

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 27 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 2

2025

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 27, № 2. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 27, NO. 2. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

В базу данных Scopus журнал входит по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. Квартиль CiteScore: Q4.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is included in the Scopus database in the following areas: Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) Control and Optimization. CiteScore quartile: Q4.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2025

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — заместитель главного редактора, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Леонтьев Виктор Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, руководитель Высшей школы развития научно-образовательного потенциала, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Deputy Editor, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Scientific Center for Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics

and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Victor L. Leontiev — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Head of the Higher School for the Development of Scientific and Educational Potential, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Леонтьев В. Л.

Об ортогонализации сплайнов Шенберга 111

Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н.

Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление . 127

Во В. Ч., Нойягдам С., Дрегля А. И., Сидоров Д. Н.

Исследование численных методов решения нелинейной системы спроса и предложения энергетических ресурсов 143

Сахаров А. Н.

Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков . . 171

Соломатин Д. В.

Ранги планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка 185

Фламарион М. В., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.

Асимптотическое и численное исследование уравнения Шамеля с затуханием 229

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Мустайкин М. С.

Численный алгоритм для исследования дозвукового потока с химическими реакциями в присутствии лазерного излучения 243

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 255

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 259

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 263

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 268

Алфавитный указатель авторов 272

Contents

MATHEMATICS

| | |
|---|-----|
| V. L. Leontiev | |
| On orthogonalization of Schoenberg splines | 111 |
| N. D. Morozkin, V. I. Tkachev, N. N. Morozkin | |
| About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control | 127 |
| V. T. Vo, S. Noeiaghdam, A. I. Dreglea, D. N. Sidorov | |
| A Study of Numerical Methods for Solving the Nonlinear Energy Resources Supply-Demand System | 143 |
| A. N. Sakharov | |
| Rotation sets of SO(3)-extensions of quasiperiodic flows | 171 |
| D. V. Solomatin | |
| Planarity ranks of semigroup varieties generated by semigroups of order four | 185 |
| M. V. Flamarion, E. N. Pelinovsky, T. G. Talipova | |
| Asymptotic and numerical study to the damped Schamel equation | 229 |

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

| | |
|--|-----|
| E. E. Peskova, O. S. Yazovtseva, M. S. Mustaykin | |
| Numerical study of subsonic flow with chemical reactions in the presence of laser radiation | 243 |

| | |
|---|-----|
| The rules of article design (in Russian) | 255 |
| The rules of article design (in English) | 259 |
| The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) | 263 |
| The rules for article layout in the LaTeX system (in English) | 268 |
| Author Index | 272 |

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.651

Об ортогонализации сплайнов Шенберга

В. Л. Леонтьев

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
(г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)*

Аннотация. Статья посвящена применению авторской процедуры ортогонализации финитных функций, не разрушающей их конечные носители, к сплайнам Шенберга третьей степени. Описывается общий алгоритм модификации материнского сплайна Шенберга в рамках этой процедуры ортогонализации. Показано, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается ортогонализация порождаемого им сеточного набора сплайнов без изменения конечных носителей сплайнов. Найдены шестнадцать вариантов ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени ступенчатыми функциями. В первой группе восьми вариантов все коэффициенты модифицирующих ступенчатых функций имеют действительные значения, но сплайны Шенберга после такой модификации не являются четными или нечетными функциями. В каждом из восьми вариантов второй группы два коэффициента являются комплексными, а остальные шесть коэффициентов имеют действительные значения. Модифицированные сплайны Шенберга второй группы представляют собой суммы четной и нечетной функций. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сплайнов Шенберга.

Ключевые слова: кубические сплайны Шенберга, материнский сплайн, процедура ортогонализации Грама-Шмидта, ступенчатые функции, авторская процедура ортогонализации финитных функций, порядок аппроксимации ортогональными сплайнами Шенберга, смешанные вариационно-сеточные методы

Для цитирования: Леонтьев В. Л. Об ортогонализации сплайнов Шенберга // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

Об авторе:

Леонтьев Виктор Леонтьевич, докт. физ.-мат. наук, профессор Научного Центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29В), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru

© Леонтьев В. Л.



MSC2020 41A15

On orthogonalization of Schoenberg splines

V. L. Leontiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The article is devoted to the application of the author's orthogonalization procedure of finite functions, which does not destroy their finite supports, to Schoenberg splines of the third degree. A general algorithm for modifying the Schoenberg mother spline within the framework of this orthogonalization procedure is described. It is shown that orthogonalization of the grid set of splines generated by the Schoenberg spline is achieved without changing the finite supports of the splines in the case of using eight step functions to modify the mother spline. Sixteen variants of orthogonalization for the cubic Schoenberg splines by step functions are found. In the first group of eight variants, all coefficients of the modifying step functions have real values, but the Schoenberg splines after such modification are not even or odd functions. In each of the eight variants of the second group, two coefficients are complex, and the remaining six coefficients have real values. The modified Schoenberg splines of the second group are sums of even and odd functions. A theorem on the order of approximation of any function from the Sobolev space by linear combinations of constructed orthogonal Schoenberg splines is proved.

Keywords: cubic Schoenberg splines, mother spline, Gram-Schmidt orthogonalization procedure, step functions, author's orthogonalization procedure for finite functions, order of approximation by orthogonal Schoenberg splines, mixed variational-grid methods

For citation: V. L. Leontiev. On orthogonalization of Schoenberg splines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:2(2025), 111–126. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.111-126

About the author:

Victor L. Leontiev, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politechnicheskaya str., litera B, St. Petersburg, 195251, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru

1. Введение

В 1946 году в статье [1] I. J. Schoenberg впервые построил кусочно-полиномиальные сплайны третьей степени, имеющие конечные носители $[-2, 2]$. Материнский сплайн Шенберга состоит из четырех кубических функций, заданных на отрезках $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, которые в точках с координатам (-1) , 0 , 1 сопрягаются друг с другом, его масштабирование и трансляция порождает сеточную систему сплайнов Шенберга. В точках сопряжения кубических частей общий график сплайна Шенберга не имеет разрывов и изломов, поскольку во всех точках области определения сплайна имеется непрерывность сплайна и его первой производной. Непрерывной во всех точках области определения, в том числе, во всех точках сопряжения частей сплайна является также его вторая производная, что определяет величину дефекта сплайна равную единице. Это характеризует высокий уровень непрерывности и гладкости сплайнов Шен-

берга и объясняет их широкое применение в теории аппроксимации и в методах вычислительной математики и механики. Теория сплайнов возникла в 1946 году после создания сплайнов Шенберга и начала быстро развиваться. Появился класс В-сплайнов, одним из важнейших примеров которых явились сплайны Шенберга – В-сплайны третьей степени. Термин В-сплайн был предложен И. Шенбергом. В современной теории сплайнов В-сплайном называют функцию с минимальным конечным носителем для заданной степени сплайна и порядка его гладкости. Оказалось, что до создания сплайнов Шенберга и до начала теории сплайнов уже были известны системы сеточных ступенчатых базисных функций [2] и системы сеточных финитных кусочно-линейных базисных функций Фабера-Шаудера [3–4], которые соответствуют В-сплайнам соответственно нулевой и первой степеней. Но системы ступенчатых и кусочно-линейных сеточных финитных базисных функций, созданные в 1910 году, не привели тогда к появлению и развитию теории сплайнов поскольку для них, в отличие от сплайнов Шенберга, идея сопряжения конечных частей многочленов в пределах конечного носителя материнского сплайна не находилась, по-видимому, на переднем плане процедуры их построения.

Процедура Грама-Шмидта ортогонализации систем функций, применяемая для ортогонализации наборов сплайнов на каждой сетке из последовательности сеток, возникающей при сгущении сеток в области, разрушает конечные носители исходной системы сплайнов. Следовательно, ортогонализация сплайнов с помощью процедуры Грама-Шмидта, что отмечается в монографии [5], приводит к утрате важнейшего для многих алгоритмов вариационно-сеточных методов (ВСМ), в частности, метода конечных элементов, свойства финитности базисных функций. Именно свойство финитности сплайнов позволило в середине 20 века устранить основной недостаток матриц систем сеточных уравнений, возникающих в ВСМ, а именно, тот недостаток, который связан с плохой обусловленностью таких матриц, вызванный применением не финитных базисных функций. Поэтому в алгоритмах ВСМ, в частности, метода конечных элементов, начали активно применяться системы сплайнов, не обладавшие свойством ортогональности даже на отдельных сетках.

В ВСМ [6], основанных на вариационном принципе Лагранжа и связанных с применением сплайнов, отсутствие у сплайнов свойства ортогональности не оказалось критичным и не привело к замедлению развития таких методов.

Однако, отсутствие свойства ортогональности сплайнов на каждой отдельной сетке значительно затормозило в конце 20 века развитие смешанных ВСМ [6], основанных на вариационных принципах Рейсснера и Ху-Вашицу механики деформируемого твердого тела. Причиной этого явилось то, что в таких методах с каждым узлом сетки связано в несколько раз больше узловых неизвестных по сравнению с ВСМ, основанными на вариационном принципе Лагранжа (например, в теории упругости девять узловых неизвестных – шесть компонент тензора напряжений и три компоненты вектора перемещений в смешанном ВСМ, вместо трех неизвестных – в ВСМ, основанном на вариационном принципе Лагранжа). В итоге оказалось, что матрица сеточных уравнений смешанного ВСМ содержит примерно на порядок больше элементов по сравнению с ВСМ, основанным на вариационном принципе Лагранжа. Это потребовало значительного увеличения вычислительных затрат при решении, например, задачи упругости. Но смешанный ВСМ дает на той же сетке более гладкие и более точные решения для деформаций и силовых факторов – производных компонент вектора перемещений. Это достоинство смешанных ВСМ и другие их положительные характеристики, например, определяемые отсутствием необходимости удовлетворять какие-либо граничные усло-

вия до варьирования функционала Рейсснера или функционала Ху-Вапицу и до решения системы сеточных уравнений, поскольку все граничные условия являются естественными, привело к поиску пути преодоления общего недостатка смешанных ВСМ, вызванного возрастанием объема вычислительных затрат на получение решений по сравнению с ВСМ, основанным на вариационном принципе Лагранжа.

С 1993 года, в котором были впервые созданы ортогональные кусочно-линейные сплайны, автором данной статьи и его учениками были построены и исследованы ортогональные кусочно-квадратичные сплайны на конечных отрезках, а также кусочно-линейные и кусочно-квадратичные сплайны на прямоугольных и треугольных конечных носителях. Эти и другие ортогональные сплайны представлены и систематизированы в книге [6], в которой указываются основные научные работы автора и его учеников, посвященные возникновению в 1993 году теории ортогональных сплайнов и ее дальнейшему развитию. Например, в [7] показывается применение ортогональных сплайнов в алгоритмах численных методов, а в [8] – при построении нового потенциала взаимодействия атомов, снижающего время расчета динамики наносистем атомов с помощью компьютера. Основная цель создания в 1993 году ортогональных сплайнов была связана с преодолением указанного выше недостатка смешанных ВСМ. Этот недостаток смешанных ВСМ был преодолен, поскольку ортогональные сплайны позволили исключать все силовые узловые неизвестные из глобальной системы сеточных уравнений до начала решения этой системы уравнений на компьютере, причем такое исключение оказалось возможным проводить также в аналитической форме при формировании системы сеточных уравнений.

В книге [6] были предложены две процедуры ортогонализации сплайнов с сохранением при этом, в отличие от процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, размеров конечных носителей сплайнов. При этом, данные процедуры были использованы для ортогонализации кусочно-линейных и кусочно-квадратичных сплайнов. Примеры ортогональных кусочно-кубических сплайнов Шенберга в [6] не приводятся.

С дальнейшим развитием и с широким применением полиномиальных сплайнов Шенберга связаны многие статьи, в том числе, статьи И. Шенберга, например, [9]. В математической статистике, вычислительной математике, статистической радиотехнике и в других областях науки и техники применяются полиномиальные сплайны Шенберга нечетных степеней до 13-й степени включительно [10–11]. В работе [10] впервые приводятся точные формулы для сплайна Шенберга 15-й степени. В статье [12] отмечается центральная роль и в настоящее время сплайнов Шенберга в численном анализе, рассматриваются теоретические вопросы проблемы Шенберга [12], связанной с построением сплайнов. В работе [13] сообщается, что эффективное решение задач восстановления векторных и тензорных полей по результатам просвечивания исследуемых объектов в медицине, биологии, электронной микроскопии было получено с использованием в качестве аппроксимирующей последовательности потенциальных и соленоидальных векторных полей, построенных на основе двумерных В-сплайнов. В работе [14] приводятся результаты теоретических исследований зависимости погрешности приближения достаточно гладкой функции В-сплайнами третьей степени от величины параметра смещения исходных данных. Получены условия, при выполнении которых кубический В-сплайн восстанавливает многочлены до n -й степени. В статье [15] дается обзор развития теории сплайнов Шенберга. Развития, которое является актуальным направлением теории аппроксимации и сейчас, ему посвящены многие статьи, например, [16–17].

В данной статье рассматривается применение авторской геометрической процедуры

ортогонализации сплайнов [6] к сплайнам Шенберга. Описан общий алгоритм модификации материнского кубического сплайна Шенберга в рамках геометрической процедуры, который может быть использован также для ортогонализации сплайнов Шенберга других нечетных степеней до 15-й степени включительно [10]. Показано, что в случае использования восьми ступенчатых функций для модификации материнского сплайна Шенберга третьей степени достигается возможность его ортогонализации на сетке без изменения конечного носителя сплайна. Найдены несколько вариантов ортогонализации сплайнов Шенберга третьей степени ступенчатыми функциями, имеющими не только действительные, но и комплексные коэффициенты, а также имеющими только действительные коэффициенты. Доказана теорема о порядке аппроксимации любой функции пространства Соболева линейными комбинациями построенных ортогональных сеточных сплайнов Шенберга.

2. Сплайны Шенберга третьей степени и процедура их ортогонализации, не изменяющая конечные носители сплайнов

Материнский сплайн Шенберга третьей степени имеет вид [1], [18]

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2, \\ (2-x)^3/6, & 1 \leq x \leq 2, \\ [1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6, & 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi^{(3)}(-x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Для ортогонализации сеточных сплайнов Шенберга каждый из четырех отрезков $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, вместе составляющих конечный носитель сплайна Шенберга третьей степени, разбивается на N участков одинаковой длины равной $1/N$. Некоторые из этих участков в пределах каждого из отрезков $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ выбираются в качестве конечных носителей вспомогательных финитных функций, предназначенных для модификации сплайнов Шенберга с целью их ортогонализации на каждой конкретной сетке.

В случае $N = 10$ в качестве двух конечных носителей вспомогательных функций, например, на отрезке $[0, 1]$, могут быть взяты два объединения четырех из десяти участков, а именно:

$$[0, 0.1] \cup [0.1, 0.2] \cup [0.2, 0.3] \cup [0.3, 0.4], \\ [0.6, 0.7] \cup [0.7, 0.8] \cup [0.8, 0.9] \cup [0.9, 1.0].$$

Вспомогательными функциями на этих двух конечных носителях являются две функции, полученные из материнского сплайна Шенберга его сжатием в десять раз и перемещением вправо соответственно на 0.2 и 0.8 (масштабированием и транслированием) вдоль оси Ox . Аналогичным образом на соответствующих частях отрезков $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[1, 2]$ формируются и располагаются еще шесть вспомогательных масштабированных и транслированных сплайнов Шенберга. Все восемь вспомогательных сплайнов Шенберга используются для модификации материнского сплайна Шенберга с целью ортогонализации порождаемой таким материнским сплайном системы сеточных функций подобно тому, как это проводится и исследуется далее в случае ступенчатых вспомогательных функций.

При $N = 5$ в другом варианте построения вспомогательных функций используются ступенчатые функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_i, b_i], \\ 0, & x \notin [a_i, b_i], \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c_i, d_i], \\ 0, & x \notin [c_i, d_i], \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

причем конечные носители $[a_i, b_i]$ функций φ_i имеют вид $[0.2, 0.4]$, $[0.6, 0.8]$, $[1.2, 1.4]$, $[1.6, 1.8]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$, а конечные носители $[c_i, d_i]$ функций ψ_i имеют вид $[-0.4, -0.2]$, $[-0.8, -0.6]$, $[-1.4, -1.2]$, $[-1.8, -1.6]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$.

Материнский сплайн Шенберга третьей степени после модификации имеет вид

$$\Phi(x) = \varphi^{(3)}(x) + \sum_{i=1}^4 [A_i \psi_i(x) + B_i \varphi_i(x)], \quad (2.2)$$

где A_i, B_i — неизвестные постоянные коэффициенты. Значения этих восьми коэффициентов находятся из условий ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x-3) dx = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x-2) dx = 0, \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x-1) dx = 0, \quad (2.5)$$

модифицированного материнского сплайна (2.2) и трех сплайнов $\Phi(x-3)$, $\Phi(x-2)$, $\Phi(x-1)$, полученных перемещением вдоль оси Ox модифицированного материнского сплайна и имеющих непустые пересечения их конечных носителей с конечным носителем сплайна $\Phi(x)$.

Наряду с условиями ортогональности должны также выполняться два необходимых условия аппроксимации различных функций модифицированными сплайнами Шенберга:

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, \quad A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0, \quad (2.6)$$

сформированных с учетом расположения конечных носителей функций φ_i, ψ_i на каждой из четырех основных частей конечных носителей функций $\Phi(x)$, $\Phi(x-3)$, $\Phi(x-2)$, $\Phi(x-1)$. Необходимость этих условий для того, чтобы модифицированные сплайны Шенберга обладали свойствами аппроксимации, будет показана далее в доказательстве теоремы.

3. Условия ортогональности модифицированных сплайнов Шенберга

Условие ортогональности (2.3) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на три шага сетки, имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \Phi(x-3) dx &= \int_1^2 \Phi(x) \Phi(x-3) dx = \\ &= \int_1^2 [(2-x)^3/6 + B_3 \varphi_3(x) + B_4 \varphi_4(x)] [(x-1)^3/6 + A_4 \varphi_3(x) + A_3 \varphi_4(x)] dx = 0 \end{aligned}$$

и приводит к уравнению

$$0.007142857143/36 + 0.006A_3/6 + 0.07A_4/6 + \\ + 0.006B_3/6 + 0.07B_4/6 + 0.2(A_3B_4 + A_4B_3) = 0. \quad (3.1)$$

Условие ортогональности (2.4) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на два шага сетки, записывается в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-2)dx = \int_0^1 \Phi(x)\Phi(x-2)dx + \int_1^2 \Phi(x)\Phi(x-2)dx = \\ = \int_0^1 \{[1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6 + B_1\varphi_1(x) + \\ + B_2\varphi_2(x)\}[x^3/6 + A_4\varphi_1(x) + A_3\varphi_2(x)]dx + \\ + \int_1^2 [(2-x)^3/6 + B_3\varphi_3(x) + B_4\varphi_4(x)]\{[1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 - \\ - 3(x-1)^3]/6 + A_2\varphi_3(x) + A_1\varphi_4(x)\}dx = 0$$

и дает уравнение

$$0.4285714286/18 + 0.006(A_1 + B_1)/6 + 0.07(A_2 + B_2)/6 + 0.418(A_3 + B_3)/6 + \\ + 0.706(A_4 + B_4)/6 + 0.2(A_1B_4 + A_2B_3 + A_3B_2 + A_4B_1) = 0. \quad (3.2)$$

Условие ортогональности (2.5) двух сплайнов Шенберга, смещенных друг относительно друга на один шаг сетки, имеющее вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\Phi(x-1)dx = \int_{-1}^0 \Phi(x)\Phi(x-1)dx + \int_0^1 \Phi(x)\Phi(x-1)dx + \int_1^2 \Phi(x)\Phi(x-1)dx = \\ = \int_{-1}^0 \{[1 + 3(1+x) + 3(1+x)^2 - 3(1+x)^3]/6 + A_1\psi_1(x) + \\ + A_2\psi_2(x)\}[(x+1)^3/6 + A_3\psi_1(x) + A_4\psi_2(x)]dx + \\ + \int_0^1 \{[1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6 + B_1\varphi_1(x) + \\ + B_2\varphi_2(x)\}\{[1 + 3x + 3x^2 - 3x^3]/6 + A_1\varphi_2(x) + A_2\varphi_1(x)\}dx + \\ + \int_1^2 [(2-x)^3/6 + B_3\varphi_3(x) + B_4\varphi_4(x)]\{[1 + 3(2-x) + \\ + 3(2-x)^2 - 3(2-x)^3]/6 + B_1\varphi_3(x) + B_2\varphi_4(x)\}dx = 0,$$

преобразуется в уравнение

$$8.5071428568/36 + 0.488(A_1 + B_1)/6 + 0.712(A_2 + B_2)/6 + \\ + 0.706(A_3 + B_3)/6 + 0.418(A_4 + B_4)/6 + \\ + 0.2(A_1B_2 + A_2B_1 + A_1A_3 + A_2A_4 + B_1B_3 + B_2B_4) = 0. \quad (3.3)$$

4. Решения системы уравнений ортогональности и аппроксимации

4.1. Первая процедура ортогонализации

Решение системы семи уравнений для восьми неизвестных коэффициентов A_i, B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, состоящей из трех условий ортогональности (3.1), (3.2), (3.3), а также из четырех дополнительных условий

$$A_1 = -B_2, A_2 = -B_1, A_3 = -B_4, A_4 = -B_3,$$

обеспечивающих выполнение необходимых условий аппроксимации (2.6) и являющихся по сравнению с условиями (2.6) более жесткими ограничениями на искомые коэффициенты, дает восемь вариантов значений искомого восьми коэффициентов, в каждом из которых два коэффициента имеют комплексные значения, а шесть коэффициентов – действительные значения:

$$4.1.1) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -0.1200000000 - 0.6860771393 i, & A_2 = -B_1 &= -1.221676965, \\ A_3 = -B_4 &= -0.02666666667, & A_4 = -B_3 &= -0.02246871482; \end{aligned}$$

$$4.1.2) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -0.1200000000 + 0.6860771393 i, & A_2 = -B_1 &= -1.221676965, \\ A_3 = -B_4 &= -0.02666666667, & A_4 = -B_3 &= -0.02246871482; \end{aligned}$$

$$4.1.3) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -0.1200000000 - 0.6860771393 i & A_3 = -B_4 &= -0.02666666667, \\ A_2 = -B_1 &= 1.461676965, & A_4 = -B_3 &= 0.07580204816; \end{aligned}$$

$$4.1.4) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -0.1200000000 + 0.6860771393 i & A_2 = -B_1 &= 1.461676965, \\ A_3 = -B_4 &= -0.02666666667, & A_4 = -B_3 &= 0.07580204816; \end{aligned}$$

$$4.1.5) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -1.272994032 & A_2 = -B_1 &= 0.1200000000, \\ A_3 = -B_4 &= -0.08384285986, & A_4 = -B_3 &= 0.02666666667 - 0.02923749910 i; \end{aligned}$$

$$4.1.6) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= 1.032994032 & A_2 = -B_1 &= 0.1200000000, \\ A_3 = -B_4 &= 0.03050952652, & A_4 = -B_3 &= 0.02666666667 - 0.02923749910 i; \end{aligned}$$

$$4.1.7) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= -1.272994032 & A_2 = -B_1 &= 0.1200000000, \\ A_3 = -B_4 &= -0.08384285986, & A_4 = -B_3 &= 0.02666666667 + 0.02923749910 i; \end{aligned}$$

$$4.1.8) \begin{aligned} A_1 = -B_2 &= 1.032994032 & A_2 = -B_1 &= 0.1200000000, \\ A_3 = -B_4 &= 0.03050952652, & A_4 = -B_3 &= 0.02666666667 + 0.02923749910 i; \end{aligned}$$

где i – мнимая единица.

4.2. Вторая процедура ортогонализации

Решение системы восьми уравнений для восьми неизвестных коэффициентов $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4$, состоящей из трех условий ортогональности (3.1), (3.2), (3.3), а также из условия аппроксимации

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0$$

и четырех дополнительных условий

$$A_2 = 0, A_4 = 0, B_1 = 0, B_3 = 0,$$

задающих значения четырех коэффициентов и обеспечивающих выполнение второго необходимого условия аппроксимации (2.6), дает восемь вариантов значений ненулевых четырех коэффициентов, в каждом из которых все коэффициенты имеют действительные значения:

$$4.2.1) \quad \begin{array}{ll} A_1 = -0.4542027438, & A_3 = -0.05736803426, \\ B_2 = 1.242145729, & B_4 = -0.7305749508; \end{array}$$

$$4.2.2) \quad \begin{array}{ll} A_1 = 1.056525497, & A_3 = -0.04522084077, \\ B_2 = -0.9528901871, & B_4 = -0.05841446882; \end{array}$$

$$4.2.3) \quad \begin{array}{ll} A_1 = 1.008878332, & A_3 = 0.06310933384, \\ B_2 = -1.061220362, & B_4 = -0.01076730437; \end{array}$$

$$4.2.4) \quad \begin{array}{ll} A_1 = -1.179353124, & A_3 = 1.591327502, \\ B_2 = -0.4065498075, & B_4 = -0.005424570197; \end{array}$$

$$4.2.5) \quad \begin{array}{ll} A_1 = 1.002145729, & A_3 = -0.7839082841, \\ B_2 = -0.2142027438, & B_4 = -0.004034700930; \end{array}$$

$$4.2.6) \quad \begin{array}{ll} A_1 = -1.192890187 & A_3 = -0.1117478022, \\ B_2 = 1.296525497, & B_4 = 0.008112492567; \end{array}$$

$$4.2.7) \quad \begin{array}{ll} A_1 = -1.301220362, & A_3 = -0.06410063771, \\ B_2 = 1.248878332, & B_4 = 0.1164426672; \end{array}$$

$$4.2.8) \quad \begin{array}{ll} A_1 = -0.6465498075 & A_3 = -0.05875790353, \\ B_2 = -0.9393531243, & B_4 = 1.644660835. \end{array}$$

Варианты решений 4.2.1-4.2.8 содержат восемь действительных значений коэффициентов A_i, B_i ступенчатых функций $\varphi_i(x), \psi_i(x), i = 1, 2, 3, 4$. Функция, модифицирующая материнский сплайн Шенберга и состоящая из четырех ступенчатых функций, не

является четной или нечетной, поэтому сплайн Шенберга после модификации остается действительной функцией, которая не является четной или нечетной.

Каждое решение из 4.1.1-4.1.8 содержит два комплексных значения и шесть действительных значений коэффициентов A_i , B_i ступенчатых функций $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Сплайн Шенберга после модификации становится функцией с комплексными значениями, которая представляет собой сумму четной и нечетной функций, поскольку функция, модифицирующая материнский сплайн Шенберга и состоящая из четырех ступенчатых функций, является нечетной. Следует отметить, что в четырех вариантах решений 4.1.1-4.1.8 величины действительной и мнимой частей комплексных коэффициентов почти на два порядка меньше величин максимальных значений действительных коэффициентов.

5. Исследование аппроксимативных свойств ортогональных сплайнов Шенберга

В исследовании свойств модифицированных сплайнов Шенберга при аппроксимации функций с помощью линейных комбинаций сеточных сплайнов, порожденных модифицированным материнским сплайном Шенберга, здесь рассматривается масштабированный материнский сплайн Шенберга третьей степени

$$\varphi_m^{(3)}(x) = \varphi^{(3)}(x/5) \equiv \begin{cases} 0, & x \geq 10, \\ (2 - x/5)^3/6, & 5 \leq x \leq 10, \\ [1 + 3(1 - x/5) + 3(1 - x/5)^2 - 3(1 - x/5)^3]/6, & 0 \leq x \leq 5, \\ \varphi^{(3)}(-x/5), & x \leq 0. \end{cases}$$

С учетом масштабирования материнского сплайна с конечного носителя $[-2, 2]$ на конечный носитель $[-10, 10]$ конечные носители $[a_i, b_i]$ функций φ_i также масштабируются и берутся в виде: $[1, 2]$, $[3, 4]$, $[6, 7]$, $[8, 9]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$, а конечные носители $[c_i, d_i]$ функций ψ_i – в виде: $[-2, -1]$, $[-4, -3]$, $[-7, -6]$, $[-9, -8]$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 5.1. *Для любой функции $u \in W_2^2(R)$ существуют такие коэффициенты $\{u_i\}$, что при $h \rightarrow 0$*

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^0} \leq C \cdot h^2 \|u\|_{W_2^2}, \quad \sum_{(i)} |u_i|^2 \leq c \|u\|_{W_2^0}^2, \quad (5.1)$$

если выполняются условия

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0.$$

Здесь h – шаг сетки, C , c – постоянные, не зависящие от h и от $u(x)$, $\Phi_i(x)$ – сеточные сплайны, полученные масштабированием и смещением вдоль оси Ox модифицированного ступенчатыми функциями материнского сплайна Шенберга $\Phi(x)$ третьей степени, W_2^0 , W_2^2 – гильбертовы пространства Соболева.

Доказательство. Преобразование Фурье

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-i\xi x} dx,$$

модифицированного ступенчатыми функциями материнского сплайна Шенберга

$$\Phi(x) = \varphi_m^{(3)}(x) + \sum_{i=1}^4 (A_i \psi_i(x) + B_i \varphi_i(x))$$

имеет вид

$$\hat{\Phi}(\xi) = \hat{\varphi}_m^{(3)}(\xi) + \sum_{i=1}^4 (A_i \hat{\psi}_i(\xi) + B_i \hat{\varphi}_i(\xi)).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (2\pi)^{1/2} \hat{\varphi}_m^{(3)}(\xi) &= \frac{1}{5^3 i^4 \xi^4} (e^{-10i\xi} - 4e^{-5i\xi} + 6 - 4e^{5i\xi} + e^{10i\xi}) = \\ &= \frac{1}{5^3 i^4 \xi^4} (e^{i\frac{5}{2}\xi} - e^{-i\frac{5}{2}\xi})^4 = 5 \left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi} \right)^4, \end{aligned} \quad (5.2)$$

и

$$\begin{aligned} (2\pi)^{1/2} \sum_{i=1}^4 (A_i \hat{\psi}_i(\xi) + B_i \hat{\varphi}_i(\xi)) &= \\ &= A_1 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{3\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{3\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + A_2 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{7\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{7\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + \\ &+ A_3 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{13\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{13\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + A_4 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{17\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{17\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + \\ &+ B_1 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{3\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{3\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + B_2 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{7\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{7\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + \\ &+ B_3 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{13\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{13\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) + B_4 \frac{2}{\xi} \left(\cos \frac{17\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{17\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(A_1 \cos \frac{3\xi}{2} + A_3 \cos \frac{13\xi}{2} + B_2 \cos \frac{7\xi}{2} + B_4 \cos \frac{17\xi}{2} \right) - \\ &- i \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(-A_1 \sin \frac{3\xi}{2} - A_3 \sin \frac{13\xi}{2} + B_2 \sin \frac{7\xi}{2} + B_4 \sin \frac{17\xi}{2} \right) + \\ &+ \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(A_2 \cos \frac{7\xi}{2} + A_4 \cos \frac{17\xi}{2} + B_1 \cos \frac{3\xi}{2} + B_3 \cos \frac{13\xi}{2} \right) - \\ &- i \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(-A_2 \sin \frac{7\xi}{2} - A_4 \sin \frac{17\xi}{2} + B_1 \sin \frac{3\xi}{2} + B_3 \sin \frac{13\xi}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

то

$$\hat{\Phi}(0) \neq 0, \quad (5.4)$$

так как в соответствии с (5.2)

$$\hat{\varphi}_m^{(3)}(0) = \frac{5}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi} \right)^4 = \frac{5}{(2\pi)^{1/2}},$$

а из (5.3) следует, что

$$\left. \sum_{i=1}^4 (A_i \hat{\psi}_i(\xi) + B_i \hat{\varphi}_i(\xi)) \right|_{\xi=0} = 0.$$

Имеем далее

$$(2\pi)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \hat{\varphi}_m^{(3)}(\xi) = 20 \left(\frac{\sin(\frac{5}{2}\xi)}{\frac{5}{2}\xi} \right)^3 \frac{\xi \cos(\frac{5}{2}\xi) - \frac{2}{5} \sin(\frac{5}{2}\xi)}{\xi^2}, \quad (5.5)$$

а также

$$\begin{aligned} (2\pi)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^4 (A_i \hat{\psi}_i(\xi) + B_i \hat{\varphi}_i(\xi)) = & \\ = 2 \left(-\frac{1}{\xi^2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} \cos \frac{\xi}{2} \right) & \left[A_1 \cos \frac{3\xi}{2} + A_3 \cos \frac{13\xi}{2} + B_2 \cos \frac{7\xi}{2} + B_4 \cos \frac{17\xi}{2} \right] - \\ & - \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(A_1 \frac{3}{2} \sin \frac{3\xi}{2} + A_3 \frac{13}{2} \sin \frac{13\xi}{2} + B_2 \frac{7}{2} \sin \frac{7\xi}{2} + B_4 \frac{17}{2} \sin \frac{17\xi}{2} \right) + \\ - 2i \left(-\frac{1}{\xi^2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} \cos \frac{\xi}{2} \right) & \left(-A_1 \sin \frac{3\xi}{2} - A_3 \sin \frac{13\xi}{2} + B_2 \sin \frac{7\xi}{2} + B_4 \sin \frac{17\xi}{2} \right) - \\ & - i \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(-A_1 \frac{3}{2} \cos \frac{3\xi}{2} - A_3 \frac{13}{2} \cos \frac{13\xi}{2} + B_2 \frac{7}{2} \cos \frac{7\xi}{2} + B_4 \frac{17}{2} \cos \frac{17\xi}{2} \right) + \\ + 2 \left(-\frac{1}{\xi^2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} \cos \frac{\xi}{2} \right) & \left[A_2 \cos \frac{7\xi}{2} + A_4 \cos \frac{17\xi}{2} + B_1 \cos \frac{3\xi}{2} + B_3 \cos \frac{13\xi}{2} \right] - \\ & - \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(A_2 \frac{7}{2} \sin \frac{7\xi}{2} + A_4 \frac{17}{2} \sin \frac{17\xi}{2} + B_1 \frac{3}{2} \sin \frac{3\xi}{2} + B_3 \frac{13}{2} \sin \frac{13\xi}{2} \right) - \\ - 2i \left(-\frac{1}{\xi^2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} \cos \frac{\xi}{2} \right) & \left(-A_2 \sin \frac{7\xi}{2} - A_4 \sin \frac{17\xi}{2} + B_1 \sin \frac{3\xi}{2} + B_3 \sin \frac{13\xi}{2} \right) - \\ & - i \frac{2}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \left(-A_2 \frac{7}{2} \cos \frac{7\xi}{2} - A_4 \frac{17}{2} \cos \frac{17\xi}{2} + B_1 \frac{3}{2} \cos \frac{3\xi}{2} + B_3 \frac{13}{2} \cos \frac{13\xi}{2} \right). \quad (5.6) \end{aligned}$$

Согласно (5.5) получим

$$\frac{d}{d\xi} \hat{\varphi}_m^{(3)}(2\pi j) = 0 \quad \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z}.$$

Из (5.6) следует, что

$$\left[\frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^4 (A_i \hat{\psi}_i(\xi) + B_i \hat{\varphi}_i(\xi)) \right]_{\xi=2\pi j} = 0 \quad \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z},$$

поскольку, во-первых, в (5.6) две суммы функций $\cos \frac{k\xi}{2}$, $k = 3, 7, 13, 17$, находящиеся в квадратных скобках для значений $\xi = 2\pi j$ имеют значения равные нулю, так как все функции $\cos \frac{k\xi}{2}$, $k = 3, 7, 13, 17$ в квадратных скобках при этом равны одновременно либо $(+1)$ или (-1) в зависимости от значения j и так как выполняются условия

$$A_1 + A_3 + B_2 + B_4 = 0, \quad A_2 + A_4 + B_1 + B_3 = 0,$$

во-вторых, поскольку для значений $\xi = 2\pi j$ равны нулю значения всех функций $\sin \frac{k\xi}{2}$, $k = 1, 3, 7, 13, 17$, входящие в выражение (5.6).

Поэтому

$$\frac{d}{d\xi} \hat{\Phi}(2\pi j) = 0 \quad \forall j : 0 \neq j \in \mathbf{Z} \quad (5.7)$$

и, следовательно, в соответствии с (5.4) и (5.7) выполняются все условия теоремы Стренга-Фикса [18] для значения параметра $p = 1$ этой теоремы, определяемого порядком производной (5.7).

Поэтому оценка погрешности аппроксимации из формулировки теоремы Стренга-Фикса [18]

$$\left\| u(x) - \sum_{(i)} u_i \Phi_i(x) \right\|_{W_2^s} \leq C \cdot h^{p+1-s} \|u\|_{W_2^{p+1}}, \quad \sum_{(i)} |u_i|^2 \leq c \|u\|_{W_2^0}^2$$

принимает в рассматриваемом случае для $p = 1$, $s = 0$ вид (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Согласно полученной здесь оценке (5.1) аппроксимативных свойств модифицированных сплайнов Шенберга последовательность линейных комбинаций сеточных наборов ортогональных сплайнов Шенберга $\sum_i u_i \Phi_i(x)$ при стремлении величины шага сетки к нулю сходится к аппроксимируемой функции $u(x)$ с достаточно высокой скоростью, пропорциональной квадрату шага сетки.

6. Заключение

В статье с помощью процедуры ортогонализации финитных функций [6] построены, с сохранением размеров конечных носителей сплайнов, шестнадцать различных модифицированных материнских сплайнов Шенберга третьей степени. Первая группа восьми сплайнов содержит сплайны, принимающие комплексные значения, вторая группа восьми различных сплайнов состоит из сплайнов, имеющих только действительные значения.

Ортогональность сеточных наборов построенных модифицированных сплайнов Шенберга наряду со свойством их финитности, порождающим разреженность глобальных матриц сеточных уравнений, является ценнейшим свойством ортогональных сплайнов Шенберга, существенно повышающим эффективность и рациональность алгоритмов аппроксимации [6], [8] и алгоритмов вариационно-сеточных и проекционно-сеточных методов [6–7], значительно снижая для них вычислительные затраты на получение решений по сравнению с алгоритмами, в которых используются классические сплайны Шенберга или другие сплайны, не являющиеся ортогональными на сетках.

Следующая статья, которая явится продолжением данной статьи, будет содержать аналогичные результаты исследований, полученные для случая, в котором ортогонализация сплайнов Шенберга третьей степени выполняется с использованием четырех сплайнов Шенберга, имеющих конечные носители, размеры которых меньше размера конечного носителя материнского сплайна. Доказано, что порядок аппроксимации не уменьшается в результате такой ортогонализации сплайнов Шенберга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4, no. 2. P. 45-99, P. 112-141.
2. Haar A. Zue Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.* 1910. Vol. 69, no. 3. P. 331-371. DOI: 10.1007/BF01456326
3. Faber G. Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 1910. Vol. 19. P. 104-112.
4. Shauder J. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. *Math. Z.* 1928. Vol. 28, no. 1. P. 317-320. DOI: 10.1007/BF01181164
5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
6. Леонтьев В. Л. Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики. – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 465 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/i21-120
7. Леонтьев В. Л. Об ортогональных финитных функциях и о численных методах, связанных с их применением // *Обзорение прикладной и промышленной математики.* 2002. Т. 9, № 3. С. 497-504.
8. Леонтьев В. Л., Михайлов И. С. О построении потенциала взаимодействия атомов, основанном на ортогональных финитных функциях // *Нано- и микросистемная техника.* 2011. Т. 9, № 134. С. 48-50.
9. I. J. Schoenberg Spline Functions and the problem of Graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA.* 1964. Vol. 52, no. 4. P. 947-950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947
10. Алексеев В. Г., Суходоев В. А. Полиномиальные В-сплайны Шенберга нечетных степеней. Краткий обзор применений // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2012. Т. 52, № 10. С. 1756-1767. DOI: 10.1134/S096554251
11. Алексеев В. Г. В-сплайны Шенберга и их применения в радиотехнике и в смежных с ней областях // *Радиотехника.* 2003. Т. 12, № 12. С. 21-23.
12. Kushpel A., Tas K. On the problem of Schoenberg on R^n . *Journal of Mathematical Analysis.* 2024. Vol. 15, No. 6. P. 71-81. DOI: 10.54379/jma-2024-6-6
13. Светов И. Е. Использование В-сплайнов при численном решении задачи векторной 2-D томографии // *Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова.* (Новосибирск, 31.01.2011-02.02.2011). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2011. С. 81-82.
14. Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. О локальной аппроксимации кубическими сплайнами // *Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова.* (Новосибирск, 31.01.2011-02.02.2011). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2011. С. 35-36.

15. Volkov Yu. S., Subbotin Yu. N. Fifty years to Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. 2014. Vol. 20, no. 1. P. 52–67. DOI: 10.1134/S0081543815020236
16. K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar Schoenberg's exponential Euler spline curves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. 1991. Vol. 118, no. 1-2. P. 21–33. DOI: 10.1017/S0308210500028869
17. T. Briand, P. Monasse Theory and Practice of Image B-Spline Interpolation. *Image Processing On Line*. 2018. Vol. 8. P. 99-141. DOI: 10.5201 /ipol.2018.221
18. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

*Поступила 22.02.2025; доработана после рецензирования 25.04.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. I. J. Schoenberg, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A and B", *Quart. Appl. Math.*, **4:2** (1946), 45–99, 112–141.
2. A. Haar, "Zue Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Ann.*, **69:3** (1910), 331–371. DOI: 10.1007/BF01456326
3. G. Faber, "Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **19** (1910), 104–112.
4. J. Shauder, "Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems", *Math. Z.*, **28:1** (1928), 317–320. DOI: 10.1007/BF01181164
5. G. Strang, G. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hale. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973 (In Russ.), 306 p.
6. V. L. Leontiev, *Orthogonal splines and special functions in methods of computational mechanics and mathematics*, POLITEH-PRESS, SpB, 2021 DOI: 10.18720/SPBPU/2/i21-120 (In Russ.), 466 p.
7. V. L. Leontiev, "Ob ortogonalnih finitnih funkciah i o chislennih metodah, sviazannih s ih primeneniem", *Obozrenie prikladnoy i promishlennoy matematiki*, **9:3** (2002), 497–504 (In Russ.).
8. V. L. Leontiev, I. S. Milhaylov, "About the building the potential of the atomic interaction based on orthogonal finite functions", *Nano- and microsystems technology*, **9:134** (2011), 48–50 (In Russ.).
9. I. J. Schoenberg, "Spline Functions and the problem of Graduation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, **52:4** (October 1964), 947–950. DOI: 10.1073/pnas.52.4.947

10. V. G. Alekseev, V. A. Suhodoev, “Schoenberg’s polynomial B-splines of odd degrees: A brief review of application”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:10 (2012), 1331–1341. DOI: 10.1134/S096554251
11. V. G. Alekseev, “B-splyni Schoenberg i ih primeneniya v radiotekhnike i v smegnih s ney disciplinah”, *Radiotekhnika*, **12** (2003), 21–23 (In Russ.).
12. A. Kushpel, K. Tas, “On the problem of Schoenberg on \mathbb{R}^n ”, *Journal of Mathematical Analysis*, **15**:6 (2024), 71–81. DOI: 10.54379/jma-2024-6-6
13. I. E. Svetov, “Ispolzovanie B-splynov pri chislennom reshenii zadachi vektornoy 2-D tomografii”, *Metodi spline-funkciy.*, Rossiyskaya konferencia, posviashennia 80-letiu Yu. S. Zavalova (31.01.2011–02.02.2011, Novosibirsk), Institut matematiki im. S. L. Soboleva Sibirskogo otd. RAN, 2011, 81–82 (In Russ.).
14. Yu. S. Volkov, E. V. Strelkova, V. T. Shevaldin, “O lokalnoy approksimacii kubicheskimi splynamy”, *Metodi spline-funkciy.*, Rossiyskaya konferencia, posviashennia 80-letiu Yu. S. Zavalova (31.01.2011–02.02.2011, Novosibirsk), Institut matematiki im. S. L. Soboleva Sibirskogo otd. RAN, 2011, 35–36 (In Russ.).
15. Yu. S. Volkov, Yu. N. Subbotin, “Fifty years of Schoenberg’s problem on the convergence of spline interpolation”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **20**:1 (2014), 52–67. DOI: 10.1134/S0081543815020236
16. K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar, “Schoenberg’s exponential Euler spline curves”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, **118**:1–2 (1991), 21–33. DOI: 10.1017/S0308210500028869
17. T. Briand, P. Monasse, “Theory and Practice of Image B-Spline Interpolation”, *Image Processing On Line*, **8** (2018), 99–141. DOI: 10.5201/ipol.2018.221
18. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 p.

Submitted 22.02.2025; Revised 25.04.2025; Accepted 28.05.2025

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977:669.012

Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление

Н. Д. Морозкин, В. И. Ткачев, Н. Н. Морозкин

ФГБОУ ВО Уфимский университет науки и технологий (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Исследуется задача поиска оптимального по быстродействию управления в случае, когда процесс описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление. Путем перехода из n -мерного евклидова пространства в гильбертово пространство задача оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные и управление сводится к задаче оптимального быстродействия без ограничений. Показано, что область достижимости в новом пространстве является выпуклым множеством. Для решения полученной задачи используется модифицированный метод разделяющих гиперплоскостей. Одним из ключевых моментов этого метода, от которого зависит скорость сходимости алгоритма, является нахождение нормали разделяющей гиперплоскости. В настоящей работе нормаль разделяющей гиперплоскости на каждой итерации строится путем минимизации функционала типа расстояния на выпуклой оболочке опорных к множеству достижимости точек, полученных на предыдущих итерациях. После нахождения нормали, разделяющей гиперплоскости, строится опорная к области достижимости гиперплоскость, которая затем непрерывно переносится по возрастанию времени и находится первый момент времени, при котором опорная гиперплоскость достигнет заданной конечной точки. Этот момент времени и принимается за очередное приближение времени быстродействия. Сформулирована теорема о сходимости последовательных приближений по времени к значению времени быстродействия и о слабой сходимости последовательности управлений к оптимальному управлению. Алгоритм апробирован на решении задачи внешнего нагрева неограниченной пластины до заданной температуры за минимальное время с учетом ограничений на растягивающие и сжимающие термонапряжения. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: оптимальное по быстродействию управление, ограничения на фазовые переменные, нормаль разделяющей гиперплоскости, опорная гиперплоскость, время быстродействия, термонапряжения, оптимальный нагрев

Для цитирования: Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н. Об одном алгоритме решения задачи быстродействия в линейных системах с выпуклыми ограничениями на фазовые переменные и управление // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 127–142. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142

Об авторах:

Морозкин Николай Данилович, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель института информатики, математики и робототехники УУНиТ, и.о. зав. кафедрой математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-5051-7094>, MorozkinND@mail.ru

© Морозкин Н. Д., Ткачев В. И., Морозкин Н. Н.



