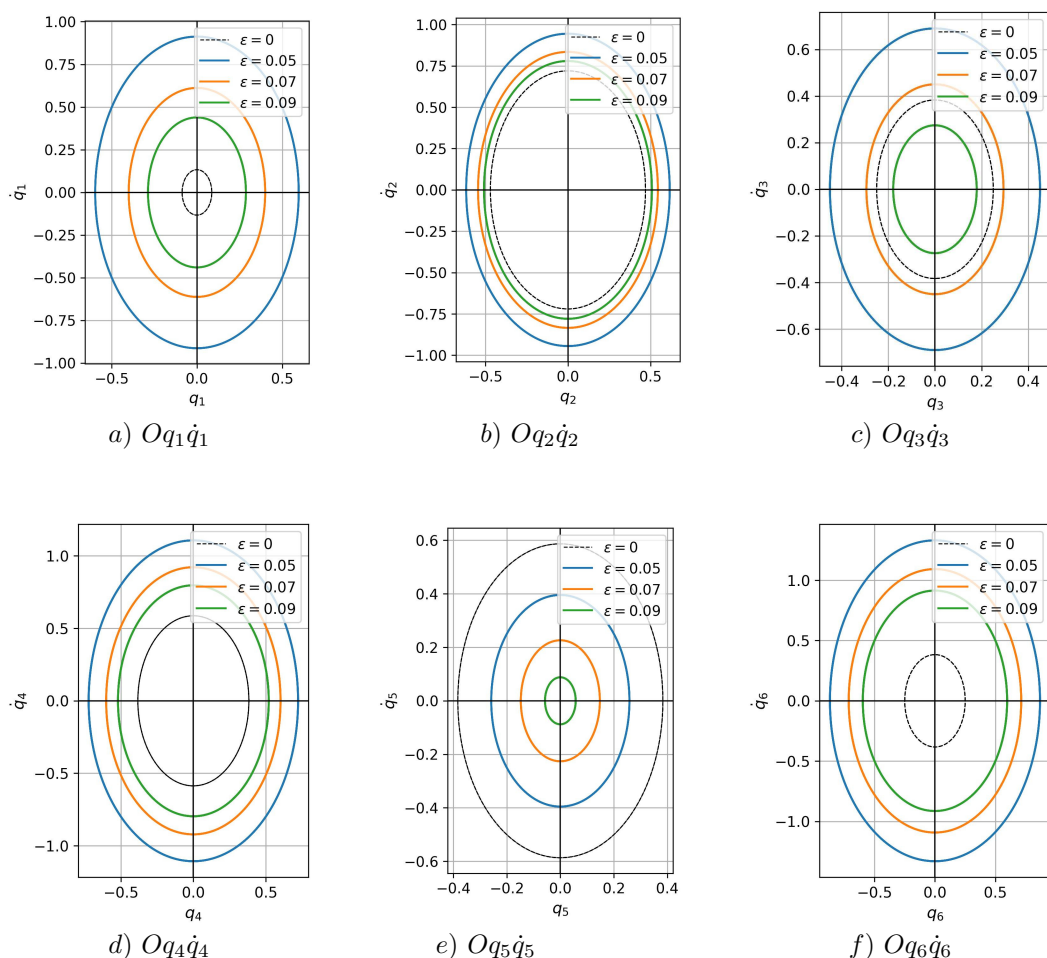
Рис. 5.1. Графики компонент q_s ($s = 1, \dots, 8$) T_5 -периодических решений возмущенного уравнения (2.12) при различных ε и невозмущенного уравнения (2.13)

Fig. 5.1. Graphs of the components q_s ($s = 1, \dots, 8$) of T_5 -periodic solutions of the perturbed equation (2.12) for different values of ε and the unperturbed equation (2.13).

Анализ графиков на рисунке (5.1) показывает, что в любой фиксированный момент времени модуль разности между амплитудами соответствующих компонент возмущённого и невозмущённого решений увеличивается при уменьшении ε . При этом для чётных компонент ($s = 2, 4, 6, 8$) знаки амплитуд совпадают для возмущённого и невозмущённого случаев. Для нечётных компонент ($s = 1, 3, 5$) знаки различны, за исключением компоненты $s = 7$.

На всех графиках рисунка (5.1), за исключением (g), уменьшение ε приводит к увеличению модуля максимальной амплитуды компонент q_s . На графике (g) наблюдается противоположное поведение: максимальная амплитуда компоненты q_7 стремится к нулю.

На рисунке 5.2 показаны графики фазовых траекторий компонент q_s ($s = 1, \dots, 8$) на соответствующих плоскостях $Oq_s\dot{q}_s$ для возмущённого уравнения (2.12) при различных ε и невозмущённого уравнения (2.13).



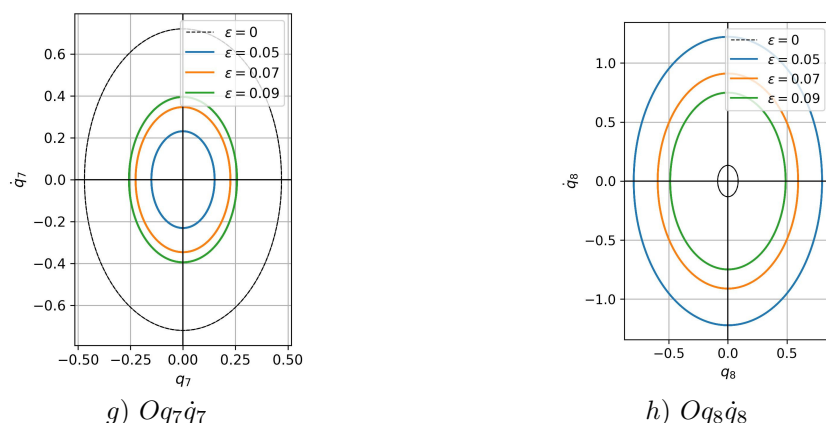


Рис. 5.2. Фазовые траектории компонент q_s ($s = 1, \dots, 8$) на соответствующих плоскостях $Oq_s \dot{q}_s$ для возмущённого уравнения (2.12) при различных ε и невозмущённого уравнения (2.13)

Fig. 5.2. Phase trajectories of the components q_s ($s = 1, \dots, 8$) on the corresponding planes $Oq_s \dot{q}_s$ for the perturbed equation (2.12) for different ε and the unperturbed equation (2.13)

Как видно из рис. 5.2, в любой фиксированный момент времени расстояние между фазовыми траекториями возмущённого и невозмущённого решений увеличивается с уменьшением ε . На всех графиках, за исключением (g), уменьшение ε приводит к удалению фазовых траекторий от начала координат. На графике (g) наблюдается противоположное поведение: фазовые траектории сжимаются к началу координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 200 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
3. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Том 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина; ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 416 с.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 3-е изд., испр. 440 с.
6. Коткин Г. Л., Сербо В. Г., Черных А. И. Лекции по аналитической механике : учебное пособие. Изд. 2-е, испр. М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2017. 236 с.

7. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. 495 с.
8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
9. Sidorov N.A., Loginov B.V., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.
10. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2016. Т. 18, № 1. С. 45–53.
11. Шаманаев П. А. О биортогонализации полных обобщенных жордановых наборов линейного оператора и ему сопряженного в банаховом пространстве [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.). - С. 221-224. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2022/papers/paper35.pdf>. - Дата обращения: 11.12.2025.
12. Шаманаев П. А., Прохоров С. А. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с малым параметром методом Ляпунова-Шмидта в регулярном случае [Электронный ресурс] // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: IX Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 8-11 октября 2020 г.). - С. 129-131. Режим доступа: <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>. - Дата обращения: 11.12.2025.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 488 с.

*Поступила 15.08.2025; доработана после рецензирования 25.09.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. F. R. Gantmakher, M. G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems [Ostsillyatsionnye matritsy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem]*, 2nd ed., Gostekhizdat, Moscow, 1950, 200 p.
2. F. R. Gantmakher, *Lectures on analytical mechanics [Lektsii po analiticheskoi mekhanike]*, Nauka, Moscow, 1966, 300 p.
3. V. V. Bolotin, *Vibrations in engineering: Handbook in 6 volumes. Volume 1. Oscillations of linear systems [Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 1. Kolebaniya lineinykh sistem]*, ed., Mashinostroenie, Moscow, 1978, 352 p.

4. D. I. Trubetskov, A. G. Rozhnev, *Linear oscillations and waves [Lineinye kolebaniya i volny]*, FIZMATLIT, Moscow, 2001, 416 p.
5. S. P. Strelkov, *Introduction to the theory of oscillations [Vvedenie v teoriyu kolebanii]*, 3rd ed., revised, Lan, St. Petersburg, 2005, 440 p.
6. G. L. Kotkin, V. G. Serbo, A. I. Chernykh, *Lectures on analytical mechanics [Leksii po analiticheskoi mekhanike]*, textbook, 2nd ed., revised, R&C Dynamics; Institute of Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2017, 236 p.
7. P. S. Landa, *Nonlinear oscillations and waves [Nelineinye kolebaniya i volny]*, Nauka, FIZMATLIT, Moscow, 1997, 495 p.
8. M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of nonlinear equations [Teoriya vetvleniya reshenii nelineinykh uravnenii]*, Nauka, Moscow, 1969, 527 p.
9. N. A. Sidorov, B. V. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapounov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*, Kluwer Academic Publishers, 2002, 548 p.
10. A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, “On branching of periodic solutions of linear nonhomogeneous differential equations with a degenerate or identity operator at the derivative and perturbation in the form of a small linear term [O vetvlenii periodicheskikh reshenii lineinykh neodnorodnykh differentsial’nykh uravnenii c vyrozhdennym ili tozhdestvennym operatorom pri proizvodnoi i vozmushcheniem v vide malogo lineinogo slagaemogo]”, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, **18**:1 (2016), 45–53.
11. P. A. Shamanaev, “On biorthogonalization of complete generalized Jordan sets of a linear operator and its adjoint in a Banach space [O biortogonalizatsii polnykh obobshchennykh zhordanovykh naborov lineinogo operatora i emu sopryazhennogo v banakhovom prostranstve]”, Mathematical modeling, numerical methods and software complexes: X International Scientific Youth School-Seminar named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14–18, 2022), 221–224, <https://conf.svmo.ru/files/2022/papers/paper35.pdf>.
12. P. A. Shamanaev, S. A. Prokhorov, “Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with a small parameter by the Lyapunov-Schmidt method in the regular case [Algoritm resheniya sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii s malym parametrom metodom Lyapunova-Shmidta v reguliarnom sluchae]”, Mathematical modeling, numerical methods and software complexes named after E.V. Voskresensky: IX International Scientific Youth School-Seminar (Saransk, October 8–11, 2020), 129–131, <https://conf.svmo.ru/files/2020/papers/paper40.pdf>.
13. F. R. Gantmakher, *Theory of matrices [Teoriya matrits]*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1966, 576 p.
14. V. A. Trenogin, *Functional analysis [Funktsional’nyi analiz]*, FIZMATLIT, Moscow, 2007, 488 p.

Submitted 15.08.2025; Revised 25.09.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование влияния сжимаемости потока на динамическую устойчивость упругой стенки воздуховода

Г. А. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Жаркова

*Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск,
Российская Федерация)*

Аннотация. Работа посвящена математическому моделированию вентиляционных систем, состоящих из деформируемых воздуховодов, через которые подается поток воздуха. На основе построенной трехмерной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, в работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки воздуховода, через который подается поток газа. В качестве критерия устойчивости используется критерий динамической устойчивости по Ляпунову, когда малым деформациям упругой стенки в начальный момент времени соответствуют и малые деформации в последующие моменты времени. Для исследования устойчивости в задачах аэрогидроупругости в моделях сжимаемой и несжимаемой среды построены функционалы типа Ляпунова для полученных систем дифференциальных уравнений. На основе исследования этих функционалов получены условия устойчивости. Эти условия обеспечивают положительность функционала и отрицательность его производной по времени. Для модели сжимаемой среды построена зависимость сжимающего пластину продольного усилия от скорости протекающего потока воздуха для конкретных параметров механической системы. С помощью построенного графика проведено сравнение условий устойчивости для моделей сжимаемой и несжимаемой среды. Показано, что сжимаемость среды оказывает негативное влияние на устойчивость деформируемой стенки воздуховода и приводит к уменьшению области устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамическая устойчивость, аэрогидроупругость, сжимаемая и несжимаемая среда, воздуховод, упругая пластина, функционалы типа Ляпунова

Для цитирования: Анкилов Г. А., Вельмисов П. А., Жаркова А. С. Исследование влияния сжимаемости потока на динамическую устойчивость упругой стенки воздуховода // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 488–499. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

Об авторах:

Анкилов Григорий Андреевич, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

Вельмисов Петр Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

© Анкилов Г. А., Вельмисов П. А., Жаркова А. С.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Жаркова Алина Сергеевна, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-8126-3589>, mon16blan@yandex.ru

Original article

MSC2020 74F10

Study of influence of flow compressibility on dynamic stability of elastic wall of air duct

G. A. Ankilov, P. A. Velmisov, A. S. Zharkova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. This paper examines the mathematical modeling of ventilation systems consisting of deformable air ducts through which an air flow is supplied. Using constructed three-dimensional mathematical model described by a system of partial differential equations, the paper investigates dynamic stability of the elastic wall of an air duct where some gas flows. The Lyapunov dynamic stability criterion is used to study the mechanical system's stability. To study stability in problems of aerohydroelasticity in compressible and incompressible medium models, Lyapunov-type functionals are constructed for deduced systems of differential equations. By studying these functionals stability conditions are obtained. They ensure that the functional is positive and its time derivative is negative. For a compressible medium model, the dependence between the longitudinal force compressing the plate and the air flow velocity is constructed for specific parameters of the mechanical system. Using the plot constructed, a comparison of the stability conditions for compressible and incompressible medium models is made. It is shown that the medium compressibility has negative effect on the stability of the deformable wall of the air duct and leads to decrease of the stability region.

Keywords: partial differential equations, dynamic stability, aerohydroelasticity, compressible and incompressible medium, air duct, elastic plate, Lyapunov-type functionals

For citation: G. A. Ankilov, P. A. Velmisov, A. S. Zharkova. Study of influence of flow compressibility on dynamic stability of elastic wall of air duct. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 488–499. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

About the authors:

Grigory A. Ankilov, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

Petr A. Velmisov, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Alina S. Zharkova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-8126-3589>, mon16blan@yandex.ru

1. Введение

При проектировании вентиляционных систем, составной частью которых являются деформируемые воздуховоды, контактирующие с потоком протекающего через них воздуха, особое значение имеет исследование устойчивости упругих стенок этих воздуховодов [1–4]. При разработке составных частей систем в виде упругих воздуховодов, необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия на них рабочих сред могут повышать амплитуду и частоту колебаний стенок воздуховодов до критических значений, приводящих к достаточно быстрому выходу системы из строя. Воздуховоды моделируются упругими каналами и трубопроводами, практическим и теоретическим вопросам проектирования которых посвящено много научных работ, в частности, отметим [5–8].

В данной работе исследуется динамическая устойчивость участка вентиляционной системы квадратного сечения, на который с помощью вентилятора подается поток воздуха. Рассматривается воздуховод, жестко закрепленный с трех сторон и с незакрепленной четвертой упругой стороной. На основе построенных математических моделей исследуется динамическая устойчивость упругой незакрепленной стенки воздуховода с учетом взаимодействия с потоком газа. Определение устойчивости деформируемых элементов соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала описывается линейной моделью. Для исследования динамической устойчивости в задачах аэрогидроупругости в модели сжимаемой и несжимаемой среды разработаны аналитические методики, основанные на построении функционалов для полученных систем дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Исследуется динамическая устойчивость участка вентиляционной системы квадратного сечения (Рис. 2.1), через который протекает поток сжимаемой или несжимаемой среды.



Рис. 2.1. Пример воздуховода квадратного сечения

Fig. 2.1. Example of square cross-section air duct

Рассматривается математическая модель движения газа со скоростью V в воздуховоде (Рис. 2.2) $J = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < h\}$ с одной упругой стенкой при $y = 0$. Остальные стенки при $y = h, z = 0, z = h$ считаются недеформируемыми.

В модели сжимаемой среды потенциал скорости возмущенного потока газа

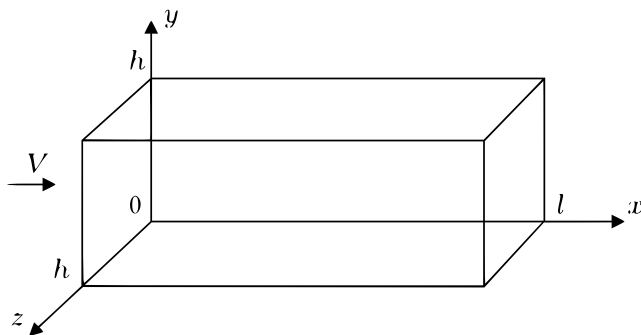


Рис. 2.2. Модель воздуховода квадратного сечения

Fig. 2.2. Square duct model

$\phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} &\phi_{tt}(x, y, z, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, z, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, z, t) = \\ &= a^2(\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in J, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным; коэффициент a (м/с) определяет скорость звука в невозмущенном потоке газа ($a > V$).

В отличие от модели сжимаемой среды (2.1), в модели несжимаемой среды потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J. \quad (2.2)$$

С учетом аэрогидродинамического воздействия запишем линейное уравнение, описывающее прогиб $w(x, z, t)$ упругой пластины:

$$\begin{aligned} &Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + \\ &+ \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ &+ N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_1w_t(x, z, t) + \beta_0w(x, z, t) = C + \rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)), \\ &(x, z) \in T_1 = \{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < z < h\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ρ_p – объемная плотность пластины (кг/м³); l, h – длина и ширина пластины в недеформированном состоянии (м); h_p – толщина пластины в недеформированном состоянии (м); $M = h_p\rho_p$ – погонная масса пластины (кг/м²); E – модуль упругости материала пластины (Па); $D = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины (Па·м³); β_0 – жесткость слоя обжатия пластины (Па/м); β_1 – коэффициент демпфирования слоя обжатия пластины (Па·с/м); β_2 – коэффициент демпфирования пластины (Па·с); ν – коэффициент Пуассона (безр.); $N_{(x)}, N_{(z)}$ – сжимающие (растягивающие) пластину силы в направлении осей Ox и Oz (Па·м); C – константа; V – скорость набегающего на пластину потока газа (м/с); $t \geq 0$ – время (с).

