

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 27 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 3

2025

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 27, № 3. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 27, NO. 3. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2025

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — заместитель главного редактора, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФИЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузмичев Николай Дмитриевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Леонтьев Виктор Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, руководитель Высшей школы развития научно-образовательного потенциала, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Deputy Editor, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Scientific Center for Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics

and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Victor L. Leontiev — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of the Higher School for the Development of Scientific and Educational Potential, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Багаев А. В., Ганеева Д. М.	
Системы итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами	287
Евтина Д. С., Жабко А. П.	
Оценка решений систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями	302
Иноземцев А. И.	
Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций	315
Конопацкий Е. В., Котова О. В.	
Метод оптимального расположения узлов аппроксимации	325
Цыганова Ю. В., Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н.	
Квадратно-корневой метод идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами . . .	341

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Мартынов С. И., Ткач Л. Ю.	
Моделирование захвата и транспортировки груза в жидкости системой самоорганизующихся магнитных частиц, контролируемых внешним полем	364
Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	380
Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	384
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	388
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	394
Алфавитный указатель авторов	398

Contents

MATHEMATICS

A. V. Bagaev, D. M. Ganeeva

Iterated function systems whose attractors are Cantor sets 287

D. S. Evtina, A. P. Zhabko

Estimation of solutions of neutral type systems with two incommensurate delays 302

A. I. Inozemtsev

On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions 315

E. V. Konopatskiy, O. V. Kotova

Method of optimal placement of approximation nodes 325

J. V. Tsyganova, D. V. Galushkina, A. N. Kuvshinova

A square-root method for identifying the parameters of discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals 341

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

S. I. Martynov, L. Yu. Tkach

Hydrodynamic mechanism of formation of the dynamic structure of a system of rotating particles 364

The rules of article design (in Russian) 380

The rules of article design (in English) 384

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 388

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 394

Author Index 398

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

Системы итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами

А. В. Багаев, Д. М. Ганеева

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются классические системы итерированных функций (СИФ), состоящие из конечного числа сжимающих отображений полного метрического пространства. Основная цель — исследовать класс СИФ, аттракторы которых являются канторовыми множествами, то есть совершенными вполне несвязными множествами. Важными представителями такого класса являются вполне несвязные СИФ, введенные Барнсли. Нами предложены другие определения вполне несвязной СИФ и доказана их эквивалентность определению Барнсли. Получены достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной. Показано, что инъективность отображений из СИФ влечет совершенность аттрактора и его несчетность. Доказано, что если отображения из СИФ являются инъективными, а сумма их коэффициентов сжатия меньше единицы, то аттрактор является канторовым множеством. В общем случае, эти условия не гарантируют вполне несвязность СИФ. Между тем показано, что если СИФ состоит из двух инъективных отображений, сумма коэффициентов сжатия которых меньше единицы, то СИФ является вполне несвязной. Построены примеры аттракторов СИФ, демонстрирующие, что условия доказанных теорем имеют только достаточный характер и не являются необходимыми.

Ключевые слова: система итерированных функций, аттрактор, канторово множество, адресное пространство, адресная функция

Для цитирования: Багаев А. В., Ганеева Д. М. Системы итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 287–301. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

Об авторах:

Багаев Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, abagaev@hse.ru

Ганеева Диана Маратовна, стажер-исследователь международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-4679-9335>, dganeeva@hse.ru



MSC2020 28A80

Iterated function systems whose attractors are Cantor sets

A. V. Bagaev, D. M. Ganeeva*HSE University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. In this paper we consider classical iterated function systems (IFS) consisting of a finite number of contracting mappings for a complete metric space. The main goal is to study the class of IFSs whose attractors are Cantor sets, i.e. perfect totally disconnected sets. Important representatives of this class are totally disconnected IFSs introduced by Barnsley. We have proposed other definitions of a totally disconnected IFS and proved their equivalence to the Barnsley definition. Sufficient conditions for IFS to be totally disconnected are obtained.

It is shown that injectivity of mappings from an IFS implies the perfection of the attractor and its uncountability. Also it is proved that if the mappings from an IFS are injective and the sum of their contraction coefficients is less than one, then the attractor is a Cantor set. In general case, these conditions do not guarantee totally disconnectedness of an IFS.

Meanwhile, it is shown that if an IFS consists of two injective mappings and the sum of their contraction coefficients is less than one, then the IFS is totally disconnected. Examples of IFS attractors are constructed, demonstrating that conditions of the proven theorems are only sufficient but not necessary.

Keywords: iterated function system, attractor, Cantor set, address space, address function

For citation: A. V. Bagaev, D. M. Ganeeva. Iterated function systems whose attractors are Cantor sets. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:3(2025), 287–301. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.287-301

About the authors:

Andrey V. Bagaev, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, abagaev@hse.ru

Diana M. Ganeeva, Research Assistant of International laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-4679-9335>, dganeeva@hse.ru

1. Введение

Понятие системы итерированных функций (СИФ) было впервые предложено Хатчинсоном [1] в 1981 году и позже всесторонне изучалось Барнсли [2] и др. СИФ играет важную роль в теории фракталов, а также находит применение в физике, инженерных науках, медицине, биологии, экономике и др. [3–5].

Системой итерированных функций (СИФ) на полном метрическом пространстве X называется конечный набор сжимающих отображений $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданных на

X . Согласно теореме Хатчинсона [1] для любой СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ на X существует единственное непустое компактное подмножество $\mathcal{A} \subset X$, инвариантное относительно S , то есть $f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}$ называется аттрактором СИФ S . Аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S может представлять собой как «простое» множество, так и иметь сложную структуру и являться фракталом. Поэтому теория систем итерированных функций является одним из важных инструментов построения фракталов.

Существуют многочисленные обобщения понятия СИФ, касающиеся либо условий, налагаемых на функции, составляющие систему, либо на базовое пространство [6–8].

Поскольку совокупность G всевозможных композиций отображений из S является полугруппой, то любая СИФ S определяет полугрупповую динамическую систему (G, X) . Как известно из работы [9], аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является глобальным аттрактором и единственным минимальным множеством динамической системы (G, X) . Таким образом, теория СИФ и их аттракторов может рассматриваться как одно из направлений в теории полугрупповых динамических систем.

В данной работе исследуется СИФ, аттракторы которых являются канторовыми множествами. Напомним, что совершенное вполне несвязное подмножество топологического пространства называется канторовым множеством.

Важным классом таких СИФ служат вполне несвязные СИФ. Понятие вполне несвязной СИФ предложено Барнсли [2]. В своем определении он использовал понятия адресного пространства и адресной функции.

Особый интерес к вполне несвязным СИФ связан с тем, что на аттракторе таких СИФ достаточно просто определяется преобразование, называемое сдвигом, которое обладает свойством хаотичности [2].

Мы предлагаем два других определения вполне несвязной СИФ, не использующие понятия адресного пространства и адресной функции, и доказываем, что они эквивалентны определению Барнсли (Теорема 2.1).

Применяя наш подход, мы получили достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной (Теорема 3.1, Теорема 3.2).

Хатчинсон [1] показал, что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , для которой сумма коэффициентов сжатия всех отображений из S меньше 1, является вполне несвязным. Данное условие не влечет совершенность аттрактора.

Нами доказано (Теорема 5.1), что аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , состоящей из отображений, инъективных на $\mathcal{A}$, является совершенным и несчетным множеством.

Применяя результат Хатчинсона и Теорему 5.1, мы получили достаточные условия, при которых аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является канторовым множеством (Теорема 5.2). Нужно отметить, что при этих условиях СИФ S , вообще говоря, не является вполне несвязной. Однако, в случае СИФ, состоящей из двух отображений, выполнение условий из Теоремы 5.2 гарантируют, что СИФ является вполне несвязной (Теорема 4.1).

В разделе 6 приведены примеры, иллюстрирующие содержание работы.

2. Эквивалентные подходы к понятию вполне несвязной СИФ

Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданной на полном метрическом пространстве X , $\Sigma = \{1, \dots, k\}$, $k > 1$. Напомним определения адресного пространства и адресной функции для СИФ S ([2]).

Адресным пространством Ω называется метрическое пространство всех последова-

тельностью $\sigma = \{\sigma_n\}$ чисел из Σ с метрикой ρ , определяемой формулой

$$\rho(\sigma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n - \omega_n|}{(k+1)^n},$$

где $\sigma = \{\sigma_n\}$; $\omega = \{\omega_n\} \in \Omega$. Как известно из работы [2], адресное пространство (Ω, ρ) является несчетным совершенным вполне несвязным компактным пространством. Таким образом, адресное пространство Ω является канторовым множеством.

Адресной функцией для СИФ S называется отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$, заданное формулой

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_n}(x),$$

где $\sigma = \{\sigma_n\} \in \Omega$; $x \in \mathcal{A}$. Отображение φ определено корректно (не зависит от выбора точки $x \in \mathcal{A}$), является непрерывным и сюръективным (см., например, [2, с. 127], Теорема 1).

Любой элемент из множества $\varphi^{-1}(x)$ называется адресом точки $x \in \mathcal{A}$. Вообще говоря, точка $x \in \mathcal{A}$ может иметь несколько адресов.

Определение 2.1 ([2]). Если каждая точка аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S имеет только один адрес (то есть адресная функция φ инъективна), то СИФ S называется вполне несвязной.

Для вполне несвязных СИФ адресная функция $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ биективна. Так как биективное непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство — гомеоморфизм, то аттрактор $\mathcal{A}$ вполне несвязной СИФ S является канторовым множеством.

Дадим два других определения вполне несвязной СИФ, не использующее понятия адресного пространства и адресной функции.

Определение 2.2. Система итерированных функций S с аттрактором $\mathcal{A}$ называется вполне несвязной, если:

- 1) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 2) $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset \forall i, j \in \Sigma, i \neq j$.

Для произвольного множества $B \subset X$ положим $B_{i_1 i_2 \dots i_p} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(B)$ $\forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \Sigma^p$.

Определение 2.3. Система итерированных функций S с аттрактором $\mathcal{A}$ называется вполне несвязной, если

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall (i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p, (i_1, i_2, \dots, i_p) \neq (j_1, j_2, \dots, j_p).$$

Теорема 2.1. Определения вполне несвязной СИФ, приведенные выше, эквивалентны.

Доказательство. Доказательство эквивалентности определений вполне несвязной СИФ проведем по следующей схеме:

$$\text{Определение 2.1} \Rightarrow \text{Определение 2.2} \Rightarrow \text{Определение 2.3} \Rightarrow \text{Определение 2.1}.$$

Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ является вполне несвязной в смысле Определения 2.1. Предположим, что отображение $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ не является инъективным, то есть существуют такие $x, y \in \mathcal{A}$, $x \neq y$, что $f_j(x) = f_j(y) = z$. Далее для адреса $\sigma = \{\sigma_n\} \in \Omega$ будем также использовать обозначение $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots$. Определим отображение $\tau_j: \Omega \rightarrow \Omega$ формулой $\tau_j(\sigma_1\sigma_2\dots) = j\sigma_1\sigma_2\dots \forall \sigma = \sigma_1\sigma_2\dots \in \Omega$. Из работы [2], имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\tau_j} & \Omega \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{f_j} & \mathcal{A}. \end{array} \quad (2.1)$$

Так как адресная функция биективна, то адреса $\sigma = \varphi^{-1}(x)$ и $\omega = \varphi^{-1}(y)$ различные. Тогда в силу коммутативности диаграммы (2.1) имеем

$$z = f_j(x) = f_j \circ \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_j(\sigma) = \varphi(j\sigma_1\sigma_2\dots),$$

$$z = f_j(y) = f_j \circ \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_j(\omega) = \varphi(j\omega_1\omega_2\dots).$$

Поскольку $\sigma \neq \omega$, то точка z имеет два различных адреса $j\sigma_1\sigma_2\dots$ и $j\omega_1\omega_2\dots$, что противоречит биективности адресной функции. Следовательно, сужения $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ являются инъективными отображениями $\forall j \in \Sigma$.

Предположим, что существуют такие $j, l \in \Sigma$, $j \neq l$, что $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Тогда найдутся такие $x, y \in \mathcal{A}$, что $f_j(x) = f_l(y) = z$. Пусть $\sigma = \varphi^{-1}(x)$ и $\omega = \varphi^{-1}(y)$ — адреса точек x и y соответственно. Коммутативность диаграммы (2.1) влечет

$$z = f_j(x) = f_j \circ \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_j(\sigma) = \varphi(j\sigma_1\sigma_2\dots),$$

$$z = f_l(x) = f_l \circ \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_l(\omega) = \varphi(l\omega_1\omega_2\dots).$$

Поскольку $j \neq l$, то точка z имеет два различных адреса $j\sigma_1\sigma_2\dots$ и $l\omega_1\omega_2\dots$, что противоречит биективности адресной функции. Следовательно, имеем $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) = \emptyset \forall j, l \in \Sigma, j \neq l$.

Итак, доказано, что Определение 2.1 влечет Определение 2.2.

Пусть теперь СИФ S удовлетворяет условиям 1) и 2) Определения 2.2. Докажем индукцией по m , что $\mathcal{A}_{\sigma_1\dots\sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\dots\omega_m} = \emptyset$ для разных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m), (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Sigma^m$. В силу условия 2) Определения 2.2 имеем $\mathcal{A}_{\sigma_1} \cap \mathcal{A}_{\omega_1} = \emptyset$ для $\sigma_1 \neq \omega_1$.

Пусть $\mathcal{A}_{\sigma_1\dots\sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\dots\omega_m} = \emptyset$ для любых двух разных наборов из Σ^m . Рассмотрим пересечение $\mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}}$. Если $\sigma_1 = \omega_1$, то наборы $(\sigma_2, \dots, \sigma_{m+1})$ и $(\omega_2, \dots, \omega_{m+1})$ из Σ^m различны и по предположению индукции пересечение $\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}} = \emptyset$, следовательно, в силу инъективности отображения $f_{\sigma_1}|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}} &= f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}}) \cap f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = \\ &= f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = f_{\sigma_1}(\emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma_1 \neq \omega_1$. Поскольку $\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}} \subset \mathcal{A}$, то в силу условия 2) Определения 2.2 имеем

$$\mathcal{A}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m+1}} \cap \mathcal{A}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_{m+1}} = f_{\sigma_1}(\mathcal{A}_{\sigma_2\dots\sigma_{m+1}}) \cap f_{\omega_1}(\mathcal{A}_{\omega_2\dots\omega_{m+1}}) = \emptyset.$$

Таким образом, $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} = \emptyset$ для разных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \Sigma^m$ и для всех $m \in \mathbb{N}$, то есть из Определения 2.2 следует Определение 2.3.

Покажем, что из условия Определения 2.3 следует инъективность адресной функции φ . Предположим противное: пусть существуют такие $\sigma, \omega \in \Omega$ и $m \in \mathbb{N}$, что $\varphi(\sigma) = \varphi(\omega) = x$ и $\sigma_1 = \omega_1, \dots, \sigma_{m-1} = \omega_{m-1}$, $\sigma_m \neq \omega_m$. В силу коммутативности диаграммы (2.1) имеем

$$x = \varphi(\sigma) = \varphi \circ \tau_{\sigma_1} \circ \dots \circ \tau_{\sigma_m}(\sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\dots) = f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_m} \circ \varphi(\sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\dots) \in \mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m},$$

$$x = \varphi(\omega) = \varphi \circ \tau_{\omega_1} \circ \dots \circ \tau_{\omega_m}(\omega_{m+1}\omega_{m+2}\dots) = f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_m} \circ \varphi(\omega_{m+1}\omega_{m+2}\dots) \in \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m}.$$

Таким образом, $x \in \mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m}$, то есть $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} \neq \emptyset$. Поскольку $\sigma_m \neq \omega_m$, то $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \neq (\omega_1, \dots, \omega_m)$ и по условию Определения 2.3 имеем $\mathcal{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \cap \mathcal{A}_{\omega_1 \dots \omega_m} = \emptyset$. Противоречие показывает, что $\sigma_m = \omega_m \forall m \in \mathbb{N}$, то есть $\sigma = \omega$ и адресная функция φ является инъективной.

Итак, показано, что из Определения 2.3 вытекает Определение 2.1, что завершает доказательство Теоремы 2.1. $\square$

Замечание 2.1. Как показывают Примеры 6.1 и 6.5, вполне несвязность аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S не влечет, вообще говоря, вполне несвязность СИФ S .

3. Достаточные условия, при которых СИФ является вполне несвязной

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ — СИФ, заданная на полном метрическом пространстве X , $k > 1$. Обозначим через $\mathcal{K}$ семейство всех непустых компактных подмножеств в X . Поскольку X — полное метрическое пространство, то $\mathcal{K}$, наделенное метрикой Хаусдорфа d_H , также является полным метрическим пространством. Отображение $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, заданное равенством

$$F(B) = f_1(B) \cup \dots \cup f_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K},$$

определено корректно и называется отображением Хатчинсона. Согласно теореме Хатчинсона [1] отображение F является сжимающим и поэтому по теореме о неподвижной точке для сжимающего отображения в полном метрическом пространстве существует единственное непустое компактное множество $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, удовлетворяющее равенству $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ или

$$f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Таким образом, для любой СИФ S существует единственный аттрактор $\mathcal{A}$. Более того, для любого компактного множества $B \in \mathcal{K}$ последовательность компактных подмножеств $\{F^n(B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в метрическом пространстве $(\mathcal{K}, d_H)$ к $\mathcal{A}$.

Теорема 3.1. Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ задана на полном метрическом пространстве X , $k > 1$, B — такое непустое компактное подмножество в X , что

- 1) $f_i(B) \subset B \forall i \in \Sigma = \{1, \dots, k\}$;
- 2) $f_i|_B: B \rightarrow B$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 3) $f_i(B) \cap f_j(B) = \emptyset \forall i, j \in \Sigma, i \neq j$.

Тогда СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством в B .

Доказательство. Пусть, как и ранее, $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S . Положим $A_n = F^n(B) \forall n \in \mathbb{N}$. В силу условия 1) выполнено включение $F(B) \subset B$, следовательно, имеем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X :

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

По теореме Хатчинсона [1]

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

причем $\mathcal{A} \subset B$.

Согласно условию 2) сужения $f_j|_B: B \rightarrow B$ инъективны $\forall j \in \Sigma$, поэтому сужения $f_j|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ также инъективны.

В силу условия 3) имеем $f_j(B) \cap f_l(B) = \emptyset \forall j, l \in \Sigma, j \neq l$. Поскольку $\mathcal{A} \subset B$, то $f_j(\mathcal{A}) \cap f_l(\mathcal{A}) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \Sigma$.

Таким образом, для СИФ S выполнены условия Определения 2.2. Как замечалось ранее, аттрактор $\mathcal{A}$ вполне несвязной СИФ S является канторовым множеством. $\square$

Замечание 3.1. Ранее [9], Теорема 7.2) первым автором получены достаточные условия, при которых аттрактор СИФ является канторовым множеством. В Теореме 3.1 формулируется более сильное утверждение, чем в Теореме 7.2 [9], и доказывается, что СИФ S вполне несвязна. Благодаря Теореме 2.1 условие биективности отображений $f_i \in S$ на всем X , требуемое в Теореме 7.2 [9], заменено на более слабое условие инъективности сужений $f_i|_B$ и, кроме того, существенно сокращено доказательство.

Теорема 3.2. Пусть СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ задана на полном метрическом пространстве X , $k > 1$, B — такое непустое компактное подмножество в X , что

$$1) f_i(B) \subset B \forall i \in \Sigma;$$

$$2) B_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap B_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset \forall p \in \mathbb{N}, \forall (i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p, (i_1, i_2, \dots, i_p) \neq (j_1, j_2, \dots, j_p).$$

Тогда СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством в B .

Доказательство. Пусть $A_n = F^n(B) \forall n \in \mathbb{N}$, где, как и ранее, $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S . В силу условия 1) имеем $F(B) \subset B$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X :

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

В силу теоремы Хатчинсона [1]

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Отметим, что $\mathcal{A} \subset B$. Отсюда имеем включение

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \subset B_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad \forall (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \Sigma^p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Поэтому благодаря условию 2) Теоремы 3.2

$$\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap \mathcal{A}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \emptyset$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и всех различных наборов $(i_1, i_2, \dots, i_p), (j_1, j_2, \dots, j_p) \in \Sigma^p$. Таким образом, для СИФ S выполнено условие Определения 2.3. Следовательно, СИФ S вполне несвязна, а ее аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. $\square$

4. Вполне несвязные СИФ, состоящие из двух отображений

Рассмотрим случай, когда СИФ состоит из двух сжимающих отображений. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i = 1, 2$. Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ и неподвижные точки отображений f_1 и f_2 различны, то $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \text{diam} \mathcal{A}$ — диаметр множества $\mathcal{A}$. Поскольку неподвижные точки x_1 и x_2 отображений f_1 и f_2 принадлежат аттрактору $\mathcal{A}$, а по условию x_1 и x_2 различны, то $\lambda > 0$. Положим $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{A})$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\text{diam} \mathcal{A}_i \leq \lambda_i \text{diam} \mathcal{A} = \lambda_i \lambda, \quad i = 1, 2.$$

Так как по определению аттрактора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, по условию $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ и $\lambda > 0$, то имеет место цепочка неравенств

$$\text{diam} \mathcal{A}_1 + \text{diam} \mathcal{A}_2 \leq \lambda_1 \lambda + \lambda_2 \lambda = (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda < \lambda = \text{diam} \mathcal{A} = \text{diam}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2). \quad (4.1)$$

Известно следующее неравенство

$$\text{diam}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \leq \text{diam} \mathcal{A}_1 + \text{diam} \mathcal{A}_2 + d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2), \quad (4.2)$$

где $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{A}_1, y \in \mathcal{A}_2\}$ — расстояние между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Из (4.1) и (4.2) получаем, что $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) > 0$. Отсюда $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Действительно, если бы $z \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, то

$$d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{A}_1, y \in \mathcal{A}_2\} = d(z, z) = 0,$$

но по доказанному $d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) > 0$. Итак, $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$. $\square$

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i = 1, 2$, причем:

- 1) неподвижные точки отображений f_1 и f_2 различны;
- 2) $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$;
- 3) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно, $i = 1, 2$.

Тогда СИФ S вполне несвязна, а ее аттрактор A — канторово множество.

Доказательство. В силу условий 1) и 2) согласно Лемме 4.1 выполнено равенство $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. По условию 3) отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Таким образом, для СИФ S выполнены оба условия Определения 2.2, поэтому СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор A — канторово множество. $\square$

Замечание 4.1. Если условие 1) в Теореме 4.1 не выполнено, то аттрактор A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ состоит из общей неподвижной точки отображений f_1 и f_2 .

Замечание 4.2. В Теореме 4.1 (как и в Теореме 5.1, Теореме 5.2) условие инъективности сужений $f_i|_A$ на аттрактор A отображений из S можно заменить на более жесткое условие инъективности отображений из S на всем пространстве X .

Замечание 4.3. Условие $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$ не гарантирует ни инъективности отображений f_1 и f_2 , ни неравенства $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, а условие $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ не влечет $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$ (см. Пример 6.2).

Замечание 4.4. Как показано в Примере 6.3, если СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ является вполне несвязной, а аттрактор A — канторовым множеством, из этого, вообще говоря, не следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$. Таким образом, условие 2) Теоремы 4.1 является только достаточным.

Замечание 4.5. Как известно из [1, с. 727] (Утверждение 9), если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, то аттрактор A является вполне несвязным множеством. Пример 6.1 показывает, что A в этом случае необязательно канторово множество, а СИФ S вполне несвязна. Таким образом, в Теореме 4.1 нельзя отказаться от условия 3).

С другой стороны, если A — связное множество, состоящее более чем из одной точки, то $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$. В обратную сторону, это утверждение неверно (см. Пример 6.2).

Следствие 4.1. Пусть аттрактор A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ не является связным множеством, а отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Тогда СИФ S вполне несвязна, а аттрактор A — канторово множество.

Доказательство. Согласно Теореме 2.5 из [11] если для аттрактора A СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ выполнено условие $f_1(A) \cap f_2(A) \neq \emptyset$, то A является связным множеством. Так как A не является связным, то $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. По условию Следствия 4.1 отображения $f_1|_A$ и $f_2|_A$ инъективны. Таким образом, выполнены условия Определения 2.2 и СИФ S является вполне несвязной, а ее аттрактор A — канторово множество. $\square$

5. Достаточные условия, при которых аттрактор является канторовым множеством

Воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 5.1. Пусть каждое отображение из СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, является инъективным на аттракторе A , и неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны, G — полугруппа, порожденная всевозможными композициями отображений из S . Тогда:

- 1) $\mathcal{A}$ — совершенное множество;
- 2) $\mathcal{A}$ является несчетным множеством;
- 3) полугруппа G не имеет замкнутых орбит;
- 4) $\mathcal{A}$ не является орбитой никакой своей точки.

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть аттрактор $\mathcal{A}$ имеет изолированную точку $x \in \mathcal{A}$. Как известно [1] (см. также [2]), $\mathcal{A}$ совпадает с замыканием множества всех неподвижных точек отображений из полугруппы G , порожденной S . Поскольку точка $x \in \mathcal{A}$ — изолированная, то найдется такое $g \in G$, что $g(x) = x$.

По условию неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны. Это означает, что в $\mathcal{A}$ найдется точка y , отличная от x . Поскольку $g \in G$ — сжимающее отображение как композиция сжимающих отображений из S , то $d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(x, y)$, где $\lambda \in [0, 1)$. Отметим, что из инъективности отображений из S на аттракторе $\mathcal{A}$ вытекает, что $\lambda > 0$. Отсюда имеем $d(x, g^n(y)) = d(g^n(x), g^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ и $y_n = g^n(y) \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Так как x — изолированная точка множества $\mathcal{A}$, то существует такая окрестность $U \subset X$ точки x , что $U \cap \mathcal{A} = \{x\}$. В силу сходимости $y_n \in \mathcal{A}$ к x , начиная с некоторого номера, $y_n \in U$. Обозначим через $N \in \mathbb{N}$ наименьший из таких номеров. В силу равенства $U \cap \mathcal{A} = \{x\}$ получаем $y_n = x$ для всех $n \geq N$. Тогда $y_{N-1} \notin U$ и $y_{N-1} \neq x$, при этом $g(y_{N-1}) = y_N = x = g(x)$. Но g является инъективным отображением как композиция инъективных отображений из S . Противоречие показывает, что аттрактор $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек. Кроме того, поскольку $\mathcal{A}$ — замкнутое множество, то $\mathcal{A}$ — совершенное множество.

2) Как доказано выше, $\mathcal{A}$ не имеет изолированных точек. Следовательно, для всех $x \in \mathcal{A}$ множество $\{x\}$ является нигде не плотным множеством в $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ компактно, то метрическое пространство $\mathcal{A}$ полно. Согласно теореме Бэра полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Поэтому $\mathcal{A}$ не может быть счетным.

3) Полугруппа G представляет собой всевозможные композиции отображений из конечного множества S , поэтому как G , так и любая орбита $G.x$, $x \in X$, являются не более чем счетными множествами. Согласно Теореме 5.1 из [9] $\mathcal{A} = \overline{G.x} \forall x \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \forall x \in X \setminus \mathcal{A}$. Предположим, что существует замкнутая орбита $G.x$. Если $x \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} = G.x$ и аттрактор $\mathcal{A}$ был бы счетным, что невозможно по доказанному в 2). Если $x \in X \setminus \mathcal{A}$, то $\mathcal{A} \subset G.x$ и из счетности орбиты $G.x$ вытекала бы счетность аттрактора $\mathcal{A}$, чего не может быть в силу 2). Таким образом, полугруппа G не имеет замкнутых орбит. В частности, $\mathcal{A} \neq G.x \forall x \in \mathcal{A}$, то есть 4) также доказано. $\square$

Следствие 5.1. Пусть G — полугруппа, порожденная всевозможными композициями отображений из СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, и неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны. Если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S удовлетворяет одному из условий: 1) $\mathcal{A}$ имеет изолированную точку; 2) $\mathcal{A}$ — конечное или счетное множество; 3) $\mathcal{A}$ совпадает с орбитой одной из своих точек, то хотя бы одно отображение из S не является инъективным на $\mathcal{A}$.

Замечание 5.1. Как показывает Пример 6.2, если $\mathcal{A}$ — совершенное множество, то отображения из СИФ не обязаны быть инъективными на $\mathcal{A}$. Таким образом, условие инъективности отображений из СИФ в Теореме 5.1 является только достаточным.

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ — аттрактор СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, λ_i — коэффициент сжатия отображения f_i , $i \in \Sigma = \{1, \dots, k\}$. Если:

- 1) неподвижные точки хотя бы двух отображений из системы S различны;
- 2) $f_i|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ инъективно $\forall i \in \Sigma$;
- 3) $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 1$,

то аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством.