Ткачев Владислав Игоревич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8461-3252>, tvi-vlad@mail.ru

Морозкин Никита Николаевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «УУНиТ» (430005, Россия, г. Уфа, ул. Заки-Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3162-5403>, nnm_89@mail.ru

Original article

MSC2020 57N10

About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control

N. D. Morozkin, V. I. Tkachev, N. N. Morozkin

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. The problem optimal speed control is investigated in the case when the process is described by a system of linear ordinary differential equations with nonlinear convex restrictions on phase variables and control. By moving from n -dimensional Euclidean space to Hilbert space, the optimal control problem with restrictions on phase variables and control is reduced to an optimal speed problem without restrictions. It is shown that the reachability region in the new space is a convex set. To solve the resulting problem, a modified method of separating hyperplanes is used. One of the key points of this method, on which the convergence speed of the algorithm depends, is finding the normal to the separating hyperplane. In this work, this normal at each iteration is constructed by minimizing a distance-type functional on the convex hull of points supporting the reachability set obtained at previous iterations. After finding the normal to the separating hyperplane, a hyperplane supporting the reachable region is constructed, which is then continuously transferred in increasing time and the first moment in time is found at which the supporting hyperplane reaches the given end point. This moment is taken as the next approximation to the performance time. A theorem is formulated on the convergence of successive approximations in time to the value of the performance time and on the weak convergence of a sequence of controls to an optimal control. The algorithm is tested by solving the problem of external heating of an unlimited plate to a given temperature in a minimal time, taking into account restrictions on tensile and compressive thermal stresses. The results of a computational experiment are presented.

Keywords: speed-optimal control, constraints on phase variables, normal of separating hyperplane, reference hyperplane, response time, thermal stresses, optimal heating

For citation: N. D. Morozkin, V. I. Tkachev, N. N. Morozkin. About an algorithm for solving the speed problem in linear systems with convex restrictions on phase variables and control. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:2(2025), 127–142. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.127-142

About the authors:

Nikolay D. Morozkin, D. Sc. (Phys.-Math.) Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-5051-7094>, morozkinND@mail.ru

Vladislav I. Tkachev, Ph. D. (Phys.-Math.), associate professor, Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0002-8461-3252>, tvivlad@mail.ru

Nikita N. Morozkin, Ph. D. (Phys.-Math.), associate professor, Department of Mathematical and Computer Modeling Ufa University of Science and Technology (32 Zaki-Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0005-3162-5403>, @mail.ru

1. Введение

Первые алгоритмы решения двухточечной задачи линейного быстродействия были предложены Н. Н. Красовским [1], а алгоритмы рассмотренного ниже типа Л. Нейштадтом [2] и Ж. Итоном [3] на основе геометрической интерпретации условий оптимальности, сделанной Д. Лассалем [4]. В этих работах нахождения управления $u^0(t) \in U$, переводящего систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), 0 < \tau < T \quad (1.1)$$

из положения

$$x(0) = x_0 \neq 0_{R^n} \quad (1.2)$$

в положение 0_{R^n} за минимальное время $t^0, 0 < t^0 \leq T$, сводилась к решению задачи

$$\max_{\psi_0} t^0(\psi_0) \quad (1.3)$$

При этом время быстродействия t^0 определяется из условия

$$(\psi(t^0), 0_{R^n} - x(t^0)) = 0, \quad (1.4)$$

где $\psi = \psi(\tau)$ – решение системы

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -A^T \psi, \quad \psi(0) = \psi_0 \quad (1.5)$$

$A(\tau), B(\tau), D(\tau)$ – матрицы размерности соответственно $(n \times n), (n \times m), (n \times 1)$ с кусочно-непрерывными коэффициентами, $u = u(\tau)$ – управление из множества U :

$$U = \{u = (u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)), u \in L_2^m[0, T], u_i^- \leq u_i(\tau) \leq u_i^+, i = \overline{1, m}, \tau \in [0, T]\} \quad (1.6)$$

При решении задачи (1.3) на каждой k -ой итерации строилась оценка τ_k снизу времени быстродействия исходя из выполнения условия

$$(\psi(\tau_k), 0_{R^n} - x(\tau_k)) = 0 \quad (1.7)$$

Для нахождения следующего приближения методом градиентного спуска корректировалось направление $\psi(0) = \psi_0$ так, чтобы при $\tau = \tau_k$ выполнялось неравенство

$$(\psi(\tau_k), 0_{R^n} - x(\tau_k)) < 0,$$

где $x(\tau_k)$ опорная к множеству достижимости системы (1.1), (1.2) точка, соответствующая нормали $\psi(0) = \psi_0$. Далее опорная гиперплоскость непрерывно переносилась при $\tau > \tau_k$ до первого момента τ^* , при котором выполнялось равенство

$$(\psi(\tau^*), 0_{R^n} - x(\tau^*)) = 0$$

Этот момент времени и примался за очередное приближение времени быстрогодействия τ_{k+1} .

Однако, при решении практических задач выяснилось, что предложенные методы плохо сходятся из-за “овражности” функции $t(\psi_0)$. В работах [5–7] были предложены модификации этих алгоритмов, которые, однако, существенно не улучшили их сходимость.

Н. Е. Кириным в работах [8–9] было предложено в качестве нормали, разделяющей гиперплоскости, на каждой итерации использовать функцию типа расстояния от точки 0_{R^n} до отрезка, соединяющего точку $x(\tau_k)$ из (1.7) и аналогичную точку, полученную на предыдущей итерации. В этом случае значительно снижается трудоемкость отдельной итерации, но скорость сходимости, особенно при приближении к точке 0_{R^n} , по-прежнему оставалась невысокой. Для улучшения сходимости в работе [10] Н. Е. Кириным было предложено искать минимум функции типа расстояния не на отрезке, а на выпуклой оболочке точек множества достижимости, полученных на предыдущих итерациях, каждая из которых на соответствующей итерации искалась как точка, минимизирующая функцию типа расстояния. Алгоритм стал сходиться значительно лучше, и был назван многошаговым двойственным алгоритмом решения задачи быстрогодействия. Тем не менее, если область достижимости представляла собой выпуклое сильно вытянутое множество, то скорость сходимости оставалась низкой. Автором в работе [11] в качестве точек, полученных на предыдущих итерациях, на выпуклой оболочке которых минимизируется функция типа расстояния, было предложено использовать опорные к множеству достижимости точки. На конкретных примерах было показано, что такая модификация делает алгоритм достаточно эффективным для решения любых задач линейного быстрогодействия. Полученный алгоритм далее был доработан для решения задач двухточечного быстрогодействия, описываемых линейными системами дифференциальных уравнений с линейными ограничениями на фазовые переменные и управление [12].

В настоящей работе предлагается модификация многошагового двойственного алгоритма на случай, когда ограничения на фазовые переменные и управление являются нелинейными и выпуклыми по переменным x, u .

2. Постановка задачи

Предположим, что процесс описывается системой уравнений (1.1)–(1.2) с нелинейными выпуклыми ограничениями вида

$$C(x, u, \tau) \leq 0, \quad (2.1)$$

где $C(x, u, \tau) = (c_1(x, u, \tau), \dots, c_q(x, u, \tau))$, функции $c_i(x, u, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, q$ кусочно-непрерывны по τ , выпуклы, непрерывно-дифференцируемы по x и u . Кроме того, будем предполагать, что производные по (x, u) удовлетворяют условию Липшица, а именно

$$C_x(x + \Delta x, u + \Delta u, \tau) - C_x(x, u, \tau) \leq L_1(\Delta x + \Delta u), \quad (2.2)$$

$$C_u(x + \Delta x, u + \Delta u, \tau) - C_u(x, u, \tau) \leq L_2(\Delta x + \Delta u) \quad (2.3)$$

при всех $(x + \Delta x, u + \Delta u, \tau), (x, u, \tau) \in R^n \times U \times [0, T]$, $L_1, L_2 = \text{const} > 0$.

Задача 1. Найти управление $u^0(\tau) \in U$, при котором система (1.1) перейдет из состояния (1.2) в точку 0_{R^n} за минимальное время $t^0 \in (0, T]$ и при этом почти при всех $\tau \in (0, t^0]$ будут выполнены ограничения (2.1).

3. Формулировка задачи без ограничений в гильбертовом пространстве

Введем дополнительный управляющий параметр $v \in V$,

$$V = \{v = (v_1, \dots, v_q) : v \in L_2^q[0, T], v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q\}$$

и вектор-функцию

$$h(x, u, v, \tau, t) = (h_1(x, u, v, \tau, t), \dots, h_q(x, u, v, \tau, t)), \quad (3.1)$$

где

$$h_i(x, u, v, \tau, t) = \begin{cases} [\max\{c_i(x, u, \tau), 0\}]^2 + v_i(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t], \\ 0, & \text{если } \tau \in [t, T]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Из (3.1)–(3.2) следует, что ограничения (2.1) будут выполнены, если

$$h_i(x, u, v, \tau, t) = 0, i = \overline{1, q}, \tau \in [0, T].$$

Введем новый управляющий параметр

$$\omega = (u, v) \in U \times V = \Omega \quad (3.3)$$

и вектор-функцию

$$p(\omega, t) = (h(x, u, v, \tau, t), x(t)). \quad (3.4)$$

Вектор-функция $p(\omega, t)$ принадлежит гильбертову пространству P с элементами

$$f = (g(\tau), y), g(\tau) \in L_2^q[0, T], y \in R^n$$

и с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^T (g(\tau), g(\tau)) d\tau + (y, y). \quad (3.5)$$

Переформируем задачу 1 в гильбертовом пространстве P как задачу без ограничений на фазовые переменные.

Задача 2. Найти управление $\omega^o \in \Omega$ и наименьшее время $t^o \in [0, T]$, при которых выполнится равенство

$$p(\omega^o, t^o) = (0_{L_2^q[0, T]}, 0_{R^n}) = 0_p.$$

Множество

$$Z(t) = \{p = p(\omega, t) : \omega \in \Omega\} \quad (3.6)$$

назовём множеством достижимости в рассматриваемом гильбертовом пространстве P .

Покажем, что множество $Z(t)$ является выпуклым. Тогда для решения задачи 2 можно воспользоваться многошаговым двойственным алгоритмом, доработав его на случай ограничений типа (2.1).

4. Выпуклость достижимого множества $Z(t)$

Пусть элементы $p_1 = p(\omega_1, t)$ и $p_2 = p(\omega_2, t)$ принадлежат $Z(t)$. Покажем, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ элемент

$$p_3 = p(\omega_3, t) = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 = \lambda h(x_1, u_1, v_1, \tau, t) + (1 - \lambda)h(x_2, u_2, v_2, \tau, t) + \lambda x_1(t) + (1 - \lambda)x_2(t) \quad (4.1)$$

принадлежит $Z(t)$. Здесь $\omega_1 = \omega_1(\tau) = (u_1(\tau), v_1(\tau)) \in \Omega$, $\omega_2 = \omega_2(\tau) = (u_2(\tau), v_2(\tau)) \in \Omega$, $x_1 = x_1(\tau) = x(u_1(\tau), \tau)$, $x_2 = x_2(\tau) = x(u_2(\tau), \tau)$, $\tau \in [0, t]$ – решения системы (1.1)–(1.2) при $u = u_1(\tau)$, $u = u_2(\tau)$.

Для этого достаточно показать, что управляющий параметр

$$\omega_3 = \omega_3(\tau) = (u_3(\tau), v_3(\tau)), \quad (4.2)$$

соответствующий элементу p_3 , принадлежит множеству $\Omega = U \times V$.

Множество достижимости $G(t)$ линейной системы (1.1)–(1.2) выпукло [13], следовательно, если $x_1(t)$, $x_2(t) \in G(t)$, то вектор-функция x_3

$$x_3 = x_3(t) = \lambda x_1(t) + (1 - \lambda)x_2(t), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (4.3)$$

также принадлежит $G(t)$, а управление

$$u_3(\tau) = \lambda u_1(\tau) + (1 - \lambda)u_2(\tau), \quad \tau \in [0, t] \quad (4.4)$$

соответствует элементу $x_3(t)$ и принадлежит множеству U .

Покажем, что существует управление $v_3(\tau) \in V$ такое, что элемент $p_3(\omega_3, t)$, определяемый согласно (4.1), принадлежит $Z(t)$.

Введем обозначение

$$r^2(x, u, \tau) = (r_1^2(x, u, \tau), \dots, r_q^2(x, u, \tau)), \quad \tau \in [0, t], \quad (4.5)$$

где

$$r_i(x, u, \tau) = \max \{c_i(x, u, \tau), 0\}, \quad i = \overline{1, q}.$$

Функции $c_i(x, u, \tau)$, $i = \overline{1, q}$ по условиям задачи выпуклы по (x, u) . Следовательно [14], выпуклы также по (x, u) функции $r_i(x, u, \tau)$, $i = \overline{1, q}$ и, в силу неотрицательности $r_i(x, u, \tau)$, выпуклы также по этим переменным и вектор-функциям (4.5). Положим

$$h(x_3, u_3, v_3, \tau, t) = \lambda h(x_1, u_1, v_1, \tau, t) + (1 - \lambda)h(x_2, u_2, v_2, \tau, t).$$

Поскольку $h(x, u, v, \tau, t) = 0$ при $\tau \in (t; T]$, то

$$h(x_3, u_3, v_3, \tau, t) = \lambda r^2(x_1, u_1, \tau) + (1 - \lambda)r^2(x_2, u_2, \tau) + \lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau) = r^2(x_3, u_3, \tau) + v_3(\tau).$$

Здесь

$$v_3(\tau) = \lambda r^2(x_1, u_1, \tau) + (1 - \lambda)r^2(x_2, u_2, \tau) - r^2(x_3, u_3, \tau) + \lambda v_1(\tau) + (1 - \lambda)v_2(\tau), \quad \tau \in [0, t], \quad (4.6)$$

где x_3, u_3 определяются согласно (4.3)–(4.4). Вектор-функции $r^2(x, u, \tau)$, определяемые согласно (4.5), выпуклы по (x, u) , следовательно, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} r^2(x_3, u_3, \tau) &= r^2(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2, \tau) \leq \\ &\leq \lambda r^2(x_1, u_1, \tau) + (1 - \lambda)r^2(x_2, u_2, \tau). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из неравенства (4.7) вытекает, что определяемый согласно (4.6) параметр $v_3 \geq 0$ и, следовательно, принадлежит V . Выпуклость множества $Z(t)$ доказана.

5. Построение опорной гиперплоскости с заданной нормалью

Рассмотрим функционал

$$\rho(p, t_k) = \sum_{i=1}^q \int_0^{t_k} h_i(x(\tau), u(\tau), v(\tau), \tau, t_k) d\tau + \frac{1}{2}(x(u, t_k), x(u, t_k)), \quad (5.1)$$

характеризующий в определенном смысле расстояние от точки 0_p до $Z(t_k)$. Решим задачу

$$\rho(\hat{p}, t_k) = \inf \{ \rho(p, t_k) : p \in Z(t_k) \}, \quad (5.2)$$

т.е. $\hat{p} \in Z(t_k)$, ближайшая к 0_p в смысле минимума функционала (5.1). В качестве направления нормали, при которой соответствующая опорная гиперплоскость в момент времени t_k будет отделять множество $Z(t_k)$ и точку 0_p , берётся антиградиент функционала (5.1) в точке \hat{p} , т.е.

$$l_k = (-1_{L_2^q[0, T]}, -\hat{x}(t_k)). \quad (5.3)$$

Для построения опорной к $Z(t_k)$ гиперплоскости с нормалью l_k необходимо решить задачу

$$\tilde{\beta}(t_k) = (l_k, p(\tilde{\omega}, t_k)) = \sup \{ (l_k, p(\omega, t_k)) : \omega \in \Omega \}. \quad (5.4)$$

Из конкретного вида элемента $p(\omega, t)$ в (3.4) и вида нормали l_k в (5.3) следует, что

$$\tilde{v}(\tau) = 0_{L_2^g[0, T]} \quad (5.5)$$

При этом управление $\tilde{u}(\tau)$, $\tau \in [0, t_k]$ находится путем решения задачи

$$J(\tilde{u}, t_k) = \min_{\forall u \in U} J(u, t_k), \quad (5.6)$$

где

$$J(u, t_k) = \sum_{i=1}^q \int_0^{t_k} r_i^2(x, u, \tau) d\tau + (\hat{x}, x(u, t_k)). \quad (5.7)$$

Задача (5.6) решается методом условного градиента[15]. Сходимость этого метода будет обеспечена, если функционал (5.7) является выпуклым, непрерывно-дифференцируемым по $u \in U$ с производными, удовлетворяющими условию Липшица. Выпуклость функционала (5.7) по $u \in U$ вытекает из выпуклости функций $r_i^2(x, u, \tau)$ по (x, u) . Непрерывность, дифференцируемость и Липшицевость производной по u функционала (5.7) вытекает из свойств вектор-функции $c(x, u, \tau)$ и неравенств (2.2), (2.3). Способ дифференцирования функционалов вдоль траекторий управляемой системы

описан в работе [16]. В нашем случае градиент функционала (5.7) будет вычисляться по формуле

$$J'_u(u, \tau) = R_u(x(u, \tau), u(\tau), \tau) - B^T(\tau)\psi(\tau), \quad \tau \in [0, t_k], \quad (5.8)$$

где $x(u, \tau)$ – решение системы (1.1)–(1.2), $\psi(\tau)$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = R_x(x(u, \tau), u(\tau), \tau) - A^T(\tau)\psi(\tau), & \tau \in [0, t_k], \\ \psi(\tau_k) = -\hat{x}(t_k). \end{cases} \quad (5.9)$$

Здесь

$$R_u(x, u, \tau) = 2 \sum_{i=1}^q [c_i(x, u, \tau)]_u r_i(x, u, \tau), \quad (5.10)$$

$$R_x(x, u, \tau) = 2 \sum_{i=1}^q [c_i(x, u, \tau)]_x r_i(x, u, \tau). \quad (5.11)$$

Отметим, что система (5.9) интегрируется от t_k до нуля.

6. Поиск направления нормали разделяющей гиперплоскости

В предыдущем пункте было указано, что на каждой k -ой итерации в качестве направления нормали разделяющей гиперплоскости можно взять вектор l_k , определяемый согласно (5.3). Для того, чтобы найти этот вектор необходимо знать точку $\hat{p}(t_k)$, которая находится из решения задачи (5.2). Найти точку $\hat{p}(t_k)$ достаточно сложно, поскольку множество $Z(t_k)$ априори неизвестно.

Будем искать приближенное решение задачи (5.2), а именно: искать решение (5.2) на выпуклой оболочке точек p_k и $p^{(j)}$, $j = \overline{2, s}$, принадлежащих $Z(t_k)$, где p_k – ближайшая к 0_p точка, полученная на k -ой итерации, $p^{(2)}$, $p^{(j)}$, $j = \overline{3, s}$ – опорные к $Z(t_k)$ точки, полученные на текущей и предыдущих итерациях. Здесь $p_k = (h_k, x(t_k))$, $p^{(j)} = (h^{(j)}, x^{(j)}(t_k))$, $j = \overline{2, s}$,

$$h_k = h(x(u_k, \tau), u_k(\tau), v_k(\tau), \tau, t_k),$$

$$h^{(j)} = h(x(u^{(j)}, \tau), u^{(j)}(\tau), v^{(j)}(\tau), \tau, t_k),$$

$$v_k(\tau) = v^{(j)}(\tau) = 0_{L_2^q[0, T]}, \quad x_k(t) = x(u_k, t_k), \quad x^{(j)}(t_k) = x(u^{(j)}, t_k).$$

Положим $p^{(1)} = p_k$ и найдем последовательность точек $f_{j,n} = (g_{j,n}, y_{j,n})$, $f_{0,1} = p^{(1)}$, $g_{j,n} \in L_2^q[0, T]$, $y_{j,n} \in R^n$, $j = \overline{1, s}$, $n = 1, 2, \dots$, реализующих решение задачи

$$\rho(f_{j,n}, t_k) = \min_{\alpha \in [0, 1]} \rho(p^{(j)} + \alpha(f_{j-1,n} - p^{(j)}), t_k), \quad j = \overline{1, s}.$$

С учётом конкретного вида функционала $\rho(p, t_k)$ решение задачи минимизации можно записать в виде

$$f_{j,n} = (1 - \alpha_{j,n})p^{(j)} + \alpha_{j,n}f_{j-1,n}, \quad j = \overline{1, s},$$

где $\alpha_{j,n} \in [0, 1]$, ближайшее число к $\overline{\alpha_{j,n}}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\alpha_{j,n}} = \begin{cases} -\frac{\theta_{j-1,n} - R^{(j)} + ((y_{j-1,n} - x^{(j)}), x^{(j)})}{(y_{j-1,n} - x^{(j)}), y_{j-1,n} - x^{(j)}}, & \text{если } \|y_{j-1,n} - x^{(j)}\| \neq 0, \\ 1, & \text{если } \|y_{j-1,n} - x^{(j)}\| = 0 \text{ и } \theta_{j-1,n} < R^{(j)}, \\ 0, & \text{если } \|y_{j-1,n} - x^{(j)}\| = 0 \text{ и } \theta_{j-1,n} \geq R^{(j)}. \end{cases}$$

Здесь

$$R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_k) = \sum_{i=1}^q \int_0^{t_k} r_i^2(x(u^{(j)}, \tau), u^{(j)}(\tau), \tau) d\tau, \quad j = \overline{1, s}, \quad (6.1)$$

где $u^{(1)} = u_k(\tau)$, $u^{(2)} = \tilde{u}_k(\tau)$, $x(u^{(j)}, \tau)$, $j = \overline{1, s}$ – решения системы дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) на промежутке $[0, t_k]$ при $\tilde{u}(\tau)$ – управление, найденное на k -ом шаге как решение (5.6).

Величины $\theta_{j,n}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \theta_{j,n} &= R^{(j)} + \alpha_{j,n}(\theta_{j-1,n} - R^{(j)}), \quad j = \overline{1, s}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \theta_{0,1} &= R^{(1)}. \end{aligned}$$

Процедура заканчивается нахождением $f_{s,n}$. Управление $\omega_{j,n}(\tau)$, соответствующее $f_{j,n}$, имеет вид

$$\omega_{j,n}(\tau) = (0_{L_2^q[0,T]}, u_{j,n}(\tau)), \tau \in [0, t_k],$$

где управления $u_{j,n}(\tau)$, в силу линейности системы (1.1), вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} u_{j,n}(\tau) &= u^j(\tau) + \alpha_{j,n}(u_{j-1,n}(\tau) - u^j(\tau)), \quad j = \overline{1, s}, \quad (6.2) \\ u_{0,1} &= u_k(\tau), \tau \in [0, t_k]. \end{aligned}$$

Если

$$| \rho(f_{s,n}, t_k) - \rho(f_{0,n}, t_k) | > \varepsilon_1, \quad (6.3)$$

где ε_1 – заданная точность выхода, то, положив $n = n + 1$, цикл повторяется. В противном случае за приближенное решение задачи (5.2) принимается $f_{s,n}$, а соответствующее элементу $f_{s,n}$ управление записывается в виде

$$\omega_{s,n}(\tau) = (0_{L_2^q[0,T]}, u_{s,n}(\tau)), \tau \in [0, t_k],$$

где $u_{s,n}(\tau)$ вычисляется по формуле (6.2).

Отметим, что при поиске $f_{s,n}$ мы использовали числа $R^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, определяемые согласно (6.1). Следовательно, запоминать вектор-функции $h(x^{(j)}, u^{(j)}, v^{(j)}, \tau, t_k)$ нет необходимости, достаточно запомнить числа $R^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, что и будет использовано в описанном ниже алгоритме.

7. Алгоритм решения задачи

Пусть к k -ой итерации известны:

$$t_k \leq t^0, u_k = u_k(\tau) \in U, x_k = x(u_k, t_k), u^{(j)} = u^{(j)}(\tau), x^{(j)} = x(u^{(j)}, t_k), j = \overline{2, s}, \tau \in [0, t_k],$$

$$R_k = R(u_k, t_k), R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_k), j = \overline{2, s},$$

Шаг 1. Построим опорную гиперплоскость к множеству $Z(t_k)$ с нормалью

$$l_k = (-1_{L_2^q[0,T]}, -x_k)$$

и найдем управление $\tilde{\omega} = (0_{L_2^q[0,T]}, \tilde{u}(\tau), \tau \in [0, t_k])$, а также элемент $\tilde{p} = p(\tilde{\omega}, t_k)$. Вычислим $\tilde{\beta}(t_k) = (l_k, -\tilde{p})$. Если $\tilde{\beta}(t_k) \geq 0$, то построенная опорная гиперплоскость отделяет

множество $Z(t_k)$ от точки 0_p , что позволяет перейти к шагу 2. Иначе, положив $t_{k+1} = t_k$, переходим к шагу 4.

Шаг 2. Интегрируем по возрастанию τ от $\tau_k = t_k$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), \quad x(\tau_k) = x(\tilde{u}, t_k), \quad (7.1)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -A^T\psi + R_x(x, u, \tau), \quad \psi(t_k) = -x(\tilde{u}, t_k), \quad (7.2)$$

с управлением $u = u^*(\tau) \in U$, которое находится из условия

$$H(\psi, x, u^*, \tau) = \max_{\forall u \in U} H(\psi, x, u, \tau), \quad (7.3)$$

где

$$H(\psi, x, u, \tau) = -\sum_{i=1}^q r_i^2(x, u, \tau) + \psi^T(A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau)).$$

$R_x(x, u, \tau)$ определяется согласно (5.11). Интегрирование ведется до тех пор, пока опорная гиперплоскость не достигнет точку 0_p , т.е. до первого момента времени τ^* , при котором выполняется неравенство

$$(\psi(u^*, \tau^*), -x(u^*, \tau^*)) \leq 0.$$

Этот момент и принимается за t_{k+1} . Положим

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t_{k+1}) = x(u^*, t_{k+1})$$

и

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} \tilde{u}(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^*(\tau), & \tau \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}, \quad \tilde{v}(\tau) = 0_{L_2^q[0, T]}.$$

Шаг 3. Множество $Z(t)$ может оказаться немонотонным, т.е. при $t_{k+1} > t_k$, $Z(t_k) \not\subset Z(t_{k+1})$. Проинтегрируем на промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ систему дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями $x(t_k) = x_k, x(t_k) = x^{(j)}, j = \overline{2, s}$ при некотором управлении $u^{**}(\tau) \in U$. Полученные управления обозначим через u_{k+1} и $u^{(j)}, j = \overline{2, s}$,

$$u_{k+1} = \begin{cases} u^k(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^{**}(\tau), & \tau \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases} \quad u^{(j)} = \begin{cases} u^{(j)}(\tau), & \tau \in [0, t_k] \\ u^{**}(\tau), & \tau \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases},$$

а соответствующие этим управлениям векторы будем обозначать $x_{k+1} = x(t_{k+1}), x^{(j)} = x^{(j)}(t_{k+1}), j = \overline{2, s}$. Параллельно вычислим

$$R_{k+1} = R(u_{k+1}, t_{k+1}) = R_k + \sum_{i=1}^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} r_i^2(x(u_{k+1}, \tau), u_{k+1}(\tau), \tau) d\tau,$$

$$R^{(j)} = R(u^{(j)}, t_{k+1}) = R(u^{(j)}, t_k) + \sum_{i=1}^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} r_i^2(x(u^{(j)}, \tau), u^{(j)}(\tau), \tau) d\tau, \quad j = \overline{2, s}.$$

Шаг 4. Удалим среди точек $x^{(j)}(t_{k+1})$, $j = \overline{2, s}$ точку, наиболее удаленную от точки 0_p в смысле функционала (5.1). Перенумеруем полученную последовательность точек, начиная с $j = 3$. Положим $x^{(2)}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_k)$, $u^{(2)}(\tau) = \tilde{u}(\tau)$, $\tau \in [0, t_{k+1}]$ и вычислим

$$R^{(2)} = R(u^{(2)}, t_{k+1}) = \sum_{i=1}^q \int_0^{t_{k+1}} r_i^2(x(u^{(2)}, \tau), u^{(2)}(\tau), \tau) d\tau.$$

Положим $k = k + 1$, $t_k = t_{k+1}$ и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Используя полученные точки x_k , $x^{(j)}(t_k)$, $j = \overline{2, s}$ в соответствии с пунктом 6, найдем элемент $f_{s,n} = (g_{s,n}, y_{s,n})$ и, согласно соотношению (6.2), управление $u_{s,n}(\tau)$, $\tau \in [0, t_k]$. Если

$$\rho(f_{s,n}, t_k) < \varepsilon_2,$$

где ε_2 – заданная точность решения задачи, то задача решена и время быстрогодействия $t^0 = t_k$, а оптимальное управление имеет вид

$$\omega^0(\tau) = (0_{L_2^q[0,T]}, u_{s,n}(\tau)), \tau \in [0, t_k].$$

Иначе, вычислим

$$R_k = R(u_{s,n}, t_k) = \sum_{i=1}^q \int_0^{t_k} r_i^2(x(u_{s,n}, \tau), u_{s,n}(\tau), \tau) d\tau$$

и положив $u_k = u_k(\tau) = u_{s,n}(\tau)$, $\tau \in [0, t_k]$, $x_k = x(u_k, t_k)$, переходим к шагу 1.

Теорема 7.1. *Последовательности, построенные согласно приведенному выше алгоритму, таковы, что если $t_k \rightarrow \infty$, то задача (1.2) не имеет решения, иначе $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t^0$ и для любых ε_3 и $\varepsilon_4 > 0$ существует номер k^* , такой что при $k > k^*$*

$$\|x(u_k, t_k)\| \leq \varepsilon_3, \quad \sum_{i=1}^q \int_0^{t_k} r_i^2(x(u_k, \tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq \varepsilon_4$$

предел $u^0(\tau)$, $\tau \in [0, t^0]$ любой слабосходящейся подпоследовательности $u_k(\tau)$ есть оптимальное управление.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в [17].

8. Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный алгоритм был апробирован на задаче оптимального по быстрдействию управления внешним нагревом неограниченной пластины до заданной постоянной по сечению температуры. Требовалось, чтобы нагреваемое изделие в процессе нагрева не разрушилось от возникающих сжимающих и растягивающих термонапряжений.

Процесс нагрева описывается следующим одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \bar{x}, \quad t > 0, \quad (8.1)$$

$$T(x, 0) = T^0 = const, \quad x \in [0, \bar{x}], \quad (8.2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \alpha(T_c(t) - T(\bar{x}, t)), \quad t \geq 0, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (8.4)$$

где $T(x, t)$ – температура, °C, x – пространственная координата, \bar{x} – половина толщины пластины, m , a – коэффициент температуропроводности, $m^2/\text{час}$, λ – коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/(m \cdot ^\circ\text{C})$, α – коэффициент теплообмена, $\text{Вт}/(m^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $T_c(t)$ – температура греющей среды (управляющий параметр), $T_c(t) \in L_2[0, \bar{t}]$ и почти при всех $t \in [0, \bar{t}]$ принимает значения из отрезка $[T^-, T^+]$, $T^+ > T^- \geq T^0$.

Будем считать, что нагреваемое изделие хрупкое. Тогда [18] ограничения на термонапряжения запишутся в виде

$$-\sigma_c(T) \leq \sigma_{ii}(r, T) \leq \sigma_p(T), \quad (8.5)$$

где $\sigma_c(T)$, $\sigma_p(T)$ – значения пределов прочности на сжатие и растяжение, мПа, $\sigma_{ii}(r, T)$, $i = x, y$ – главные компоненты тензора напряжений, мПа, которые в рассматриваемом случае находятся из решения уравнения Дюамеля-Неймана аналитически.

Аналогично работам [12], [17] запишем соотношения (8.1)-(8.4) в безразмерных единицах и выполним замену переменных так, чтобы заданное конечное состояние стало нулевым. К полученным уравнениям применим интегральное косинус преобразование Фурье. В результате решение уравнения теплопроводности запишется в виде ряда

$$\theta(l, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) \cos(\mu_n l), \quad l \in [0, 1], \quad (8.6)$$

где μ_n , $n = 1, 2, \dots$ – корни уравнения

$$B_i \cos(\mu_n) - \mu_n \sin(\mu_n) = 0, \quad B_i = \frac{\alpha \bar{x}}{\lambda}, \quad D_n = \frac{2B_i^2}{(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i) \sin(\mu_n)},$$

$x_n(\tau)$, $n = 1, 2, \dots$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n(\tau) + \mu_n u(\tau), \quad x_n(0) = x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

$u(\tau)$ – безразмерная температура греющей среды (безразмерный управляющий параметр).

Неравенства (8.5) запишутся в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \left[1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1+3\Gamma}{\mu_n^2} B_i + \frac{6\Gamma}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)} \right] \leq \sigma_c(\theta(1, \tau)), \quad (8.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \left[\frac{(1+3\Gamma)B_i + 6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1}{\cos(\mu_n)} \left(1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} \right) \right] \leq \sigma_p(\theta(0, \tau)). \quad (8.9)$$

Здесь $F_n = \frac{2B_i \mu_n}{\mu_n^2 + B_i^2 + B_i}$.

Параметр $\Gamma \in [0, 1]$ характеризует степень защемления от поворота краев пластины. $\Gamma = 0$ в случае жесткого защемления, $\Gamma = 1$ для свободных краев пластины. В настоящей работе рассматривалось жесткое защемление, т.е. $\Gamma = 0$.

Перейдем к конечномерной аппроксимации задачи. Ограничимся в соотношениях (8.6)–(8.9) первыми N членами ($n = \overline{1, N}$). Предположим, что $\sigma_c(\theta(1, \tau))$ и $\sigma_p(\theta(0, \tau))$ являются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми, производная по θ удовлетворяет условию Липшица. Тогда для решения задачи поиска управления $u^0(\tau)$, переводящего систему (8.7) из x_0 в нуль за минимальное время, можно воспользоваться вышеуказанным алгоритмом.

Приведем результаты вычислительного эксперимента. Будем считать, что значения механических и теплофизических коэффициентов, кроме пределов хрупкой прочности на сжатие $\sigma_c(\theta)$ и растяжение $\sigma_p(\theta)$, являются постоянными и равными $\lambda = 23 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $a = 0,0153 \text{ м}^2/\text{час}$, $\bar{x} = 0,23 \text{ м}$, $\alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $\alpha_T = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/^\circ\text{C}$, $E = 0,145 \cdot 10^{12} \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$, где α_T – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Начальная температура принималась равной 20°C , конечная температура – 920°C . Температура греющей среды $T_c(t) \in [800^\circ\text{C}, 1600^\circ\text{C}]$. Данные зависимости от температуры пределов хрупкой прочности на сжатие и растяжение для рассматриваемого материала представлены в таблице 8.1. Эти данные были получены экспериментальным путем в Институте проблем сверхпластичности металлов РАН (г. Уфа).

Таблица 8.1. Зависимость пределов хрупкой прочности на сжатие и растяжение от температуры

Table 8.1. Dependence of brittle compressive and tensile strength limits on temperature

| Температура, $^\circ\text{C}$ | | 20 | 975 | 1050 | 1100 | 1150 |
|-------------------------------|------------|------|-----|------|------|---------|
| Предел прочности, МПа | сжатие | 1500 | 700 | 470 | 310 | 210-240 |
| | растяжение | 980 | 540 | 370 | 200 | 140 |

Табличные значения пределов прочности на сжатие и растяжение после перехода к безразмерным величинам, аппроксимировались функциями

$$\sigma_c(\theta) = (-0,023 \cdot e^{0,000303\theta} + 0,747),$$

$$\sigma_p(\theta) = (-0,003 \cdot e^{0,0046\theta} + 0,476),$$

которые являются выпуклыми по безразмерной температуре θ .

Задача решалась для случая $N = 6$, поскольку при дальнейшем увеличении N время быстрогодействия изменялось незначительно. Ниже на рисунке 8.1 представлены результаты расчетов.

Из рисунка 8.1 следует, что оптимальное управление имеет достаточно много точек переключения, особенно, в первой половине времени нагрева. Анализ результатов расчета показывает, что скорость нагрева материала с вышеуказанными свойствами ограничивается сжимающими термонапряжениями на поверхности нагреваемой пластины. Следует подчеркнуть, что в научной литературе обычно рассматриваются материалы, в которых скорость нагрева ограничивается растягивающими термонапряжениями [19].

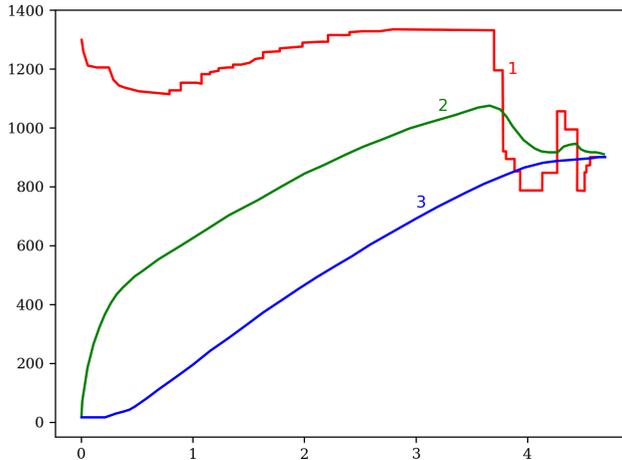


Рис. 8.1. График изменения во времени оптимального по быстродействию управления (1) и графики изменения во времени температуры поверхности (2), температуры центра (3) при полученном оптимальном управлении

Fig. 8.1. Graph of the change in time of the control speed setting (1) and graphs of the change in time of the panel temperature (2) and the center temperature (3) for the obtained control mode

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // *Прикладная математика и механика*. 1957. Т. 21, вып. 5. С. 670–677.
2. Neustadt L. W. Synthesizing of Time Optimal Control Systems *Math. Anal, and Appl.* 1960. Vol. 1, no. 4. P. 484–993. DOI: 10.1016/0022-247X(60)90015-9
3. La Salle J. P. The time optimal control problem. Reprinted from: *Contribution to the Theory of Nonlinear oscillations*. Princeton University Press, 1959. Vol. 5. 24 p.
4. Eaton J. H. An Iterative Solution to Time Optimal Control *Math. Anal, and Appl.* 1962. Vol. 5, no. 2. P. 329–344. DOI: 10.1016/S0022-247X(62)80015-8.
5. Пшеничный Б. Н. Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1964. Т. 4, № 1. С. 52-60.
6. Fadden E. J., Gilbert E. G. Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem *Computing methods in optimization problems*. New York: Academic Press. 1964. P. 167–182.
7. Пшеничный Б. Н., Соболенко Л. А. Ускоренный метод решения задачи линейного быстродействия // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1968. Т. 8, № 6. С. 1345–1351.

8. Кирин Н. Е. Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях // Методы вычислений. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1963. С. 67–74.
9. Кирин Н. Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. Л.: ЛГУ, 1968. 146 с.
10. Кирин Н. Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л.: ЛГУ, 1975. 160 с.
11. Морозкин Н. Д. О сходимости некоторых алгоритмов решения задачи линейного быстродействия // Математические методы анализа управляемых процессов. Ленинград: ЛГУ, 1986. Вып. 8. С. 147–154.
12. Морозкин Н. Д. Оптимальное управление одномерным нагревом с учетом фазовых ограничений // Математическое моделирование. 1996. Т. 8, № 3. С. 91–110.
13. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
14. Карманов В. Г. Математическое программирование. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2004. 264 с.
15. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. В 2-х кн. Часть II. М.: МЦНМО, 2011. 433 с.
16. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
17. Морозкин Н. Д. О сходимости конечномерных приближений в задаче оптимального одномерного нагрева с учетом фазовых ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т.36, № 10. С. 12–22
18. Филоненко-Бородич М. И. Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961. 92 с.
19. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наук. думка, 1988. 318 с.

*Поступила 14.03.2025; доработана после рецензирования 26.04.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. N.N. Krasovsky, “[On one problem of regulation adjustment]”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **21:5** (1957), 670–677.
2. L. W. Neustadt, “Synthesizing of Time Optimal Control Systems”, *Math. Anal. and Appl.*, **1:4** (1960), 484–992. DOI: 10.1016/0022-247X(60)90015-9
3. J. P. La Salle, “The time optimal control problem”, *Contribution to the Theory of Nonlinear oscillations.*, **5**, Baltimore, 1959, 30.

4. J. H. Eaton, “An Iterative Solution to Time Optimal Control”, *Math. Anal, and Appl.*, **5:2** (1962), 329–344.
5. B. N. Pshenichny, “Numerical method for calculating optimal performance for linear systems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4:1** (1964), 52–60. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90216-2
6. E. J. Fadden , E. G. Gilbert, “Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem”, *Computing methods in optimization problems*, Academic Press, New York, 1964, 167–182.
7. B. N. Pshenichny, L. A. Sobolenko, “Accelerated method for solving the problem of linear speed”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **8:6** (1968), 1345–1351. DOI: 10.1016/0041-5553(68)90107-9
8. N. E. Kirin, “On one numerical method in the problem of linear speed-responses”, *Methods of calculations*, Leningrad State University, L., 1963, 67–74.
9. N. E. Kirin, “Computational methods of optimal control theory”, 1968, 144.
10. N. E. Kirin, “Methods of successive estimates in problems of optimization of controlled systems”, 1975, 160.
11. N. D. Morozkin, “On the convergence of some algorithms for solving the linear speed problem”, *Mathematical methods of analysis of controlled processes*, Leningrad State University, L., 1986, 147–154.
12. N. D. Morozkin, “Optimal control of one-dimensional heating taking into account phase constraints”, *Mathematical modeling*, **8:3** (1996), 91-110.
13. V. G. Boltyansky, *Matematicheskaya metody optimal'nogo upravleniya [Mathematical methods of optimal control]*, Nauka, Moscow, 1969, 408 p.
14. V. G. Karmanov, *Matematicheskoe programirovanie [Mathematical programming]*, Fizmatlit, Moscow, 2004, 264 p.
15. F. P. Vasiliev, *Metody optimizatsii [Optimization methods]. In 2 books. Part II.*, MCNO, Moscow, 2011, 433 p.
16. R. P. Fedorenko, *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya [Approximate solution of optimal control problems]*, Nauka, Moscow, 1978, 488 p.
17. N. D. Morozkin, “The convergence of finite-dimensional approximations in the problem of the optimal one-dimensional heating taking phase constraints into account”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **36:10** (1996), 1331-1339.
18. M. I. Filonenko-Borodich, *Mekhanicheskie teorii prochnosti [Mechanical Theories of Strength]*, Moscow State University, Moscow, 1961, 92 p.
19. V. M. Vigak, *Upravleniye temperaturnymi napryazheniyami i peremeshcheniyami [Control of temperature stresses and displacements]*, Nauk. dumka, Kyiv, 1988, 318 p.

Submitted 14.03.2025; Revised 26.04.2025; Accepted 28.05.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.143-170
Original article

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 65L05, 65L06, 65L20

A Study of Numerical Methods for Solving the Nonlinear Energy Resources Supply-Demand System

V. T. Vo¹, S. Noeiaghdam^{1,2}, A. I. Dreglea¹, D. N. Sidorov¹

¹ *Irkutsk National Research Technical University (Irkutsk, Russia)*

² *Institute of Mathematics, Henan Academy of Sciences (Zhengzhou, China)*

Abstract. In this study, we implement and estimate various numerical methods for solving a nonlinear differential equation system modeling energy resources supply-demand dynamics. Both single-step methods (Taylor series, Runge-Kutta) and multi-step methods (Adams – Bashforth, Adams Predictor-Corrector) are employed. In addition to standard fourth-order methods, higher-order techniques such as the fifth-order Runge-Kutta method and the sixth-order Taylor series method are also applied. Furthermore, along with fixed-step numerical methods, we implement and assess adaptive step-size methods, including the explicit Runge-Kutta method of order 5(4) (that is RK45), the explicit Runge-Kutta method of order 8(5,3) (or DOP853), the implicit Runge-Kutta method from the Radau IIA family of order 5 (Radau), the implicit method based on backward differentiation formulas (BDF), and the Adams/BDF method with automatic switching (LSODA). The results indicate that, in the cases we considered, single-step methods are more effective than multi-step ones in capturing and tracking rapid variations of the system, while multi-step methods require less computation time. Adaptive step-size numerical methods demonstrate both flexibility and stability. Through the evaluation and analysis of numerical solutions obtained by various methods, the behaviour and dynamic characteristics of the system are explored.

Keywords: energy supply and demand system, Runge-Kutta method, Taylor series, Adams-Bashforth method, Adams Predictor-Corrector method, RK45, DOP853, Radau, BDF, LSODA

For citation: V. T. Vo, S. Noeiaghdam, A. I. Dreglea, D. N. Sidorov. A Study of Numerical Methods for Solving the Nonlinear Energy Resources Supply-Demand System. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:2(2025), 143–170. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.143-170

About the authors:

Van T. Vo, PhD Student, Irkutsk National Research Technical University (83, Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2701-4775>, votruong.90@gmail.com

Samad Noeiaghdam, Ph.D. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Mathematics, Henan Academy of Sciences (Zhengzhou, 450046, China), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2307-0891>, snoei@hnas.ac.cn

Aliona I. Dreglea, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor, Senior Researcher, Scientific Research Department, Irkutsk National Research Technical University (83 Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5032-0665>, adreglea@gmail.com

Denis N. Sidorov, D. Sc. (Phys. and Math.), Professor, Chief Researcher, Applied Mathematics Department, Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of Russian Academy of Science (130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1325>, dsidorov@isem.irk.ru

© V. T. Vo, S. Noeiaghdam, A. I. Dreglea, D. N. Sidorov



УДК 519.622.2

Исследование численных методов решения нелинейной системы спроса и предложения энергетических ресурсов

В. Ч. Во¹, С. Нойягдам^{1,2}, А. И. Дрегля¹, Д. Н. Сидоров¹¹*Иркутский национальный исследовательский технический университет (Иркутск, Россия)*²*Институт математики Академии наук Хэнани (Чжэнчжоу, Китай)*

Аннотация. В данном исследовании реализованы и оценены различные численные методы для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, моделирующей динамику спроса и предложения энергетических ресурсов. Используются как одношаговые методы (ряд Тейлора, метод Рунге–Кутты), так и многошаговые методы (Адамса–Башфорта, метод прогноза–коррекции Адамса). Помимо стандартных методов четвертого порядка, применялись также методы более высокого порядка, такие как метод Рунге–Кутты пятого порядка и метод ряда Тейлора шестого порядка. Кроме того, наряду с численными методами с фиксированным шагом, были реализованы и оценены методы с адаптивным шагом, включая явный метод Рунге–Кутты порядка 5(4) (RK45), явный метод Рунге–Кутты порядка 8(5,3) (DOP853), неявный метод Рунге–Кутты семейства Radau IIA порядка 5 (Radau), неявный метод на основе формул обратного дифференцирования (BDF), а также комбинированный метод Адамса/BDF с автоматическим переключением (LSODA). Полученные результаты показывают, что в рассматриваемых случаях одношаговые методы были более эффективны, чем многошаговые, при отслеживании быстрых изменений системы, тогда как многошаговые методы требовали меньше времени на вычисления. Численные методы с адаптивным шагом продемонстрировали как гибкость, так и устойчивость. Посредством оценки и анализа численных решений, полученных различными методами, исследуются динамические характеристики и поведение системы.