Из условий непротекания газа через стенки воздуховода получим граничные условия

$$\phi_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (2.4)$$

$$\phi_y(x, 0, z, t) = w_t(x, z, t) + Vw_x(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1; \quad (2.5)$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = 0, \quad \phi_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \{(x, y) \in R^2: 0 < x < l, 0 < y < h\}, \quad (2.6)$$

где $w(x, z, t)$ описывает деформацию пластины.

Пусть на входе и выходе из воздуховода задан закон изменения потенциала скорости газа, тогда граничные условия примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = \phi_1(y, z, t), \quad \phi(l, y, z, t) = \phi_2(y, z, t), \quad (2.7)$$

$$(y, z) \in T_3 = \{(y, z) \in R^2: 0 < y < h, 0 < z < h\}.$$

В линейных задачах исследования устойчивости по начальным данным без ограничения общности можно считать $C = 0$ в уравнении (2.3) и $\phi_1 = \phi_2 = 0$ в условиях (2.7). Тогда условия (2.7) примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = 0, \quad \phi(l, y, z, t) = 0, \quad (y, z) \in T_3. \quad (2.8)$$

В случае жесткого закрепления краев пластины $x = 0, x = l, z = 0, z = h$ граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} w(0, z, t) = 0, \quad w_x(0, z, t) = 0, \quad w(l, z, t) = 0, \quad w_x(l, z, t) = 0; \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w_z(x, 0, t) = 0, \quad w(x, h, t) = 0, \quad w_z(x, h, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Производя обобщение результатов, полученных в [9, 10] для плоских моделей, построен функционал для трехмерной модели (2.1), (2.3)-(2.9):

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \iiint_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2) \phi_x^2 + a^2 \phi_y^2 + a^2 \phi_z^2) dx dy dz + \\ + 2a^2 V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \\ + \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} (M w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2D w_{xz}^2 + D w_{zz}^2 - N_{(x)} w_x^2 - N_{(z)} w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Дифференцируя Φ по t и подставляя (2.1), (2.3) в равенство (3.1), получим

$$\begin{aligned} \Phi_t(t) = 2 \iiint_J (\phi_t (-2V \phi_{xt} - V^2 \phi_{xx} + a^2 (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})) + \\ + (a^2 - V^2) \phi_x \phi_{xt} + a^2 \phi_y \phi_{yt} + a^2 \phi_z \phi_{zt}) dx dy dz + \\ + 2a^2 V \iint_{T_1} (\phi_t(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \phi(x, 0, z, t) w_{xt}(x, z, t)) dx dz + \\ + \frac{2a^2}{\rho} \iint_{T_1} (w_t (\rho (\phi_t(x, 0, z, t) + V \phi_x(x, 0, z, t)) - D (w_{xxx} + 2w_{xxz} + \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$+w_{zzzz}) - \beta_2 (w_{xxxxt} + 2w_{xxzzt} + w_{zzzzt}) - N_{(x)}w_{xx} - N_{(z)}w_{zz} - \beta_1 w_t - \beta_0 w) + \\ + Dw_{xx}w_{xxt} + 2Dw_{xz}w_{xzt} + Dw_{zz}w_{zzt} - N_{(x)}w_xw_{xt} - N_{(z)}w_zw_{zt} + \beta_0 ww_t) dx dz.$$

Согласно (2.4)–(2.9) получим

$$\begin{aligned} \iiint_J \phi_t \phi_{xt} dx dy dz &= 0, \quad \iiint_J \phi_t \phi_{xx} dx dy dz = - \iiint_J \phi_{xt} \phi_x dx dy dz, \\ \iiint_J \phi_t \phi_{yy} dx dy dz &= - \iint_{T_1} \phi_t(x, 0, z, t) (w_t(x, z, t) + V w_x(x, z, t)) dx dz - \\ &- \iiint_J \phi_{yt} \phi_y dx dy dz, \quad \iiint_J \phi_t \phi_{zz} dx dy dz = - \iiint_J \phi_{zt} \phi_z dx dy dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{xxx} dx dz &= \iint_{T_1} w_{xxt} w_{xx} dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xxxz} dx dz = \iint_{T_1} w_{xzt} w_{xz} dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{zzzz} dx dz &= \iint_{T_1} w_{zzt} w_{zz} dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xx} dx dz = - \iint_{T_1} w_{xt} w_x dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{zz} dx dz &= - \iint_{T_1} w_{zt} w_z dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xxxxt} dx dz = \iint_{T_1} w_{xxt}^2 dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{xxzzt} dx dz &= \iint_{T_1} w_{xzt}^2 dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{zzzzt} dx dz = \iint_{T_1} w_{zzt}^2 dx dz. \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (3.2), получим

$$\Phi_t(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \iint_{T_1} (\beta_2 (w_{xxt}^2(x, z, t) + 2w_{xzt}^2(x, z, t) + w_{zzt}^2(x, z, t)) + \beta_1 w_t^2(x, z, t)) dx dy. \quad (3.3)$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (3.4)$$

тогда равенство (3.3) примет вид $\Phi_t(t) \leq 0$. Интегрируя от 0 до t , окончательно получим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.5)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (2.9). Воспользуемся неравенствами Релея:

$$\begin{aligned} \iint_{T_1} w_{xx}^2(x, z, t) dx dz &\geq \frac{4\pi^2}{l^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{l^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{zz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{4\pi^2}{h^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz &\geq \frac{\pi^2}{h^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xx}^2(x, z, t) dx dz \geq \\
&\geq \frac{\mu_1^4}{l^4} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{\pi^4}{l^2 h^2} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz, \\
\iint_{T_1} w_{zz}^2(x, z, t) dx dz &\geq \frac{\mu_1^4}{h^4} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz,
\end{aligned}$$

где μ_1 – наименьший положительный корень уравнения $\cos \mu \cdot \operatorname{ch} \mu = 1$, который примерно равен $\mu_1 \approx 4.73$.

Согласно этим неравенствам справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\iint_{T_1} (w_{xx}^2(x, z, t) + 2w_{xz}^2(x, z, t) + w_{zz}^2(x, z, t)) dx dz \geq \\
&\geq \frac{\pi^2 (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz + \frac{\pi^2 (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{w^2(x, z, t)}{lh}. \quad (3.7)$$

Выведем условия неотрицательности самого функционала $\Phi(t) \geq 0$. Для этого, используя неравенства Релея [11] и Коши-Буняковского, оценим функционал снизу

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &\geq \iiint_J \left(\phi_t^2(x, y, z, t) + \frac{\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \right. \\
&- \frac{4a^2}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2a^2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \frac{2a^2 V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \\
&+ \frac{a^2}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\
&+ \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Пусть выполняются условия

$$N_{(x)} < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}, \quad N_{(z)} \leq \frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2}. \quad (3.9)$$

Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (3.8) примет вид:

$$\begin{aligned}
&2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - \\
&- V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2) > 0. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Согласно (3.5), (3.8) доказана теорема.

Теорема 3.1. Решение $w(x, z, t)$ задачи (2.1), (2.3)–(2.9) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $\phi_t(x, y, z, t)$, $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\phi_t(x, y, z, 0)$, $\phi_x(x, y, z, 0)$, $\phi_y(x, y, z, 0)$, $\phi_z(x, y, z, 0)$, $\phi(x, 0, z, 0)$, $w_t(x, y, 0)$, $w_{xx}(x, y, 0)$, $w_{xz}(x, y, 0)$, $w_{zz}(x, y, 0)$, $w_x(x, y, 0)$, $w_z(x, y, 0)$, $w(x, y, 0)$ при выполнении условий (3.4), (3.9), (3.10).

4. Исследование устойчивости для несжимаемой среды

Аналогично (3.1) построен функционал для задачи (2.2)–(2.9)

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iiint_J (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dx dy dz + 2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} (M w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2D w_{xz}^2 + D w_{zz}^2 - N_{(x)} w_x^2 - N_{(z)} w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть выполняются условия (3.4), тогда получим также неравенство (3.5). Оценка функционала (4.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\frac{\pi^2 (4h^2 + l^2)}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \frac{4}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \right. \\ & + \frac{2V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть выполняются условия (3.9). Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (4.2) примет вид:

$$2\pi^2 (4h^2 + l^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2) > 0, \quad (4.3)$$

а, следовательно, доказана теорема.

Теорема 4.1. Решение $w(x, z, t)$ задачи (2.2)–(2.9) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\phi_x(x, y, z, 0)$, $\phi_y(x, y, z, 0)$, $\phi_z(x, y, z, 0)$, $\phi(x, 0, z, 0)$, $w_t(x, y, 0)$, $w_{xx}(x, y, 0)$, $w_{xz}(x, y, 0)$, $w_{zz}(x, y, 0)$, $w_x(x, y, 0)$, $w_z(x, y, 0)$, $w(x, y, 0)$ при выполнении условий (3.4), (3.9), (4.3).

5. Сравнение условий устойчивости для моделей сжимаемой и несжимаемой среды.

Для конкретных значений параметров механической системы произведено сравнение условий (3.10) и (4.3) и численно найдена разность между левыми частями

этих неравенств. Рабочая среда – воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_p = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 331$, $l = 5$, $h = 0,1$, $h_p = 0,005$, $\nu = 0,31$, $M = h_p \rho_p = 42,4$, $D = \frac{E h_p^3}{12(1 - \nu^2)} = 806,7$. Размерность величин указана в описании параметров задачи (2.1)–(2.9).

Согласно условиям (3.9) получим

$$N_{(x)} < 797445, \quad N_{(z)} \leq 3,185 \cdot 10^6. \quad (5.1)$$

Запишем условие (3.10) в виде

$$N_{(x)}(V) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{V^2 \rho h (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2)}{2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2)}. \quad (5.2)$$

На рисунках 5.1, 5.2 изображены области устойчивости (серая область) на плоскости «усилие $N_{(x)}$ – скорость потока V » для неравенства (5.2).

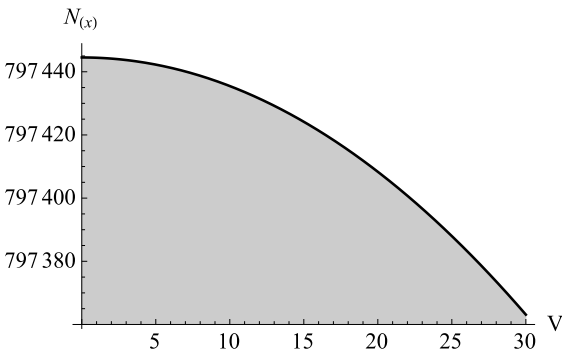


Рис. 5.1. Область устойчивости на плоскости $(N_{(x)}, V)$ при $V \in [0, 30]$
Fig. 5.1. Stability region on the plane $(N_{(x)}, V)$ at $V \in [0, 30]$

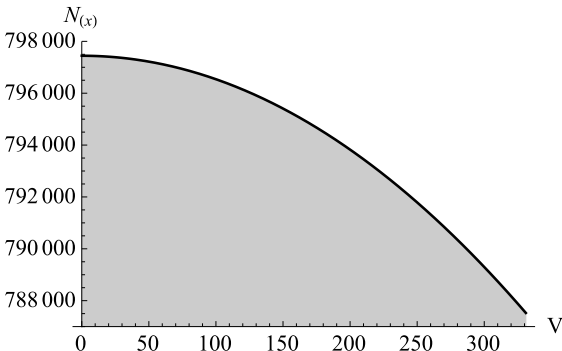


Рис. 5.2. Область устойчивости на плоскости $(N_{(x)}, V)$ при $V \in [0, a]$
Fig. 5.2. Stability region on the plane $(N_{(x)}, V)$ at $V \in [0, a]$

На Рис. 5.1 скорость потока $V \in [0, 30]$, на Рис. 5.2 – $V \in [0, a]$, где a – скорость звука. На Рис. 5.1 видим, что при отсутствии потока газа должно выполняться условие $N_{(x)}(0) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}$ (отсутствуют усилия способные смять воздуховод), на Рис. 5.2 при стремлении скорости потока газа к скорости звука должно выполняться условие

$$N_{(x)}(a) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{a^2 \rho h (\pi^2 + 8)}{2\pi^2}.$$

Возьмем точку в области устойчивости $N_{(x)} = 5 \cdot 10^5$, $N_{(z)} = 3 \cdot 10^5$, $V = 5$ (определяем по неравенствам (5.1) и по области на рис. 5.1).

Запишем условие (4.3) в виде

$$N_{(x)}(V) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{V^2 \rho h (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2)}{2\pi^2 (4h^2 + l^2)}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.3 представлена разность между правыми частями условий устойчивости (5.3) для несжимаемой и (5.2) для сжимаемой среды, обозначенной функцией $R(V)$.

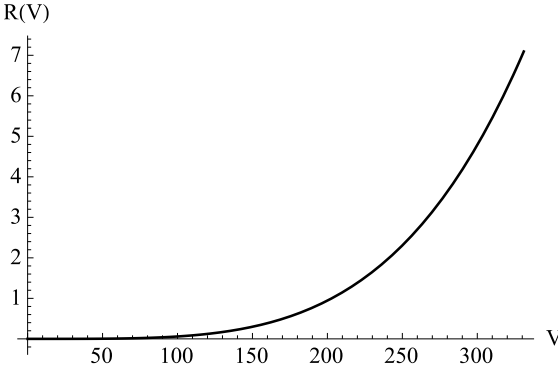


Рис. 5.3. Разность между правыми частями неравенств (5.3) и (5.2)

Fig. 5.3. Difference between the right-hand sides of inequalities (5.3) and (5.2)

Как видно из рис. 5.3 для выбранных значений параметров механической системы сжимаемость среды оказывает негативное влияние на устойчивость деформируемой стенки воздуховода (происходит уменьшение области устойчивости).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shi Y., Li X. A study on variation laws of infiltration rate with mechanical ventilation rate in a room. *Building and Environment*. 2018. Vol. 143. P. 269–279. DOI: 10.1016/j.buildenv.2018.07.021
2. Liu Y., Dang R., Yang B., Liu P. Energy-efficient control strategy for air conditioning and mechanical ventilation system based on occupant distribution -A case study on stratum ventilation. *Journal of Building Engineering*. 2025. Vol. 100. 111709. DOI: 10.1016/j.jobee.2024.111709

3. Rashid F.L. Optimising phase change materials for ventilated building components in sustainable building design: A comprehensive review *Energy Build.* 2025. Vol. 343. 115947. DOI: 10.1016/j.enbuild.2025.115947
4. Василенко А.И. Оптимизация воздухопроводов прямоугольного поперечного сечения // *Инженерный вестник Дона.* 2022. Т. 89, № 5. С. 740-747.
5. Giacobbi D.B., Semler C., Paidoussis M.P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density. *Journal of Sound and Vibration.* 2020. Vol. 473. 115202. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115202
6. Abdelbaki A.R., Paidoussis M.P., Misra A.K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2020. Vol. 118. 103290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290
7. Kondratov D.V., Kondratova T.S., Popov V.S., Popova M.V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation. *Lecture Notes in Mechanical Engineering.* 2023. P. 261–270. DOI: 10.1007/978-3-031-38126-3_27
8. Mogilevich L.I., Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2023. Т. 31, № 3. С. 365–376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040
9. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.
10. Velmisov P.A., Ankilov A.V., Pokladova Yu.V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 259, № 2. P. 296–308. DOI: 10.1007/s10958-021-05618-6
11. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

*Поступила 02.08.2025; доработана после рецензирования 15.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Y. Shi, X. Li, “A study on variation laws of infiltration rate with mechanical ventilation rate in a room”, *Building and Environment*, **143** (2018), 269-279. DOI: 10.1016/j.buildenv.2018.07.021
2. Y. Liu, R. Dang, B. Yang, P. Liu, “Energy-efficient control strategy for air conditioning and mechanical ventilation system based on occupant distribution -A case study on stratum ventilation”, *Journal of Building Engineering*, **100** (2025), 111709. DOI: 10.1016/j.jobee.2024.111709

3. F. L. Rashid, “Optimising phase change materials for ventilated building components in sustainable building design: A comprehensive review”, *Energy Build.*, **343** (2025), 115947. DOI: 10.1016/j.enbuild.2025.115947
4. A. I. Vasilenko, “Optimization of air ducts with rectangular cross-section”, *Engineering Bulletin of Don*, **89**:5 (2022), 740-747 (In Russ.).
5. D. B. Giacobbi, C. Semler, M. P. Paidoussis, “Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density”, *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115202
6. A. R. Abdelbaki, M. P. Paidoussis, A. K. Misra, “A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow”, *International Journal of Non-Linear Mechanics.*, **118** (2020), 103290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290
7. D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, V. S. Popov, M. V. Popova, “Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation”, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2023, 261-270. DOI: 10.1007/978-3-031-38126-3_27
8. L. I. Mogilevich, E. V. Popova, “Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **31**:3 (2023), 365-376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Lyapunov functionals in some problems of aerohydroelasticity*, UISTU, Ulyanovsk, 2019 (In Russ.), 201 p.
10. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova, “On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:2 (2021), 296-308. DOI: 10.1007/s10958-021-05618-6
11. L. Collatz, *Eigenvalue problems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

Submitted 02.08.2025; Revised 15.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.500-516

Original article

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 65M06, 85-10

2D model of the hydrodynamic escape of planetary atmospheres

K. D. Gorbunova, N. V. Erkaev*Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of Russian Academy of Science
(Krasnoyarsk, Russian Federation)*

Abstract. The article considers a two-dimensional problem of hydrodynamic escape of the planet's primordial hydrogen atmosphere as a result of absorption of extreme ultraviolet (EUV) radiation from its host star. As a test case, the model is applied using the parameters of a recently discovered exoplanet TOI-421b, which, according to accepted classification, belongs to so-called class of "warm mini-Neptunes". The hydrodynamic parameters are determined by solving the non-stationary Euler and entropy production equations in a spherical coordinate system. The EUV intensity is calculated using the radiation transport equation along parallel rays, with an absorption coefficient proportional to the density of the hydrogen atoms. The numerical method is based on a finite-difference scheme of the modified MacCormack — Runge-Kutta type on a spherical grid with a nonuniform step along the radial direction and a constant step along the spherical angle. The calculation of the radiation intensity at the grid points is performed along the characteristics with density interpolation. Steady-state two-dimensional profiles of physical parameters in the upper atmosphere obtained as the result of calculations are presented. An estimate of the dayside atmospheric mass-loss rate and the rate of mass transfer to the nightside under constant external conditions is provided.