Доказательство. Поскольку выполнены условия Теоремы 5.1, то аттрактор $\mathcal{A}$ является совершенным множеством. Согласно [1, с. 727] (Утверждение 9) из условия 3) Теоремы 5.2 вытекает, что аттрактор $\mathcal{A}$ — вполне несвязное множество. Таким образом, $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. $\square$

Замечание 5.2. Как показывает Пример 6.4, если СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, $k > 1$, является вполне несвязной, а аттрактор $\mathcal{A}$ — канторовым множеством, из этого, вообще говоря, не следует, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 1$. Таким образом, условие 3) Теоремы 5.2 является только достаточным.

Замечание 5.3. Как показывает Пример 6.5, условия 1)–3) Теоремы 5.2 не гарантируют, что СИФ S будет вполне несвязной, а если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S — канторово множество, то из этого, вообще говоря, не следует, что $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset$ $\forall i \neq j$, а, следовательно, не вытекает вполне несвязность СИФ S .

6. Примеры

Пример 6.1. Пусть СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ задана на вещественной прямой $\mathbb{R}$ отображениями $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, где $f_1(x) = \frac{x}{2}$, $f_2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S представляет собой счетное вполне несвязное компактное множество

$$\mathcal{A} = \{0, 1, \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

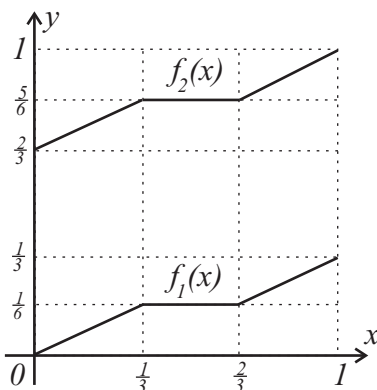
Поскольку $\mathcal{A}$ счетное, то СИФ S не является вполне несвязной. Таким образом, вполне несвязность аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ S не означает вполне несвязность СИФ S , а условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ не влечет за собой того, что аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством.

Пример 6.2. Пусть отображения $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2$, задаются равенствами

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right); \\ \frac{1}{6}, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \\ \frac{3x-1}{6}, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3x+4}{6}, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right); \\ \frac{5}{6}, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \\ \frac{x+1}{2}, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ представлены на Рис. 6.1.

Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ представляет собой два отрезка: $\mathcal{A} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Действительно, $f_1(\mathcal{A}) = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f_2(\mathcal{A}) = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, откуда $f_1(\mathcal{A}) \cup f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Рис. 6.1. Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ Fig. 6.1. Graphs of functions $f_1(x)$, $f_2(x)$

Отметим, что $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$. Следовательно, условие $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$ не гарантирует того, что S — вполне несвязная СИФ, а аттрактор $\mathcal{A}$ — вполне несвязное множество.

Поскольку $f_1(\frac{1}{3}) = f_1(\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$, $f_2(\frac{1}{3}) = f_2(\frac{2}{3}) = \frac{5}{6}$, то отображения $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$ не являются инъективными. Таким образом, совершенность аттрактора $\mathcal{A}$ не влечет инъективности отображений $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$.

Так как коэффициенты сжатия λ_1 и λ_2 отображений f_1 и f_2 равны $1/2$, то $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Следовательно, из равенства $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) = \emptyset$ не вытекает $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$.

Как известно ([11], Теорема 2.5), если для аттрактора $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ выполнено условие $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, то $\mathcal{A}$ является связным множеством. Поэтому данный пример также показывает, что альтернатива быть аттрактору $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ связным или вполне несвязным множеством имеет место при условии инъективности отображений $f_1|_{\mathcal{A}}$ и $f_2|_{\mathcal{A}}$ и в общем случае неверна.

Пример 6.3. Определим отображения $f_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, по формулам

$$f_1(z) = \lambda iz, \quad f_2(z) = \lambda i(z - 1) + 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Неподвижными точками преобразований f_1 и f_2 являются точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ соответственно. Отображение f_j представляет собой композицию поворота плоскости против часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг точки z_j и сжатия с коэффициентом λ и центром в z_j , $j = 1, 2$.

Как показано в [9] (Пример 8.3), при $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, f_2\}$ представляет собой прямоугольник P_λ с вершинами в точках

$$z_A = \frac{1}{1 - \lambda^2}, \quad z_B = \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2}, \quad z_C = \frac{-\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad z_D = 1 - \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2},$$

а при $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — канторово множество в прямоугольнике P_λ .

Отметим, что при $\lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ сумма коэффициентов сжатия отображений f_1 и f_2 удовлетворяет неравенству $\lambda + \lambda \geq 1$, при этом аттрактор $\mathcal{A}$ — канторово множество. Итак, условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ в Теореме 4.1 является только достаточным, но не необходимым.

Пример 6.4. Пусть точки A_i , $i = 1, \dots, 6$, являются вершинами правильного шестиугольника P на плоскости $\mathbb{R}^2$, $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 6$, — гомотетия с коэффициентом λ_i и центром в точке A_i . Известно ([12], Пример 3.1), что при $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{3}{10}$ аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ $S = \{f_1, \dots, f_6\}$ является канторовым множеством в P , при этом $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = \frac{33}{20} > 1$. Таким образом, условие 3) в Теореме 5.2 является только достаточным.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3/40$. Поскольку $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = \frac{29}{30} < 1$ и все f_i из S инъективны, то согласно Теореме 5.2 аттрактор $\mathcal{A}$ является канторовым множеством. Отметим, что в этом случае $f_1(A_3) = f_2(A_6) \in \mathcal{A}$, откуда $f_1(\mathcal{A}) \cap f_2(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, следовательно, S не является вполне несвязной.

Пример 6.5. Пусть отображения СИФ $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ заданы формулами:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right), \quad f_2(x, y) = (\lambda_2(x-3) + 3, \lambda_2 y), \quad f_3(x, y) = (\lambda_3 x, \lambda_3(y-1) + 1),$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_2 + \lambda_3 < 2/3$, $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. Поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 1$ и отображения из S инъективны, то по Теореме 5.2 аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S является канторовым множеством (см. Рис. 6.2). Точки $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$ лежат в аттракторе $\mathcal{A}$ как неподвижные точки отображений из S . Так как $f_1(3, 0) = f_3(0, 1) = (0, 1)$, то $(0, 1) \in f_1(\mathcal{A}) \cap f_3(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Следовательно, СИФ S не является вполне несвязной (см. Определение 2.2).

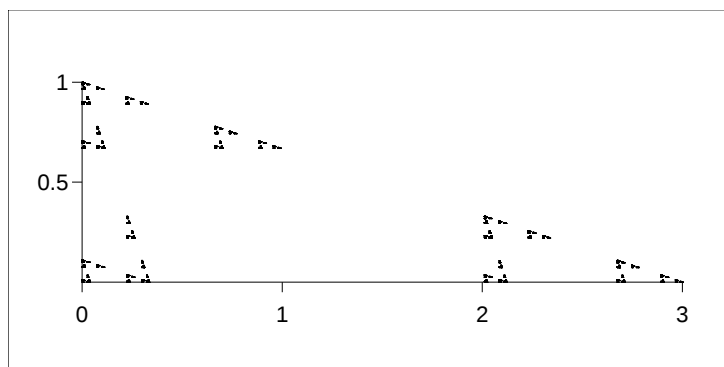


Рис. 6.2. Аттрактор $\mathcal{A}$ — канторово множество при $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.33$

Fig. 6.2. The attractor $\mathcal{A}$ is a Cantor set in the case $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.33$

Заметим, что этот пример можно обобщить для СИФ, состоящей из k отображений, где $k > 3$.

Таким образом, если аттрактор $\mathcal{A}$ СИФ S , состоящей из более чем двух отображений, является канторовым множеством, то из этого, вообще говоря, не следует вполне несвязность СИФ S .

Финансирование. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hutchinson J. E. Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Mathematics Journal*. 1981. Vol. 30, no. 5. P. 713–747
2. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.
3. Swishchuk A., Islam S. Random dynamical systems in finance. New York: CRC Press, 2016. 357 p. DOI: 10.1201/b14989
4. Acemoğlu D., Como G., Fagnani F., Ozdaglar A. Opinion fluctuations and disagreement in social networks. *Mathematics of Operations Research*. 2012. Vol. 38, no. 1. P. 1–27. DOI: 10.1287/moor.1120.0570
5. Gaspard P. Iterated function systems for DNA replication *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042403
6. Lesniak K., Snigireva N., Strobin F. Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2020. Vol. 26, no. 8. P. 1114–1173. DOI: 10.1080/10236198.2020.1760258
7. Khumalo M., Nazir T., Makhoshi V. Generalized iterated function system for common attractors in partial metric spaces *AIMS Mathematics*. 2022. Vol. 7, no. 7. P. 13074–13103. DOI: 10.3934/math.2022723
8. Abraham I. The Invariant Measure for a Countable Generalized Iterated Function System *Mediterr. J. Math.* 2024. Vol. 21. DOI: 10.1007/s00009-024-02751-9
9. Багаев А. В. Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства // *Журнал Среднево́лжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 4. С. 359–375. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375
10. Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley and Sons, 2014. 400 p.
11. Yamaguti M., Hata M., Kigami J. Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Vol. 167. 96 p. DOI: 10.1090/mmono/167
12. Багаев А. В. Об одном классе самоаффинных множеств на плоскости, заданных шестью гомотетиями // *Журнал Среднево́лжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 1. С. 519–530. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

*Поступила 13.06.2025; доработана после рецензирования 10.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.
2. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.
3. A. Swishchuk, S. Islam, *Random dynamical systems in finance*, CRC Press, New York, 2012 DOI: 10.1201/b14989, 357 p.
4. D. Acemoğlu, G. Como, F. Fagnani, A. Ozdaglar, “Opinion fluctuations and disagreement in social networks”, *Mathematics of Operations Research*, **38**:1 (2013), 1–27. DOI: 10.1287/moor.1120.0570
5. P. Gaspard, “Iterated function systems for DNA replication”, *Phys. Rev. E.*, **96** (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042403
6. K. Lesniak, N. Snigireva, F. Strobini, “Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **26** (2020), 1114–1173. DOI: 10.1080/10236198.2020.1760258
7. M. Khumalo, T. Nazir, V. Makhoshi, “Generalized iterated function system for common attractors in partial metric spaces”, *J. AIMS Mathematics*, **7** (2022), 13074–13103. DOI: 10.3934/math.2022723
8. I. Abraham, “The Invariant Measure for a Countable Generalized Iterated Function System”, *Mediterr. J. Math.*, **21** (2024). DOI: 10.1007/s00009-024-02751-9
9. A. V. Bagaev, “Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26** (2024), 359–375 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375
10. K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2014, 368 p.
11. M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigami, *Mathematics of Fractals*, American Mathematical Society, Providence, 1997 DOI: 10.1090/mmono/167, 90 p.
12. A. V. Bagaev, “On a class of self-affine sets on the plane given by six homotheties”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **25** (2023), 519–530 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.519-530

Submitted 13.06.2025; Revised 10.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

УДК 517.929.4

Оценка решений систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Д. С. Евтина, А. П. Жабко

Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. В работе представлен конструктивный алгоритм оценки решений дифференциально-разностных систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. Стоит отметить, что важным допущением является коммутативность матриц в левой части системы. Идея подхода заключается в представлении решений рассматриваемой системы через начальные функции и фундаментальную матрицу с последующим построением экспоненциальной оценки такого представления. На первом шаге алгоритма для системы заданы начальные условия. Далее получено представление системы в интегральной форме и введён оператор запаздывания. После рекурсивного применения оператора запаздывания к правой части системы её решения выражены через биномиальные коэффициенты, начальные функции и фундаментальную матрицу. Наконец на заключительном этапе после оценки по отдельности всех слагаемых, входящих в представление решений системы на предыдущем шаге, получена экспоненциальная оценка этих решений. При этом доказано, что оценка фундаментальной матрицы системы также имеет экспоненциальный вид. На практике разработанный метод позволит оптимизировать выбор управления для систем с запаздыванием нейтрального типа в смысле одной из ключевых характеристик управляемых систем - величины перерегулирования.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, несоизмеримые запаздывания

Для цитирования: Евтина Д. С., Жабко А. П. Оценка решений систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 302–314. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.302-314

Об авторах:

Евтина Диана Сергеевна, аспирант кафедры теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35), ORCID: <http://orcid.org/0009-0007-5417-606X>, diana.evtina@mail.ru

Жабко Алексей Петрович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6379-0682>, a.zhabko@spbu.ru



MSC2020 34K40

Estimation of solutions of neutral type systems with two incommensurate delays

D. S. Evtina, A. P. Zhabko

Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russian Federation)

Abstract. This paper presents the algorithm for estimating solutions of differential-difference systems of neutral type with two incommensurate delays in the neutral part. It is worth mentioning an important assumption about the commutativity of matrices in the left-hand side of the system. The idea of the approach is to represent the system's solutions in terms of initial functions and the fundamental matrix and then to construct an exponential estimate for this representation. At the first step, the system's initial conditions are set. Next, the system is rewritten in an integral form and the delay operator is introduced. After recursive application of this operator to the right-hand side of obtained system, the system's solutions are expressed via binomial coefficients, initial functions and the fundamental matrix. At the final step these expressions are used to make an exponential estimate of the solution. It is proved that the estimate of the fundamental matrix of the system also has an exponential form. In practice, the proposed method allows optimizing the control choice for neutral-type delay systems in sense of one of the crucial characteristics of the controlled systems, i.e. the overshoot value.

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, incommensurate delays

For citation: D. S. Evtina, A. P. Zhabko. Estimation of solutions of neutral type systems with two incommensurate delays. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:3(2025), 302–314. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.302-314

About the authors:

Diana S. Evtina, Postgraduate Student, Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Universitetsky av., 35, Saint Petersburg 198504, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0007-5417-606X>, diana.evtina@mail.ru

Alexey P. Zhabko, D.Sc. (Phys. and Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Universitetsky av., 35, Saint Petersburg 198504, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6379-0682>, a.zhabko@spbu.ru

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и их приложения являются предметом исследования множества научных работ [1–4]. Среди таких систем отдельно можно выделить дифференциально-разностные системы нейтрального типа [5–7]. При этом особый интерес представляют системы с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в левой части, так как случай соизмеримых запаздываний ранее уже был исследован в работе [8]. Также известно [8], что в случае рационального соотношения между отклонениями аргумента в нейтральной части система сводится

к уже хорошо изученному случаю единственного запаздывания. Известно, что динамические управляемые системы обладают двумя такими важными параметрами, как запас устойчивости и перерегулирование. Целью работы является разработка собственного метода оценки решений дифференциально-разностных систем уравнений с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части, позволяющего найти величину перерегулирования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - D_1 x(t - \tau) - D_2 x(t - h)] = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \int_{-\tau}^0 Q(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (2.1)$$

где A_0, A_1 и $D_1 \neq 0_{n \times n}$, $D_2 \neq 0_{n \times n}$ – заданные матрицы размерности $n \times n$, а компоненты матрицы $Q_{n \times n}(\theta)$ – ограниченные кусочно-постоянные функции. Далее будем считать, что матрицы в нейтральной части системы перестановочны и система экспоненциально устойчива [1]. Также зададим отношение порядка между запаздываниями $\tau \geq h > 0$ и будем полагать отношение τ и h иррациональным, т.е. рассмотрим несоизмеримые запаздывания.

В качестве начального момента времени для нашей стационарной системы выберем $t_0 = 0$. Тогда каждое из решений системы (2.1) определяется начальной функцией φ из семейства $\mathbb{C}^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) : x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Нашей задачей является разработка метода оценки решений системы (2.1).

3. Предварительные сведения

Определение 3.1. Квадратная матрица $K(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (2.1), если удовлетворяет следующим условиям [1]:

1.

$$K(t) = \begin{cases} 0_{n \times n}, & t < 0 \\ \mathbb{E}, & t = 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [K(t) - D_1 K(t - \tau) - D_2 K(t - h)] &= A_0 K(t) + A_1 K(t - h) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 Q(\theta) K(t + \theta) d\theta, \quad t > 0, \quad t \neq m\tau + lh, \quad m, l \in \mathbb{Z}, \quad m, l > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3. Матрица $K(t) - D_1 K(t - \tau) - D_2 K(t - h)$ непрерывна при $t \geq 0$, т.е.

$$\begin{aligned} K(t + 0) - D_1 K(t - \tau + 0) - D_2 K(t - h + 0) &= \\ = K(t - 0) - D_1 K(t - \tau - 0) - D_2 K(t - h - 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решения системы (2.1) могут быть представлены в форме Коши [1]:

$$\begin{aligned}
 x(t, \varphi) = & \left[K(t) - K(t - \tau)D_1 - K(t - h)D_2 \right] \varphi(0) + \\
 & + \int_{-\tau}^0 K(t - \tau - \theta)D_1 \varphi'(\theta) d\theta + \int_{-h}^0 K(t - h - \theta) \left[A_1 \varphi(\theta) + D_2 \varphi'(\theta) \right] d\theta + \\
 & + \int_{-\tau}^0 \left(\int_{-\tau}^{\theta} K(t - \theta + \xi) Q(\xi) d\xi \right) \varphi(\theta) d\theta. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

4. Основной результат

Вернёмся к системе (2.1) и обратимся к условиям её экспоненциальной устойчивости. Рассмотрим квазиполиномы

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda) &= \det \left(E - D_1 e^{-\lambda\tau} - D_2 e^{-\lambda h} \right), \\
 \psi(\lambda) &= \det \left(\lambda \left(E - D_1 e^{-\lambda\tau} - D_2 e^{-\lambda h} \right) - A_0 - e^{-\lambda h} A_1 - \int_{-\tau}^0 e^{\lambda\theta} Q(\theta) d\theta \right).
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\alpha_0 = \sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda \mid \varphi(\lambda) = 0 \right\}, \quad \alpha_1 = \sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda \mid \psi(\lambda) = 0 \right\}.$$

Теорема 4.1 ([8]). Система (2.1) экспоненциально устойчива по Ляпунову $\Leftrightarrow \alpha_1 < 0$.

Замечание 4.1. $\alpha_0 \leq \alpha_1$.

Сформулируем вспомогательную теорему об оценке нормы произведения двух коммутирующих матриц.

Теорема 4.2. Если квадратные матрицы A и B удовлетворяют условию $AB = BA$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число M такое, что

$$\|A^p B^q\| \leq M \max \left\{ \left| \mu_{i_k} \right|^{p+\varepsilon} \left| \lambda_{i_k} \right|^{q+\varepsilon}, \quad k = \overline{1, r} \right\} \leq M \max \left\{ \hat{\mu}^{p+q+\varepsilon}, \hat{\lambda}^{p+q+\varepsilon} \right\},$$

где $\hat{\mu} = \max \left\{ \mu_i, \quad i = \overline{1, l} \right\}$, $\hat{\lambda} = \max \left\{ \lambda_j, \quad j = \overline{1, m} \right\}$.

Доказательство. Пусть квадратные матрицы A и B удовлетворяют условию $AB = BA$, причём $\det B \neq 0$. Предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – собственные числа матрицы B кратностей $k_1, \dots, k_m$ ($k_1 + \dots + k_m = n$) соответственно.

Рассмотрим $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_1}\}$ – базис корневого пространства S_1^B для собственного числа λ_1 матрицы B . Если x_j – корневой вектор высоты k , то есть $(B - \lambda_1 \mathbb{E})^k x_j = 0$, то справедливо равенство $(B - \lambda_1 \mathbb{E})^k (Ax_j) = A \left[(B - \lambda_1 \mathbb{E})^k x_j \right] = 0$. Следовательно, $Ax_j \in S_1^B$. Таким образом, имеем включение $AS_1^B \subset S_1^B$.

Обозначим как S_j^B – корневое пространство для собственного числа λ_j матрицы B . Тогда справедливы включения $AS_j^B \subset S_j^B$, $j = \overline{1, m}$. Аналогично можно доказать справедливость включений $BS_i^A \subset S_i^A$, $i = \overline{1, l}$, для корневых пространств матрицы A . Заметим, что множество $S_j^B \cap S_i^A$ инвариантно относительно матриц A и B , причём собственные числа матриц A и B в этом множестве одинаковы и равны μ_i и λ_j соответственно. Рассмотрим все множества $S_j^B \cap S_i^A \neq \{0\}$ и перенумеруем их в виде $D_k = S_{j_k}^B \cap S_{i_k}^A \neq \{0\}$, $k = \overline{1, r}$. Очевидно, что прямая сумма $\sum_{k=1}^r \oplus D_k = \mathbb{R}^n$ и $B \sum_{k=1}^r \oplus D_k = \mathbb{R}^n$, поскольку матрица B не вырождена.

Пусть X_k – базис пространства D_k и $T = (X_1, \dots, X_r)$. Тогда справедливо равенство

$$T^{-1}ABT = \text{diag}[A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_rB_r],$$

в котором матрицы A_k и B_k имеют собственные числа, равные μ_{i_k} и λ_{j_k} соответственно. Следовательно для любого $\varepsilon > 0$ существует число M_k такое, что имеет место оценка

$$\|A_k\|^p \|B_k\|^q \leq M_k |\mu_{i_k}|^{p+\varepsilon} |\lambda_{j_k}|^{q+\varepsilon}.$$

Доказательство завершено.

Теперь перейдём к необходимым условиям экспоненциальной устойчивости системы (2.1).

Теорема 4.3 ([8]). *Если в системе (2.1) h/τ – рациональное число, то*

$$\alpha_0 = \max \left\{ \text{Re} \lambda \mid \varphi(\lambda) = 0 \right\}.$$

Если же h/τ – иррациональное число, то $\alpha_0 < 0 \Leftrightarrow$ все собственные числа матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ по модулю меньше единицы для $\forall |\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$.

Следствие 4.1 ([9]). $\alpha_0 < 0$, если $\|D_1\| + \|D_2\| < 1$.

Следствие 4.2. *Если $D_1D_2 = D_2D_1$ и $\alpha_0 < 0$, то $\left\| \prod_{i=1}^{k+l} D_{j_i} \right\|$, где $(j_1, j_2, \dots, j_{k+l})$ является перестановкой элементов строки $(1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2)$, удовлетворяет условию*

$$\left\| \prod_{i=1}^{k+l} D_{j_i} \right\| \leq Mr^{k+l},$$

в котором число r больше модулей всех собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$.

Перепишем нашу систему (2.1) в интегральной форме:

$$x(t) = D_1x(t - \tau) + D_2x(t - h) + f(t), \quad (4.1)$$

где

$$f(t) = x(0) - D_1 x(-\tau) - D_2 x(-h) + \int_0^t A_0 x(\xi) d\xi + \int_0^t A_1 x(\xi - h) d\xi + \\ + \int_0^t \int_{-\tau}^0 Q(\theta) x(\xi + \theta) d\theta d\xi.$$

Введём оператор запаздывания $e^{-pr} \circ f(t) = f(t - r)$. Тогда множество

$$K = \left\{ A e^{-ph} + B e^{-p\tau} : A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \right. \\ \left. (A e^{-ph} + B e^{-p\tau}) \circ f(t) = A f(t - h) + B f(t - \tau) \right\}$$

образует коммутативное кольцо операторов.

Если применить оператор запаздывания к правой части системы (4.1) $k - 1$ раз, то придём к равенству

$$x(t) = (D_1 e^{-p\tau} + D_2 e^{-ph})^k \circ x(t) + \sum_{j=1}^k f_j(t),$$

где $f_1(t) = f(t)$, а $f_j(t)$, $j = \overline{2, k}$, имеют рекурсивный вид:

$$f_j(t) = D_1 f_{j-1}(t - \tau) + D_2 f_{j-1}(t - h).$$

Чтобы записать решения системы через начальные функции, рассмотрим значение k , удовлетворяющее условию

$$t - \tau \leq m\tau + (k - m)h \leq t, \quad m = \overline{0, k}. \quad (4.2)$$

Из неравенства (4.2) вытекают следующие оценки:

$$\frac{t}{\tau} - 1 \leq k_1 \leq k \leq \left\lceil \frac{t}{h} \right\rceil = k_2, \\ k \leq m \leq k + \left\lceil \frac{t - kh}{\tau - h} \right\rceil \leq k + \left\lceil \frac{\tau}{h} \right\rceil, \quad \overline{m} = \min \left\{ \left\lceil \frac{\tau}{h} \right\rceil, k \right\}.$$

Тогда справедлива

Лемма 4.1. Решения системы (2.1) представимы в виде

$$x(t) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi(t - m\tau - (k - m)h) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_{k-1}^m D_1^m D_2^{k-1-m} f(t - m\tau - (k - 1 - m)h) \right). \quad (4.3)$$

В соответствии с доказательством теоремы 4.2 верхняя граница модулей собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$ определяется равенством

$$\sigma = \max \left\{ |\mu_{i_k}| + |\lambda_{i_k}|, \quad k = \overline{1, r} \right\},$$

в котором пара $(\mu_{i_k}, \lambda_{i_k})$ есть пара собственных чисел соответствующих квазидиагоналей матриц D_1 и D_2 в их каноническом представлении, и

$$D_1 = \text{diag} \left\{ D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1r} \right\},$$

$$D_2 = \text{diag} \left\{ D_{21}, D_{22}, \dots, D_{2r} \right\}.$$

Причём если $\sigma = |\mu_{i_i}| + |\lambda_{i_i}|$, то

$$|\mu_{i_i}|e^{-\alpha_0\tau} + |\lambda_{i_i}|e^{-\alpha_0h} = 1.$$

Следствие 4.3. Решения системы (2.1) допускают оценку

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m \|D_1\|^m \|D_2\|^{k-m} \|\varphi(t - m\tau - (k-m)h)\| + \|f_k(t)\| \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=k_1}^{k_2} \left[\left(\|D_1\| + \|D_2\| \right)^k \|\varphi\|_\tau + \|f_k(t)\| \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$

где $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Лемма 4.2. Для любого $\beta \in \left(\frac{1}{\tau} \ln \sigma, 0 \right)$ существует константа $\gamma \geq 1$ такая, что

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leq \gamma e^{\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $d = |\mu_{i_i}|e^{-\beta\tau} + |\lambda_{i_i}|e^{-\beta h}$. Не умаляя общности, будем считать, что величина r из следствия 4.2 удовлетворяет неравенству $\sigma < r < d < 1$ и

$$r = |\hat{\mu}_i|e^{-\alpha\tau} + |\hat{\lambda}_i|e^{-\alpha h}, \quad \frac{1}{\tau} \ln \sigma < \alpha < \beta.$$

Поскольку $r < 1$ и $k \geq k_1 \geq \frac{t}{\tau} - 1$, то

$$\|D_1^m D_2^{k-m}\| \leq M r^{\frac{t}{\tau} - 1}.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leq (k_2 - k_1 + 1) k^{\left[\frac{\tau}{h}\right] + 1} M r^{\frac{t}{\tau} - 1}.$$

Так как $k \leq k_2$ и $k_2 h \leq t$, то справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leq \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{\left[\frac{\tau}{h} \right] + 2} e^{\frac{t}{\tau} \ln r}.$$

Исходя из $r < d$, получаем $\alpha = \frac{1}{\tau} \ln r < \beta = \frac{1}{\tau} \ln d$. Поэтому если последнее неравенство представить в виде

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leq \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{\left[\frac{\tau}{h} \right] + 2} e^{(\alpha - \beta)t} e^{\beta t},$$

то очевидно существует конечное число

$$\gamma = \max_{t \geq 0} \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{\left[\frac{\tau}{h} \right] + 2} e^{(\alpha - \beta)t},$$

что и требовалось доказать.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

С л е д с т в и е 4.4. Оценка первого слагаемого, в представлении решения системы (2.1) в форме (4.3), имеет вид

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi(t - m\tau - (k - m)h) \right) \right\| \leq \gamma e^{\beta t} \|\varphi\|_{\tau}, \quad t \geq 0,$$

где $\beta \in \left(\frac{1}{\tau} \ln \sigma, 0 \right)$.

Чтобы оценить второе слагаемое из формулы (4.3), нам потребуется оценка фундаментальной матрицы $K(t)$ при $t \geq 0$. Так как матрица $K(t)$ имеет разрыв в точке $t = 0$: $K(0) = K(+0) = K(-0) + \mathbb{E}$, то в точках $t_{k_l} = k\tau + lh$ справедливо равенство

$$K(t_{k_l} + 0) - K(t_{k_l} - 0) = C_{k+l}^k D_1^k D_2^l.$$

В данной работе мы предполагаем, что $D_1 D_2 = D_2 D_1$ и собственные числа матрицы $D_1 \Theta_1 = D_2 \Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$ меньше единицы.

Л е м м а 4.3. Существует $\gamma \geq 1$ и σ такие, что норма фундаментальной матрицы допускает экспоненциальную оценку

$$\|K(t)\| \leq \gamma e^{\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим подход Харитонов В. Л. [8] к нашему случаю системы с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. В лемме 4.2 было показано, что

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\bar{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi(t - m\tau - (k - m)h) \right) \right\| \leq M r^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причём в нашем случае $0 < r < 1$. Тогда

$$\|K(t)\| \leq \frac{M}{1-r} + \frac{M}{1-r} \left(\|A_0\| + \|A_1\| + \int_{-\tau}^0 \|Q(\theta)\| d\theta \right) \int_0^t \|K(\xi)\| d\xi.$$

Применим лемму Гронуолла — Беллмана [10] и получим искомую оценку, где

$$\gamma = \frac{M}{1-r}, \quad \sigma = \frac{M}{1-r} \left(\|A_0\| + \|A_1\| + \int_{-\tau}^0 \|Q(\theta)\| d\theta \right).$$

Доказательство завершено.