Ключевые слова: система спроса и предложения энергии, метод Рунге–Кутты, ряд Тейлора, метод Адамса–Башфорта, метод прогнозирования–коррекции Адамса, RK45, DOP853, Radau, BDF, LSODA

Для цитирования: Во В. Ч., Нойягдам С., Дрегля А. И., Сидоров Д. Н. Исследование численных методов решения нелинейной системы спроса и предложения энергетических ресурсов // *Журнал Средневожского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 143–170. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.143-170

Об авторах:

Во Ван Чыонг, аспирант, Иркутский национальный исследовательский технический университет (664074, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2701-4775>, votruong.90@gmail.com

Нойягдам Самад, к.ф.-м.н., профессор, Институт математики, Хэнаньская академия наук (450046, Китай, г. Чжэнчжоу), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2307-0891>, snoei@hnas.ac.cn

Дрегля Алена Ивановна, к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский отдел, Иркутский национальный исследовательский технический университет (664074, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5032-0665>, adreglea@gmail.com

Сидоров Денис Николаевич, д.ф.-м.н., профессор РАН, главный научный сотрудник, Отдел прикладной математики, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1325>, dsidorov@isem.irk.ru

1. Introduction

Numerical methods constitute a major branch of mathematical research, aimed at solving problems where finding explicit analytical solutions is challenging. One such class of problems includes nonlinear differential equations and their systems. In mathematics, differential equations and their systems, particularly initial value problems, have been extensively studied due to their role as powerful tools for modeling real-world problems [1–2]. In the context of the growing urgency to use energy resources efficiently and sustainably, forecasting and stabilizing energy resources supply and demand play a crucial role. Mei Sun et al. proposed a nonlinear system of differential equations to describe the energy resources supply-demand system [3–4], which was formulated based on a real-world problem to ensure the stability of energy resources supply and demand between the eastern and western regions of China. Studies have shown that this system exhibits chaotic and highly nonlinear behavior [5], making it extremely complex to obtain exact solutions. In this case, employing numerical methods to obtain approximate solutions presents a more practical and feasible approach.

Numerical methods constitute a broad research field encompassing various techniques that have been extensively developed and studied, each demonstrating suitability and effectiveness for specific types of problems [6]. However, for the nonlinear energy resources supply-demand system, most existing studies primarily focus on stabilizing the chaotic behavior of the system [7–8], while in-depth investigations into numerical methods for solving the system remain limited. Recently, a study by Vo et al. proposed using physics-informed neural networks to solve this system. Although this approach shows great potential, it has certain drawbacks, such as requiring significant computational power from modern computing systems and being time-consuming due to the need for model training [9].

In this paper, we conduct an in-depth study by implementing numerical methods to solve the nonlinear energy resources supply-demand system. The numerical methods employed include representative one-step methods such as the Taylor series method and the Runge-Kutta method. Multi-step methods such as Adams-Bashforth, Adams-Moulton, and the Adams-Predictor-Corrector method [10] are also considered. Additionally, adaptive step-size methods such as: RK45 [11–12], DOP853 [13], Radau [14], BDF [15], LSODA [16] are implemented. Notably, for fixed-step methods, we deploy higher-order approaches such as RK5 and the sixth-order Taylor series method. The numerical solutions obtained from these higher-order methods are then used to assess the accuracy of lower-order fourth-order methods. Beyond solving the system, this study also evaluates and compares numerical methods based on criteria such as accuracy, convergence speed, computational efficiency, and stability, aiming to identify the most suitable and effective methods for the given system. All numerical methods are implemented in Python [17]. For adaptive step-size methods, we

utilize numerical solvers from the SciPy library [18], which is integrated into the Python programming language.

Main contributions of the Study: Implement various numerical methods for solving the nonlinear energy resources supply-demand system. Implement high-order numerical methods to solve the nonlinear energy resources supply-demand system. Analyze, evaluate, and compare the effectiveness of numerical methods for the nonlinear differential equation system describing the energy resources supply-demand problem. Analyze and explore the behavioral characteristics of the system through numerical solutions.

The paper is structured into five main sections: Section 1. provides a general introduction. Section 2. describes the nonlinear differential equation system for the energy resources supply-demand problem. Section 3. presents the numerical methods used in this study to solve the energy resources supply-demand system. Section 4. proposes several approaches for analyzing and evaluating the effectiveness of the implemented numerical methods. Finally, Section 5. presents the main results of the study.

2. System description

To model the distribution of energy resources supply and demand between different regions C and D, Mei et al. formulated three-dimensional and four-dimensional nonlinear differential equation systems. In this study, we focus on numerically solving the four-dimensional energy resources supply-demand system. The mathematical formulation of this system is given below [4]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1 x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{M}\right) - a_2(x_2(t) + x_3(t)) - d_3 x_4(t), \\ x_2'(t) = -z_1 x_2(t) - z_2 x_3(t) + z_3 x_1(t) [N - (x_1(t) - x_3(t))], \\ x_3'(t) = s_1 x_3(t) (s_2 x_1(t) - s_3), \\ x_4'(t) = d_1 x_1(t) - d_2 x_4(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

The initial conditions of the system (2.1) are given by $x_i(t_0) = b_i$, and [9] $x_i'(t)$ denotes the derivative of the function $x_i(t)$ with respect to the variable t , where $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. $x_i(t)$ are the unknown functions to be determined, where the energy demand in region D is represented by $x_1(t)$, the energy supply from region C to region D is represented by $x_2(t)$, the imported energy resources into region D are represented by $x_3(t)$, and the renewable energy resources in region D are represented by $x_4(t)$. With the constants of the system satisfying the following conditions $a_j, d_j, z_j, s_j, N, M > 0$ and $N < M$. The system (2.1) is in a chaotic state with the coefficients $a_1 = 0.09, a_2 = 0.15, z_1 = 0.06, z_2 = 0.082, z_3 = 0.07, s_1 = 0.2, s_2 = 0.5, s_3 = 0.4, M = 1.8, N = 1, d_1 = 0.1, d_2 = 0.06, d_3 = 0.08$, and the initial conditions $x_1(0) = 0.82, x_2(0) = 0.29, x_3(0) = 0.48, x_4(0) = 0.1$ [4-5].

3. Numerical Methods

To facilitate the presentation of numerical methods, the differential equation system (2.1) is rewritten as follows:

Let f_1, f_2, f_3, f_4 denote the functions representing the right-hand side of the differential equation system (2.1), and let b_1, b_2, b_3, b_4 denote the initial values corresponding to the

four components of the system, given by:

$$f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{M}\right) - a_2(x_2(t) + x_3(t)) - d_3 x_4(t),$$

$$f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -z_1 x_2(t) - z_2 x_3(t) + z_3 x_1(t)[N - (x_1(t) - x_3(t))],$$

$$f_3(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = s_1 x_3(t)(s_2 x_1(t) - s_3),$$

$$f_4(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = d_1 x_1(t) - d_2 x_4(t),$$

we can rewrite the general form of the system as follows:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b}.$$

where \mathbf{x} , \mathbf{f} , and \mathbf{b} are vectors defined as follows:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]^T.$$

In this study, we define $\mathbf{x}(t_i)$ as the exact solutions of the system at time t_i and denote \mathbf{x}_i as the approximate solutions of the system at time t_i , obtained using numerical methods.

3.1. Single step methods

In the field of numerical methods, a class of techniques for solving differential equation systems in which the solution at any time t_{i+1} is approximated solely based on the solution at the previous time step t_i is referred to as single-step numerical methods [10].

3.1.1. Taylor Series Method

Taylor's method is a powerful explicit single-step numerical method [19–20]. Its foundation is based on the Taylor series expansion, a fundamental concept in function approximation theory. According to this principle, the value of a function at any given point can be approximated using a nearby known point, represented by a polynomial and its higher-order derivatives, as given by the Taylor series. In the Taylor numerical method, the solution at time t_{i+1} is approximated using its value at t_i through the following formula [10]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h\mathbf{x}_i' + \frac{h^2}{2!}\mathbf{x}_i'' + \frac{h^3}{3!}\mathbf{x}_i''' + \dots + \frac{h^p}{p!}\mathbf{x}_i^{(p)}, \quad (3.1)$$

where:

h : is the step size.

p : is the order of the derivative.

$\mathbf{x}_i^{(k)}$: the values of the k -th order derivatives of the solution functions at time t_i .

To implement this numerical method, one of the crucial aspects is determining the expressions for the higher-order derivatives of the system. This task is not straightforward. In this study, we have determined the expressions for computing the derivatives up to the sixth order for the solution functions of the differential equation system (2.1). The detailed expressions are presented below:

Expressions for the first-order derivatives of the solution functions:

$$x_1^{(1)}(t) = a_1 x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{M}\right) - a_2(x_2(t) + x_3(t)) - d_3 x_4(t),$$

$$x_2^{(1)}(t) = -z_1x_2(t) - z_2x_3(t) + z_3x_1(t)[N - (x_1(t) - x_3(t))],$$

$$x_3^{(1)}(t) = s_1x_3(t)(s_2x_1(t) - s_3),$$

$$x_4^{(1)}(t) = d_1x_1(t) - d_2x_4(t).$$

Expressions for the second-order derivatives of the solution functions:

$$x_1^{(2)}(t) = a_1x_1^{(1)}(t) \left[1 - \frac{2x_1(t)}{M} \right] - a_2 \left[x_2^{(1)}(t) + x_3^{(1)}(t) \right] - d_3x_4^{(1)}(t),$$

$$x_2^{(2)}(t) = -z_1x_2^{(1)}(t) - z_2x_3^{(1)}(t) + z_3x_1(t) \left[x_3^{(1)}(t) - x_1^{(1)}(t) \right] + z_3x_1^{(1)}(t) [N - x_1(t) + x_3(t)],$$

$$x_3^{(2)}(t) = s_1s_2x_3(t)x_1^{(1)}(t) + s_1x_3^{(1)}(t) [s_2x_1(t) - s_3],$$

$$x_4^{(2)}(t) = d_1x_1^{(1)}(t) - d_2x_4^{(1)}(t).$$

Expressions for the third-order derivatives of the solution functions:

$$x_1^{(3)}(t) = a_1x_1^{(2)}(t) \left[1 - \frac{2x_1(t)}{M} \right] - a_2 \left[x_2^{(2)}(t) + x_3^{(2)}(t) \right] - d_3x_4^{(2)}(t) - 2a_1 \frac{[x_1^{(1)}(t)]^2}{M},$$

$$x_2^{(3)}(t) = -z_1x_2^{(2)}(t) - z_2x_3^{(2)}(t) + 2z_3x_1^{(1)}(t) \left[x_3^{(1)}(t) - x_1^{(1)}(t) \right] \\ + z_3x_1(t) \left[x_3^{(2)}(t) - x_1^{(2)}(t) \right] + z_3x_1^{(2)}(t) [N - x_1(t) + x_3(t)],$$

$$x_3^{(3)}(t) = s_1s_2x_3(t)x_1^{(2)}(t) + 2s_1s_2x_1^{(1)}(t)x_3^{(1)}(t) + s_1x_3^{(2)}(t) [s_2x_1(t) - s_3],$$

$$x_4^{(3)}(t) = d_1x_1^{(2)}(t) - d_2x_4^{(2)}(t).$$

Expressions for the fourth-order derivatives of the solution functions:

$$x_1^{(4)}(t) = a_1x_1^{(3)}(t) \left[1 - \frac{2x_1(t)}{M} \right] - a_2 \left[x_2^{(3)}(t) + x_3^{(3)}(t) \right] - d_3x_4^{(3)}(t) - \frac{6a_1x_1^{(1)}(t)x_1^{(2)}(t)}{M},$$

$$x_2^{(4)}(t) = -z_1x_2^{(3)}(t) - z_2x_3^{(3)}(t) + 3z_3x_1^{(2)}(t) \left[x_3^{(1)}(t) - x_1^{(1)}(t) \right] \\ + 3z_3x_1^{(1)}(t) \left[x_3^{(2)}(t) - x_1^{(2)}(t) \right] + z_3x_1(t) \left[x_3^{(3)}(t) - x_1^{(3)}(t) \right] \\ + z_3x_1^{(3)}(t) [N - x_1(t) + x_3(t)],$$

$$x_3^{(4)}(t) = s_1s_2x_3(t)x_1^{(3)}(t) + 3s_1s_2x_1^{(1)}(t)x_3^{(2)}(t) + 3s_1s_2x_1^{(2)}(t)x_3^{(1)}(t) + s_1x_3^{(3)}(t) [s_2x_1(t) - s_3],$$

$$x_4^{(4)}(t) = d_1x_1^{(3)}(t) - d_2x_4^{(3)}(t).$$

Expressions for the fifth-order derivatives of the solution functions:

$$x_1^{(5)}(t) = a_1 \left(1 - \frac{2x_1(t)}{M} \right) x_1^{(4)}(t) - a_2 \left(x_2^{(4)}(t) + x_3^{(4)}(t) \right) - d_3x_4^{(4)}(t) \\ - \frac{8a_1x_1^{(1)}(t)x_1^{(3)}(t)}{M} - \frac{6a_1[x_1^{(2)}(t)]^2}{M},$$

$$\begin{aligned}
 x_2^{(5)}(t) &= -z_1 x_2^{(4)}(t) - z_2 x_3^{(4)}(t) + 4z_3 \left[x_3^{(1)}(t) - x_1^{(1)}(t) \right] x_1^{(3)}(t) \\
 &\quad + 6z_3 \left[x_3^{(2)}(t) - x_1^{(2)}(t) \right] x_1^{(2)}(t) + 4z_3 \left[x_3^{(3)}(t) - x_1^{(3)}(t) \right] x_1^{(1)}(t) \\
 &\quad + z_3 \left[x_3^{(4)}(t) - x_1^{(4)}(t) \right] x_1(t) + z_3 [N - x_1(t) + x_3(t)] x_1^{(4)}(t), \\
 x_3^{(5)}(t) &= s_1 s_2 x_3(t) x_1^{(4)}(t) + 4s_1 s_2 x_1^{(1)}(t) x_3^{(3)}(t) + 6s_1 s_2 x_1^{(2)}(t) x_3^{(2)}(t) \\
 &\quad + 4s_1 s_2 x_1^{(3)}(t) x_3^{(1)}(t) + s_1 [s_2 x_1 - s_3] x_3^{(4)}(t), \\
 x_4^{(5)}(t) &= d_1 x_1^{(4)}(t) - d_2 x_4^{(4)}(t).
 \end{aligned}$$

Expressions for the sixth-order derivatives of the solution functions:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(6)}(t) &= a_1 \left[1 - \frac{2x_1(t)}{M} \right] x_1^{(5)}(t) - a_2 \left[x_2^{(5)}(t) + x_3^{(5)}(t) \right] - d_3 x_4^{(5)}(t) \\
 &\quad - 10a_1 \frac{x_1^{(1)}(t) x_1^{(4)}(t)}{M} - 20a_1 \frac{x_1^{(2)}(t) x_1^{(3)}(t)}{M}, \\
 x_2^{(6)}(t) &= -z_1 x_2^{(5)}(t) - z_2 x_3^{(5)}(t) + 5z_3 \left[x_3^{(1)}(t) - x_1^{(1)}(t) \right] x_1^{(4)}(t) \\
 &\quad + 10z_3 \left[x_3^{(2)}(t) - x_1^{(2)}(t) \right] x_1^{(3)}(t) + 10z_3 \left[x_3^{(3)}(t) - x_1^{(3)}(t) \right] x_1^{(2)}(t) \\
 &\quad + 5z_3 \left[x_3^{(4)}(t) - x_1^{(4)}(t) \right] x_1^{(1)}(t) + z_3 \left[x_3^{(5)}(t) - x_1^{(5)}(t) \right] x_1(t) \\
 &\quad + z_3 [N - x_1(t) + x_3(t)] x_1^{(5)}(t), \\
 x_3^{(6)}(t) &= s_1 s_2 x_3(t) x_1^{(5)}(t) + 5s_1 s_2 x_1^{(1)}(t) x_3^{(4)}(t) + 10s_1 s_2 x_1^{(2)}(t) x_3^{(3)}(t) \\
 &\quad + 10s_1 s_2 x_1^{(3)}(t) x_3^{(2)}(t) + 5s_1 s_2 x_1^{(4)}(t) x_3^{(1)}(t) + s_1 [s_2 x_1(t) - s_3] x_3^{(5)}(t), \\
 x_4^{(6)}(t) &= d_1 x_1^{(5)}(t) - d_2 x_4^{(5)}(t).
 \end{aligned}$$

The error of the Taylor series numerical method is determined based on the order of the derivative. Specifically, a fourth-order Taylor series requires the use of derivative values up to the fourth order. In the theory of numerical methods, this method has a global error of $O(h^4)$ and a local error of $O(h^5)$. Similarly, a sixth-order Taylor series method has a global error of $O(h^6)$ and a local error of $O(h^7)$ [6, 10, 13].

3.1.2. Runge-Kutta Fourth Order Method

Among single-step numerical methods, the Runge-Kutta method is one of the most widely used approaches [17], particularly for solving scientific and engineering problems, which are often represented by nonlinear differential equation systems. Unlike the Taylor method, which requires computing high-order derivatives to approximate function values at a given point, the Runge-Kutta method approximates the solution using K intermediate stages [19]. The Runge-Kutta method includes both explicit and implicit forms [13–14]. In this study, we employ two commonly used Runge-Kutta formulas to solve the energy supply-demand system (2.1): the fourth-order and fifth-order Runge-Kutta methods. The fourth-order formula is presented below [10]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \tag{3.2}$$

Where:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

The fourth-order formula utilizes four intermediate stages, \mathbf{k}_1 to \mathbf{k}_4 , as defined above. This method has a global error of $O(h^4)$ and a local error of $O(h^5)$ [6, 10, 13].

3.1.3. Runge-Kutta Fifth Order Method

In this study, we implement the explicit fifth-order Runge-Kutta numerical method with high accuracy. This formula, proposed by Butcher, employs six intermediate stages to approximate the solutions of system (2.1) and is described as follows [20]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{1}{90}(7\mathbf{k}_1 + 32\mathbf{k}_3 + 12\mathbf{k}_4 + 32\mathbf{k}_5 + 7\mathbf{k}_6)h. \quad (3.3)$$

Where:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_i + \frac{1}{4}h, \mathbf{x}_i + \frac{1}{4}\mathbf{k}_1h\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(t_i + \frac{1}{4}h, \mathbf{x}_i + \frac{1}{8}\mathbf{k}_1h + \frac{1}{8}\mathbf{k}_2h\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}\left(t_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k}_2h + \mathbf{k}_3h\right), \\ \mathbf{k}_5 &= \mathbf{f}\left(t_i + \frac{3}{4}h, \mathbf{x}_i + \frac{3}{16}\mathbf{k}_1h + \frac{9}{16}\mathbf{k}_4h\right), \\ \mathbf{k}_6 &= \mathbf{f}\left(t_i + h, \mathbf{x}_i - \frac{3}{7}\mathbf{k}_1h + \frac{2}{7}\mathbf{k}_2h + \frac{12}{7}\mathbf{k}_3h - \frac{12}{7}\mathbf{k}_4h + \frac{8}{7}\mathbf{k}_5h\right). \end{aligned}$$

This method has a global error of $O(h^5)$ and a local error of $O(h^6)$ [6, 10, 13].

3.2. Multi step methods

Unlike single-step numerical methods, multi-step numerical methods are designed to determine approximate solutions of a differential equation system at time t_{i+1} not only based on the solution at t_i but also by utilizing information from the solutions of the system at multiple previous time steps [6]. These methods include explicit, implicit, and a combined form of both, known as the predictor-corrector method. In this study, we implement one of the representative formulas of this approach, the Adams family of formulas, to solve system (2.1) [10].

Similar to single-step numerical methods, the accuracy of a multi-step numerical method is evaluated based on its order. A method of order p has a local accuracy of $O(h^{p+1})$ and a global accuracy of $O(h^p)$ [6, 10, 19].

3.2.1. Adams-Bashforth Methods

The Adams-Bashforth method is a typical explicit multi-step method [6, 13] used for solving nonlinear differential equation systems. In this study, we implement the fourth-order Adams-Bashforth formula to solve the energy supply-demand system. In this approach, the value of the solution function at any given time is approximated based on the four most recently computed solution values. Given a dataset containing j values (t_i, \mathbf{f}_i) $(t_{i-1}, \mathbf{f}_{i-1}), \dots, (t_{i-j+1}, \mathbf{f}_{i-j+1})$, the fourth-order Adams-Bashforth formula ($j = 4$) is presented below [10]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{h}{24} [55\mathbf{f}_i - 59\mathbf{f}_{i-1} + 37\mathbf{f}_{i-2} - 9\mathbf{f}_{i-3}]. \quad (3.4)$$

To implement this method, the first step requires knowing the four initial solution values. Therefore, to determine the solution values from \mathbf{x}_1 to \mathbf{x}_4 , a single -step method must be used. In this study, these initial values are obtained using the RK4 method.

3.2.2. Adams-Moulton Methods

The Adams-Moulton methods are an implicit multistep approach [13, 14]. This method is similar to the Adams-Bashforth method; however, the solution values are approximated not only based on previous steps but also on the predicted step at t_{i+1} . Considering a dataset with $j + 1$ points $(t_{i+1}, \mathbf{f}_{i+1}), (t_i, \mathbf{f}_i), (t_{i-1}, \mathbf{f}_{i-1}), \dots, (t_{i-j+1}, \mathbf{f}_{i-j+1})$ with $j = 3$ the fourth-order Adams-Moulton formula is given as follows [10]:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{h}{24} [9\mathbf{f}_{i+1} + 19\mathbf{f}_i - 5\mathbf{f}_{i-1} + \mathbf{f}_{i-2}]. \quad (3.5)$$

3.2.3. Predictor-Corrector Methods

The Predictor-Corrector numerical method is a multi-step technique that combines both explicit and implicit multi-step methods. This approach consists of two main steps [13, 14]:

Predictor: Use an explicit multi-step numerical method to approximate the solution at step t_{i+1}

Corrector: The approximated solution obtained from the predictor step at t_{i+1} is then substituted into an implicit method to refine the approximation.

In this study, we implement the fourth-order Adams-Bashforth-Moulton Predictor-Corrector numerical method to solve system (2.1), where the fourth-order Adams-Bashforth formula is used in the Predictor step, and the fourth-order Adams-Moulton formula is used in the Corrector step. Additionally, the four initial approximate solution values are determined using the RK4 method. The specific formulas are presented below [10]:

Predictor P: Fourth-order Adams-Bashforth method.

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(p)} = \mathbf{x}_i + \frac{h}{24} [55\mathbf{f}_i - 59\mathbf{f}_{i-1} + 37\mathbf{f}_{i-2} - 9\mathbf{f}_{i-3}]. \quad (3.6)$$

Corrector C: Fourth-order Adams-Moulton method.

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(c)} = \mathbf{x}_i + \frac{h}{24} \left[9\mathbf{f} \left(t_{i+1}, \mathbf{x}_{i+1}^{(p)} \right) + 19\mathbf{f}_i - 5\mathbf{f}_{i-1} + \mathbf{f}_{i-2} \right]. \quad (3.7)$$

3.3. Adaptive numerical methods

One of the key techniques in solving nonlinear differential equation systems is the use of numerical methods capable of automatically adapting the step size flexibly. These numerical methods typically combine pairs of higher-order and lower-order methods to estimate errors and adjust the step size accordingly for different solution regions [21]. This approach ensures the maintenance of accuracy while simultaneously enhancing computational efficiency.

In this study, we implement adaptive step-size numerical methods supported by the `solve_ivp` library [18], including the RK45 method [11, 12]; the DOP853 method [13]; the Radau method [14]; the BDF method [15]; and the LSODA method [16]. To adjust the

adaptive step size, these numerical methods utilize two critical error tolerance parameters: Relative tolerances ($rtol$) and Absolute tolerances ($atol$), ensuring that the estimated local error of the solution satisfies the following condition [18]:

$$Local_error < atol + rtol \times |\mathbf{x}|.$$

where:

$Local_error$: is the estimated value of the local error.

$rtol$: is the relative tolerance.

$atol$: is the absolute tolerance.

\mathbf{x} : represents the approximate solutions of the differential equation system at the considered time point.

4. Evaluation Method

Since the exact solution of the nonlinear energy resources supply-demand system is unknown, evaluating numerical methods in this case is a challenging task. In this study, we propose several approaches to assess the numerical methods implemented as follows:

a) Evaluating the accuracy of numerical methods by comparing the residual between the left-hand side and the right-hand side:

To implement this method, the first task is to approximate the left-hand side of system (2.1). In this study, based on the discrete solutions obtained from numerical methods, we construct a first-order derivative approximation of the solution functions at the solution points. Several approaches can be used for this purpose, such as finite difference methods or function approximation. In this study, we approximate the system's solution functions using high-order spline interpolation [21] based on the discrete solution points, then compute the approximate derivatives at these points. Simultaneously, the obtained solutions are substituted into the right-hand side of the system. The Mean Absolute Error (MAE) method [9] is used to measure the discrepancy between the left-hand side and the right-hand side. A smaller MAE value indicates that the obtained solutions better satisfy system (2.1). The formula below describes this approach:

$$e_{residual} = \frac{1}{L} \sum_{t_i \in T} |\mathbf{x}'_i - \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)|. \quad (4.1)$$

Where:

$e_{residual}$: is the residual error to be computed for the system's solutions.

\mathbf{x}'_i : represents the derivative approximation of the solution functions of the system at t_i , obtained using numerical solutions.

L : is the total number of solution points considered.

$T = (t_0, t_1, \dots, t_{L-1})$: is the set of selected time points.

b) Evaluating the accuracy of numerical methods using reference solutions:

One of the limitations of the residual-based evaluation method described above is that the approximation of derivatives on the left-hand side may still introduce errors, depending on the approximation method used. Consequently, this evaluation approach may not be entirely accurate. In this study, we incorporate an additional evaluation method by using reference solutions. According to numerical method error theory, a higher-order numerical method or one using a smaller step size theoretically yields lower errors [6, 10, 13]. Based on

this principle, we use the solutions obtained from higher-order methods as reference solutions to assess the accuracy of solutions derived from lower-order methods or methods with larger step sizes. Specifically, in this study, for fixed-step methods, the solutions obtained from fourth-order methods are compared with those obtained from higher-order methods, namely RK5 and sixth-order Taylor. A fourth-order method whose solutions closely match those of higher-order methods is theoretically considered to have better accuracy.

For numerical methods with adaptive step sizes, we select a method and set its absolute and relative error tolerances, as well as its maximum step size, to very low values. This ensures that the solutions obtained using this method are theoretically more accurate. These solutions are then used as reference solutions to evaluate the accuracy of numerical methods configured with higher absolute and relative error tolerances, as well as larger maximum step sizes. The Mean Absolute Error (MAE) method is then employed to evaluate the errors, and its mathematical formulation is as follows:

$$\mathbf{e}_{error} = \frac{1}{L} \sum_{t_i \in T} |\mathbf{x}_{i_lower} - \mathbf{x}_{i_higher}|. \quad (4.2)$$

Where:

- \mathbf{e}_{error} : The error between the lower-accuracy method and the higher-accuracy method.
- \mathbf{x}_{i_lower} : The solution of the method with theoretically lower accuracy at t_i
- \mathbf{x}_{i_higher} : The solution of the method with theoretically higher accuracy at t_i
- L : The total number of solution points considered.
- $T = (t_0, t_1, \dots, t_{L-1})$: is the set of selected time points.

c) *Convergence Rate Evaluation:*

In this study, we employ numerical methods of the same fourth order to compare their convergence rates. This is achieved by solving system (2.1) using these methods with progressively smaller step sizes. Theoretically, as the step size decreases, the obtained solution becomes more accurate. Therefore, if a method's solution at a larger step size rapidly approaches its solution at smaller step sizes, that method exhibits a faster empirical convergence rate. We apply the following formula to evaluate the convergence rate of these methods:

$$C_{speed} = \frac{\frac{1}{L_1} \sum_{t_i \in T_1} |\mathbf{x}_{i_h_1} - \mathbf{x}_{i_h_2}|}{\frac{1}{L_2} \sum_{t_i \in T_2} |\mathbf{x}_{i_h_2} - \mathbf{x}_{i_h_3}|}. \quad (4.3)$$

Where:

- C_{speed} : The index for evaluating the convergence rate of the method
- $\mathbf{x}_{i_h_1}$: Solutions obtained by the numerical method with step size h_1 at time t_i
- $\mathbf{x}_{i_h_2}$: Solutions obtained by the numerical method with step size h_2 at time t_i
- $\mathbf{x}_{i_h_3}$: Solutions obtained by the numerical method with step size h_3 at time t_i
- L_1 : Total number of solution points compared between the numerical method using step sizes h_1 and h_2
- $T_1 = (t_0, t_1, \dots, t_{L_1-1})$: the set of time points used to compare the solutions obtained by the numerical method using two different step sizes, h_1 and h_2 .
- L_2 : Total number of solution points compared between the numerical method using step sizes h_2 and h_3

$T_2 = (t_0, t_1, \dots, t_{L_2-1})$: the set of time points used to compare the solutions obtained by the numerical method using two different step sizes, h_2 and h_3 .

For this evaluation method, the numerical methods being compared must have the same order and be solved using the same step sizes h_1 , h_2 , and h_3 , satisfying the condition $h_1 > h_2 > h_3$. In this study, we use step sizes that decrease uniformly, specifically $h_2 = h_1/2$; $h_3 = h_2/2$. A method with a higher C_{speed} value indicates a faster convergence rate within the considered step size range.

5. Results

In this study, we conduct experiments to solve the differential equation system (2.1), using the parameter values and initial conditions provided in Section 2., over the interval $t = [0, 5000]$. Table 5.1 presents the accuracy of fixed-step numerical methods using the residual comparison approach based on formula 4.1, with the step size set to $h = 0.01$, thereby obtaining $L = 500,000$ discrete solution points. For this evaluation method, the step size must be sufficiently small to ensure a more accurate approximation of the derivatives on the left-hand side. In this study, from the discrete solution set obtained using numerical methods, we apply a fifth-degree spline function to approximate the unknown functions [21], then compute the approximate derivatives of these functions at the solution points. This allows us to determine the approximated values on the left-hand side of the system.

The results indicate that single-step numerical methods, such as Runge-Kutta and Taylor methods, achieve higher accuracy compared to multi-step methods, including Adams-Bashforth and Adams Predictor-Corrector. Among them, although both exhibit similar accuracy, the Taylor method requires less computation time than the Runge-Kutta method. Additionally, although the RK5 method has a lower order than the sixth-order Taylor method, it has a longer computation time. However, RK5 can achieve comparable accuracy to the sixth-order Taylor method, suggesting that despite its higher computational cost, it exhibits stability and effective error control. The Adams-Bashforth method demonstrates the lowest accuracy but is also the most computationally efficient.

Таблица 5.1. Оценка погрешности численных методов с фиксированным шагом при $h = 0.01$ на основе метода сравнения остатка

Table 5.1. Error Evaluation of Fixed-Step Numerical Methods with $h = 0.01$ based on the Residual Comparison Approach.

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------|
| RK4 | 2.32198×10^{-12} | 1.95121×10^{-12} | 2.19175×10^{-12} | 1.08941×10^{-12} | 12.508 |
| RK5 | 2.14742×10^{-12} | 1.87919×10^{-12} | 2.15478×10^{-12} | 1.08296×10^{-12} | 25.666 |
| Taylor Order 4 | 2.22146×10^{-12} | 2.44939×10^{-12} | 2.80666×10^{-12} | 1.09848×10^{-12} | 9.255 |
| Taylor Order 6 | 2.14760×10^{-12} | 1.87941×10^{-12} | 2.15499×10^{-12} | 1.08320×10^{-12} | 14.861 |
| Adams-BF 4 | 6.41036×10^{-10} | 3.42839×10^{-10} | 6.61115×10^{-10} | 2.00785×10^{-09} | 5.575 |
| Adams-PC 4 | 2.18936×10^{-10} | 1.10598×10^{-10} | 2.18661×10^{-10} | 6.93564×10^{-10} | 10.037 |

Figures 5.1, 5.2, 5.3, and 5.4 respectively illustrate the numerical solutions of system (2.1) obtained using fourth-order methods. The numerical solutions exhibit strong oscillations

with the presence of high-frequency regions, indicating the system's strong nonlinear characteristics. If the step size h is not sufficiently small, the method may fail to capture the rapid changes in the solution, leading to significant error accumulation as the solution domain t increases. A distinction can be observed between the solutions obtained from single-step methods, namely RK4 and the fourth-order Taylor method, and those obtained from multi-step methods, such as Adams-Bashforth and Adams Predictor-Corrector.

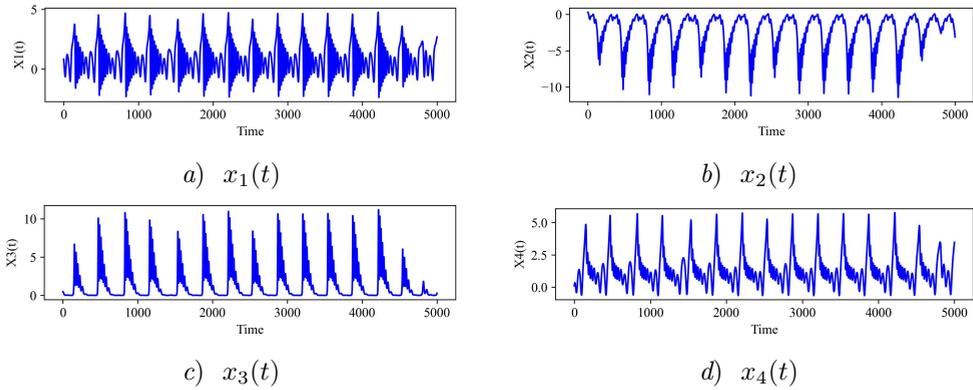


Рис. 5.1. Численные решения системы (2.1), полученные с использованием метода РК4 при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.1. Numerical solutions of the system (2.1), obtained using the RK4 method with $h = 0.01$

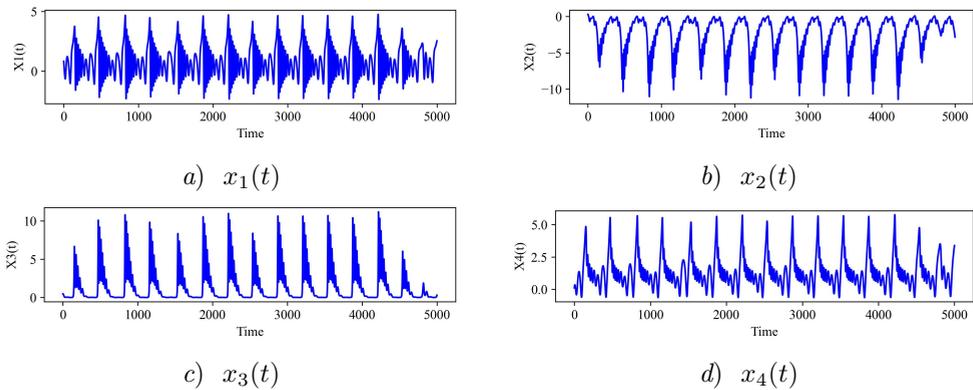


Рис. 5.2. Численные решения, полученные с использованием метода Тейлора четвёртого порядка при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.2. Numerical solutions obtained using the fourth-order Taylor method with $h = 0.01$

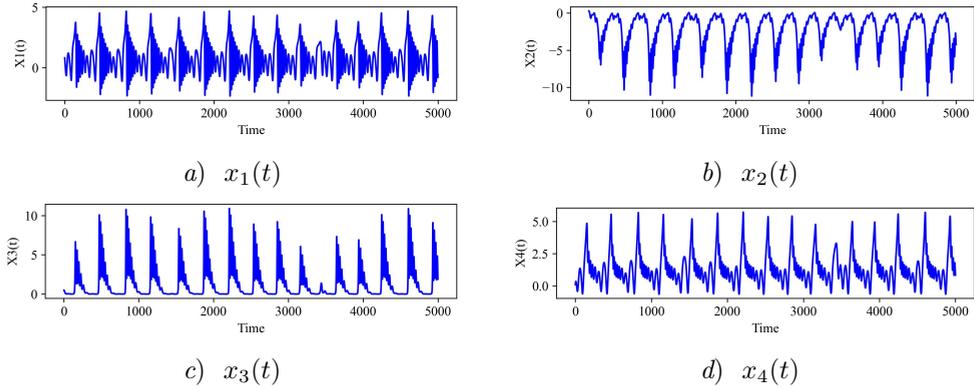


Рис. 5.3. Численные решения, полученные с использованием метода Адамса — Башфорга четвёртого порядка при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.3. Numerical solutions obtained using the fourth-order Adams-Bashforth method with $h = 0.01$

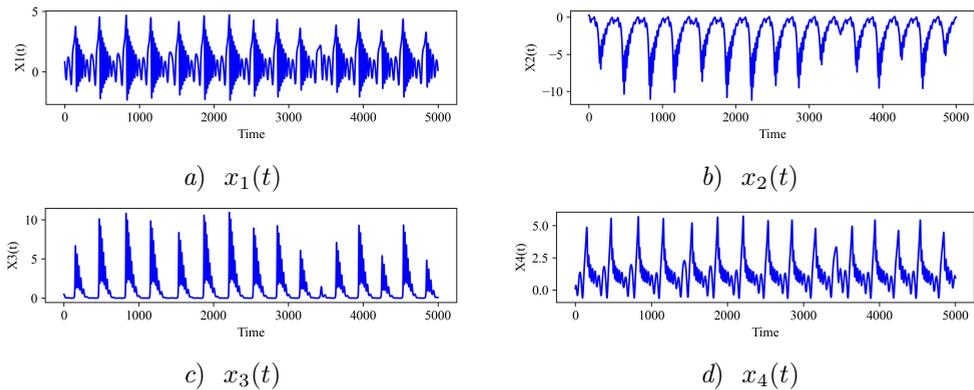


Рис. 5.4. Численные решения, полученные с использованием метода Адамса прогноза–коррекции четвёртого порядка при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.4. Numerical solutions obtained using the fourth-order Adams Predictor-Corrector method with $h = 0.01$

Figures 5.5 and 5.6 illustrate the numerical solutions of system (2.1) obtained using the higher-order methods RK5 and sixth-order Taylor. It is observed that the numerical solutions obtained from both methods exhibit minimal differences, indicating that with a step size of $h = 0.01$, the solutions are relatively convergent over the interval $t = [0, 5000]$.

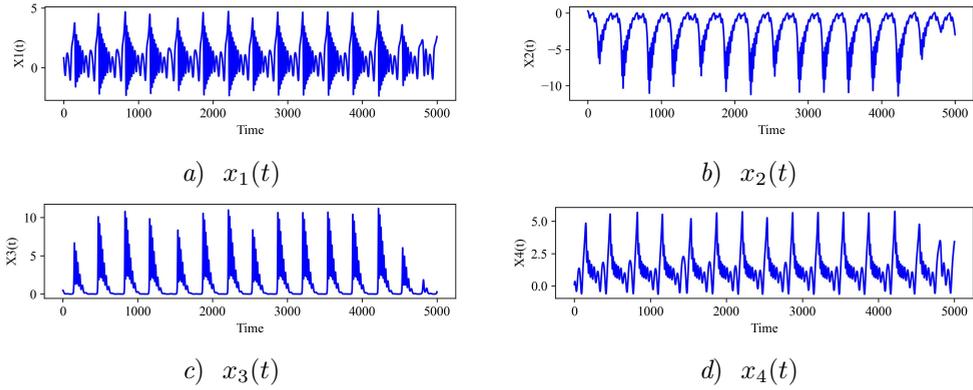


Рис. 5.5. Численные решения, полученные с использованием метода РК5 при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.5. Numerical solutions obtained using the RK5 method with $h = 0.01$

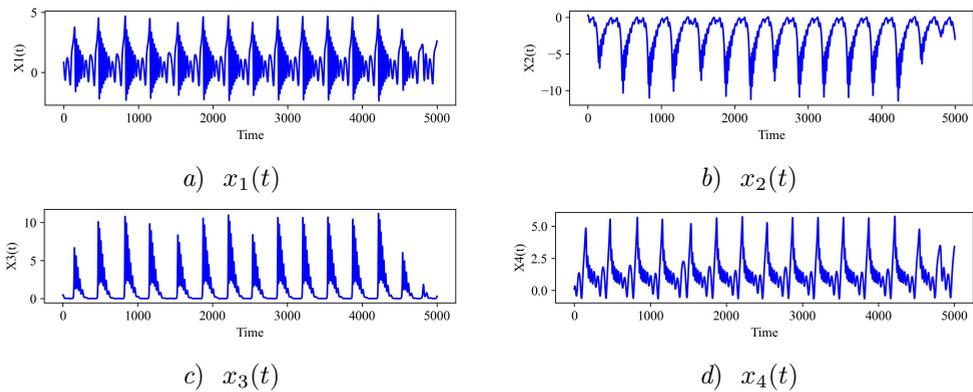


Рис. 5.6. Численные решения, полученные с использованием метода Тейлора шестого порядка при шаге $h = 0.01$

Fig. 5.6. Numerical solutions obtained using the sixth-order Taylor method with $h = 0.01$

Figures 5.7 and 5.8 illustrate the numerical solutions of system (2.1) using the high-order methods RK5 and sixth-order Taylor with a step size of $h = 0.01$. It is observed that as the time domain extends to $t = [0, 10000]$, the accumulated error increases significantly, leading to considerable discrepancies between the numerical solutions obtained by the two methods. Therefore, for the examined time domain, reducing the step size may be necessary to ensure greater accuracy and convergence of the solution.

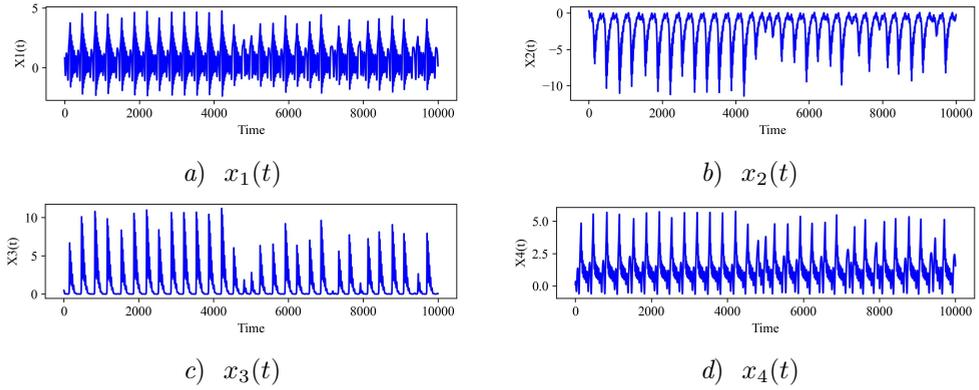


Рис. 5.7. Численные решения, полученные с использованием метода РК5 при шаге $h = 0.01$ и $t = [0, 10000]$

Fig. 5.7. Numerical solutions obtained using the RK5 method with $h = 0.01$ and $t = [0, 10000]$

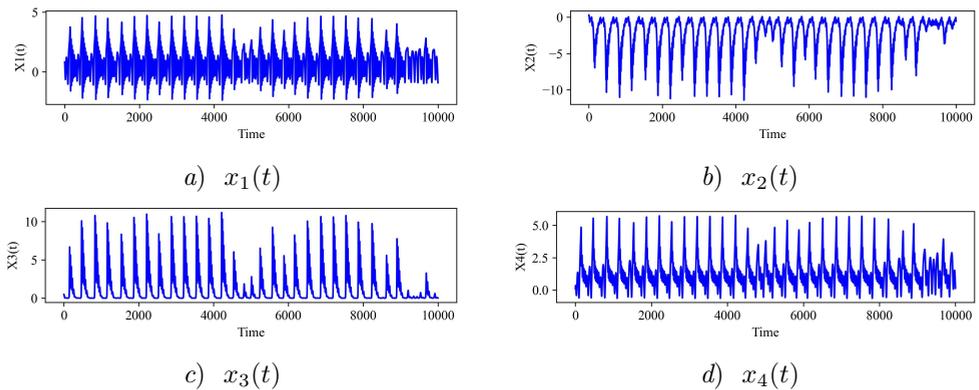


Рис. 5.8. Численные решения, полученные с использованием метода Тейлора шестого порядка при шаге $h = 0.01$ и $t = [0, 10000]$

Fig. 5.8. Numerical solutions obtained using the sixth-order Taylor method with $h = 0.01$ and $t = [0, 10000]$

Figures 5.9 illustrate the numerical solutions of system (2.1) in a three-dimensional space, obtained using the sixth-order Taylor method, with a step size of $h = 0.01$ and $t = [0, 5000]$. It is observed that the system's solutions in the chaotic state exhibit a complex dynamical structure.

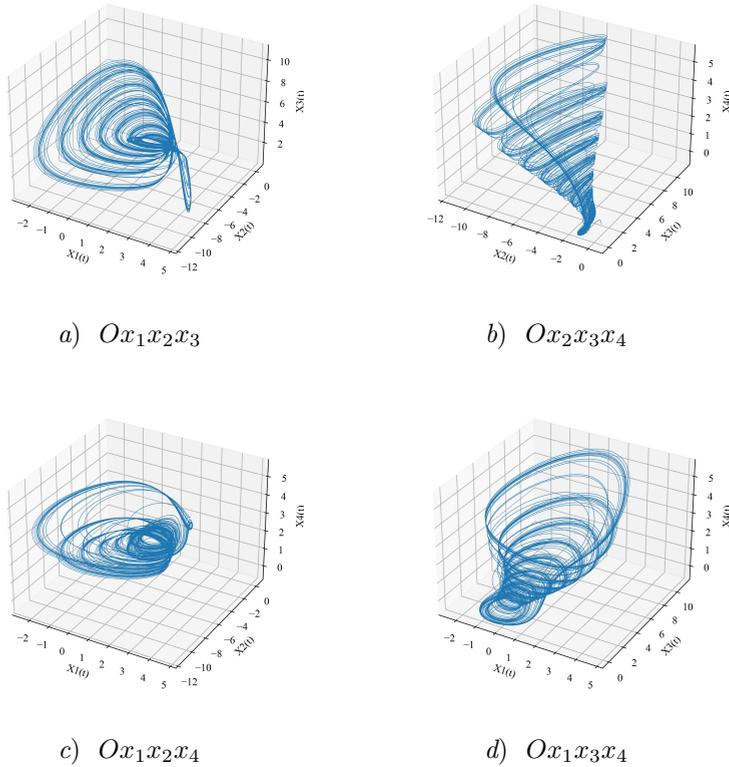


Рис. 5.9. Графики проекций фазовых траекторий системы (2.1), полученные численным методом Тейлора шестого порядка при $h = 0.01$ и $t = [0, 5000]$, на соответствующие трехмерные подпространства

Fig. 5.9. Graphs of projections of phase trajectories of the system (2.1), obtained by the sixth-order Taylor numerical method for $h = 0.01$ and $t = [0, 5000]$, onto the corresponding three-dimensional subspaces

Tables 5.2 and 5.3 present the results of comparing fourth and fifth-order fixed-step numerical methods with the higher-order sixth-order Taylor method, using formula 4.2 over the solution domain $t = [0, 5000]$ at different step sizes of 0.1 and 0.01. The results indicate that, compared to fourth-order methods, the solutions obtained from the fifth-order RK5 method exhibit significantly lower error when compared to the sixth-order Taylor method.

When comparing the numerical solutions obtained from different fourth-order methods with those from the sixth-order method, the results indicate that single-step fourth-order methods yield lower errors than multi-step methods. Among them, the fourth-order Taylor and fourth-order Runge-Kutta methods demonstrate comparable error levels, but the fourth-order Taylor method requires less computation time than the fourth-order Runge-Kutta method. However, at a larger step size ($h = 0.1$), the RK4 method produces solutions with lower error than the fourth-order Taylor method. As the step size decreases, the results from Tables 5.2 and 5.3 further show that the single-step methods RK4 and fourth-order Taylor exhibit a faster error reduction rate compared to multi-step methods based on the Adams

formula. Consequently, their solutions converge more rapidly to the sixth-order method's solutions.