Keywords: mathematical modelling, exoplanet, upper atmospheres, two-dimensional problem, atmospheric escape

For citation: K. D. Gorbunova, N. V. Erkaev. 2D model of the hydrodynamic escape of planetary atmospheres. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 500–516. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.500-516

About the authors:

Kseniia D. Gorbunova, Engineer, Department of Computational Physics, Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of Russian Academy of Science (50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0009-0000-7593-3874>, gorbunova.kd@icm.krasn.ru

Nikolay V. Erkaev, Dr.Sci. (Phys. and Math.), Chief researcher, Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of Russian Academy of Science (50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8993-6400>, erkaev@icm.krasn.ru



УДК 519.6 : 52.4

2D моделирование гидродинамического истечения планетарных атмосфер

К. Д. Горбунова, Н. В. Еркаев

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (г. Красноярск, Российская Федерация)

Аннотация. В статье рассматривается двумерная задача о гидродинамическом истечении первичной водородной атмосферы планеты в результате поглощения экстремального ультрафиолетового излучения (EUV) от родительской звезды. В качестве примера приведены параметры недавно открытой экзопланеты TOI-421b, которая, согласно принятой классификации, относится к так называемому классу “теплых мини-Нептунов”. Гидродинамические параметры определяются путем решения нестационарных уравнений Эйлера и производства энтропии в сферической системе координат. Для определения интенсивности EUV применяется уравнение переноса излучения вдоль параллельных лучей с коэффициентом поглощения, пропорциональным плотности атомов водорода. Численный метод основан на конечно-разностной схеме модифицированного типа МакКормака — Рунге–Кутты на сферической сетке с неравномерным шагом по радиальному направлению и постоянным шагом по сферическому углу. Расчет интенсивности излучения в точках сетки выполняется по характеристикам с интерполяцией плотности. Представлены стационарные двумерные профили физических параметров в верхних слоях атмосферы, полученные в результате расчетов. Приводится оценка скорости истечения массы атмосферы на дневной стороне планеты и скорость ухода массы на ночную сторону планеты при постоянных внешних условиях.

Ключевые слова: математическое моделирование, экзопланеты, верхние атмосферы, двумерная задача, потеря массы атмосферы

Для цитирования: Горбунова К. Д., Еркаев Н. В. 2D моделирование гидродинамического истечения планетарных атмосфер // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 500-516. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.500-516

Об авторах:

Горбунова Ксения Дмитриевна, инженер, Отдел вычислительной физики, Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (660036, Россия, г. Красноярск, ул. Академгородок, д. 50/44), ORCID: <http://orcid.org/0009-0000-7593-3874>, gorbunova.kd@icm.krasn.ru

Еркаев Николай Васильевич, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, Отдел вычислительной физики, Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (660036, Россия, г. Красноярск, ул. Академгородок, д. 50/44), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8993-6400>, erkaev@icm.krasn.ru

1. Introduction

In recent years, atmospheric modeling has gained importance due to the discovery of numerous exoplanets and the study of their evolution. The loss of atmospheric particles under the action of external ultraviolet radiation is of crucial importance for understanding

the structure and evolution of planetary atmospheres both inside and outside the Solar System. The current properties of planetary atmospheres are closely related to the integrated radiation received over time and the evolutionary behavior of their host stars. In the early stages of planetary evolution, intense extreme ultraviolet (EUV) radiation from the host star can lead to the formation of a supersonic hydrodynamic regime of atmospheric outflow (planetary wind). In this case, atmospheric particles can overcome the planetary gravity, reach supersonic speed and fly away to the outer region of the Roche lobe. Predicting and estimating atmospheric loss for known exoplanets are key questions in this problem, which require the development of appropriate mathematical models suitable for interpreting observational data and creating testable new predictions. The first hydrodynamic simulations of planetary wind were based on an isothermal one-dimensional hydrodynamic model [1]. Recently, this simple, computationally inexpensive model has been applied as a tool for interpreting spectroscopic observations of various exoplanets [2–3]. The main drawback of this model is the assumption of isothermality, since in the real atmosphere the temperature has quite large variations due to heating by EUV radiation. There are also descriptions of more complex planetary wind models in the literature, for example, in the works of N. Erkaev [4–5], A. Berezutsky [6], and D. Kubyskhina [7–9], which were used to simulate runaway atmospheres of exoplanets in various stellar systems. Currently, there is increasing activity of research groups in using hydrodynamic models of planetary winds to study the long-term evolution of primary hydrogen planetary atmospheres, starting from their formation in protoplanetary clouds. For this purpose, only 1-D models have been used so far, since they require much less numerical resources compared to 2-D and especially 3-D models. However, this naturally raises the question of quantitative differences in the profiles of atmospheric parameters and the rates of atmospheric losses calculated in 1-D and 2-D models. These issues have not yet been covered in the literature. The goal of our work is to study an axially symmetric 2-D model of transonic planetary wind caused by extreme heating in the EUV range and to describe specific details of radial profiles and meridional dependences of atmospheric parameters. Special attention is also paid to issues related to the implementation of the numerical method and the choice of specific initial conditions for calculations that allow obtaining a steady-state solution with moderate computational costs.

2. Two-dimensional problem statement

Previous one-dimensional spherically symmetric formulations of the hydrodynamic escape problem from an atmosphere do not account for variations in pressure, density, and velocity of gas particles with respect to the angular deviation from the central axis directed toward the star. In reality, this spherical symmetry is broken due to the propagation and absorption of extreme ultraviolet (EUV) radiation and the increasing angular pressure gradient at larger spherical angles for a fixed distance from the planet. In this regard, spherically symmetric 1D models provide inaccurate estimates of the mass loss rate.

This study introduces a system of non-stationary hydrodynamic equations in the Euler-Entropy form, which includes neutral and ionized hydrogen atoms and describes significant entropy changes due to heating source

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{v_\theta^2}{r}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{(\gamma - 1)}{P} \cdot (Q - \Lambda), \quad (2.4)$$

$$Q = \rho(1 - X)\eta\sigma_i \frac{J}{m}, \quad \Lambda = \rho^2 X(1 - X) \frac{\Lambda_0}{m^2} \exp\left(-\frac{118348}{T}\right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} + v_r \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} = \nu(1 - X) \frac{J}{J_\infty} - \alpha X^2 \left(\frac{\rho}{m}\right), \quad (2.6)$$

$$\cos \theta \frac{\partial J}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial J}{\partial \theta} = \sigma_i(1 - X) \frac{\rho_n}{m} J, \quad (2.7)$$

The system is described in spherical coordinates (r, θ) , where:

- r is the radial distance from the planetary center,
- θ is the zenith angle measured from direction to the host star.

The hydrodynamic quantities are defined as:

- ρ, ρ_n : total mass density and mass density of neutral particles,
- v_r, v_θ : radial and meridional velocity components,
- P : gas pressure,
- T : gas temperature,
- γ : adiabatic index,
- $S = \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$: entropy like function proportional to the physical entropy.

The ionization state and microphysics are governed by:

- m : mass of a hydrogen atom,
- X : ionization fraction (ratio of the ionized and total mass densities),
- ν, α : photoionization and recombination rates,
- σ_i : radiative photoionization cross-section,
- η : heating efficiency,
- J, J_∞ : EUV radiation intensity in the upper atmosphere, EUV radiation intensity incoming from the host star far away from the planet,
- Q, Λ : radiative heating and cooling rates given in [10],
- Φ : gravitation potential given in [11].

Gas pressure consisting of partial pressures of the neutral and ionized components is given by

$$P = \rho(1 + X)k_B T/m,$$

where k_B is the Boltzmann constant.

The gravitational potential Φ incorporates three key components: planetary gravity, tidal forces from the host star, centrifugal effects from system rotation. This formulation follows the Roche lobe approximation given by N. Erkaev, H. Lammer et al. in [11].

The heating efficiency η , cross section for photoionization of hydrogen σ_i , photoionization rate ν and recombination rate α are estimated by R. Murray-Clay et al. in [10].

The equations (2.1 – 2.4) represent conservation of mass, radial momentum, angular momentum, and entropy, respectively. The equations (2.6) and (2.7) describe the production of ions and the absorption of ultraviolet radiation from the host star, respectively.

The numerical solution of the governing equations yields a transonic atmospheric outflow into interplanetary space. The hydrogen envelope, heated by intense stellar irradiation, expands radially outward, eventually approaching the Roche lobe boundary [12].

The dayside mass-loss rate is determined by integrating the radial mass flux over the dayside semisphere:

$$L_{\text{day}} = \int_0^{\pi/2} L_m(\theta) \sin \theta d\theta, \quad \text{where} \quad L_m(\theta) = 2\pi\rho v_r(R_m, \theta)R_m^2 \quad (2.8)$$

represents the angular-dependent mass flux through a spherical surface of radius r .

The meridional mass-loss rate through the plane ($\theta = \pi/2$) representing the mass flux to the nightside of the planet is given by:

$$L_{\text{night}}(\theta) = \int_{R_s}^{R_m} L_m(r)r dr, \quad \text{where} \quad L_m(r) = 2\pi\rho v_\theta(r, \pi/2), \quad (2.9)$$

where R_m and R_s are the radial distances to the upper boundary of the computation domain and to the sonic point, respectively. Thus, the total mass-loss rate is

$$L_{\text{tot}} = L_{\text{day}} + L_{\text{night}}. \quad (2.10)$$

2.1. Dimensionless equations

For numerical tractability, we introduce the following dimensionless variables through characteristic normalization:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P/(n_0 k_B T_0), \quad \tilde{\rho} = \rho/(n_0 m), \quad \tilde{T} = T/T_0, \quad \tilde{t} = t v_{T_0}/R_{pl}, \\ \tilde{r} &= r/R_{pl}, \quad \tilde{v}_r = v_r/v_{T_0}, \quad \tilde{v}_\theta = v_\theta/(\tilde{r} v_{T_0}), \quad v_{T_0} = \sqrt{k_B T_0/m}, \\ \tilde{\nu} &= \nu R_{pl}/v_{T_0}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha n_0 R_{pl}/v_{T_0}, \quad \tilde{J} = J/J_0, \quad \tilde{\Phi} = \Phi/v_{T_0}^2. \end{aligned}$$

Here $n_0, \rho_0, T_0, v_{T_0}$ are the number density, mass density, effective temperature and thermal velocity at the lower boundary near the planet, where the radial distance is equal to the planet radius R_{pl} . J_0 is the EUV radiation intensity at the upper boundary of the computational domain.

The governing equations can be rewritten in dimensionless form as

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{v}_r \tilde{r}^2)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{v}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\tilde{\rho} \tilde{v}_\theta \cos \theta}{\tilde{r}^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_\theta^2}{\tilde{r}^3}, \\
 \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta}, \\
 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_r \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta} &= \frac{(\gamma - 1)}{\tilde{P}} \cdot (\tilde{Q} - \tilde{\Lambda}), \\
 \tilde{Q} = \tilde{Q}_0 \tilde{\rho} (1 - X) \tilde{J}, \quad \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 \tilde{\rho}^2 X (1 - X) \exp\left(-\frac{b}{\tilde{T}}\right), \\
 \frac{\partial X}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_r \frac{\partial X}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}^2} \frac{\partial X}{\partial \theta} &= \tilde{\nu} (1 - X) \tilde{J} - \tilde{\alpha} X^2 \tilde{\rho}, \\
 \cos \theta \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\sin \theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \theta} &= a \tilde{\rho} \tilde{J}, \\
 a = n_0 R_{pl} \sigma_i, \quad b = \frac{118348}{T_0}, \quad \tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 \frac{n_0 R_{pl}}{m V_0^3}, \quad \tilde{Q}_0 = \eta \sigma_i J_\infty \frac{R_{pl}}{m V_0^3}.
 \end{aligned}$$

2.2. Boundary and initial conditions

In this study, we adopt the system parameters of the solar-type host star TOI-421 and its warm, low-density sub-Neptune TOI-421b. The TOI-421 system was discovered in 2020, with initial system parameters reported in [13]. Subsequent refinements of these characteristics were presented in [14]. Most recently, JWST observations have enabled detailed atmospheric characterization of this exoplanet, as documented in [15]. A transmission spectrum reveals an atmosphere dominated by H/He with detectable molecular species including H_2O at near-solar abundances ($X_{H_2O} \sim 10^{-3}$ to 10^{-4}), along with tentative detections of SO_2 , CO , but no evidence of CO_2 or CH_4 [15]. The resulting atmospheric composition indicates that TOI-421b has a primary atmosphere, which under the influence of intense stellar radiation experiences hydrodynamic escape.

Some planet characteristics taken from [14] are presented in Table 2.1, where M_\oplus, R_\oplus are the Earth mass and radius, respectively, and M_{pl}, R_{pl} are the mass and radius of TOI-421b. T_0 is the effective temperature and J_∞ is the EUV fluxes at the distance of planet d_s . We used pressure $P_0 = 0.5$ Pa similarly as in [13].

Таблица 2.1. Планетарные характеристики TOI-421b
Table 2.1. Planetary characteristics of TOI-421b

M_{pl}/M_\oplus	R_{pl}/R_\oplus	T_0 , K	orbital distance, AU	J_∞ , J m ⁻² s ⁻¹
6.7	2.64	922	0.0554	7452×10^{-3}

The computational domain employs a spherical coordinate system with two distinct grid configurations:

- A non-uniform radial grid with refinement toward the planetary surface:

$$\omega_{\Delta r} = \left\{ r_i = (R_m)^{\xi_i} \mid \xi_i = \frac{i}{M}, i = \overline{1, M} \right\}.$$

- A uniform angular grid in the polar direction:

$$\omega_{\Delta \theta} = \left\{ \theta_j = \frac{(N-j)\pi}{2N} \mid j = \overline{0, N} \right\}.$$

The time stepping follows the Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) stability criterion.

We set the lower boundary fixed at the base of the thermosphere [16–18] with the dimensionless constant values

$$\tilde{\rho}_{1,j} = 1, \quad \tilde{T}_{1,j} = 1, \quad \tilde{v}_{r_{1,j}} = \tilde{v}_{r_{2,j}}, \quad \tilde{v}_{\theta_{1,j}} = \tilde{v}_{\theta_{2,j}}, \quad \tilde{r}_1 = 1, \quad j = \overline{0, N},$$

where the first index indicates the discretization by radius, the second by angle.

The upper boundary is assumed at about $25R_{pl}$ and we set the free boundary conditions as follows

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{M,j} &= \tilde{\rho}_{M-1,j}, & \tilde{T}_{M,j} &= \tilde{T}_{M-1,j}, & \tilde{v}_{r_{M,j}} &= \tilde{v}_{r_{M-1,j}}, \\ \tilde{v}_{\theta_{M,j}} &= \tilde{v}_{\theta_{M-1,j}}, & \tilde{r}_M &= 25, & j &= \overline{0, N}. \end{aligned}$$

The meridional velocity component is set to zero along the substellar line, increasing smoothly with the angular deviation from this axis. All other hydrodynamic parameters (density, temperature, radial velocity) remain unconstrained at this boundary. Similarly, free boundary conditions are imposed at the terminator.

While these conditions are well-suited for axisymmetric simulations, they may break down due to planetary orbital motion – an effect that can only be fully captured in three-dimensional models.

The initial conditions were derived from physical parameter profiles obtained in prior 1D simulations [17–18]. Additionally, the meridional velocity was initialized to zero throughout the entire computational domain. It is noteworthy that these initial conditions enable significantly faster convergence to a steady-state solution in the 2D system compared to analogous initial conditions applied to the 1D case. Furthermore, obtaining the 1D steady-state solution employs program parallelization that can be efficiently executed on conventional workstations. Consequently, the 2D steady-state solution can also be achieved within reasonable computational time without requiring high-performance supercomputing resources.

3. Numerical methods

This study employs a compact fourth-order MacCormack-type scheme combined with a fourth-order Runge-Kutta temporal integration [11–12], whose computational advantages have been demonstrated in [9–10] for 1D models. The compact MacCormack-type scheme 4/2 is used in the radial direction, and a finite-difference approximation of the first-order derivative is used in the angular direction. The key advantage of employing this compact scheme lies in its capability to perform computations at the maximum $CFL = 1.0$, ensuring both rapid convergence and numerical stability.

The computational domain utilizes a spherical grid (Fig. 3.1a), but to compute the radiation intensity propagating through the atmosphere along straight rays (Fig. 3.1b), we implement the method of characteristics with spherical grid interpolation. The geometric configuration of the characteristic rays is illustrated in Fig. 3.1c.

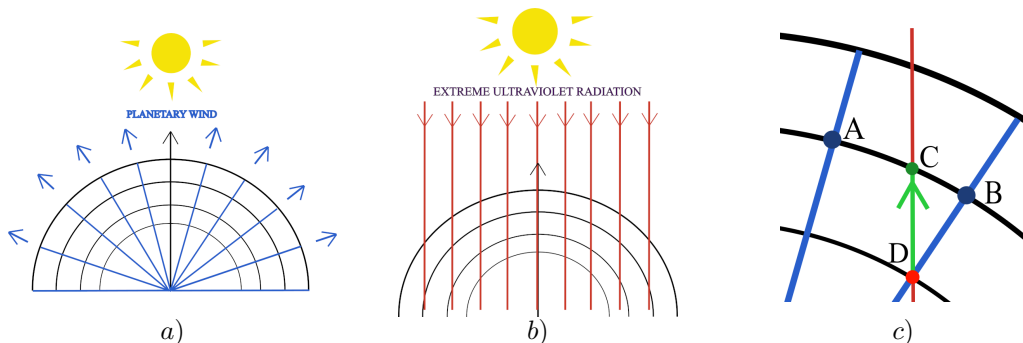


Рис. 3.1. Сетки для расчетов: а) расчетная сетка: сферическая геометрия области моделирования, б) геометрия модели: экстремальное ультрафиолетовое (EUV) излучение, проникающее в верхние слои атмосферы, в) расчетная сетка с характеристическими линиями: стрелка указывает характеристику, выпущенную вверх из узла “D” (зеленая)

Fig. 3.1. Grids for calculations: a) computational grid: spherical geometry of the simulation domain, b) model geometry: EUV radiation entering the upper atmosphere, c) computational grid with characteristic lines: the arrow indicates a characteristic emanating upward from node “D” (green)

To compute the radiation intensity values at the nodes of a spherical grid using equation 3.1, an upward characteristic is traced from each node. As illustrated in Fig. 3.1c, point D represents such a node on the spherical grid. The two nearest values of density and ionized particle fraction (marked as points A and B) are used to perform linear interpolation at point C. This procedure effectively transfers data from the spherical grid to a Cartesian grid to determine the radiation intensity. The interpolated value at point C is then utilized to calculate the radiation intensity at the original spherical grid node (point D). Finally, all functions on the spherical grid are updated, accounting for the two-dimensional nature of the radiation intensity.

$$\frac{dJ}{dX} = \frac{\sigma_i \rho_0 R_{pl}}{m} \tilde{\rho} J. \quad (3.1)$$

4. Modelling results

The calculations were performed on several grids:

1. $M = 2000$, $N = 50$; 2. $M = 2000$, $N = 100$; 3. $M = 3000$, $N = 50$;
4. $M = 3000$, $N = 100$; 5. $M = 4000$, $N = 50$; 6. $M = 4000$, $N = 100$.