Поскольку матрица $K(t)$ является кусочно-непрерывной при $t \geq 0$ и согласно лемме 4.3 подчиняется экспоненциальной оценке, то образ Лапласа фундаментальной матрицы равен

$$\int_0^\infty e^{-st} K(t) dt = G^{-1}(s), \quad s \in \mathbb{C}_\sigma^+,$$

$$G(s) = s \left(\mathbb{E} - D_1 e^{-s\tau} - D_2 e^{-sh} \right) - A_0 - A_1 e^{-sh} - \int_{-\tau}^0 e^{s\theta} Q(\theta) d\theta.$$

Рассмотрим матрицу

$$G_1(s) = \mathbb{E} - D_1 e^{-s\tau} - D_2 e^{-sh}.$$

Тогда функция $e^{st} G^{-1}(s)$ может быть представима в виде

$$e^{st} G^{-1}(s) = \frac{e^{st}}{s} G_1^{-1}(s) \left[\mathbb{E} - \frac{1}{s} A(s) G_1^{-1}(s) \right]^{-1},$$

где

$$A(s) = A_0 + e^{-sh} A_1 + \int_{-\tau}^0 e^{s\theta} Q(\theta) d\theta.$$

Повторяя выкладки, проведённые в работе [8], приходим к следующему результату.

Теорема 4.4. Если $\alpha_1 < 0$, то для любого $\beta \in (\alpha_1, 0)$ существует $\gamma \geq 1$ такая, что фундаментальная матрица $K(t)$ допускает оценку

$$\|K(t)\| \leq \gamma e^{\beta t}.$$

Доказательство. Поскольку $\sigma \geq 0$ и $\alpha_0 < \alpha < 0$, то матричные функции $G_1^{-1}(s)$ и $G^{-1}(s)$ суть аналитические функции в области $\mathbb{C}_\sigma^+$. Поэтому при $\beta > \sigma$

$$K(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} e^{st} G^{-1}(s) ds, \quad t > 0, \quad t \neq k\tau + lh.$$

Для всех $s \in \mathbb{C}_\beta^*$ справедливо равенство

$$G^{-1}(s) = \frac{1}{s} \left(\mathbb{E} - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2 \right)^{-1} + \frac{1}{s^2} \hat{Q}(s). \quad (4.5)$$

Поэтому получаем представление

$$K(t) = J_1(t) + J_2(t),$$

где

$$J_1(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s} \left[\mathbb{E} - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2 \right]^{-1} ds,$$

$$J_2(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s^2} \hat{Q}(s) ds.$$

Заметим, что первое слагаемое в представлении функции $G^{-1}(s)$ (4.4) есть образ Лапласа функции

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \chi(t - k\tau - lh) D_1^k D_2^l,$$

где

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Согласно следствию 4.4, получаем равенство

$$J_1(t) = F(t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} D_1^k D_2^l, \quad t \in [N\tau, (N+1)\tau].$$

В нашем случае $\|D_1^k D_2^l\| \leq M r^{k+l}$, поэтому

$$\|F(t)\| \leq M \sum_{j=0}^{k+l} r^j = M \frac{1 - r^{k+l}}{1 - r}.$$

Поскольку $r < 1$, то $\|F(t)\| \leq \frac{M}{1-r}$ при $t \geq 0$.

С другой стороны, функция $F(t)$ при $t \geq 0$ есть решение уравнения

$$F(t) = D_1 F(t - \tau) + D_2 F(t - h),$$

и поэтому для любого $\beta > \alpha_0$ найдётся $\hat{\gamma} \geq 1$ такая, что $\|F(t)\| \leq \hat{\gamma} e^{\beta t}$.

Следовательно, образ Лапласа матрицы $J_1(t)$ определяется написанным выше равенством для любого $\beta > \alpha_0$.

Матрицы $K(t)$ и $F(t)$ являются решениями системы (2.1) и при $t > 0$, $t \neq k\tau + lh$, для любого $\beta > \alpha_1$ определяются равенствами

$$K(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} e^{st} G^{-1}(s) ds,$$

$$F(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s} \left[\mathbb{E} - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2 \right]^{-1} ds.$$

Очевидно, что матрица $J_2(t) = K(t) - J_1(t)$ при $t \geq 0$ будет непрерывным решением системы (2.1), при $\beta > \alpha_1$ определяемое равенством

$$J_2(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s^2} \hat{Q}(s) ds.$$

Ранее было определено число σ как верхняя грань модулей собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$. Тогда для любого $r \in (\sigma, 1)$ и такого $\beta > \alpha_0$, что $e^{-\beta h} r < 1$, существует $M \geq 1$ и выполняется неравенство

$$\|G_1^{-1}(s)\| \leq \frac{M}{1 - e^{-\beta h} r} = r_1(\beta), \quad s \in \mathbb{C}_\beta^+.$$

Следуя работе Харитонов В. Л. [8], имеем оценку

$$\|A(s)\| \leq \|A_0\| + e^{-\beta h} \|A_1\| + \int_{-\tau}^0 e^{-\beta \theta} \|Q(s)\| d\theta = r_2(\beta), \quad s \in \mathbb{C}_\beta^+.$$

Выберем $\Omega > 0$ и $\Omega \geq 2r_1(\beta)r_2(\beta)$. Тогда получаем для любого $|\omega| \geq \Omega$ оценку

$$\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\| < 2r_1^2(\beta)r_2(\beta).$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\|J_2(t)\| \leq \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\|}{|\beta + i\omega|^2} d\omega \leq \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \left(\frac{4r_1^2(\beta)r_2(\beta)}{\Omega} + \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\|}{|\beta + i\omega|^2} d\omega \right) = \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \eta(\beta).$$

Следовательно, при $t \geq 0$ справедлива оценка фундаментальной матрицы

$$\|K(t)\| \leq \gamma e^{\beta t},$$

где

$$\gamma = \hat{\gamma} + \frac{1}{2\pi} \eta(\beta).$$

Доказательство завершено.

Применив теорему 4.4 для оценки решений (3.1) исходной системы (2.1), получаем следующий результат

Следствие 4.5. Для любого $\beta \in (\alpha_1, 0)$ существует $M \geq 1$ такое, что при $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|x(t, \varphi)\| \leq M e^{\beta t} \max \left\{ \|\varphi\|_\tau, \|\varphi'\|_\tau \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.
3. Вельмисов П.А., Маценко П.К., Тамарова Ю.А. Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 4. С. 442–457. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457
4. Лутошкин И.В., Чекареев А.Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 3. С. 260–279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279
5. Kharitonov V. L. Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time-delay systems: a single delay case *Int. J. Control*. 2005. Vol. 78, no 11. P. 783–800.
6. Kharitonov V. L., Mondie S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: An LMI approach *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2005. Vol. 50, no 5. P. 666–670.
7. Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems *IFAC Proceedings Volumes*. 2006. Vol. 39, no 10. P. 24–29.
8. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system. Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.
9. Евтина Д.С., Жабко А.П. Исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». 2024. Т. 2. С. 67–69.
10. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 216 с.

Поступила 05.04.2025; доработана после рецензирования 09.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. L. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*, Basel: Birkhauser, 2013, 311 p.
2. L. E. Elsgolts, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom*, Nauka, M., 1964 (In Russ.), 128 p.
3. P. A. Vel'misov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova, "Application of equations with deviating argument to mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26**:4 (2024), 442–457 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457
4. I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev, "Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26**:3 (2024), 260–279 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279
5. V. L. Kharitonov, "Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time-delay systems: a single delay case", *Int. J. Control*, **78**:11 (2005), 783–800.
6. V. L. Kharitonov, S. Mondie, J. Collado, "Exponential estimates for neutral time-delay systems: An LMI approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**:5 (2005), 666–670.
7. V. L. Kharitonov, "Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems", *IFAC Proceedings Volumes*, **39**:10 (2006), 24–29.
8. V. L. Kharitonov, *Exponential estimate for a simple neutral time delay system*, Course of lectures given in St. Petersburg State University, 2012, 19 p.
9. D. S. Evtina, A. P. Zhabko, "Issledovanie ustojchivosti sistem differentsial'nykh uravnenij s zapazdyvaniem nejtral'nogo tipa", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Ufmskaya osenniyaya matematicheskaya shkola"*, **2**:1 (2024), 67–69 (In Russ.).
10. R. Bellman, *Teoriya ustojchivosti reshenij differentsial'nykh uravnenij*, M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1954 (In Russ.), 216 p.

Submitted 05.04.2025; Revised 09.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций

А. И. Иноземцев

ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева» (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. Работа содержит достаточные условия действия обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в пространстве непрерывных функций, определенных на n -мерном параллелепипеде. Установлена непрерывность обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в случае его действия в пространстве непрерывных функций и в более общем случае непрерывных ядер операторов со значениями в пространстве измеримых и интегрируемых по Лебегу функций. Получены оценки норм обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в пространстве непрерывных функций. Показана зависимость оценки нормы линейного оператора типа Романовского с обобщенными частными интегралами от размерности пространства и от нормы непрерывных ядер обобщенных частно-интегральных операторов Романовского со значениями в пространстве измеримых и интегрируемых по Лебегу функций. Установленные свойства операторов применяются к исследованию линейных обобщенных частно-интегральных уравнений типа Романовского, в частности, к изучению обобщенного частно-интегрального уравнения n -связных цепей Маркова.

Ключевые слова: частно-интегральный оператор Романовского, марковские цепи, действие и непрерывность оператора, пространство непрерывных функций, норма оператора, пространство измеримых и интегрируемых по Лебегу функций

Для цитирования: Иноземцев А. И. Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324

Об авторах:

Иноземцев Алексей Иванович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева» (127434, Россия, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, a.inozemcev@rgau-msha.ru



MSC2020 57N10

On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions

A. I. Inozemtsev*Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy
(Moscow, Russian Federation)*

Abstract. The paper contains sufficient conditions for the action of generalized and linear generalized partial integral Romanovsky operator in the space of continuous functions defined on an n -dimensional parallelepiped. Continuity of these operators is established in case of their action in the space of continuous functions and, in a more general case of continuous kernels of operators with values in the space of measurable and Lebesgue integrable functions. Estimates are obtained for the norms of the operators mentioned. The dependence of the estimate for the norm of a linear Romanovsky type operator with generalized partial integrals on the space dimension and on the norm of continuous kernels of generalized partial integral Romanovsky operators with values in the space of measurable and Lebesgue integrable functions is shown. The properties established are applied to the study of linear generalized partial integral equations of Romanovsky type, in particular, to the study of generalized partial integral equation of n -connected Markov chains.

Keywords: partial integral Romanovsky operator, Markov chains, operator action and continuity, space of continuous functions, operator norm, space of measurable and Lebesgue integrable functions

For citation: *A. I. Inozemtsev. On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 27:3(2025), 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324*

About the authors:

Aleksey I. Inozemtsev, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, Department of Higher Mathematics, Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy (49, Timiryazevskay St., Moscow, 127434, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7662-8991>, a.inozemcev@rgau-msha.ru

1. Введение

Систематическое изучение выражений содержащих частные интегралы начато в середине XX-го века. Подробная теория линейных частно-интегральных операторов, заданных в двумерном евклидовом пространстве, получила развитие в работах профессора А. С. Калитвина, его учеников и последователей в работах [1], [2], [3], где изучались свойства операторов и уравнений с частными интегралами в некоторых функциональных пространствах. Свойства многомерных операторов и уравнений с частными интегралами, а также условия их обратимости в пространстве непрерывных функций содержатся в работе [4]. В работах [5], [6], [7] приведены условия существования и единственности многомерных частно-интегральных уравнений Фредгольма, содержащих операторы (1.1) в анизотропных пространствах Лебега. Необходимые и достаточные условия

действия частного случая операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций были получены в [8] лишь в случае $\mathbb{R}_2$ и при единственной перестановке переменных функции u в каждом частно-интегральном операторе. В работе [9] содержатся теоремы о разрешимости частно-интегральных уравнений Романовского, результаты о различных приближенных и численных методах их решения, так как явное решение таких уравнений удается найти лишь в редких случаях.

В работе рассматривается обобщенный частно-интегральный оператор Романовского

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_{\alpha}\Pi_{\beta}u)(x)$$

и линейный обобщенный частно-интегральный оператор Романовского

$$(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (R_{\alpha\beta}u)(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, принимающий значения m -элементного подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$(K_{\alpha}u)(x) = \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha} \quad (1.1)$$

— многомерный частно-интегральный оператор, некоторые свойства которого исследованы в более широком классе функций в [10]. В двумерном случае данный оператор был рассмотрен в работе [11]. Интегралы в (1.1) понимаются в смысле Лебега, $D_{\alpha} = [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}] \times \dots \times [a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m}]$, $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ — измеримые функции, $t_{\alpha} = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_m})$, Π_{β} — оператор перестановки переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $(\Pi_{\beta}u)(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n})$, а β — одна из перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$, которую кратко будем обозначать в виде мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Характерной особенностью таких операторов является содержание многомерного частно-интегрального оператора K_{α} и оператора перестановки Π_{β} переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ под знаком интеграла и последующим интегрированием по части переменных. В связи с этим теория таких операторов существенно отличается от теории интегральных операторов, так как не являются ни интегральными и ни компактными.

Изложим краткое содержание работы. В параграфе 2 приведена задача теории n -связных марковских цепей, приводящая к уравнению, содержащему обобщенный оператор типа Романовского. Параграфы 3 и 4 содержат достаточные условия непрерывности операторов $R_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ соответственно в пространстве непрерывных функций при условии их действия в нем ($R_{\alpha\beta}: C(D) \rightarrow C(D)$, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}: C(D) \rightarrow C(D)$), приведены аналогичные условия в более общем случае принадлежности ядер частно-интегральных операторов пространству $C(L_1(D))$. Содержатся оценки норм обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора типа Романовского в пространстве непрерывных функций.

2. Задача, приводящая к обобщенному уравнению типа Романовского

Пусть дан бесконечный ряд опытов случайной величины X , принимающей значения на отрезке $[a, b]$, пронумерованных числами $1, 2, 3, \dots$. Опыты разобьем на звенья:

нулевое звено образуют опыты $1, 2, \dots, n$, первое звено — опыты $2, 3, \dots, n+1$, и т.д. Пусть $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дифференциальный закон вероятности того, что значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины X попадают в k -е звено, $P_k(x_i)$ — дифференциальный закон того, что $X = x_i$ в k -ом опыте, при условии, что результаты других опытов неизвестны, тогда $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ — вероятность того, что X в $k + j$ -м опыте попадет в интервал $(x_j, x_j + dx_j)$, $j = \overline{1, n}$. Если функции $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $P_k(x_i)$ — непрерывны, то построенные звенья образуют непрерывную n -связную цепь Маркова. Полученные функции нормированы:

$$\int_{[a,b]^n} P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1, \quad \int_a^b P_k(x_i) dx_i = 1.$$

В силу теоремы сложения вероятностей

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{[a,b]^m} P_{k-m}(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}) \varphi(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) dt_1 dt_2 \dots dt_m, \quad (2.1)$$

где непрерывная на $[a, b]^n$ функция $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ — дифференциальный закон вероятностей того, что $X = \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ в опытах с номерами $n-m+1, \dots, n$ и что в предшествующих опытах $1, 2, \dots, n-m$ случайная величина X принимала значения $t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$. Пусть λ — произвольная постоянная, в (2.1) полагая $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^k u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим многомерное частно интегральное уравнение

$$\lambda u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{[a,b]^m} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \mathbf{x}_{n-m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}) dt_1 dt_2 \dots dt_m, \quad (2.2)$$

к решению которого сводится задача n -мерных марковских цепей.

В случае $n = 2$ данная задача была поставлена В.И. Романовским в работе [12], где приведено исследование уравнения

$$\lambda u(x, y) = \int_{[a,b]^m} \varphi(t, x, y) u(t, x) dt + f(x, y) \quad (2.3)$$

с непрерывным ядром, аналогично методу определителей Фредгольма. Уравнение (2.3) называется частно интегральным уравнением Романовского, а оператор $(Ru)(x, y) = \int_{[a,b]^m} \varphi(t, x, y) u(t, x) dt$ — частно интегральным оператором типа Романовского.

В случае $n > 2$ в уравнении (2.3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), y = (x_{n-m+1}, \dots, x_n), t = (t_1, t_2, \dots, t_m), m \leq n$. Уравнение (2.3) в таком случае называется обобщенным частно-интегральным уравнением Романовского, а оператор R — обобщенным оператором типа Романовского. Теория таких уравнений существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма, а оператор R — не интегральный и не компактный, так как неизвестная функция $u(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ интегрируется лишь по части переменных.

3. Обобщенные частно-интегральные операторы типа Романовского в пространстве непрерывных функций

Определим оператор

$$\Pi_\beta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}), \quad (3.1)$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс перестановки переменных функции u .

Композицию многомерного частно-интегрального оператора (1.1) и (3.1) будем называть обобщенным частно-интегральным оператором типа Романовского: $R_{\alpha\beta} = K_\alpha \circ \Pi_\beta$, т.е.

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_\alpha \Pi_\beta u)(x) = \int_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) \Pi_\beta u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha = \int_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta}) dt_\alpha. \quad (3.2)$$

Заметим, что оператор (3.2) является линейным, а оператор (3.1) — линейный и непрерывный.

Ниже приведены некоторые свойства оператора $R_{\alpha\beta}$ в пространстве $C(D)$, непрерывных на параллелепипеде $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ функций. Данные свойства содержат достаточные условия действия оператора $R_{\alpha\beta}$ в пространстве $C(D)$ и в случае $n = 2$ содержатся в работе [8].

Теорема 3.1. Если $R_{\alpha\beta}: C(D) \rightarrow C(D)$, то оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен.

Доказательство. Пусть $u(x) \in C(D)$, что означает $\Pi_\beta u(x) \in C(D)$, тогда $w(x) = (R_{\alpha\beta}u)(x) \in C(D)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Следовательно, функция $k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})$ интегрируема почти при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по t_α на D_α . Из свойств интеграла Лебега следует, что и функция $|k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})|$ интегрируема почти при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда на $C(D)$ определен оператор $(R_{\alpha\beta}u)(x) = \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})| dt_\alpha$, образы которого, в силу теоремы Фубини, принадлежат

пространству измеримых и почти всюду конечных функций. Покажем замкнутость оператора $R_{\alpha\beta}$. Пусть последовательности непрерывных функций $(u_n) \rightarrow u^* \in C(D)$ и $(R_{\alpha\beta}u_n) \rightarrow u^* \in C(D)$ по норме пространства $C(D)$. Покажем, что $R_{\alpha\beta}u^* = y^*$. Пусть (u_{n_k}) — подпоследовательность последовательности (u_n) такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{n_k} - u^*\| < \infty$.

Тогда ряд из непрерывных функций $|u^*(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_k}(x) - u^*(x)|$ равномерно сходится на D к непрерывной функции $z(x)$, из чего следует непрерывность функции $\Pi_\beta z(x)$. Таким образом, почти при всех $x \in D$ последовательность функций $k_\alpha(x; t_\alpha) u_{n_k}(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})$ сходится к функции $k_\alpha(x; t_\alpha) u^*(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})$ и ограничена интегрируемой на D_α функцией $|k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})|$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим сходимость $(K_\alpha \Pi_\beta u_{n_k})(x) \rightarrow (K_\alpha \Pi_\beta u^*)(x)$ почти при всех x или $(R_{\alpha\beta}u_{n_k})(x) \rightarrow (R_{\alpha\beta}u^*)(x)$, т.е. $R_{\alpha\beta}u^* = y^*$. Таким образом установлена замкнутость оператора R , а в силу теоремы Банаха о замкнутом графике, он непрерывен.

Доказательство завершено.

Рассмотрим банахово пространство $C(L_1(D_\alpha))$, содержащее множество непрерывных на D функций со значениями в $L_1(D_\alpha)$ с нормой

$$\|f\|_{C(L_1(D_\alpha))} = \max_{x \in D} \int_{D_\alpha} |f(x, t_\alpha)| dt_\alpha.$$

Множество непрерывных на $D \times D_\alpha$ функций всюду плотно в $C(L_1(D_\alpha))$.

Теорема 3.2. Если $k_\alpha \in C(L_1(D))$, то оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен, причем

$$\|R_{\alpha\beta}\| \leq \max_{x \in D} \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)| dt_\alpha.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in C(D)$, тогда функция $k_\alpha(x, t_\alpha)\Pi_\beta u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ является суммируемой по t_α на D_α , т.е. интеграл $\int_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha)\Pi_\beta u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha$ конечен и оператор $R_{\alpha\beta}$ определен на $C(D)$. Так как $k_\alpha \in C(L_1(D))$, то

$$\|k_\alpha\|_{C(L_1(D_\alpha))} = \max_{x \in D} \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)| dt_\alpha = M < \infty$$

и для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $|\bar{x} - \tilde{x}| < \delta_1$

$$\int_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha) - k_\alpha(\tilde{x}, t_\alpha)| dt_\alpha < \varepsilon_1.$$

Так как D — компакт, то по теореме Кантора непрерывная на нем функция $u(x)$ является и равномерно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что при $|\bar{x} - \tilde{x}| < \delta_2$ следует, что $|u(\bar{x}) - u(\tilde{x})| < \varepsilon_2$.

Пусть $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда

$$\begin{aligned} |(R_{\alpha\beta}u)(\bar{x}) - (R_{\alpha\beta}u)(\tilde{x})| &= |(K_\alpha \Pi_\beta u)(\bar{x}) - (K_\alpha \Pi_\beta u)(\tilde{x})| = \\ &= \left| \int_{D_\alpha} (k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha)\Pi_\beta u(\bar{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) - k_\alpha(\tilde{x}, t_\alpha)\Pi_\beta u(\tilde{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)) dt_\alpha \right| \leq \\ &\leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha)| |\Pi_\beta u(\bar{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) - \Pi_\beta u(\tilde{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)| dt_\alpha + \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha) - k_\alpha(\tilde{x}, t_\alpha)| |\Pi_\beta u(\tilde{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)| dt_\alpha \\ &\leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha)| dt_\alpha \int_{D_\alpha} \Pi_\beta |u(\bar{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) - u(\tilde{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)| dt_\alpha + \\ &+ \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar{x}, t_\alpha) - k_\alpha(\tilde{x}, t_\alpha)| dt_\alpha \int_{D_\alpha} \Pi_\beta |u(\tilde{x}_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)| dt_\alpha < \\ &< M\varepsilon + \|u\|\varepsilon = \varepsilon(M + \|u\|), \end{aligned}$$

так как $\|\Pi_\beta u\| = \|u\|$. Таким образом, функция $R_{\alpha\beta}u$ равномерно непрерывна, а следовательно и непрерывна. Имеем $R_{\alpha\beta}: C(D) \rightarrow C(D)$, что по Теореме 3.1 означает непрерывность оператора $R_{\alpha\beta}$.

Доказательство завершено.

Условие Теоремы 3.2 выполняется даже в случае, когда ядро $k_\alpha(x, t_\alpha)$ имеет разрывы вдоль конечного числа поверхностей $t_\alpha = (t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_m}) = (h_{\alpha_1}(x), \dots, h_{\alpha_m}(x))$ с непрерывными функциями $h_{\alpha_i}(x)$. Например, когда $k_\alpha(x, t_\alpha)$ является ядром типа потенциала, т.е. $k_\alpha(x, t_\alpha) = \frac{k_\alpha(x, t_\alpha)}{\left(\sum_\alpha (x_\alpha - t_\alpha)^2\right)^{\gamma/2}} \in C(L_1(D_\alpha))$, $0 < \gamma < 2$.

4. Линейные операторы типа Романовского с обобщенными частными интегралами в пространстве непрерывных функций

Линейным оператором типа Романовского с обобщенными частными интегралами называется оператор

$$(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (R_{\alpha\beta}u)(x), \quad (4.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $R_{\alpha\beta}$ — обобщенный частно-интегральный оператор типа Романовского (3.2). Первое суммирование в (4.1) ведется по мультииндексу α , принимающему значения всех подмножеств множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ и означающему номера переменных t_i по которым происходит интегрирование в частном интеграле. Количество всех значений, которые может принимать мультииндекс α равно 2^n . Второе суммирование в (4.1) ведется по мультииндексу β , который принимает значения всех перестановок переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функции u . Количество всех значений, которые может принимать мультииндекс β равно $n!$. В работе [8] рассмотрен двумерный случай линейного оператора типа Романовского с частными интегралами, в котором одному мультииндексу α соответствует лишь один мультииндекс β , т.е. одна перестановка переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В общем случае в (4.1) мультииндексы α и β меняются независимо друг от друга, одному мультииндексу α соответствует $n!$ значений мультииндекса β , в связи с этим количество слагаемых в (4.1) равно $2^n \cdot n!$.

Пусть $k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})$ — измеримые функции. Достаточные условия действия оператора (4.1) в пространстве непрерывных функций содержат Теоремы 4.1 и 4.2.

Теорема 4.1. Если $\mathcal{R}_{\alpha\beta}: C(D) \rightarrow C(D)$, то $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ непрерывен.

Доказательство. Рассмотрим непрерывную на D функцию $u(x)$, тогда для любого мультииндекса β функции $\Pi_{\beta}u(x)$ непрерывны и по условию теоремы $w(x) = (\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) \in C(D)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Следуя доказательству Теоремы 3.1 получим, что для любых мультииндексов α и β функции $k_{\alpha\beta}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})$ и $|k_{\alpha\beta}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})|$ интегрируемы почти при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, т.е. оператор $(\bar{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x; t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})| dt_{\alpha}$ с объемами в пространстве измеримых и почти всюду конечных функций определен на $C(D)$. Замкнутость оператора (3.2) следует из сходимости для любых α и β последовательностей функций $(K_{\alpha\beta}\Pi_{\beta}u_{n_k})(x)$ к функции $(K_{\alpha}\Pi_{\beta}u^*)(x)$ почти при всех x , где $u_{n_k}(x)$ — подпоследовательность последовательности $u_n(x)$, сходящейся по норме $C(D)$ к $u^*(x) \in C(D)$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{n_k} - u^*\| < \infty$. Таким образом, получим $(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u_{n_k})(x) \rightarrow (\mathcal{R}_{\alpha\beta}u^*)(x)$ или $\mathcal{R}_{\alpha\beta}x^* = y^*$, т.е. оператор (3.2) замкнут, а следовательно и непрерывен.

Доказательство завершено.

Теорема 4.2. Если $k_{\alpha\beta} \in C(L_1(D))$, то оператор $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ непрерывен, причем

$$\|\mathcal{R}_{\alpha\beta}\| \leq n! \max_{x \in D} \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})| dt_{\alpha}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Так как $k_{\alpha\beta} \in C(L_1(D))$, то по Теореме 3.2 оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен. Оператор $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, определяемый равенством (4.1), представляет собой сумму непрерывных операторов, а следовательно, сам непрерывен.

Для доказательства неравенства (4.2) зафиксируем мультииндексы $\alpha = \alpha^*$ и $\beta = \beta^*$. По Теореме 3.2 справедливо неравенство

$$\|R_{\alpha^*\beta^*}\| \leq \max_{x \in D} \int_{D_{\alpha^*}} |k_{\alpha^*\beta^*}(x, t_{\alpha^*})| dt_{\alpha^*}.$$

Количество мультииндексов β отвечающих α^* не превосходит $n!$, т.к. β отвечает за перестановку n переменных функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Получим, что для любого β , отвечающему α^* справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\beta} R_{\alpha^*\beta} \right\| \leq n! \max_{x \in D} \int_{D_{\alpha^*}} |k_{\alpha^*\beta}(x, t_{\alpha^*})| dt_{\alpha^*}.$$

Суммируя по α , получим

$$\left\| \sum_{\alpha} \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} \right\| \leq n! \max_{x \in D} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})| dt_{\alpha}$$

или

$$\|\mathcal{R}_{\alpha\beta}\| \leq n! \max_{x \in D} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})| dt_{\alpha}.$$

Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 578 p.
2. Kalitvin A.S., Kalitvin V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265, no. 2. P. 196–235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y
3. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.
4. Kalitvin A.S., Inozemtsev A.I., Kalitvin V.A. Integral equations with multidimensional partial integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 249, no. 4. P. 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8
5. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I., Trusova N.I. Fredholm integral equations with partial integrals in $\mathbb{R}_2$. *Jornal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 251, no. 6. P. 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

6. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Jornal Of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 255, no. 6. P. 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0
7. Inozemtsev A. I., Barysheva I. V. Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Jornal Of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, no. 4. P. 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5
8. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 191 с.
9. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations. *Journal Of Applied Engineering Science*. 2018. Vol. 16, no. 3. P. 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433
10. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7
11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two Dimentional Case. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 247, no. 6. P. 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8
12. Romanovskij V. Sur une classe d'équations intégrales linéaires. *Acta Mathematica*. 1932. Vol. 59. P. 99–208.