Таблица 5.2. Сравнение погрешностей численных методов четвёртого и пятого порядка с методом Тейлора шестого порядка при шаге $h = 0.1$
Table 5.2. Error comparison of fourth-order and fifth-order numerical methods with the sixth-order Taylor method at $h = 0.1$

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| RK4 | 0.3201646816 | 0.3074583273 | 0.2545435753 | 0.2405862251 | 1.301 |
| RK5 | 0.0106139637 | 0.0066821595 | 0.0025826036 | 0.0091452239 | 2.548 |
| Taylor order 4 | 0.3677339589 | 0.5283631888 | 0.3963504489 | 0.3275716874 | 0.933 |
| Adams-BF 4 | 0.9803687400 | 1.0451732467 | 0.8478472690 | 0.7701285329 | 0.584 |
| Adams-PC 4 | 0.9257142090 | 1.0183955740 | 0.7794342566 | 0.7509303939 | 1.016 |

Таблица 5.3. Сравнение погрешностей численных методов четвёртого и пятого порядка с методом Тейлора шестого порядка при шаге $h = 0.01$
Table 5.3. Error comparison of fourth-order and fifth-order numerical methods with the sixth-order Taylor method at $h = 0.01$

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------|
| RK4 | 0.0016633238 | 0.0011119776 | 0.0004133325 | 0.0013543109 | 12.508 |
| RK5 | 8.11004×10^{-05} | 5.47477×10^{-05} | 2.01610×10^{-05} | 6.55285×10^{-05} | 25.666 |
| Taylor order 4 | 0.0013549301 | 0.0009225286 | 0.0003366501 | 0.0010875024 | 9.255 |
| Adams-BF 4 | 0.6969048783 | 0.9875354755 | 0.7338413482 | 0.6110239391 | 5.575 |
| Adams-PC 4 | 0.6352375876 | 0.8482451456 | 0.6250611408 | 0.5381780426 | 10.037 |

Tables 5.4 and 5.5 present the errors between the numerical solutions obtained using fourth-order methods and the fifth-order Runge-Kutta method over the solution domain $t = [0, 5000]$, at step sizes of 0.1 and 0.01. The results exhibit similar trends to those observed when comparing these methods with the sixth-order Taylor method.

Таблица 5.4. Сравнение погрешностей между численными методами четвёртого порядка и методом Рунге-Кутты пятого порядка (RK5) при шаге $h = 0.1$
Table 5.4. Comparison of errors between fourth-order numerical methods and RK5 at $h = 0.1$

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| RK4 | 0.3222448445 | 0.3093120751 | 0.2551649732 | 0.2409296628 | 1.301 |
| Taylor order 4 | 0.3686927666 | 0.5287241577 | 0.3957364282 | 0.3253967559 | 0.933 |
| Adams-BF 4 | 0.9800879315 | 1.0470551703 | 0.8487057242 | 0.7690135558 | 0.584 |
| Adams-PC 4 | 0.9219998790 | 1.0193316583 | 0.7804187325 | 0.7464283058 | 1.016 |

Таблица 5.5. Сравнение погрешностей между численными методами четвёртого порядка и методом Рунге-Кутты пятого порядка (RK5) при шаге $h = 0.01$

Table 5.5. Comparison of errors between fourth-order numerical methods and RK5 at $h = 0.01$

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| RK4 | 0.0015822653 | 0.0010573021 | 0.0003931734 | 0.0012888379 | 12.508 |
| Taylor order 4 | 0.0014360006 | 0.0009772263 | 0.0003568097 | 0.0011529920 | 9.255 |
| Adams-BF 4 | 0.6969151280 | 0.9875166627 | 0.7338327435 | 0.6110366128 | 5.575 |
| Adams-PC 4 | 0.6352336703 | 0.8482619023 | 0.6250628251 | 0.5381703950 | 10.037 |

To evaluate the convergence rate of numerical methods, this study applies various fourth-order numerical methods to solve system (2.1) over the solution domain $t = [0, 5000]$, with progressively decreasing step sizes, starting from $h = 0.5$. The error between numerical solutions at successive step size reductions (each step size being half of the previous one) is measured, and the convergence rate is computed using formula 4.3 proposed in this study. The results, presented in Table 5.6, show that for larger initial step sizes, all numerical methods exhibit similar convergence rates, mostly around 1. This indicates that all the methods converge slowly or have not yet stabilized within the considered step size range.

Tables 5.7 and 5.8 present results for further reductions in step size, showing that single-step methods demonstrate an increasing convergence rate, which becomes significantly higher as the step size decreases. In contrast, multi-step methods exhibit a slower and inconsistent convergence rate. These findings indicate that single-step methods tend to converge more effectively than multi-step methods, while multi-step methods may require smaller step sizes to achieve convergence. This result is also consistent with previous evaluations based on the residual method and reference solutions obtained from higher-order numerical methods.

Таблица 5.6. Сравнение скоростей сходимости численных методов четвёртого порядка с фиксированным шагом при $h_1 = 0.5, h_2 = 0.25, h_3 = 0.125$

Table 5.6. Comparison of the convergence rates of fourth-order fixed-step methods at $h_1 = 0.5, h_2 = 0.25, h_3 = 0.125$

| Method | X1(t) speed | X2(t) speed | X3(t) speed | X4(t) speed |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| RK4 | 1.485 | 1.132 | 1.209 | 1.445 |
| Taylor order 4 | 1.235 | 1.042 | 1.174 | 1.124 |
| Adams-BF 4 | 1.285 | 1.369 | 1.383 | 1.269 |
| Adams-PC 4 | 1.047 | 0.769 | 0.816 | 0.935 |

Таблица 5.7. Сравнение скоростей сходимости численных методов четвёртого порядка с фиксированным шагом при $h_1 = 0.125, h_2 = 0.0625, h_3 = 0.03125$

Table 5.7. Comparison of the convergence rates of fourth-order fixed-step methods at $h_1 = 0.125, h_2 = 0.0625, h_3 = 0.03125$

| Method | X1(t) speed | X2(t) speed | X3(t) speed | X4(t) speed |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| RK4 | 1.942 | 2.531 | 2.392 | 2.119 |
| Taylor order 4 | 1.665 | 2.916 | 2.637 | 1.888 |
| Adams-BF 4 | 1.166 | 1.427 | 1.363 | 1.268 |
| Adams-PC 4 | 1.176 | 1.945 | 1.776 | 1.321 |

Таблица 5.8. Сравнение скоростей сходимости численных методов четвёртого порядка с фиксированным шагом при $h_1 = 0.03125$, $h_2 = 0.015625$, $h_3 = 0.0078125$

Table 5.8. Comparison of the convergence rates of fourth-order fixed-step methods at $h_1 = 0.03125$, $h_2 = 0.015625$, $h_3 = 0.0078125$

| Method | X1(t) speed | X2(t) speed | X3(t) speed | X4(t) speed |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| RK4 | 8.040 | 8.849 | 11.401 | 8.316 |
| Taylor order 4 | 7.196 | 8.843 | 16.467 | 6.634 |
| Adams-BF 4 | 1.140 | 1.082 | 1.150 | 1.060 |
| Adams-PC 4 | 1.162 | 1.169 | 1.175 | 1.177 |

In this study, adaptive step-size numerical methods supported by the SciPy library [17–18] are implemented to solve the differential equation system (2.1). These methods include RK45, DOP853, Radau, BDF, and LSODA. The system (2.1) is solved over the domain $t = [0, 5000]$, discretized into $L = 500,000$ equally spaced solution points.

Tables 5.9 present the accuracy evaluation of these methods using the residual-based measurement defined in equation 4.1, with the parameter max step = 0.01, $atol = 10^{-12}$ and $rtol = 10^{-09}$. The results indicate that adaptive single-step methods, such as RK45, DOP853, and Radau, achieve higher accuracy than adaptive multi-step methods, namely BDF and LSODA, with DOP853 exhibiting the best accuracy.

Таблица 5.9. Сравнение погрешностей адаптивных численных методов с использованием метода измерения остатка

Table 5.9. Comparison of the errors of adaptive numerical methods using the residual measurement method

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|--------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------|
| RK45 | 1.62218×10^{-14} | 3.18855×10^{-14} | 1.81544×10^{-14} | 1.93451×10^{-14} | 54.624 |
| DOP853 | 1.60911×10^{-14} | 3.14930×10^{-14} | 1.79521×10^{-14} | 1.91034×10^{-14} | 104.688 |
| Radau | 3.13656×10^{-14} | 6.87510×10^{-14} | 6.66809×10^{-14} | 1.93717×10^{-14} | 140.390 |
| BDF | 2.23207×10^{-12} | 7.22017×10^{-12} | 9.07787×10^{-12} | 5.86248×10^{-13} | 87.648 |
| LSODA | 2.33088×10^{-12} | 2.10136×10^{-12} | 2.35122×10^{-12} | 1.14341×10^{-12} | 18.278 |

In addition to evaluating the accuracy of adaptive numerical methods through residual error measurement between the left-hand and right-hand sides, this study also assesses these methods by comparing them with reference solutions, as presented in Section 4. Specifically, two methods were selected to generate reference solutions: DOP853, a high-order method representing single-step numerical methods, and BDF, representing multi-step numerical methods. These methods were assigned stringent accuracy parameters (i.e., small values for $atol$, $rtol$ and max step). The system (2.1) is then solved using the two selected reference methods to obtain highly accurate solutions, which serve as reference solutions for comparison and evaluation. The adaptive numerical methods under assessment were assigned lower accuracy requirements.

Tables 5.10 and 5.11 present the errors when comparing the solutions of adaptive

numerical methods configured with accuracy settings of $atol = 10^{-09}$, $rtol = 10^{-06}$, and $max\ step = 0.1$ to the highly accurate reference solutions obtained using the selected reference methods, DOP853 and BDF ($atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$ and $max\ step = 0.01$), over the interval $t = [0, 5000]$. The results show that adaptive single-step numerical methods continue to outperform adaptive multi-step numerical methods. Among them, DOP853 achieves the highest accuracy, followed by the single-step methods Radau and RK45, which have comparable accuracy. However, Radau requires a longer computation time, which is entirely expected due to its implicit nature.

Таблица 5.10. Сравнение погрешностей между адаптивными численными методами с низкими настройками точности ($atol = 10^{-09}$, $rtol = 10^{-06}$ и $max\ step = 0.1$) и эталонным методом DOP853, настроенным на высокую точность ($atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$, $max\ step = 0.01$)

Table 5.10. Error comparison between adaptive numerical methods with lower accuracy settings ($atol = 10^{-09}$, $rtol = 10^{-06}$ and $max\ step=0.1$) and the reference method DOP853, set with parameters for high accuracy ($atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$, $max\ step = 0.01$)

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|--------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------|
| RK45 | 0.0847663554 | 0.0813651643 | 0.0571416993 | 0.0634416895 | 5.662 |
| DOP853 | 1.23895×10^{-05} | 8.36145×10^{-06} | 3.07995×10^{-06} | 1.00127×10^{-05} | 10.392 |
| Radau | 0.0759208190 | 0.0708642717 | 0.0474347373 | 0.0559951801 | 13.920 |
| BDF | 0.6086937873 | 0.5833698577 | 0.5198981051 | 0.4354076134 | 8.677 |
| LSODA | 0.5265124258 | 0.4244004704 | 0.3941582924 | 0.3654465934 | 2.146 |

Таблица 5.11. Сравнение погрешностей между адаптивными численными методами с низкими настройками точности ($atol = 10^{-09}$, $rtol = 10^{-06}$ и $max\ step = 0.1$) и эталонным методом BDF, настроенным на высокую точность ($atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$, $max\ step = 0.01$)

Table 5.11. Error comparison between adaptive numerical methods with lower accuracy settings ($atol = 10^{-09}$, $rtol = 10^{-06}$ and $max\ step=0.1$) and the reference method BDF, set with parameters for high accuracy ($atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$, $max\ step = 0.01$)

| Method | X1(t) error | X2(t) error | X3(t) error | X4(t) error | Time (s) |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| RK45 | 0.1099220031 | 0.1186788941 | 0.0876441707 | 0.0886665677 | 5.662 |
| DOP853 | 0.0668795589 | 0.0457344731 | 0.0317789621 | 0.0591959604 | 10.392 |
| Radau | 0.1023159919 | 0.1080904800 | 0.0780278565 | 0.0848352444 | 13.920 |
| BDF | 0.6065371580 | 0.6115335048 | 0.5396587152 | 0.4378548469 | 8.677 |
| LSODA | 0.5309210513 | 0.4370703576 | 0.4003046808 | 0.3784663871 | 2.146 |

Figures 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, and 5.14 respectively depict the numerical solutions of system (2.1) using the adaptive numerical methods RK45, DOP853, Radau, BDF, and LSODA over the domain $t = [0, 5000]$, with $max\ step = 0.01$, $atol = 10^{-12}$, $rtol = 10^{-09}$.

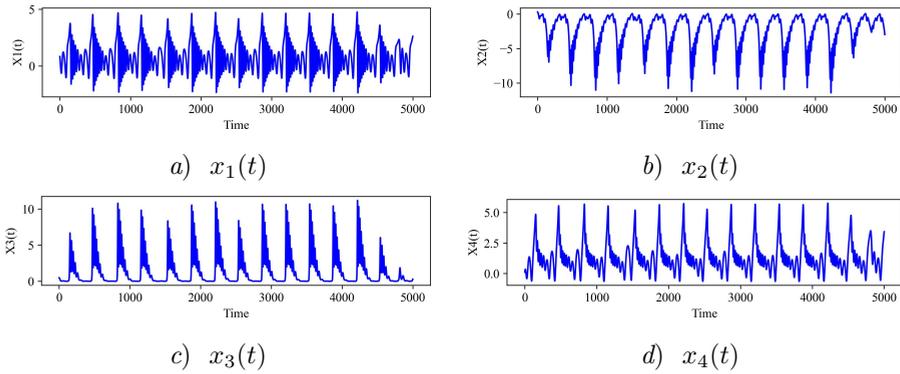


Рис. 5.10. Численные решения, полученные с использованием метода RK45

Fig. 5.10. Numerical solutions obtained using the RK45 method

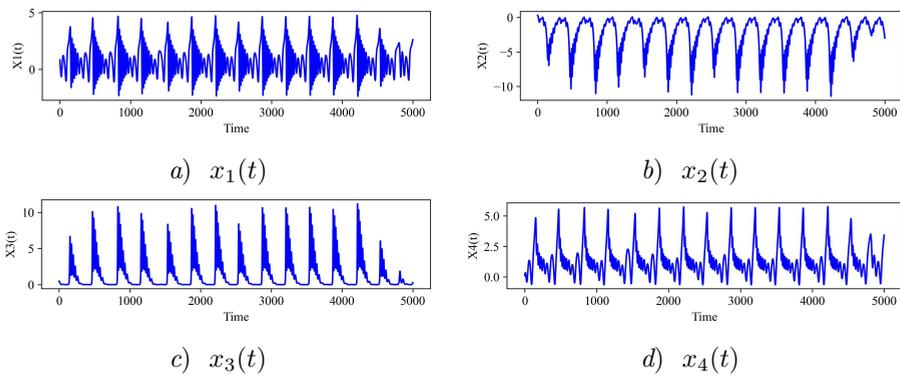


Рис. 5.11. Численные решения, полученные с использованием метода DOP853

Fig. 5.11. Numerical solutions obtained using the DOP853 method

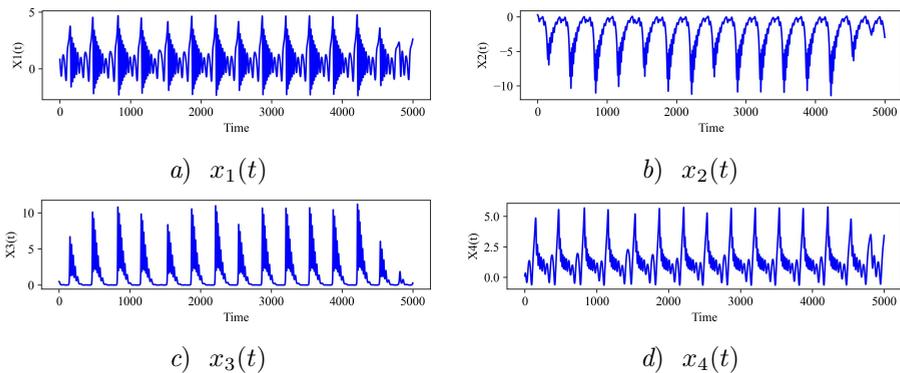


Рис. 5.12. Численные решения, полученные с использованием метода Radau

Fig. 5.12. Numerical solutions obtained using the Radau method

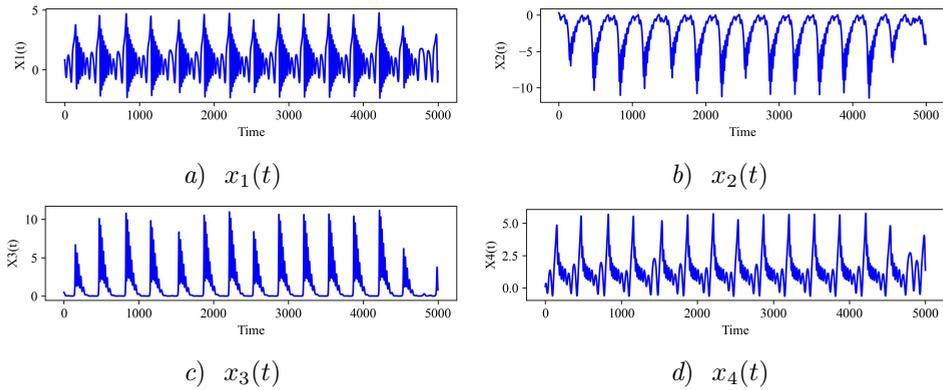


Рис. 5.13. Численные решения, полученные с использованием метода BDF

Fig. 5.13. Numerical solutions obtained using the BDF method

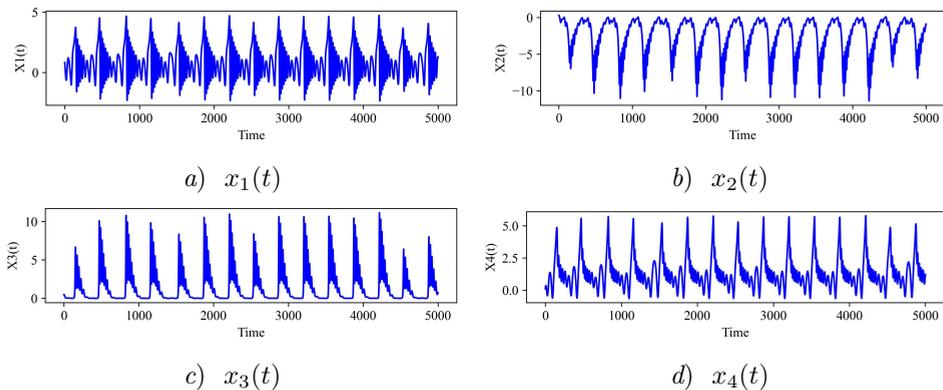


Рис. 5.14. Численные решения, полученные с использованием метода LSODA

Fig. 5.14. Numerical solutions obtained using the LSODA method

Figures 5.15 and 5.16 illustrate the numerical solutions of the system over the extended time domain $t = [0, 10000]$, obtained using two highly regarded numerical methods: DOP853 and Radau. It can be observed that as the time domain increases, the solutions no longer maintain the similarity seen in figures 5.11 and 5.12 (where $t \leq 5000$). Furthermore, a comparison of the numerical results in the domain $t > 5000$ obtained using the RK5 and sixth-order Taylor methods as shown in figures 5.7 and 5.8, reveals that when the system is in a chaotic state, the accumulated error increases rapidly, leading to significant discrepancies in the numerical solutions and making convergence difficult within this domain.

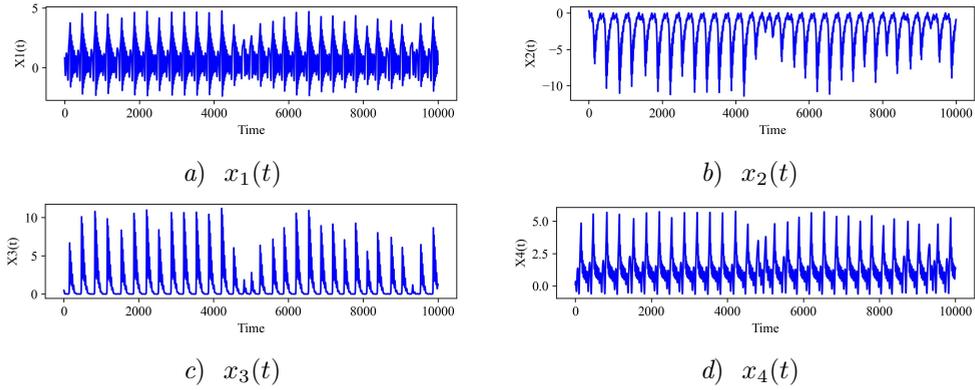


Рис. 5.15. Численные решения, полученные с использованием метода DOP853 при $t = [0, 10000]$

Fig. 5.15. Numerical solutions obtained using the DOP853 method with $t = [0, 10000]$

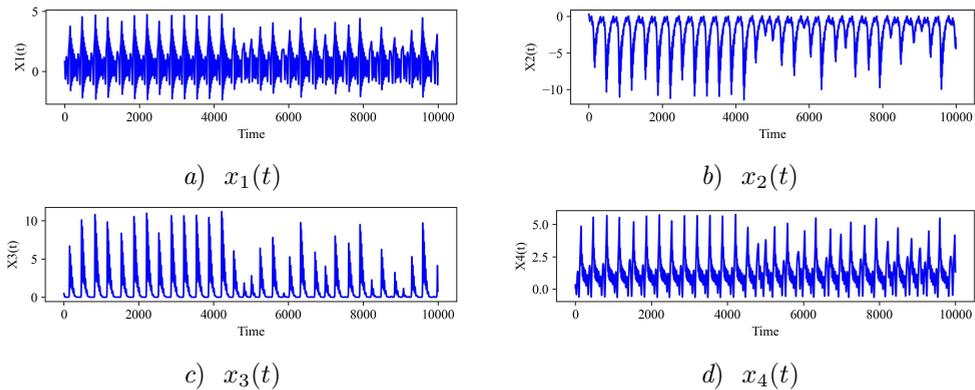


Рис. 5.16. Численные решения, полученные с использованием метода Radau при $t = [0, 10000]$

Fig. 5.16. Numerical solutions obtained using the Radau method with $t = [0, 10000]$

6. Conclusion

In this study, we implemented numerical methods to solve the nonlinear energy resources supply-demand system, including single-step methods, multi-step methods, and adaptive step-size methods. The effectiveness of these methods was analyzed and evaluated for the given problem. Experimental results indicate that, in the considered cases, single-step methods were more effective than multi-step methods in terms of accuracy and convergence speed, while multi-step methods demonstrated higher computational efficiency, as they required less computation time. Adaptive step-size numerical methods demonstrated both flexibility and stability. Based on the evaluation and analysis of the system's numerical solutions, the system exhibits nonlinearity and chaotic behavior. In addition, the system's

components change rapidly and influence each other significantly, potentially leading to irregular oscillations and the emergence of complex dynamics. Therefore, to ensure numerical stability and accurately simulate the long-term dynamic behavior of the system, it is essential to employ high-order numerical methods combined with an appropriate step size. In this study, we focused on implementing representative numerical methods to solve the nonlinear energy resources supply-demand system, in which certain aspects of the system's behavior were observed through numerical solutions. To gain a more comprehensive and in-depth understanding, future research should extend the experimental scope, investigate a wider range of solution domains and parameters, and analyze the effectiveness of numerical methods when applied to more complex cases of the system.

Acknowledgements. The paper was partly supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project code: FZZS-2024-0003). The work of S. Noeiaghdam was funded by the High-Level Talent Research Start-up Project Funding of Henan Academy of Sciences (Project No. 241819246).

REFERENCES

1. L. E. Elsgolts, *Differential Equations and the Calculus of Variations*, Nauka, Moscow, Russia, 1965 (In Russ.), 424 p.
2. N. Sidorov, D. Sidorov, Y. Li, “Basins of Attraction and Stability of Nonlinear Systems’ Equilibrium Points”, *Differential Equations and Dynamical Systems*, **31**:2 (2023), 289–300. DOI: 10.1007/s12591-019-00511-w
3. M. Sun, L. Tian, Y. Fu, “An energy resources demand–supply system and its dynamical analysis”, *Chaos Solitons and Fractals*, **32**:1 (2007), 168–180. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.10.085
4. M. Sun, Q. Jia, L. Tian, “A new four-dimensional energy resources system and its linear feedback control”, *Chaos Solitons and Fractals*, **39**:1 (2007), 101–108. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.125
5. M. Sun, L. Tian, Q. Jia, “Adaptive control and synchronization of a four-dimensional energy resources system with unknown parameters”, *Chaos Solitons and Fractals*, **39**:4 (2009), 1943–1949. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.06.117
6. C. Vuik, F. J. Vermolen, M. B. van Gijzen, M. J. Vuik, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, TUDelft, Netherlands, 2023 DOI: 10.5074/t.2023.001, 125 p.
7. M. Sun, Y. Tao, X. Wang, L. Tian, “The model reference control for the four-dimensional energy supply-demand system”, *Applied Mathematical Modelling*, **35**:10 (2011), 5165–5172. DOI: 10.1016/j.apm.2011.04.016
8. C.-F. Huang, K.-H. Cheng, J.-J. Yan, “Robust chaos synchronization of four-dimensional energy resource systems subject to unmatched uncertainties”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**:6 (2009), 2784–2792. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.017

9. V. T. Vo, S. Noeiaghdam, D. Sidorov, A. Dreglea, L. Wang, “Solving Nonlinear Energy Supply and Demand System Using Physics-Informed Neural Networks”, *Computation*, **13**:1 (2025), 13. DOI: 10.3390/computation13010013
10. S. R. K. Iyengar, R. K. Jain, *Numerical Methods*, New Age International Publishers, New Delhi, 2009, 315 p.
11. J. R. Dormand, P. J. Prince, “A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **6** (1980), 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3
12. L. W. Shampine, “Some Practical Runge-Kutta Formulas”, *Mathematics of Computation*, **46** (1986), 135–150.
13. E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008 DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1, 528 p.
14. E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, Berlin Heidelberg, 2002, 614 p.
15. G. D. Byrne, A. C. Hindmarsh, “A polyalgorithm for the numerical solution of ordinary differential equations”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **1**:1 (1975), 71–96. DOI: 10.1145/355626.355636
16. L. Petzold, “Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations”, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **4**:1 (1983), 136–148. DOI: 10.1137/0904010
17. E. Ayars, *Computational Physics With Python*, California State University, Chico, California, 2013, 186 p.
18. *SciPy Reference*, SciPy Documentation. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html>, 2025, (Date of access: 03.02.2025).
19. J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2008, 463 p.
20. S. C. Chapra, R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers, eighth edition*, McGraw-Hill Education, New York, 2021, 988 p.
21. K. Novak, *Numerical Methods for Scientific Computing*, Equal Share Press, Virginia, 2022, 706 p.

Submitted 10.02.2025; Revised 05.05.2025; Accepted 28.05.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1965. 424 с.
2. Sidorov N., Sidorov D., Li Y. Basins of Attraction and Stability of Nonlinear Systems' Equilibrium Points // *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2023. Vol. 31, no. 2. P. 289–300. DOI: 10.1007/s12591-019-00511-w
3. Sun M., Tian L., Fu Y. An energy resources demand–supply system and its dynamical analysis // *Chaos Solitons and Fractals*. 2005. Vol. 32, no. 1. P. 168–180. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.10.085
4. Sun M., Jia Q., Tian L. A new four-dimensional energy resources system and its linear feedback control // *Chaos Solitons and Fractals*. 2007. Vol 39, issue 1. P. 101–108. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.125
5. Sun M., Tian L., Jia Q. Adaptive control and synchronization of a four-dimensional energy resources system with unknown parameters // *Chaos Solitons and Fractals*. 2009. Vol 39, no. 4. P. 1943–1949. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.06.117
6. Vuik C., Vermolen F. J., van Gijzen M. B., Vuik M. J. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. TUDelft, Netherlands. 2023. 125 p. DOI: 10.5074/t.2023.001
7. Sun M., Tao Y., Wang X., Tian L. The model reference control for the four-dimensional energy supply-demand system // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. Vol. 35, no. 10. P. 5165–5172. DOI: 10.1016/j.apm.2011.04.016
8. Huang C. F., Cheng K. H., Yan J. J. Robust chaos synchronization of four-dimensional energy resource systems subject to unmatched uncertainties // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2009. Vol. 14, no. 6. P. 2784–2792. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.017
9. Vo V. T., Noeiaghdam S., Sidorov D., Dreglea A., Wang L. Solving Nonlinear Energy Supply and Demand System Using Physics-Informed Neural Networks // *Computation*. 2025. Vol. 13, no. 1. P. 13. DOI: 10.3390/computation13010013
10. Iyengar S. R. K., Jain R. K. Numerical Methods. New Age International Publishers, New Delhi. 2009. 315 p.
11. Dormand J. R., Prince P. J. A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. Vol. 6. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3
12. Shampine L. W. Some Practical Runge-Kutta Formulas // *Mathematics of Computation*. 1986. Vol. 46. P. 135–150.
13. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer, Berlin Heidelberg. 2008. 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1
14. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer, Berlin Heidelberg. 2002. 614 p.

15. Byrne G. D., Hindmarsh A. C. A polyalgorithm for the numerical solution of ordinary differential equations // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1975. Vol. 1, no. 1. P. 71–96. DOI: 10.1145/355626.355636
16. Petzold L. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1983. Vol. 4, issue 1. P. 136–148. DOI:10.1137/0904010.
17. Ayars E. *Computational Physics With Python*. California State University, Chico, California. 2013. 186 p.
18. SciPy Reference [Электронный ресурс] : SciPy Documentation. — URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html> (дата обращения: 03.02.2025).
19. Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons Ltd, England. 2008. 463 p.
20. Chapra S. C., Canale R. P. *Numerical Methods for Engineers*, eighth edition. McGraw-Hill Education, New York. 2021. 988 p.
21. Novak K. *Numerical Methods for Scientific Computing*. Equal Share Press, Virginia. 2022. 706 p.

*Поступила 10.02.2025; доработана после рецензирования 05.05.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.93

Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков

А. Н. Сахаров

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет
им. Л. Я. Флорентьева (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье строится класс специальных потоков на многомерном торе и топологический инвариант таких потоков – множество вращения. Такие потоки возникают в процессе приведения к треугольному виду линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. В процессе такого приведения получается система нелинейных дифференциальных уравнений на многомерном торе, которая порождает проективный поток, индуцируемый исходной линейной системой. В работе строится алгоритм $SO(n)$ -расширения квазипериодической линейной системы. При этом используются известные результаты из теории матричных групп и алгебр Ли. Полученная система уравнений допускает понижение порядка, что позволяет записать правые части в виде тригонометрических полиномов от углов Эйлера на сфере. Случай $n = 3$ рассматривается отдельно. Уравнения, определяющие проективный поток, записываются в явном виде. Проективный поток определен на торе размерности $m + 2$, где m – размерность исходного тора. Структура этого потока определяется топологическими инвариантами потока. Например, неособый поток на двумерном торе имеет топологический инвариант – число вращения (А. Пуанкаре). Используя метод М. Эрмана, удастся доказать существование и единственность вектора вращения (ρ_1, ρ_2) для проективного потока на T^{m+2} . С помощью теории С. Шварцмана определения множества вращения для потоков на компактных метрических пространствах показывается, что компонента $\rho_2 = 0$. Здесь используется факт, что размерность максимальной торической подалгебры алгебры $so(3)$ равна единице.

Ключевые слова: линейные расширения, групповое расширение, проективное расширение, торическая подалгебра, вектор вращения, асимптотические циклы

Для цитирования: Сахаров А. Н. Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 2. С. 171–184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184

Об авторах:

Сахаров Александр Николаевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной механики, физики и высшей математики, Нижегородский государственный аграрно-технологический университет им. Л.Я. Флорентьева (603146, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Сибирцева, д. 10), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, ansakharov2008@yandex.ru



MSC2020 34D20

Rotation sets of $SO(3)$ -extensions of quasiperiodic flows

A. N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after L. Ya. Florentyev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we construct a class of special flows on a multidimensional torus and a topological invariant of such flows, i.e. a rotation set. Such flows arise while reducing linear systems of differential equations with quasiperiodic coefficients to a triangular form. In the process of such a reduction, we obtain a system of nonlinear differential equations on a multidimensional torus, which generates a projective flow induced by the original linear system. In this paper, we use known results from the theory of matrix groups and Lie algebras and construct an algorithm for $SO(n)$ -extension of a quasiperiodic linear system. The resulting system of equations admits a reduction in order, which allows us to write the right-hand sides as trigonometric polynomials in Euler angles on a sphere. The case $n = 3$ is considered separately. The equations defining the projective flow are written explicitly. The projective flow is defined on a torus of dimension $m + 2$, where m is the dimension of the original torus. The structure of this flow is determined by topological invariants of the flow. For example, a non-singular flow on a two-dimensional torus has a topological invariant – the rotation number (A. Poincaré). Using M. Herman’s method, it is possible to prove the existence and uniqueness of the rotation vector (ρ_1, ρ_2) for the projective flow on \mathbb{T}^{m+2} . Using S. Schwartzman’s theory defining the rotation set for flows on compact metric spaces, it is shown that the component $\rho_2 = 0$. Here, the fact is used that the dimension of the maximal toric subalgebra of the algebra $\mathfrak{so}(3)$ is equal to one.

Keywords: linear extensions, group extension, projective extension, toric subalgebra, rotation vector, asymptotic cycles

For citation: A. N. Sakharov. Rotation sets of $SO(3)$ -extensions of quasiperiodic flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:2(2025), 171–184. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.171-184

About the authors:

Alexander N. Sakharov, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Physics and Higher Mathematics, Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after L. Ya. Florentyev (10, Sibirtseva Str., Nizhny Novgorod, 603146, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, ansakharov2008@yandex.ru

1. Введение

При описании локального поведения траекторий нелинейной системы дифференциальных уравнений используются линейные системы в вариациях. Для приложений важно описание динамики таких систем для решений на инвариантных многообразиях исходной системы \mathcal{M} (периодические решения, инвариантные торы с квазипериодическими траекториями на них и т.п.). Одним из методов исследования таких систем является метод группового расширения, позволяющий привести линейную систему к треугольному виду. Такое расширение позволяет описать динамику в терминах свойств

траекторий нелинейной системы на компактном многообразии. Здесь в качестве группы расширения естественно использовать компактную матричную группу. Процедура расширения сводится к построению векторного поля в алгебре Ли этой группы. Так как такая алгебра обладает коммутативной торической подалгеброй, то возникает векторное поле на расслоении с базой M и слоем тор. Индуцируемый поток на этом расслоении имеет топологический инвариант – множество вращения. Описанию структуры этого множества в простейшем случае посвящена эта работа.

Классическое понятие числа вращения введено А. Пуанкаре для неособых потоков на торе T^2 . Заслуга распространения этого понятия для произвольных потоков на компактных метрических пространствах принадлежит С. Шварцману [1]. В отличие от геометрического определения Пуанкаре, он вводит чисто алгебраическое понятие асимптотического цикла, используя инвариантную меру потока. Это понятие совпадает с определением Пуанкаре в случае потоков на торе. Заметим, что на поверхностях рода больше единицы аналогом числа вращения является гомотопический класс вращения (С.Х. Арансон, В.З. Гринес [2]). Поэтому дальнейшие результаты касаются, в основном, структуры множеств вращения потоков на многомерных торах. Развитие этих идей можно найти в обзоре М. Полликотта [3].

Рассмотрим вещественную линейную систему с квазипериодическими коэффициентами

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где φ – угловые координаты на торе \mathbb{T}^m , $A(\varphi)$ – матрица-функция на торе, ω – вектор с рационально независимыми компонентами. Такая система порождает поток на расслоении $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, который называется линейным расширением потока на торе. Динамика системы (1.1) легко описывается, когда $A(\varphi)$ – треугольная матрица. Систему, не являющуюся треугольной, с помощью группового расширения можно привести к треугольному виду. Абстрактная теорема о приведении к такому виду произвольного линейного расширения минимального потока принадлежит И.У. Бронштейну ([4], теорема 5.8). Произвольная неавтономная линейная система также приводима к треугольному виду согласно теореме Перрона [5]. В случае группы $SO(n)$ получаем систему на компактном многообразии $\mathbb{T}^m \times SO(n)$, которая порождает поток, называемый $SO(n)$ -расширением потока на торе \mathbb{T}^m . Сужение на какое-либо минимальное множество этого потока дает рекуррентное преобразование системы (1.1) к треугольному виду.

Наиболее подробно изучен случай $SO(2)$ -расширений. Пусть $n = 2$ и матрица A в (1.1) имеет вид

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ c(\varphi) & -a(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Тогда поток на торе \mathbb{T}^{m+1} порождается векторным полем

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = b(\varphi) - c(\varphi) + (b(\varphi) + c(\varphi)) \cos \theta + 2a(\varphi) \sin \theta. \quad (1.2)$$

Число минимальных множеств у этого потока равно либо 1, либо 2, либо тор \mathbb{T}^{m+1} представляет собой несчетное объединение минимальных множеств (теорема 8, [6]). Поток имеет топологический инвариант – число вращения слоя:

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{t},$$

которое не зависит от начальных данных решения (φ_0, θ_0) (Р. Джонсон, Ю. Мозер [7], М. Эрман [8]). При $m > 1$ число вращения слоя не является полным топологическим

инвариантом, так как не определяет однозначно топологию минимальных множеств: минимальное множество либо тор \mathbb{T}^m с квазипериодическим потоком на нем, либо почти автоморфное расширение¹ потока на \mathbb{T}^m (Р.Э. Виноград [9]), либо тор \mathbb{T}^{m+1} , поток на котором не является квазипериодическим (Р. Джонсон [10]).

Замечание 1.1. Если в (1.2) правую часть для $\dot{\theta}$ заменить произвольной функцией $a(\varphi, \theta)$ на торе \mathbb{T}^{m+1} , то такой поток также имеет число вращения слоя, не зависящее от начальных данных [11]. Рассмотрим эту систему как систему уравнений характеристик квазилинейного уравнения в частных производных

$$\omega_1 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2} + \dots + \omega_m \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_m} = a(\varphi, \theta).$$

Решения этого уравнения $\theta(\varphi, \eta)$ периодичны по φ и удовлетворяют равенству $\theta(\varphi, \eta + 2\pi) = 2\pi + \theta(\varphi, \eta)$. Таким образом, решения (интегральные поверхности) образуют слоение t -мерных цилиндров, число вращения слоя ρ резонансное: $l\rho - \langle \mathbf{k} | \boldsymbol{\omega} \rangle = 0$. Если ρ рационально, то либо все цилиндры слоения t -мерные торы, либо существует четное число t -мерных торов, а остальные цилиндры асимптотически стремятся к ним. При иррациональном ρ каждый цилиндр либо всюду плотно пересекается с координатой θ , либо существует инвариантное множество, пересечение которого с координатой θ – канторово множество [12].

Следующий по сложности случай соответствует системе (1.1) размерности три. Здесь удается выявить основные особенности, возникающие при исследовании многомерных систем. В работе строится алгоритм построения $SO(n)$ -расширения квазипериодического потока на торе \mathbb{T}^m , индуцированного линейным расширением произвольной размерности (раздел 2). В разделе 3 процедура $SO(3)$ -расширения приводит к потоку на торе \mathbb{T}^{m+2} . Для построения множества вращения этого потока используется универсальное понятие асимптотического цикла Шварцмана (раздел 4).

2. Проективное расширение, ассоциированное с линейным расширением

Опишем алгоритм приведения системы (1.1) к треугольному виду с помощью $SO(n)$ -расширения. Пусть $A(\varphi) = S(\varphi) + R(\varphi)$ разложение матрицы $A(\varphi)$ на симметрическую и антисимметрическую части. Будем искать такую матрицу $Q \in SO(n)$, чтобы замена $x = Qy$ приводила систему (1.1) к треугольному виду:

$$Q' \dot{Q} = Q' A(\varphi) Q - T(\varphi, Q).$$

Здесь $T(\varphi, Q)$ – верхнетреугольная матрица, а символ $'$ обозначает транспонирование. Так как матрица $Q' S(\varphi) Q$ симметрическая, то справедливо представление

$$Q' S(\varphi) Q = D(\varphi, Q) + P(\varphi, Q) + P'(\varphi, Q),$$

где $D(\varphi, Q)$ – диагональная матрица, $P(\varphi, Q)$ – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Положив

$$T(\varphi, Q) = D(\varphi, Q) + 2P(\varphi, Q),$$

¹Минимальное множество \mathcal{M} такое, что существует хотя бы одна точка $\varphi_0 \in \mathbb{T}^m$ с нульмерным слоем: $\text{card}\{\mathcal{M}\varphi_0\} = 1$.

получаем следующую систему уравнений для матрицы Q :

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad Q' \dot{Q} = Q' R(\varphi) Q + P'(\varphi, Q) - P(\varphi, Q). \quad (2.1)$$

Эта система определяет поток Φ^t на $\mathbb{T}^m \times \text{SO}(n)$, который имеет минимальные множества. Например, если минимальное множество неприводимый тор², то при условии диофантовости вектора частот квазипериодических решений на торе система (1.1) приводима к системе с постоянной матрицей [13].

Тип и количество инвариантных множеств системы (2.1) требует ее дополнительного алгебраического анализа. Правая часть уравнения для Q принимает значения в $\mathfrak{so}(n)$ – алгебре Ли всех кососимметрических вещественных матриц порядка n . Координатная запись системы (2.1) зависит от способа параметризации группы $\text{SO}(n)$ и структуры алгебры $\mathfrak{so}(n)$. Центр L_0 алгебры $\mathfrak{so}(n)$ состоит из всех кососимметрических вещественных матриц вида (при нечетных n)

$$Y = \text{diag} \left(\theta_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \theta_{[n/2]} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right).$$

Другое название центра – максимальная торическая подалгебра алгебры $\mathfrak{so}(n)$. Тогда $\mathfrak{so}(n)$ является прямой суммой подпространств вида

$$L_\alpha = \{X \in \mathfrak{so}(n) : [Y, X] = \alpha(H)X, Y \in L_0\},$$

где $\alpha \in L_0^*$. Отсюда получается разложение Картана

$$\mathfrak{so}(n) = L_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \neq 0} L_\alpha \right) \quad (2.2)$$

(подробные детали этой конструкции можно найти в [14]).

Система (2.1) определяет решение с точностью до множителя из подгруппы стабильности $\text{SO}(n-1)$. Так как $S^{n-1} = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1)$, то естественно ввести следующее определение.

Определение 2.1. *Сужение потока, определяемого (2.1), на расслоение $\mathbb{T}^m \times S^{n-1}$ называется проективным расширением, ассоциированным с линейным расширением квазипериодического потока на торе.*

3. Группа $\text{SO}(3)$

В случае $\text{SO}(3)$ -расширения трехмерной системы (1.1) решение $Q(t, \varphi_0, Q_0)$ системы (2.1) определено с точностью до произвольного множителя из подгруппы стабильности $\text{SO}(2)$ группы $\text{SO}(3)$. Так как $S^2 = \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$, то проективный поток определен на многообразии $\mathbb{T}^m \times S^2$.

Запишем систему (2.1) в координатах (φ, θ) , где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – углы Эйлера. Матрица Q в этих координатах выглядит так

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 < \pi.$$

²Тор, содержащий всюду плотную траекторию.

Допустим, что $A(\varphi) = \Lambda(\varphi) + R(\varphi)$, где $\Lambda(\varphi) = \text{diag}(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \lambda_3(\varphi))$, а

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\varphi) & -r_2(\varphi) \\ r_1(\varphi) & 0 & -r_3(\varphi) \\ r_2(\varphi) & r_3(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) в этих координатах выглядит так³

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1(\varphi, \theta_1, \theta_2) & 0 \\ -f_1(\varphi, \theta_1, \theta_2) & 0 & f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2) \\ 0 & -f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Это матричное уравнение можно записать в виде следующей системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1, \theta_2) = r_1(\varphi) - \frac{\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)}{2} \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2) = r_3(\varphi) \cos \theta_1 - r_2(\varphi) \sin \theta_1 + \\ + \frac{\sin 2\theta_2}{2} (\cos^2 \theta_1 (\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)) - \lambda_1(\varphi) + \lambda_3(\varphi)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Пусть $\mathbf{F}(\varphi, \theta_1, \theta_2) = (f_1(\varphi, \theta_1, \theta_2), f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2))$. Так как $\mathbf{F}(\varphi, \theta_1, 0) = \mathbf{F}(\varphi, \theta_1, \pi)$, то правые части системы (3.2) определяют неособое векторное поле на расслоении $\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^2$, хотя первоначально система (3.2) рассматривалась на многообразии $\mathbb{T}^m \times S^2$. Этот феномен возникает после следующей “хирургической” операции: раздутия северного и южного полюсов сферы S^2 в окружности и затем склеивания этих окружностей. Такой же вывод можно сделать, рассматривая матрицу $A(\varphi)$ с произвольной симметрической частью⁴.

Напомним, что решения системы (3.2) на торе \mathbb{T}^{m+2} обладают свойством периодичности 2-го рода относительно начальных данных. Пусть компонента ω_1 вектора ω равна 1. Тогда система (3.2) записывается в виде неавтономной системы

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \tilde{\omega}, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(t, \phi, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 = f_2(t, \phi, \theta_1, \theta_2), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\phi = (\varphi_2, \dots, \varphi_m)$, $\tilde{\omega} = (\omega_2, \dots, \omega_m)$. Отображение монодромии для потока, порождаемого системой (3.3), это гомеоморфизм тора \mathbb{T}^{m+1} :

$$H(\phi, \theta) \rightarrow (\tau + \phi, \theta + \mathbf{u}(\phi, \theta)). \quad (3.4)$$

Здесь $\tau = 2\pi\tilde{\omega}$. Функция $\mathbf{u}(\phi, \theta)$ 2π -периодична по всем переменным и

$$\|\mathbf{u}(\phi, \theta)\| \leq 2\pi. \quad (3.5)$$

³Корректность этих выводов проверена в системе аналитических вычислений Maple.

⁴Это следствие того факта, что произвольная симметрическая матрица приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием.

4. Множество вращения слоя

Для системы на торе естественно поставить вопрос о существовании вектора вращения потока, порождаемого системой (3.2), которая определяет поток на расслоении с базой \mathbb{T}^m и слоем \mathbb{T}^2 . Геометрический вектор вращения для системы (3.2) это вектор (ω, ρ) , где двумерный вектор ρ – вектор вращения слоя \mathbb{T}^2 определяется так

$$\rho(\varphi, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t F(\varphi + \omega s, \theta(s, \varphi, \theta)) ds, \quad (4.1)$$

где $(\varphi + \omega t, \theta(t, \varphi, \theta))$ – решение (3.2). Обоснование этого определения состоит в доказательстве существования этого предела для всех (φ, θ) . Кроме того, естественно рассмотреть вопрос о его зависимости от начальных данных.