All plots are presented for the coarsest grid 1.

The atmosphere of a planet can be divided into several layers (Figure 4.1):

- Lower atmosphere $r = 1 - 1.8R_{pl}$;
- Photosphere $r > 2.15R_{pl}$;
- Superdonic region $r > 1.8R_{pl}$, where flow becomes supersonic and hydrodynamic wind forms;
- Roche lobe boundary $r \approx 10R_{pl}$;
- Exobase $r > 25R_{pl}$, where the average free path of a molecule $\lambda(z_{ex})$ becomes comparable to the altitude scale $H(z_{ex})$.

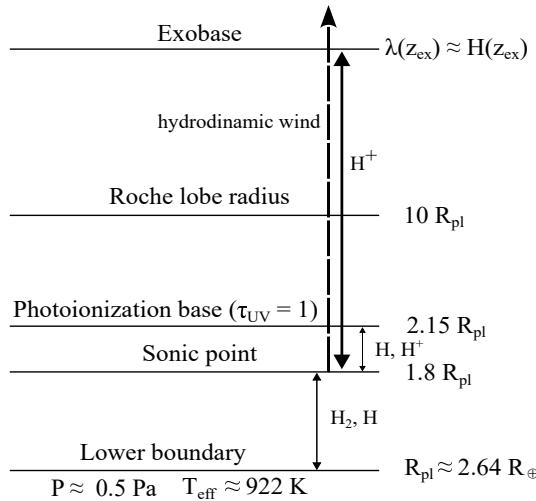


Рис. 4.1. Для планеты TOI-421b поверхность с оптической глубиной $\tau = 1$ расположена на $r \approx 2.15R_{pl}$. Звуковая точка находится на отметке $r \approx 1.8R_{pl}$, и выше этой точки формируется гидродинамический ветер. Граница полости Роша — $r \approx 10R_{pl}$

Fig. 4.1. For a planet TOI-421b the surface with optical depth $\tau = 1$ is located $r \approx 2.15R_{pl}$. The sonic point lies at $r \approx 1.8R_{pl}$ and above this point the hydrodinamic wind forms. The Roche lobe boundary is at $r \approx 10R_{pl}$

The results of our numerical simulations demonstrate the variations of atmospheric parameters depending on the radial distance and angle in the case of supersonic outflow. For example, Figure 4.2 shows the atmospheric heating rate in dependence on the radial distance and zenith angle. The atmospheric heating rate peaks at the substellar line and then decreases with increasing angle θ . This occurs because the maximum *EUV* radiation intensity is observed at the substellar line, where it reached maximum at approximately $\tilde{r} \approx 1.3R_{pl}$ (Fig. 4.2*b*). At a fixed radial distance, the heating rate decreases significantly with increasing angle θ (Fig. 4.2*a*). This occurs because the maximum *EUV* radiation intensity is observed at the substellar line. In this region, the accumulated energy from stellar radiation raises the gas temperature to its peak value, as seen in Figure 4.3*a*. Note that the normalized temperature exhibits minimal variation with zenith angle, indicating weak dependence on incident star flux for temperature. The atmosphere heats up through absorption of *EUV* radiation, expands, and increases its population of ionized hydrogen atoms before eventually

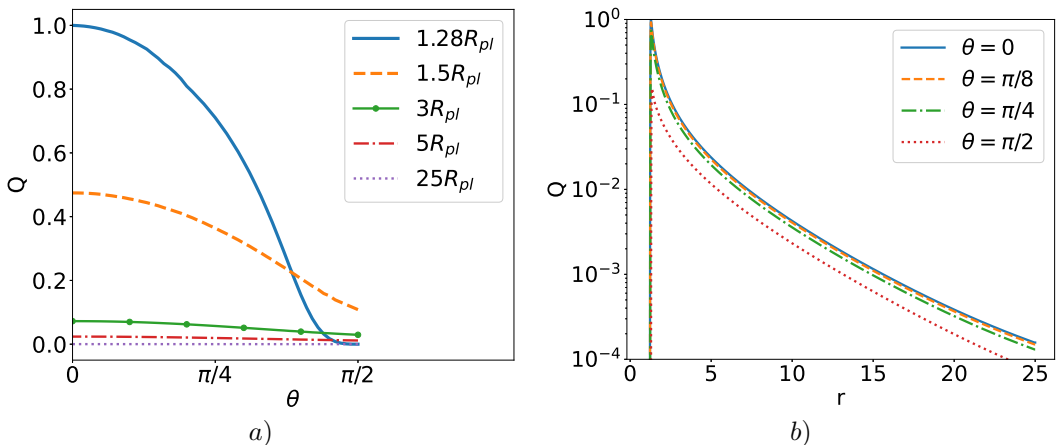


Рис. 4.2. Зависимость в логарифмическом масштабе нормализованной объемной скорости нагрева от: *a)* зенитного угла, *b)* радиального расстояния. Скорость нагрева учитывает поглощение атмосферой звездного излучения и нормализована относительно ее максимального значения

Fig. 4.2. Dependence on a logarithmic scale of the normalized volumetric heating rate on: *a)* zenith angle, *b)* radial distance. The heating rate accounts for atmospheric absorption of star radiation and is normalized to its maximum value

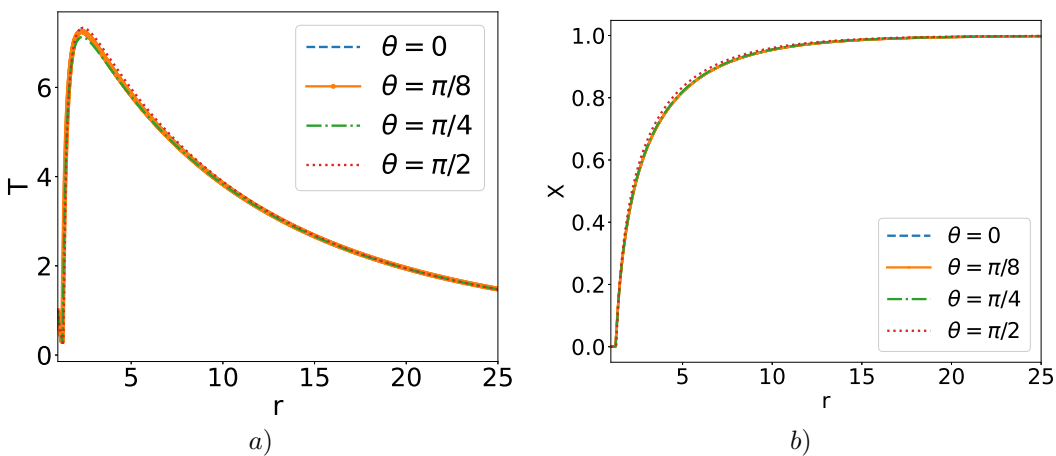


Рис. 4.3. *a)* Нормированная температура в зависимости от радиального расстояния, *b)* доля ионизированных частиц в зависимости от радиального расстояния

Fig. 4.3. *a)* Dependence of normalized temperature on radial distance, *b)* the fraction of ionized particles as a function of radial distance

cooling down. As seen in Figure 4.3b, the 50% ionization threshold is reached at a distance of $r \approx 2.28R_{pl}$, marking the transition to a predominantly ionized atmospheric layer.

Figure 4.4a presents the atmospheric pressure as function of the radial distance. The pressure first decreases exponentially in the subsonic region near the planet's boundary, and

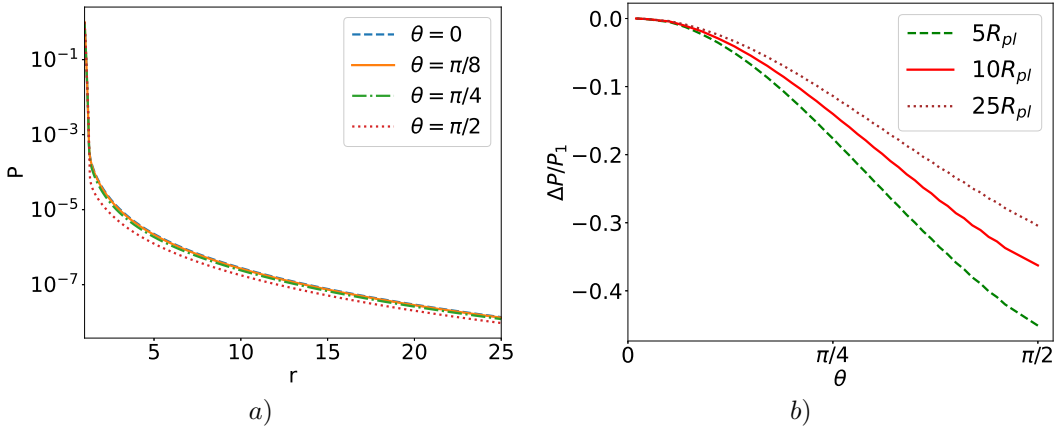


Рис. 4.4. *a)* Нормализованное давление как функция радиального расстояния для различных зенитных углов, *b)* изменение давления, отнесенного к его значению на оси симметрии P_1 , относительно угла на трех радиальных расстояниях

Fig. 4.4. *a)* The normalized pressure as function of the radial distance for different zenith angles, *b)* variation of the pressure normalized to its substellar value P_1 with respect to the angle at three radial distances

then its behavior becomes much flatter in the supersonic region. Also Figure 4.4*b* shows the relative change of the pressure with respect to zenith angle. Here $\Delta P = P - P_1$, where P_1 corresponds to the substellar axis at the same radial distance. The pressure gradient creates meridional flows, and, consequently, the meridional velocity increases with the deviation angle from the substellar point, as illustrated in Figures 4.5.

The Figure 4.6*a* shows the radial velocity v_r as function of the radial distance for different zenith angles. The velocity profiles corresponding to various angles are rather close to each other. The dimensional maximum velocity reached at upper boundary is 33 km/s.

The total dimensionless mass loss rate on the dayside was computed using Eq. (2.8), with its zenith-angle distribution shown in Figure 4.5*b*. The dimensional mass loss rates are:

- Dayside: $L_{day} \approx 1.0 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1}$ (Eq. (2.8));
- Nightside: $L_{night} \approx 0.449 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1}$ (Eq. (2.9));
- Total: $L_{tot} \approx 1.449 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1}$ (Eq. (2.10)).

Comparison of the mass flow rates obtained using grid 1 ($M = 2000, N = 50$) and the finest grid 6 ($M = 4000, N = 100$) shows that the mass flow rate on the dayside differs by 2%, while the total mass flow rate differs by approximately 1%. At the same time, the computation time on the finest grid is more than twice that on the coarsest grid. This leads to the conclusion that it is reasonable to use less detailed grids to obtain qualitatively accurate results faster.

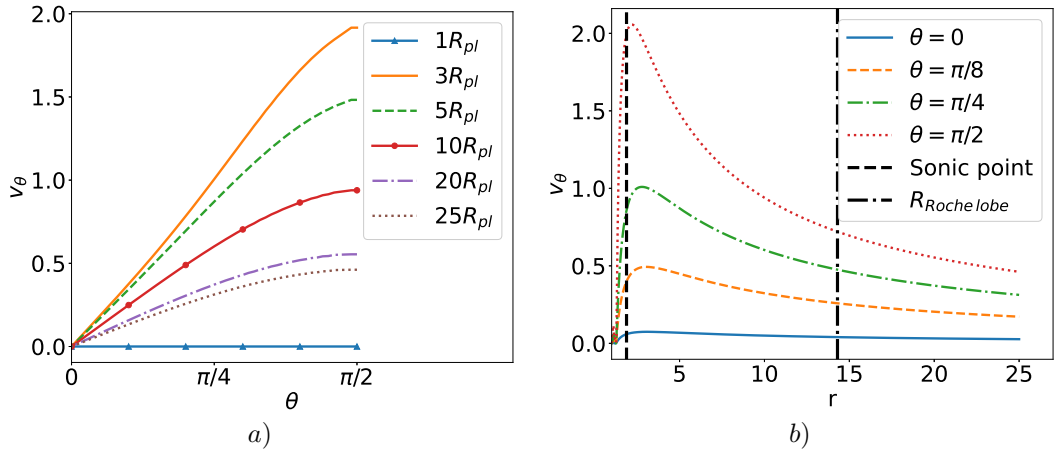


Рис. 4.5. а) Зависимость меридиональной скорости от зенитного угла, б) зависимость меридиональной скорости от радиального расстояния с обозначением точки, звуковой скорости (левая вертикальная линия) и границы полости Роша (правая вертикальная линия)

Fig. 4.5. а) Dependence of the meridional velocity on the zenith angle, б) dependence of the meridional velocity on the radial distance with the designation of the point corresponding to the speed of sound (left vertical line) and the boundary of the Roche lobe (right vertical line)

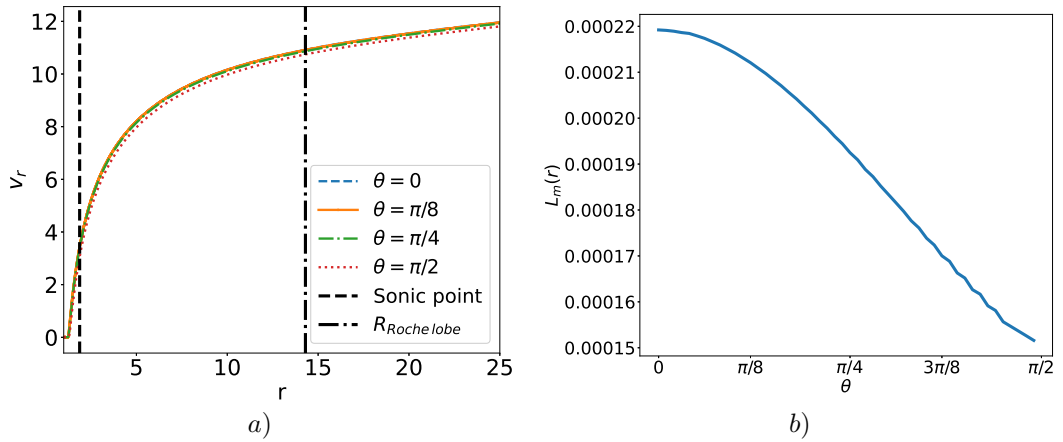


Рис. 4.6. а) Профиль радиальной скорости в зависимости от радиального расстояния. Вертикальные линии обозначают точки скорости звука и границы полости Роша, б) распределение потока массы в безразмерных единицах по зенитному углу

Fig. 4.6. а) Radial velocity profile as a function of radial distance. Vertical lines mark sonic point and the Roche lobe boundary, б) distribution of mass flux in dimensionless units by zenith angle

5. Summary

Our study concerns two-dimensional formulation of the problem of outflow of a planet's atmosphere, which is caused by absorption of extreme ultraviolet radiation incoming from K. D. Gorbunova, N. V. Erkaev. 2D model of the hydrodynamic escape of planetary atmospheres

the host star. A system of hydrodynamic equations in the Euler form was used in combination with the entropy production equation, which describes in detail the thermodynamics of the atmospheric gas. A stationary solution in spherical coordinates was obtained by the time relaxation method using an explicit 4-step in time numerical scheme of the MacCormack type with a compact approximation of derivatives with respect to the radius, which provides stability at the Courant-Friedrichs-Lewy number equal to 1. A sufficiently rapid establishment of the stationary outflow regime is reached by setting as initial state the spherically symmetric distribution of density, radial velocity and temperature, previously found from the one-dimensional model. A recently discovered exoplanet TOI-421b was chosen as a particular object of application of our model, for which two-dimensional features of the atmospheric outflow were analyzed. It is shown that the temperature, radial velocity, pressure and density of the atmospheric gas are monotonically decreasing functions of the zenith angle for a fixed radial distance. In this case, the angular dependence is most strongly pronounced for the density and pressure. The meridional component of the velocity increases monotonically with increasing zenith angle and provides the entrainment of atmospheric gas to the night side. In this case, the total mass flow to the day and night sides is about $1.449 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1}$.

Acknowledgements. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2025-1606).