*Поступила 10.03.2025; доработана после рецензирования 28.06.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations*, 2020, 578 p.
2. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “Linear Operators and Equations with Partial Integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **265**:2 (2022), 196-235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y
3. A. S. Kalitvin, *Linejnye operatory s chastnymi integralami [Linear Operators with Partial Integrals]*, 2000 (In Russ.), 252 p.
4. A. S. Kalitvin, A. I. Inozemtsev, V. A. Kalitvin, “Integral equations with multidimensional partial integrals”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **249**:4 (2020), 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8
5. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, N. I. Trusova, “About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ ”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

6. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **255**:6 (2021), 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0
7. A. I. Inozemtsev, I. V. Barysheva, “Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5
8. A. S. Kalitvin, *Integralnye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Romanovsky integral equations with partial integrals]*, 2007 (In Russ.), 191 p.
9. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations”, *Journal Of Applied Engineering Science*, **16**:3 (2018), 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433
10. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7
11. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two dimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8
12. V. Romanovskij, “Sur une classe d’équations intégrales linéaires”, *Acta Math*, **59** (1932), 99–208 (In Fr.).

Submitted 10.03.2025; Revised 28.06.2025; Accepted 27.08.2025

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.5+519.65

Метод оптимального расположения узлов аппроксимации

Е. В. Конопацкий¹, О. В. Котова²

¹ ФГБОУ ВО "Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет" (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

² ФГБОУ ВО "Донбасская национальная академия строительства и архитектуры" (г. Макеевка, Донецкая Народная Республика, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье предложен метод оптимизации расположения узлов аппроксимации, реализованный на примере функции Рунге. В основу предложенного метода заложена идея о нелинейности пространства по осям декартовой системы координат. Для управления нелинейностью использована полиномиальная функция с параметром, равномерно распределенным на отрезке $[0, 1]$. Проведен сравнительный анализ следующих стандартных методов выбора узлов аппроксимации функции Рунге: равномерно по оси абсцисс, равномерно по оси ординат, равномерно по длине кривой, по узлам Чебышева. Для сравнения интерполяционных полиномов Лагранжа проведена оценка погрешностей аппроксимации функции Рунге. Представлены графики построенных полиномов Лагранжа для пяти и семи узлов, выбранных разными способами. Для выбора оптимального расположения узлов аппроксимации предложенного метода составлена целевая функция, минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов x_i по оси абсцисс. Расположение узлов аппроксимации по оси ординат определено вычислением значений y_i на основе исходной функции Рунге. В результате найдены узлы, которые обеспечивают минимальные отклонения от исходной аппроксимируемой функции Рунге. В качестве примера рассмотрены случаи пяти и семи узлов аппроксимации. Для визуализации полученных результатов приведены графики исходной функции Рунге и её аппроксимации с указанием найденных оптимальных узлов. Данный метод является устойчивым к увеличению количества узлов, расположение которых каждый раз оптимизируется и адаптируется к исходной функции.

Ключевые слова: аппроксимация, интерполяция, функция Рунге, узлы аппроксимации, равномерное разбиение, погрешность аппроксимации, оптимальное расположение узлов

Для цитирования: Конопацкий Е. В., Котова О. В. Метод оптимального расположения узлов аппроксимации // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 3. С. 325–340. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

Об авторах:

Конопацкий Евгений Викторович, д.т.н., доцент, директор института информационных технологий ННГАСУ (603000, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>, e.v.konopatskiy@mail.ru

Котова Ольга Викторовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО "ДОННАСА" (286123, Россия, г.о. Макеевка, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2), <https://orcid.org/0009-0004-6292-1080>, o.v.kotova@donnasa.ru

© Конопацкий Е. В., Котова О. В.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 41A10

Method of optimal placement of approximation nodes

E. V. Konopatskiy¹, O. V. Kotova²¹ *Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation*² *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk People's Republic, Russian Federation*

Abstract. In this article we propose a method for optimizing the arrangement of approximation nodes and use Runge function as an example to implement this approach. The method is based on the idea of nonlinearity of space along the axes of Cartesian coordinate system. To control the nonlinearity, we use a polynomial function with a parameter uniformly distributed over the segment $[0, 1]$. A comparative analysis of the following standard methods of selecting nodes for the approximation of Runge function was carried out: uniformly along the abscissa axis, uniformly along the ordinate axis, uniformly along the curve length, and by Chebyshev's nodes. To compare the Lagrange interpolation polynomials, we estimate the approximation errors of Runge's function. Graphs of the constructed Lagrange's polynomials for five and seven interpolation nodes selected in different ways are presented. To select the optimal arrangement of approximation nodes of the proposed method, we compile an objective function, whose minimization ensures optimal arrangement of nodes x_i along the abscissa axis. The arrangement of approximation nodes along the ordinate axis is determined by calculating the y_i values basing on the original Runge's function. As a result, we found nodes that provide minimal deviations from the original approximated Runge's function. The paper considers cases of five and seven approximation nodes. To visualize the results obtained, we provide graphs of original Runge's function and of its approximation, indicating the optimal nodes found. This method is stable to increasing the number of nodes, whose arrangement is optimized each time and adapted to the original function.

Keywords: approximation, interpolation, Runge's function, approximation nodes, uniform partitioning, approximation error, optimal node placement

For citation: E. V. Konopatskiy, O. V. Kotova. Method of optimal placement of approximation nodes. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:3(2025), 325–340. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

About the authors:

Evgeniy V. Konopatskiy, Doctor of Engineering, Docent, Director of the Institute of Information Technology, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation (65 Ilyinskaya st., Nizhny Novgorod 603000, Russian Federation), <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>, e.v.konopatskiy@mail.ru

Olga V. Kotova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture (2 Derzhavina st., Makeyevka, Donetsk People's Republic 286123, Russian Federation), <https://orcid.org/0009-0004-6292-1080>, o.v.kotova@donnasa.ru

1. Введение

Аппроксимация функций является важным инструментом математического моделирования. Она используется: в математике и статистике для упрощения сложных математических выражений ([1], [2], [3]), в физике и инженерной практике для моделирования физических процессов ([4], [5], [6]), в компьютерных науках для разработки алгоритмов и методов оптимизации ([7], [8], [9]), в экономике для создания экономических моделей и прогнозов ([10], [11], [12]). Частным случаем аппроксимации является интерполяция, которая также нашла широкое применение в различных отраслях науки и техники ([13], [14], [15]).

Некоторая сложная или эмпирически заданная функция является интерполированной с определённой точностью в некоторой ограниченной области, если она смоделирована с помощью простого аналитического выражения, например, полинома. Полученное выражение, в то же время, и аппроксимирует данную функцию в этой области.

Для проведения исследований выберем функцию Рунге, которая определена на отрезке $[-1, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

В работе [16] автор исследует полиномиальную аппроксимацию некоторых классических функций на отрезке $[-1, 1]$ с равноотстоящими друг от друга узлами и отмечает, что для функции Рунге интерполяционный процесс обладает следующим свойством: при увеличении числа узлов он расходится. В численном анализе данный феномен выражается в эффекте нежелательных колебаний. В [17] это объясняют близостью особых точек к узлам аппроксимации. Если узлы выбирать специальным образом, то можно повысить качество аппроксимации. Исходя из этого, возникает задача выбора узлов интерполяции, обеспечивающая максимальное качество аппроксимации.

2. Стандартные методы выбора узлов аппроксимации

Рассмотрим различные наборы узлов, полученные при равномерном разбиении и классическим методом, и сравним аппроксимацию функции Рунге в каждом из случаев. Определим оптимальное расположение узлов и построим по выбранным точкам интерполанты, аппроксимирующие данную функцию.

Для проведения исследований используются следующие способы расположения узлов интерполяции на отрезке $[-1, 1]$:

- 1) равномерно по оси абсцисс [16];
- 2) равномерно по оси ординат [17];
- 3) равномерно по длине кривой, построенной на основе функции Рунге [18];
- 4) узлы Чебышева [19].

Рассмотрим подробнее каждое разбиение.

- 1) Узлы, делящие отрезок $[-1, 1]$ на равные части, имеют вид:

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, \quad i = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Количество узлов в этом случае равно $2n + 1$. Рассмотрим и другие способы выбора такого же количества узлов, полученных при равномерном разбиении оси ординат и кривой $f(x)$.

2) Равномерное разбиение отрезка $[0, 1]$ на оси ординат осуществляется набором точек:

$$y_i = \frac{i}{n}, \quad i = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом x_i определяется по формуле:

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{1 - y_i}{25y_i}}.$$

3) Для равномерного разбиения по длине кривой необходимо вычислить её длину L :

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{2500x^2}{(1 + 25x^2)^4}} dx$$

и разделить на n ($n \in \mathbb{N}$) частей. Разбиение кривой $f(x)$ на участки длиной $\frac{L}{n}$ является равномерным.

4) Эффективным способом избежать феномена Рунге является использование узлов Чебышева.

При $n \in \mathbb{N}$ узлы Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ задаются формулой:

$$x_i = \cos \frac{(2i - 1)\pi}{2n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Их особенность в том, что они распределены не равномерно, а сконцентрированы ближе к краям интервала $[-1, 1]$. Интерполяция на узлах Чебышева значительно уменьшает колебания в крайних точках, тем самым улучшая аппроксимацию функции $f(x)$.

В качестве интерполяционного полинома будем использовать полином Лагранжа $L_n(f, x)$, который в узлах x_i совпадает со значениями функции $f(x)$:

$$L_n(f, x_i) = f(x_i).$$

Для $f(x) \in C[-1, 1]$ интерполяционный полином Лагранжа задается формулой:

$$L_n(f, x) = \sum_{i=0}^n f(x_i^{(n)}) l_i^{(n)}(x),$$

где $l_i^{(n)}(x)$ — лагранжевы многочлены влияния, удовлетворяющие условию:

$$l_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

задаются в виде:

$$l_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

3. Сравнительный анализ стандартных методов выбора узлов аппроксимации

В случае равномерного разбиения получаем набор из $(2n + 1)$ узлов (x_i, y_i) .
Приведем численные результаты выбора узлов при разных способах разбиения:
1) при $n = 2$ получаем пять узлов (табл. 3.1)

Таблица 3.1. Численные результаты выбора пяти узлов
Table 3.1. Numerical results of choosing five nodes

Разбиение оси x		Разбиение оси y		Разбиение кривой		Разбиение Чебышева	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
-1	0.038	-1	0.038	-1	0.038	-0.95	0.042
-0.5	0.138	-0.19	0.518	-0.3	0.302	-0.59	0.104
0	1	0	1	0	1	0	1
0.5	0.138	0.19	0.518	0.3	0.302	0.59	0.104
1	0.038	1	0.038	1	0.038	0.95	0.042

2) при $n = 3$ получаем семь узлов (табл. 3.2)

Таблица 3.2. Численные результаты выбора семи узлов
Table 3.2. Numerical results of choosing seven nodes

Разбиение оси x		Разбиение оси y		Разбиение кривой		Разбиение Чебышева	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
-1	0.038	-1	0.038	-1	0.038	-0.98	0.04
-0.67	0.083	-0.27	0.359	-0.5	0.138	-0.78	0.061
-0.33	0.265	-0.14	0.679	-0.19	0.532	-0.43	0.175
0	1	0	1	0	1	0	1
0.33	0.265	0.14	0.679	0.19	0.532	0.43	0.175
0.67	0.083	0.27	0.359	0.5	0.138	0.78	0.061
1	0.038	1	0.038	1	0.038	0.98	0.04

Для визуализации аппроксимации функции Рунге в случае пяти (рис. 3.1) и семи (рис. 3.2) узлов при разных способах разбиения обозначим: разбиение оси x — красным, разбиение оси y — черным, разбиение кривой — синим, разбиение Чебышева — зеленым цветами.

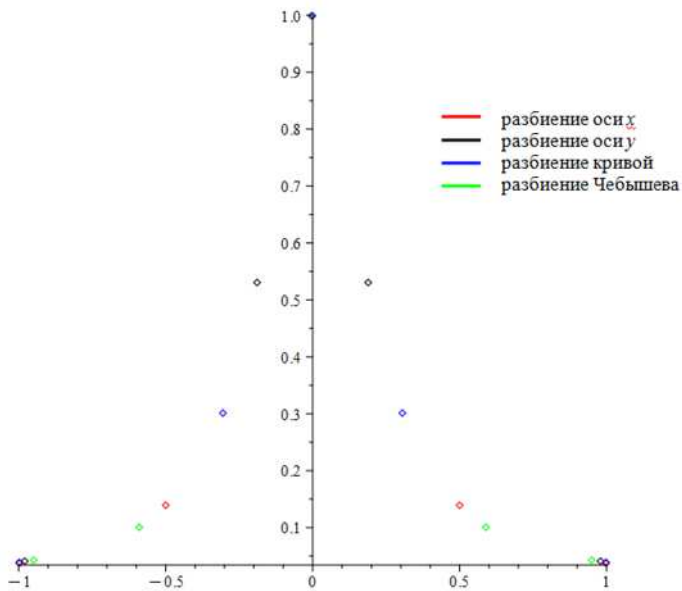


Рис. 3.1. Аппроксимация функции Рунге в случае пяти узлов

Fig. 3.1. Approximation of the Runge function in the case of five nodes

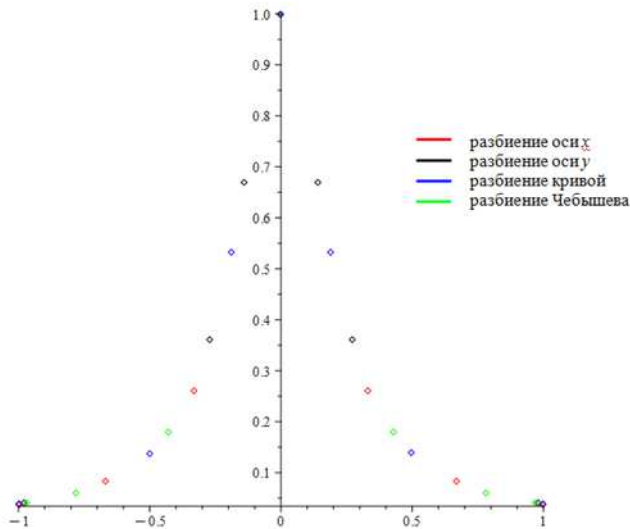


Рис. 3.2. Аппроксимация функции Рунге в случае семи узлов

Fig. 3.2. Approximation of the Runge function in the case of seven nodes

Сравнительный анализ аппроксимации функции Рунге в случае пяти и семи узлов подтвердил, что из рассмотренных стандартных методов выбора узлов аппроксимации лучше всего приближает функцию Рунге метод, основанный на использовании узлов Чебышева. Особенно это ощутимо при значительном увеличении количества узлов аппроксимации. Вместе с тем, ни один из исследованных методов не ставит и, соответственно, не решает задачу поиска оптимального расположения узлов аппроксимации с помощью целевой функции. Описанию именно такого метода на примере аппроксимации функции Рунге посвящён следующий раздел статьи.

4. Метод оптимального расположения узлов аппроксимации

Суть метода заключается том, что для выбора оптимального расположения узлов аппроксимации составляется целевая функция F , минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов x_i по оси абсцисс. Расположение узлов аппроксимации по оси ординат определяется вычислением значений y_i на основе исходной функции Рунге:

$$y_i = f(x_i) \equiv \frac{1}{1 + 25x_i^2}, \quad (4.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Подобная постановка задачи описана в работе [18], но в отличие от предложенного метода, использовалась кусочная функция в виде локальных параметрических кубических сплайнов Эрмита.

Традиционно, для интерполяции некоторой функции используются уже известные координаты узлов для вычисления полиномиальных коэффициентов. Такой подход даёт ограниченные возможности в управлении расположением узлов интерполяции, поскольку фактически расположение приходится определять наугад. Найти логические закономерности между расположением узлов и точностью аппроксимации исходной функции авторам не удалось. Тогда авторами был предложен метод, в основу которого заложена идея о нелинейности пространства по осям декартовой системы координат. Для управления этой нелинейностью используется полиномиальная функция с параметром $t \in [0, 1]$.

Такая полиномиальная интерполяция проведена отдельно по осям абсцисс и ординат. При этом в качестве значений параметра t выбираются точки, равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$:

– в случае пяти узлов

$$t \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

– в случае семи узлов

$$t \in \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

При построении целевой функции F используются две функции n переменных, зависящие от координат x_i узлов интерполяции и параметра t : $Y_1(x, t)$ и $Y_2(x, t)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Первая функция $Y_1(x, t)$ получена на основе исходной функции Рунге:

$$Y_1(x, t) = P_{n-1}(y, t), \quad (4.2)$$

где $P_{n-1}(y, t)$ — интерполяционный полином степени не выше $n - 1$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, переменные $y_i = y(x_i)$ определяются по формуле (4.1).

Вторая функция $Y_2(x, t)$ описывается параметрическими уравнениями, содержащими в качестве переменных координаты x_i узлов интерполяции и параметр t :

$$\begin{cases} X(x, t) = \tilde{P}_{n-1}(x, t), \\ Y_2(x, t) = \frac{1}{1+25X^2(x, t)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\tilde{P}_{n-1}(x, t)$ — интерполяционный полином степени не выше $n - 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i — искомые узлы.

Для пяти узлов в (4.3) получаем интерполяционные полиномы 4-го порядка:

$$\begin{aligned} X(x_i, t) = & x_1 \left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3} \bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \bar{t} t^3 \right) + x_2 \left(16 \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3} \bar{t} t^3 \right) + \\ & + x_3 \left(-12 \bar{t}^3 t + 40 \bar{t}^2 t^2 - 12 \bar{t} t^3 \right) + x_4 \left(\frac{16}{3} \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + 16 \bar{t} t^3 \right) + \\ & + x_5 \left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3} \bar{t} t^3 + t^4 \right), \\ Y_2(x_i, t) = & \frac{1}{1+25x_1^2} \left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3} \bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \bar{t} t^3 \right) + \frac{1}{1+25x_2^2} \left(16 \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3} \bar{t} t^3 \right) + \\ & + \frac{1}{1+25x_3^2} \left(-12 \bar{t}^3 t + 40 \bar{t}^2 t^2 - 12 \bar{t} t^3 \right) + \frac{1}{1+25x_4^2} \left(\frac{16}{3} \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + 16 \bar{t} t^3 \right) + \\ & + \frac{1}{1+25x_5^2} \left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3} \bar{t} t^3 + t^4 \right), \end{aligned}$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Для семи узлов — интерполяционные полиномы 6-го порядка:

$$\begin{aligned} X(x_i, t) = & x_1 (\bar{t}^6 - 8, 7\bar{t}^5 t + 22, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 8, 7\bar{t}^2 t^4 - \bar{t} t^5) + \\ & + x_2 (36\bar{t}^5 t - 133, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 61, 2\bar{t}^2 t^4 + 7, 2\bar{t} t^5) + \\ & + x_3 (-45\bar{t}^5 t + 301, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 184, 5\bar{t}^2 t^4 - 22, 5\bar{t} t^5) + \\ & + x_4 (40\bar{t}^5 t - 308\bar{t}^4 t^2 + 600\bar{t}^3 t^3 - 308\bar{t}^2 t^4 + 40\bar{t} t^5) + \\ & + x_5 (-22, 5\bar{t}^5 t + 184, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 301, 5\bar{t}^2 t^4 - 45\bar{t} t^5) + \\ & + x_6 (7, 2\bar{t}^5 t - 61, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 133, 2\bar{t}^2 t^4 + 36\bar{t} t^5) + \\ & + x_7 (-\bar{t}^5 t + 8, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 22, 7\bar{t}^2 t^4 - 8, 7\bar{t} t^5 + t^6), \\ Y_2(x_i, t) = & \frac{1}{1+25x_1^2} (\bar{t}^6 - 8, 7\bar{t}^5 t + 22, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 8, 7\bar{t}^2 t^4 - \bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_2^2} (36\bar{t}^5 t - 133, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 61, 2\bar{t}^2 t^4 + 7, 2\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_3^2} (-45\bar{t}^5 t + 301, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 184, 5\bar{t}^2 t^4 - 22, 5\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_4^2} (40\bar{t}^5 t - 308\bar{t}^4 t^2 + 600\bar{t}^3 t^3 - 308\bar{t}^2 t^4 + 40\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_5^2} (-22, 5\bar{t}^5 t + 184, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 301, 5\bar{t}^2 t^4 - 45\bar{t} t^5) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{1+25x_6^2}(7, 2\bar{t}^5t - 61, 2\bar{t}^4t^2 + 151, 2\bar{t}^3t^3 - 133, 2\bar{t}^2t^4 + 36\bar{t}t^5) + \\ + \frac{1}{1+25x_7^2}(-\bar{t}^5t + 8, 7\bar{t}^4t^2 - 22, 7\bar{t}^3t^3 + 22, 7\bar{t}^2t^4 - 8, 7\bar{t}t^5 + t^6),$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Рассмотрим параметр t на отрезке $[0, 1]$. Разобьём этот отрезок равномерно на m частей. Тогда

$$t_j = \frac{j-1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2, \quad j = 1, 2, \dots, m+1. \quad (4.4)$$

Значение m задается заранее и рекомендуется принимать $m > n$.

Целевая функция F представляет собой сумму квадратов разности между $Y_1(x, t)$ и $Y_2(x, t)$ (аналог суммы квадратов регрессионных остатков в регрессионном анализе):

$$F(x) = \sum_{j=0}^m (Y_1(x, t_j) - Y_2(x, t_j))^2, \quad (4.5)$$

где Y_1 и Y_2 находятся из (4.2) и (4.3) соответственно.

Поставим задачу о поиске глобального минимума целевой функции

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min.$$

Поскольку t_j определено в (4.4), целевая функция F зависит исключительно от искоемых значений координат узлов аппроксимации x_i . Минимизация полученной целевой функции F из (4.5) происходит по x_i и реализована с помощью численного метода дифференциальной эволюции для $x_i \in [-1, 1]$ (см., напр., [20]).

В приведенных примерах $m = 10$. Это означает, что отрезок, на котором изменяется параметр t , разбивается на 10 частей.

Для 5 узлов целевая функция F зависит от x_i ($i = 1, \dots, 5$), где x_1 и x_5 известны – это начало и конец отрезка, на котором определена исходная функция Рунге: $x_1 = -1$, $x_5 = 1$. Для такой функции необходимо найти только координаты x_2 , x_3 и x_4 , чтобы целевая функция (сумма квадратов отклонений аппроксимирующего полинома от исходной функции Рунге) была минимальной.

Аналогично для 7 узлов целевая функция F зависит от x_i ($i = 1, \dots, 7$), где $x_1 = -1$, $x_7 = 1$.

В результате минимизации функции F найдены значения координат узлов аппроксимации, обеспечивающие минимальные отклонения от исходной функции Рунге:

1) в случае пяти узлов аппроксимации

x_i	-1	-0.197	0	0.197	1
y_i	0.038	0.508	1	0.508	0.038

2) в случае семи узлов аппроксимации

x_i	-1	-0.345	-0.12	0	0.12	0.345	1
y_i	0.038	0.252	0.735	1	0.735	0.252	0.038

Точность аппроксимации определялась с помощью среднеквадратичной ошибки:

$$s^2 = \frac{F}{m+1},$$

выше, чем в данной работе в случае 5 узлов (рис. 4.1 а). В [22] реализован особый алгоритм на основе вейвлет-преобразования, обеспечивший квази-интерполяцию функции Рунге методом сингулярных вейвлетов с равномерным расположением узлов интерполяции на промежутке $[-1, 1]$. Для достижения качественного результата понадобилось 13 точек.

5. Заключение

Преимуществом предложенного метода оптимизации расположения узлов аппроксимации, помимо низких значений среднеквадратичной ошибки, является то, что метод является устойчивым к увеличению количества узлов, т.к. их расположение каждый раз оптимизируется и адаптируется к исходной функции. Другим преимуществом является значительное снижение степени аппроксимирующих полиномов по сравнению с другими методами аппроксимации без необходимости использования кусочных функций.

К недостаткам предложенного метода относится использование численных методов минимизации целевой функции, которые при реализации существующих методов поиска минимальных значений функции многих переменных в значительной степени зависят от качества выбора начального приближения. Перспективой дальнейших исследований является реализация предложенного метода для аппроксимации других непрерывных и дифференцируемых функций, а также массивов экспериментальных данных.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00003: <https://rscf.ru/project/25-21-00003/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kvasnikov V.P., Yehorov S.V., Shkvarnytska T.Yu. Technology for restoring functional dependencies to determine reliability parameters. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2021. Vol. 101, no. 1. P. 78–86. DOI: 10.31489/2021M1/78-86
2. Заляжных В.В. Аппроксимация процентных точек критерия Гири // *Математический вестник Вятского государственного университета*. 2022. Т. 27, № 4. С. 4–9. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.031
3. Горский В.В., Реш В.В. Конечно-разностная аппроксимация смешанных производных в уравнениях математической физики // *Математическое моделирование и численные методы*. 2021. Т. 32, № 4. С. 58–79. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-5879
4. Грицевич М.И., Лукашенко В.Т., Турчак Л.И. Аппроксимация решения уравнений метеорной физики элементарными функциями // *Математическое моделирование*. 2015. Т. 27, № 2. С. 25–33.
5. Konopatskiy E. V., Mashtaler S. N., Bezditnyi A. A. Study of high-strength steel fiber concrete strength characteristics under elevated temperatures using mathematical modelling methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*:

- International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety - 2. Building Materials and Products* (Chelyabinsk, September 25–27, 2019). Chelyabinsk: Institute of Physics Publishing, 2019. Vol. 687. P. 022040. DOI: 10.1088/1757-899X/687/2/022040
6. Конопацкий Е. В. Моделирование аппроксимирующего 16-точечного отсека поверхности отклика применительно к решению неоднородного уравнения теплопроводности // *Геометрия и графика*. 2019. Т. 7, № 2. С. 39–46. DOI: 10.12737/article_5d2c1a551a22c5.12136357
 7. Буянова И. В., Замулин И. С. Применение приближения с помощью кривых для определения вычислительной сложности решений задач по программированию // *Современные наукоемкие технологии*. 2022. Т. 2, № 5. С. 232–236. DOI: 10.17513/snt.39176
 8. Sobol V.R., Torishnyy R.O. Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 115–122. DOI: 10.14529/mmp220411
 9. Patseika P.G., Rouba Ya.A., Smatrytski K.A. On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier - Chebyshev series. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024. no. 2. P. 6–18.
 10. Вдовина Е. С., Дорофеев Б. В. Задача аппроксимации законов пенсионного страхования // *Процессы управления и устойчивость*. 2015. Т. 2, № 1. С. 579–583.
 11. Садыкова З. Ф., Абаев В. А. Построение математических моделей с использованием полиномиальных функций и матричных исчислений с применением систем нечетких линейных уравнений при решении экономических задач // *Мягкие измерения и вычисления*. 2023. Т. 66, № 5. С. 94–107. DOI: 10.36871/2618-9976.2023.05.008
 12. Кутышкин А. В. Моделирование динамики валового регионального продукта // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2021. Т. 21, № 2. С. 104–113. DOI: 10.14529/ctcr210210
 13. Konopatskiy, E.V., Bezditnyi A.A. Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method. *Journal of Physics: Conference Series: XIII International Scientific and Technical Conference "Applied Mechanics and Systems Dynamics"* (Omsk, November 5-7, 2019). Omsk: Institute of Physics Publishing, 2020. Vol. 1441. P. 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063
 14. Badalyan N.P., Shmelev V.E. A method of piece-quadratic interpolation of a tabled function with a continuous first derivative based on linear combination of Central-symmetric parabolas. *Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Electrical Engineering, Energetics*. 2023. no. 1. P. 50–58. DOI: 10.53297/18293328-2023.1-50

15. Botchkarev A. M. Using interpolation for generating input data for the Gross Domestic Product Monte Carlo simulation. *Beneficium*. 2023. Vol. 49, no. 4. P. 33–37. DOI: 10.34680/BENEFICIUM.2023.4(49).33-37
16. Чередниченко В. Г. О двух исторических примерах полиномиальной аппроксимации // *Сибирские электронные математические известия*. 2013. Т. 10. С. 55–58.
17. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. – 304 с.
18. Хачумов В. М. Оптимизация расположения узлов интерполирующего сплайна в задачах отработки типовых траекторий движения // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Материалы Всероссийской конференции с международным участием (Москва, 15–19 апреля 2019 г.). Москва: Российский университет дружбы народов, 2019. С. 329–334.
19. Rouba Ya. A., Smatrytski K. A., Dirvuk Ya. V. On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018. no. 3. P. 12–20.
20. Price K. V., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. DOI: 10.1007/3-540-31306-0
21. Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 38, № 1. С. 54–73. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
22. Романчук В. М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами // *Системный анализ и прикладная информатика*. 2018. № 2. С. 23–28.