Рассмотрим сначала частные случаи. Предположим, что исходная система (1.1) блочно-диагональна. В этом случае система (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\varphi) - \frac{\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)}{2} \sin 2\theta_1, \\ \dot{\theta}_2 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Система (4.2) представляет собой декартово произведение двух независимых систем, причем вторая – тривиальное расширение квазипериодического потока, а первая – S^1 -расширение квазипериодического потока. Число вращения слоя ρ потока такой системы существует и не зависит от начальных данных [11]. Таким образом, в этом случае вектор вращения – $(\rho, 0)$.

Еще один крайний случай – матрица $A(\varphi)$ кососимметрична. Система (3.2) в этом случае такова

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = r_1(\varphi), \\ \dot{\theta}_2 = r_3(\varphi) \cos \theta_1 - r_2(\varphi) \sin \theta_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Эта система интегрируема в квадратурах и, очевидно, имеет вектор вращения слоя $(\rho, 0)$, где ρ – среднее значение функции $r_1(\varphi)$. Однако, динамика такой системы может быть достаточно сложной. Например, в работе [15] доказано существование множества \mathcal{B} типа G_δ в пространстве $C^0(\mathbb{T}^m, \text{so}(3))$ такого, что при $A(\varphi) \in \mathcal{B}$ поток, порождаемый системой (3.2), минимален⁵.

Вектор вращения слоя гомеоморфизма (3.4)

$$\rho(\phi, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} u(\phi_k, \theta_k) \quad (4.4)$$

совпадает с вектором вращения (4.1), если (ϕ_k, θ_k) – итерации точки (ϕ, θ) под действием этого гомеоморфизма. Следуя фундаментальной работе М. Эрмана [8], покажем, что предел (4.4) существует для всех θ .

⁵Доказательство этого факта существенно упрощается, если предположить, что интегралы от квазипериодических функций $r_2(\omega t)$, $r_3(\omega t)$ не являются квазипериодическими функциями.

Лемма 4.1. Пусть точка $\phi \in \mathbb{T}^{m-1}$ фиксирована. Тогда

1. вектор вращения $\rho(\phi, \theta)$ не зависит от θ ;
2. если предел (4.4) существует для некоторого θ_0 , то он существует для всех θ .

Доказательство. Используем неравенство (3.5). Тогда

$$\frac{1}{t} \|\mathbf{u}(\phi, \theta_1) - \mathbf{u}(\phi, \theta_2)\| \leq \frac{4\pi}{t}.$$

Следовательно, если предел существует, то он не зависит от θ .

Доказательство завершено.

Доказательство существования предела (4.4) основано на следующем результате ([8], § 5.4, лемма).

Лемма 4.2. Пусть \mathcal{X} – компактное пространство, G – гомеоморфизм \mathcal{X} , $h \in C^0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Пусть

$$\rho = \int_{\mathcal{X}} h(x) d\mu,$$

где μ – произвольная инвариантная относительно G нормированная мера. Тогда последовательность функций

$$\left\{ \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} h(G^k(x)) \right\}$$

равномерно сходится к ρ .

Теорема 4.1. Для любых ϕ и θ предел (4.4) существует и не зависит от выбора точки (ϕ, θ) .

Доказательство. Если μ_1 и μ_2 – две инвариантные нормированные меры отображения монодромии H , то обе они проектируются в единственную инвариантную меру ν (меру Хаара) на торе \mathbb{T}^{m-1} . Согласно эргодической теореме Биркгофа-Хинчина существует множество полной меры $B \subset \mathbb{T}^{m-1}$ такое, что если $(\phi, \theta) \in B \times \mathbb{T}^2$, то

$$\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{u}(H^k(\phi, \theta)) \rightarrow \rho = (\rho_1, \rho_2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где ρ не зависит от (ϕ, θ) . Так как множество $B \times \mathbb{T}^2$ является множеством полной меры относительно μ_1 и μ_2 , то

$$\int_{\mathbb{T}^{m+1}} \mathbf{u}(\phi, \theta) d\mu_1 = \int_{\mathbb{T}^{m+1}} \mathbf{u}(\phi, \theta) d\mu_2 = \rho.$$

Применяя лемму 4.2 к обоим компонентам вектора ρ , получаем утверждение теоремы. **Доказательство завершено.**

Замечание 4.1. Еще в одной известной работе М. Эрмана [16] рассматривается проблема существования единственного вектора вращения для гомеоморфизмов торов. Единственность такого вектора вращения в данной ситуации существенно

основано на лемме 4.2, которая здесь справедлива, так как отображение монодромии H гомотопно тождественному. В упомянутой работе [16] построены примеры отображений тора, не гомотопных тождественному, когда сходимость в лемме 3.2 не будет равномерной. Конструкции М. Эрмана основаны на результатах известной работы Х. Фюрстенберга [17].

Теперь, используя теорию асимптотических циклов Шварцмана [1], покажем, что у вектора вращения слоя ρ компонентна $\rho_2 = 0$. Численный эксперимент показывает справедливость этого предположения (см. рисунок 4.1, где показан график зависимости от параметра ε вектора вращения системы (3.2) с полиномиальной зависимостью от φ).

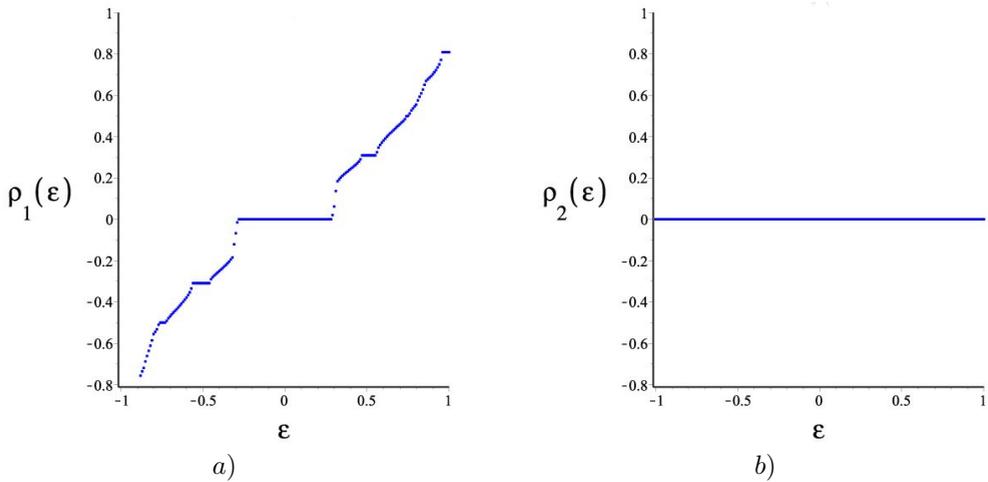


Рис. 4.1. Компоненты вектора вращения слоя системы вида (3.2): *a*) число вращения слоя 2-го уравнения системы (3.2), *b*) число вращения слоя 3-го уравнения системы (3.2)

Fig. 4.1. Components of the layer rotation vector of the system of the type (3.2): *a*) the layer rotation number of the 2nd equation of the system (3.2), *b*) the layer rotation number of the 3rd equation of the system (3.2)

Рассмотрим конструкцию Шварцмана для потока $\{\Phi^t\}$ на многообразии $\mathcal{Y} = \mathbb{T}^m \times \text{SO}(n)$. Инвариантная мера потока μ определяет гомоморфизм групп $\chi_\mu : H^1(\mathcal{Y}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Группа $H^1(\mathcal{Y}, \mathbb{Z})$ изоморфна фактор-пространству непрерывных отображений $h : \mathcal{Y} \rightarrow S^1$ по отношению изотопической эквивалентности. Для любого непрерывного отображения h можно построить непрерывную функцию $\alpha : \mathbb{R} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $h(\Phi^t(y)) = h(y)e^{i\alpha(t,y)}$ и $\alpha(t+s, y) = \alpha(t, \Phi^s(y)) + \alpha(s, y)$ (1-коцикл отображения h). По теореме Биркгофа-Хинчина для любой инвариантной меры предел $\alpha^*(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1}\alpha(t, y)$ существует для почти всех $y \in \mathcal{Y}$ относительно меры μ и

$$\int_{\mathcal{Y}} \alpha^*(y) d\mu = \int_{\mathcal{Y}} \alpha(1, y) d\mu.$$

Тогда гомоморфизм χ_μ определяется равенством

$$\chi_\mu[h] = \int_{\mathcal{Y}} \alpha^*(y) d\mu,$$

где $[h]$ обозначает изотопический класс эквивалентности h . Образ W_μ гомоморфизма χ_μ называется группой μ -кручения (μ -асимптотическим циклом). Если $W_\mu = 0$, то говорят, что векторное поле μ -гомологически тривиально. Если $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, то $W_\mu = \rho_\mu \mathbb{Z}$ для некоторого $\rho_\mu > 0$. В этом случае поле называется μ -гомологически рациональным. Во всех других случаях, $W_\mu = \rho_1 \mathbb{Z} + \rho_2 \mathbb{Z} + \dots + \rho_k \mathbb{Z}$, где $\rho_\mu = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ – вектор с рационально независимыми компонентами и $m \leq k \leq m + \ell$, где ℓ – размерность максимальной торической подалгебры алгебры Ли группы $SO(n)$. В нашем случае $\ell = 1$, так как размерность максимальной торической подалгебры алгебры $\mathfrak{so}(3)$ равна единице.

Теорема 4.2. *Множество вращения системы (2.1) состоит из одного вектора $(\rho, 0)$.*

Доказательство. Матрицы максимальной торической подалгебры алгебры $\mathfrak{so}(3)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, учитывая, что определение Шварцмана чисел вращения совпадает с обычным в случае потоков на торе, получаем

$$\rho_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f_1(\omega s, \theta(s)) ds = \int_{\mathcal{Y}} f_1(\omega, \theta) d\mu,$$

$$\rho_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f_2(\omega s, \theta(s)) ds = \int_{\mathcal{Y}} f_2(\omega, \theta) d\mu = 0,$$

так как эти пределы не зависят от выбора инвариантной меры μ .

Доказательство завершено.

Замечание 4.2. *Достоинство конструкции Шварцмана в том, что она применима для любого непрерывного потока на компактном метрическом пространстве. С другой стороны эта конструкция зависит от выбора инвариантной меры потока.*

Отметим, что прообраз понятия асимптотического цикла можно найти в работе Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [18], посвященной связям эргодической теории и топологической динамики. Действительно, один из результатов этой работы таков: если $f(y)$ – непрерывная функция на метрическом компакте \mathcal{Y} , на котором действует непрерывный поток Φ^t с инвариантной мерой μ , то множество точек $y \in \mathcal{Y}$ таких, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t (\Phi^s(y)) ds = \int_{\mathcal{Y}} f(y) d\mu,$$

является множеством⁶ полной меры.

⁶Общепринятое название – множество квазирегулярных точек потока.

Для оценки числа минимальных множеств системы (2.1) рассмотрим комплексную двумерную линейную систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad x \in \mathbb{C}^2 \quad (4.5)$$

приводится к треугольному виду с помощью замены $x = Uy$, где $U \in \text{SU}(2)$, если U является решением системы⁷

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad U^* \dot{U} = U^* R(\varphi)U + P^*(\varphi, U) - P(\varphi, U),$$

которая определяет поток на $\mathbb{T}^m \times \text{SU}(2)$. Сужение этого потока на $\mathbb{T}^m \times S^2$ – проективный поток. Согласно теореме 2 из [19] он имеет либо одно, либо два, либо континуум минимальных множеств. Аналогичное заключение справедливо и для потока, определяемого (3.2), так как группа $\text{SO}(3)$ изоморфна фактор-группе $\text{SU}(2)/\{\pm E\}$.

5. Заключительные замечания

Используя известное представление матриц из $\text{SU}(2)$, можно записать уравнения проективного расширения системы (4.5) в сферических координатах. Они являются системе уравнений на торе \mathbb{T}^{m+2} , подобной системе (3.2). Так как максимальная торическая подалгебра алгебры $\mathfrak{su}(2)$ имеет размерность 1, то множество вращения слоя – вектор вида $(\rho, 0)$.

При $n > 3$ проективное расширение, соответствующее (2.1), порождает систему на торе \mathbb{T}^{m+n-1}

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = F(\varphi, \theta), \quad (5.6)$$

где θ – вектор сферических координат, $F(\varphi, \theta)$ – тригонометрический полином от переменной θ с периодическими по φ коэффициентами⁸. Описание динамики этой системы помогло бы решить ряд задач, связанных с теорией линейных расширений квазипериодических потоков. Например, можно рассмотреть следующие гипотезы:

1. Множество вращения состоит из единственного вектора (ω, ρ) .
2. Существует преобразование, возможно формальное, системы (5.6) к виду⁹

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\vartheta} = \rho.$$

Если эти гипотезы справедливы, то система (1.1) гладким (аналитическим) преобразованием приводится к системе с постоянной треугольной матрицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. Vol. 66. pp. 270–284.
2. Арансон С. Х., Гринес В. З. О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Матем. сб., 1973. Т. 90, № 3. С. 372–402.

⁷Здесь $R^*(\varphi) = -R(\varphi)$, $P(\varphi, U)$ – верхнетреугольная матрица с чисто мнимой главной диагональю.

⁸Построение функции F можно автоматизировать, если использовать системы символьных вычислений.

⁹Результаты КАМ-теории здесь не применимы, так как вектор вращения резонансный.

3. Pollicott M. Rotation sets for homeomorphisms and homology // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331, n. 2. P. 881–894.
4. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. Кипенев. Штаница. 1984. 290 с.
5. Perron O. Über eine Matrixtransformatin // Math. Zeitschr. 1930. Vol. 32. pp. 465–473.
6. Sacker R.J., Sell G.R. A spectral theory for linear differential systems // J. Diff. Equat. 1978. V. 27. P. 320–358.
7. Johnson R. Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials // Commun. Math. Phys. 1982. Vol. 84. pp. 403–438.
8. Herman M. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques // Commentarii Mathematici Helvetici. 1983. Vol. 58. pp. 453–502.
9. Виноград П. Э. К проблеме Н. П. Еругина // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 4. С. 632–638.
10. Johnson R.A. Two-dimensional, almost periodic linear systems with proximal and recurrent behavior // Proceedings of American Math. Soc. 1981. V. 82, n. 3. P. 417–422.
11. Веремеиук В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t, x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1073–1076.
12. Перов А.И., Эгле И.Ю. К теории Пуанкаре-Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 801–810.
13. Главан В.А. Аналитическая нормальная форма линейных квазипериодических систем треугольного вида // Дифференциальные уравнения и математическая физика. Математические исследования. 1989. вып. 106. С. 50–58.
14. Хампфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО. 2003. 212 с.
15. Tkachenko V.I. On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions // EJTDE, Proc. 6th Coll. QTDE. 2000. No. 29. 11 p.
16. Herman M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations // Publications mathématiques de l’I.H.É.S. 1979. Vol. 49. pp. 2–233.
17. Furstenberg H. Strict Ergodicity and Transformation of the Torus // American Journal of Mathematics. 1961. Vol. 83, No. 4. pp. 573–601.
18. N. Kryloff and N. Bogoliouboff, La théorie générale de la mesure dans son application à l’étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. of Math. 1937. Vol. 38. pp. 65–113.

19. Коломиец М.Л., Сахаров А.Н. Классификация проективных расширений квазипериодических потоков. Труды VII всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород. 2008. Т. 1. С. 295–299.

*Поступила 15.02.2025; доработана после рецензирования 27.04.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. Schwartzman, “Asymptotic cycles”, *Ann. of Math*, **66** (1957), 270–284.
2. Aranson S. H., Grines V. Z., “On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive dynamical systems)”, *Math. Sb.*, **90**:3 (1973), 372–402.
3. Pollicott M., “Rotation sets for homeomorphisms and homology”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **331**:2 (1992), 881–894.
4. I.U. Bronshtein, *Extensions of minimal transformation groups*, Shtinitsa, Kishenev, 1975, 311 p.
5. O. Perron, “Über eine Matrixtransformatin”, *Math. Zeitschr.*, **32** (1930), 465–473.
6. Sacker R.J., Sell G.R., “A spectral theory for linear differential systems”, *J. Diff. Equat.*, **27** (1978), P. 320–358.
7. R. Johnson, J. Moser, “The Rotation Number for Almost Periodic Potentials”, *Commun. Math. Phys*, **84** (1982), 403–438.
8. M. Herman, “Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **58** (1983), 453–502.
9. Vinograd R. E., “On the problem of N. P. Erugin”, *Differential equations*, **11**:4 (1975), 632–638.
10. Johnson R.A., “Two-dimensional, almost periodic linear systems with proximal and recurrent behavior”, *Proceedings of American Math. Soc.*, **82**:3 (1981), 417–422.
11. V.V. Veremenyuk, “Existence of a rotation number for the equation $\dot{x} = \lambda(t, x)$ with right-hand side periodic in x and almost periodic in t ”, *Differ. equations*, **27**:6 (1991), 1073–1076.
12. Perov A.I., Egle I.Yu., “On the Poincare-Danjoy theory of multidimensional differential equations”, *Differential Equations*, **8**:5 (1972), 801–810.
13. V.A. Glavan V.A., “Analytical normal form of linear quasiperiodic systems triangular form”, *Differential equations and mathematical physics. Mathematical research*, 1989, no. 106, 50–58.

14. J. Humphreys, *Introduction to the theory of Lie algebras and their representations*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972, 172 p.
15. V.I. Tkachenko, “On reducibility of linear quasiperiodic systems with bounded solutions”, *EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE*, 2000, no. 29, 11.
16. M. Herman, “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”, *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, **49** (1979), 2–233.
17. H. Furstenberg, “Strict Ergodicity and Transformation of the Torus”, *American Journal of Mathematics*, **83**:4 (1961), 270–284.
18. N. Kryloff, N. Bogoliouboff, “La théorie générale de la mesure dans son application à l’étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire”, *Ann. of Math*, **38** (1937), 65–113.
19. M.L. Kolomiets, A.N. Sakharov, “Classification of projective extensions of quasiperiodic flows”, *Proceedings of the VII All-Russian scientific conference “Nonlinear oscillations of mechanical systems”*, *Nizhny Novgorod*, **1** (2008), 295–299.

Submitted 15.02.2025; Revised 27.04.2025; Accepted 28.05.2025

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.53

Ранги планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка

Д. В. Соломатин

ФГБОУ ВО «ОмГПУ» (г. Омск, Российская Федерация)

Аннотация. В данной статье проводится классификация многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка, по их рангам планарности. Цель исследования заключается в установлении полного перечня возможных значений рангов планарности и выявлении основных факторов, определяющих возможность плоской укладки графов Кэли свободных полугрупп рассматриваемых многообразий. Применяются методы теории графов и алгебры тождеств, используя инновационные алгоритмические подходы для проверки равенств посредством автоматизированных систем доказательства Prover9 и Mace4. Существующие плоские укладки для графов Кэли рассматриваемых полугрупп представлены на рисунках. В случае отсутствия планарности указывается конкретный обнаруженный запрещенный минор: полный граф пятого порядка или полный двудольный граф. Особое внимание уделяется статистической обработке полученных результатов методом главных компонент и построению иерархической кластеризации. На рисунках приведены иерархические деревья, факторные плоскости, корреляционные круги, столбцевые диаграммы разложения общей инерции по координатным осям. Хотя и ранее планарность графа Кэли свободной полугруппы многообразия интуитивно связывалась со степенью сложности определяющих тождеств, в данной работе эта зависимость впервые получает строгое количественное выражение, приведенное в таблицах. В рамках исследования вводятся вспомогательные параметры, что позволяет значительно повысить объяснительную силу модели и разделить многообразия на группы по топологическим характеристикам. В результате анализа установлено, что ведущими факторами, влияющими на значение рангов, являются параметры, отражающие разности позиций символа «z» в тождествах базисного набора.

Ключевые слова: граф Кэли, идемпотентные и неидемпотентные полугруппы, перестановочные и неперестановочные полугруппы, полугрупповые многообразия, ранги планарности, метод главных компонент

Для цитирования: Соломатин Д. В. Ранги планарности полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 185–228. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228

Об авторах:

Соломатин Денис Владимирович, к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и методики обучения математике, ФГБОУ ВО «ОмГПУ» (644099, Россия, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, solomatin_dv@omgpu.ru

© Соломатин Д. В.



MSC2020 20M07

Planarity ranks of semigroup varieties generated by semigroups of order four

D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University (Omsk, Russian Federation)

Abstract. This paper classifies semigroup varieties generated by fourth-order semigroups according to their planarity ranks. The aim of the study is to establish a complete list of possible values of planarity ranks and to identify the main factors determining the possibility of planar stacking of Cayley graphs of free semigroups of the considered varieties. Methods from graph theory and algebras of identities are applied, using innovative algorithmic approaches to verify equality via the automated proof systems Prover9 and Mace4. The existing flat graph stackings for the Cayley graphs of the semigroups under consideration are shown in the figures. If there is no planarity, the particular forbidden minor discovered is indicated: a complete fifth-order graph or a complete bipartite graph containing three vertices in each of the parts. Special attention is paid to the statistical processing of the obtained results by the principal components analyse and the construction of hierarchical clustering. The figures show hierarchical trees, factor planes, correlation circles, and column diagrams of general inertia decomposition along coordinate axes. Although the planarity of the Cayley graph for a free semigroup of a manifold was previously intuitively associated with the complexity degree of the defining identities, in this paper this dependence is for the first time given a rigorous quantitative expression, depicted in tables. Within the framework of the study, auxiliary parameters are introduced, which allows to significantly increase the explanatory power of the model and divide manifolds into groups according to topological characteristics. As a result of the analysis it is established that the leading factors influencing the value of ranks are the parameters reflecting the differences of positions of the symbol «z» in the basis identities.

Keywords: Cayley graph, idempotent and non-idempotent semigroups, permutable and non-permutable semigroups, semigroup varieties, planarity ranks, principal component analysis

For citation: *D. V. Solomatin. Planarity ranks of semigroup varieties generated by semigroups of order four. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 27:2(2025), 185–228. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.185-228*

About the authors:

Denis V. Solomatin, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Omsk State Pedagogical University (14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, solomatin_dv@omgpu.ru

1. Введение

Тематика настоящей статьи берет своё начало с представленной Л.М. Мартыновым развёрнутой мотивации к изучению понятия ранга планарности для полугрупповых многообразий [1]. Напомним, что рангом планарности полугруппового многообразия

называется наибольшее количество образующих свободной полугруппы данного многообразия, относительно которых граф Кэли этой полугруппы планарен. Исторически первая полная классификация полугрупповых многообразий по рангам планарности была построена в классе многообразий коммутативных моноидов [2]. Сравнительно недавно была завершена классификация многообразий порожденных полугруппами третьего порядка [3]. Продолжая исследования в направлении увеличения порядка порождающих полугрупп зададимся вопросом классификации многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка с целью получения в дальнейшем возможного обобщения на полугруппы произвольного порядка.

Изучение многообразий полугрупп, порожденных полугруппами четвертого порядка, важно по ряду объективных причин. Полугруппы четвертого порядка являются одними из самых простых нетривиальных алгебраических структур. Изучая их, мы получаем представление о фундаментальных свойствах и поведении более сложных полугрупп и алгебраических систем. Многообразия полугрупп определяются наборами тождеств или уравнений, которым должны удовлетворять элементы полугрупп. Исследование полугрупп четвертого порядка помогает в выявлении и понимании этих эквациональных базисов, которые могут применяться к более крупным и сложным полугруппам. Изучение подмногообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка, способствует более широкому пониманию решеточной структуры многообразий полугрупп. Это включает в себя выявление того, как различные подмногообразия соотносятся друг с другом и как они вписываются в общую классификацию полугрупп. Знания, полученные при изучении полугрупп порядка четыре, могут иметь применение в других областях математики, таких как теория групп, теория колец и даже теоретическая информатика. Сосредоточившись на полугруппах порядка четыре, попробуем заложить прочную основу для изучения более сложных алгебраических структур и их приложений.

Полугруппы четвертого порядка включают ряд разнообразных структур, таких как коммутативные и некоммутативные полугруппы, регулярные и нерегулярные полугруппы, идемпотентные и неидемпотентные полугруппы. Вопросы планарности графов Кэли полугрупп некоторых из перечисленных классов всесторонне изучались и ранее, например, в серии работ [4–6]. Подобное разнообразие делает рассматриваемые полугруппы идеальными объектами для понимания того, как различные структурные свойства влияют на поведение и классификацию многообразий полугрупп по рангам планарности. Изучение этих небольших полугрупп помогает в разработке подробной системы классификации, так как понимая все возможные полугруппы заданного порядка, можно классифицировать их в различные разновидности, эти классификации послужат основой для понимания более сложных полугрупп и их взаимосвязей. Малые полугруппы, такие как полугруппы четвертого порядка, поддаются вычислениям, что позволяет исследователям использовать алгоритмические методы для исчерпывающего изучения их свойств. Этот вычислительный подход помогает формулировать гипотезы и доказывать теоремы методами математической статистики, которые невозможно реализовать вручную. Полугруппы могут моделировать различные процессы реального мира, такие как конечные автоматы в информатике, биологические процессы и экономические системы. Полугруппы четвертого порядка предоставляют простые, но нетривиальные модели для таких явлений. Понимание этих моделей может привести к пониманию более сложных систем, где полугруппы более высокого порядка имеют более сложные взаимосвязи. Кроме того, изучение полугрупп пересекается с другими областями математики, такими как теория колец, теория решеток и топология.

Полугруппы четвертого порядка часто служат фундаментальными примерами в этих связях. Например, понимание многообразий, порожденных этими полугруппами, может пролить свет на структуру определенных колец или топологию алгебраических многообразий.

В качестве дополнительной мотивации к изучению графов Кэли свободных полугрупп многообразий полугрупп, порожденных полугруппами четвертого порядка, осуществим краткий обзор передовых статей в русле обозначенной тематики. Работа [7] предоставляет глубокий анализ регулярности графов Кэли, полученных из полугрупп, что имеет решающее значение при изучении устойчивости структурных свойств графов. Авторы детально описывают алгоритмические подходы для классификации и доказательства регулярности, что позволяет использовать их методы в приложениях. Соотношение между регулярностью и топологическими ограничениями (например, через критерии раскраски или ограничения числа граней) становится особенно значимым в случае конечных алгебраических систем, таких как полугруппы четвёртого порядка. В работе [8] предложен подход, основанный на анализе графов, сформированных по принципу пересечения мощностей в циклических группах. Несмотря на очевидные различия между группами и полугруппами, применённые методы позволяют выявить пересекающиеся подструктуры, что используется при изучении многообразий, полученных из конечных полугрупп. Сопоставляя эти подходы с рассматриваемой темой, можно заметить, что комбинация циклических свойств и пересечений влияет на возможность планарного представления.

Авторы исследования [9] вводят понятие направленных сильно регулярных графов Кэли, построенных на основе дициклических групп. Такой взгляд расширяет традиционные рамки симметричных конструкций, демонстрируя, что даже при наличии направления в рёбрах сохраняются определённые регулярные свойства. При рассмотрении конечных полугрупп идеи данной работы позволяют провести параллели и заимствовать методы для анализа графа свободной полугруппы многообразия. Для оценки планарности часто обращаются к раскраске графов. В этом контексте статья [10] становится особенно ценной. Авторы показывают, как минимальная раскраска графов Кэли может служить индикатором топологической сложности, а установленные ими критерии позволяют оценить, насколько близка данная структура к планарной. Эти результаты напрямую перекликаются с поставленной нами задачей определения рангов планарности, поскольку позволяют установить количественные границы и условия для существования планарного графа.

Ещё один важный вклад в аргументацию исследований графов полугрупп вносит работа [11], в которой приводится характеристика конечно-простых диграфов, ассоциированных с полугруппами. Такой анализ позволяет выделить фундаментальные компоненты, ответственные за топологические свойства графа. Применённые методы декомпозиции и структурного анализа позволяют перенести их на изучение многообразий порожденных полугруппами четвёртого порядка, где простота структуры становится одним из ключевых критериев планарности. Работа [12] содержит вариацию на тему графов Кэли для циклических групп составного порядка. Исходя из результатов данной работы, можно утверждать, что даже небольшое изменение на базе стандартного графового представления способно существенно сказаться на топологических свойствах полученной структуры. Этот пример демонстрирует, как аналогичные модификации могут быть применены для изучения влияния композиционных свойств полугрупп четвёртого порядка на ранги планарности их многообразий.

Интересный подход к анализу плоских графов реализуется в [13], где рассматри-

вается гипотеза Руднефа в четырёхмерном пространстве. Несмотря на то, что тема исследования затрагивает вопросы многомерной геометрии, методы экспериментальной математики, применённые авторами, дают ценное представление о том, как пространственные соображения могут быть интегрированы в анализ планарных структур. Переход от четырёхмерного случая к изучению плоских полугрупп позволяет выработать новые гипотезы относительно соотношения размерности и топологической простоты графа. Наконец, статья [14] демонстрирует, как геометрическое моделирование с использованием конфигураций соприкасающихся прямоугольников может оказаться мощным инструментом для анализа дискретных структур. Подход, основанный на визуализации касания и пространственного расположения объектов, позволяет количественно оценивать критерии планарности, что натолкнуло нас на мысль о статистической интерпретации рангов планарности многообразий, возникающих из конечных полугрупп. Здесь геометрическая интуиция становится дополнением строгому алгебраическому анализу.

Таким образом, интеграция всех этих работ позволяет создать прочный теоретический фундамент исследования рангов планарности многообразий полугрупп, порождённых полугруппами четвёртого порядка. Объединение результатов по анализу структур графов, методам раскраски, алгоритмическим подходам к определению регулярности и геометрической интерпретации сложных дискретных объектов способствует формированию всесторонней методологии. Такой мультидисциплинарный подход не только расширяет теоретическую базу нашей работы, но и открывает перспективы для дальнейших эмпирических исследований и разработок новых методов в абстрактной алгебре и дискретной математике.

Резюмируя сказанное приходим к выводу: находясь в русле актуальной международной тематики полугруппы четвертого порядка доступны студентам и начинающим исследователям, что делает их прекрасными учебными пособиями. Их графы Кэли доставляют конкретные примеры, иллюстрирующие абстрактные концепции в теории полугрупп и алгебре. Работа с этими небольшими структурами помогает развить интуицию и фундаментальные знания, которые необходимы для изучения более сложных тем в математике. Разрабатывать новые и совершенствовать существующие алгоритмы для классификации и анализа полугрупп можно тестируя их на полугруппах четвертого порядка. Затем эти алгоритмы распространяются на полугруппы более высоких порядков, ибо на основе глубокого понимания свойств и особенностей малых полугрупп, нередко так формируются идеи, применимые к более широким классам алгебраических структур. Наконец, изучение полугрупп четвертого порядка часто приводит к формулированию новых гипотез и открытых проблем, решение которых способствует новым математическим открытиям.

2. Основные определения теории планарных графов Кэли, обозначения и вспомогательные результаты о конечно базированных многообразиях, порождённых полугруппами четвертого порядка

Напомним некоторые определения и теоремы из теории графов и теории полугрупп используемые в контексте систематических исследований рангов планарности полугрупповых многообразий [15].

Определение 2.1. *Плоским графом называется обыкновенный граф, каждой*

вершине которого поставлена в соответствие точка плоскости, а рёбрам – непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек кроме возможно общих вершин.

Определение 2.2. Два графа называются изоморфными друг другу тогда и только тогда, когда существует биективное отображение множества вершин одного графа на множество вершин другого графа сохраняющее отношение смежности вершин.

Определение 2.3. Всякий граф изоморфный плоскому называется планарным.

Определение 2.4. Два графа называются гомеоморфными друг другу, если они могут быть получены из одного и того же графа путём подразделения его рёбер.

Теорема 2.1. Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа гомеоморфного полному графу K_5 , содержащему 5 вершин, или полному двудольному графу $K_{3,3}$, содержащему по 3 вершины в каждой из долей.

Определение 2.5. Графом Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называем ориентированный мультиграф $\text{Cay}(S, X)$ с помеченными ребрами, множество вершин которого совпадает с S , а ребро начинающееся в вершине a и заканчивающееся в вершине b помечено элементом $x \in X$ тогда и только тогда, когда в полугруппе S имеет место равенство $ax = b$. Левый граф Кэли $LCay(S, X)$ определяется двойственным образом путём замены равенства $ax = b$ равенством $xa = b$.

Определение 2.6. Основой [левого] графа Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называем обыкновенный граф $SCay(S, X)$ $[SLCay(S, X)]$ полученный из исходного $\text{Cay}(S, X)$ $[LCay(S, X)]$ удалением меток, петель, направленности рёбер и заменой кратных дуг одним ребром соединяющим те же вершины.

Определение 2.7. Говорим, что полугруппа S допускает планарный [левый] граф Кэли, если относительно некоторого минимального множества неразложимых образующих X граф $SCay(S, X)$ $[SLCay(S, X)]$ имеет плоскую укладку.

Определение 2.8. Рангом планарности многообразия $\text{var}\{\sigma\}$ заданного системой тождеств σ называется такое натуральное число $r_\pi(\text{var}\{\sigma\}) = n$, что свободная n -порожденная полугруппа многообразия $\text{var}\{\sigma\}$, обозначаемая в дальнейшем как $F_n(\text{var}\{\sigma\})$, допускает планарный граф Кэли относительно n -элементного множества образующих, но относительно $(n + 1)$ -элементного множества образующих свободная $(n + 1)$ -порожденная полугруппа $F_{n+1}(\text{var}\{\sigma\})$ многообразия $\text{var}\{\sigma\}$ уже не допускает планарного графа Кэли. В случае, когда для нетривиального полугруппового многообразия $\text{var}\{\sigma\}$ такого натурального n не существует говорим, что это многообразие имеет бесконечный ранг планарности и пишем $r_\pi(\text{var}\{\sigma\}) = \infty$.

Определение 2.9. Системе тождеств σ поставим в соответствие двойственную систему $\overleftarrow{\sigma}$ всякое тождество которой сформировано из тождеств $u = v$ системы σ путём написания слов u и v в обратной последовательности букв.

Определение 2.10. Многообразие (эквациональный класс) универсальных алгебр называется конечно базлируемым, если существует конечное подмножество тождеств многообразия, из которого следуют все остальные тождества.

Определение 2.11. Алгебра называется конечно базлируемой, если многообразие, которое она порождает, конечно базлируемо.

В работе [16] перечислены все конечно базлируемые многообразия, порожденные полугруппами четвертого порядка.

Лемма 2.1. [16]. Все возможные конечные базисы из тождеств от двух переменных для полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка с точностью до изоморфизма и с точностью до антиизоморфизма перечислены ниже. Первые девять формируют базисы тождеств многообразий, порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка:

- m1) $S(4, 4)$ и $S(6, 17)$ имеют базис $\{xux = x^2y = xy^2 = xy\}$;
- m2) $S(4, 11)$ имеет базис $\{x^2y = xy, xy^2 = xuy\}$;
- m3) $S(4, 21)$ имеет базис $\{x^2 = x^3, xux = x^2yx = xy^2x = xuyx^2 = xuyx = x^2y^2 = yxy\}$;
- m4) $S(4, 22)$ имеет базис $\{x^2 = x^3, xux = x^2yx = xy^2x = xuyx^2 = xuyx = yxy\}$;
- m5) $S(4, 23)$ имеет базис $\{x^2 = x^3, xux = yx^2, x^2y^2 = y^2x^2\}$;
- m6) $S(4, 25)$ имеет базис $\{xy = xy^2, xux = x^2y\}$;
- m7) $S(5, 2)$ имеет базис $\{x^2 = x^3, xux = x^2y\}$;
- m8) $S(6, 23)$ имеет базис $\{x = x^3, xux = x^2y\}$;
- m9) $S(6, 25)$ имеет базис $\{x = x^3, xux^2 = xy, xy^2x = xuyx\}$.

Далее запишем конечные базисы тождеств для многообразий, порожденных остальными 116 полугруппами четвертого порядка.

Коммутативные:

- m10) $S(5, 9)$, $S(5, 12)$, $S(5, 18)$, $S(6, 8)$ и $S(6, 11)$ имеют базис $\{xy = yx, x = x^2\}$;
- m11) $S(7, 25)$ имеет базис $\{xy = yx, xy^2 = x\}$;
- m12) $S(5, 14)$, $S(6, 13)$, $S(6, 18)$, $S(7, 8)$, $S(7, 10)$, $S(7, 12)$ и $S(7, 18)$ имеют базис $\{xy = yx, x = x^3\}$;
- m13) $S(6, 24)$ и $S(7, 22)$ имеют базис $\{xy = yx, x = x^4\}$;
- m14) $S(8, 1)$ имеют базис $\{xy = yx, xy^4 = x\}$.
- m15) $S(3, 3)$, $S(3, 21)$, $S(3, 24)$, $S(3, 25)$, $S(5, 11)$, $S(6, 2)$, $S(6, 4)$ и $S(6, 10)$ имеют базис $\{xy = yx, xy^2 = xy\}$;
- m16) $S(3, 10)$ имеет базис $\{xy = yx, xyz = x^2\}$;
- m17) $S(3, 1)$ имеет базис $\{xy = yx, xy^2 = xy, x^2 = y^2\}$;
- m18) $S(3, 13)$, $S(4, 15)$, $S(4, 17)$, $S(4, 19)$, $S(4, 20)$, $S(5, 5)$, $S(5, 6)$ и $S(6, 7)$ имеют базис $\{xy = yx, x^2 = x^3\}$;
- m19) $S(4, 3)$, $S(6, 16)$, $S(6, 21)$, $S(7, 5)$, $S(7, 9)$ и $S(7, 15)$ с базисом $\{xy=yx, xy^3=xy\}$;
- m20) $S(7, 3)$, $S(7, 13)$ и $S(7, 23)$ имеют базис $\{xy = yx, x^2 = y^2, xy^3 = xy\}$;
- m21) $S(5, 8)$, $S(7, 7)$ и $S(7, 17)$ имеют базис $\{xy = yx, x^2 = x^4\}$;
- m22) $S(7, 21)$ и $S(7, 24)$ имеют базис $\{xy = yx, xyz^3 = xy\}$;
- m23) $S(3, 17)$ и $S(6, 3)$ имеют базис $\{xy = yx, xyz^2 = xyz\}$;
- m24) $S(3, 11)$ и $S(3, 16)$ имеют базис $\{xy = yx, xyz = x^3\}$;
- m25) $S(4, 18)$ имеет базис $\{xy = yx, x^3 = x^4\}$;
- m26) $S(3, 2)$ и $S(3, 20)$ имеют базис $\{xy = yx, x^3 = y^3, xyz^3 = xyz\}$;
- m27) $S(7, 4)$ и $S(7, 14)$ имеют базис $\{xy = yx, xy^2 = xz^2, xyz^3 = xyz\}$;
- m28) $S(3, 12)$ имеет базис $\{xy = yx, x^2y = xy^2, xyzw = x^4\}$.

Перестановочные:

m29) $S(3, 18)$ имеет базис $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = xy^2\}$;

m30) $S(3, 4)$ имеет базис $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = x^2\}$;

m31) $S(3, 5)$ имеет базис $\{xyz = xzy, xyz = yxz, xyz = x^3\}$;

m32) $S(7, 2)$ имеет базис $\{xy = x\}$;

m33) $S(5, 10), S(5, 13), S(5, 16), S(5, 17), S(5, 20), S(5, 22), S(5, 23), S(6, 9), S(6, 12)$

и $S(6, 15)$ имеют базис $\{xyz = xzy, x = x^2\}$;

m34) $S(7, 20)$ имеет базис $\{xyz = xzy, xy^2 = x\}$;

m35) $S(5, 25)$ и $S(7, 11)$ имеют базис $\{xyz = xzy, x = x^3\}$;

m36) $S(3, 9), S(4, 12)$ и $S(4, 14)$ имеют базис $\{xy = x^2\}$;

m37) $S(3, 23), S(4, 1), S(4, 13), S(5, 19)$ и $S(6, 6)$ имеют базис $\{xyz = xzy, x^2y = xy, xy^2 = xy\}$;

m38) $S(4, 9)^{\text{op}}, S(4, 24)$ и $S(5, 3)$ имеют базис $\{xyz = xzy, xy^2 = xy\}$;

m39) $S(5, 1)$ и $S(5, 7)$ имеют базис $\{xyz = xzy, x^2 = x^3\}$;

m40) $S(3, 19)$ имеет базис $\{xyz = xzy, xyz = x^3\}$;

m41) $S(3, 15)$ и $S(4, 16)$ имеют базис $\{xyz = yxz, x^2 = x^3, x^2y^2 = y^2x^2\}$;

m42) $S(3, 6), S(3, 7), S(3, 8), S(3, 22), S(4, 2), S(4, 6), S(4, 7)$ и $S(6, 5)$ имеют базис $\{xyz = yxz, x^2y = xy, xy^2 = yx^2\}$;

m43) $S(4, 10), S(7, 6)$ и $S(7, 16)^{\text{op}}$ имеют базис $\{xyz = yxz, x^2y^2 = y^2x^2, x^3y = xy, xy^3 = yx^3\}$;

m44) $S(7, 19)$ имеет базис $\{xyz = xz, x = x^2\}$;

m45) $S(5, 24)$ имеет базис $\{xyxz = x^2yz, xyzy = xzy^2, x = x^2\}$;

m46) $S(4, 5)$ и $S(4, 8)$ с базисом $\{xyxz = x^2yz, xyzy = xzy^2, x^2y = xy, xyz^2 = xzy^2\}$;

m47) $S(3, 14)$ имеет базис $\{xy^2z = xyz, yxz = yxy, x^2 = x^3\}$;

m48) $S(5, 4)$ имеет базис $\{xy^2 = xy, x^2y = x^2\}$.

Идемпотентные неперестановочные:

m49) $S(5, 15), S(5, 21), S(6, 1), S(6, 14), S(6, 19), S(6, 20)$ и $S(7, 1)$ имеют базис $\{xyx = xy, x = x^2\}$;

m50) $S(6, 22)$ имеет базис $\{xyxz = xyz, x = x^2\}$.

3. Классификация многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка по рангам планарности

Теорема 3.1. Ранги планарности полугрупповых многообразий порожденных полугруппами четвертого порядка равны 1, 2, 3, 4 или ∞ . При этом для порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка имеют место равенства:

$$r_{\pi}(\text{var}\{m1\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m1}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m2\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m2}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m3\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m4\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m4}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m5\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m5}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m6\}) = \infty, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m6}\}) = 2,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m7\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m7}\}) = 2, r_{\pi}(\text{var}\{m8\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m8}\}) = 1,$$

$$r_{\pi}(\text{var}\{m9\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m9}\}) = 2;$$

для коммутативных:

$$r_{\pi}(\text{var}\{m10\}) = r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m10}\}) = 3, r_{\pi}(\text{var}\{m11\}) = r_{\pi}(\text{var}\{\overleftarrow{m11}\}) = 3,$$

$$\begin{aligned}
r_\pi(\text{var}\{m12\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m12}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m13\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m13}\}) = 1, \\
r_\pi(\text{var}\{m14\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m14}\}) = 1, & r_\pi(\text{var}\{m15\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m15}\}) = 3, \\
r_\pi(\text{var}\{m16\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m16}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m17\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m17}\}) = \infty, \\
r_\pi(\text{var}\{m18\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m18}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m19\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m19}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m20\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m20}\}) = 2, & r_\pi(\text{var}\{m21\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m21}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m22\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m22}\}) = 1, & r_\pi(\text{var}\{m23\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m23}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m24\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m24}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m25\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m25}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m26\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m26}\}) = 3, & r_\pi(\text{var}\{m27\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m27}\}) = 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m28\}) &= r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m28}\}) = 2;
\end{aligned}$$

для перестановочных:

$$\begin{aligned}
r_\pi(\text{var}\{m29\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m29}\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{m30\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m30}\}) &= \infty, \\
r_\pi(\text{var}\{m31\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m31}\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{m32\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m32}\}) &= 4, \\
r_\pi(\text{var}\{m33\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m33}\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{m34\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m34}\}) &= 2 \\
r_\pi(\text{var}\{m35\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m35}\}) &= 1, & r_\pi(\text{var}\{m36\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m36}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m37\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m37}\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{m38\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m38}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m39\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m39}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m40\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m40}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m41\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m41}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m42\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m42}\}) &= 3, \\
r_\pi(\text{var}\{m43\}) &= 1, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m43}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m44\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m44}\}) &= 4, \\
r_\pi(\text{var}\{m45\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m45}\}) &= 4, & r_\pi(\text{var}\{m46\}) &= 3, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m46}\}) &= 2, \\
r_\pi(\text{var}\{m47\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m47}\}) &= 2, & r_\pi(\text{var}\{m48\}) &= \infty, & r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m48}\}) &= 2;
\end{aligned}$$

для идемпотентных неперестановочных:

$$r_\pi(\text{var}\{m49\}) = \infty, \quad r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m49}\}) = 2, \quad r_\pi(\text{var}\{m50\}) = 4, \quad r_\pi(\text{var}\{\overleftarrow{m50}\}) = 2.$$

Для доказательства теоремы вычислим ранг планарности каждого из полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка. Такие многообразия имеют базис тождеств описанный в Лемме 2.1. При этом для описания маршрута между вершинами v_1 и v_n будет использоваться запись $v_1 - v_2 - \dots - v_n$ которая означает, что в графе Кэли содержится n попарно различных вершин v_1, v_2, \dots, v_n таких, что во множестве образующих найдется элемент $x_i \in X$ для которого $v_i x_i = v_{i+1}$ или $v_i = v_{i+1} x_i$ (либо $x_i v_i = v_{i+1}$ или $x_i v_i = v_{i+1}$, в случае левого графа Кэли), при всех допустимых $i = 1 \div (n - 1)$. Проверить истинность найденных равенств и неравенств можно средствами Prover9 [17] и Mace4 [18] соответственно. Так, например, проверить равенство $aab = ab$ в многообразии полугрупп заданном системой тождеств $m1$ можно с помощью следующего запроса:

$$\begin{aligned}
& formulas(assumptions). \\
& (x * y) * z = x * (y * z). \\
& (x1 * x2) * x1 = (x1 * x1) * x2.
\end{aligned}$$

$$(x1 * x1) * x2 = (x1 * x2) * x2.$$

$$(x1 * x2) * x2 = x1 * x2$$

end_of_list.

formulas(goals).

$$(c1 * c1) * c2 = c1 * c2.$$

end_of_list.

Доказательство.

Граф Кэли циклической свободной полугруппы всякого многообразия планарен, поэтому будем с двух образующих начинать анализ планарности графа Кэли свободной полугруппы каждого из полугрупповых многообразий, порожденных полугруппами четвертого порядка.