REFERENCES

1. E. N. Parke, “Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields”, *Astrophysical Journal*, **128** (1958), 664 p. DOI: 10.1086/146097
2. L. A. Dos Santos, A. A. Vidotto, Shreyas Vissapragada, M. K. Alam, R. Allart, V. Bourrier, J. Kirk, J. V. Seidel, D. Ehrenreich, “p-winds: An open-source Python code to model planetary outflows and upper atmospheres”, *Astronomy & Astrophysics*, **659**:A62 (2022). DOI: 10.1051/0004-6361/202142038
3. P. McCreery, L. A. Dos Santos, N. Espinoza, R. Allart, J. Kirk, “Tracing the Winds: A Uniform Interpretation of Helium Escape in Exoplanets from Archival Spectroscopic Observations”, *The Astrophysical Journal*, **980** (2025), 125. DOI: 10.3847/1538-4357/ada6b9
4. N. V. Erkaev, H. Lammer, P. Odert, K. G. Kislyakova, C. P. Johnstone, M. Güdel, M. L. Khodachenko, “EUV-driven mass-loss of protoplanetary cores with hydrogen-dominated atmospheres: the influences of ionization and orbital distance”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **460**:2 (2016), 1300–1309. DOI: 10.1093/mnras/stw935
5. N. V. Erkaev, M. Scherf, O. Herbort, H. Lammer, P. Odert, D. Kubyshkina, M. Leitzinger, P. Woitke, C. O'Neill, “Modification of the radioactive heat budget of Earth-like exoplanets by the loss of primordial atmospheres”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **518**:3 (2023), 3703–3721. DOI: 10.1093/mnras/stac3168

6. A. G. Berezutsky, I. F. Shaikhislamov, M. S. Rumenskikh, M. L. Khodachenko, H. Lammer, I. B. Miroshnichenko, “On the transit spectroscopy features of warm Neptunes in the TOI-421 system, revealed with their 3D aeronomy simulations”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **515**:1 (2022), 706–715. DOI: 10.1093/mnras/stac1633
7. D. Kubyshkina, A. A. Vidotto, “How does the mass and activity history of the host star affect the population of low-mass planets?”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **50**:2 (2021), 2034–2050. DOI: 10.1093/mnras/stab897
8. D. Kubyshkina, A. A. Vidotto, C. Villarreal D’Angelo, S. Carolan, G. Hazra, I. Carleo, “Atmospheric mass-loss and stellar wind effects in young and old systems – I. Comparative 3D study of TOI-942 and TOI-421 systems”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **510**:2 (2022), 2111–2126. DOI: 10.1093/mnras/stab3594
9. D. Kubyshkina, A. A. Vidotto, C. Villarreal D’Angelo, S. Carolan, G. Hazra, I. Carleo, “Atmospheric mass loss and stellar wind effects in young and old systems – II. Is TOI-942 the past of TOI-421 system?”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **510**:2 (2022), 3039–3045. DOI: 10.1093/mnras/stab3620
10. R. A. Murray-Clay, E. I. Chiang, N. Murray, “Atmospheric escape from hot Jupiters”, *The Astrophysical Journal*, **693** (2009), 23–42. DOI: 10.1088/0004-637X/693/1/23
11. N. V. Erkaev, Yu. N. Kulikov, H. Lammer, F. Selsis, D. Langmayr, G. F. Jaritz, H. K. Biernat, “Roche lobe effects on the atmospheric loss from “Hot Jupiters””, *Astronomy & Astrophysics*, **472**:1 (2007), 329–334. DOI: 10.1051/0004-6361:20066929
12. A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, ““Osiris”(HD209458b), an Evaporating Planet”, *Extrasolar Planets: Today and Tomorrow, ASP Conference Proceedings*. Vol. 321 (Institut D’Astrophysique de Paris, France), 2004, 152–160, arXiv: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0312382>.
13. I. Carleo, D. Gandolfi, O. Barragán, *et al.*, “The multiplanet system TOI-421: A warm Neptune and a super puffy Mini-Neptune transiting a G9 V star in a visual binary”, *The Astronomical Journal*, **160**:3 (2020), 23 p. DOI: 10.3847/1538-3881/aba124
14. A. F. Krenn, D. Kubyshkina, L. Fossati, *et al.*, “Characterisation of the TOI-421 planetary system using CHEOPS, TESS, and archival radial velocity data”, *Astronomy & Astrophysics*, **686**:A301 (2024), 20 p. DOI: 10.1051/0004-6361/202348584
15. B. Davenport, E. M.-R. Kempton, M. C. Nixon, *et al.*, “TOI-421 b: A Hot Sub-Neptune with a Haze-free, Low Mean Molecular Weight Atmosphere”, *The Astrophysical Journal Letters*, **984**:L44 (2025), 12 p. DOI: 10.3847/2041-8213/adcd76
16. N. V. Erkaev, H. Lammer, *et al.*, “XUV exposed non-hydrostatic hydrogen-rich upper atmospheres of terrestrial planets. Part I: Atmospheric expansion and thermal escape”, *Astrobiology Journal*, **13** (2013), 1011–1029. DOI: 10.1089/ast.2012.0957
17. N. V. Erkaev, K. D. Gorbunova, “Hydrodynamic models of outflow of the planetary atmospheres”, *Computational technologies*, **29**:1 (2024), 5–17 (In Russ). DOI: 10.25743/ICT.2024.29.1.002

18. N. V. Erkaev, K. D. Gorbunova, “Magnetic Barrier in Front of Exoplanets Interacting with Stellar Wind”, *Problems of Geocosmos–2022*. Vol. ICS 2022, Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences, eds. A. Kosterov, E. Lyskova, I. Mironova, S. Apatenkov, S. Baranov, Springer, Cham, 2023, 251–265 DOI: 10.1007/978-3-031-40728-4_18.
19. R. Hixon, E. Turkel, “Compact Implicit MacCormack-Type Schemes with High Accuracy”, *Journal of Computational Physics*, **158** (2000), 51–70. DOI: 10.1006/jcph.1999.6406
20. K. D. Gorbunova, N. V. Erkaev, “Compact MacCormack-type Schemes Applied for Atmospheric Escape Problem”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **15:4** (2022), 500–509. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-4-500-509

Submitted 05.06.2025; Revised 06.10.2025; Accepted

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parker E. N. Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields. *Astrophysical Journal*. 1958. Vol. 128. P. 664. DOI: 10.1086/146097
2. Dos Santos L. A., Vidotto A. A., Vissapragada S., Alam M. K., Allart R., Bourrier V., Kirk J., Seidel J. V., Ehrenreich D. p-winds: An open-source Python code to model planetary outflows and upper atmospheres. *Astronomy & Astrophysics*. 2022. Vol. 659, no. A62. DOI: 10.1051/0004-6361/202142038
3. McCreery P., Dos Santos L. A., Espinoza N., Allart R., Kirk J. Tracing the Winds: A Uniform Interpretation of Helium Escape in Exoplanets from Archival Spectroscopic Observations. *The Astrophysical Journal*. 2025. Vol. 980. P. 125. DOI: 10.3847/1538-4357/ada6b9
4. Erkaev N. V., Lammer H., Odert P., Kislyakova K. G., Johnstone C. P., Güdel M., Khodachenko M. L. EUV-driven mass-loss of protoplanetary cores with hydrogen-dominated atmospheres: the influences of ionization and orbital distance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. Vol. 460, no. 2. P. 1300–1309. DOI: 10.1093/mnras/stw935
5. Erkaev N. V., Scherf M., Herbort O., Lammer H., Odert P., Kubyshkina D., Leitzinger M., Woitke P., O’Neill C. Modification of the radioactive heat budget of Earth-like exoplanets by the loss of primordial atmospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2023. Vol. 518, no. 3, P. 3703–3721. DOI: 10.1093/mnras/stac3168
6. Berezutsky A. G., Shaikhislamov I. F., Rumenskikh M. S., Khodachenko M. L., Lammer H., Miroshnichenko I. B. On the transit spectroscopy features of warm Neptunes in the TOI-421 system, revealed with their 3D aeronomy simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. Vol. 515, no. 1. P. 706–715. DOI: 10.1093/mnras/stac1633

7. Kubyshkina D., Vidotto A. A. How does the mass and activity history of the host star affect the population of low-mass planets? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021. Vol. 50, no. 2. P. 2034–2050. DOI: 10.1093/mnras/stab897
8. Kubyshkina D., Vidotto A. A., Villarreal D'Angelo C., Carolan S., Hazra G., Carleo I. Atmospheric mass-loss and stellar wind effects in young and old systems – I. Comparative 3D study of TOI-942 and TOI-421 systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. Vol. 510, no. 2. P. 2111–2126. DOI: 10.1093/mnras/stab3594
9. Kubyshkina D., Vidotto A. A., Villarreal D'Angelo C., Carolan S., Hazra G., Carleo I. Atmospheric mass loss and stellar wind effects in young and old systems – II. Is TOI-942 the past of TOI-421 system? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. Vol. 510, no. 2. P. 3039–3045. DOI: 10.1093/mnras/stab3620
10. Murray-Clay R. A., Chiang E. I., Murray N. Atmospheric escape from hot Jupiters. *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 693. P. 23–42 DOI: 10.1088/0004-637X/693/1/23
11. Erkaev N. V., Kulikov Yu. N., Lammer H., et al. Roche lobe effects on the atmospheric loss from "Hot Jupiters". *Astronomy & Astrophysics*. 2007. Vol. 472, no. 1. P. 329–334. DOI: 10.1051/0004-6361:20066929
12. Vidal-Madjar A., Lecavelier des Etangs A. "Osiris" (HD209458b), an evaporating planet. *Extrasolar Planets: Today and Tomorrow, ASP Conference Proceedings*. 2004. Vol. 321. P. 152–160. DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/0312382
13. Carleo I., Gandolfi D., Barragán O. The multiplanet system TOI-421: A warm Neptune and a super puffy Mini-Neptune transiting a G9 V star in a visual binary. *The Astronomical Journal*. 2020. Vol. 160. P. 114–137. DOI: 10.3847/1538-3881/aba124
14. Krenn A. F., Kubyshkina D., Fossati L. Characterisation of the TOI-421 planetary system using CHEOPS, TESS, and archival radial velocity data. *Astronomy & Astrophysics*. 2024. Vol. 686, no. A301, 20 p. DOI: 10.1051/0004-6361/202348584
15. Davenport B., Kempton E. M.-R., Nixon M. C. TOI-421 b: A Hot Sub-Neptune with a Haze-free, Low Mean Molecular Weight Atmosphere. *The Astrophysical Journal Letters*. 2025. Vol. 984, no. L44. 12 p. DOI: 10.3847/2041-8213/adcd76
16. Erkaev N. V., Lammer H. XUV exposed non-hydrostatic hydrogen-rich upper atmospheres of terrestrial planets. Part I: Atmospheric expansion and thermal escape. *Astrobiology Journal*. 2013. Vol. 13. P. 1011–1029. DOI: 10.1089/ast.2012.0957
17. Еркаев Н. В., Горбунова К. Д. Компактная разностная схема для гидродинамической модели истечения атмосфер планет // *Вычислительные технологии*. 2024. Т. 29, № 1. С. 5–17. DOI: 10.25743/ICT.2024.29.1.002
18. Erkaev N. V., Gorbunova K. D. Magnetic Barrier in Front of Exoplanets Interacting with Stellar Wind. *Problems of Geocosmos-2022. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences*. Cham: Springer, 2023. Vol. ICS 2022. P. 251–265. DOI: 10.1007/978-3-031-40728-4_18

19. Hixon R., Turkel E. Compact Implicit MacCormack-Type Schemes with High Accuracy. *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 158. P. 51–70. DOI: 10.1006/jcph.1999.6406
20. Gorbunova K.D., Erkaev N.V. Compact MacCormack-type Schemes Applied for Atmospheric Escape Problem. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 500–509. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-4-500-509

*Поступила 05.06.2025; доработана после рецензирования 06.10.2025;
принята к публикации*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.517-538

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Лента достижимости J-сети, моделирующей применение алгоритма оптимизации последовательности отбора к одной задаче

А. П. Дмитриев¹, Т. А. Лавина¹, Р. И. Баженов², Т. Н. Копышева¹¹ ЧГУ им. И.Н. Ульянова (г. Чебоксары, Российская Федерация) ²Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
(г. Биробиджан, Российская Федерация)

Аннотация. Распределение учебной нагрузки на кафедре ранее было формализовано как задача комбинаторной дискретной оптимизации, и для её решения эффективным является применение алгоритма оптимизации последовательности отбора. Этот алгоритм разработан авторами в более ранних работах и использует, в частности, принципы алгоритма имитации отжига. Разработана блок-схема для данного алгоритма с целью наглядного представления работы такого алгоритма, необходимого для дальнейшего понимания излагаемого материала. Для моделирования динамики алгоритма разработана математическая модель на основе одной из разновидностей цветных сетей Петри – J-сети. Детально описана логика работы этой модели. Построена лента достижимости J-сети, содержащая 269 маркировок, часть из которых, представляющая характерные особенности, приводится в статье. Для сокращения размера ленты достижимости приняты некоторые допущения. Отбраковка недостижимых маркировок производится путем дополнительного анализа наборов неравенств – результатов сравнения значений целевой функции. В связи со значительным количеством анализируемых неравенств разработано программное средство для решения систем неравенств, алгоритм работы которого обладает полиномиальной временной сложностью. Проведен анализ ленты достижимости, который показывает корректность работы алгоритма оптимизации. Научная новизна: впервые построена лента достижимости для J-сети.

Ключевые слова: лента достижимости, оптимизация последовательности отбора, дискретная оптимизация, учебная нагрузка, J-сеть, сеть Петри

Для цитирования: Дмитриев А. П., Лавина Т. А., Баженов Р. И., Копышева Т. Н. Лента достижимости J-сети, моделирующей применение алгоритма оптимизации последовательности отбора к одной задаче // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 517–538. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.517-538

Об авторах:

Дмитриев Александр Петрович, к. т. н., доцент кафедры компьютерных технологий, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И. Н. Ульянова» (428015, Россия, г. Чебоксары, Московский проспект, д. 15), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7345-9790>, dimitrie1@yandex.ru

Лавина Татьяна Ароновна, д. пед. наук, заведующий кафедрой компьютерных технологий, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И. Н. Ульянова» (428015, Россия, г. Чебоксары, Московский проспект, д. 15), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7622-2246>, tlavina@mail.ru



Баженов Руслан Иванович, к. пед. наук, заведующий кафедрой информационных систем, математики и правовой информатики, ФГБОУ ВО Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема (679015, Россия, г. Биробиджан, ул. Широкая, д. 70а), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2668-1142>, r-i-bazhenov@yandex.ru

Копышева Татьяна Николаевна, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой математического и аппаратного обеспечения информационных систем, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И. Н. Ульянова» (428015, Россия, г. Чебоксары, Московский проспект, д. 15), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3392-1431>, tn_pavlova@mail.ru

Original article

MSC2020 90-10

Reachability tape of J-net simulating the application of selection sequence optimization algorithm to single problem

A. P. Dimitriev¹, T. A. Lavina¹, R. I. Bazhenov², T. N. Kopysheva¹

¹*Chuvash State University (Cheboksary, Russian Federation)*

²*Sholom-Aleichem Priamursky State University (Birobidzhan, Russian Federation)*

Abstract. In Russian universities, the problem of distributing the departmental educational load is annually resolved. This problem belongs to the class of combinatorial discrete optimization problems. To solve some problems of this class, it is effective to use the selection sequence optimization algorithm developed by the authors earlier. This article provides a flowchart of this algorithm for the purpose of its visual presentation, which is aimed at further understanding of the material presented. Modeling the dynamics of the algorithm is carried out using a mathematical model built on the basis of one of the varieties of colored Petri nets - that is, on the J-net. The operating logic of this model is described in detail. A reachability tape has been built for this J-net. It contains 269 markings, some of which, representing the main nuances, are presented in the paper in table form. The reachability tape has a significant size even with a minimal non-trivial amount of simulated data, so unattainable markings are rejected by additional analysis of some inequalities sets. Due to the difficulty of contemplative analysis of inequalities' systems, a software tool has been developed for solving these systems, whose algorithm has polynomial time complexity. Analysis of the reachability tape shows the correct operation of the optimization algorithm. Scientific novelty of the work is that for the first time, a reachability tape for the J-net has been constructed.

Keywords: reachability tape, selection sequence optimization, discrete optimization, educational load, J-net, Petri net

For citation: A. P. Dimitriev, T. A. Lavina, R. I. Bazhenov, T. N. Kopysheva. Reachability tape of J-net simulating the application of selection sequence optimization algorithm to single problem. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 517–538. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.517-538

About the authors:

Alexander P. Dimitriev, Ph.D. (Engineering), Associate professor, Department of Computer Technologies, Chuvash State University (15 Moskovsky av., Cheboksary 428015, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7345-9790>, dimitriev1@yandex.ru

Tatyana A. Lavina, Dr. Sci. (Pedagogy), Head of Department of Computer Technologies, Chuvash State University (15 Moskovsky av., Cheboksary 428015, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7622-2246>, tlavina@mail.ru

Ruslan I. Bazhenov, Ph. D. (Pedagogy), Head Department of Information Systems, Mathematics and Legal Informatics, Sholom-Aleichem Priamursky State University (70a Shirokaya St., Birobidzhan 679015, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2668-1142>, r-i-bazhenov@yandex.ru

Tatyana N. Kopysheva, Ph. D. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical and Hardware Support for Information Systems, Chuvash State University (15 Moskovsky av., Cheboksary 428015, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3392-1431>, tn_pavlova@mail.ru

1. Введение

Одним из методов моделирования динамики систем является использование сетей Петри. Исследователи применяют такой подход в самых разных областях и, в частности, при анализе организации учебного процесса в образовательных учреждениях. Так, в [1] с помощью цветных сетей Петри моделируется учебный план на уровне колледжа. В [2] дан обзор того, как цветные сети Петри могут использоваться для моделирования процессов высшего образования, а также на их основе разработана модель административного процесса на кафедре, модель курса и модель учебной дисциплины. В [3] на основе сетей Петри сформулирована модель, описывающая динамику обучения студентов университета и взаимодействия с учебным планом. В статье [4] предлагается обучение формальным методам с использованием цветных сетей Петри в Технологическом университете Суранари (Таиланд). В [5] на основе сетей Петри построена модель управления гражданским и политическим образованием в колледжах и университетах в Китае. В [6] сети Петри использованы при изучении применения преподавателями университета панели управления аналитикой обучения для онлайн-сотрудничества. В [7] с помощью сетей Петри смоделирован бизнес-процесс языкового института, преподающего английский, немецкий и французский языки, рабочий процесс модульного курса электронного обучения, учебный план и др.

Анализ поведения систем с помощью сетей Петри может осуществляться различными способами: запуск программной реализации Петри-машины, построение дерева достижимых состояний, составление ленты достижимости (ЛД) [8] и др. ЛД представляет дерево достижимости в табличном виде, делая его менее громоздким. В статье рассматривается построение и анализ ЛД для одного из расширений цветных сетей – J-сети, которые представляют собой подкласс синхронных цветных сетей Петри [9].

В качестве предметной области, которую моделирует J-сети, в работе используется оптимизация распределения учебной нагрузки научно-педагогических работников (НПР) кафедры при помощи одного из эффективных оптимизационных алгоритмов – алгоритма оптимизации последовательности отбора (АОПО) [10]. Это актуально, поскольку в вузах России кафедрами распределение учебной нагрузки педагогических работников производится ежегодно и является нетривиальной задачей. Нагрузка измеряется в академических часах и для отдельных педагогов, например, в ФГБОУ ВО «ЧГУ

им. И.Н. Ульянова», может распределяться на учебный год по четырем видам внутривузовских документов, называемых «Индивидуальный план» (ИП): штатная (основная) нагрузка, нагрузка по совместительству, почасовая нагрузка, прочая нагрузка, количество часов в которых обозначим соответственно S_1, S_2, S_3, S_4 .