*Поступила 17.02.2025; доработана после рецензирования 03.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. P. Kvasnikov, S. V. Yehorov, T. Yu. Shkvarnytska, “Technology for restoring functional dependencies to determine reliability parameters”, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **1**:101 (2021), 78–86. DOI: 10.31489/2021M1/78-86
2. V. V. Zalyazhnykh, “Approximation of percentage points Giri’s criterion”, *Mathematical Bulletin of Vyatka State University*, **4**:27 (2022), 4–9.
3. V. V. Gorsky, V., G. Resh, “Finite-difference approximation of mixed derivatives in equations of mathematical physics”, *Mathematical modeling and numerical methods*, **4**:32 (2021), 58–79. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-5879

4. M. I. Gritsevich, V. T. Lukashenko, L. I. Turchak, "Approximation of the solution meteoric physics's equations by elementary functions", *Mathematical modeling*, **27**:2 (2015), 25–33.
5. E. V. Konopatskiy, S. N. Mashtaler, A. A. Bezditnyi, "Study of high-strength steel fiber concrete strength characteristics under elevated temperatures using mathematical modelling methods", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety - 2. Building Materials and Products*. Vol. 687 (Chelyabinsk, September 25–27, 2019), Institute of Physics Publishing, Chelyabinsk, 2019, 022040 DOI: 10.1088/1757-899X/687/2/022040.
6. E. V. Konopatskiy, "Modeling of an approximating 16-point section of the response surface as applied to solving an inhomogeneous heat conduction equation", *Geometry and Graphics*, **7**:2 (2019), 39–46. DOI: 10.12737/article_5d2c1a551a22c5.12136357
7. I. V. Buyanova, I. S. Zamulin, "Application of approximation using curves to determine the computational complexity of solving programming problems", *Modern science-intensive technologies*, **5**:2 (2022), 232–236. DOI: 10.17513/snt.39176
8. V. R. Sobol, R. O. Torishnyy, "Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives", *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, **15**:4 (2022), 115–122. DOI: 10.14529/mmp220411
9. P. G. Patseika, Ya. A. Rouba, K. A. Smatrytski, "On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier - Chebyshev series", *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, **2** (2024), 6–18.
10. E. S. Vdovina, B. V. Dorofeev, "The problem of approximating pension insurance laws", *Control processes and stability*, **2**:1 (2015), 579–583.
11. Z. F. Sadykova, V. A. Abaev, "Construction of mathematical models using polynomial functions and matrix calculus using systems of fuzzy linear equations in solving economic problems", *Soft measurements and calculations*, **66**:5 (2023), 94–107. DOI: 10.36871/2618-9976.2023.05.008
12. A. V. Kutyshkin, "Modeling the dynamics of the gross regional product", *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technologies, control, radio electronics*, **21**:2 (2021), 104–113. DOI: 10.14529/ctcr210210
13. E. V. Konopatskiy, A. A. Bezditnyi, "Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method", *Journal of Physics: Conference Series: XIII International Scientific and Technical Conference "Applied Mechanics and Systems Dynamics"*. Vol. 1441 (Omsk, November 5-7, 2019), Institute of Physics Publishing, Omsk, 2020, 012063 DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.
14. N. P. Badalyan, V. E. Shmelev, "A method of piece-quadratic interpolation of a tabled function with a continuous first derivative based on linear combination of Central-symmetric parabolas", *Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Electrical Engineering, Energetics*, **1** (2023), 50–58. DOI: 0.53297/18293328-2023.1-50

15. A. M. Botchkarev, “Using interpolation for generating input data for the Gross Domestic Product Monte Carlo simulation”, *Beneficium*, **4**:49 (2023), 33–37. DOI: 10.34680/BENEFICIUM.2023.4(49).33-37
16. V. G. Cherednichenko, “On two historical examples of polynomial approximation”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **10** (2013), 55–58.
17. V. M. Tikhomirov, *Some issues in approximation theory*, Moscow. Moscow State University., 1976, 304 p.
18. V. M. Khachumov, “Optimization of the nodes’s arrangement of the interpolating spline in the problems of processing typical motion trajectories”, *Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems: Proceedings of the All-Russian conference with international participation* (Moscow. 15-19 april 2019), Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN), M., 2019, 329–334.
19. Ya. A. Rouba, K. A. Smatrytski, Ya. V. Dirvuk, “On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes”, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, **3** (2018), 12–20.
20. K. V. Price, R. M. Storn, J. A. Lampinen, *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, Berlin. Heidelberg: Springer., 2005, 544 c.
21. V. A. Galkin, T. V. Gavrilenko, A. D. Smorodinov, “Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks”, *Bulletin of KRAUNC. Physical and mathematical sciences*, **38**:1 (2022), 54–73. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
22. V. M. Romanchak, “Approximation by singular wavelets”, *System analysis and applied informatics*, **2** (2018), 23–28.

Submitted 17.02.2025; Revised 03.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:681.5.015

Квадратно-корневой метод идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами

Ю. В. Цыганова¹, Д. В. Галушкина², А. Н. Кувшинова³

¹ Университет Иннополис (АНО ВО «Университет Иннополис»)
(г. Иннополис, Российская Федерация)

² Ульяновский государственный университет (ФГБОУ ВО «УлГУ»)
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

³ Ульяновский государственный педагогический университет имени
И. Н. Ульянова (ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова») (г. Ульяновск,
Российская Федерация)

Аннотация. В работе предложен новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа для дискретных линейных стохастических систем в пространстве состояний с неизвестными входными сигналами. Разработан новый алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента на основе квадратно-корневой модификации метода Гиллельса – Де-Мора, использующий численно устойчивые матричные ортогональные преобразования. В отличие от известных решений, в данной работе применены оригинальные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований. Построена и теоретически обоснована новая модель чувствительности, позволяющая вычислить значения градиента критерия идентификации через частные производные оценок вектора состояния по идентифицируемым параметрам. Основные результаты включают новые уравнения квадратно-корневой модели чувствительности и квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента. Вычислительные эксперименты выполнены в системе MATLAB на примере решения задачи численной идентификации стохастической модели диффузии с неизвестными граничными условиями. Эффективность предложенного алгоритма подтверждается сравнением методов градиентного и безградиентного типов. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют работоспособность предложенного подхода, который может быть использован для решения практических задач идентификации параметров математических моделей, представленных дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний при отсутствии априорной информации о входных сигналах.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, дискретные линейные стохастические системы с неизвестными входными сигналами, одновременное оценивание входного сигнала и вектора состояния, квадратно-корневой алгоритм фильтрации, уравнения чувствительности фильтра

Для цитирования: Цыганова Ю. В., Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н. Квадратно-корневой метод идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 341–363. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363



Об авторах:

Цыганова Юлия Владимировна, д.ф.-м.н., профессор Института анализа данных и искусственного интеллекта, АНО ВО «Университет Иннополис» (420500, Россия, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Галушкина Дарья Валерьевна, ассистент кафедры информационных технологий, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4041-0533>, dgalushkina73@gmail.com

Кувшинова Анастасия Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова» (432071, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, kuvanulspu@yandex.ru

Original article

MSC2020 93B30

A square-root method for identifying the parameters of discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals

J. V. Tsyganova¹, D. V. Galushkina², A. N. Kuvshinova³

¹ *Innopolis University (Innopolis, Russian Federation)*

² *Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

³ *Ulyanovsk State University of Education (Ulyanovsk, Russian Federation)*

Abstract. The paper proposes a new square-root gradient-based parameter identification method for discrete-time linear stochastic state-space systems with unknown input signals. A new algorithm is developed for calculating the values of the identification criterion and its gradient. The approach is based on a square-root modification of the Gillijns–De Moor method and uses numerically stable matrix orthogonal transformations. Unlike the existing solutions, this paper uses original methods for differentiating matrix orthogonal transformations. A new sensitivity model is constructed and theoretically justified, that allows calculating the values of the identification criterion gradient by using partial derivatives of state vector estimates based on identified parameters. The main results include new equations for the square-root sensitivity model and a square-root algorithm for calculating the values of the identification criterion and its gradient. Numerical experiments were performed in MATLAB for example of solving the numerical identification problem of a stochastic diffusion model with unknown boundary conditions. The effectiveness of the proposed algorithm is confirmed by comparison of gradient-based and gradient-free methods. The results of numerical experiments demonstrate efficiency of approach proposed which can be used to solve practical problems of identifying the parameters of mathematical models represented by discrete-time state-space linear stochastic systems, in the absence of any prior information about the input signals.

Keywords: parameter identification, discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals, simultaneous input signal and state estimation, square-root filtering algorithm, filter sensitivity equations

J. V. Tsyganova, D. V. Galushkina, A. N. Kuvshinova. A square-root method for identifying the ...

For citation: *J. V. Tsyganova, D. V. Galushkina, A. N. Kuvshinova.* A square-root method for identifying the parameters of discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:3(2025), 341–363. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363

About the authors:

Julia V. Tsyganova, D. Sc. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Data Science and Artificial intelligence, Innopolis University, (1, Universitetskaya Str., Innopolis, 420500, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Darya V. Galushkina, Assistant Professor, Department of Information Technologies, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, 432017, Russia), ORCID:<https://orcid.org/0000-0003-4041-0533>, dgalushkina73@gmail.com

Anastasia N. Kuvshinova, Ph.D. (Phys. and Math.) Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University, (4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, kuvanulspu@yandex.ru

1. Введение

Проблема оценивания состояния и параметров стохастических систем при наличии неизвестных входных сигналов представляет значительный интерес в современных приложениях, когда априорная информация о динамике внешних воздействий полностью отсутствует. Традиционные методы, основанные на расширении вектора состояния и использовании фильтра Калмана, требуют знания модели входных сигналов, что ограничивает их применимость в таких областях, как геофизика, навигация и управление сложными динамическими системами.

В настоящее время разработаны различные подходы к решению этой задачи. При этом в классе дискретных стохастических систем самые ранние подходы были основаны на включении неизвестного вектора входных сигналов в вектор состояния системы. Предполагалось, что модель изменения вектора входных сигналов известна. В этом случае для решения задачи применялся хорошо известный расширенный фильтр Калмана [1]. Для того, чтобы снизить затраты на вычисления расширенного фильтра, Фридланд [2] предложил двухэтапный фильтр Калмана, в котором оценка состояния и неизвестный вход разделены. Хотя оба метода успешно используются во многих приложениях, они требуют знания динамической модели, описывающей неизвестные входные сигналы.

Другой подход к решению задачи был предложен Китанидисом [3], который разработал оптимальный рекуррентный фильтр для оценки вектора состояния, основанный на предположении, что априорная информация о неизвестных входных данных недоступна. Затем его результат был расширен в [4], где разработан метод фильтрации вектора состояния системы, а также определены условия устойчивости и сходимости фильтра. Далее в [5] была установлена связь между двухэтапным фильтром Фридланда и фильтром Китанидиса. Показано, что результат Китанидиса можно получить, сделав двухэтапный фильтр независимым от базовой модели входного сигнала. Кроме того, его метод позволяет вычислить оценки неизвестного входного сигнала в явном виде.

В случае полного отсутствия информации о характере входных сигналов алгоритмы совместного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов были

разработаны Гиллейнсом и Де-Мором [6], [7]. Используя линейную несмещенную оценку с минимальной дисперсией ошибки, они разработали трехэтапный рекуррентный фильтр, в котором оценка вектора состояния системы и неизвестных входных сигналов взаимосвязаны. Оценка вектора входных сигналов основана на методе наименьших квадратов, в то время как задача оценки вектора состояния решается с использованием метода, разработанного ранее Китанидисом. В недавней работе [8] предложено решение задачи одновременной оценки неизвестных входных сигналов и вектора состояния для линейной системы с матрицей распределения неполного ранга.

Все перечисленные результаты относятся к решению задач дискретной фильтрации, или совместного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов. Во всех постановках задач предполагалось, что матрицы, определяющие модель стохастической системы, точно известны.

Задача параметрической идентификации в классе дискретных линейных систем с неизвестными входными сигналами подразумевает более сложную постановку задачи, в которой вводится дополнительный источник априорной неопределенности, а именно, неизвестный векторный параметр, от элементов которого могут зависеть матрицы, определяющие уравнения модели. Такая постановка задачи при условии неизвестных входных сигналов и наличии случайных помех в уравнениях состояния и измерения описывает более высокую степень неопределенности дискретной линейной стохастической системы.

Задача параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами при наличии случайных помех была исследована в работах авторов [9], [10], [11]. Критерий идентификации для указанного класса систем был впервые предложен в [9], и затем применен для идентификации параметров модели движения объекта на плоскости [10] и модели реакции-диффузии [11]. Оба решения получены на основе стандартной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора [6].

Как и в случае методов калмановской фильтрации для дискретных линейных стохастических систем с известными входами, особое значение в практических приложениях имеют численно устойчивые модификации алгоритмов, основанные на матричных ортогональных преобразованиях различных видов [1], [12], [13], которые обладают повышенной устойчивостью к ошибкам машинного округления по сравнению со стандартными алгоритмами. Для систем с неизвестными входными сигналами определенные шаги в этом направлении сделаны в работах [7], [14], [15], в которых предложены следующие модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора: квадратно-корневая модификация информационная форма алгоритма [7], квадратно-корневая [14] и SVD-модификации [15] ковариационной формы алгоритма.

В данной работе на основе предложенной ранее квадратно-корневой модификации [14] ковариационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора мы предлагаем новый квадратно-корневой метод градиентного типа для решения задачи параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами. Разработанный подход направлен на повышение точности и вычислительной эффективности совместного оценивания параметров стохастической системы, вектора состояния и неизвестных входных сигналов.

Структура статьи включает следующие разделы: введение, пять основных разделов, заключение и список литературы. Во введении представлен краткий обзор о современном состоянии темы исследования. Во втором разделе описана постановка задачи. В третьем разделе подробно описана квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора. Четвертый раздел содержит описание разработанной модели чув-

ствительности на основе квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора и ее строгое математическое обоснование. В пятом разделе представлен новый квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента. Шестой раздел включает описание вычислительных экспериментов и обсуждение полученных результатов. Седьмой раздел содержит выводы о полученных результатах и завершает статью.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель дискретной линейной стохастической системы, представленную разностными уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_k = Fx_{k-1} + Bu_{k-1} + Gw_k, \\ z_k = Hx_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор неизвестных входных сигналов, $w_k \in \mathbb{R}^q$ — случайная помеха (вектор шума) в объекте; $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $v_k \in \mathbb{R}^m$ — случайная помеха (вектор шума) в измерителе; K — количество доступных измерений. Начальное состояние x_0 — гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\bar{x}_0$ и ковариацией Π_0 . Шумы w_k и v_k образуют независимые гауссовские последовательности с нулевым математическим ожиданием и матрицами ковариаций $Q \geq 0$ и $R > 0$, соответственно.

Поскольку доступной информацией является только вектор измерений z_k , оценить вектор состояния x_k и входной сигнал u_k представляется возможным с помощью метода дискретной фильтрации Гиллейнса – Де-Мора [6].

В данной работе рассмотрим более высокую степень априорной неопределенности и предположим, что стохастическая система (2.1) параметризована по θ , то есть зависит от неизвестного параметра, подлежащего оцениванию по данным зашумленных измерений z_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Следовательно, элементы системных матриц F , B , G , H , матрицы ковариаций шумов Q и R , а также начальные условия $\bar{x}_0$ и Π_0 могут зависеть от параметра θ . Это значит, что $F \equiv F(\theta)$, $B \equiv B(\theta)$, $G \equiv G(\theta)$ и т. д. Тогда уравнения адаптивного фильтра в форме алгоритма Гиллейнса – Де-Мора также будут зависеть от этого параметра.

АЛГОРИТМ 1. (Алгоритм одновременного оценивания вектора состояния и входных сигналов (S. Gillijns, B. De Moor [6]))

// Инициализация

Вход: $P_0 = \Pi_0(\theta)$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\theta)$.

Для $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнять**

// Обновление по времени

1. $\hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)\hat{x}_{k-1}(\theta)$,

2. $P_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)P_{k-1}F^T(\theta) + Q(\theta)$.

// Оценка неизвестного входного сигнала

3. $\tilde{R}_k(\theta) = H(\theta)P_{k|k-1}(\theta)H^T(\theta) + R(\theta)$,

4. $D_{k-1}(\theta) = (B^T(\theta)H^T(\theta)\tilde{R}_k^{-1}(\theta)H(\theta)B(\theta))^{-1}$,

5. $M_k(\theta) = D_{k-1}(\theta)B(\theta)^T H(\theta)^T \tilde{R}_k^{-1}(\theta) = (H(\theta)B(\theta))^+$,

6. $\hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_{k|k-1}(\theta))$.

// Обновление оценки вектора состояния по текущему измерению

7. $\hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta)\hat{u}_{k-1}(\theta)$,

8. $K_k(\theta) = P_{k|k-1}(\theta)H(\theta)^T \tilde{R}_k^{-1}(\theta)$,
9. $P_k^*(\theta) = (I - K_k(\theta)H(\theta))P_{k|k-1}(\theta)$,
10. $\hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_k^*(\theta))$,
11. $P_k(\theta) = P_k^*(\theta) + (I - K_k(\theta)H(\theta))B(\theta)D_{k-1}(\theta)B(\theta)^T(I - K_k(\theta)H(\theta))^T$.

Конец

Задача параметрической идентификации для систем вида (2.1) решена в [9], где авторами предложен новый инструментальный критерий идентификации на основе приведенной выше стандартной реализации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора (см. Алгоритм 1). В [11] указанное решение было применено для одновременной идентификации параметров модели реакции-диффузии и неизвестных граничных условий, а в [10] — для идентификации параметров модели движения объекта на плоскости.

Развивая и дополняя полученные ранее результаты, в данной работе мы предлагаем новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа в классе дискретных стохастических систем с неизвестными входными сигналами.

Основная идея заключается в построении нового алгоритма вычисления значений производных по параметру θ для всех векторов оценок и ковариационных матриц, входящих в уравнения квадратно-корневого фильтра.

3. Квадратно-корневой алгоритм дискретной фильтрации для одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов

Как и в случае методов калмановской фильтрации для дискретных стохастических систем с известным входными сигналами, для систем с неизвестными входными сигналами сравнительно недавно построены численно устойчивые модификации алгоритмов дискретной фильтрации, основанные на матричных ортогональных преобразованиях. Такие модификации обладают рядом преимуществ перед стандартными методами, среди которых можно отметить сокращение объема памяти, требуемой для хранения ковариационной матрицы (можно хранить и обновлять только матричный квадратный корень в форме треугольной матрицы), сохранение свойства симметричности ковариационных матриц и одно из главных преимуществ — применение на каждом шаге алгоритма численно устойчивой процедуры ортогонализации. Работа с матричными квадратными корнями позволяет повысить точность вычислений [1].

Так, квадратно-корневая модификация информационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора предложена в [7], а квадратно-корневая модификация ковариационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора предложена в [14]. В данной работе рассмотрим вторую из указанных модификаций и запишем алгоритм с учетом зависимости от неизвестного параметра θ . Обозначим через S_A матричный квадратный корень Хо-лесского в разложении $A = S_A S_A^T$, где A — квадратная положительно определенная матрица, S_A — нижняя треугольная матрица.

АЛГОРИТМ 2. (Квадратно-корневой ковариационный алгоритм дискретной фильтрации для систем с неизвестными входными сигналами)

Вход $\bar{x}_0(\theta)$, $\Pi_0(\theta)$

1. $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\theta)$, $S_{P_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta))$, $S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta))$, $S_R(\theta) = \text{chol}(R(\theta))$.

// Инициализация

Для $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнять**

// Прогноз оценки вектора состояния

2. $\hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)\hat{x}_{k-1}(\theta),$
3. $\begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}}^T(\theta)F^T(\theta) \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}.$
- // Оценка вектора входных сигналов
4. $\begin{bmatrix} S_{\bar{R}_k}^T(\theta) & \bar{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} S_{\bar{R}}^T(\theta) & 0 \\ S_{P_{k|k-1}}^T(\theta)H^T(\theta) & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix},$
5. $\begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)H(\theta)B(\theta) \end{bmatrix},$
6. $\bar{R}_k^{-1}(\theta) = S_{\bar{R}_k}^{-T}(\theta)S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta),$
7. $M_k(\theta) = S_{D_{k-1}}(\theta)S_{D_{k-1}}^T(\theta)B^T(\theta)H^T(\theta)\bar{R}_k^{-1}(\theta),$
8. $\hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_{k|k-1}(\theta)).$
- // Коррекция оценки вектора состояния
9. $K_k(\theta) = \bar{K}_k(\theta)S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta),$
10. $\hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta)\hat{u}_{k-1}(\theta),$
11. $\hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_k^*(\theta)),$
12. $\begin{bmatrix} S_{P_k}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = T_4 \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta)B^T(\theta)(I - K_k(\theta)H(\theta))^T \end{bmatrix}.$

Конец

Выход: $\hat{x}_k(\theta), S_{P_k}(\theta), \hat{u}_{k-1}(\theta), S_{D_{k-1}}(\theta), k = 1, 2, \dots, K.$

Замечание 3.1. На этапе инициализации алгоритма 2 разложение матриц P_0 , Q и R осуществляется с помощью алгоритма Холецкого [1], обозначенного выше как $\text{chol}(\cdot)$. Матрицы T_1 , T_2 , T_3 и T_4 являются матрицами ортогональных преобразований, приводящих соответствующие блочные матрицы к верхнему треугольному виду.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. [14] Алгоритмы 1 и 2 алгебраически эквивалентны.

Доказательство основано на проверке матричного равенства вида

$$A^T T^T T A = A^T I A = A^T A = R^T R,$$

где A — прямоугольная (в общем случае) блочная матрица, T — ортогональная матрица, I — единичная матрица, R — верхняя треугольная блочная матрица.

Главная сложность в построении квадратно-корневого метода параметрической идентификации градиентного типа заключается в построении соответствующей модели чувствительности, которая бы позволяла находить значения производных по параметру θ для всех векторов оценок и матричных квадратных корней ковариационных матриц, входящих в уравнения квадратно-корневого алгоритма 2. Перейдем к изложению основного результата.

4. Построение модели чувствительности на основе квадратно-корневого алгоритма одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов дискретной линейной стохастической системы

Модели чувствительности в классе дискретных стохастических систем применяют для анализа чувствительности математической модели к изменению ее параметров, а также при решении задач параметрической идентификации с помощью алгоритмов градиентного типа, для реализации которых адаптивный фильтр дополняют моделью чувствительности для вычисления значений градиента критерия идентификации [16].

Как правило, модель чувствительности получается в результате дифференцирования уравнений адаптивного фильтра, что приводит к системе матрично-векторных уравнений, известных как уравнения чувствительности фильтра (filter sensitivity equations [17]).

Стандартным подходом к построению модели чувствительности в классе алгоритмов дискретной фильтрации является дифференцирование матрично-векторных уравнений этих алгоритмов [18]. Однако в этом случае модель чувствительности, как и исходный алгоритм дискретной фильтрации, будет содержать операции обращения полной матрицы, что может негативно повлиять на вычислительные свойства алгоритма при наличии ошибок машинного округления. Одним из подходов к повышению численной устойчивости модели чувствительности является построение ее квадратно-корневой модификации.

Дополняя и развивая результаты, полученные в [14] и [19], построим новую модель чувствительности для квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора. Для решения поставленной задачи применим оригинальные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований, предложенные изначально в [20] для квадратной невырожденной матрицы и затем в [21] для прямоугольных и блочных матриц.

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A(\theta)$, параметризованную по $\theta \in \mathbb{R}$. Предположим, что область определения $\mathcal{D}(\theta)$ параметра θ такая, что для любого $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$ существует ортогональное разложение $T(\theta)A(\theta) = R(\theta)$, где $T(\theta)$ — матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду прямоугольной матрицы $A(\theta)$, $R(\theta)$ — верхняя треугольная матрица. Предположим также, что элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ и матрица производных $A'_\theta = \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta} \right\}$ известна. Требуется вычислить значения элементов матрицы R'_θ при заданном значении θ .

Далее приведем два результата, которые понадобятся нам для построения модели чувствительности.

Лемма 4.1. ([20], с. 1296) Пусть T — матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду квадратной невырожденной матрицы A , т. е. $TA = R$, где R — верхняя треугольная матрица. Пусть элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$(i) \quad T'_\theta T^T = \bar{L}^T - \bar{L}.$$

$$(ii) \quad TA'_\theta R^{-1} = \bar{L} + D + \bar{U}.$$

Следствие 4.1. Верхняя треугольная матрица R'_θ может быть найдена как

$$R'_\theta = (\bar{L}^T + D + \bar{U})R, \quad (4.1)$$

где матрицы $\bar{L}$, D и $\bar{U}$ получены из (i) и (ii) леммы 4.1.

Лемма 4.2. ([21], с. 1463) Пусть A — прямоугольная матрица размера $(n + m) \times n$ полного столбцового ранга и элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Представим ортогональное преобразование $TA = R$ в виде:

$$T \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_n \bigg\}^n_m = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_n \bigg\}^n_m, \quad (4.2)$$

где T — $(n + m) \times (n + m)$ -матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду прямоугольной матрицы A и R_1 — верхняя треугольная матрица размера $n \times n$. Обозначим

$$T \underbrace{\begin{bmatrix} (A_1)'_\theta \\ (A_2)'_\theta \end{bmatrix}}_n \bigg\}^n_m = \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_n \bigg\}^n_m, \quad (4.3)$$

где X, Y — соответствующие матричные блоки размеров $n \times n$ и $m \times n$. Тогда справедливы следующие соотношения:

- (i) Главный матричный блок размера $n \times n$ произведения $T'_\theta T^T$ может быть представлен в виде

$$(T_\theta T^T)_{1:n}^{1:n} = \bar{L}^T - \bar{L}. \quad (4.4)$$

- (ii) Строго нижняя треугольная матрица $\bar{L}$ из (4.4) является нижней треугольной частью произведения XR_1^{-1} , т. е.

$$XR_1^{-1} = \bar{L} + D + \bar{U}. \quad (4.5)$$

- (iii) Верхняя треугольная матрица $(R_1)_\theta$ размера $n \times n$ может быть вычислена как

$$(R_1)_\theta' = (\bar{L}^T + D + \bar{U})R_1, \quad (4.6)$$

где матрицы $\bar{L}$, D и $\bar{U}$ получены из (4.5).

- (iv) Матричный блок размера $m \times n$ произведения $T_\theta T^T$ может быть вычислен как

$$(T'_\theta T^T)_{1:n}^{(n+1):(n+m)} = -YR_1^{-1}. \quad (4.7)$$

Сформулируем основной теоретический результат данной работы. Для простоты считаем, что $\theta \in \mathbb{R}$.

Предложение 4.1. Модель чувствительности квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора определяется следующим алгоритмом 3:

АЛГОРИТМ 3.

Вход: θ , $\bar{x}_0(\theta)$, $\Pi_0(\theta)$.

// Инициализация

$$1. \hat{x}_0(\theta) = \bar{x}_0(\theta), S_{\Pi_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta)), S_{P_0}(\theta) = S_{\Pi_0}(\theta);$$

$$\hat{x}'_0(\theta) = \frac{\partial \bar{x}_0(\theta)}{\partial \theta}, S'_{P_0}(\theta) = \frac{\partial S_{P_0}(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta)), S'_Q(\theta) = \frac{\partial S_Q(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_R(\theta) = \text{chol}(R(\theta)), S'_R(\theta) = \frac{\partial S_R(\theta)}{\partial \theta}.$$

2. **Для** $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнить**

// Прогноз оценки вектора состояния и ее производной

$$3. \hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta) \hat{x}_{k-1}(\theta), \quad \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) = \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k-1}(\theta) + F(\theta) \hat{x}'_{k-1}(\theta).$$

$$4. \mathcal{A}_1(\theta) = \begin{bmatrix} (F(\theta) S_{P_{k-1}}(\theta))^T \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_1(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_1(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_1(\theta), \mathcal{A}'_1(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_1(\theta), \mathcal{R}'_1(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_1(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

// Оценка вектора входных сигналов и его производной

$$5. \mathcal{A}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_R^T(\theta) & 0 \\ (H(\theta) S_{P_{k|k-1}}(\theta))^T & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_2(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_2(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_2(\theta), \mathcal{A}'_2(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_2(\theta), \mathcal{R}'_2(\theta) \rangle,$$

$$\text{где } \mathcal{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_{R_k}^T(\theta) & \bar{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_2(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{R_k}^T(\theta))' & (\bar{K}_k^T(\theta))' \\ 0 & (S_{P_k^*}^T(\theta))' \end{bmatrix}.$$

$$6. \mathcal{A}_3(\theta) = [S_{R_k}^{-1}(\theta) H(\theta) B(\theta)], \mathcal{A}'_3(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_3(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\text{если } m = r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = [S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta)],$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = (S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))';$$

$$\text{если } m > r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$7. M_k(\theta) = S_{D_{k-1}}(\theta) S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T(\theta) H^T(\theta) S_{\bar{R}_k}^{-T}(\theta) S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta), M'_k(\theta) = \frac{\partial M_k(\theta)}{\partial \theta}.$$

$$8. \hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_{k|k-1}(\theta)),$$

$$\hat{u}'_{k-1}(\theta) = M'_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_{k|k-1}(\theta)) - M_k(\theta) \left(\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + H(\theta) \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) \right).$$

// Коррекция оценки вектора состояния

$$9. K_k(\theta) = \bar{K}_k(\theta) S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta), K'_k(\theta) = \bar{K}'_k(\theta) S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) - S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) S'_{\bar{R}_k}(\theta) S_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta).$$

$$10. \hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta) \hat{u}_{k-1}(\theta),$$

$$(\hat{x}_k^*(\theta))' = \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta} \hat{u}_{k-1}(\theta) + B(\theta) \hat{u}'_{k-1}(\theta).$$

$$11. \hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_k^*(\theta)),$$

$$\hat{x}'_k(\theta) = (\hat{x}_k^*(\theta))' + K'_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_k^*(\theta)) - K_k(\theta) \left(\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_k^*(\theta) + H(\theta) (\hat{x}_k^*(\theta))' \right).$$

$$12. \mathcal{A}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T(\theta) (I - K_k(\theta) H(\theta)) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_4(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_4(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_4(\theta), \mathcal{A}'_4(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_4(\theta), \mathcal{R}'_4(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_4(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_k}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Конец цикла

Выход: $\hat{x}_k(\theta)$, $\frac{\partial \hat{x}_k(\theta)}{\partial \theta}$, $\hat{u}_{k-1}(\theta)$, $\frac{\partial \hat{u}_{k-1}(\theta)}{\partial \theta}$, $S_{P_k}(\theta)$, $\frac{\partial S_{P_k}(\theta)}{\partial \theta}$, $S_{D_{k-1}}(\theta)$, $\frac{\partial S_{D_{k-1}}(\theta)}{\partial \theta}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Доказательство. Рассмотрим строки с номерами 1, 3, 7, 8–11 алгоритма 3. Уравнения для вычисления частных производных по параметру θ получаются прямым дифференцированием соответствующих уравнений алгоритма 2.