Базис $m1$:

Анализируя свободные полугруппы многообразия, определяемого системой тождеств $m1$ в первую очередь, заметим, что каждое тождество, которому удовлетворяют полугруппы данного многообразия, имеет такой вид $u = v$, что слова v и u начинаются с одной и той же буквы. Следовательно, граф Кэли n -порожденной свободной полугруппы состоит из n попарно изоморфных связных компонент. Все начинающиеся на одну и ту же букву вершины сформируют каждую из связных компонент. Единственно возможными циклами длины большей 2 в каждой из компонент будут циклы длины 3 на вершинах x, x^2, xy , где $x \neq y$ принадлежат множеству образующих, относительно которого строится граф Кэли свободной полугруппы. Все эти циклы внутри одной связной компоненты графа, содержащей все вершины начинающиеся на x , будут иметь общее ребро $\{x, x^2\}$, но отличаться третьей вершиной y . Следовательно, могут быть уложены на плоскости без пересечения ребер последовательным сложением одного цикла внутри другого цикла. До каждой из вершин отличных от этих трех циклов будут произрастать деревья, то есть ациклические связные графы таким образом, что иных циклов не сформируется и плоская укладка основы графа $Cay(F_n(\text{var}\{m1\}), X = \{x, y, \dots\})$ будет возможна для любого числа образующих $|X| = n < \infty$. Таким образом, $r_\pi(\text{var}\{m1\}) = \infty$. В качестве иллюстрации на Рис. 3.1 представлена одна из пяти попарно изоморфных связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m1\})$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{\overline{m1}\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.2. Дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ca, cba, cab\}$ и $\{ba, bca, acb\}$: $ca - a - ba$; $ca - bca$; $ca - ac - c - bc - cb - acb$; $cba - ba$; $cba - bca$; $cba - acb$; $cab - ab - ba$; $cab - bca$; $cab - acb$.

Базис $m2$:

В основе графов Кэли свободных полугрупп многообразия $\text{var}\{m2\}$ лежит связный граф, в котором любые два простых цикла имеют не более двух общих вершин. Это условие сильно ограничивает топологию графа и имеет важное значение в теории графов. Такой граф является планарным благодаря своему уникальному свойству: любые два простых цикла в нем имеют не более двух общих вершин. Это ограничивает количество пересечений между циклами, что позволяет размещать его на плоскости без пересечений ребер, так как позволяет «разделять» эти циклы в пространстве, сохраняя граф планарным. В качестве иллюстрации на Рис. 3.3 представлена одна из пяти попарно изоморфных связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m2\})$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{\overline{m2}\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.4. Дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного

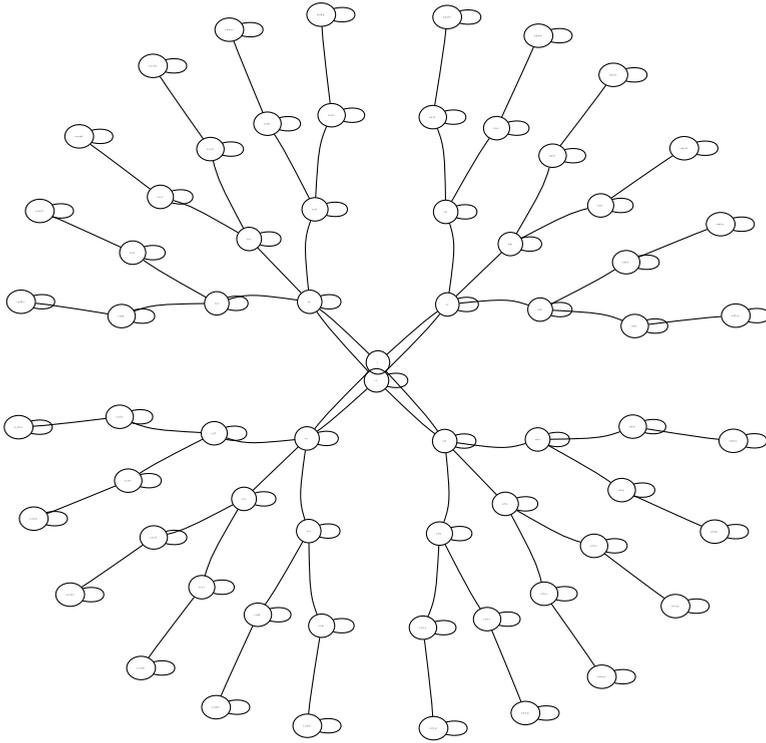


Рис. 3.1. Одна из пяти связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m1\})$

Fig. 3.1. One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup $F_5(\text{var}\{m1\})$

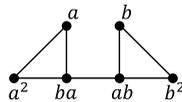


Рис. 3.2. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m1\}), \{a, b\})$

Fig. 3.2. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m1\}), \{a, b\})$

графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ba - aba - b^2$; $a - ca - aca - c^2$; $b - ab - ba^2 - a^2$; $b - b^2$; $b - cb - bcb - c^2$; $c - ac - ca^2 - a^2$; $c - bc - cb^2 - b^2$; $c - c^2$.

Базис $m3$:

Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий $\text{var}\{m3\}$ и $\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}$ в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.5 планарные графы.

А графы Кэли свободных n -порожденных полугрупп многообразий $\text{var}\{m3\}$ и $\text{var}\{\overleftarrow{m3}\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержат подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2b, aca\}$ и $\{a^2, aba, ac\}$, с точностью до обращения слов: $a - a^2$; $a - ab - aba$; $a - ac$; $a^2b - a^2$; $a^2b - aba$; $a^2b - a^2bc - abca - acb - ac$; $aca - a^2c - a^2$; $aca - ac$; $aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$;

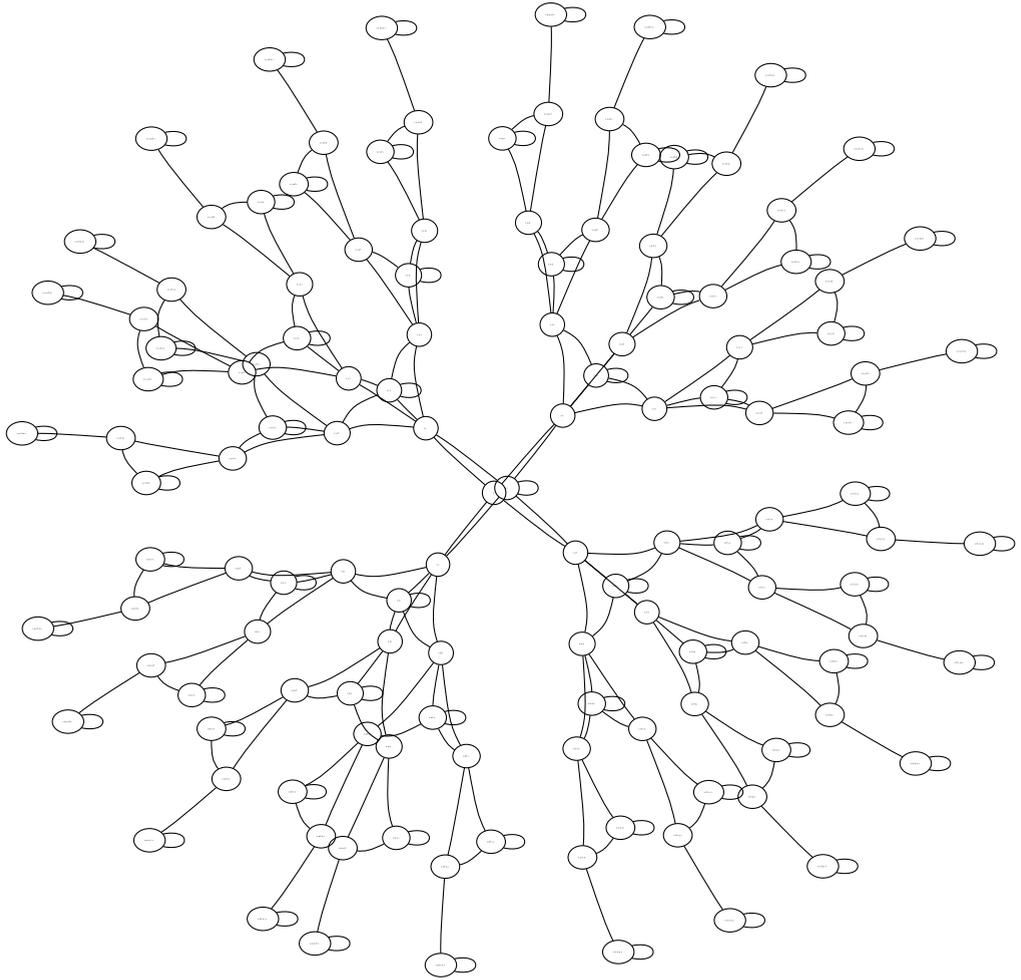


Рис. 3.3. Одна из пяти связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m_2\})$

Fig. 3.3. One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup $F_5(\text{var}\{m_2\})$

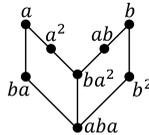


Рис. 3.4. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m_2\}), \{a, b\})$

Fig. 3.4. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m_2\}), \{a, b\})$

$aca - ac.$

Базис m_4 :

Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий $\text{var}\{m_4\}$ и $\overleftarrow{\text{var}\{m_4\}}$

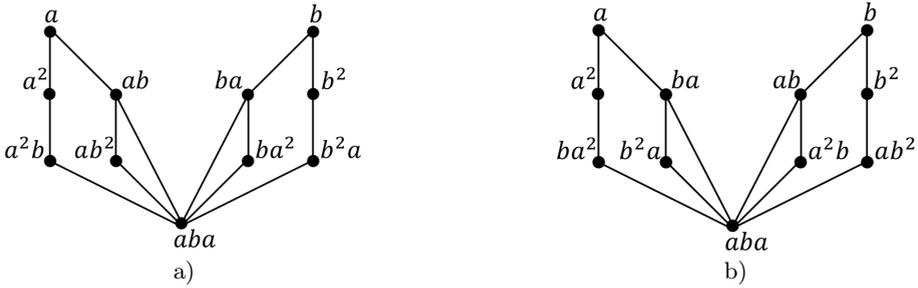


Рис. 3.5. Плоская укладка графов а) $SCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$; б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$

Fig. 3.5. Planar embedding of а) $SCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$; б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m_3\}), \{a, b\})$

в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.6 планарные графы.

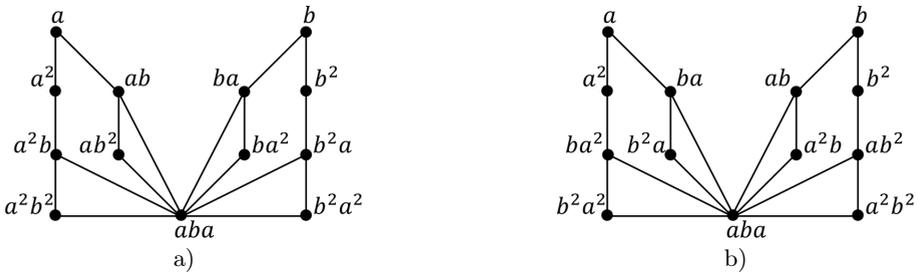


Рис. 3.6. Плоская укладка графов а) $SCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$; б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$

Fig. 3.6. Planar embedding of а) $SCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$; б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m_4\}), \{a, b\})$

А графы Кэли свободных n -порожденных полугрупп многообразий $\text{var}\{m_4\}$ и $\text{var}\{\overleftarrow{m_4}\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержат подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на тех же девяти маршрутах, которые указаны выше для $\text{var}\{m_3\}$ и $\text{var}\{\overleftarrow{m_3}\}$.

Базис m_5 :

Графы Кэли свободных 2-порожденных полугрупп многообразий $\text{var}\{m_5\}$ и $\text{var}\{\overleftarrow{m_5}\}$ в основе своей имеют изображенные на Рис. 3.7 планарные графы.

Граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m_5\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ab - ab^2 - b^2a - b^2$; $a - ac - ac^2 - c^2a - c^2$; $b - ba - aba - a^2b - a^2$; $b - b^2$; $b - bc - bc^2 - c^2b - c^2$; $c - ca - aca - a^2c - a^2$; $c - cb - bcb - b^2c - b^2$; $c - c^2$.

А граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{\overleftarrow{m_5}\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{ba, ba^2, a^2b\}$ и $\{a^2, b^2a^2, cba^2\}$, с точностью до обращения слов: $ba - a - a^2$; $ba - b^2a - b^2a^2$; $ba - cba - cba^2$; $ba^2 - a^2$; $ba^2 - b^2a^2$; $ba^2 - cba^2$; $a^2b - ab - b - b^2 - cb^2 - c^2b^2 - b^2c - bc - c - ac - a^2c - c^2a^2 - ca^2 - a^2$; $a^2b - b^2a^2$; $a^2b - ca^2b - cb^2a^2 - cba^2$.

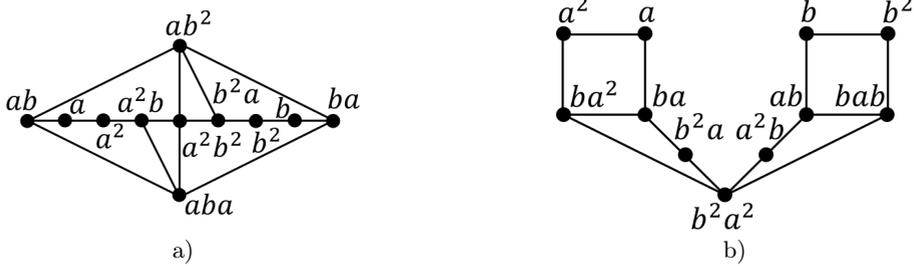


Рис. 3.7. Плоская укладка графов

- a) $SCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$;
- b) $SLCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$

Fig. 3.7. Planar embedding of

- a) $SCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$;
- b) $SLCay(F_2(\text{var}\{m5\}), \{a, b\}) = SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$

Базис $m6$:

Аналогично тому, как в основах графов Кэли свободных полугрупп многообразий порождаемых системами тождеств $m1$ и $m2$ каждая пара простых циклов имела не более двух общих вершин, что приводило к возможности плоской укладки, в основе графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{m6\}$ та же ситуация. В частности, одна из пяти связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m6\})$, допускающая плоскую укладку, представлена на Рис. 3.8.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m6\}$ представлена на Рис. 3.9.

Левый граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m6\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{ba, b^2a, cab\}$ и $\{cba, aba, ab\}$: $ba - cba$; $ba - aba$; $ba - a - ca - aca - ac - c - bc - bcb - cb - b - ab$; $b^2a - cba$; $b^2a - aba$; $b^2a - ab$; $cab - acba - cba$; $cab - aba$; $cab - ab$.

Базис $m7$:

Плоская укладка основы графа $Cay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$ формируется в виде плоских упадок трех попарно изоморфных связных компонент, одна из которых представлена на Рис. 3.10.

Граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразий $\text{var}\{m7\}$ и $\text{var}\{m8\}$, при $n \geq 4$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, abc^2, abcd\}$ и $\{a^2bc, abc, ab^2c\}$: $ab - a^2b - a^2bc$; $ab - abc$; $ab - ab^2 - ab^2c$; $abc^2 - a^2bc^2 - a^2bc$; $abc^2 - abc$; $abc^2 - ab^2c^2 - ab^2c$; $abcd - a^2bcd - a^2bc$; $abcd - abc$; $abcd - ab^2cd - ab^2c$.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m7\}$ представлена на Рис. 3.11. А левый граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m7\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ba - b^2a - ab^2 - b^2$; $a - ca - c^2a - ac^2 - c^2$; $b - ab - aba - ba^2 - a^2$; $b - b^2$; $b - cb - c^2b - bc^2 - c^2$; $c - ac - aca - ca^2 - a^2$; $c - bc - bcb - cb^2 - b^2$; $c - c^2$.

Базис $m8$:

Плоская укладка основы графа $Cay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$ формируется в виде плос-

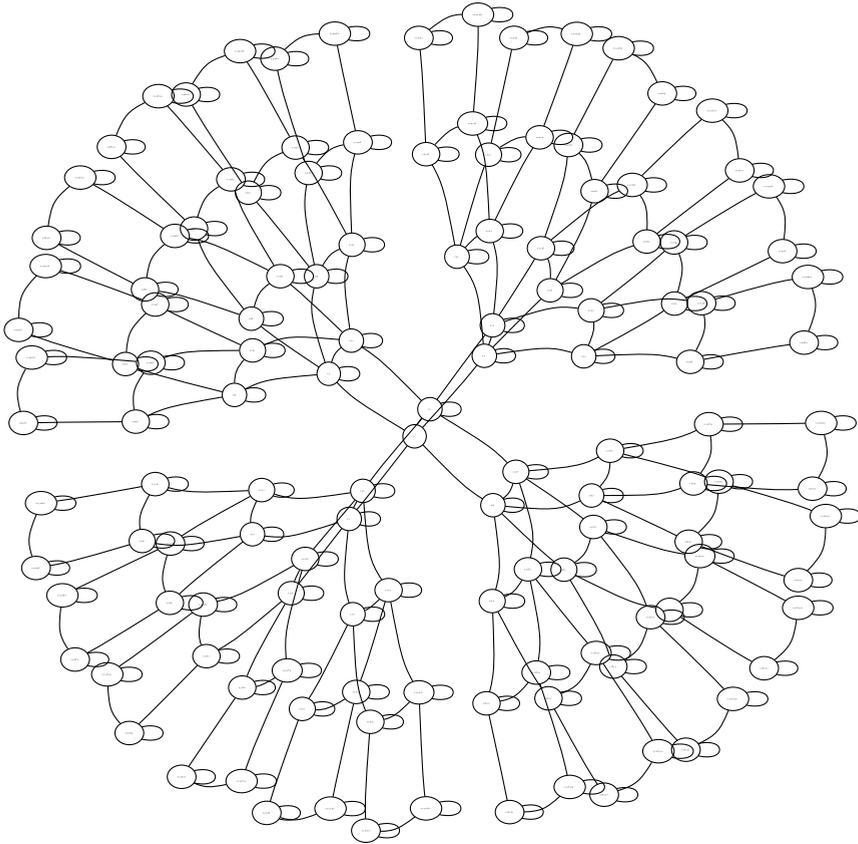


Рис. 3.8. Одна из пяти связанных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_5(\text{var}\{m6\})$

Fig. 3.8. One of the five connected components of the Cayley graph base of the semigroup $F_5(\text{var}\{m6\})$

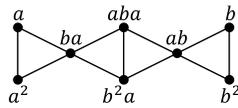


Рис. 3.9. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m6\}), \{a, b\})$ и $SLCay(F_2(\text{var}\{m38\}), \{a, b\})$

Fig. 3.9. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m6\}), \{a, b\})$ and $SLCay(F_2(\text{var}\{m38\}), \{a, b\})$

ких укладок трех попарно изоморфных связанных компонент, одна из которых представлена на Рис. 3.10. А для большего числа образующих основа графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m8\})$ содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ такой же как и основа графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m7\})$, при $n \geq 4$.

Левый граф Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m8\})$ при $n \geq 2$ в своей основе обнаруживает подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся

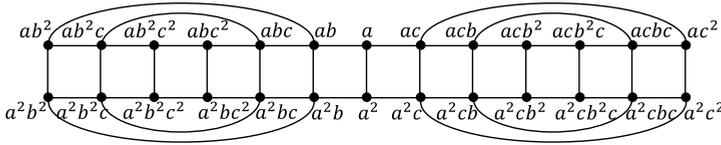


Рис. 3.10. Плоская укладка одной из трех попарно изоморфных связных компонент графа $SCay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$ и $SCay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.10. Planar embedding of one of three pairwise isomorphic connected components of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m7\}), \{a, b, c\})$ and $SCay(F_3(\text{var}\{m8\}), \{a, b, c\})$

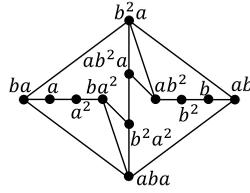


Рис. 3.11. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m7\}), \{a, b\})$ и $SLCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

Fig. 3.11. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m7\}), \{a, b\})$ and $SLCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, ba, b^2a^2\}$ и $\{ba^2, aba, ab^2\}$: $ab - ba^2$; $ab - aba$; $ab - b - b^2 - ab^2$; $ba - a - a^2 - ba^2$; $ba - aba$; $ba - ab^2$; $b^2a^2 - ba^2$; $b^2a^2 - aba$; $b^2a^2 - ab^2$.

Базис $m9$:

Граф Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m9\})$, где $n \leq 3$, допускает плоскую укладку в силу того, что каждая из связных компонент его основы является планарной. Одна из трёх таких связных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var}\{m9\})$ изображена на Рис. 3.12.

Последующее увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m9\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами множества $\{abcd, abcd, abcdb, abcdc, abcd^2\}$: $abcd - abcd$; $abcd - abcdb$; $abcd - abcdc$; $abcd - abcd^2$; $abcd - abcdb - abcd$; $abcd - abcdc - abcd$; $abcd - abcd - abcd^2$; $abcd - abcdb - abcd - abcd$; $abcd - abcd - abcd^2$; $abcd - abcdb - abcd - abcd$; $abcd - abcd - abcd^2$.

Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m9\})$ представлена на Рис. 3.13.

Для трех образующих и более в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m9\})$, где $n \geq 3$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ba - ab^2 - b^2$; $a - ca - ac^2 - c^2$; $b - ab - ba^2 - a^2$; $b - b^2$; $b - cb - bc^2 - c^2$; $c - ac - ca^2 - a^2$; $c - bc - cb^2 - b^2$; $c - c^2$.

Коммутативные:

Базис $m10$:

Ранг планарности многообразия коммутативных полугрупп идемпотентов известен давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоская укладка основы гра-

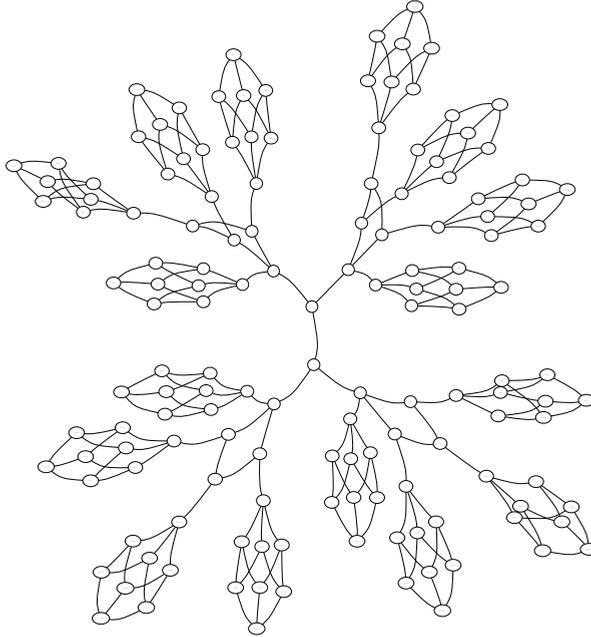


Рис. 3.12. Одна из трех связанных компонент основы графа Кэли полугруппы $F_3(\text{var}\{m9\})$

Fig. 3.12. One of the three connected components of the Cayley graph base of the semigroup $F_3(\text{var}\{m9\})$

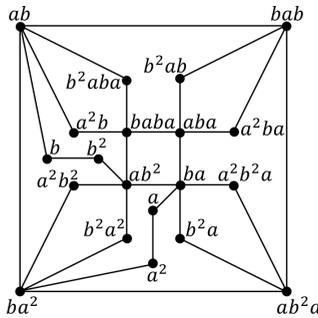


Рис. 3.13. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m9\}), \{a, b\})$

Fig. 3.13. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m9\}), \{a, b\})$

фа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы рассматриваемого многообразия имеет изображенный на Рис. 3.14 вид, а дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, abc\}$ и $\{abd, ab, ac\}$: $a - ad - abd$; $a - ab$; $a - ac$; $b - bd - abd$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $abc - abcd - abd$; $abc - ab$; $abc - ac$.

Базис $m11$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.15.

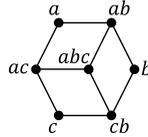


Рис. 3.14. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m10\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.14. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m10\}), \{a, b, c\})$

Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m11\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами множества $\{a, b, c, d, a^2\}$: $a - ab - b$; $a - ac - c$; $a - ad - d$; $a - a^2$; $b - bc - c$; $b - bd - d$; $b - b^2$; $c - cd - d$; $c - a^2$; $d - a^2$.

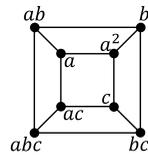


Рис. 3.15. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.15. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m11\}), \{a, b, c\})$

Базис $m12$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.16. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m12\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, abc\}$ и $\{a^2b, ab, ac\}$: $a - a^2 - a^2b$; $a - ab$; $a - ac$; $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $abc - a^2bc - a^2b$; $abc - ab$; $abc - ac$.

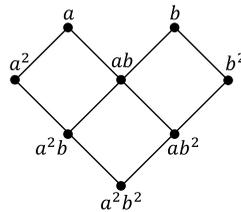


Рис. 3.16. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$

Fig. 3.16. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m12\}), \{a, b\})$

Базис $m13$:

В основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m13\})$, где $n \geq 2$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, a^3b^2, a^2b^2\}$ и $\{a^2b^3, a^2b, ab^2\}$: $ab - ab^3 - a^2b^3$; $ab - a^2b$; $ab - ab^2$; $a^3b^2 - a^3b^3 - a^2b^3$; $a^3b^2 - a^3b - a^2b$; $a^3b^2 - ab^2$; $a^2b^2 - a^2b^3$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - ab^2$.

Базис $m14$:

В основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m14\})$, где $n \geq 2$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, ab^2\}$ и $\{ab, b^2, a^2b\}$: $a - ab$; $a - a^4 - b^3 - b^2$; $a - a^2 - a^2b$; $b - ab$; $b - b^2$; $b - a^3b - a^2b$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - b^2$; $ab^2 - a^2b^2 - a^2b$.

Базис $m15$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.17. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m15\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, a^2\}$ и $\{ac, ab, ad\}$: $a - ac$; $a - ab$; $a - ad$; $b - bc - c - ac$; $b - ab$; $b - bd - d - ad$; $a^2 - ac$; $a^2 - ab$; $a^2 - ad$.

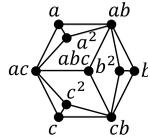


Рис. 3.17. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.17. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m15\}), \{a, b, c\})$

Базис $m16$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.18. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m16\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2, b\}$ и $\{ab, c, d\}$: $a - ab$; $a - ac - c$; $a - ad - d$; $a^2 - ab$; $a^2 - c$; $a^2 - d$; $b - ab$; $b - bc - c$; $b - bd - d$.

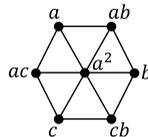


Рис. 3.18. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.18. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m16\}), \{a, b, c\})$

Базис $m17$:

Заметим, что из указанного базиса тождеств среди прочих выводимо тождество $xy = zt$, а бесконечность ранга планарности многообразия полугрупп с нулевым умножением известна давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоская укладка основы графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы рассматриваемого многообразия имеет вид звезды $K_{1,n}$, являющейся полным двудольным графом, содержащим одну вершину в первой из долей и n вершин во второй доле.

Базис $m18$:

Заметим, данная система тождеств похожа на систему $m12$ с единственным отличием в том, что вместо $x = x^3$ имеет место $x^2 = x^3$, следовательно, все сказанное в пункте $m12$ относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для $m18$, так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Базис $m19$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.19. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m19\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, a^3\}$ и $\{a^2, ab, ac\}$: $a - a^2$; $a - ab$; $a - ac$; $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b - a^2$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $a^3 - a^2$; $a^3 - ab$; $a^3 - ac$.

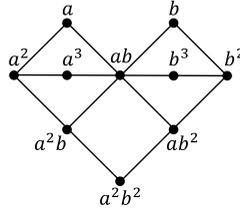


Рис. 3.19. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$

Fig. 3.19. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m19\}), \{a, b\})$

Базис $m20$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.20. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m20\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, a^3\}$ и $\{a^2, ab, ac\}$: $a - a^2$; $a - ab$; $a - ac$; $b - a^2$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $a^3 - a^2$; $a^3 - ab$; $a^3 - ac$.

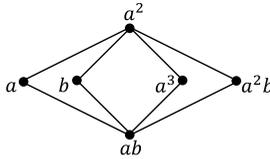


Рис. 3.20. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$

Fig. 3.20. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m20\}), \{a, b\})$

Базис $m21$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.21. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m21\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, abc\}$ и $\{a^2b, ab, ac\}$: $a - a^2 - a^2b$; $a - ab$; $a - ac$; $b - b^2 - ab^2 - a^2b^2 - a^2b$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $abc - a^2bc - a^2b$; $abc - ab$; $abc - ac$.

Базис $m22$:

В основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m22\})$, где $n \geq 2$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, b^2, a^4\}$ и $\{a^3, ab, ab^2\}$: $a^2 - a^3$; $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b^2 - ab^2$; $b^2 - a^3$; $b^2 - b - ab$; $b^2 - ab^2$; $a^4 - a^3$; $a^4 - ab$; $a^4 - ab^2$.

Базис $m23$:

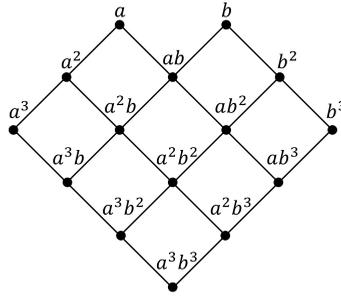


Рис. 3.21. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$

Fig. 3.21. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.22. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m23\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, abc\}$ и $\{a^2b, ab, ac\}$: $a - a^2 - a^2b$; $a - ab$; $a - ac$; $b - b^2 - a^2b$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $abc - a^2b$; $abc - ab$; $abc - ac$.

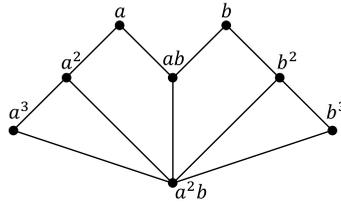


Рис. 3.22. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$

Fig. 3.22. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$

Базис $m24$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.23. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m24\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, a^3\}$ и $\{ab, ac, ad\}$: $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $b - bd - d - ad$; $a^3 - ab$; $a^3 - ac$; $a^3 - ad$.

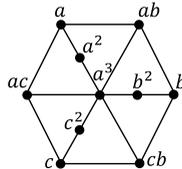


Рис. 3.23. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.23. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m24\}), \{a, b, c\})$

Базис $m25$:

Заметим, данная система тождеств похожа на систему $m21$ с единственным отличием в том, что вместо $x^2 = x^4$ имеет место $x^3 = x^4$, следовательно, все сказанное в пункте $m21$ относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для $m25$, так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Базис $m26$:

Заметим, что системы тождеств $m24$ и $m26$ эквивалентны, так как из множества тождеств $\{xy = yx, x^3 = y^3, xyz^3 = xyz\}$ выводимо каждое из тождеств во множестве $\{xy = yx, xyz = x^3\}$, верна и обратная выводимость. Следовательно, все сказанное в пункте $m24$ относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для $m26$.

Базис $m27$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.24. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m27\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^3, a^2b\}$ и $\{a^2, ab, ac\}$: $a - a^2$; $a - ab$; $a - ac$; $a^3 - a^2$; $a^3 - ab$; $a^3 - ac$; $a^2b - a^2$; $a^2b - ab$; $a^2b - bc - c - ac$.

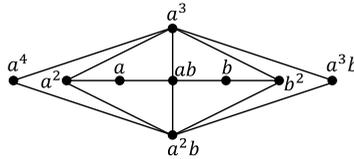


Рис. 3.24. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$

Fig. 3.24. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m27\}), \{a, b\})$

Базис $m28$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.25. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m28\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, abc\}$ и $\{a^2b, ab, ac\}$: $a - a^2 - a^2b$; $a - ab$; $a - ac$; $b - b^2 - a^2b$; $b - ab$; $b - bc - c - ac$; $abc - a^4 - a^2b$; $abc - ab$; $abc - ac$.

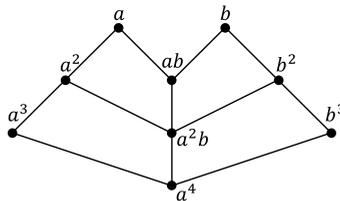


Рис. 3.25. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$

Fig. 3.25. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m28\}), \{a, b\})$

Перестановочные:

Базис $m29$:

Данной системе тождеств эквивалентна система $\{xyz = uvw\}$, другими словами, ею порождается многообразие нильпотентных полугрупп степени нильпотентности 3.

Бесконечность ранга планарности такого многообразия известна давно. Для полноты изложения напомним лишь, что плоскую укладку основы правого (соответственно левого) графа Кэли свободной n -порожденной полугруппы такого многообразия, при любом натуральном n , относительно множества образующих X , можно получить следующим образом: соединив каждую однобуквенную вершину $s \in X$ ребром с двухбуквенными вершинами st (соответственно ts), где $s, t \in X$, получим граф, являющийся объединением n связных компонент, попарно изоморфных звезде $K_{1,n}$; после этого, каждая двухбуквенная вершина соединяется ребром с единственной трехбуквенной вершиной графа, что всегда возможно в силу того, что объединение n связных компонент, попарно изоморфных звезде $K_{1,n}$ является внешнепланарным графом.

Базис $m30$:

Плоскую укладку основы правого (соответственно левого) графа Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m30\}$, при любом натуральном n , относительно множества образующих X , можно получить следующим образом: соединив каждую однобуквенную вершину $s \in X$ ребром с двухбуквенными вершинами st (соответственно ts), где $s \in X$, $t \in X \setminus \{s\}$, получим граф, являющийся объединением n связных компонент, попарно изоморфных звезде $K_{1,n-1}$; после этого, каждая вершина соединяется ребром с единственной трехбуквенной вершиной графа, что всегда возможно в силу того, что объединение n связных компонент, попарно изоморфных звезде $K_{1,n-1}$ является внешнепланарным графом.

Базис $m31$:

Данной системе тождеств эквивалентна система $\{xyz = uvw\}$, поэтому всё сказанное все сказанное в пункте $m29$ относительно основ графов Кэли полугрупп имеет место для $m31$.

Базис $m32$:

Многообразие $\text{var}\{m32\}$ является многообразием полугрупп левых нулей, а $\text{var}\{\overleftarrow{m32}\}$, – полугрупп правых нулей, в основе правых графов Кэли свободных n -порожденных полугрупп которых лежат соответственно гряда O_n , не содержащая ни одного ребра, и полный граф K_n , содержащий все возможные ребра. Поэтому первые допускают плоскую укладку при любом натуральном n , а вторые только при $n \leq 4$.

Базис $m33$:

Основа правого графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение n графов $(n-1)$ -мерных кубов Q_{n-1} , следовательно, допускает плоскую укладку при $n \leq 4$. А при $n \geq 5$ не допускает плоской укладку, так как содержит подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, ab, ac, ad, ae\}$: $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $a - ae$; $ab - abc - ac$; $ab - abd - ad$; $ab - abe - ae$; $ac - acd - ad$; $ac - ace - ae$; $ad - ade - ae$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.26. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m33\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, ba, bca\}$ и $\{ca, cba, dba\}$: $ab - b - cb - bc - c - ac - ca$; $ab - cba$; $ab - dba$; $ba - a - ca$; $ba - cba$; $ba - dba$; $bca - ca$; $bca - cba$; $bca - dcba - cdba - dba$.

Базис $m34$:

Основа правого графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение n графов n -мерных кубов Q_n , следовательно, допускает плоскую укладку при $n \leq 3$. А при $n \geq 4$ не допускает

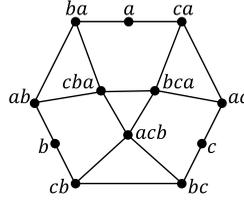


Рис. 3.26. Плоская укладка графа $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.26. Planar embedding of the graph $SLCay(F_3(\text{var}\{m33\}), \{a, b, c\})$

плоской укладки, так как содержит подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$: $a - a^2$; $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $a^2 - a^2b - ab$; $a^2 - a^2c - ac$; $a^2 - a^2d - ad$; $ab - abc - ac$; $ab - abd - ad$; $ac - acd - ad$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.27. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полу-группы $F_n(\text{var}\{m34\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - b^2$; $a - c^2$; $b - a^2$; $b - b^2$; $b - c^2$; $c - a^2$; $c - b^2$; $c - c^2$.

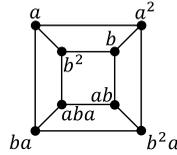


Рис. 3.27. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$

Fig. 3.27. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m34\}), \{a, b\})$

Базис $m35$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.28. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полу-группы $F_n(\text{var}\{m35\})$, где $n \geq 3$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, ab^2, abc\}$ и $\{ab, a^2b, ac\}$: $a - ab$; $a - a^2 - a^2b$; $a - ac$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - a^2b^2 - a^2b$; $ab^2 - ab^2c - ab^2c^2 - abc^2 - ac^2 - ac$; $abc - ab$; $abc - a^2bc - a^2b$; $abc - ac$.

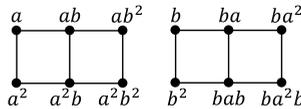


Рис. 3.28. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

Fig. 3.28. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m35\}), \{a, b\}) = SCay(F_2(\text{var}\{m39\}), \{a, b\})$

В графе $SLCay(F_n(\text{var}\{m35\}), \{a, b\})$ при $n \geq 2$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах

между вершинами из множеств $\{ab, ba, b^2a^2\}$ и $\{ba^2, aba, ab^2\}$: $ab - ba^2$; $ab - aba$; $ab - b - b^2 - ab^2$; $ba - a - a^2 - ba^2$; $ba - aba$; $ba - ab^2$; $b^2a^2 - ba^2$; $b^2a^2 - aba$; $b^2a^2 - ab^2$.

Базис $m36$:

Основой правого графа Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m36\}$ является паросочетание, состоящее из n попарно несмежных рёбер, следовательно, она допускает плоскую укладку при любом натуральном n .

Плоская укладка графа $SLCay(F_n(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$ при $n = 2$ представлена на Рис. 3.29, а при $n \geq 3$ в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, ba, ca\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca$; $b - a^2$; $b - ba$; $b - ca$; $c - a^2$; $c - ba$; $c - ca$.

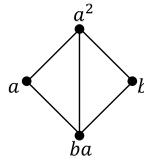


Рис. 3.29. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$

Fig. 3.29. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m36\}), \{a, b\})$

Базис $m37$:

Плоская укладка графа $SCay(F_n(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$ при $n = 3$ представлена на Рис. 3.30, а при $n \geq 4$ в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$: $a - a^2$; $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $a^2 - ab$; $a^2 - ac$; $a^2 - ad$; $ab - abc - ac$; $ab - abd - ad$; $ac - acd - ad$.

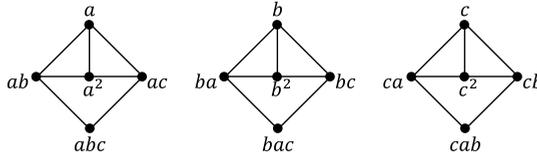


Рис. 3.30. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.30. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Плоская укладка графа $SLCay(F_n(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$ при $n = 3$ представлена на Рис. 3.31, а при $n \geq 4$ в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2, b\}$ и $\{ba, ca, da\}$: $a - ba$; $a - ca$; $a - da$; $a^2 - ba$; $a^2 - ca$; $a^2 - da$; $b - ab - ba$; $b - cb - bc - c - ac - ca$; $b - db - bd - d - ad - da$.

Базис $m38$:

Основа правого графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы данного многообразия представляет собой дизъюнктивное объединение n графов n -мерных кубов Q_n , следовательно, допускает плоскую укладку при $n \leq 3$. А при $n \geq 4$ не допускает плоской укладки, так как содержит подграф гомеоморфный графу K_5 на тех же десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, a^2, ab, ac, ad\}$

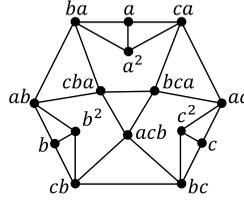


Рис. 3.31. Плоская укладка графа $SLCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.31. Planar embedding of the graph $SLCay(F_3(\text{var}\{m37\}), \{a, b, c\})$

что и в основе правого графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{m34\}$.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m38\}$ представлена на Рис. 3.9. А при дальнейшем увеличении числа образующих в этом графе обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{ab, ba, aba, b^2a, cba\}$: $ab - b - cb - acb - bc - c - ac - aca - ca - a - ba$; $ab - aba$; $ab - b^2a$; $ab - cba$; $ba - aba$; $ba - b^2a$; $ba - cba$; $aba - b^2a$; $aba - cba$; $b^2a - cba$.

Базис $m39$:

Заметим, данная система тождеств похожа на систему $m35$ с единственным отличием в том, что вместо $x = x^3$ имеет место $x^2 = x^3$, следовательно, все сказанное в пункте $m35$ относительно основ правых графов Кэли полугрупп имеет место для $m39$, так как в соответствующих графах Кэли лишь на смену разнонаправленных параллельных дуг приходят петли.

Плоская укладка основы левого графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m39\}$ представлена на Рис. 3.11. А левый граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m39\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит такой же подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$ как и в левом графе Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m7\}$, при $n \geq 3$, не смотря на то, что графы Кэли этих полугрупп не изоморфны, так как содержат разное количество вершин.

Базис $m40$:

Так как основа графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m40\})$ представляет собой объединение n попарно изоморфных между собой планарных полных двудольных графов $K_{2,n}$, содержащих 1-буквенную и 3-буквенную вершины в одной доле, а все 2-буквенные вершины в другой доле, то граф Кэли этой полугруппы планарен при любом $n \in \mathbb{N}$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.32. А основа левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m40\})$ при $n \geq 3$ содержит подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^3, ba^2\}$ и $\{a^2, ba, ca\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca$; $a^3 - a^2$; $a^3 - ba$; $a^3 - ca$; $ba^2 - a^2$; $ba^2 - ba$; $ba^2 - ca$.

Базис $m41$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.7.а, так как если тождества из слов над двухбуквенным алфавитом удовлетворяют системе тождеств $m41$, то они удовлетворяют и системе $m5$. Заметим при этом, что так как граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m5\}$, для $n \geq 3$ в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на девяти маршрутах между

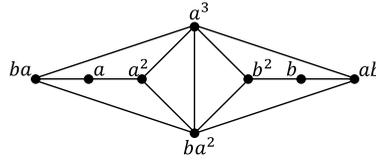


Рис. 3.32. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$

Fig. 3.32. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m40\}), \{a, b\})$

вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$ проходящих через вершины являющиеся словами над двухбуквенным алфавитом, то этот же подграф можно обнаружить и в основе свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{m41\}$, при $n \geq 3$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m41\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.7.b, так как опять же, если тождества из слов над двухбуквенным алфавитом удовлетворяют системе тождеств $m41$, то они удовлетворяют и системе $m5$.

А левый граф Кэли свободной n -порожденной полугруппы многообразия $\text{var}\{41\}$, при $n \geq 3$, в своей основе содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$ на следующих девяти маршрутах между вершинами из множеств $\{ba, ba^2, ca^2\}$ и $\{a^2, b^2a^2, cba^2\}$: $ba - a - a^2$; $ba - b^2a - b^2a^2$; $ba - cba - cba^2$; $ba^2 - a^2$; $ba^2 - b^2a^2$; $ba^2 - cba^2$; $ca^2 - a^2$; $ca^2 - c^2a^2 - a^2c - ac - c - bc - b^2c - c^2b^2 - cb^2 - b^2 - b - ab - a^2b - b^2a^2$; $ca^2 - cba^2$.

Базис $m42$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.33.a. Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m42\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2, b\}$ и $\{ac, ab, ad\}$: $a - ac$; $a - ab$; $a - ad$; $a^2 - ac$; $a^2 - ab$; $a^2 - ad$; $b - bc - bca - cb - c - ca - aca - ac$; $b - ba - aba - ab$; $b - bd - bda - db - d - da - ada - ad$.

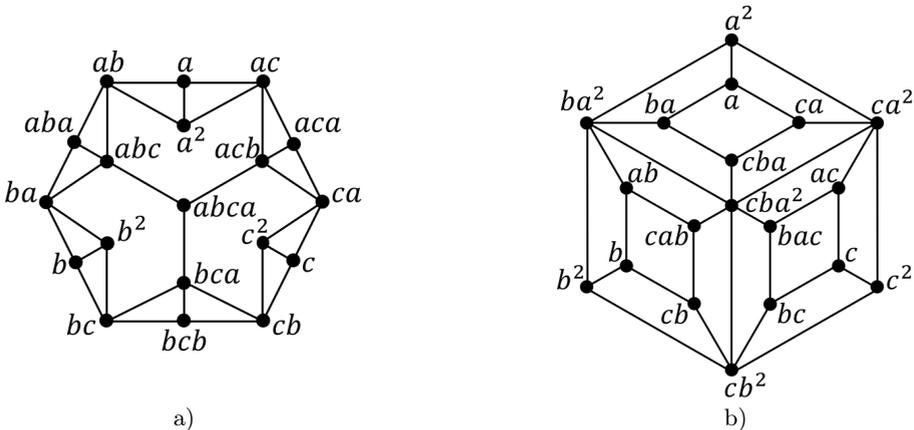


Рис. 3.33. Плоская укладка графа а) $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$; б) $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.33. Planar embedding of the graph а) $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$; б) $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$

Плоская укладка графа $SLCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.33.b.

Увеличение числа образующих приводит к появлению в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m42\})$, где $n \geq 4$, подграфа гомеоморфного графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, a^2, ba, ca, da\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca$; $a - da$; $a^2 - ba^2 - ba$; $a^2 - ca^2 - ca$; $a^2 - da^2 - da$; $ba - cba - ca$; $b - dba - da$; $ca - dca - da$.

Базис $m43$:

В основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m42\})$ при $n \geq 2$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, a^2b^2, a^2ba\}$ и $\{a^2b, aba, ab^2\}$: $ab - a - a^2 - a^2b$; $ab - aba$; $ab - ab^2$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - aba$; $a^2b^2 - ab^2$; $a^2ba - a^2b$; $a^2ba - aba$; $a^2ba - ab^2$.

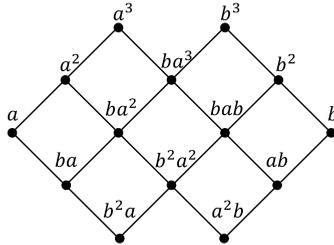


Рис. 3.34. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$

Fig. 3.34. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m43\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.34. А основа левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m43\})$ при $n \geq 3$ содержит подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^3, ba^2\}$ и $\{a^2, ba, ca^2\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca - ca^2$; $a^3 - a^2$; $a^3 - ba^3 - bab - b^2a^2 - b^2a - ba$; $a^3 - ca^3 - ca^2$; $ba^2 - a^2$; $ba^2 - ba$; $ba^2 - cba^2 - ca^2$.

Базис $m44$:

Основы правого и левого графа Кэли n -порожденной свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{m44\}$ являются дизъюнктивным объединением n попарно изоморфных K_n полных графов порядка n . Следовательно, правый и левый граф Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m44\})$ допускает плоскую укладку при $n \leq 4$. А для $n \geq 5$ основа правого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m44\})$ содержит подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, ab, ac, ad, ae\}$: $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $a - ae$; $ab - ac$; $ab - ad$; $ab - ae$; $ac - ad$; $ac - ae$; $ad - ae$. В левом графе аналогичным образом обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{a, ba, ca, da, ea\}$: $a - ba$; $a - ca$; $a - da$; $a - ea$; $ab - ca$; $ba - da$; $ba - ea$; $ca - da$; $ca - ea$; $da - ea$.