Когда закончено распределение нагрузки между разными преподавателями, в тех случаях, когда у некоторого преподавателя значение нагрузки превышает максимально допустимую величину нагрузки по основному месту работы (у разных преподавателей эта величина разная), возникает задача распределения строк нагрузки между разными ИП одного и того же преподавателя, которая и рассматривается в статье. Необходимо соблюдать не только верхний предел в 900 часов за ставку, установленный Минобрнауки России (приказ № 1601 от 22 декабря 2014 г.), но и требования внутривузовских нормативных документов по планированию количества академических часов. Получение такого распределения – задача комбинаторной дискретной оптимизации. Её решению посвящено сравнительно немного работ, имеющих математическое обоснование. Г.П. Виноградовым и Н.В. Кирсановой [11] разработана математическая модель, но ничего не сообщается о программной реализации. В работе Д.А. Ивахненко [12] также детально изложена математическая модель, но нет реализации, а также не упоминаются прочая нагрузка и совместительство. В то же время существуют публикации с близкой темой, такие как статья С. Н. Султановой и С. В. Тархова [13], где, однако, рассмотрено распределение нагрузки между разными преподавателями, а не между ИП одного НПП. В работе авторов [10] разработаны не только теоретические предпосылки для получения оптимального распределения, но и программный продукт. Однако указанная работа является скорее прикладной, нежели теоретической. Для её теоретического обоснования актуальна разработка математического инструментария, позволяющего моделировать динамику такой дискретной системы, как АОПО.

Для решения представленной задачи комбинаторной оптимизации в статье [14] применялся генетический алгоритм типа Genitor [15].

В [10] для этого применён алгоритм оптимизации последовательности отбора [16], что более эффективно. В качестве последовательности отбора (этот термин при использовании в общем значении обозначим σ) будет использоваться σ элементов нагрузки для назначения вида ИП. АОПО реализует алгоритм имитации отжига [17], но не является его разновидностью.

Анализ работы АОПО при распределении учебной нагрузки можно произвести посредством J-сети с помощью ЛД, показывающей достижимые состояния этой сети.

Целью исследования является построение ленты достижимости для J-сети, моделирующей работу алгоритма оптимизации последовательности отбора при распределении учебной нагрузки.

2. Задача оптимизации распределения учебной нагрузки и алгоритм её приближенного решения

Для формализации постановки задачи, в соответствии с нормами в [14] выделены ограничения и критерии оптимальности следующим образом (здесь приводятся только с краткими пояснениями).

Вначале для каждого НПП задаются величины минимальной и максимальной допустимой нагрузки по четырём видам ИП, обозначаемые соответственно E_i и X_i : $E_i \leq S_i \leq X_i$, $i = 1, \dots, 4$. Для этого учитываются нормы значений по должностям,

доля ставки и работа на других кафедрах следующим образом. Предполагается, что задача распределения нагрузки на другой кафедре уже решена и предоставлены значения часов, которые там ведёт данный преподаватель, в виде константы y . Если он там ничего не ведёт, $y = 0$.

Обозначим как R_i , $i = \{1; 2\}$ доли ставки по первым двум видам ИП: $0 < R_1 \leq 1$; $0 < R_2 < 0,5$. Обычно преподаватель не ведёт нагрузку на другой кафедре, входящую в S_1 и S_2 , поэтому $X_1 = R_1 \times 900$, $X_2 = R_2 \times 900$. Однако такая нагрузка может входить в S_3 , для которой Учебно-методическим управлением установлено максимальное значение 300 часов. Поэтому $X_3 = 300 - y$. Установлено также $X_4 = 200$.

E_i определяется так: $E_i = R_i \times T$, $i = \{1; 2\}$, где T – значение минимальной нормы для должности данного НПР, например для доцента $T = 860$. Установлено $E_4 = 10$, а $E_3 = 10$, если $S_4 = 0$, и $E_3 = 299$, если $S_4 > 0$.

Правила заполнения ИП для некоторого НПР следующие.

1. Если $S_1 > X_1$, то избыток переводится в S_2 или в S_3 .
2. Должно выполняться $E_2 \leq S_2 \leq X_2$. Если для этого часов недостаточно, избыточные (см. п. 1) часы направляются только в S_3 , а если много, то в S_3 передаётся соответствующий избыток.
3. Должно выполняться неравенство $S_3 \leq 300$. Поэтому избыток S_3 переходит в S_4 . Но если $S_4 > 0$, то должно быть $S_3 \geq 299$.
4. Должно быть $S_4 \leq 200$. Избыток надо распределить между другими НПР, его нельзя оформлять в S_3 (см. предыдущее правило).
5. Нагрузку рекомендуется распределять примерно одинаково по двум полугодиям, т.е. отношения S_{i1}/S_{i2} рекомендуется иметь в пределах от $1/N_i$ до N_i , где N_i – задаваемые значения; $N_i \geq 1$, S_{i1} , S_{i2} – количество часов по S_i соответственно в первом и втором полугодиях.

Всё это унифицированно представлено в виде следующих правил для вычисления значения целевой функции F (исходно $F = 0$):

1. $S_i < E_i \rightarrow F := F + T_i \times (E_i - S_i)$, где $i = 1, \dots, 3$, T_i – задаваемые штрафные коэффициенты для выхода нагрузки за допустимые пределы.
2. $S_i > X_i \rightarrow F := F + T_i \times (S_i - X_i)$, $i = 1, \dots, 4$.
3. $S_1 + S_2 < E_1 + E_2 \rightarrow F := F + E_1 + E_2 - S_1 - S_2$.
4. $S_1 + S_2 > X_1 + X_2 \rightarrow F := F + S_1 + S_2 - X_1 - X_2$.
5. $(S_{i1} > 0) \cap (((S_{i2}/S_{i1}) < 1/N_i) \cup ((S_{i2}/S_{i1}) > N_i)) \rightarrow F := F + |S_{i1} - S_{i2}|/D_i$, где $i = 1, \dots, 4$, D_i – задаваемые штрафные коэффициенты для неравномерности распределения нагрузки по полугодиям; $D_i \geq 1$.
6. $(S_{i1} = 0) \cap (S_{i2} > 0) \rightarrow F := F + S_{i2}/D_i$, где $i = 1, \dots, 4$.

На этой основе сформулирована целевая функция F для задачи условной дискретной оптимизации:

$$F(X) \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$X \in R^n,$$

$$g_j(X) \leq 0, j = 1, \dots, p \text{ (неравенства), } p = 10,$$

$$h_k(X) = 0, k = 1, \dots, q \text{ (равенства), } q = 12,$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

x_i принадлежат дискретным или непрерывным множествам:

$x_1 = O_1, x_2 = O_2, \dots, x_C = O_C$; O_i – номер разновидности ИП для i -го элемента нагрузки: $O_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i = 1, \dots, C$;

$x_{n-4} = S_1; x_{n-3} = S_2; x_{n-2} = S_3; x_{n-1} = S_4; S_i \in R$ (R – множество действительных чисел), $i = 1, \dots, 4$;

$x_n = y; y \in R$ (R – множество действительных чисел);

$n = C + 5$; C – число элементов нагрузки, т.е. строк ИП, из которых состоит нагрузка;
 $C \in Z$ (Z – множество целых чисел);

при областных ограничениях $g_j(X) \leq 0$ либо $g_j(X) < 0$, $j = 1, \dots, 10$:

$$g_1(X) = C - 41 \leq 0; \quad g_2(X) = 1 - C < 0;$$

$$g_3(X) = y - 300 \leq 0; \quad g_4(X) = -y \leq 0;$$

$$g_5(X) = S_i - X_i \leq 0, \quad g_6(X) = E_i - S_i \leq 0, \\ i = 1, \dots, 4; S_i \in R; X_i \in R; \quad i = 1, \dots, 4; E_i \in R; S_i \in R;$$

$$g_7(X) = R_1 - 1 \leq 0, \quad g_8(X) = -R_1 < 0, \\ R_1 \in R; \quad R_1 \in R;$$

$$g_9(X) = R_2 - 0,5 \leq 0, \quad g_{10}(X) = -R_2 < 0, \\ R_2 \in R; \quad R_2 \in R;$$

и функциональных ограничениях $h_k(X) < 0$, $k = 1, \dots, 12$:

$$h_1(X) = X_1 - R_1 \times 900 = 0, R_1 \in R, \quad h_2(X) = X_2 - R_2 \times 900 = 0, R_2 \in R,$$

$$h_3(X) = X_3 - 300 + y = 0; \quad h_4(X) = X_4 - 200 = 0;$$

$$h_5(X) = E_i - R_i \times T = 0, \quad h_6(X) = T - 860 = 0 \\ i \in \{1; 2\}; \quad (\text{только для доцента});$$

$$h_7(X) = T - 890 = 0 \quad h_8(X) = T - 800 = 0 \\ (\text{только для старшего преподавателя и ассистента}); \quad (\text{только для профессора});$$

$$h_9(X) = T - 765 = 0 \quad h_{10}(X) = E_3 - 10 = 0 \text{ при } S_4 = 0; \\ (\text{только для заведующего кафедрой});$$

$$h_{11}(X) = E_3 - 299 = 0 \text{ при } S_4 > 0; \quad h_{12}(X) = E_4 - 10 = 0.$$

АОПО предложен авторами [10]. Он решает задачу минимизации (2.1). Этот алгоритм представлен в виде блок-схемы (см. Рис. 2.1, 2.2, 2.3) иллюстративного характера для наглядного представления его работы и внесения определённости при дальнейшем изложении.

В применённом алгоритме АОПО используются переменные: C – число элементов нагрузки; O – массив видов ИП из C элементов; S – массив, представляющий собой σ . Приведём этот алгоритм.

Параметры алгоритма, используемые по умолчанию:

- исходное число итераций $It = 500$;
- увеличение числа итераций за шаг изменения температуры $d = 280$;

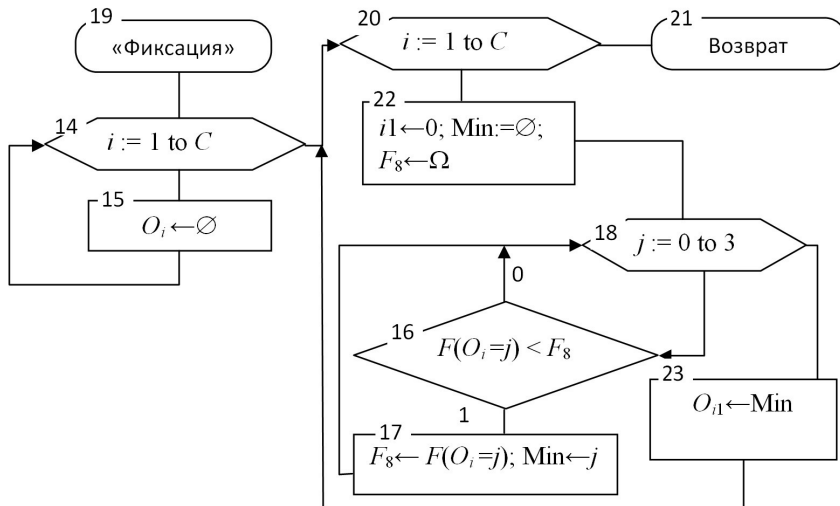


Рис. 2.1. Блок-схема алгоритма для модуля построения близкого к оптимальному решения

Fig. 2.1. Algorithm flowchart for the module for constructing a solution close to the optimal one

- число объектов последовательности, обменивающихся положением $X = 1$;
- исходная температура $t = 5$;
- делитель общего числа итераций (для определения числа шагов) $D_S = 25$.

Алгоритм следующий.

1. Считывание параметров: d, X, t, It, D_S .
2. Присвоить $t_1 \leftarrow t; t_2 \leftarrow t; it_1 \leftarrow 0; it_2 \leftarrow 0$.
3. Вычислить $Z \leftarrow (It \times (11 - t) + (d \times (11 - t)^2) \text{ div } 2) \text{ div } D_S$.
4. Если не установлен флажок «Продолжение» (см. ниже), то получить близкий к оптимальному вариант, сохраняемый в массиве O , и начальную последовательность, сохраняемую в массиве s из C элементов. Для этого выполнять C раз следующее:
 - 4.1. Присвоить номерам ИП $O_i \leftarrow -1$, где $i = 1, \dots, C$. Примечание: значение -1 означает, что вид ИП «недопустим»; тогда при вычислении F полагается, что соответствующей нагрузки нет.
 - 4.2. Цикл k от 1 до C :
 - 4.2.1. Цикл i от 1 до C : Если $O_i = -1$, то:
 - 4.2.1.1. Элементу O_i присваивать значения от 0 до 3, при этом вычисляя разность значений F после и до присвоения, и запоминая в Min тот вид, при котором разность минимальна по всем i , а в i_1 — соответствующее i .

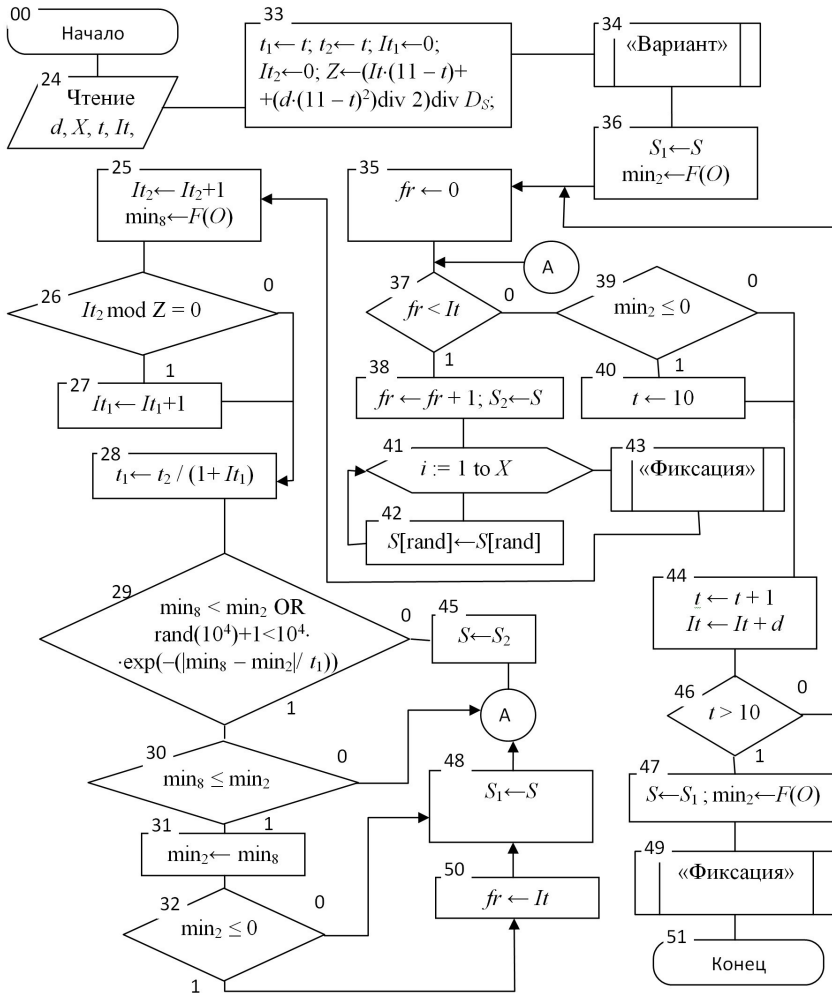


Рис. 2.3. Блок-схема алгоритма (основной модуль)

Fig. 2.3. Algorithm flowchart (the main module)

7.2.7. Если $it_2 \bmod Z = 0$, то $it_1 \leftarrow it_1 + 1$.

7.2.8. Присвоить $t_1 \leftarrow t_2 / (1 + it_1)$.

7.2.9. Если $min_8 \leq min_2$ или $(\text{random}(10000) + 1 < 10000 \times e^{-|min_8 - min_2|/t_1})$, то:

7.2.9.1. Если $min_8 \leq min_2$, то:

7.2.9.1.1. Присвоить $min_2 \leftarrow min_8$.

7.2.9.1.2. Если $min_2 \leq 0$, то присвоить $fr \leftarrow It$.

7.2.9.1.3. Скопировать массив s_1 из s .

7.2.10. В противном случае (см. п. 7.2.9.) скопировать массив s из s_2 .

- 7.3. Если $\min_2 \leq 0$, то присвоить $t \leftarrow 10$.
- 7.4. Присвоить $t \leftarrow t + 1$; $It \leftarrow It + d$.
- 7.5. Если $t > 10$, то перестать повторять и перейти к следующему пункту.
8. Скопировать массив s из s_1 .
9. Присвоить $O_i \leftarrow -1$, где $i = 1, \dots, C$.
10. Последовательно каждому элементу массива O присваивать значения от 0 до 3, при этом вычисляя F , и зафиксировать то значение, при котором F минимальна. Конец.

В результате вычислений в массиве O будет находиться искомое распределение номеров элементов нагрузки по видам ИП.

3. Математическая модель работы алгоритма оптимизации последовательности отбора

Для представления работы алгоритма АОПО разработана следующая модель на основе J-сети (Рис. 3.1).

На Рис. 3.1 наличие стрелок на обеих сторонах дуг (в том числе прямолинейных) означает, что имеется одна дуга в одну сторону и одна дуга в обратную сторону. Число в прямоугольнике над дугой – это, как и в обычных сетях Петри, кратность дуги. Рассмотрим особенности остальных составляющих данной модели и правила её функционирования.

В отличие от обычных сетей Петри, все позиции, кроме P_A, P_B, P_I , являются макропозициями (для краткости далее – позициями), содержащими места локализации маркеров (называемых также фишками или метками) – таблицы, состоящие из одной, трех или четырех ячеек, изображённых в виде квадратов, с информационными маркерами (для краткости далее – маркерами). Это позволяет рассматривать данную модель как J-сеть. В данном случае синхронность, присущая J-сетям и подразумевающая срабатывание более одного перехода за такт [18], не учитывается, так как в ней нет надобности: переходов всего два, и одновременно они срабатывать не могут. Для полного соответствия концепции можно представить, что переходы состоят из подсетей, включающих по несколько переходов, которые выполняют описываемые ниже действия, и всё это за один такт.

В позициях P_1, \dots, P_C в верхней части квадрата – номер маркера, представляющий собой также номер вида нагрузки (от 0 до 3). В нижней части квадрата либо g_k – количество часов для k -го элемента нагрузки («несущий маркер»), $k = 1, \dots, C$, либо 0, что означает, что выбор вида нагрузки не сделан для данного элемента нагрузки («нуль-маркер»). Несущие маркеры могут быть просто несущими (временно) либо на временно-постоянной основе (ВПО).