Доказательство уравнений в строках с номерами 4, 5, 6 и 12 заключается в применении методов дифференцирования матричных ортогональных преобразований вида $T\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

Рассмотрим строку 4. Применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_1(\theta)$ и $\mathcal{A}'_1(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_1(\theta)$, $A_1 = (F(\theta)S_{P_{k-1}}(\theta))^T$, $A_2 = S_Q^T(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_1(\theta)$. Тогда $R_1(\theta)$, $(R_1)'_\theta$ есть $S_{P_{k|k-1}}^T(\theta)$, $(S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))'$.

Рассмотрим строку 5. Применим к квадратным блочным матрицам $\mathcal{A}_2(\theta)$ и $\mathcal{A}'_2(\theta)$ Лемму 4.1, где $A = \mathcal{A}_2(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_2(\theta)$. Тогда R , $(R)'_\theta$ есть $\mathcal{R}_2(\theta)$, $\mathcal{R}'_2(\theta)$.

Рассмотрим строку 6. Матрица $\mathcal{A}_3(\theta)$ имеет размер $m \times r$. Из условия применимости алгоритма Гиллейнса–Де-Мора следует, что $\text{rank } B = r$. Отсюда $m \geq r$. Поэтому мы должны рассмотреть два случая: (а) $m = r$ и (б) $m > r$.

В случае (а) применим к квадратным блочным матрицам $\mathcal{A}_3(\theta)$ и $\mathcal{A}'_3(\theta)$ Лемму 4.1, где $A = \mathcal{A}_3(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_3(\theta)$. Тогда R , $(R)'_\theta$ есть $\mathcal{R}_3(\theta)$, $\mathcal{R}'_3(\theta)$.

В случае (б) применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_3(\theta)$ и $\mathcal{A}'_3(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_3(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_3(\theta)$. Тогда R_1 , $(R_1)'_\theta$ есть $S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta)$, $(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))'$.

Рассмотрим строку 12. Применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_4(\theta)$ и $\mathcal{A}'_4(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_4(\theta)$, $A_1 = S_{P_k}^T(\theta)$, $A_2 = S_{D_{k-1}}^T(\theta)B^T(\theta)(I - K_k(\theta)H(\theta))^T$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_4(\theta)$. Тогда $R_1 = S_{P_k}^T(\theta)$ и $(R_1)'_\theta = (S_{P_k}^T(\theta))'$.

Доказательство завершено.

Таким образом, предложенная новая модель чувствительности, основанная на квадратно-корневой модификации ковариационной формы алгоритма Гиллейнса–Де-Мора для одновременного оценивания неизвестного входного сигнала и вектора состояния дискретной линейной стохастической системы может быть использована для вычисления градиента критерия идентификации в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа.

На основании полученного результата разработаем новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа.

5. Квадратно-корневой метод параметрической идентификации дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами

Для решения задачи численной идентификации параметра θ модели (2.1) и неизвестных входных сигналов в работе [9] предложен новый инструментальный критерий идентификации. Воспользуемся данным результатом для построения нового квадратно-корневого метода параметрической идентификации градиентного типа.

Рассмотрим алгоритм 1. Если для заданного значения $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$ выполнено условие [3]

$$\text{rank } H(\theta)B(\theta) = \text{rank } B(\theta) = r, \quad (5.1)$$

то алгоритм Гиллейнса–Де Мора [6] позволяет одновременно оценивать вектор состояния x_k и неизвестные входные сигналы u_k дискретной стохастической системы (2.1) по данным зашумленных измерений z_k , $k = 1, \dots, K$.

Следуя [9], в качестве исходного критерия идентификации рассмотрим

$$\mathcal{J}_e(\theta) = \text{tr} [\mathbb{E} \{e_k(\theta)e_k^T(\theta)\}], \quad (5.2)$$

где $e_k(\theta) = x_k - \hat{x}_k^*(\theta)$ — ошибка оценки вектора состояния x_k , вычисляемой по алгоритму 1 для заданного значения θ .

Предположим, что матрицы H , B и R в модели (2.1) не зависят от параметра θ и $\text{rank } H = n$. Рассмотрим наблюдаемый процесс

$$\varepsilon_k(\theta) = W^+ z_k - \hat{x}_k^*(\theta), \quad (5.3)$$

где $W^+ = (H^T H)^{-1} H^T$.

Тогда инструментальный критерий идентификации имеет следующий вид:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta) = \text{tr} [\mathbb{E} \{\varepsilon_k(\theta)\varepsilon_k^T(\theta)\}]. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. [9] Пусть для модели (2.1) $\text{rank } HB = \text{rank } B = r$. Тогда $\mathcal{J}_e(\theta)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta)$ имеют один и тот же минимизатор и выполняется следующее соотношение:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta) = \mathcal{J}_e(\theta) + \text{Const}, \quad (5.5)$$

где величина $\text{Const} = \text{tr} [W^+ R (W^+)^T] - 2 \text{tr} [W^+ R M^T B^T]$ не зависит от θ .

Доказательство приведено в [9].

Заменив в (5.4) оператор математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ на равномерное усреднение по времени, запишем реализуемый на практике критерий идентификации:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \varepsilon_k(\theta), \quad (5.6)$$

который будем использовать для построения квадратно-корневого метода.

Для решения задачи параметрической идентификации дискретной стохастической системы (2.1) в качестве целевой функции будем использовать $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)$, минимизацию которого будем проводить численными методами оптимизации градиентного типа.

Таким образом, оценка параметра модели θ рассчитывается в алгоритме численной идентификации как

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}(\theta)} \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K).$$

Для вычисления значений критерия (5.6) будем использовать квадратно-корневой алгоритм 2, который позволяет на каждом шаге k вычислить значение оценки $\hat{x}_k^*(\theta)$, участвующей в формировании наблюдаемого процесса $\varepsilon_k(\theta)$.

Для построения метода параметрической идентификации градиентного типа рассмотрим случай векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^p$ и общее итерационное выражение для вычисления его оценки в градиентном методе первого порядка

$$\hat{\theta}^{j+1} = \hat{\theta}^j - \beta_j \nabla_{\theta} \mathcal{J}_\varepsilon(\hat{\theta}^j, K), \quad (5.7)$$

где $\hat{\theta}^j$ — оценка векторного параметра на j -й итерации алгоритма идентификации. В (5.7) ∇_{θ} означает оператор градиента $[\partial/\partial\theta_1 \mid \dots \mid \partial/\partial\theta_p]^T$ ($\theta \in \mathbb{R}^p$), который применяется к критерию (5.6) в точке $\theta = \hat{\theta}^j$; скалярный коэффициент β_j выбирают таким образом, чтобы выполнялось условие $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\hat{\theta}^{j+1}, K) \leq \mathcal{J}_{\varepsilon}(\hat{\theta}^j, K) + e$, где e — некоторая положительная константа [22].

Далее, поскольку векторный параметр θ можно представить как $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$, из (5.6) запишем

$$\nabla_{\theta} \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K) = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K S_k(\theta) \varepsilon_k(\theta), \quad (5.8)$$

где $S_k(\theta)$ — матрица чувствительности размера $p \times n$, у которой (ij) -й элемент

$$s_k^{(ij)}(\theta) = \frac{\partial \varepsilon_k^{(j)}(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n.$$

В свою очередь, каждый элемент вектора градиента (5.8) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K)}{\partial \theta_i} = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \varepsilon_k(\theta)}{\partial \theta_i} = -\frac{2}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \hat{x}_k^*(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (5.9)$$

Для вычисления оценок $\partial \hat{x}_k^*(\theta)/\partial \theta_i$ будем использовать построенную квадратно-корневую модель чувствительности (см. Предложение 4.1).

Сформулируем квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента с учетом предположений Теоремы 5.1.

АЛГОРИТМ 4. (Вычисление значений критерия $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K)$ и его градиента)

Вход: θ , $\bar{x}_0(\theta)$, $\Pi_0(\theta)$.

// Инициализация

1. $\hat{x}_0(\theta) = \bar{x}_0(\theta)$, $S_{\Pi_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta))$, $S_{P_0}(\theta) = S_{\Pi_0}(\theta)$;

$$\hat{x}'_0(\theta) = \frac{\partial \bar{x}_0(\theta)}{\partial \theta}, \quad S'_{P_0}(\theta) = \frac{\partial S_{P_0}(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta)), \quad S'_Q(\theta) = \frac{\partial S_Q(\theta)}{\partial \theta}, \quad S_R = \text{chol}(R);$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, 0) = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, 0)}{\partial \theta} = 0.$$

2. **Для** $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнить**

// Прогноз оценки вектора состояния и ее производной

3. $\hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta) \hat{x}_{k-1}(\theta)$, $\hat{x}'_{k|k-1}(\theta) = \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k-1}(\theta) + F(\theta) \hat{x}'_{k-1}(\theta)$.

4. $\mathcal{A}_1(\theta) = \begin{bmatrix} (F(\theta) S_{P_{k-1}}(\theta))^T \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A}'_1(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_1(\theta)}{\partial \theta}$;

$$\langle \mathcal{A}_1(\theta), \mathcal{A}'_1(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_1(\theta), \mathcal{R}'_1(\theta) \rangle, \quad \text{где } \mathcal{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}'_1(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

// Оценка вектора входных сигналов и его производной

5. $\mathcal{A}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_R^T & 0 \\ (H S_{P_{k|k-1}}(\theta))^T & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A}'_2(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_2(\theta)}{\partial \theta}$;

$$\langle \mathcal{A}_2(\theta), \mathcal{A}'_2(\theta) \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{R}_2(\theta), \mathcal{R}'_2(\theta) \rangle,$$

$$\text{где } \mathcal{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_{\tilde{R}_k}^T(\theta) & \bar{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_2(\theta) = \begin{bmatrix} \left(S_{\tilde{R}_k}^T(\theta)\right)' & \left(\bar{K}_k^T(\theta)\right)' \\ 0 & \left(S_{P_k^*}^T(\theta)\right)' \end{bmatrix}.$$

$$6. \mathcal{A}_3(\theta) = \left[S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) H B \right], \mathcal{A}'_3(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_3(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\text{если } m = r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = \left[S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right],$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \left(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right)';$$

$$\text{если } m > r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = \left[S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right],$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \left[\left(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right)' \right].$$

$$7. M_k = (HB)^+.$$

$$8. \hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k (z_k - H \hat{x}_{k|k-1}(\theta)), \hat{u}'_{k-1}(\theta) = -M_k H \hat{x}'_{k|k-1}(\theta).$$

// Коррекция оценки вектора состояния

$$9. K_k(\theta) = \bar{K}_k(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta), K'_k(\theta) = \bar{K}'_k(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) - S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) S'_{\tilde{R}_k}(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta).$$

$$10. \hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B \hat{u}_{k-1}(\theta), (\hat{x}_k^*(\theta))' = \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) + B \hat{u}'_{k-1}(\theta).$$

$$11. \hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta) (z_k - H \hat{x}_k^*(\theta)),$$

$$\hat{x}'_k(\theta) = (\hat{x}_k^*(\theta))' + K'_k(\theta) (z_k - H \hat{x}_k^*(\theta)) - K_k(\theta) H (\hat{x}_k^*(\theta))'.$$

$$12. \mathcal{A}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T (I - K_k(\theta) H)^T \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_4(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_4(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_4(\theta), \mathcal{A}'_4(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_4(\theta), \mathcal{R}'_4(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_4(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_k^*}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$13. \varepsilon_k(\theta) = W^+ z_k - \hat{x}_k^*(\theta), W^+ = (H^T H)^{-1} H^T.$$

$$14. \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k) = \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k-1) + \varepsilon_k^T(\theta) \varepsilon_k(\theta).$$

$$15. \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k-1)}{\partial \theta} + \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \hat{x}_k^*(\theta)}{\partial \theta}.$$

16. **Конец цикла**

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K) = \frac{1}{K} \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K), \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta} = -\frac{2}{K} \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta}.$$

$$\text{Выход: } \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K), \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta}.$$

Замечание 5.1. В алгоритме 4 приняты предположения, что матрицы B , H , R не зависят от параметра θ , $\text{rank } H = n$, $\text{rank } HB = r$, $M_k = (HB)^+$. Указанные ограничения не являются принципиальными, поскольку матрицы H и R определяют уравнение измерений в модели (2.1), а характеристики измерителя, как правило, известны. Что касается матрицы B , то в случае, если она содержит элементы, зависящие от θ , то можно построить эквивалентную модель, включив эти элементы в описание неизвестных входных сигналов.

6. Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение

С целью демонстрации работоспособности предложенного метода рассмотрим пример численной идентификации неизвестного коэффициента диффузии α для одномер-

ной модели диффузии, описанной уравнением

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

с заданным начальным условием

$$c(x, 0) = \varphi(x) \quad (6.2)$$

и неизвестными граничными условиями первого рода

$$c(a, t) = f(t), \quad c(b, t) = g(t), \quad (6.3)$$

где $x \in [a; b]$ — пространственная координата; $t \in [0; T]$ — время; $c(x, t)$ — искомая функция, α — коэффициент диффузии, $\varphi(x)$, $f(t)$, $g(t)$ — скалярные функции. В уравнении (6.1) $c(x, t)$ имеет смысл температуры, концентрации вещества и т. д. Поставим задачу идентификации параметров данной модели, состоящую в определении коэффициента α при наличии случайных помех в измерениях значений искомой функции $c(x, t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в различные моменты времени. При этом функции $f(t)$ и $g(t)$, входящие в граничные условия (6.3), считаются неизвестными. Функция $\varphi(x)$ в начальном условии (6.2) предполагается известной.

Для решения задачи численной идентификации сначала перейдем от исходной модели (6.1)–(6.3) в непрерывном времени к дискретной модели, представленной линейной динамической системой в пространстве состояний. Как и в случае уравнения конвекции-диффузии, следуя [23], зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) | i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, K\}$, где

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = (b - a)/N, \quad \Delta t = T/K. \quad (6.4)$$

Обозначим через $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$. Заменяем частные производные в уравнении (6.1) их конечно-разностными аппроксимациями, используя двухслойную по времени и симметричную по пространственной переменной схему. Предполагая, что соответствующие условия устойчивости для разностной схемы выполнены [24], получим следующее уравнение:

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (6.5)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Обозначим через $s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ и выразим из (6.5) c_i^k :

$$c_i^k = sc_{i-1}^{k-1} + (1 - 2s)c_i^{k-1} + sc_{i+1}^{k-1} = sc_{i-1}^{k-1} + (1 - 2s)c_i^{k-1} + a_1 c_{i+1}^{k-1}. \quad (6.6)$$

Для удобства обозначим $a_1 = s$, $a_2 = 1 - 2s$.

С учетом (6.5) для начального условия (6.2) получаем

$$c_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6.7)$$

В результате дискретизации граничные условия (6.3) будут иметь вид

$$c_0^k = f^k, \quad c_N^k = g^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (6.8)$$

Теперь запишем построенную дискретную модель в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{N-3}^k \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-3}^{k-1} \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.9)$$

Из представления (6.9) можно видеть, что неизвестные граничные условия включены в вектор входных сигналов u_k , а матрицы F и B зависят от неизвестного параметра $\theta = \alpha$. Поэтому с учетом замечания 5.1 запишем эквивалентное представление

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_{k-1} = s \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Для учета «неидеальности» реального физического процесса добавим в (6.9) слагаемое Gw_k , где $G = I_{(N-1) \times (N-1)}$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma I_{(N-1) \times (N-1)})$, σ — дисперсия шума процесса. Окончательно, уравнение состояния дискретной модели примет вид:

$$c_k = Fc_{k-1} + Bu_{k-1} + Gw_k. \quad (6.10)$$

Модель измерений зададим в следующем виде:

$$z_k = Hc_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (6.11)$$

где $H \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ — матрица измерений; $v_k \in \mathbb{R}^{N-1}$ — погрешность измерителя, моделируемая как гауссовская случайная последовательность.

Компьютерное моделирование выполним в системе MATLAB R2017a. Для проведения вычислительных экспериментов зададим для модели (6.1) пространственно-временную область $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 2]$, «точное значение» $\theta^* = \alpha = 0.3$, $\sigma = 10^{-3}$, начальное значение $\varphi(x) = 10x(1-x)$, «неизвестные» граничные условия $f(t) = t^2/2$, $g(t) = 0$.

Проведем компьютерное моделирование процесса идентификации на сетке размера 13×401 (т.е., $N = 12$ и $K = 400$). Сначала смоделируем решение (6.10). Результат представлен на рис. 6.1.

Модель измерений зададим в виде (6.11) с $H = I_{11}$, $R = \delta I_{11}$, где δ определяет дисперсию шума измерений v_k . На рис. 6.2 представлены результаты моделирования измерений при $\delta = 10^{-2}$.

На основе смоделированных данных измерений проведем сравнение трех различных методов численной идентификации неизвестного параметра θ .

Первый метод основан на применении алгоритма 1 (стандартного алгоритма Гиллейнса–Де-Мора) и безградиентного метода численной минимизации критерия (5.6).

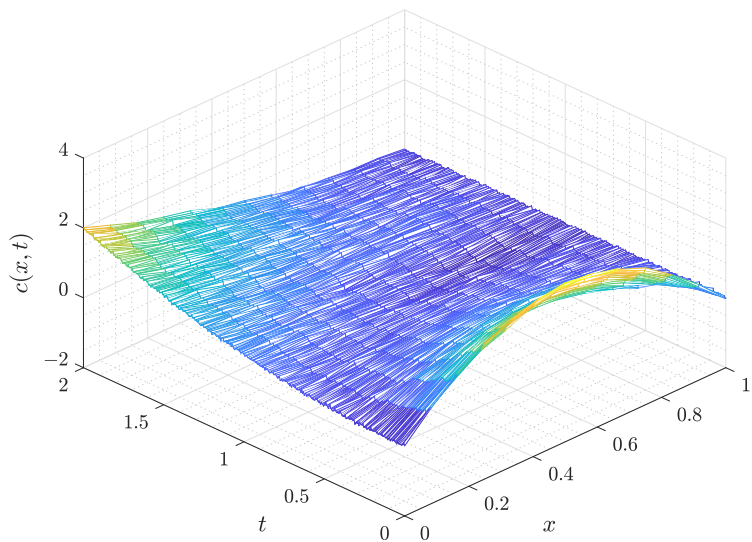


Рис. 6.1. Результаты моделирования (6.10) при $\sigma = 10^{-3}$
Fig 6.1. Simulation results of (6.10) for $\sigma = 10^{-3}$

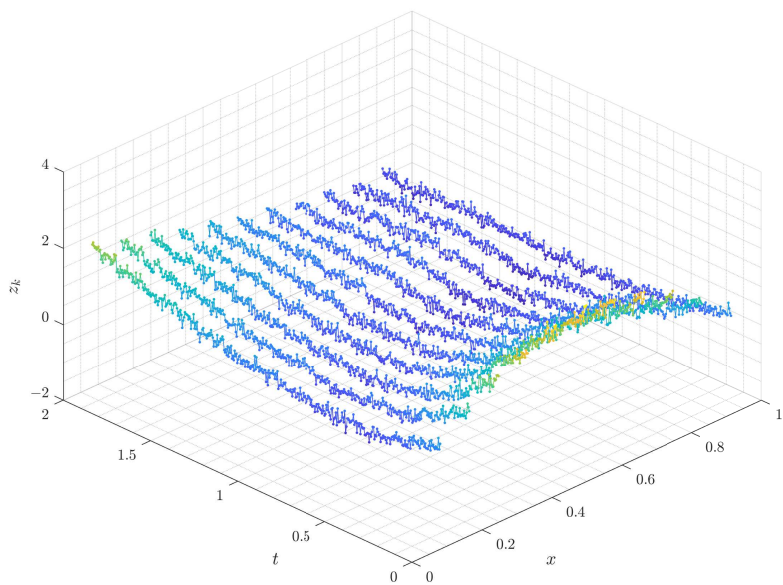


Рис. 6.2. Результаты моделирования измерений при $\delta = 10^{-2}$
Fig 6.2. Measurement simulation results for $\delta = 10^{-2}$

Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$. Второй метод основан на применении алгоритма 2 (квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора) и безградиентного метода численной минимизации критерия (5.6). Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$. Третий метод основан на применении нового квадратно-корневого алгоритма 4 (с возможностью вычисления градиента критерия идентификации) и градиентного метода численной минимизации критерия (5.6). Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$.

Минимизация всех трех критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$, $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$ выполнялась с помощью MATLAB-функции безусловной минимизации `fminunc` с заданными параметрами: ‘SpecifyObjectiveGradient’ = false для критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$, ‘SpecifyObjectiveGradient’ = true для критерия $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$, ‘Algorithm’ = ‘quasi-newton’, ‘MaxFunctionEvaluations’ = Inf, ‘OptimalityTolerance’ = 10^{-6} , ‘Display’ = ‘off’. В качестве начального приближения для функции `fminunc` выбиралась точка $\theta_0 = 0.5$. При заданном значении δ полученные результаты идентификации усреднялись по 50 запускам. Вычисленные оценки параметра θ , а также их ошибки RMSE и MAPE, представлены в табл. 6.1 и 6.2, соответственно.

Таблица 6.1. Результаты идентификации при $\delta = 0.1$

Table 6.1. Identification results for $\delta = 0.1$

Критерий (Criterion)	Среднее значение (Mean)	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$	0.258889	0.042800	13.703729
$\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$	0.258889	0.042800	13.703728
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$	0.259431	0.042342	13.522865

Таблица 6.2. Результаты идентификации при $\delta = 0.01$

Table 6.2. Identification results for $\delta = 0.01$

Критерий (Criterion)	Среднее значение (Mean)	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$	0.283907	0.017765	5.364222
$\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$	0.283907	0.017765	5.364220
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$	0.286958	0.015918	4.560609

По данным таблиц 6.1 и 6.2 можно сделать следующие выводы:

1) Для безградиентных методов идентификации с применением критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$ получились одинаковые результаты, что дополнительно подтверждает алгебраическую эквивалентность стандартной и квадратно-корневой модификаций алгоритма Гиллейнса – Де-Мора, а также работоспособность квадратно-корневой модификации.

2) Метод градиентного типа со встроенной функцией вычисления критерия идентификации $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$ на основе предложенного нового алгоритма 4 позволил повысить точность идентификации параметра модели при двух различных значениях дисперсии шума измерений δ . Следует также отметить, что при уменьшении дисперсии шума измерений точность идентификации увеличивается.

Таким образом, полученные результаты подтверждают работоспособность и эффективность предложенного подхода.

7. Заключение

В работе предложен новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа для дискретных линейных стохастических систем, представленных уравнениями в пространстве состояний, с неизвестными входными сигналами. Для вычисления критерия идентификации была использована квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора, основанная на численно устойчивом матричном ортогональном преобразовании. Для вычисления градиента критерия идентификации построена и теоретически обоснована новая модель чувствительности для вычисления частных производных оценок вектора состояния по неизвестному параметру, подлежащему идентификации. Для построения уравнений чувствительности применялись вычислительные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований. На основе полученных теоретических результатов разработан новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа.

Вычислительные эксперименты проведены на языке MATLAB. Получено решение задачи параметрической идентификации дискретной стохастической модели диффузии, представленной в пространстве состояний, по данным зашумленных измерений в узлах рассматриваемой сетки. В качестве неизвестного модельного параметра рассмотрен коэффициент диффузии α , а в качестве неизвестных входных сигналов — неизвестные граничные условия первого рода. Результаты работы квадратно-корневого алгоритма градиентного и безградиентного типов сравнивались с алгоритмом параметрической идентификации, разработанным ранее на основе стандартной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора [9], [11]. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного подхода.

Таким образом, основными теоретическими результатами данной работы являются новые уравнения, определяющие квадратно-корневую модель чувствительности (Предложение 4.1) и квадратно-корневой алгоритм 4, позволяющий вычислить значения критерия идентификации и его градиента. Практическим результатом является применение разработанного подхода к решению задачи численной идентификации коэффициента диффузии при неизвестных граничных условиях по данным зашумленных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering : Theory and practice using MATLAB. New Jersey : Prentice Hall, 2001. 401 p.
2. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1969. Vol. 14, no. 4. P. 359–367. DOI: 10.1109/TAC.1969.1099223
3. Kitanidis P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation // *Automatica*. 1987. Vol. 23, no. 6. P. 775–778. DOI: 10.1016/0005-1098(87)90037-9

4. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs // *Automatica*. 1997. Vol. 33, no. 4. P. 717–719. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00217-8
5. Hsieh C.-S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. Vol. 45, no. 12. P. 2374–2378. DOI: 10.1109/9.895577
6. Gillijns S., De Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*. 2007. Vol. 43, no. 1. P. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.08.002
7. Gillijns S., Haverbeke N., De Moor B. Information, covariance and square-root filtering in the presence of unknown inputs // *Proceedings of the 2007 European Control Conference (ECC)* (Kos, Greece, 2–5 July 2007). 2007. P. 2213–2217. DOI: 10.23919/ECC.2007.7068514
8. Hua Y., Wang N., Zhao K. Simultaneous unknown input and state estimation for the linear system with a rank-deficient distribution matrix // *Mathematical Problems in Engineering*. 2021. DOI: 10.1155/2021/6693690
9. Tsyganova Yu., Tsyganov A. Parameter identification of the linear discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs // *Cybernetics and Physics*. 2023. Vol. 12, no. 3. P. 219–229. DOI: 10.35470/2226-4116-2023-12-3-219-229
10. Цыганова Ю.В., Цыганов А.В. Об идентификации параметров дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления : сборник научных трудов. (Москва, 17–20 июня 2024 г.). М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2024. С. 991–995. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79486619>
11. Galushkina D., Kuvshinova A., Tsyganova Yu. Numerical identification of reaction-diffusion model parameters under unknown boundary conditions // *2024 X International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (Samara, 20–24 May 2024.) IEEE. P. 1–4. DOI: 10.1109/ITNT60778.2024.10582357
12. Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 856 p.
13. Цыганова Ю.В., Куликова М.В. О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия : Математическое моделирование и программирование*. 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. DOI: 10.14529/mmp180401
14. Кувшинова А.Н., Галушкина Д.В. О квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора // *Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии»*. 2022. Т. 1, № 2. С. 17–22. Режим доступа: <https://www.mathnet.ru/rus/ulsu135>
15. Tsyganov A., Tsyganova Yu. SVD-based parameter identification of discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs // *Mathematics*. 2024. Vol. 12, no. 7. DOI: 10.3390/math12071006

16. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Физматлит, 1995. 336 с.
17. Gupta N. K., Mehra R. K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1974. Vol. AC-19. P. 774–783. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100714
18. Gibbs B. P., Andrews A. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2011. 632 p.
19. Голубков А. В., Цыганова Ю. В., Цыганов А. В. Построение модели чувствительности на основе алгоритма одновременного оценивания входа и состояния для линейных дискретных стохастических систем с неизвестными входными воздействиями // *Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии : материалы IX Международной научно-практической конференции*. (Елец, 24–25 апреля 2023 г.) Елец.: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2023. С. 41–45. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79563251>
20. Bierman G. J., Belzer M. R., Vandergraft J. S., Porter D. W. Maximum likelihood estimation using square root information filters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1990. Vol. 35, no. 12. P. 1293–1299. DOI: 10.1109/9.61004
21. Куликова М. В., Цыганова Ю. В. О дифференцировании матричных ортогональных преобразований // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 9. С. 1460–1473. DOI: 10.7868/S0044466915090112
22. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. In Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Nature, 2006. 664 p.
23. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2019. Т. 21, № 1. С. 469–479. DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479
24. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы : учеб. пособие. Казань: Казан. ун-т, 2018. 165 с.