Базис $m45$:

Граф $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$ состоит из четырёх попарно изоморфных связанных компонент. Плоская укладка одной из этих компонент представлена на Рис. 3.35. В основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m45\})$ для $n \geq 5$ дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, ab, aba\}$ и $\{abc, abd, abe\}$: $a - ac - acb - abc$; $a - ad - adb - abd$; $a - ae - aeb - abe$; $ab - abc$; $ab - abd$; $ab - abe$; $aba - abc$; $aba - abd$; $aba - abe$.

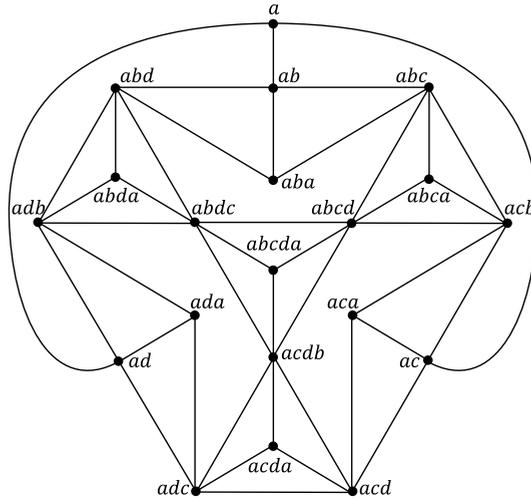


Рис. 3.35. Плоская укладка одной из четырёх попарно изоморфных связных компонент графа $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$

Fig. 3.35. Planar embedding of one of the four pairwise isomorphic connected components of the graph $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$

Тождества $xyxz = x^2yz$ и $xyzy = xzy^2$ зеркально симметричны друг для друга, поэтому граф $SLCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$ изоморфен графу $SCay(F_4(\text{var}\{m45\}), \{a, b, c, d\})$ и имеет плоскую укладку каждой из четырех своих компонент аналогичную представленной на Рис. 3.35 с точностью до обращения порядка следования букв в словах соответствующих вершин. А в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m45\})$ для $n \geq 5$ дальнейшее увеличение числа образующих аналогичным образом приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, ba, aba\}$ и $\{cba, dba, eba\}$: $a - ca - bca - cba$; $a - da - bda - dba$; $a - ea - bea - eba$; $ba - cba$; $ba - dba$; $ba - eba$; $aba - cba$; $aba - dba$; $aba - eba$.

Базис $m46$:

Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$ представлена на Рис. 3.36. А в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m46\})$ для $n \geq 4$ дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2, aba\}$ и $\{ab, ac, ad\}$: $a - ab$; $a - ac$; $a - ad$; $a^2 - ab$; $a^2 - ac$; $a^2 - ad$; $aba - ab$; $aba - abc - abca - acb - ac$; $aba - abd - abda - adb - ad$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.37. А в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m46\})$ для $n \geq 3$ дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ba - aba - b^2$; $a - ca - aca - c^2$; $b - ab - ba^2 - a^2$; $b - b^2$; $b - cb - bcb - c^2$; $c - ac - ca^2 - a^2$; $c - bc - cb^2 - b^2$; $c - c^2$.

Базис $m47$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.38.а. А в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m47\})$ при $n \geq 3$ обнаруживается подграф го-

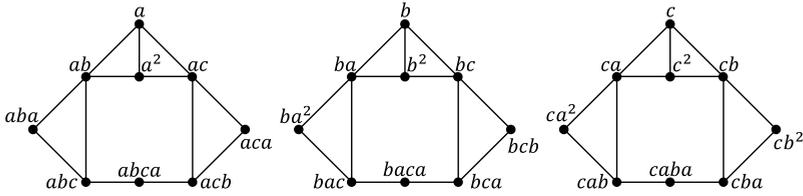


Рис. 3.36. Плоская укладка графа $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$

Fig. 3.36. Planar embedding of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$

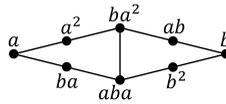


Рис. 3.37. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$

Fig. 3.37. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m46\}), \{a, b\})$

меоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, a^2b, aca\}$ и $\{a^2, aba, ac\}$: $a - a^2$; $a - ab - aba$; $a - ac$; $a^2b - a^2$; $a^2b - aba$; $a^2b - a^2bc - abca - acb - ac$; $aca - a^2c - a^2$; $aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$; $aca - ac$.



Рис. 3.38. Плоская укладка графа а) $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$;

б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$

Fig. 3.38. Planar embedding of the graph а) $SCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$;

б) $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m47\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.38.б. А в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m47\})$ при $n \geq 3$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, ba^2, aca\}$ и $\{a^2, aba, ca\}$: $a - a^2$; $a - ba - aba$; $a - ca$; $ba^2 - a^2$; $ba^2 - aba$; $ba^2 - cba^2 - acba - bca - ca$; $aca - ca^2 - a^2$; $aca - ac - c - bc - bcb - cb - b - ab - aba$; $aca - ca$.

Базис $m48$:

Основа графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m48\})$ планарна при любом n , так как она является дизъюнктивным объединением n полных двудольных графов $K_{1,n}$ содержащих одну вершину в первой доле и n вершин во второй доле.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.39. А в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m48\})$ при $n \geq 3$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a, ab, ac\}$ и $\{a^2, ba, ca\}$: $a - a^2$; $a - ba$; $a - ca$; $ab - a^2$; $ab - ba$; $ab - ca$; $ac - a^2$; $ac - ba$; $ac - ca$.

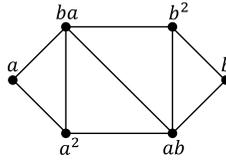


Рис. 3.39. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$

Fig. 3.39. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m48\}), \{a, b\})$

Идемпотентные неперестановочные:

Базис $m49$:

Основа графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m49\})$ планарна при любом n , так как является ациклическим графом, то есть лесом, состоящим из n деревьев, каждое из которых содержит $1 + (n - 1) + (n - 1)(n - 2) + \dots + (n - 1)! = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} j$ вершин, что после упрощения выражения равно $1 + e(n - 1) \int_1^\infty \frac{t^{n-2}}{e^t} dt$.

Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$ представлена на Рис. 3.40. А в основе левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m49\})$ при $n \geq 3$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{acb, ba, bca\}$ и $\{ca, cab, cba\}$: $acb - cb - bc - c - ac - ca$; $acb - cab$; $acb - cba$; $ba - a - ca$; $ba - ab - cab$; $ba - cba$; $bca - ca$; $bca - cab$; $bca - cba$.

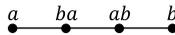


Рис. 3.40. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$

Fig. 3.40. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m49\}), \{a, b\})$

Базис $m50$:

Граф $SCay(F_4(\text{var}\{m50\}), \{a, b, c, d\})$ состоит из четырёх попарно изоморфных связанных компонент. Плоская укладка одной из таких связанных компонент представлена на Рис. 3.41. Но уже при выборе пяти образующих в основе графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m50\})$, где $n \geq 5$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих десяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множества $\{abcd, abcda, abcdb, abcdc, abcde\}$: $abcd - abcda$; $abcd - abcdb$; $abcd - abcdc$; $abcd - abcde$; $abcda - abcdb$; $abcda - abcdc$; $abcda - abcde$; $abcdb - abcdc$; $abcdb - abcde$; $abcdc - abcde$.

Плоская укладка основы левого графа Кэли полугруппы $F_n(\text{var}\{m50\})$ при $n = 2$ представлена на Рис. 3.42, а дальнейшее увеличение числа образующих приводит к появлению подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ на следующих девяти попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{acba, ba, bca\}$ и $\{ca, caba, cba\}$: $acba - bacba - aca - ca$; $acba - caba$; $acba - cba$; $ba - a - ca$; $ba - aba - caba$; $ba - cba$; $bca - ca$; $bca - caba$; $bca - cba$.

Доказательство завершено.

4. Статистическая обработка результатов

Для полноты картины осуществим статистическую обработку полученных результатов методом PCA [19] с последующей кластеризацией рассмотренных многообразий

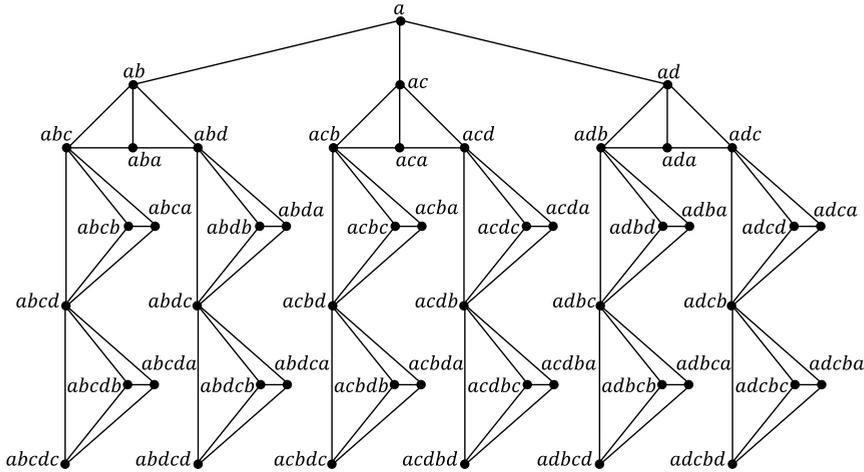


Рис. 3.41. Плоская укладка одной из четырёх попарно изоморфных связанных компонент графа $SCay(F_4(\text{var}\{m50\}), \{a, b, c, d\})$

Fig. 3.41. Planar embedding of one of the four pairwise isomorphic connected components of the graph $SCay(F_4(\text{var}\{m50\}), \{a, b, c, d\})$

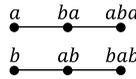


Рис. 3.42. Плоская укладка графа $SLCay(F_2(\text{var}\{m50\}), \{a, b\})$

Fig. 3.42. Planar embedding of the graph $SLCay(F_2(\text{var}\{m50\}), \{a, b\})$

по их рангам планарности. Анализ главных компонент (PCA) — это мощный статистический метод, используемый в различных областях для упрощения сложных наборов данных. PCA помогает сократить количество переменных в наборе данных, сохраняя большую часть исходной изменчивости, что упрощает анализ и визуализацию. Сокращая количество измерений, PCA обеспечивает более эффективное хранение и более быструю обработку без значительной потери информации, что помогает отфильтровывать шум из данных, тем самым повышая качество и точность моделей. Этот метод преобразует многомерные данные в двухмерное или трехмерное пространство, что упрощает визуализацию и понимание закономерностей и тенденций, кроме того, определяет наиболее значимые признаки (главные компоненты) в наборе данных, которые можно использовать в качестве входных переменных для моделей машинного обучения. В обработке изображений и компьютерном зрении PCA используется для распознавания образов и структур в данных, например, в системах распознавания лиц.

Введём в рассмотрение ряд факторов: f1) количество тождеств; f2) количество букв во всех словах; f3) максимальная длина слов; f4) минимальная длина слов; f5) частота символа x ; f6) частота символа y ; f7) частота символа z ; f8) частота символа w ; f9) разность между максимальной и минимальной длиной слов; f10) максимальная разность длин слов в тождествах; f11) минимальная разность длин слов в тождествах; f12) количество разных букв во всех словах; f13) минимальное количество разных букв в словах; f14) максимальное количество разных букв в словах; f15) максимальная разность меж-

ду первым вхождением буквы x в левом и правом слове; f16) максимальная разность между первым вхождением буквы y в левом и правом слове; f17) максимальная разность между первым вхождением буквы z в левом и правом слове; f18) максимальная разность между первым вхождением буквы w в левом и правом слове; f19) минимальная разность между первым вхождением буквы x в левом и правом слове; f20) минимальная разность между первым вхождением буквы y в левом и правом слове; f21) минимальная разность между первым вхождением буквы z в левом и правом слове; f22) минимальная разность между первым вхождением буквы w в левом и правом слове; f23) максимальная разность между последним вхождением буквы x в левом и правом слове; f24) максимальная разность между последним вхождением буквы y в левом и правом слове; f25) максимальная разность между последним вхождением буквы z в левом и правом слове; f26) максимальная разность между последним вхождением буквы w в левом и правом слове; f27) минимальная разность между последним вхождением буквы x в левом и правом слове; f28) минимальная разность между последним вхождением буквы y в левом и правом слове; f29) минимальная разность между последним вхождением буквы z в левом и правом слове; f30) минимальная разность между последним вхождением буквы w в левом и правом слове; f31) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы x в левом и правом слове; f32) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы y в левом и правом слове; f33) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы z в левом и правом слове; f34) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы w в левом и правом слове; f35) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы x в левом и правом слове; f36) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы y в левом и правом слове; f37) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы z в левом и правом слове; f38) минимальная разность между первым и последним вхождением буквы w в левом и правом слове.

Разделение многообразий по значениям рангов планарности r_π методом PCA дало представленные в Таблице 4.1 результаты.

Таблица 4.1. Корреляции исходных факторов по осям

Table 4.1. Correlations of initial factors along the axes

| По первой оси (Along the first axis) | | | По второй оси (Along the second axis) | | |
|--------------------------------------|-------------|-----------|---------------------------------------|-------------|-----------|
| | correlation | p.value | | correlation | p.value |
| f17 | 8.475E-01 | 8.455E-15 | f3 | 7.233E-01 | 2.975E-09 |
| f33 | 8.097E-01 | 1.082E-12 | f1 | 6.824E-01 | 4.813E-08 |
| f25 | 8.097E-01 | 1.082E-12 | f2 | 6.739E-01 | 8.127E-08 |
| f14 | 7.409E-01 | 7.636E-10 | f5 | 6.403E-01 | 5.508E-07 |
| f12 | 7.409E-01 | 7.636E-10 | f31 | 6.323E-01 | 8.435E-07 |
| f7 | 5.876E-01 | 7.244E-06 | f9 | 6.040E-01 | 3.411E-06 |
| f4 | 5.377E-01 | 5.655E-05 | f6 | 5.771E-01 | 1.147E-05 |
| f20 | 5.036E-01 | 1.931E-04 | f23 | 4.387E-01 | 1.438E-03 |
| f34 | 4.941E-01 | 2.655E-04 | f15 | 4.235E-01 | 2.178E-03 |
| f26 | 4.941E-01 | 2.655E-04 | f34 | 4.229E-01 | 2.213E-03 |

| По первой оси (Along the first axis) | | | По второй оси (Along the second axis) | | |
|--------------------------------------|------------|-----------|---------------------------------------|------------|-----------|
| f18 | 4.941E-01 | 2.655E-04 | f26 | 4.229E-01 | 2.213E-03 |
| f8 | 4.941E-01 | 2.655E-04 | f18 | 4.229E-01 | 2.213E-03 |
| f16 | 4.706E-01 | 5.628E-04 | f8 | 4.229E-01 | 2.213E-03 |
| f37 | 4.441E-01 | 1.235E-03 | f14 | 2.998E-01 | 3.442E-02 |
| f29 | 4.441E-01 | 1.235E-03 | f12 | 2.998E-01 | 3.442E-02 |
| f21 | 4.441E-01 | 1.235E-03 | f11 | -2.801E-01 | 4.881E-02 |
| f36 | 3.817E-01 | 6.239E-03 | f20 | -3.691E-01 | 8.351E-03 |
| f28 | 2.845E-01 | 4.521E-02 | f36 | -4.838E-01 | 3.713E-04 |
| f35 | -3.119E-01 | 2.745E-02 | f28 | -6.662E-01 | 1.287E-07 |
| f9 | -3.405E-01 | 1.553E-02 | | | |
| f10 | -4.466E-01 | 1.150E-03 | | | |

При этом разделение значений r_π по второй оси имеет следующие характеристики: $R2 = 4.321E - 01$, $p.value = 3.172E - 05$.

Далее обнаружилось, что наибольший коэффициент корреляции $r = 0.59612874$ с набором найденных значений рангов планарности доставляет вспомогательный параметр $fn = ((1+f9)(1+f12))/((1+f3)(1+f8))$. Оставив ведущие факторы f17, f33 и дополнив их параметром fn было произведено повторное разделение многообразий по значениям рангов планарности r_π методом PCA, что дало представленные в Таблице 4.2 результаты.

Таблица 4.2. Корреляции ведущих факторов по осям

Table 4.2. Correlations of leading factors along the axes

| По первой оси (Along the first axis) | | | По второй оси (Along the second axis) | | |
|--------------------------------------|-------------|-----------|---------------------------------------|-------------|-----------|
| | correlation | p.value | | correlation | p.value |
| f33 | 9.837E-01 | 2.097E-37 | fn | 9.998E-01 | 2.786E-82 |
| f17 | 9.834E-01 | 3.210E-37 | | | |

При этом разделение значений r_π по второй оси стало еще более статистически значимым: $R2 = 5.703E - 01$, $p.value = 7.727E - 08$.

Этот набор данных содержит 50 наблюдений за значениями рангов планарности, меняющимися при изменении тождеств базисной системы соответствующего многообразия, и 4 переменные, 1 качественная переменная рассматривается как основная.

Анализ графиков не обнаруживает никаких выбросов. Представленная на Рис. 4.1 инерция первых измерений показывает, существуют ли сильные связи между переменными, и указывает на количество осей, которые следует изучать. Первые две оси анализа выражают 98,04% инерции общего набора данных, что означает, что 98,04% переменных объясняются корреляционной плоскостью. Этот процент довольно высок, и поэтому первая плоскость идеально отражает изменчивость данных. Это значение больше эталонного значения, равного 79,49%, таким образом, изменчивость, объясняемая этой плоскостью, значима (эталонное значение представляет собой 0,95-квантиль процентного распределения инерции, полученного путем моделирования 14634 таблиц данных эквивалентного размера на основе нормального распределения).

На Рис. 4.2 представлены факторная плоскость и корреляционный круг. Здесь r_0

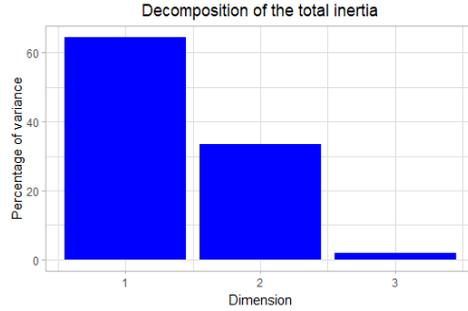


Рис. 4.1. Разложение общей инерции для правых рангов планарности

Fig. 4.1. Decomposition of the total inertia for right ranks of planarity

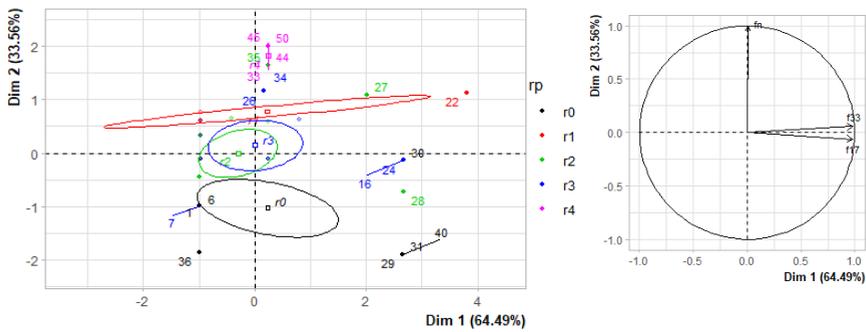


Рис. 4.2. Факторная плоскость и корреляционный круг для правых рангов планарности

Fig. 4.2. Individuals factor map (PCA) and variables factor map (PCA) for right ranks of planarity

обозначает бесконечный ранг планарности, а r_1 , r_2 , r_3 и r_4 соответственно ранги планарности со значениями 1, 2, 3 и 4.

Первая ось противопоставляет многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (в правой полуплоскости, что характеризуется сильно положительной координатой на оси) многообразиям типа 1, 6, 7 и 36 (в левой полуплоскости, что характеризуется сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которую входят многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (характеризуется положительной координатой на оси), разделяется высокими значениями факторов f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы от самых сильных) и низкими значениями для переменной f_1 .

Группа, в которой стоят многообразия 1, 6, 7 и 36 (характеризуется отрицательной координатой на оси), разделяется низкими значениями для f_{33} и f_{17} (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых).

Вторая ось противопоставляет многообразия 27, 45, 50, 33, 34, 35 и 44 (в верхней части графика, характеризующейся сильно положительной координатой на оси) многообразиям 29, 31, 40, 1, 6, 7, 36, 28, 16 и 24 (в нижней части графика, характеризующейся

сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которую входят многообразия 27, 45, 50, 33, 34, 35 и 44 (характеризуется положительной координатой на оси), отделена высокими значениями для переменной f_n . Группа, в которой стоят многообразия 1, 6, 7 и 36 (характеризуется отрицательной координатой на оси), отделена низкими значениями для переменных f_{33} и f_{17} (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых).

Группа, в которую входят многообразия 29, 31, 40, 28, 16, 24 и 30 (характеризуется отрицательной координатой на оси), характерна тем, что имеет высокие значения для f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы по возрастанию от самых сильных), но низкие значения для переменной f_n .

Наконец, классификация многообразий по рангам планарности, позволяет выделить 3 кластера, визуализированные на Рис. 4.3 и Рис. 4.4.

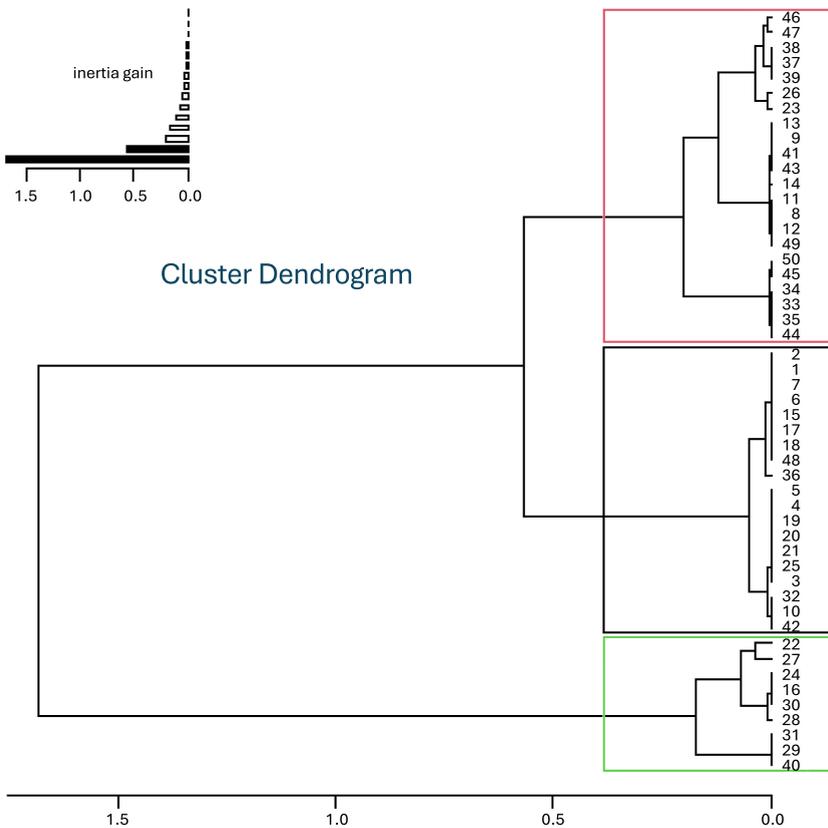


Рис. 4.3. Иерархическое дерево для правых рангов планарности

Fig. 4.3. Hierarchical tree for right ranks of planarity

Кластер 1 состоит из многообразий 1, 6, 7 и 36. Для этой группы характерны низкие значения для переменных f_{33} , f_n и f_{17} (переменные отсортированы от самых слабых). Кластер 2 состоит из многообразий 26, 33, 34, 35, 44, 45 и 50. Для этой группы характерны высокие значения для переменной f_n . Кластер 3 состоит из многообразий 16, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 31 и 40. Для этой группы характерны высокие значения для

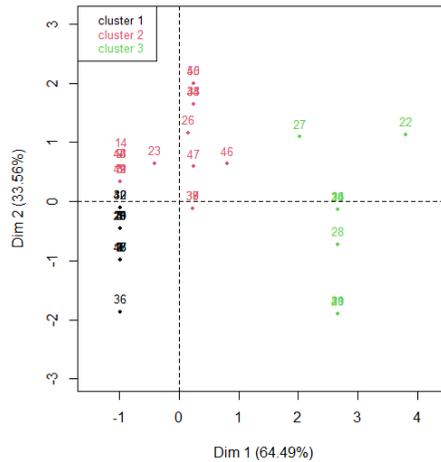


Рис. 4.4. Восходящая иерархическая классификация многообразий по правым рангам планарности

Fig. 4.4. Ascending hierarchical classification of the individuals on right ranks of planarity

переменных f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы от самых сильных).

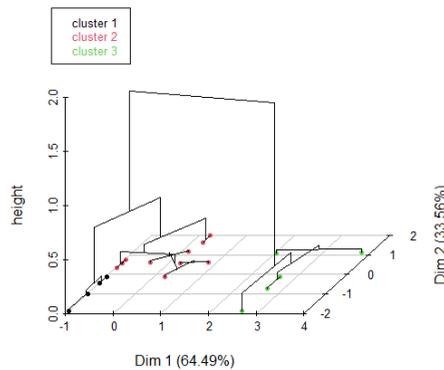


Рис. 4.5. Иерархическое дерево на факторной карте для правых рангов планарности

Fig. 4.5. Hierarchical tree on the factorial map for right ranks of planarity

Иерархическое дерево может быть нарисовано на факторной карте с раскрашенными точками в соответствии с их кластерами так, как это представлено на Рис. 4.5.

Повторяя аналогичные рассуждения для левых рангов планарности находим вспомогательный параметр $Lfn = (1+f_4)(1+f_9)/(1+f_3)(1+f_3)$, имеющий с левыми рангами планарности наибольшую корреляцию $r = 0.45563657$. После добавления к факторам f_{17} и f_{33} , являющимся ведущими, новой переменной Lfn анализ главных компонент показывает на Рис. 4.6, что первые две оси выражают 97,82% общей инерции набора данных, что означает, что 97,82% общей изменчивости значений левых рангов планарности объясняются двумерной плоскостью. Этот процент достаточно высок, и поэтому

первая плоскость идеально отражает изменчивость данных. Это значение больше эталонного значения, равного 79,49%, таким образом, изменчивость, объясняемая этой плоскостью, значима (эталонное значение представляет собой 0,95-квантиль процентного распределения инерции, полученного путем моделирования 14397 таблиц данных эквивалентного размера на основе нормального распределения).

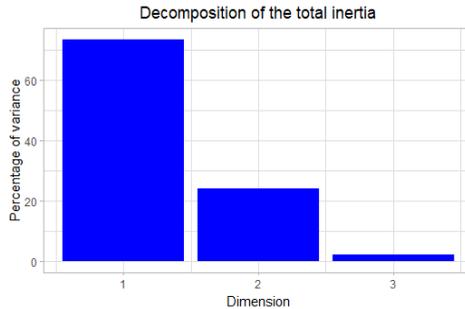


Рис. 4.6. Разложение общей инерции для левых рангов планарности

Fig. 4.6. Decomposition of the total inertia for left ranks of planarity

На Рис. 4.7 представлена факторная плоскость и корреляционный круг для разделения левых рангов планарности. Первая ось противопоставляет многообразия 29, 31, 40, 16, 24, 30, 28 и 27 (лежащие в правой полуплоскости, которая характеризуется сильно положительной координатой на этой оси) многообразиям 10 и 32 (из левой полуплоскости, которая характеризуется сильно отрицательной координатой на оси).

Группа, в которой находится многообразие 27 (характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высоким значением для f_{33} . Группа, в которой находятся многообразия 16, 24, 30 и 28 (тоже характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высокими значениями для f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы по убыванию от самых сильных). Группа, в которой находятся многообразия 29, 31 и 40 (характеризуется положительной координатой на оси), выделяется высокими значениями для f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы от самых сильных), но низкими значениями для переменной L_{fn} . Группа, в которой находятся многообразия 10 и 32 (характеризуется отрицательной координатой на оси), выделяется высокими значениями для переменной L_{fn} . Наконец, группа 5 и группа 6 (характеризуется отрицательной координатой на оси) выделяется низкими значениями для переменных f_{17} и f_{33} (переменные отсортированы по возрастанию, начиная от самых слабых).

Классификация рассматриваемых многообразий по левым рангам планарности, позволяет выделить 6 кластеров, визуализированных на Рис. 4.8 и Рис. 4.9.

Кластер 1 состоит из многообразий 10 и 32. Для этой группы характерны высокие значения для переменной L_{fn} . Кластер 2 состоит из многообразий, которые выделяются высокими значениями для переменной L_{fn} и низкими значениями для f_{33} и f_{17} (переменные отсортированы по возрастанию от самых слабых). Кластер 3 состоит из многообразий 9, 13, 14 и 36. Для этой группы характерны низкие значения L_{fn} . Кластер 4 состоит из многообразий, значения определяющих факторов у которых существенно не отличаются от среднего. Кластер 5 состоит из многообразий 16, 22, 24, 27, 28 и 30. Для этой группы характерны высокие значения f_{33} и f_{17} (переменные отсортированы от самых сильных). Кластер 6 состоит из многообразий 29, 31 и 40. Для этой группы ха-

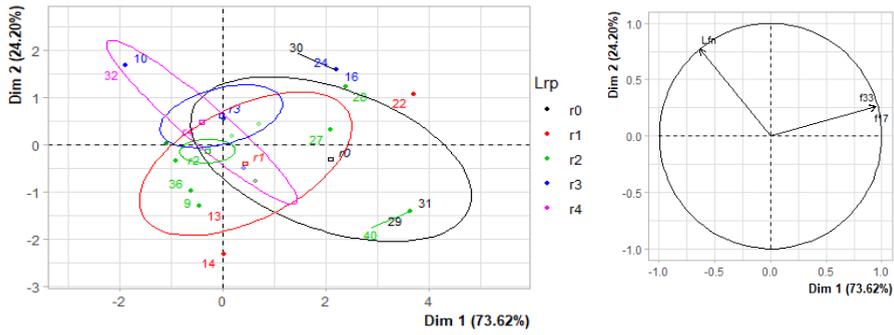


Рис. 4.7. Факторная плоскость и корреляционный круг для левых рангов планарности

Fig. 4.7. Individuals factor map (PCA) and variables factor map (PCA) for left ranks of planarity

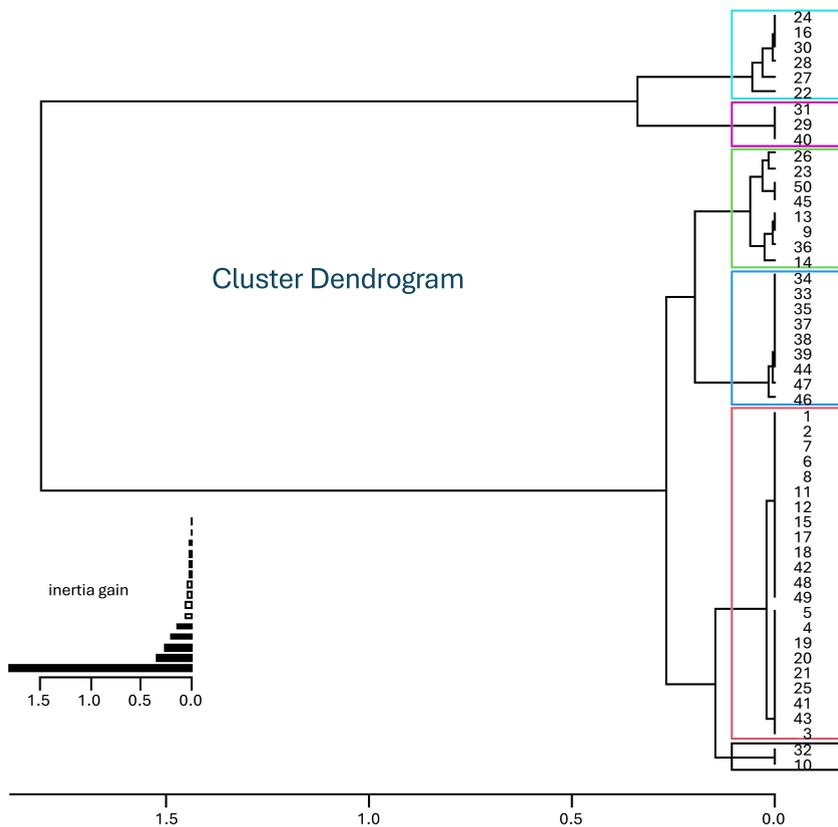


Рис. 4.8. Иерархическое дерево для левых рангов планарности

Fig. 4.8. Hierarchical tree for left ranks of planarity

рактены высокие значения f17 и f33 (переменные отсортированы от самых сильных),

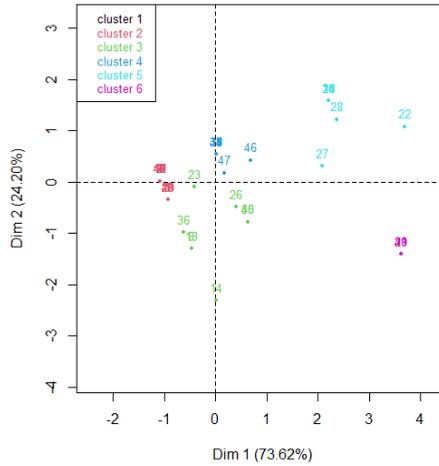


Рис. 4.9. Восходящая иерархическая классификация многообразий по левым рангам планарности

Fig. 4.9. Ascending hierarchical classification of the individuals on left ranks of planarity

но низкие значения для переменной Lfn .

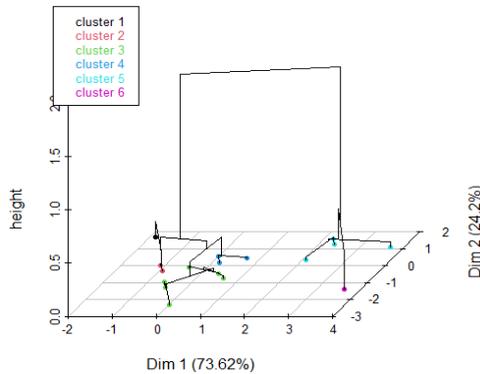


Рис. 4.10. Иерархическое дерево на факторной карте для левых рангов планарности

Fig. 4.10. Hierarchical tree on the factorial map for left ranks of planarity

Иерархическое дерево может быть нарисовано на факторной карте с раскрашенными точками в соответствии с их кластерами так, как это представлено на Рис. 4.10.

В результате применения статистического анализа приходим к выводу о том, что ведущими факторами из рассмотренных числовых характеристик базиса тождеств, оказывающих наибольшее влияние на значение ранга планарности соответствующего многообразия, являются: $f17$) максимальная разность между первым вхождением буквы z в левом и правом слове; $f33$) максимальная разность между первым и последним вхождением буквы z в левом и правом слове.

5. Заключение

Основная часть новых результатов, полученных в статье, была анонсирована ранее в материалах работы Международной конференции «МАЛЫЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ» 2024 года [20].

Полученные результаты имеют практическое значение для дискретной математики, теории полугрупп и алгоритмической теории графов, способствуя дальнейшему исследованию взаимосвязей между алгебраическими и топологическими свойствами конечных структур.

Подводя итог, можно сказать, что полугруппы четвертого порядка являются богатым предметом изучения с далеко идущими последствиями в алгебре, вычислениях и моделировании явлений реального мира. Их простота в сочетании со структурным разнообразием делает их важнейшим шагом на пути к пониманию более сложных алгебраических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ремесленников В.Н., Рыбалов А.Н., Шевляков А.Н., Соломатин Д.В., Мартынов Л.М., Носков Г.А., Трейер А.В., Зубков А.Н., Ильев В.П., Гичев В.М. [Электронный ресурс] // Юбилейное 900-е заседание семинара: Омский алгебраический семинар, 12.11.2015. Режим доступа: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900>
2. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // *Вестник Омского университета*. 2012. Т. 4. С. 41–45.
3. Соломатин Д.В. Ранги планарности полугрупповых многообразий, порождённых полугруппами третьего порядка // *Сибирские электронные математические известия*. 2025. Т. 22, № 1. С. 95–109. DOI: 10.33048/semi.2025.22.008.
4. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // *Прикладная дискретная математика*. 2016. Т. 34, № 4. С. 50–64. DOI: 10.17223/20710410/34/4.
5. Соломатин Д.В. О рангах планарности многообразий полугрупп идемпотентов, нильполугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством // *Вестник Омского университета*. 2017. Т. 4, № 86. С. 11–21. DOI: 10.25513/1812-3996.2017.4.11-21.
6. Соломатин Д.В. О рангах планарности многообразий нильполугрупп // *Вестник Омского университета*. 2019. Т. 2, № 24. С. 17–22. DOI : 10.25513/1812-3996.2019.24(2).17-22.
7. Nupo N., Panma S. Certain structural properties for Cayley regularity graphs of semigroups and their theoretical applications. *AIMS Mathematics*. 2023. Vol. 8., no. 7. P. 16228–16239. DOI: 10.3934/math.2023830
8. Alshammari M. F. A., Mat Hassim H. I., Sarmin N. H., Erfanian A. The intersection power Cayley graph of cyclic groups of order pq . *AIP Conf. Proc.* 13 September 2024. Vol. 3150., no. 1. DOI: 10.1063/5.0229066.

9. Cheng T., Mao J. A new class of directed strongly regular Cayley graphs over dicyclic groups. *AIMS Mathematics*. 2024. Vol. 9., no. 9. P. 24184–24192. DOI: 10.3934/math.20241176.
10. García-Marco I., Knauer K. Coloring minimal Cayley graphs. *European Journal of Combinatorics*. 2025. Vol. 125. DOI: 10.1016/j.ejc.2024.104108.
11. Meksawang J., Panma S., Knauer U. Characterization of finite simple semigroup digraphs. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2011. Vol. 12., no. 1. P. 53–68.
12. Zulkarnain A., Sarmin N.H., Mat Hassim H.I., Erfanian A. A variation of Cayley graph for cyclic groups of composite order. *AIP Conference Proceedings*. 2024. Vol. 3189., no. 1. DOI: 10.1063/5.0225729.
13. Hernández-Ortiz R., Knauer K., Montejano L.P., Scheucher M. Roudneff's Conjecture in Dimension 4. *EUROCOMB'23*. 2023. P. 561–567. DOI: 10.5817/CZ.MUNI.EUROCOMB23-078.
14. Felsner S., Knauer K., Ueckerdt T. Plattenbauten: Touching Rectangles in Space. *Adler I., Müller, H. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 2020. Lecture Notes in Computer Science()*. 2020. Vol. 12301. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-60440-0_13.
15. Соломатин Д. В. Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // *Прикладная дискретная математика*. 2021. № 54. С. 5–57. DOI: 10.17223/20710410/54/1
16. Edmunds C. C. Varieties generated by semigroups of order four. *Semigroup Forum*. 1980. Vol. 21. P. 67–81. DOI: 10.1007/BF02572537.
17. McCune W., et al. Prover9 manual. [Электронный ресурс] 2009. Режим доступа: <https://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual/2009-11A/>
18. McCune W. Mace4 reference manual and guide. 2003. arXiv:cs/0310055.
19. Lê S., Josse J., Husson F. FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis // *Journal of Statistical Software*. 2008. Vol. 25., no. 1. P. 1–18. DOI: 10.18637/jss.v025.i01
20. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий, порожденных не идемпотентными и не перестановочными полугруппами четвертого порядка // Тезисы докладов. Международная конференция МАЛЫЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (Новосибирск, 11–15 ноября 2024 г.). Новосибирск, 2024. С. 123.

*Поступила 21.11.2024; доработана после рецензирования 10.05.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V.N. Remeslennikov, A.N. Rybalov, A.N. Shevlyakov, D.V. Solomatin, L.M. Martynov, G.A. Noskov, A.V. Treier, A.N. Zubkov, V.P. Il'ev, V.M. Gichev, "Novye problemy algebrы i logiki. Yubileinoe 900-e zasedanie seminarа: Omskii algebraicheskiy seminar", 2015 (In Russ.), Available at: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900>.
2. D.V. Solomatin, "Rangi planarnosti mnogoobrazii kommutativnykh monoidov", *Herald of Omsk University*, **4** (2012), 41–45 (In Russ.).
3. D.V. Solomatin, "Planarity ranks of semigroup varieties generated by all semigroups of order three", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2025, no. 22, 95–109 (In Russ.). DOI: 10.33048/semi.2025.22.008
4. D.V. Solomatin, "The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, **34** (2016), 50–64 (In Russ.). DOI: 10.17223/20710410/34/4
5. D.V. Solomatin, "On ranks of the planarity of varieties of all idempotent semigroups, nilsemigroups, and semigroups with the permutation identity", *Herald of Omsk University*, 2017, no. 86, 11–21 (In Russ.). DOI: 10.25513/1812-3996.2017.4.11-21
6. D.V. Solomatin, "On ranks of planarity of nil-semigroups varieties", *Herald of Omsk University*, 2019, no. 24, 17–22 (In Russ.). DOI: 10.25513/1812-3996.2019.24(2).17-22
7. N. Nupo, S. Panma, "Certain structural properties for Cayley regularity graphs of semigroups and their theoretical applications", *AIMS Mathematics*, **8:7** (2023), 16228–16239.. DOI: 10.3934/math.2023830
8. M. F. A. Alshammari, H. I. Mat Hassim, N. H. Sarmin, A. Erfanian, "The intersection power Cayley graph of cyclic groups of order pq ", *AIP Conf. Proc.*, **3150:1** (2024). DOI: 10.1063/5.0229066
9. T. Cheng, J. Mao, "A new class of directed strongly regular Cayley graphs over dicyclic groups", *AIMS Mathematics*, **9:9** (2024), 24184–24192.. DOI: 10.3934/math.20241176
10. I. García-Marco, K. Knauer, "Coloring minimal Cayley graphs", *European Journal of Combinatorics*, **125** (2025). DOI: 10.1016/j.ejc.2024.104108
11. J. Meksawang, S. Panma, U. Knauer, "Characterization of finite simple semigroup digraphs", *Algebra and Discrete Mathematics*, **12:1** (2011), 53–68..
12. A. Zulkarnain, N. H. Sarmin, H. I. Mat Hassim, A. Erfanian, "A variation of Cayley graph for cyclic groups of composite order", *AIP Conference Proceedings*, **3189:1** (2024). DOI: 10.1063/5.0225729
13. R. Hernández-Ortiz, K. Knauer, L. P. Montejano, M. Scheucher, "Roudneff's Conjecture in Dimension 4", *EUROCOMB'23*, 2023, 561–567.. DOI: 10.5817/CZ.MUNI.EUROCOMB23-078

14. S. Felsner, K. Knauer, T. Ueckerdt, “Plattenbauten: Touching Rectangles in Space”, *Adler I., Müller, H. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 2020. Lecture Notes in Computer Science()*, **12301**, 2020, 161–173 DOI: 10.1007/978-3-030-60440-0_13.
15. D. V. Solomatin, “Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems”, *Discrete Applied Mathematics*, 2021, no. 54, 5–57 (In Russ.). DOI: 10.17223/20710410/54/1
16. C. C. Edmunds, “Varieties generated by semigroups of order four”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 67–81. DOI: 10.1007/BF02572537
17. W. McCune et al., “Prover9 manual”, 2009, Available at: <https://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual/2009-11A/>.
18. W. McCune, “Mace4 reference manual and guide”, 2003, Available at: <https://arxiv.org/abs/cs/0310055/>.
19. Lê S. J. Josse, F. Husson, “FactoMineR: An R Package for Multivariate Analysis”, *Journal of Statistical Software*, **25**:1 (2008), 1–18. DOI: 10.18637/jss.v025.i01
20. D. V. Solomatin, “Rangi planarnosti mnogoobrazii, porozhdennykh ne idempotentnymi i ne perestanovochnymi polugruppami chetvertogo poryadka”, *Collection of Abstracts. International Conference MAL’TSEV MEETING. November 11–15, 2024*, 2024, 125 (In Russ.).

Submitted 21.11.2024; Revised 10.05.2025; Accepted 28.05.2025

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.229-242
Original article

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 76B15, 76B25, 35Q53

Asymptotic and numerical study to the damped Schamel equation

M. V. Flamarion¹, E. N. Pelinovsky^{2,3}, T. G. Talipova²

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú (Lima, Peru)

² Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

³ Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. Analytical and numerical solutions of the damped Schamel equation, describing the dynamics of ion-acoustic waves in magnetized plasma, are presented. A small parameter is introduced in the equation before the dissipative term, ensuring that in its absence the solution reduces to a solitary wave (soliton). The asymptotic method employed for solving the equation is a variant of the Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky multiple-scale technique. In the first-order approximation, the solution is described by a traveling solitary wave with slowly varying parameters. The second-order approximation yields the evolution laws for the soliton's amplitude and phase as functions of «slow» time. Additionally, exact integral conservation laws (mass and energy of the wave field), derived directly from the original damped Schamel equation, are utilized. These integrals allow estimating the soliton's radiative losses, particularly the mass of the so-called tail formed behind the soliton due to dissipation. Direct numerical solutions of the original equation, obtained via a pseudospectral method, confirm the asymptotic laws governing the soliton's amplitude decay caused by dissipation. Another limiting case – strong dissipation (dominant over nonlinearity and dispersion), is also investigated, demonstrating that the soliton decays as a linear impulse, which is validated numerically.

Keywords: ion-acoustic waves, Schamel equation, solitary wave, method of multiple scales, pseudospectral method

For citation: M. V. Flamarion, E. N. Pelinovsky, T. G. Talipova. Asymptotic and numerical study to the damped Schamel equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:2(2025), 229–242. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.229-242

About the authors:

Marcelo V. Flamarion, Ph.D. (Mathematics), Professor, Departamento Ciencias–Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú, (Av. Universitaria 1801, San Miguel 15088, Lima, Peru), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5637-7454>, mvellosoflamarionvasconcellos@pucp.edu.pe

Efim N. Pelinovsky, D. Sc. (Phys. and Math.), Chief Researcher, Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics, (46 Uljanov Street, Nizhny Novgorod, 603120 Russian Federation); Professor, High School of Economics University (25 Bolshaya Pechorskaya Str., Nizhny Novgorod, 603120 Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@ipfran.ru

Tatiana G. Talipova, D. Sc. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics, (46 Uljanov Street, Nizhny Novgorod, 603120 Russian Federation); ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1967-4174>, tgtalipova@mail.ru

© M. V. Flamarion, E. N. Pelinovsky, T. G. Talipova



УДК 517.958

Асимптотическое и численное исследование уравнения Шамеля с затуханием

М. В. Фламарион¹, Е. Н. Пелиновский^{2,3}, Т. Г. Талипова²¹ Папский католический университет Перу, (г. Лима, Перу)² Институт прикладной физики имени А.В. Гапонова-Грехова РАН (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)³ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Приведено аналитическое и численное решение модельного уравнения Шамеля с затуханием, описывающим динамику ионно-звуковых волн в замагниченной плазме. Малый параметр в уравнении введен перед диссипативным слагаемым, так что в его отсутствие решением уравнения Шамеля является уединенная волна (солитон). Для его решения применен асимптотический метод, являющийся разновидностью метода многих масштабов Крылова-Боголюбова-Митропольского. В первом приближении по малому параметру решение описывается уединенной бегущей волной с параметрами, медленно изменяющимися со временем. Во втором приближении находятся законы изменения амплитуды и фазы солитона, как функции «медленного» времени. Наряду с этим используются интегральные законы массы и энергии волнового поля, вытекающие точно из исходного модульного уравнения Шамеля с диссипацией. Показывается, что эти интегралы позволяют оценить величину излучения солитона, в частности, массу так называемого хвоста, возникающего за солитоном в процессе его диссипации. Прямое численное решение исходного уравнения псевдоспектральным методом подтвердило асимптотические законы изменения амплитуды солитона из-за его диссипации. Исследован также другой предельный случай сильной диссипации (по сравнению с нелинейностью и диссипацией), когда солитон затухает как линейный импульс, этот процесс подтвержден численно.