Процесс работы сети состоит из двух этапов. На первом этапе производится получение близкого к оптимальному варианта распределения нагрузки (см. Рис. 2.1), а на втором – оптимизация полученного варианта.

Состояние сети в любой момент τ описывается маркировкой $M_\tau = \{m(P_0), \dots, m(P_R)\}$, представляющей собой набор разметок для каждой позиции P_0, \dots, P_R , где аргументом отображения $m(x)$ является название x позиции сети,

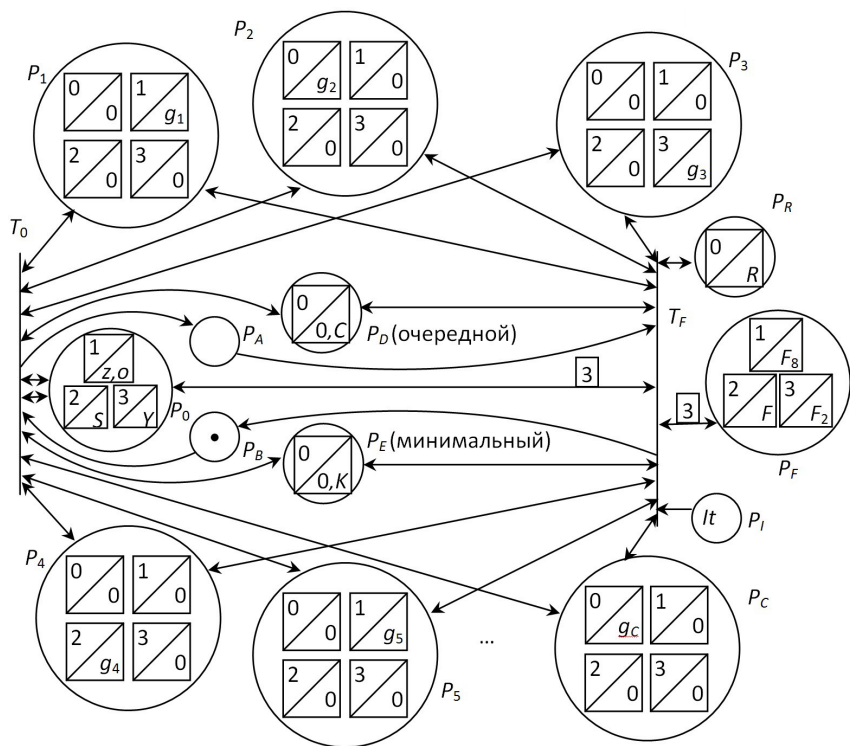


Рис. 3.1. J-сеть, моделирующая процесс оптимизации

Fig. 3.1. J-net modeling the optimization process

а сама разметка $m(x)$ представляет собой набор цветных маркеров в позиции x . Рассмотрим содержимое маркеров по позициям:

- P_0 : маркеры пронумерованы от 1 до 3 и содержат соответственно:
 - 1) z, o – номер этапа и наилучшую (т.е. с наименьшим соответствующим значением F) к данному моменту σ не всегда полной длины (вначале нулевой длины);
 - 2) S – модифицированную σ (вначале нулевой длины);
 - 3) Y – наилучшую к данному моменту σ полной длины.
- P_F : элементы $m(P_F)$ имеют номера 1–3 и содержат соответственно:
 - 1) F – текущее значение целевой функции F ;
 - 2) F_8 – минимальное из найденных к данному моменту значений F на очередном шаге (при полной или неполной длине σ). Под шагом понимается последовательность действий по реализации распределения нагрузки в соответствии с конкретной σ либо при её первоначальном получении. Вначале F_8 – большое число, которое обозначим символом Ω ;

- 3) F_2 – минимальное из найденных к данному моменту значений F при полной длине σ (вначале – Ω).
- P_R : наилучшее из найденных распределений нагрузки, вначале пустое.
 - P_E : сведения о виде нагрузки (число) и о номере позиции из P_1, \dots, P_C , при которых было достигнуто наименьшее значение для F_8 в процессе реализуемого таким образом поиска. Вначале содержатся пустые значения, что обозначается (\emptyset, \emptyset) .
 - P_D : информация о том, маркер с каким номером и из какой позиции в последний раз изменялся переходом T_0 , чтобы можно было узнать, какой маркер изменять следующим. Вначале содержатся пустые значения, что обозначается (\emptyset, \emptyset) . В дальнейшем изложении соответствующий маркер из соответствующей позиции из P_1, \dots, P_C , что определяется информацией из $m(P_D)$, будем обозначать $M(P_D)$, а соответственно из $m(P_E)$ – $M(P_E)$.

Рассмотрим работу перехода T_F . Её можно разделить на шаги:

- 1) Из каждой позиции P_1, \dots, P_C в T_F отбирается один маркер, в первую очередь несущий, и только если таковых нет, любой нуль-маркер. В T_F также отбираются все элементы из $m(P_0)$ и $m(P_F)$, так как кратности дуг равны числу маркеров. Из остальных входных позиций отбирается по одному маркеру. После отбора маркеров переход вычисляет значение целевой функции F на основе пустых и непустых значений (см. блок 09 блок-схемы алгоритма (БСА) (это значение затем временно присваивается маркеру 2 из P_F , однако по окончании срабатывания заменяется на \emptyset , см. ЛД ниже).
- 2) Затем этот переход сравнивает F и F_8 (см. блок 10 БСА). Если $F < F_8$, то:
 - 2.1) значение F_8 для отобранного маркера номер 1 из P_F заменяется на F (см. блок 11 БСА);
 - 2.2) если этап первый, то O для отобранного маркера номер 1 из P_0 заменяется на S (причем, если длина S на 1 меньше C , то заменяется на S с дописанным номером позиции с временно несущим маркером);
 - 2.3) информация в $m(P_E)$ заменяется на информацию в $m(P_D)$ (в блоке 11 БСА это $i1$ и Min);
 - 2.4) если σ , в том числе на первом этапе при анализе последнего элемента, имеет полную длину (т.е. в каждой позиции P_1, \dots, P_C есть несущий маркер), то этот переход сравнивает F_2 и F_8 с учетом этапа и логики алгоритма имитации отжига. На первом этапе это простое сравнение. На втором этапе при сравнении учитывается также вероятность перехода к состоянию с большим значением целевой функции из состояния с меньшим её значением (см. блок 29 БСА). Такое сравнение для обоих этапов вместо символа «<» обозначим символом « \prec ». То есть, даже если $F_8 > F_2$, но произошло событие для указанной вероятности, то условие « $F_8 \prec F_2$ » считается выполненным. Для построения ЛД это не принципиально. Если $F_8 \prec F_2$, то:
 - 2.4.1) значение F_2 для отобранного маркера номер 3 из P_F заменяется на F_8 (см. блок 31 БСА);

- 2.4.2) значение Y для маркера 3 из P_0 заменяется на O ;
- 2.4.3) если нет отобранных нуль-маркеров из P_1, \dots, P_C , то значение R для $m(P_R)$ заменяется на упорядоченную совокупность значений номеров несущих маркеров из P_1, \dots, P_C .
- 3) Затем, если этап 1, и $M(P_D)$ соответствует последнему виду нагрузки в конце очереди, либо этап 2, и $M(P_D)$ соответствует последнему виду нагрузки, то присваивается $F_8 \leftarrow \Omega$ (см. блок 05 БСА).
- 4) Затем в P_F присваивается $F \leftarrow \emptyset$ (т.к. это временное значение).
- 5) После этого все информационные маркеры возвращаются в свои позиции, а в P_B помещается обычный маркер.

Под очередью далее понимается либо простая очередь (на 1 этапе), либо последовательность O для 2 этапа. В очередь не включаются маркеры из позиций, содержащих несущие маркеры на ВПО.

Переход T_0 работает следующим образом.

В соответствии с дугами, в него отбираются $m(P_D)$, маркеры с номерами 1, 2 из P_0 , а также $m(P_B)$ и $m(P_E)$. Далее возможны четыре ситуации, при которых из каждой другой (не указанной в ситуации) позиции P_1, \dots, P_C отбирается в первую очередь несущий маркер, и только если таковых нет, любой нуль-маркер. Действия по ситуациям следующие:

- 1) Если этап 1, и $m(P_D)$ указывал на последний маркер в очереди, то это значит, что очередь закончилась и нужно установить какому-то нуль-маркеру значение и увеличить длину S . Тогда:
 - 1.1) отбирается $M(P_D)$ и назначается нуль-маркером;
 - 1.2) отбирается $M(P_E)$ и назначается несущим на ВПО (в блоке 12 БСА это операция $O_{i1} \rightarrow Min$);
 - 1.3) к S (у маркера номер 2 в P_0) дописывается номер позиции для $M(P_E)$ (см. блок 12 БСА);
 - 1.4) в $m(P_D)$ заносится информация о расположении первого по очереди маркера, причем этот маркер становится несущим (в БСА это значит $i := 1, j := 0$ для блока 08);
 - 1.5) в $m(P_E)$ заносится (\emptyset, \emptyset) .
- 2) Если этап 2, и не производится установка номера этапа 2, и не достигнут конец O , то если рассмотрен последний элемент нагрузки для P_i (i определяется из маркера в P_D), тогда:
 - 2.1) отбирается $M(P_E)$ – это маркер из P_i , и назначается несущим на ВПО;
 - 2.2) в P_D вносятся данные о следующем элементе O (для первого вида нагрузки), и $M(P_D)$ становится временно несущим.

- 3) Когда длина S достигнет C (это проверяется у маркера 2 из P_0 и является случаем, совместным со случаем 1), а этап 1 (т.е. $k = C$ в блоке 04 БСА), это будет означать, что первый этап завершен, и переход T_0 устанавливает номер этапа у маркера номер 1 из P_0 в 2. При этом, а также на 2 этапе при достижении конца O , он:
 - 3.1) производит случайное изменение в O у маркера номер 1 из P_0 , а если O пустое, то вместо этого копирует его из S (см. блоки 41, 42 БСА);
 - 3.2) вносит в P_D данные о первом элементе O ;
 - 3.3) в $m(P_E)$ заносится (\emptyset, \emptyset) ;
 - 3.4) все несущие маркеры, в т.ч. ВПО, делает нуль-маркерами, а маркер, определяемый информацией из P_D , несущим.
- 4) В остальных случаях:
 - 4.1) прошлый $M(P_D)$ становится нуль-маркером;
 - 4.2) очередь продвигается, и маркер в P_D начинает указывать на очередной элемент;
 - 4.3) отбирается $M(P_D)$ и становится несущим.

Затем все информационные маркеры возвращаются в свои позиции, а обычный маркер помещается в P_A . Срабатывание переходов T_0 и T_F чередуется, что обеспечивается последовательным переносом обычного маркера из позиции P_A в P_B и обратно. Этим чередованием обеспечивается вычисление целевой функции в ответ на каждое изменение маркировки переходом T_0 , в частности, при присвоении нуль-маркеру значения.

Работа сети продолжается, пока не закончатся маркеры в позиции P_I . Первоначально их там столько, какова величина, обозначаемая It , т.е., сколько должно быть сделано итераций. В итоге наилучшее из найденных значений F будет находиться в маркере 3 из позиции P_F , а в $m(P_R)$ – наилучшее из найденных распределений нагрузки.

4. Лента достижимости

Для сети построена ЛД. Она не может использоваться для решения задачи минимизации, поскольку не предназначена для этого, однако применяется для проверки правильности модели. ЛД, в частности, для минимизации своего размера, наделена следующими особенностями:

- $C = 2, It = 45$ (чтобы достичь всех возможных состояний с учетом дублирования);
- количество ячеек в таблицах макропозиций P_1, \dots, P_C равно двум, а не четырём, т.е. не учитывается почасовая оплата и прочая нагрузка;
- значения функции не числовые, а в виде $F(O_1, O_2)$, где O_1 – вид нагрузки для первого элемента нагрузки, O_2 – соответственно, для второго;
- для дублирующих M_τ может быть разным: а) количество маркеров в P_I , б) $F(O_1, O_2)$, т.е. значение маркера номер 2, в P_F , в) значение S на этапе 2, так как S на этапе 2 не может быть изменено и не используется;

- номера информационных маркеров для краткости не записываются явно, а определяются записанным порядком.

ЛД построена вручную, поскольку при её построении выявлялись и исправлялись ошибки в логике работы сети, что удобнее выполнять при внимательном рассмотрении каждой группы M_τ . Она описывает 41 M_τ на этапе 1 и 228 на втором этапе, итого 269 M_τ , в том числе 122 M_τ , в которых имеется результат успешной проверки условия переходом T_F и 72 M_τ , полученные в результате случайного изменения или не изменения (из-за фактора случайности) последовательности переходом T_0 . В ЛД 71 M_τ отмечены как дублирующие, т.е. после них варианты результатов при срабатывании переходов не рассматривались.

Рассмотрим фрагменты данной ленты (Табл. 4.1, 4.2).

Таблица 4.1. Лента достижимости (первый фрагмент)
Table 4.1. Reachability tape (first fragment)

Прочее				Маркеры в позициях									
Сравнение F и F_8	Маркировка	Возбуждён	Сработал из маркировки	$P_0 - z, o, S, Y$	P_1	P_C	P_A	P_B	P_D	P_E	$P_F - F_8, F, F_2$	P_I	P_R
Other				Tokens in places									
Comparison F and F_8	Marking	Enabled	Fired from marking	$P_0 - z, o, S, Y$	P_1	P_C	P_A	P_B	P_D	P_E	$P_F - F_8, F, F_2$	P_I	P_R
	M_0	T_0	–	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$0, 0$	$0, 0$	–	1	\emptyset, \emptyset	\emptyset, \emptyset	$\Omega, \emptyset, \Omega$	45	\emptyset
–	M_1	T_F	M_0T_0	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$g_1, 0$	$0, 0$	1	–	$0, 1$	\emptyset, \emptyset	$\Omega, \emptyset, \Omega$	45	\emptyset
–	M_2	T_0	M_1T_F	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$g_1, 0$	$0, 0$	–	1	$0, 1$	$0, 1$	$(0, \emptyset), \emptyset, \Omega$	44	\emptyset
–	M_3	T_F	M_2T_0	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$0, g_1$	$0, 0$	1	–	$1, 1$	$0, 1$	$(0, \emptyset), \emptyset, \Omega$	44	\emptyset
$(1, \emptyset) \geq (0, \emptyset)$	$M_4; F \geq F_8$	T_0	M_3T_F	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$0, g_1$	$0, 0$	–	1	$1, 1$	$0, 1$	$(0, \emptyset), \emptyset, \Omega$	43	\emptyset
$(1, \emptyset) < (0, \emptyset)$	$M_4^1; F < F_8$	T_0	M_3T_F	$1, \emptyset, \emptyset, \emptyset$	$0, g_1$	$0, 0$	–	1	$1, 1$	$1, 1$	$(1, \emptyset), \emptyset, \Omega$	43	\emptyset

В Таблицах 4.1, 4.2 показаны некоторые характерные ситуации, достижимые сетью Петри:

- 1) Начальная маркировка M_0 и несколько последующих.
- 2) Последняя из рассматриваемых $M_\tau - M_{21}^{55}$.

Таблица 4.2. Лента достижимости (второй фрагмент)
Table 4.2. Reachability tape (second fragment)

Прочее				Маркеры в позициях									
Срав- не- ние F и F_8	Марки- ровка	Воз- буж- дён	Срабо- тал из марки- ровки	$P_0 -$ $z, o,$ S, Y	P_1	P_C	P_A	P_B	P_D	P_E	$P_F -$ $F_8,$ $F,$ F_2	P_I	P_R
Other				Tokens in places									
Compa- rison F and F_8	Mar- king	En- ab- led	Fired from mar- king	$P_0 -$ $z, o,$ S, Y	P_1	P_C	P_A	P_B	P_D	P_E	$P_F -$ $F_8,$ $F,$ F_2	P_I	P_R
$(1, 1)$ < $(1, 0)$	$M_{20}^{15};$ $F <$ $< F_8$	T_0	$M_{19}^{15}T_F$	$2,$ $1_2,$ $1_2,$ 1_2	$0,$ g_1	$0,$ g_2	–	1	1, 2	1, 2	$\Omega,$ $\emptyset,$ (1,1)	35	1, 1
$(0, 1)$ < $(0, 0);$ $(0, 1)$ < $(1, 0)$	M_{20}^{34} \equiv $M_{20}^{32};$ $F <$ $< F_8;$ $F_8 \prec$ $\prec F_2$	T_0	$M_{19}^6T_F$	$2,$ $1_2,$ $2_1,$ 1_2	$g_1,$ 0	$0,$ g_2	–	1	1, 2	1, 2	$\Omega,$ $\emptyset,$ (0,1)	35	0, 1
не изме- няется	M_{21}^{27} \equiv M_{21}^{37}	T_F	$M_{20}^{27}T_0$	$2,$ $1_2,$ $2_1,$ 2_1	$g_1,$ 0	$0,$ 0	1	–	0, 1	$\emptyset,$ \emptyset	$\Omega,$ $\emptyset,$ (0,1)	35	0, 1
изме- няется	M_{21}^{55} \equiv M_{21}^9	T_F	$M_{20}^{27}T_0$	$2,$ $2_1,$ $2_1,$ 2_1	$0,$ 0	$g_2,$ 0	1	–	0, 2	$\emptyset,$ \emptyset	$\Omega,$ $\emptyset,$ (0,1)	35	0, 1

- 3) M_τ с результатом успешной проверки условия переходом T_F .
- 4) M_τ , полученные в результате изменения или не изменения последовательности переходом T_0 .
- 5) Дублирующие M_τ .
- 6) Одна из M_τ с объединением условий – M_{20}^{34} .
- 7) M_τ с несущими маркерами на ВПО (выделены жирным шрифтом).

Символ \emptyset означает отсутствие вида нагрузки, либо отсутствие последовательности, либо отсутствие распределения, в зависимости от столбца, где встречается этот символ.

Ячейки таблиц, содержащие символ тождественного равенства \equiv , содержат дублирующие M_τ . Жирным шрифтом в первом столбце выделены условия, которые выполняются, а противоположные этим условия выполняться не могут в связи с историей работы сети, поэтому соответствующие M_τ не включены в ЛД.

Символ F перед скобками для краткости представления в статье не записывался, однако он в действительности есть. Например, выражение « $(0, 1) < (0, 0)$ » означает « $F(0, 1) < F(0, 0)$ ». По той же причине не использованы символы круглых скобок для представления наборов значений в столбцах 5, 6, 7, 10, 11, не показан столбец с номерами, а в столбце $P_F...$ не показаны промежуточные состояния при срабатывании перехода.