*Поступила 05.07.2025; доработана после рецензирования 01.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. M. S. Grewal, A. P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB*, Prentice Hall, New Jersey, 2001, 401 p.

2. B. Friedland, “Treatment of bias in recursive filtering”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **14**:4 (1969), 359–367. DOI: 10.1109/TAC.1969.1099223
3. P.K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23**:6 (1987), 775–778. DOI: 10.1016/0005-1098(87)90037-9
4. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33**:4 (1997), 717–719. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00217-8
5. C.-S. Hsieh, “Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**:12 (2000), 2374–2378. DOI: 10.1109/9.895577
6. S. Gillijns, B. De Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43**:1 (2007), 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.08.002
7. S. Gillijns, N. Haverbeke, B. De Moor, “Information, covariance and square-root filtering in the presence of unknown inputs”, *The 2007 European Control Conference (ECC): Proceedings* (Kos, Greece, 2–5 July, 2007), IEEE, 2007, 2213–2217 DOI: 10.23919/ECC.2007.7068514.
8. Y. Hua, N. Wang, K. Zhao, “Simultaneous unknown input and state estimation for the linear system with a rank-deficient distribution matrix”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, ID 6693690. DOI: 10.1155/2021/6693690
9. Yu. Tsyganova, A. Tsyganov, “Parameter identification of the linear discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs”, *Cybernetics and Physics*, **12**:3 (2023), 219–229. DOI: 10.35470/2226-4116-2023-12-3-219-229
10. J. V. Tsyganova, A. V. Tsyganov, “Identification of parameters in a discrete linear stochastic system with unknown input signals”, *XIV All-Russian Meeting on Control Problems : Collection of scientific papers* (Moscow, June 17–20, 2024), V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 2024, 991–995 (In Russ.), <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79486619>.
11. D. Galushkina, A. Kuvshinova, Yu. Tsyganova, “Numerical identification of reaction-diffusion model parameters under unknown boundary conditions”, *2024 X International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT) : Proceedings* (Samara, Russian Federation, 20–24 May, 2024), IEEE, 2024, 1–4 DOI: 10.1109/ITNT60778.2024.10582357.
12. T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi, *Linear estimation*, Prentice Hall, New Jersey, 2000, 856 p.
13. Yu. V. Tsyganova, M. V. Kulikova, “[On Modern Array Algorithms for Optimal Discrete Filtering]”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **11**:4 (2018), 5–30 (In Russ.). DOI: 10.14529/mmp180401
14. A. N. Kuvshinova, D. V. Galushkina, “[On the square-root modification of the Gillijns – De-More algorithm]”, *Scientific Notes of ULSU. Series “Mathematics and Information Technologies”*, 2022, no. 1, 17–22 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/ulsu135>.

15. A. Tsyganov, Yu. Tsyganova, “SVD-based parameter identification of discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs”, *Mathematics*, **12**:7 (2024), 1006. DOI: 10.3390/math12071006
16. Ya. Z. Tsyppkin, *Informacionnaya teoriya identifikacii [Information theory of identification]*, Fizmatlit, Moscow, 1995 (In Russ.), 336 p.
17. N. K. Gupta, R. K. Mehra, “Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-19** (1974), 774–783. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100714
18. B. P. Gibbs, *Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011, 632 p.
19. A. V. Golubkov, Yu. V. Tsyganova, A. V. Tsyganov, “Constructing a sensitivity model based on an algorithm for simultaneous estimation of input and state for linear discrete-time stochastic systems with unknown inputs”, *Control Systems, Complex Systems : Modeling, Stability, Stabilization, Intelligent Technologies (CSMSSIT-2025): Proceedings of the X International Scientific and Practical Conference* (Yelets, April 24–25, 2023), Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, 2023, 41–45 (In Russ.), <https://elibrary.ru/item.asp?id=54172715>.
20. G. J. Bierman, M. R. Belzer, J. S. Vandergraft, D. W. Porter, “Maximum likelihood estimation using square root information filters”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35**:12 (1990), 1293–1299. DOI: 10.23919/ACC.1989.4790637
21. M. V. Kulikova, Yu. V. Tsyganova, “[On differentiation of matrix orthogonal transformations]”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:9 (2015), 1460–1473 (In Russ.). DOI: 10.1134/S0965542515090109
22. J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization. In Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, Springer Nature, 2006, 664 p.
23. A. N. Kuvshinova, “[Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements]”, *Zhurnal SVMO*, **21**:4 (2019), 469–479 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479
24. A. B. Mazo, *Vychislitel'naya gidrodinamika. CHast' 1. Matematicheskie modeli, setki i setochnye skhemy : ucheb. posobie [Computational fluid dynamics. Part 1. Mathematical models, grids and grid schemes : textbook]*, Kazan. Univ., Kazan, 2018 (In Russ.), 165 p.

Submitted 05.07.2025; Revised 01.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.364-379

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-72:004.942:532.529:544.77

Моделирование захвата и транспортировки груза в жидкости системой самоорганизующихся магнитных частиц, контролируемых внешним полем

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (г. Сургут, Российская Федерация)

Аннотация. На основе экспериментов по захвату и перемещению груза системой самоорганизующихся частиц в магнитном поле моделируется динамика такого процесса. Транспортная система частиц представляет собой самособирающуюся структуру в виде одной замкнутой цепочки (двумерный случай) или двух параллельно расположенных замкнутых цепочек (трехмерный случай). В результате действия внешнего магнитного поля частицы приводятся во вращение и перемещаются поступательно. Учитывается гидродинамическое взаимодействие между всеми частицами и грузом, который с внешним полем не взаимодействует. Математическая модель включает в себя уравнения гидродинамики вязкой жидкости и динамики частиц в приближении малых чисел Рейнольдса. Для численного моделирования и визуализации полученных результатов проведены использовались специально разработанный программный комплекс. Проведенные численные расчеты подтвердили возможность управляемого захвата и переноса груза в случае расположения системы частиц и груза в одной плоскости. В трехмерном случае проведенное численное моделирование показывает, что захват груза и его перемещение транспортной структурой в виде параллельно расположенных замкнутых цепочек частиц не происходит. Полученные результаты качественно согласуются с известными экспериментами. Предлагаемая модель может быть использована для расчета динамики системы частиц, самоорганизующихся в замкнутые цепочки, в жидкости в присутствии посторонних тел.

Ключевые слова: коллективная динамика, динамическая структура, численное моделирование, вязкая жидкость, гидродинамическое взаимодействие, захват груза, перенос груза, внешнее поле, управление

Для цитирования: Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование захвата и переноса груза в жидкости системой частиц управляемой внешним полем // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 364–379. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.364-379

Об авторах:

Мартынов Сергей Иванович, докт. физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412 г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovski@mail.ru

Ткач Леонилла Юрьевна, научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412 г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

© Мартынов С. И., Ткач Л. Ю.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Modeling the trapping and transporting of cargo in a fluid by a system of self-assembled magnetic particles controlled by an external field

S. I. Martynov, L. Yu. Tkach

Surgut State University (Surgut, Russian Federation)

Abstract. The dynamics of this process is modeled based on experiments on the capture and movement of a load by a system of self-organizing particles in a magnetic field. The transport system of particles is a structure in the form of one closed chain (two-dimensional case) or two parallel closed chains (three-dimensional case). As a result of the action of the external field, the particles are set in rotation and move translationally. Hydrodynamic interaction between all particles and the load, which does not interact with the external field, is taken into account. The mathematical model includes equations of viscous fluid hydrodynamics and particle dynamics in the approximation of small Reynolds numbers. Numerical modeling and visualization of the obtained results are performed using a specially developed software package. The performed numerical calculations confirmed the possibility of capture and transfer of the load in the case of location of the particle system and the load in the same plane. In the three-dimensional case, the capture of cargo and its movement by the transport structure in the form of parallel chains of particles does not lead to the capture of cargo. The obtained results are in qualitative agreement with the experiments. The proposed model can be used to calculate the dynamics of a system of particles self-organizing into closed chains in a liquid in the presence of foreign bodies.

Keywords: collective dynamics, dynamic structure, numerical modeling, viscous fluid, hydrodynamic interaction, cargo capture, cargo transfer, external field, control

For citation: *S. I. Martynov, L. Yu. Tkach. Modeling the trapping and transporting of cargo in a fluid by a system of self-assembled magnetic particles controlled by an external field. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 27:3(2025), 364–379. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.364-379*

About the authors:

Sergey I. Martynov, D. Sci. (Phys. and Math.), Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut, 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District - Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

Leonilla Yu. Tkach, Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut, 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District - Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

1. Введение

Интенсивно проводимые исследования динамики микро и наночастиц частиц в жидкости, активируемых внешним полем, демонстрирует эмерджентность таких физических систем [1–2] и представляют практический интерес для управляемого внешним

полем тепло-массопереноса, как на макро, так и на микро и нано уровне. Например, наножидкости с магнитными частицами (феррожидкости) демонстрируют увеличение теплообмена и анизотропию термодиффузии в магнитных полях [3–4]. Проводятся исследования по применению наножидкостей с частицами из различного материала, в том числе и с магнитными свойствами, для увеличения нефтеотдачи пласта [5–6]. Создаются синтетические наномоторы для целевой доставки терапевтической нагрузки в клетку с помощью внешнего поля [7–8]. Изучается вопрос по захвату (или изолированию) и переносу на межфазной поверхности загрязнений в результате коллективной динамики системы активных частиц, саморганизующихся в динамическую структуру [9–10]. С процессами массопереноса в таких системах связаны исследования по управляемому формированию неравновесных динамических структур из активных частиц во внешнем переменном магнитном или электрическом поле [11–12]. Во всех приведенных выше случаях частицы в жидкости активируются внешней полем, приводя их в определенное движение, тем самым активируя и движение жидкости вокруг них. В свою очередь, формируемое течение жидкости влияет на динамику самих частиц. В результате такого взаимодействия получаем коллективную динамику всей системы. Поэтому, для того, чтобы понимать механизмы, отвечающие за преобразование динамики отдельных частиц в коллективную динамику всей системы в целом, необходимо корректно учитывать все взаимодействие между частицами и жидкостью. Гидродинамическое взаимодействие между большим числом частиц можно учесть, например, используя модель работы [13]. Взаимодействие между частицами, обладающими зарядами или дипольными моментами, можно учитывать в приближении парных взаимодействий или в приближении среднего поля, как это сделано в электродинамике [15]. В первом случае учет только парных взаимодействий для большого числа взаимодействующих частиц дает некорректный результат [14]. Во втором случае подход с использованием среднего поля означает, что масштаб, на котором рассматривается физический процесс, учитывающий межчастичные взаимодействия, на порядок превосходит размеры частиц и характерное расстояние между ними. Это достаточно грубое приближение гидродинамических процессов, связанных с коллективной динамикой частиц. Поэтому прямое численное моделирование гидродинамического взаимодействия частиц методом работы [13] дает более корректный результат.

Для демонстрации результативности такого подхода в работе [16] рассмотрен гидродинамический механизм формирования из равновесного состояния неравновесной динамической структуры системы дипольных частиц, вращающихся под действием переменного внешнего поля. В частности показано, что равновесные структуры в виде плоского правильного многоугольника при вращении частиц, входящих в эту структуру, начинают вращаться с некоторой угловой скоростью, сохраняя свою форму. Вращательное движение частиц стабилизирует форму структуры даже при наличии силы, действующей на частицы и перемещающей их поступательно. Как было показано в работе [17], действие силы перемешивает частицы в облаке и приводит, например, к периодическому изменению их положения в системе первоначально расположенных в вершинах правильного плоского четырехугольника. Проведенное численное моделирование динамики демонстрирует, что наличие вращения частиц приводит к устойчивости структуры в виде правильного многоугольника: такая система вращается как целое и одновременно поступательно перемещается, сохраняя свою первоначальную форму.

Рассмотренный в работе [16] подход использовался в настоящей работе и для моделирования процесса захвата, фиксации и транспортировки груза системой частиц, наблюдаемой в эксперименте [10]. В эксперименте пять прозрачных капсул, в которые

были помещены магнитные микрочастицы, самоорганизуются в контролируемую динамическую структуру на границе раздела воздух-жидкость в магнитном поле, прецессирующем относительно перпендикулярной поверхности раздела оси. Процесс формирования структуры включает сборку магнитных микрочастиц в цепочки частиц внутри капель и их взаимодействие между собой в магнитном поле. В работе представлено видео, показывающее, как происходит процесс захвата, удержания, транспортировки и освобождения груза за счет изменения угла прецессии однородной составляющей и создания градиентной составляющей магнитного поля вдоль поверхности раздела. Считается, что внутри капель магнитные частицы образуют замкнутые цепочки, взаимодействие которых между собой рассматривается в рамках парного диполь-дипольного взаимодействия. За счет прецессирующего магнитного поля вращающиеся капсулы образовали структуру в виде правильного пятиугольника, вращающегося вокруг оси симметрии, а за счет градиентной составляющей магнитного поля вся вращающаяся структура перемещалась по поверхности жидкости. Все это соответствует неравновесной динамике структуры из пяти вращающихся частиц, рассмотренной в работе [16], и поэтому используется в настоящей работе для моделирования процесса захвата, фиксации и транспортировки груза, соответственно эксперименту.

2. Основные уравнения и допущения

Рассматривались двухмерный и трехмерный случаи задачи. В двухмерном случае система из 5 твердых сферических частиц радиуса a , помещенных в несжимаемую жидкость вязкости η и обладающих магнитным моментом $\mathbf{m}$, в равновесном состоянии формирует плоскую структуру в виде правильного пятиугольника [18] в вершинах которого располагаются частицы, суммарный магнитный момент которых равен нулю. В настоящей работе моделируется динамика системы из пяти твердых сферических частиц, образующих двухмерную структуру, близкую к правильному пятиугольнику и лежащую в плоскости YOZ на окружности радиуса $3a$. Векторы магнитных моментов частиц также лежат в этой плоскости. Приложенное внешнее магнитное поле имеет составляющие в виде однородного переменного с вектором напряженности $\mathbf{H}_1 = \{0; -H_0 \cos(\Omega t); H_0 \sin(\Omega t)\}$, лежащим в плоскости структуры и с постоянным градиентом напряженности $\mathbf{H}_2 = \left\{0; y \frac{\partial H}{\partial y}; 0\right\}$. Переменное магнитное поле приводит частицы во вращательное движение, а градиентное магнитное поле создает силу, действующую на частицы в структуре. Вращательное и поступательное движение частиц под действием приложенных магнитных полей, в свою очередь, приводит к возникновению течения вязкой жидкости и формированию гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы. Под грузом, который необходимо захватить и перенести указанной выше структурой, берется немагнитная сферическая частица радиуса b . Груз располагается в той же плоскости, что и структура из пяти магнитных частиц на некотором расстоянии от них и по направлению действия силы со стороны магнитного поля. Таким образом, на груз действует только сила со стороны жидкости, течение которой формируется движением магнитных частиц. Рассмотренный случай соответствует условиям расположения частиц и груза в эксперименте.

В трехмерном случае задачи рассматриваются две плоские структуры, каждая из которых соответствует рассмотренному выше двухмерному случаю, расположенные параллельно друг другу. В качестве груза рассматривается одиночная частица, расположенная между плоскостями двух структур, и цепочка из трех частиц, соединенных

между собой стержнями. Причем крайние частицы в цепочке находятся в плоскостях, соответствующих каждой из структур магнитных частиц, а средняя – между этими плоскостями. Внешнее магнитное поле имеет такие же составляющие, как и в двухмерном случае, а именно, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$.

Моделирование динамики рассматриваемой системы частиц следует работе [16]. Система уравнений динамики рассматриваемой системы включает уравнения движения жидкости и каждой частицы, входящей в систему. Уравнения динамики частиц учитывают как внутренние, так и внешние силы и моменты, действующих на частицы, в том числе и со стороны жидкости. Так как рассматривается случай малых чисел Рейнольдса, при которых в уравнениях течения жидкости отсутствуют слагаемые с ускорением, то и для уравнений динамики частиц необходимо использовать такое приближение. Сравнительные оценки показывают, что в случае малых чисел Рейнольдса силы инерции малы по сравнению вязким трением. Это позволяет использовать следующую систему уравнений для описания динамики системы частиц:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{(h)}$ – силы, $\mathbf{T}_k^{(h)}$ – моменты сил со стороны жидкости, $\mathbf{F}_k^{(e)}$, $\mathbf{T}_k^{(e)}$ – силы и моменты сил со стороны внешнего поля, $\mathbf{F}_k^{(i)}$, $\mathbf{T}_k^{(i)}$ – силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на частицу с номером k со стороны других частиц. Необходимо отметить, что в случае воздействия на частицы высокочастотного переменного магнитного поля силы инерции в уравнениях динамики частиц необходимо учитывать даже в случае малых чисел Рейнольдса. В настоящей работе рассматривается воздействие переменного магнитного поля с частотой, при которой силы инерции можно не учитывать (случай малых частот). Внутренние взаимодействия частиц учитываются в приближении парных диполь-дипольных взаимодействий, так как количество частиц мало.

Гидродинамические силы $\mathbf{F}_k^{(h)}$ и моменты $\mathbf{T}_k^{(h)}$, действующих на частицы, определяются из решения следующей системы уравнений гидродинамики для скорости $\mathbf{u}$ и давления p :

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0.$$

Граничные условия на поверхности частицы с номером k имеют вид:

$$u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a^k.$$

Здесь используются следующие обозначения: $\mathbf{V}^k$ – вектор абсолютной линейной скорости, Ω_{ij}^k – тензор угловой скорости, $\mathbf{X}^k$ – вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером k и радиусом a^k .

Кроме того, при удалении от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

Так как межчастичное взаимодействие учитывается в виде парных диполь-дипольных взаимодействий, то внутренние силы и моменты имеют следующий вид

[19]:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} = \sum_{l \neq k}^n \left[\frac{3}{r_{kl}^5} [(\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_l + (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_k + (\mathbf{m}_k \mathbf{m}_l) \mathbf{r}_{kl}] - \frac{15}{r^7} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl})(\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{r}_{kl} \right],$$

$$\mathbf{T}_k^{(i)} = \sum_{l \neq k}^n \left[\frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl})(\mathbf{m}_k \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \times \mathbf{m}_k) \right],$$

$$\mathbf{T}_l^{(i)} = \sum_{k \neq l}^n \left[\frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl})(\mathbf{m}_l \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l) \right].$$

В приведенных выражениях вектор $\mathbf{r}_{kl}$ соединяет центры частиц с номерами k и l , а суммирование берется по всем магнитным частицам, кроме немагнитной частицы, которая выступает в качестве груза. Более подробно о таком приближении можно прочитать в работе [16].

Помимо указанных выше внутренних сил и моментов, на частицу с номером k со стороны внешнего магнитного поля действуют соответствующие силы и моменты [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^{(e)} &= m_k \nabla H_2, \\ \mathbf{T}_k^{(e)} &= (\mathbf{m}_k \times \mathbf{H}_1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предполагается, что однородная составляющая внешнего магнитного поля с вектором напряженности $\mathbf{H}_1$ создает одинаковый момент силы, вращающий частицы в одном направлении. Неоднородная составляющая внешнего магнитного поля с вектором напряженности $\mathbf{H}_2$ создает силу, перемещающую частицы с магнитным моментом. При этом суммарные силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на выбранную частицу со стороны других, считаются равными нулю. Такое предположение упрощает задачу изучения влияния только гидродинамического взаимодействия частиц на формирование коллективной динамики системы. Более подробное обоснование такого предположения можно найти в работе [16]. Косвенным подтверждением допустимости такого предположения служит видео эксперимента по вращению системы самоорганизующихся магнитных капсул с сохранением формы структуры. Это, в свою очередь, согласуется с результатами моделирования, проведенными в работе [16] с принятыми допущениями. Таким образом, принятые допущения означают, что при моделировании учитываются действие на частицы силы трения со стороны жидкости, сила и внешний момент (2.1) со стороны магнитного поля, одинаковые для всех частиц.

3. Моделирование динамики системы

Как и в предыдущих работах авторов [13–14], при компьютерном моделировании задачи используются такие модельные параметры, как размер частицы $\hat{a}$, вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, величина внешней силы $\hat{F}$ и внешнего момента силы $\hat{T}$, действующих на частицы с магнитным моментом $\hat{m}$ и промежуток времени $\hat{t}$. Модельные параметры связаны с реальными определенными соотношениями, следующих из условий подобия модельного и реального течений жидкости, а именно, равенств чисел Рейнольдса при вращательном и поступательном движении частиц:

$$\frac{\rho \hat{V} \hat{a}}{\hat{\eta}} = \frac{\rho V a}{\eta}, \quad \frac{\rho \omega a^2}{\eta} = \frac{\rho \hat{\omega} \hat{a}^2}{\hat{\eta}}.$$

Уравнения движения модельной и реальной частицы с номером k имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 6\pi\eta a K V_k &= F_k^{(e)}, & 6\pi\hat{\eta}\hat{a} K \hat{V}_k &= \hat{F}_k^{(e)}, \\ 8\pi\eta a^3 S \omega &= T, & 8\pi\hat{\eta}\hat{a}^3 S \hat{\omega} &= \hat{T}. \end{aligned}$$

Коэффициенты K и S характеризуют геометрию структуры и не зависят от размеров частиц ее составляющих. Предполагается, что магнитные моменты частиц одинаково ориентированы во внешнем магнитном поле. Поэтому вращательный модельный момент $\hat{T}_k^{(e)} = |\mathbf{m} \times \mathbf{H}_1|$ прикладывается к каждой частице. Его величина берется равной $1 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2$. Считается, что величина вращательного момента $\hat{T}$ остается постоянной, для чего необходимо, чтобы угол между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{H}$ оставался неизменным. Это возможно, когда угловая скорость частиц и частота вращения вектора $\mathbf{H}_1$ совпадают $\omega = \Omega$. Подробности обоснования этого предположения можно найти в работе [16]. Полагая, что частицы сделаны из одного магнитного материала их магнитный момент определяется выражением $m = M_s 4\pi a^3/3$. Здесь M_s величина намагниченности насыщения материала частиц. С учетом этого из уравнения вращательного движения частиц получаем

$$8K\pi\eta a^3 \omega = \frac{4\pi a^3}{3} M_s H, \quad 8K\pi\hat{\eta}\hat{a}^3 \hat{\omega} = \frac{4\pi\hat{a}^3}{3} M_s \hat{H}.$$

Из приведенных выше уравнений следуют соотношения между реальными и модельными параметрами при вращении частиц

$$\frac{\eta\omega}{\hat{\eta}\hat{\omega}} = \frac{H}{\hat{H}}.$$

Из условия подобия вращательного движения реальных и модельных частиц, получаем соотношение между реальным и модельным значением напряженности магнитного поля

$$H = \frac{\eta^2 \hat{a}^2}{\hat{\eta}^2 a^2} \hat{H}.$$

Аналогично считая, что сила $\hat{F}_k^{(e)}$ одинакова для всех магнитных частиц и ее величина равна $1 \text{ г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$, из соотношений уравнений движения частиц и условия подобия течения жидкости получаем следующие соотношения:

$$V_k = \frac{\hat{a}\eta\hat{V}_k}{\hat{\eta}a}, \quad \hat{\eta}^2 = \eta^2 \frac{\hat{F}_k^{(e)}}{F_k^{(e)}}.$$

С учетом вида силы $F_k^{(e)} = m \frac{\partial H_2}{\partial y}$ и $m = \frac{M_s 4\pi a^3}{3}$ следует связь между реальным и модельным градиентом магнитного поля:

$$\frac{\partial H_2}{\partial y} = \frac{\eta^2 \hat{a}^3}{\hat{\eta}^2 a^3} \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial y}.$$

Будем полагать, что материал частиц представляет собой ферромагнетик с намагниченностью насыщения $M_s = 450 \text{ Г}$. Из того, что модельное значение вращающегося момента $\hat{T}_k^{(e)}$ равно $1 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2$ для модельной частицы размером $\hat{a} = 1 \text{ см}$,

получаем модельное значение напряженности вращающегося магнитного поля равное $\hat{H}_1 = 5.31 \cdot 10^{-4}$ Э. Модельное значение вязкости жидкости считалось равным $\hat{\eta} = 1 \text{ г}/(\text{см} \cdot \text{с})$, тогда для реальных частиц размером $a = 10^{-4} \text{ см}$ и реальной жидкости с вязкостью $\eta = 10^{-2} \text{ г}/(\text{см} \cdot \text{с})$ получаем, что фактическая величина напряженности магнитного поля должна быть $H_1 = 5.31$ Э. Модельный промежуток времени $\hat{t} = 1 \text{ с}$ при принятых значениях размера частиц и вязкости жидкости соответствует реальному промежутку, равному $t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Значения модельной и реальной частоты вращения магнитного поля в этом случае, соответственно, равны $\hat{\Omega} = 3.7 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 3.7 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$.

Для модельного и фактического градиента напряженности магнитного поля получаем, соответственно, $\partial \hat{H}_2 / \partial \hat{y} = 5.31 \cdot 10^{-4} \text{ Э}/\text{см}$ и $\partial H_2 / \partial y = 5.31 \cdot 10^4 \text{ Э}/\text{см}$.

4. Результаты моделирования динамики захвата и переноса груза самоорганизующейся системой вращающихся частиц

В качестве самоорганизующейся в результате межчастичного взаимодействия структурой дипольных частиц, используемой в качестве транспортного средства, рассматривается структура в виде правильного многоугольника, в вершинах которого располагаются частицы, и суммарный магнитный момент которых равен нулю. В настоящей работе моделируется динамика системы из пяти твердых сферических частиц, образующих двухмерную структуру, близкую к правильному пятиугольнику и лежащую в плоскости YOZ на окружности радиуса $3\hat{a}$. Дипольные моменты частиц также лежат в этой плоскости. Приложенное внешнее магнитное поле, лежащее в плоскости диполей, приводит их во вращательное движение. Частицы в структуре имеют модельный радиус $\hat{a} = 1 \text{ см}$. Считается, что вращательный модельный момент $\hat{M} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$, направленный вдоль оси OX , прикладывается к каждой частице. Действие момента приводит во вращение частицы, что формирует течение окружающей их вязкой жидкости. В результате гидродинамического взаимодействия частиц создается сила, перемещающая частицы. Первоначальная структура частиц меняется и формируется новая, как результат их коллективной динамики.

Ниже на рис. 4.1 последовательно представлено начальное положение транспортной системы частиц, обозначенных буквами A, B, C, D, E и груза F , а затем динамика сближения и захвата груза рассматриваемой системой магнитных частиц.

В момент времени, соответствующий последней конфигурации системы частиц и груза, внешнее магнитное поле выключается. В отсутствии внешнего поля включается механизм саморганизации структуры из-за диполь-дипольного взаимодействия частиц и система возвращается в равновесное состояние в виде правильного пятиугольника. Процесс саморганизации приведен на рис. 4.2. В результате этой динамики груз фиксируется внутри структуры.