5. Отбраковка недостижимых состояний с помощью систем неравенств

В модели нет информации о том, какая из M_τ обладает большим или меньшим значением F , поэтому рассматриваются все варианты, возможные в результате сравнений этих значений. Например, неизвестно, что меньше: $F(0, 1)$ или $F(1, \emptyset)$. Здесь $F(0, 1)$ означает значение целевой функции при выборе для первого элемента нагрузки ИП по основной ставке, а для второго – по совместительству; $F(1, \emptyset)$ – соответственно для второго – не выбрано, а для первого – по совместительству (это иллюстрирует вышеприведённую фразу «на основе пустых и непустых значений»). Поэтому рассматриваются два результата сравнения – $F(0, 1)$ и $F(1, \emptyset)$. Для корректности ЛД необходимо учитывать, какое из значений принималось меньшим ранее, если производилось подобное сравнение. Соответственно, невозможный результат сравнения не рассматривается. Такие результаты сравнения в совокупности формируют историю сравнений.

В первом столбце ЛД пронумерованы только строки с неравенствами. Итоговая история сравнений описывает 88 систем неравенств. В процессе проектирования J-сети была рассмотрена также несколько иная логика работы сети (регулярно не устанавливались пустые значения), тогда число неравенств в системе достигало 21, а количество M_τ – 435, в связи с чем появилась необходимость автоматизации анализа таких систем. С целью такого анализа разработано программное обеспечение на C#, которое на основе известных соотношений (меньше или не меньше) определяет некоторые из неизвестных соотношений. Здесь используются четыре очевидные правила – свойства транзитивности:

$$\begin{aligned} (A \geq B) \& (B \geq C) \rightarrow (A \geq C); (A \geq B) \& (B > C) \rightarrow (A > C); \\ (A > B) \& (B > C) \rightarrow (A > C); (A > B) \& (B \geq C) \rightarrow (A > C). \end{aligned}$$

Логика программы реализуется с помощью двух вложенных циклов, поэтому лежащий в её основе алгоритм определения соотношений имеет временную сложность $O(n^3)$, где n – число обозначений значений F (таких как $F(0, 1)$, $F(1, \emptyset)$ и т.п.). В литературе (см., например, [19], [20]) описываются различные подходы к решению систем неравенств, однако они более сложные для понимания разработки реализующего их программного обеспечения.

Программа, реализующая разработанный алгоритм определения соотношений, применена для решения систем неравенств в различных проектах J-сети на этапах её проектирования.

6. Анализ ленты достижимости

Рассмотрим ЛД. К первому этапу относятся 57 M_τ , остальные ко второму, и их значительно больше. Для всех M_τ на втором этапе искомое распределение нагрузки непустое, в отличие от ЛД для первоначального проекта сети, содержавшего просчёт в том, что нагрузка не всегда полностью распределялась по ИП.

Переход T_F срабатывает до 10 раз, после чего M_τ становятся только дублирующими и не рассматриваются. Количество рассматриваемых M_τ ЛД по шагам: 1, 2 – 1, 3 – 2, 4 – 4 (3), 5 – 6 (4), 6 – 4, 7 – 8 (16), 8 – 16, 9 – 20, 10 – 26 (22), 11 – 36 (56), где в скобках указано число M_τ после срабатывания T_0 , если отличается от первого числа (после срабатывания T_F).

В ЛД нет бесконечного накопления маркеров, что говорит об отсутствии соответствующей ошибки в модели. Со временем число маркеров в позиции P_I уменьшается, в конце работы до 0, после чего возбужденных переходов не будет, и сеть перестает работать. Это моделирует завершение работы программы по достижении установленного числа итераций It . В построенной ЛД встречаются все варианты последовательности отбора. Поскольку в последовательности только два элемента, ЛД может считаться относительно короткой. Если бы там было, например, 5 элементов, то если число итераций было бы неограниченным, эта лента была бы не только в $5!/2! = 60$ раз протяжённое из-за перестановок в последовательности, но и еще в $3^5/3^2 = 27$ раз длиннее из-за увеличения числа комбинаций нахождения маркеров в 5 позициях вместо 2 (итого, по крайней мере, в 1620 раз). Для обычных сетей Петри ЛД при небольшом числе узлов не так велика, но в случае J-сети размер многократно возрастает из-за большого числа разных комбинаций значений маркеров.

Таким образом, при незначительном увеличении C ЛД получится во много раз длиннее, и если It небольшое, все ситуации охвачены не будут. Однако при $C = 2$ построенная ЛД показывает корректность работы алгоритма оптимизации.

J-сети являются относительно редко упоминаемой в литературе разновидностью аппарата сетей Петри, и в свободном доступе отсутствуют сведения о построении для подобной сети ЛД. Таким образом, впервые построена лента достижимости для J-сети. Анализ работы алгоритма оптимизации, проведенный посредством J-сети с помощью ЛД, показывает корректность его работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McEneaney J. E., Morsink P. Curriculum Modelling and Learner Simulation as a Tool in Curriculum (Re)Design. *Journal of Learning Analytics*. 2022. Vol. 9, No 2. P. 161–178. DOI: 10.18608/jla.2022.7499
2. Nyéki L. Modeling of Higher Education Processes using Colored Petri Nets. *XXVIII Multimedia in Education International Conference*. 2022. P. 62–68. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/377218660_Modeling_of_Higher_Education_Processes_using_Colored_Petri_Nets
3. Castaldi P., Mimmo N. Representing the dynamics of student learning and interactions with a university curriculum. *IFAC-PapersOnLine*. 2024. Vol. 58, no. 16. P. 211–216. DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.08.488

4. Vanit-Anunchai S. Teaching Low-Code Formal Methods with Coloured Petri Nets. *Formal Methods Teaching Workshop*. Springer. 2023. P. 96–104. DOI: 10.1007/978-3-031-27534-0
5. Rong J. A Practical Exploration of the Integration of Civics into Student Education and Management in Colleges and Universities Empowered by Information Integration Technology in the Context of Three-Whole Parenting. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*. 2024. Vol. 9, no. 1. P. 1–18. Режим доступа: <https://sciendo.com/article/10.2478/amns.2023.2.01398>
6. Huang L., Zheng J., Lajoie S.P., Chen Y., Hmelo Silver C.E., Wang M. Examining university teachers' self-regulation in using a learning analytics dashboard for online collaboration. *Education and Information Technologies*. 2024. Vol. 29. P. 8523–8547. DOI: 10.1007/s10639-023-12131-7
7. Nyeki L. The Application of Petri Nets in Modeling the Educational Process // X. Ágoston Trefort Conference. Budapest. 2020. P. 202–213. Режим доступа: <https://www.researchgate.net/publication/377218178>
8. Юдицкий С. А. Сценарный подход к логическому моделированию систем рыночной экономики // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 2. С. 147–164. Режим доступа: <https://sccs.intelgr.com/archive/2015-02/06-Iuditskii.pdf>
9. Желтов П. В. Модели поиска и копирования символьных данных на J-сетях // Прикладная информатика. 2012. Т. 40, № 4. С. 81–87. Режим доступа: http://www.appliedinformatics.ru/r/articles/article/index.php?article_id_4=1312
10. Димитриев А. П., Лавина Т. А. Применение алгоритма оптимизации последовательности отбора для распределения учебной нагрузки преподавателя по индивидуальным планам // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 4. С. 15–20. DOI: 10.17513/snt.39967
11. Виноградов Г. П., Кирсанова Н. В. Модель интерактивного планирования нагрузки ППС кафедры // Вестник Тверского государственного технического университета. 2017. Вып. 32. С. 106–111. Режим доступа: <https://core.ac.uk/reader/151241237>
12. Ивахненко Д. А. Применение моделей двусторонних рынков в задаче распределения учебной нагрузки между преподавателями кафедры // Современная экономика: проблемы и решения. 2021. Т. 141, № 9. С. 16–28. DOI: <https://doi.org/10.17308/meps.2021.9/2667>
13. Султанова С. Н., Тархов С. В. Модели и алгоритмы поддержки принятия решений при распределении учебной нагрузки преподавателей // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2006. Т. 7, № 3 (16). С. 107–114.
14. Димитриев А. П., Лавина Т. А. Алгоритм распределения учебной нагрузки преподавателя по индивидуальным планам с применением технологии искусственного интеллекта // Современные наукоемкие технологии. 2023. № 5. С. 13–18. DOI: 10.17513/snt.39610

15. Whitley D. A genetic algorithm tutorial. *Statistics and Computing*. 1994. Vol. 4. P. 65–85. DOI: 10.1007/BF00175354
16. Dimitriev A. P., Bazhenov R. I. Time indicators of effective optimization algorithms in group load control modeling // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (MSE). 2021. Vol. 1019. 012038. DOI:10.1088/1757-899X/1019/1/012038
17. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing. // *Science*. 1983. Vol. 220, No 4598. P. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671
18. Котов В. Е. Сети Петри. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 160 с.
19. Евтушенко Ю. Г., Посыпкин М. А., Рыбак Л. А., Туркин А. В. Отыскание множеств решений систем нелинейных неравенств // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 8. С. 1248–1254. DOI: 10.7868/S0044466917080075
20. Лапиков И. И., Никонов В. Г. Адаптивный алгоритм решения систем неравенств с k -значными неизвестными // Труды Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. 2016. № 650. С. 88–94.

*Поступила 10.02.2025; доработана после рецензирования 22.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. E. McEneaney, P. Morsink, “Curriculum Modelling and Learner Simulation as a Tool in Curriculum (Re)Design”, *J. Learn. Anal.*, **9**:2 (2022), 161–178. DOI: 10.18608/jla.2022.7499
2. L. Nyéki, “Modeling of Higher Education Processes using Colored Petri Nets”, *XXVIII Multimedia in Education International Conference*, 2022, 62–68, Available at: https://www.researchgate.net/publication/377218660_Modeling_of_Higher_Education_Processes_using_Colored_Petri_Nets.
3. P. Castaldi, N. Mimmo, “Representing the dynamics of student learning and interactions with a university curriculum”, *IFAC-PapersOnLine*, **58**:16 (2024). DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.08.488
4. S. Vanit-Anunchai, “Teaching Low-Code Formal Methods with Coloured Petri Nets”, *Formal Methods Teaching Workshop*, Springer, 2023, 96–104 DOI: 10.1007/978-3-031-27534-0.
5. J. Rong, “A Practical Exploration of the Integration of Civics into Student Education and Management in Colleges and Universities Empowered by Information Integration Technology in the Context of Three-Whole Parenting”, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, **9**:1 (2024), 1–18, Available at: <https://sciendo.com/article/10.2478/amns.2023.2.01398>.

6. L. Huang, J. Zheng, S. P. Lajoie, Y. Chen, C. E. Hmelo Silver, M. Wang, “Examining university teachers’ self-regulation in using a learning analytics dashboard for online collaboration”, *Educ Inf Technol*, **29** (2024), 8523–8547. DOI: 10.1007/s10639-023-12131-7
7. L. Nyeki, “The Application of Petri Nets in Modeling the Educational Process”, *X. Ágoston Trefort Conference.*, Budapest, 2020, 202–213, Available at: <https://www.researchgate.net/publication/377218178>.
8. S. A. Iuditskii, “The Scenary Approach to the Logical Modeling of Systems of a Market Economy”, *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti*, 2015, no. 2, 147—164 (In Russ.), Available at: <https://sccs.intelgr.com/archive/2015-02/06-Iuditskii.pdf>.
9. P. V. Zheltov, “[Models for searching and copying symbol data on J-nets]”, *Prikladnaya informatika*, **4**:40 (2012), 81–87 (In Russ.).
10. A. P. Dimitriev, T. A. Lavina, “Application of the selection sequence optimization algorithm to distribute the teacher’s educational load according to individual plans”, *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2024, no. 4, 15–20 (In Russ.). DOI: 10.17513/snt.39967
11. G. P. Vinogradov, N. V. Kirsanova, “[Interactive model planning of the load between the staff of the chairs]”, *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, no. 32, 106–111 (In Russ.), Available at: <https://core.ac.uk/reader/151241237>.
12. D. A. Ivakhnenko, “[Application of the twosided markets theory for university department teaching workload distribution]”, *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya*, **9**:141 (2021), 16–28 (In Russ.). DOI: 10.17308/meps.2021.9/2667
13. S. N. Sultanova, S. V. Tarkhov, “[Models and algorithms of desizion support at teachers’ educational load distribution]”, *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta*, **7**:3 (16) (2006), 107–114 (In Russ.), Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9289661>.
14. A. P. Dimitriev, T. A. Lavina, “Algorithm for distributing the teacher’s educational load according to individual plans using artificial intelligence technology”, *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2023, no. 5, 13–18 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17513/snt.39610>
15. D. Whitley, “A genetic algorithm tutorial”, *Stat Comput*, **4** (1994), 65–85. DOI: 10.1007/BF00175354
16. A. P. Dimitriev, R. I. Bazhenov, “Time indicators of effective optimization algorithms in group load control modeling”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, **1019** (2021), 012038. DOI: 10.1088/1757-899X/1019/1/012038
17. S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, “Optimization by Simulated Annealing”, *Science*, **220**:4598 (1983), 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671
18. V. E. Kotov, *[Petri Nets]*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russ.), 160 p.

19. Yu. G. Evtushenko, M. A. Posypkin, L. A. Rybak, A. V. Turkin, “Finding sets of solutions to systems of nonlinear inequalities”, *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **57**:8 (2017), 1248–1254 (In Russ.). DOI: 10.7868/S0044466917080075
20. I. I. Lapikov, V. G. Nikonov, “[Adaptive algorithm for solving systems of inequalities with k-valued unknowns]”, *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii imeni A. F. Mozhayskogo*, 2016, no. 650, 88–94 (In Russ.).

Submitted 10.02.2025; Revised 22.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать BGN/PCGN упрощенная без диакритических знаков.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Oliger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

Examples of bibliographic references for the section References.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P.A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P.A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizatsii-kvadratsionnogo-funktsionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О.}.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Название таблицы на английском языке}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца на русском языке & Название второго столбца на русском языке \\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Все вставляемые рисунки в текст статьи должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript). В редакцию журнала также необходимо предоставить те же рисунки в формате JPG с разрешением 300 точек на дюйм (dpi).

Для вставки рисунков в текст статьи можно пользоваться следующими командами:

а) вставка одного рисунка

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Название рисунка на русском языке:}
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Название рисунка на англ. языке}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}
```

б) вставка двух рисунков в одну строку

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
}
```

```

\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a$}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b$}
\end{minipage}
\caption{Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на русском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на русском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на русском языке, \\
\medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на английском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на английском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на английском языке }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету **svmobib.sty**. Основой этого пакета является стилевой файл **amsbib.sty**. Более подробно эти команды описаны в инструкции **amsbib.pdf**.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета **svmobib.sty**

Статьи в журналах на русском языке

В разделе **thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```


Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Вышш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. *To format article headings in English, use the following commands:* `\headerFirstEn` *u* `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name in English}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Table name in Russian}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
```

```

First column name in English & Second column name in English \\
First column name in Russian & Second column name in Russian \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Title of the drawing in English: \\
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Title of the drawing in Russian}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

b) inserting two pictures into one line

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
\begin {minipage }[!ht] {0.49\linewidth}
\center $a)$
\end{minipage}
\hfill
\begin {minipage }[!ht] {0.49\linewidth}
\center $b)$
\end{minipage}
\caption{Common name of two drawings a and b in Russian: \\
$a)$ the title of the picture a in English, $b)$ the title of the picture b in English,
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Common name of two drawings a and b in Russian: \\

```

```

$a)$ the title of the drawing a in Russian, $b)$ the title of the drawing b in Russian }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

`\RBibitem{label for a link to the source }`,

and every English reference – by a command

`\Bibitem{label for a link to the source }`.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Journal articles in English:

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

```

`\jour` Ogarev-online
`\vol` 20
`\yr` 2016
`\lang` In Russ.
`\elink` Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib4En}
`\by` A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
`\paper` [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
`\inbook` Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
`\publaddr` Ulyanovsk
`\publ` UIGTU Publ.
`\yr` 2014
`\issue` 10
`\pages` 4–13
`\lang` In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib5En}
`\by` Yu. N. Bibikov
`\book` Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
`\publaddr` Moscow
`\publ` Visshay shkola Publ.
`\yr` 1991
`\totalpages` 303
`\lang` In Russ.

Conference proceedings in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib6En}
`\by` V. G. Malinov
`\paper` Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
`\inbook` VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
`\bookvol` II
`\procinfo` Moscow, October 17-22, 2016
`\yr` 2016
`\pages` 48–50
`\publ` FRC CSC RAS Publ.
`\publaddr` Moscow

Алфавитный указатель авторов

Анкилов Г. А.	488	Зинина С. Х.	435
Анкилов М. А.	422	Катин Д. А.	471
Баландин Д. В.	451	Копышева Т. Н.	517
Баженов Р. И.	517	Лавина Т. А.	517
Вельмисов П. А.	488	Леонтьев В. Л.	411
Горбунова К. Д.	500	Нефедов М. С.	435
Димитриев А. П.	517	Ошина Н. В.	471
Еркаев Н. В.	500	Рябикова Т. В.	451
Жалнин Р. В.	435	Ткаченко П. П.	451
Жаркова А. С.	488	Шаманаев П. А.	471

Author Index

G. A. Ankilov	488	D. A. Katin	471
M. A. Ankilov	422	T. N. Kopysheva	517
D. V. Balandin	451	T. A. Lavina	517
R. I. Bazhenov	517	V. L. Leontiev	411
A. P. Dimitriev	517	M. S. Nefedov	435
N. V. Erkaev	500	N. V. Oshina	471
K. D. Gorbunova	500	T. V. Ryabikova	451
R. V. Zhalnin	435	P. P. Tkachenko	451
A. S. Zharkova	488	P. A. Shamanaev	471
S. Kh. Zinina	435	P. A. Velmisov	488

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е., Иванова-Тюркина В. А.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 19.12.2025. Дата выхода в свет 31.12.2025. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 14,0 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 699.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва»

Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova, V. A. Ivanova-Tyurkina*

Translation: *A. O. Syromyasov*

Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 19.12.2025. Date of publishing 31.12.2025. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 14,0

Number of copies 100. Order no. 428.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University

Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,

Republic of Mordovia, Russia