Видео из работы [10] демонстрирует, что для переноса груза системой капсул приложенный момент сил со стороны магнитного поля увеличивается. Это приводит к увеличению скорости вращения как самих капсул, так и всей структуры в целом. При этом еще за счет магнитного поля увеличивается сила взаимодействия между капсулами, что приводит к уменьшению размера структуры в виде правильного пятиугольника. Все это способствует переносу груза, не давая ему вырваться из окружающего его кольца. Как показывают результаты моделирования работы [16], увеличение скорости вращения частиц под действием приложенного поля увеличивает скорость вращения всей

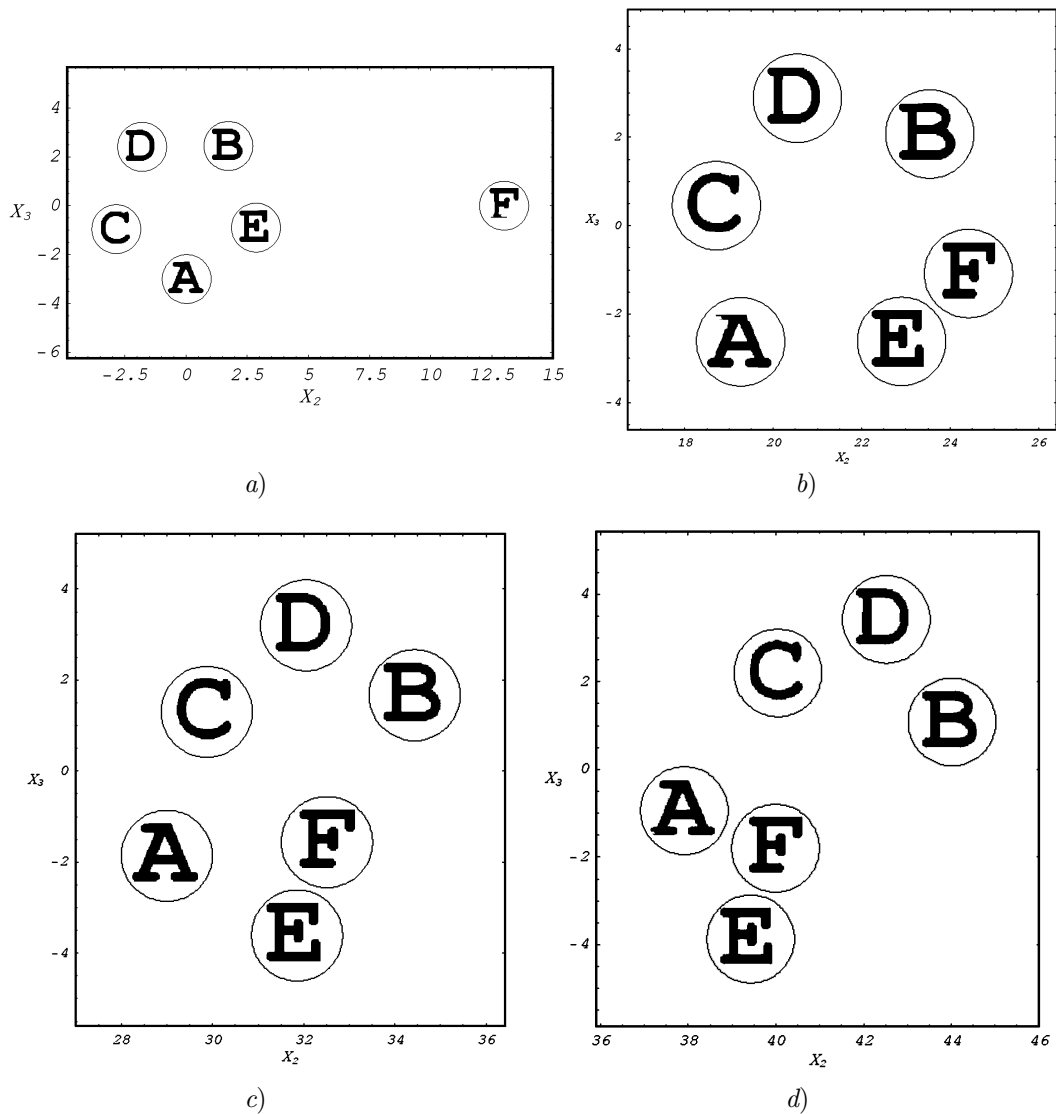


Рис. 4.1. Динамика захвата груза системой саморганизованных магнитных частиц: *a)* начальная положение системы и груза ($\hat{t} = 0$ с), *b)* момент начало захвата груза ($\hat{t} = 100$ с); динамика проникновения груза внутрь системы частиц: *c)* $\hat{t} = 270$ с, *d)* $\hat{t} = 323$ с

Fig 4.1. Dynamics of cargo capture by a system of self-organized magnetic particles: *a)* initial position of the system and cargo ($\hat{t} = 0$ s), *b)* moment of cargo capture start ($\hat{t} = 100$ s); dynamics of cargo penetration into the particle system: *c)* $\hat{t} = 270$ s, *d)* $\hat{t} = 323$ s

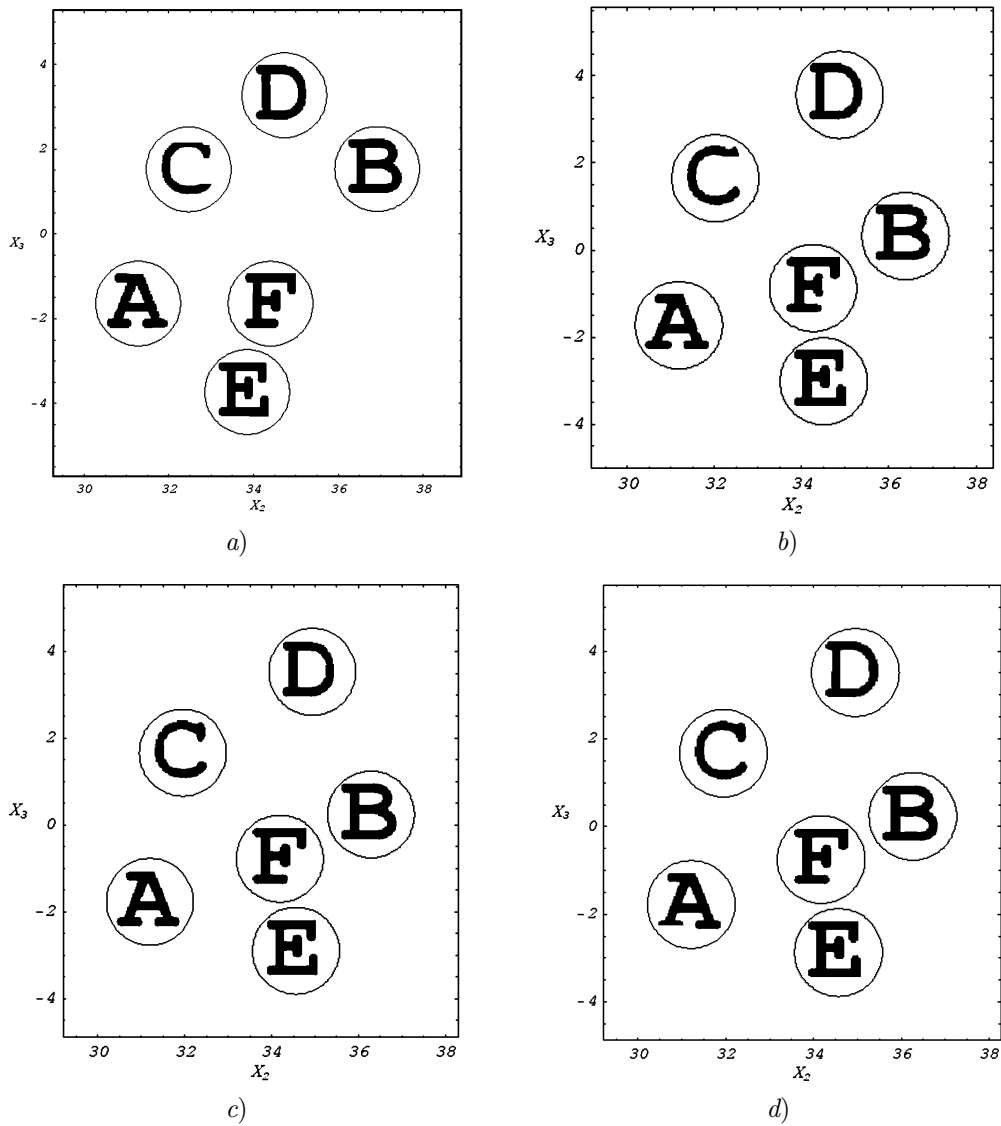


Рис. 4.2. Фиксация груза системой самоорганизующихся магнитных частиц и последовательное формирование равновесной структуры: а) $\hat{t} = 0$ с, б) $\hat{t} = 40$ с, в) $\hat{t} = 80$ с, г) $\hat{t} = 126$ с

Fig 4.2. Fixation of cargo by a system of self-organizing magnetic particles and sequential formation of an equilibrium structure: а) $\hat{t} = 0$ s, б) $\hat{t} = 40$ s, в) $\hat{t} = 80$ s, г) $\hat{t} = 126$ s

структуры и предотвращает ее распад из-за действия приложенных сил. Такой результат моделирования качественно согласуется с тем, что демонстрирует видео. Поэтому при моделировании переноса груза рассматривались случаи разных по величине приложенных моментов. В первом случае приложенный момент был равен по величине тому, что действовал при захвате груза. В результате при переносе груз достаточно быстро терялся системой частиц. Увеличение приложенного момента в два раза приводило к большей стабилизации сформированной структуры и переносу груза на значительно большее расстояние. На рис. 4.3 приведены результаты моделирования переноса груза при действии приложенного момента со стороны магнитного поля, равного $2 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$.

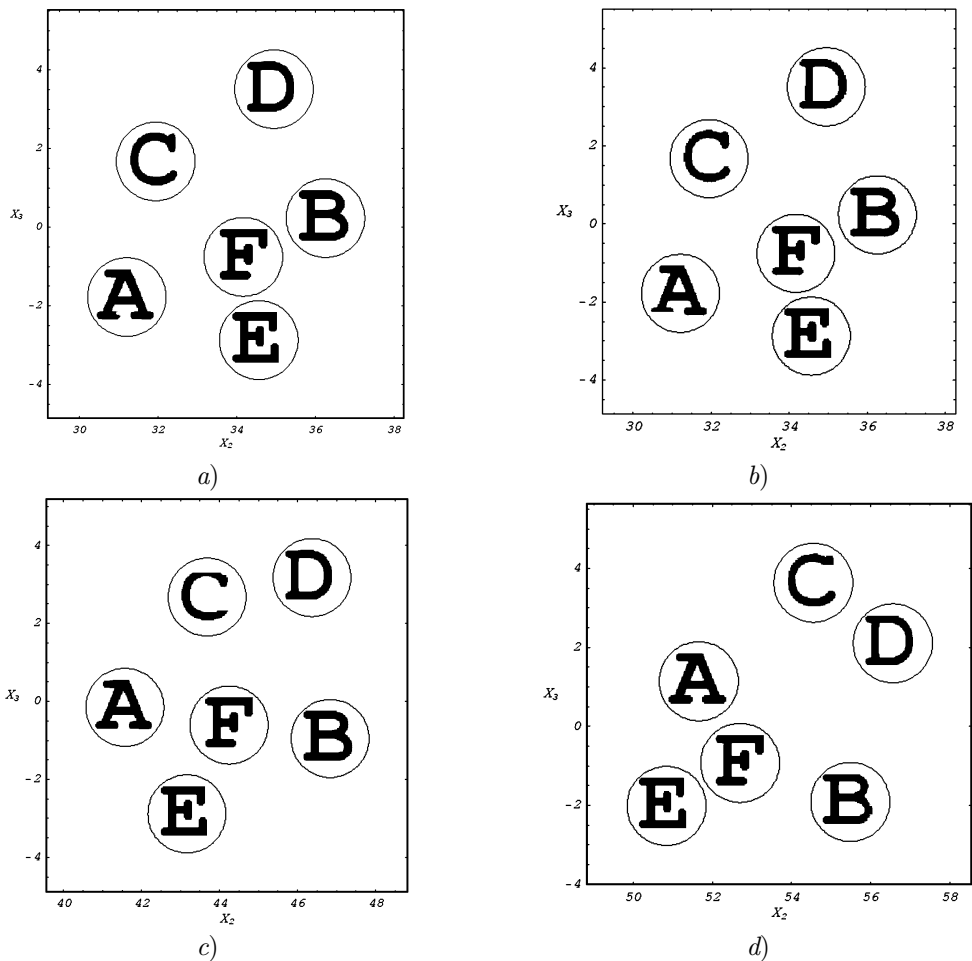


Рис. 4.3. Динамика переноса груза системой частиц и последовательное положение системы частиц и груза при их перемещении: а) $\hat{t} = 0 \text{ с}$, б) $\hat{t} = 60 \text{ с}$, в) $\hat{t} = 120 \text{ с}$, г) $\hat{t} = 150 \text{ с}$

Fig 4.3. Dynamics of cargo transfer by a system of particles and sequential position of the system of particles and cargo during their movement: а) $\hat{t} = 0 \text{ s}$, б) $\hat{t} = 60 \text{ s}$, в) $\hat{t} = 120 \text{ s}$, г) $\hat{t} = 150 \text{ s}$

При моделировании в трехмерном случае рассматривалась структура в виде двух параллельных двумерных, каждая из которых повторяет рассмотренную выше в виде правильного пятиугольника. Двумерные структуры располагаются в параллельных плоскостях, каждая из которых перпендикулярна оси OX . Расстояние между параллельными плоскостями равно $4\hat{a}$. Моделировалось два варианта расположения груза. В первом случае груз в виде одиночной частицы располагался в плоскости, параллельной двумерным структурам, на расстоянии $2\hat{a}$ от каждой. Во втором случае груз представлял собой цепочку из трех частиц, связанных между собой стержнями. Крайние частицы в цепочке располагались в тех же плоскостях, что и двумерные структуры в виде пятиугольников из магнитных частиц. Средняя частица в цепочке располагалась в той же плоскости, что и в первом варианте, то есть между двумя плоскостями транспортной структуры. Во всех случаях проведенное моделирование показало, что наличие частицы между плоскостями, в которых находятся магнитные структуры, не приводит к захвату груза рассматриваемой транспортной системой. Предварительный анализ динамики используемой пространственной структуры и груза свидетельствует о необходимости наличия связей между соседними элементами в виде плоских пятиугольников, сохраняющими расстояние между ними. При этих условиях прогнозируется возможность захвата груза транспортной системой с указанными связями.

5. Заключение

Предложен гидродинамический механизм управляемой внешним магнитным полем динамики захвата, фиксации и переноса груза саморганизирующейся системой магнитных частиц. Внешнее магнитное поле приводит во вращение и поступательно перемещает частицы с магнитным дипольным моментом. Считается, что груз не взаимодействует с магнитным полем, а с транспортной системой из магнитных частиц происходит только гидродинамическое взаимодействие. Моделировались двумерные и трехмерные случаи расположения магнитных частиц и груза. В двумерном случае система пяти магнитных частиц в отсутствии внешнего поля саморганизуется в структуру в виде правильного многоугольника с частицами в его вершинах. Результаты численного моделирования динамики захвата, фиксации и переноса груза в этом случае качественно согласуются с видео известного эксперимента. В трехмерном случае рассматривалась транспортная система в виде двух параллельно расположенных плоских структур из пяти магнитных частиц и с различными вариантами расположения груза относительно них. Во всех рассмотренных пространственных случаях положение груза или его одной из составных частей вне плоскости, в которой находится транспортная система, не приводит к его захвату и транспортировке. Таким образом, рассмотренный гидродинамический механизм захвата, фиксации и переноса груза системой магнитных частиц, управляемых внешним магнитным полем, дает положительный результат только в двумерном случае. Для использования указанного гидродинамического механизма для переноса груза в трехмерном случае требуется иная, чем предложенная в данной работе конструкция транспортной системы из магнитных частиц. Полученные результаты могут быть использованы для управления массопереносом в системе жидкость-частицы во внешнем магнитном поле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hana K., Kokot G., Tovkach O., Glatz A., Aranson I., Snezhko A. Emergence of self-organized multivortex states in flocks of active rollers. *PNAS*. 2020. Vol. 117, no. 18. P. 9706-9711. DOI: 10.1073/pnas.2000061117
2. Moran S., Schönhöfer P., Glotzer S. Shape-driven, emergent behavior in active particle mixtures. *New J. Phys.* 2022. Vol. 22. DOI: 10.1088/1367-2630/ac7161
3. Cao Y., Mansir I., Kumar S., Elhosiny A., Abed A. Heat transfer analysis on ferrofluid natural convection system with magnetic field. *Ain Shams Engineering Journal*. 2023. Vol. 14, no. 19. DOI: 10.1016/j.asej.2023.102122
4. Fiuza T., Sarkar M., Riedl J., Cebers A., Cousin F., Demouchy G., Depeyrot J., Dubois E., Gélébart F., Mériguet G., Perzynski R., Peyre V. Thermodiffusion anisotropy under magnetic field in ionic liquid-based ferrofluids. *Soft Matter, Royal Society of Chemistry*. 2021. Vol. 17. P. 4566-4577. DOI: 10.1039/d0sm02190c
5. Franco Camilo A., Franco Carlos A., Zabala R., Bahamon I. Forero A., Cortes F. Field Applications of Nanotechnology in the Oil and Gas Industry: Recent Advances and Perspectives. *Energy Fuels*. 2021. Vol. 35, no. 23. P. 19266-19287. DOI: 10.1021/acs.energyfuels.1c02614
6. Alkalbani A., Chala G. A Comprehensive Review of Nanotechnology Applications in Oil and Gas Well Drilling Operations. *Energies*. 2024. Vol. 17, no. 4. DOI: 10.3390/en17040798
7. Zhang P., Wu G., Zhao C., Zhou L., Wang X., Wei S. Magnetic stomatocyte-like nanomotor as photosensitizer carrier for photodynamic therapy based cancer treatment. *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces*. 2020. Vol. 194. DOI: 10.1016/j.colsurfb.2020.111204
8. Gao W., Esteban-Fernandez de Avila B., Zhang L., Wang J. Targeting and Isolation of Cancer Cells Using Micro/Nanomotors. *Adv Drug Deliv Rev*. 2018. Vol. 125. P. 94-101. DOI: 10.1016/j.addr.2017.09.002
9. Kokot G., Kolmakov G., Aranson I., Snezhko A. Dynamic self-assembly and selforganized transport of magnetic micro-swimmers. *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-15193-z
10. Wang Q., Yang L., Wang B., Yu E., Yu J., Zhang L. Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2019. Vol. 11, no. 1. P. 1630-1637. DOI: 10.1021/acs.accounts.5b00025
11. Arigaa K., Nishikawa M., Mori T., Takey J., Shrestha L. K., Hill J. P. Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics. *Science and Technology of Advanced Materials*. 2019. Vol. 20, no. 1. P. 51-95. DOI: 10.1080/14686996.2018.1553108
12. Driscoll M., Delmotte B. Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*. 2019. Vol. 40. P. 42-57. DOI: 10.1016/j.cocis.2018.10.002

13. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 2. С. 109-118. DOI: 10.7868/S0044466915020143
14. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. О механизме перемещения агрегатов частиц в вязкой жидкости в переменном однородном внешнем поле // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019. Т. 50, № 3. С. 505-515. DOI: 10.31857/S0044466920110083
15. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
16. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 2. С. 175-194. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202402.175-194
17. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2004. № 1. С. 152-164.
18. Шутый А. М. Равновесные значения и динамика суммарного магнитного момента систем магнитных диполей // *ЖЭТФ*. 2010. Т. 137. Вып. 2. С. 277-286.
19. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 488 с.

*Поступила 24.02.2025; доработана после рецензирования 10.04.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. K. Hana, G. Kokot, O. Tovkach, A. Glatz, I. Aranson, A. Snezhko, “Emergence of self-organized multivortex states in flocks of active rollers”, *PNAS*, **117**:18 (2020), 9706-9711. DOI: 10.1073/pnas.2000061117
2. S. Moran, P. Schönhöfer, S. Glotzer, “Shape-driven, emergent behavior in active particle mixtures”, *New J. Phys.*, **22** (2022). DOI: 10.1088/1367-2630/ac7161
3. Y. Cao, I. Mansir, S. Kumar, A. Elhosiny, A. Abed, “Heat transfer analysis on ferrofluid natural convection system with magnetic field”, *Ain Shams Engineering Journal*, **14** (2023). DOI: 10.1016/j.asej.2023.102122
4. T. Fiuza, M. Sarkar, J. Riedl, A. Cebers, F. Cousin, G. Demouchy, J. Depeyrot, E. Dubois, F. Gélébart, G. Mériguet, R. Perzynski, V. Peyre, “Thermodiffusion anisotropy under magnetic field in ionic liquid-based ferrofluids”, *Soft Matter, Royal Society of Chemistry*, **17** (2021), 4566-4577. DOI: 10.1039/d0sm02190c

5. Camilo A. Franco, Carlos A. Franco, Richard D. Zabala, Italo Bahamon, Angela Forero, Farid B. Cortes, "Field Applications of Nanotechnology in the Oil and Gas Industry: Recent Advances and Perspectives", *Energy Fuels*, **35**:23 (2021), 19266-19287. DOI: 10.1021/acs.energyfuels.1c02614
6. A. Alkalbani, G. Chala, "A Comprehensive Review of Nanotechnology Applications in Oil and Gas Well Drilling Operations", *Energies*, **17**:4 (2024). DOI: 10.3390/en17040798
7. P. Zhang, G. Wu, C. Zhao, L. Zhou, X. Wang, S. Wei, "Magnetic stomatocyte-like nanomotor as photosensitizer carrier for photodynamic therapy based cancer treatment", *Colloids Surf., B*, **19** (2020). DOI: 10.1016/j.colsurfb.2020.111204
8. W. Gao, de Avila B. Esteban-Fernandez, L. Zhang, J. Wang, "Targeting and Isolation of Cancer Cells Using Micro/Nanomotors Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field", *Adv Drug Deliv Rev.*, **125** (2018), 94–101. DOI: 10.1016/j.addr.2017.09.002
9. G. Kokot, G. V. Kolmakov, I. S. Aranson, A. Snezhko, "Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers", *Scientific Reports*, **7** (2017). DOI: 10.1038/s41598-017-15193-z
10. Q. Wang, L. Yang, B. Wang, E. Yu, J. Yu, L. Zhang, "Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly", *ACS Appl. Mater. Interfaces*, **11**:1 (2019), 1630-1637. DOI: 10.1021/acs.accounts.5b00025
11. K. Arigaa, M. Nishikawa, T. Mori, J. Takey, L. K. Shrestha, J. P. Hill, "Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics", *Science and Technology of Advanced Materials.*, **20**:1 (2019), 51-95. DOI: 10.1080/14686996.2018.1553108
12. M. Driscoll, B. Delmotte, "Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations", *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **40** (2019), 42-57. DOI: 10.1016/j.cocis.2018.10.002
13. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, "Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:2 (2015), 282–290. DOI: 10.7868/S0044466915020143
14. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, "Mechanism of Moving Particle Aggregates in a Viscous Fluid Subjected to a Varying Uniform External Field", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:3 (2019), 475–483. DOI: 10.31857/S0044466920110083
15. I. E. Tamm, *Fundamentals of the Theory of Electricity*, M.: Fizmatlit, 2003, 616 p.
16. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, "Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **26**:2 (2024), 175-194. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202402.175-194
17. V. E. Baranov, S. I. Martynov, "The influence of hydrodynamic interaction on the rate of sedimentation of a large number of particles in a viscous fluid", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 2004, no. 1, 152-164.

18. A. M. Shutyy, "Equilibrium values and dynamics of the total magnetic moment of systems of magnetic dipoles", *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **137**:2 (2010), 277-286.
19. V. V. Batygin, I. N. Toptygin, *Collection of problems on electrodynamics*, M. : Nauka, 1970, 488 p.

Submitted 24.02.2025; Revised 10.04.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать BGN/PCGN упрощенная без диакритических знаков.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Oliger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

Examples of bibliographic references for the section References.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P.A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P.A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizatsii-kvadratsionnogo-funktsionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О. }.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Название таблицы на английском языке
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца на русском языке & Название второго столбца на русском языке \\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Все вставляемые рисунки в текст статьи должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript). В редакцию журнала также необходимо предоставить те же рисунки в формате JPG с разрешением 300 точек на дюйм (dpi).

Для вставки рисунков в текст статьи можно пользоваться следующими командами:

а) вставка одного рисунка

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Название рисунка на русском языке:}
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Название рисунка на англ. языке}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}
```

б) вставка двух рисунков в одну строку

```
\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
}
```

```

\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a$}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b$}
\end{minipage}
\caption{Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на русском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на русском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на русском языке, \\
\medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Общее название двух рисунков  $a$  и  $b$  на английском языке: \\
 $a$ )$ название рисунка  $a$  на английском языке,  $b$ )$ название рисунка  $b$  на английском языке }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmbib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}  
\by В. Г. Малинов  
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике  
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды  
\bookvol II  
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ ФИЦ ИУ РАН  
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}  
\by V. G. Malinov  
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator  
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings  
\bookvol II  
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016  
\yr 2016  
\pages 48–50  
\publ FRC CSC RAS Publ.  
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. *To format article headings in English, use the following commands:* `\headerFirstEn` *u* `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name in English}
\textbf{Table \ref{shamanaev:table1}.} Table name in Russian}
\label{shamanaev:table1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
```

```

First column name in English & Second column name in English \\
First column name in Russian & Second column name in Russian \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]1\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\caption{Title of the drawing in English: \\
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Title of the drawing in Russian}
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

b) inserting two pictures into one line

```

\begin{figure}[!ht]
\ vbox{
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig1.eps}}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]0.49\linewidth}
\center{\includegraphics[width=1\linewidth]{tex/Ivanov/fig2.eps}}
\end{minipage}
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$a$}
\end{minipage}
\hfill
\begin{minipage}[!ht]{0.49\linewidth}
\center{$b$}
\end{minipage}
\caption{Common name of two drawings a and b in Russian: \\
$a$ the title of the picture a in English, b the title of the picture b in English,
\ medskip
\textbf{Fig. \ref{Ivanov:fig1}.} Common name of two drawings a and b in Russian: \\

```

```

$a)$ the title of the drawing a in Russian, $b)$ the title of the drawing b in Russian }
\label{Ivanov:fig1}
}
\end{figure}

```

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

`\RBibitem{label for a link to the source }`,

and every English reference – by a command

`\Bibitem{label for a link to the source }`.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Journal articles in English:

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

```

`\jour` Ogarev-online
`\vol` 20
`\yr` 2016
`\lang` In Russ.
`\elink` Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib4En}
`\by` A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
`\paper` [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
`\inbook` Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
`\publaddr` Ulyanovsk
`\publ` UIGTU Publ.
`\yr` 2014
`\issue` 10
`\pages` 4–13
`\lang` In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib5En}
`\by` Yu. N. Bibikov
`\book` Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
`\publaddr` Moscow
`\publ` Visshay shkola Publ.
`\yr` 1991
`\totalpages` 303
`\lang` In Russ.

Conference proceedings in Russian:

`\Bibitem`{shamanaevBib6En}
`\by` V. G. Malinov
`\paper` Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
`\inbook` VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
`\bookvol` II
`\procinfo` Moscow, October 17-22, 2016
`\yr` 2016
`\pages` 48–50
`\publ` FRC CSC RAS Publ.
`\publaddr` Moscow

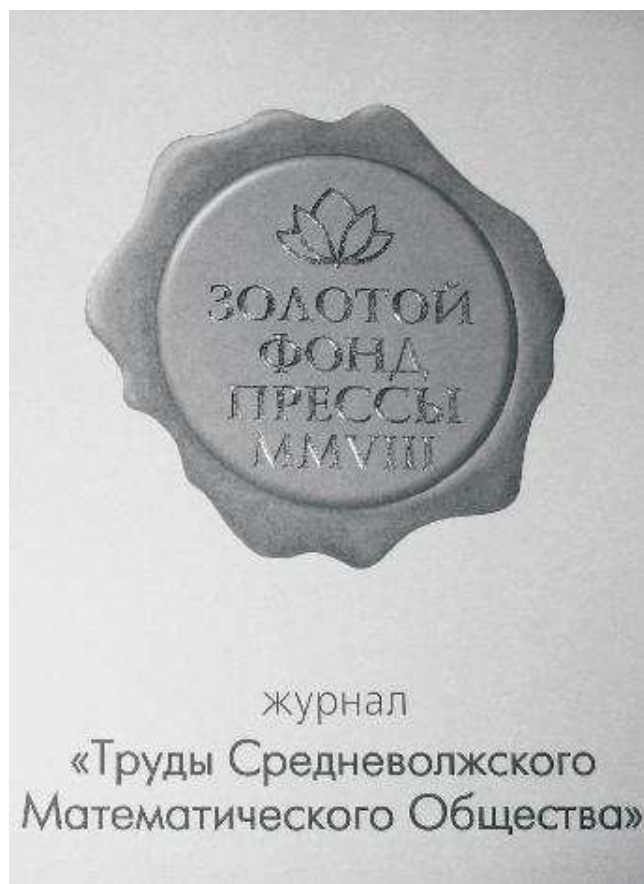
Алфавитный указатель авторов

Багаев А. В.	287
Ганеева Д. М.	287
Евтина Д. С.	302
Жабко А. П.	302
Иноземцев А. И.	315
Конопацкий Е. В.	325
Котова О. В.	325
Цыганова Ю. В.	341
Галушкина Д. В.	341
Кувшинова А. Н.	341
Мартынов С. И.	364
Ткач Л. Ю.	364

Author Index

A. V. Bagaev	287
D. M. Ganeeva	287
D. S. Evtina	302
A. P. Zhabko	302
A. I. Inozemtsev	315
E. V. Konopatskiy	325
O. V. Kotova	325
J. V. Tsyganova	341
D. V. Galushkina	341
A. N. Kuvshinova	341
S. I. Martynov	364
L. Yu. Tkach	364

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е., Иванова-Тюркина В. А.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 19.09.2025. Дата выхода в свет 30.09.2025. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,2 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 428.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova, V. A. Ivanova-Tyurkina*

Translation: *A. O. Syromyasov*

Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 19.09.2025. Date of publishing 30.09.2025. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,2.

Number of copies 100. Order no. 428.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University

Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