Ключевые слова: ионно-звуковые волны, уравнение Шамеля, уединенная волна, метод многих масштабов, псевдоспектральный метод

Для цитирования: Фламарион М. В., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г. Асимптотическое и численное исследование уравнения Шамеля с затуханием // *Журнал Средне-волжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 229-242. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.229-242

Об авторах:

Фламарион Марсело, Ph.D. по математике, профессор Папского католического университета Перу, (15088, Перу, г. Лима, Университетское авеню, д. 1801), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5637-7454>, mvellosoflamariovasconcellos@pucp.edu.pe

Пелиновский Ефим Наумович, докт. физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института прикладной физики РАН имени А.В. Гапонова-Грехова (603120, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46), профессор Национального исследовательского университета – Высшая школа экономики (603120, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печорская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@ipfran.ru

Талипова Татьяна Георгиевна, докт. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной физики РАН имени А.В. Гапонова-Грехова (603120, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1967-4174>, tgatalipova@mail.ru

1. Introduction

The Schamel equation was first introduced in the study of undamped electrostatic waves in a Maxwellian plasma [1], [2]. Its analytical solutions in the form of solitary waves taking into account the forcing are obtained in [3], [4]. The interactions between ions and electrons, considering various factors like distribution functions, plasma density, temperature gradients, and collisions are analyzed in [5]-[8]. The same equation describe the nonlinear wave dynamics of cylindrical shells [9]. Unlike the well-known Korteweg–de Vries (KdV) equation, the Schamel equation incorporates a modular term that modifies the representation of nonlinearity. This crucial difference renders the Schamel equation nonintegrable, introducing mathematical challenges due to the non-analytic nature of the function—challenges that do not arise in integrable equations commonly encountered in plasma physics, such as the modified KdV (mKdV) equation and the Gardner equation [1], [2], [10], [11]. The Schamel equation allows for solitary wave solutions of both polarities, but because of its nonintegrability, their interactions are inelastic, resulting in a small-amplitude dispersive tail that forms immediately after two solitary waves collide [12], [13]. Flamarion et al. [14] extended this analysis to an ensemble, examining the interactions of multiple solitary waves with random phases. They demonstrated that the dispersive tails generated during each collision can act as a mechanism for the formation of freak waves.

The interaction between solitary waves and an external force has also been explored within the framework of the Schamel equation. Chowdhury et al. [4] derived a Schamel-type equation that accounts for the presence of an external force and investigated the interaction between a solitary wave and a time-dependent external periodic force, using both asymptotic analysis and numerical simulations. Later, Flamarion and Pelinovsky [15] studied the effects of a spatially dependent force on solitary waves, identifying conditions for resonance between the external force and the solitary waves through asymptotic and numerical methods. Since its derivation in 1972, the Schamel equation continues to present intriguing challenges and remains a vibrant area of research.

Shan [16] explored the nonlinear characteristics of high-frequency electron-acoustic (EA) in a dissipative plasma, consisting of a cold beam electron fluid, Schamel-kappa distributed hot trapped electrons, and stationary ions. Using the multiple scale expansion method, Shan derived a damped Schamel equation to describe small-amplitude electrostatic potential disturbances, incorporating dissipative effects. This damped equation was later employed by Sultana and Kourakis [17] in their study of the electrostatic potential, where they analyzed the nonlinear properties of dissipative ion-acoustic solitary waves in the presence of trapped electrons. Although numerical solutions were obtained in both studies, their mathematical properties were not thoroughly investigated.

The goal of this work is to examine the damped Schamel equation derived in [16], [17] and obtain an asymptotic solution by assuming that a solitary wave undergoes adiabatic evolution. We demonstrate that a tail forms behind the solitary wave with negative mass. The asymptotic results are then compared with direct numerical simulations, revealing good qualitative agreement.

The article is structured as follows: Section 2 presents the canonical damped Schamel equation, while Section 3 covers the asymptotic results. Numerical results are discussed in Section 4, and final conclusions are provided in Section 5.

2. The damped Schamel equation

As mentioned in the introduction, the damped Schamel equation has appeared in the literature in various contexts. In this work, we focus on investigating the evolution of solitary wave solutions in the presence of damping. To achieve this, we consider the Schamel equation in its canonical form

$$u_t + \sqrt{|u|}u_x + u_{xxx} + \epsilon\nu u = 0. \quad (2.1)$$

In this equation, $u(x, t)$ represents the wave field at position x and time t , ν denotes the damping coefficient, and ϵ is a small positive parameter that characterizes the strength of the viscosity. In the absence of damping, the Schamel equation(2.1) admits solitary wave solutions, which can be expressed as follows

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^4\left(k(x - ct)\right), \text{ where } c = \frac{8\sqrt{|a|}}{15}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{16}}. \quad (2.2)$$

Here, a denotes the solitary wave amplitude, which can also take on negative values, c represents the solitary wave speed, and k characterizes the solitary wave wavenumber.

The damped Schamel equation has two important quantities: the mass and momentum associated with equation (2.1) are, respectively,

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx \quad \text{and} \quad E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx.$$

The momentum equation is

$$\frac{dE}{dt} = -2\epsilon\nu E(t), \quad (2.3)$$

which has solution $E(t) = E_0 e^{-2\epsilon\nu t}$, where E_0 stands for the initial momentum. Meanwhile the mass balance equation

$$\frac{dM}{dt} = -\epsilon\nu M(t), \quad (2.4)$$

which has solution

$$M(t) = M_0 e^{-\epsilon\nu t}. \quad (2.5)$$

Here, M_0 represents the initial mass.

3. Asymptotical solitary wave solution of the damped Schamel equation

When the damping term is introduced into the Schamel equation, solitary wave solutions of the form (2.2) cease to exist. However, if the damping is weak, it is reasonable to expect that the solitary wave might nearly preserve its main characteristics, such as amplitude, speed, and width, over short periods. In other words, it is natural to assume that the solitary wave undergoes an adiabatic transformation [18]-[20].

We assume that the solitary wave is expressed asymptotically in the slowly varying time scale $T = \epsilon t$

$$u(\Phi, T) = a(T)\operatorname{sech}^4\left(k(T)\Phi\right), \quad \Phi = x - X(T), \quad X(T) = x_0 + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T c(T)dT,$$

where $a(T)$ is the modulated amplitude, $X(T)$ is the solitary wave crest position and x_0 its phase, $c(T)$ is the variable speed and $k(T)$ the typical variable solitary wave width. Here, x_0 is the phase, a is the modulated amplitude and c is the speed. The wave field is given by the asymptotic expansion [21]-[23]

$$\begin{aligned} u(\Phi, T) &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \\ c(T) &= c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots. \end{aligned}$$

The first order solutions, u_0 and c_0 are directly determined through formula (2.2). We consider a solitary wave with positive polarity ($a > 0$). In the first order ϵ , we have

$$Lu_1 \equiv -c_0 \frac{\partial u_1}{\partial \Phi} + \frac{\partial}{\partial \Phi} [f'(u_0)u_1] + \frac{\partial^3 u_1}{\partial \Phi^3} = F_1 \equiv -\nu u_0 - \frac{\partial u_0}{\partial T} + c_1 \frac{\partial u_0}{\partial \Phi},$$

where $f(u) = u|u|^{1/2}$. The operator L is a self-adjoint operator and

$$L\xi = 0 \implies \xi = u_0,$$

is the only bounded solution. The compatibility condition is

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1 \xi d\Phi = 0 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} F_1 u_0 d\Phi = 0$$

Consequently we have that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial T} d\Phi = -\nu \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 d\Phi.$$

In other words,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 d\Phi = -2\nu \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 d\Phi.$$

Using the fact that $T = \epsilon t$ we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 d\Phi = -2\epsilon\nu \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 d\Phi. \tag{3.1}$$

Notice that equations and (2.3) and (3.1) are the same, it means that tails does not contribute in the momentum in the first-order approximation. As a result, the momentum can be computed analytically as follows

$$E(T) = \frac{a^2(T)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^8(k\Phi) d\Phi = \frac{a^2(T)}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^8(\Phi) d\Phi = \frac{16}{35} \sqrt{30} a^{7/4}(T). \tag{3.2}$$

Substituting equation (3.2) in 2.3 leads to the following ordinary differential equation for the solitary wave amplitude

$$\frac{da}{dt} = -\frac{8}{7} \epsilon\nu a(t). \tag{3.3}$$

Consequently,

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{6}{7}\epsilon\nu t}. \quad (3.4)$$

It is important to note that the asymptotic procedure does not account for the mass balance. This occurs because the contribution of the tail is neglected in the asymptotic expansion. Consequently, the total mass of the wave field should be considered as comprising two components: the mass contribution to the solitary wave and the mass contribution to its tail, which are separated as follows

$$M(t) = M_s(t) + M_t(t),$$

where M_s represents the mass contribution of the solitary wave and M_t accounts for the tail mass. The tail mass can be computed in terms of total mass and solitary wave mass as

$$M_t(t) = M(t) - M_s(t),$$

where $M(t)$ is give in equation (2.5). On the other hand, the solitary wave mass is

$$M_s(T) = \frac{a(T)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(k\Phi) d\Phi = \frac{a(T)}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\Phi) d\Phi = \frac{4}{3} \sqrt{30} a^{3/4}(T).$$

Substituting (3.4) into (2.4) that the solitary wave mass is

$$M_s(t) = \frac{4}{3} \sqrt{30} a_0^{3/4} e^{-\frac{6}{7}\epsilon\nu t}$$

Now, notice that our initial data is a solitary wave, thus the initial mass

$$M_0 = M_s(0) = \frac{4}{3} \sqrt{30} a_0^{3/4}.$$

Thus the tail mass is given by

$$\begin{aligned} M_t(t) = M(t) - M_s(t) &= \frac{4}{3} \sqrt{30} a_0^{3/4} e^{-\epsilon\nu t} - \frac{4}{3} \sqrt{30} a_0^{3/4} e^{-\frac{6}{7}\epsilon\nu t} = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{30} a_0^{3/4} e^{-\epsilon\nu t} (1 - e^{\frac{1}{7}\epsilon\nu t}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

This expression shows that for the total mass can be negative. Physically, this means that a tail forms just behind the solitary waves. Figure 3.1 displays the evolution of the ratio of the tails mass and the initial solitary wave mass.

4. Numerical simulation of the damped Schamel equation

We solve equation (2.1) using the standard pseudospectral method detailed in [24]. Spatial derivatives are computed spectrally and then equation is integrated over time using the classical explicit forth-order Runge-Kutta method. The same method has been employed to solve equation (2.1) in [14], [25], [26].

Figure 4.1 illustrates the evolution of a solitary wave in a weakly damped wave field. As the solitary wave propagates to the right, a tail forms behind it. The effect of damping is evident in the solitary wave amplitude, which decreases over time. The tail exhibits oscillatory behavior with negative mass. A series of snapshots capturing this evolution is

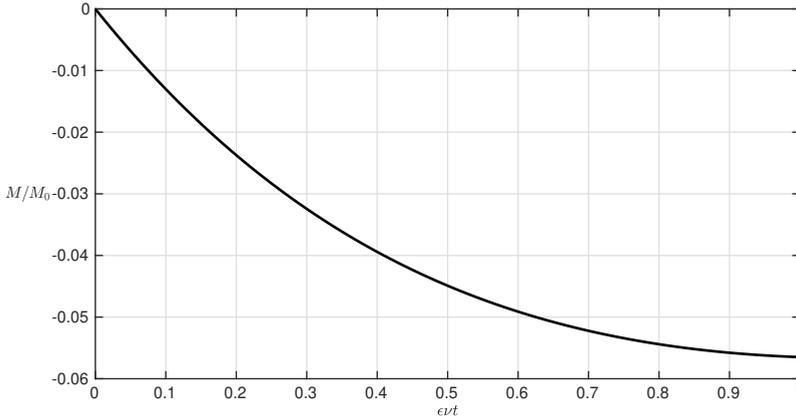


Рис. 3.1. Временная эволюция массы хвостов солитонного решения

Fig. 3.1. The evolution of the tail mass quantity

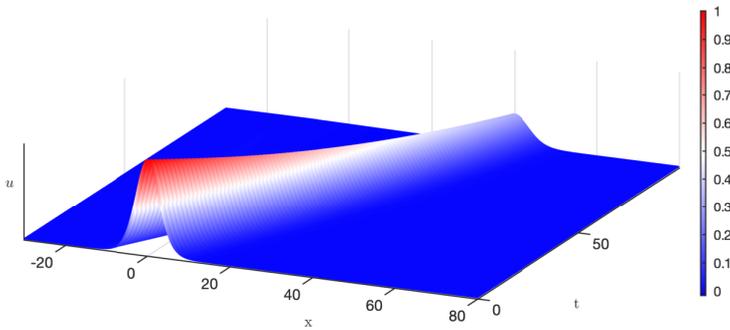


Рис. 4.1. Эволюция солитонного решения в среде со слабым затуханием ($\epsilon\nu = 0.01$)

Fig. 4.1. The evolution of a solitary wave in the weak damping field. Here, $\epsilon\nu = 0.01$

provided in Figure 4.2. The tail, which is of order $\mathcal{O}(10^{-4})$, is small compared to the solitary wave amplitude at early times. The wave field in the vicinity of $u = 0$ is smooth, but the nonlinearity here is not analytic. This is because, in the opposite case, the third derivative would have a jump.

In the case of strong damping, the solitary wave amplitude decays more rapidly, and the tail forms more quickly than in the previous scenario. Notably, the amplitude of the dispersive tail is larger under strong damping. Our simulations indicate that the tail amplitude scales with $\mathcal{O}(\nu^2)$. Figure 4.3 shows the evolution of a solitary wave in a stronger damping field, where a tail forms behind the solitary wave. For further details, see Figure 4.4. Despite the quantitative differences with higher damping values, the qualitative features remain consistent.

As we increase further the damping coefficient to $\nu = 1$. In this case, the damping is so strong the the solitary wave is destroyed in a short period of time. An example of such case

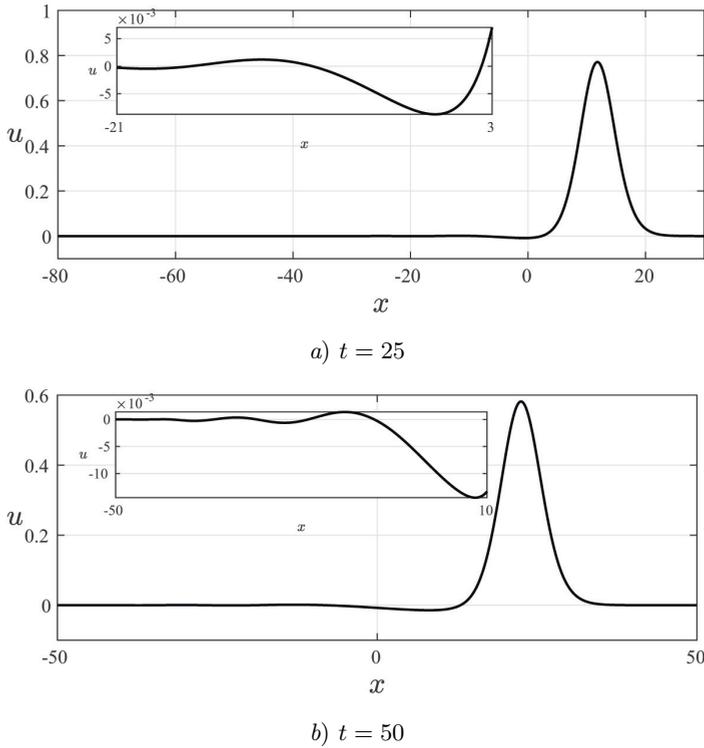


Рис. 4.2. Моментальные снимки эволюции солитонного решения. Начальная амплитуда уединённой волны $a_0 = 1$, коэффициент затухания $\epsilon\nu = 0.01$.

Fig 4.2. Snapshots of the solitary wave evolution. The initial solitary wave amplitude is $a_0 = 1$ and the damping coefficient $\epsilon\nu = 0.01$.

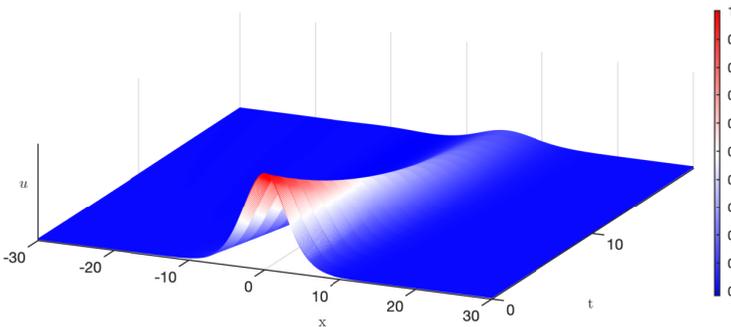
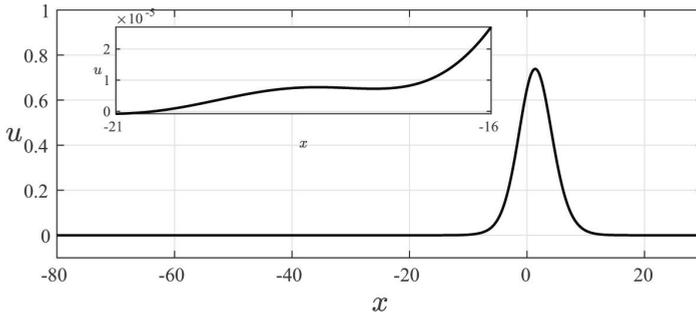


Рис. 4.3. Эволюция солитонного решения в среде с затуханием ($\epsilon\nu = 0.1$)

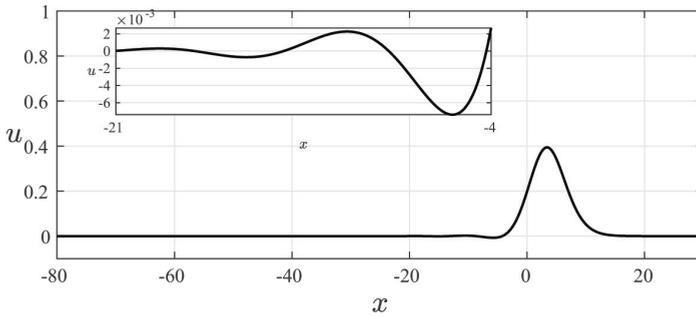
Fig. 4.3. The evolution of a solitary wave in the damping field. Here, $\epsilon\nu = 0.1$

is shown in Figure 4.5.

Finally, Figure 4.6 compares the amplitude of the solitary wave computed asymptotically



a) $t = 4$



b) $t = 10$

Рис. 4.4. Моментальные снимки эволюции солитонного решения. Начальная амплитуда уединённой волны $a_0 = 1$, коэффициент затухания $\epsilon\nu = 0.1$.

Fig 4.4. Snapshots of the solitary wave evolution. The initial solitary wave amplitude is $a_0 = 1$ and the damping coefficient $\epsilon\nu = 0.1$.

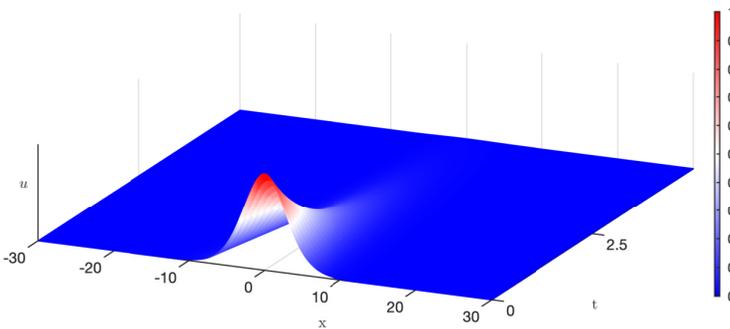


Рис. 4.5. Эволюция солитонного решения в среде с сильным затуханием ($\epsilon\nu = 1$)

Fig. 4.5. The evolution of a solitary wave in the strong damping field. Here, $\epsilon\nu = 1$

with that obtained from numerical simulations for different values of ν . Both approaches

yield qualitatively similar results. However, the quantitative agreement is observed only at early times, with discrepancies emerging as time progresses. Notice yet that when damping is stronger, the solitary wave cannot maintain its shape or behave as a pulse of constant width, as the effects of nonlinearity and dispersion become smaller compared to damping. In this scenario, the energy balance (or the direct Schamel equation without nonlinearity and dispersion) results in $a(t) \sim \exp(-\epsilon\nu t)$. Consequently, the slope of the curves in Figure 4.6 (right) changes from $8/7$ for weak damping to 1 for strong damping, indicating a slower rate of decay.

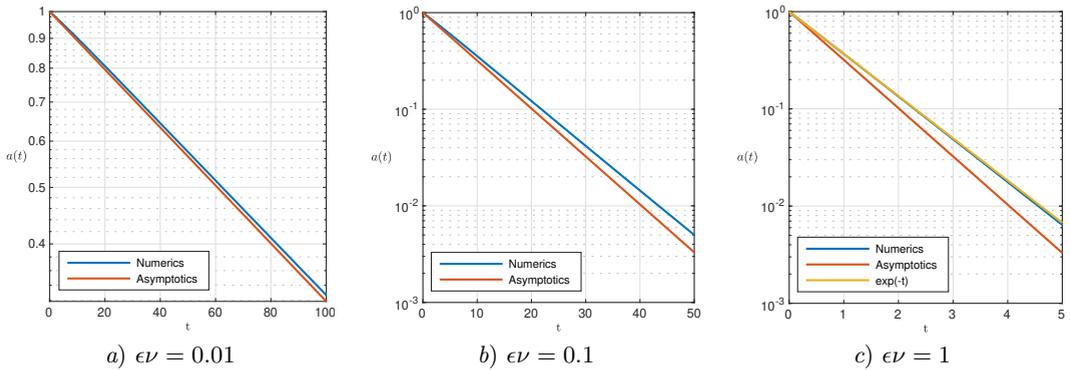


Рис. 4.6. Сравнение амплитуд солитонных решений, полученных с помощью асимптотической теории, с результатами численного моделирования в полулогарифмическом масштабе.

Fig 4.6. Comparison between the solitary wave amplitudes predicted by the asymptotic theory and the numerical simulations in the semi-log scale.

5. Conclusion

In the framework of the Schamel equation, we asymptotically determined the solitary wave amplitude and its decay rate, as well as the solitary wave's position at any given time. Additionally, we demonstrated that a tail forms behind the solitary wave and calculated its mass, showing that the tail mass is negative. To validate the asymptotic results, we performed numerical simulations. Overall, there is good qualitative agreement between the asymptotic predictions and the numerical results for weak and strong damping.

Funding. Research of EP and TT was supported by the RSF grant 24-47-02007.

Acknowledgements. The authors are grateful to Ioann Melnikov for his assistance in preparing the LaTeX version of this paper.

REFERENCES

1. H. Schamel, "Stationary solitary, snoidal, and sinusoidal ion acoustic waves", *Physics of Plasmas*, **14** (1972), 905–924.

2. H. Schamel, “A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons”, *Journal of Plasma Physics*, **9** (1973), 377–387. DOI: 10.1017/S002237780000756X
3. R. Ali, A. Saha, P. Chatterjee, “Analytical electron acoustic solitary wave solution for the forced KdV equation in superthermal plasmas”, *Physics of Plasma*, **24** (2017). DOI: 10.1063/1.4994562
4. S. Chowdhury, L. Mandi, P. Chatterjee, “Effect of externally applied periodic force on ion acoustic waves in superthermal plasmas”, *Physics of Plasmas*, **25** (2018). DOI: 10.1063/1.5017559
5. A. Mushtaq, H. A. Shah, “Study of non-Maxwellian trapped electrons by using generalized (r,q) distribution function and their effects on the dynamics of ion acoustic solitary waves”, *Physics of Plasmas*, **13** (2006). DOI: 10.1063/1.2154639
6. G. Williams, F. Verheest, M. A. Hellberg, M. G. M. Anwar, I. A. Kourakis, “A schamel equation for ion acoustic waves in superthermal plasmas”, *Physics of Plasmas*, **21** (2014). DOI: 10.1063/1.4894115
7. A. Saha, P. Chatterjee, “Qualitative structures of electron-acoustic waves in an unmagnetized plasma with q-nonextensive hot electrons”, *The European Physical Journal Plus*, **130** (2015). DOI: 10.1140/epjp/i2015-15222-2
8. A. Saha, P. Chatterjee, “Solitonic, periodic, quasiperiodic, and chaotic structures of dust ion acoustic waves in nonextensive dusty plasmas”, *The European Physical Journal D*, **69** (2015). DOI: 10.1140/epjd/e2015-60115-7
9. A. I. Zemlyanukhin, I. V. Andrianov, A. V. Bochkarev, L. I. Mogilevich, “The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells”, *Nonlinear Dynamics*, **98** (2019), 185–194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5
10. M. Ruderman, E. Pelinovsky, T. Talipova, “Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions”, *Journal of Plasma Physics*, **74** (2008), 639–656. DOI: 10.1017/S0022377808007150
11. M. S. Ruderman, N. S. Petrukhin, E. Pelinovsky, L. Y. Kataeva, “Quasi-parallel propagating solitons in magnetised relativistic electron-positron plasmas”, *Journal of Plasma Physics*, **89** (2023). DOI: 10.1017/S0022377823000156
12. M. V. Flamarion, E. Pelinovsky, E. Didenkulova, “Investigating overtaking collisions of solitary waves in the Schamel equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **174** (2023). DOI: 10.13140/RG.2.2.27768.62729
13. E. Didenkulova, E. Pelinovsky, M. V. Flamarion, “Bipolar solitary wave interactions within the Schamel Equation”, *Mathematics*, **11** (2023), 4649. DOI: 10.13140/RG.2.2.28055.55204
14. M. V. Flamarion, E. Pelinovsky, E. Didenkulova, “Non-integrable soliton gas: The Schamel equation framework”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **180** (2024). DOI: 10.13140/RG.2.2.35906.15043

15. M. V. Flamarion, E. Pelinovsky, “Interactions of solitons with an external force field: Exploring the Schamel equation framework”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **174** (2023). DOI: 10.13140/RG.2.2.20039.98726
16. A. S. Shan, “Dissipative electron-acoustic solitons in a cold electron beam plasma with superthermal trapped electrons”, *Astrophysics and Space Science*, **364** (2019). DOI: 10.1007/s10509-019-3524-1
17. S. Sultana, I. Kourakis, “Dissipative ion-acoustic solitary waves in magnetised κ -distributed non-Maxwellian plasmas”, *Physics*, **4** (2022), 68–79. DOI: 10.3390/physics4010007
18. R. Grimshaw, “Internal solitary waves”, *Environmental Stratified Flows*, 2001, 1–27.
19. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, “Damping of large-amplitude solitary waves”, *Wave Motion*, **37** (2003), 351–364. DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00093-8
20. R. H. Grimshaw, N. F. Smyth, Y. A. Stepanyants, “Decay of Benjamin-Ono solitons under the influence of dissipation”, *Wave Motion*, **78** (2018), 98–115. DOI: 10.1016/J.WAVEMOTI.2018.01.005
21. V. P. Maslov, G. A. Omel’yanov, “Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion”, *Russian Mathematical Surveys*, **36** (1981), 73–149. DOI: 10.1070/RM1981v036n03ABEH004248
22. L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, Imperial College Press., London, 2015, 320 p.
23. L. Ostrovsky, E. Pelinovsky, V. Shrira, Y. Stepanyants, “Localized wave structures: Solitons and beyond”, *Chaos*, **34** (2024). DOI: 10.1063/5.0210903
24. L. N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, 2000, 160 p.
25. M. V. Flamarion, “Generation of trapped depression solitary waves in gravity-capillary flows over an obstacle”, *Computational and Applied Mathematics*, **41** (2022). DOI: 10.1007/s40314-021-01734-w
26. M. V. Flamarion, R. Ribeiro-Jr, “Solitary water wave interactions for the forced Korteweg-de Vries equation”, *Computational and Applied Mathematics*, **40** (2021). DOI: 10.1007/s40314-021-01700-6

Submitted 27.11.2024; Revised 25.04.2025; Accepted 28.05.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schamel H. Stationary solitary, snoidal, and sinusoidal ion acoustic waves. *Physics of Plasmas*. 1972. Vol. 14. P. 905–924.

2. Schamel H. A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons. *Journal of Plasma Physics*. 1973. Vol. 9. P. 377–387. DOI: 10.1017/S002237780000756X
3. Ali R., Saha A., Chatterjee P. Analytical electron acoustic solitary wave solution for the forced KdV equation in superthermal plasmas. *Physics of Plasma*. 2017. Vol. 9. DOI: 10.1063/1.4994562
4. Chowdhury S., Mandi L., Chatterjee P. Effect of externally applied periodic force on ion acoustic waves in superthermal plasmas. *Physics of Plasmas*. 2018. Vol. 25. DOI: 10.1063/1.5017559
5. Mushtaq A., Shah H. A. Study of non-Maxwellian trapped electrons by using generalized (r,q) distribution function and their effects on the dynamics of ion acoustic solitary waves *Physics of Plasmas*. 2006. Vol. 13. DOI: 10.1063/1.2154639
6. Williams G., Verheest F., Hellberg M. A., Anowar M. G. M., Kourakis I. A. Schamel equation for ion acoustic waves in superthermal plasmas. *Physics of Plasmas*. 2014. Vol. 21. DOI: 10.1063/1.4894115
7. Saha A., Chatterjee P. Qualitative structures of electron-acoustic waves in an unmagnetized plasma with q-nonextensive hot electrons. *The European Physical Journal Plus*. 2015. Vol. 130. DOI: 10.1140/epjp/i2015-15222-2
8. Saha A., Chatterjee P. Solitonic, periodic, quasiperiodic, and chaotic structures of dust ion acoustic waves in nonextensive dusty plasmas. *The European Physical Journal D*. 2015. Vol. 69. DOI: 10.1140/epjd/e2015-60115-7
9. Zemlyanukhin A. I., Andrianov I. V., Bochkarev A. V., Mogilevich L. I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98. P. 185–194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5
10. Ruderman M., Pelinovsky E., Talipova T. Dynamics of modulationally unstable ion-acoustic wavepackets in plasmas with negative ions. *Journal of Plasma Physics*. 2008. Vol. 74. P. 639–656. DOI: 10.1017/S0022377808007150
11. Ruderman M. S., Petrukhin N. S., Pelinovsky E., Kataeva L. Y. Quasi-parallel propagating solitons in magnetised relativistic electron-positron plasmas. *Journal of Plasma Physics*. 2023. Vol. 89. DOI: 10.1017/S0022377823000156
12. Flamarion M. V., Pelinovsky E., Didenkulova E. Investigating overtaking collisions of solitary waves in the Schamel equation *Chaos, Solitons and Fractals*. 2023. Vol. 174. DOI: 10.13140/RG.2.2.27768.62729
13. Didenkulova E., Pelinovsky E., Flamarion M. V. Bipolar solitary wave interactions within the Schamel Equation. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. DOI: 10.13140/RG.2.2.28055.55204
14. Flamarion M. V., Pelinovsky E., Didenkulova E. Non-integrable soliton gas: The Schamel equation framework. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024. Vol. 180. DOI: 10.13140/RG.2.2.35906.15043

15. Flamarion M. V., Pelinovsky E. Interactions of solitons with an external force field: Exploring the Schamel equation framework. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2023. Vol. 174. DOI: 10.13140/RG.2.2.20039.98726
16. Shan A. S. Dissipative electron-acoustic solitons in a cold electron beam plasma with superthermal trapped electrons. *Astrophysics and Space Science*. 2019. Vol. 364. DOI: 10.1007/s10509-019-3524-1
17. Sultana S., Kourakis I. Dissipative ion-acoustic solitary waves in magnetised κ -distributed non-Maxwellian plasmas. *Physics*. 2022. Vol. 4. P. 68–79. DOI: 10.3390/physics4010007
18. Grimshaw R. Internal solitary waves. *Environmental Stratified Flows*. 2001. P. 1–27.
19. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Damping of large-amplitude solitary waves. *Wave Motion*. 2003. Vol. 37. P. 351–364. DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00093-8
20. Grimshaw R. H., Smyth N. F., Stepanyants Y. A. Decay of Benjamin-Ono solitons under the influence of dissipation. *Wave Motion*. 2018. Vol. 78. P. 98–115. DOI: 10.1016/J.WAVEMOTI.2018.01.005
21. Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion. *Russian Mathematical Surveys*. 1981. Vol. 36. P. 73–149. DOI: 10.1070/RM1981v036n03ABEH004248
22. Ostrovsky L. Asymptotic Perturbation Theory of Waves. London: Imperial College Press, 2015. 320 p.
23. Ostrovsky L., Pelinovsky E., Shrira V., Stepanyants Y. Localized wave structures: Solitons and beyond. *Chaos*. 2024. Vol. 34. DOI: 10.1063/5.0210903
24. Trefethen L. N. Spectral Methods in MATLAB. SIAM, Philadelphia, 2000. 160 p.
25. Flamarion M. V. Generation of trapped depression solitary waves in gravity-capillary flows over an obstacle. *Computational and Applied Mathematics*. 2022. Vol. 41. DOI: 10.1007/s40314-021-01734-w
26. Flamarion M. V., Ribeiro-Jr R. Solitary water wave interactions for the forced Korteweg–de Vries equation. *Computational and Applied Mathematics*. 2021. Vol. 40. DOI: 10.1007/s40314-021-01700-6

*Поступила 27.11.2024; доработана после рецензирования 25.04.2025;
принята к публикации 28.05.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202502.243-254

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Численный алгоритм для исследования дозвукового потока с химическими реакциями в присутствии лазерного излучения**Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева, М. С. Мустайкин***МГУ им. Н. П. Огарёва (г. Саранск, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье разработан численный алгоритм для исследования дозвуковых вязких химически активных потоков в присутствии лазерного излучения. Модель процесса описана в приближении уравнений Навье-Стокса с поправкой на дозвуковой режим течения, добавлением источниковых членов, отвечающих химическим превращениям, и внедрением дополнительного обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего распространение лазерного излучения по длине исследуемой области. Вычислительный алгоритм построен с применением принципа расщепления по физическим процессам. Это позволяет отдельно рассчитывать изменения концентраций в ходе химических превращений, конвективные потоки, диссипативные члены, динамическое отклонение давления и распространение лазерного излучения. Для учета диссипативных слагаемых (диффузия, вязкость и теплопроводность) используется метод локальных итераций, основанный на упорядочивании полиномов Чебышева. Программная реализация построенного алгоритма выявила более короткие времена расчетов с использованием метода локальных итераций для расчета диссипативных членов в сравнении с алгоритмом, вычисляющим их на основе схемы с центральными разностями, за счет возможного использования более крупного общего расчетного шага по времени. Верификация алгоритма проведена на примере конверсии метана сравнением с расчетом стехиометрического баланса брутто-реакции процесса, а также исследованием сходимости решения на последовательности сгущающихся сеток. На основе разработанного алгоритма проведено численное исследование неокислительной конверсии метана под воздействием лазерного излучения в трубе круглого сечения, получены графики распределения основных характеристик смеси.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, схема ЛИ-М, дозвуковые течения, неокислительная конверсия метана, лазерное излучение

Для цитирования: Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Мустайкин М. С. Численный алгоритм для исследования дозвукового потока с химическими реакциями в присутствии лазерного излучения // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 2. С. 243–254. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.243-254

Об авторах:

Пескова Елизавета Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@math.mrsu.ru

© Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Мустайкин М. С.



Язовцева Ольга Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры прикладной математики, МГУ им. Н.П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, yaos@math.mrsu.ru

Мустайкин Максим Сергеевич, студент факультета математики и информационных технологий, МГУ им. Н.П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8690-0787>, maksimmustajkin@mail.ru

Original article

MSC2020 65L20

A Numerical Algorithm for Studying Subsonic Chemically Reacting Flow in the Presence of Laser Radiation

E. E. Peskova, O. S. Yazovtseva, M. S. Mustaykin

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. The article presents a numerical algorithm for studying subsonic viscous chemically active flows in the presence of laser radiation. The process model is described in the Navier – Stokes approximation adjusted for the subsonic flow regime, with addition of source terms corresponding to chemical transformations. An additional ordinary differential equation describing the propagation of laser radiation along the length of the region under study is introduced as well. The computational algorithm is based on splitting by physical processes. This makes it possible to calculate separately changes in concentrations during chemical transformations, convective fluxes, dissipative terms, dynamic pressure deviation and propagation of laser radiation. To account for the dissipative terms (diffusion, viscosity, and thermal conductivity), the local iteration method based on Chebyshev polynomials' ordering. Due to the possible use of a larger total calculation time step, the software implementation of the constructed algorithm reveals shorter calculation times using the local iteration method for calculating dissipative terms in comparison with the algorithm calculating them based on a scheme with central differences. The algorithm was verified using the example of methane conversion by comparing it with the calculation of the stoichiometric balance of the brutto-reaction, as well as by studying the convergence of the solution on a sequence of thickening grids. Based on the developed algorithm, a numerical study of non-oxidative conversion of methane under the influence of laser radiation in a circular tube was carried out, and graphs of the distribution of the main characteristics of the mixture were obtained.

Keywords: Navier-Stokes equations, LI-M scheme, subsonic flow, non-oxidative methane conversion, laser radiation

For citation: *E. E. Peskova, O. S. Yazovtseva, M. S. Mustaykin. A Numerical Algorithm for Studying Subsonic Chemically Reacting Flow in the Presence of Laser Radiation. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 27:2(2025), 243–254. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.243-254*

About the authors:

Elizaveta E. Peskova, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate professor, Senior Researcher, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@math.mrsu.ru

Olga S. Yazovtseva, Ph.D. (Phys. and Math.), Senior Researcher, Department of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, yaos@math.mrsu.ru

Maxim S. Mustaykin, student of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Ogarev Moscow State University (68/1 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8690-0787>, maksimmustajkin@mail.ru

1. Введение

Математическое моделирование химически активных течений в настоящее время является не до конца изученным направлением исследования физико-химических явлений. Системы сложны, неразрешимы аналитически, а вычислительные алгоритмы трудоемки и требуют специализированных подходов. Благодаря повсеместному распространению таких течений в природе (химия [1], физиологии [2], экологии [3]) разработка вычислительных алгоритмов для исследования подобных систем остается актуальной на протяжении долгого времени.

Исследование химически активных течений напрямую связано с необходимостью разработки новых математических моделей и вычислительных алгоритмов, обеспечивающих анализ течения многокомпонентных неизотермических процессов с целью выявления наиболее эффективных и безопасных условий течения реакций. Особую сложность при моделировании дозвуковых течений представляет выбор математической модели. Во-первых, требуется выявление необходимости учета диссипативных членов в модели: описание изменения энергии уравнением относительно энтальпии смеси допускает упрощение, связанное с незначительностью вклада внутреннего трения в полную энергию системы [4], но диссипативные члены остаются важной частью модели в законах сохранения массы и импульса [5]. Во-вторых, важен учет изменения давления, существенно влияющего на скорость [6], что усложняет вычислительный алгоритм в силу малости его изменения. Физические особенности дозвуковых химически реагирующих газовых потоков с учетом многокомпонентной диффузии, вязкости и теплопроводности обуславливают несколько основных проблем построения вычислительных алгоритмов для их исследования [7]. При использовании явных схем интегрирования по времени, которые являются предпочтительными при учете большого количества разномасштабных процессов, возникает жесткое ограничение на шаг интегрирования, связанное с самым быстрым процессом в изучаемой системе. Еще одна сложность заключается в возникновении уравнения Пуассона для давления, решение которого является трудоемкой задачей, особенно при моделировании процессов в 3D геометрии.

Исследование химически реагирующих течений под воздействием лазерного излучения остается актуальной проблемой на протяжении многих лет [8]. Вопрос изучения воздействия излучения на процессы химии возник еще до активного изучения лазеров. Первым масштабным исследованием процессов фотохимии является статья [9]. Основной теоретически значимый результат заключается в наблюдении активного внутримолекулярного переноса энергии, изменяющего характер течения реакции. Изменение хо-

да химических превращений под воздействием CO_2 -лазера представлено в работе [10]. Появление неожиданных продуктов реакции обусловило возможности управления параллельными и последовательными реакциями с использованием лазерного излучения. Теоретические оценки вероятности рекомбинации атомов и их влияние на ход термохимического процесса описаны в работе [11]. Здесь же приведены обоснования значимости использования математических методов для решения задач лазерной термохимии. Подвод в систему лазерного излучения и, как следствие, локальные изменения температуры и компонентного состава смеси может накладывать серьезные ограничения на построение вычислительного алгоритма, в частности, может влиять на шаг интегрирования по времени общей системы уравнений.

В силу необходимости учета большого набора физико-химических процессов, характеризующимися существенно отличными временами протекания, а также локальными изменениями характеристик течения в исследуемых областях, вопрос построения вычислительных алгоритмов для подобных течений остается актуальным. Вычислительные алгоритмы должны обладать высокой точностью при сохранении приемлемого времени получения результатов на высокопроизводительных вычислительных системах.

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма на основе схемы локальных итераций для моделирования химически активных дозвуковых потоков под воздействием лазерного излучения. Алгоритм протестирован на задаче неокислительной конверсии метана в осесимметричном приближении течения среды.

2. Математическая модель дозвукового химически активного газового потока в присутствии лазерного излучения

В зависимости от характера газовых течений применяется та или иная модификация уравнений типа Навье-Стокса. Мы рассматриваем течения при малом изменении давления в области и при малых числах Маха. Однако, течение не может быть признано несжимаемым, поскольку за счет нагрева смеси и химических реакций происходит изменение объема [6]. При малых изменениях давления система уравнений Навье-Стокса может быть записана относительно поправки к давлению, постоянному в области [7], и обуславливает сложность подбора численного метода для решения системы с целью учета влияния давления на скорость потока. Учет энергии лазерного излучения реализуется как дополнительный источниковый член в уравнении энергии величины его интенсивности, изменение которой определяется из обыкновенного дифференциального уравнения [12]. Таким образом, математическая модель химически реагирующих течений под воздействием лазерного излучения описана модифицированной системой уравнений Навье-Стокса [7], дополненной уравнением для интенсивности лазерного излучения [13]:

$$\frac{\partial \rho Y_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho Y_m \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{J}_m + R_m, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) - \nabla \pi + \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho h \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} + \alpha \theta, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\theta(l)}{dl} = -\alpha \theta(l), \quad (2.4)$$

где $m = \overline{1, M}$, M – количество компонент в газовой смеси; ρ – плотность смеси; Y_m – массовая доля m -ой компоненты смеси; \vec{v} – вектор скорости; h – энтальпия смеси; \vec{J}_m – вектор диффузионного потока; R_m – скорость образования или расхода m -ой компоненты смеси; p – давление; $\bar{\tau}$ – тензор вязких напряжений; \vec{q} – вектор потока тепла для смеси; α – коэффициент поглощения; θ – интенсивность излучения; l – координата вдоль направления распространения лазерного излучения; $\pi = p - p_0$ – отклонение давления от давления p_0 , постоянного в области; p – полное давление, при этом $\frac{|\pi|}{p_0} \sim O(M^2)$.

Вектор диффузии описывает диффузию многокомпонентного потока:

$$\vec{J}_m = -\rho D_{m,mix} \nabla Y_m, \quad (2.5)$$

где $D_{m,mix}(Y_m, T)$ – средний по смеси коэффициент диффузии m -ой компоненты.

Вектор потока тепла включает в себя конвективный теплоперенос и изменение температуры в ходе химических реакций:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T - \sum_m h_m \rho D_{m,mix} \nabla Y_m, \quad (2.6)$$

где $h_m(T)$ – энтальпия компоненты m .

Тензор вязких напряжений примет вид:

$$\bar{\tau} = \mu \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) I, \quad (2.7)$$

где $\mu(Y_m, T)$ – вязкость смеси.

Динамика температуры определяется изменением энергии в системе. Энтальпия смеси рассчитывается как средневзвешенное энтальпий компонент

$$h(T, Y_m) = \sum_m Y_m h_m(T). \quad (2.8)$$

Условие на дивергенцию вектора скорости выводится из недивергентного вида уравнения неразрывности, уравнения состояния идеального газа и уравнения (2.3), что еще раз указывает на сжимаемость исследуемых течений:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho C_p T} \left(\nabla \cdot \lambda \nabla T + \sum_m \rho D_{m,mix} \nabla Y_m \nabla h_m + \alpha \theta \right) + \quad (2.9)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sum_m \frac{M_w}{M_{wm}} (\nabla \cdot \rho D_{m,mix} \nabla Y_m) + \frac{1}{\rho} \sum_m \left(\frac{M_w}{M_{wm}} - \frac{h_m}{C_p T} \right) R_m \equiv S, \quad (2.10)$$

где $C_p(Y_m, T)$ – теплоемкость смеси при постоянном давлении; M_w – молекулярная масса смеси. Дивергенция скорости далее используется при расчете отклонения давления π и скорости в уравнении (2.2).

3. Вычислительный алгоритм

3.1. Разработка алгоритма

В настоящей работе построение алгоритма выполнено на основе принципа расщепления по физическим процессам [14]. Интегрирование по времени производится явным

методом Эйлера, шаг выбирается из условия устойчивости для гиперболической части системы [15] посредством использования схемы локальных итераций для диссипативных составляющих модели. В работе [16] приведена детализация вычислительного алгоритма на основе схемы локальных итераций для многокомпонентных уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха без слагаемых для учета лазерного излучения. Однако, подвод лазерного излучения локально меняет температуру и компонентный состав смеси, что может усилить диффузионные ограничения на шаг интегрирования по времени. В настоящей работе проведено расширение алгоритма, который представляет собой следующую последовательность вычислений:

1. Решение системы уравнений химической кинетики.

Для решения системы дифференциальных уравнений, полученной из схемы химических реакций, подключен модуль RADAU5, который представляет собой программную реализацию трехстадийного метода Рунге-Кутты пятого порядка точности с адаптивным шагом [17].

2. Решение задачи Коши для уравнения интенсивности лазерного излучения.

Расчет интенсивности излучения вдоль оси трубы проведен с использованием модуля RADAU5.

3. Решение гиперболической задачи для конвективных составляющих системы (2.1) – (2.3).

Для расчета конвективных потоков применены потоки Русанова с модифицированным стабилизирующим членом [6].

4. Решение параболической задачи для учета членов, отвечающих процессам диффузии, вязкости, теплопроводности, в системе (2.1) – (2.3).

Решение самой трудоемкой задачи – расчет диссипативных членов. Для расчета применена явная схема локальных итераций на основе упорядочивания корней полинома Чебышева [15]. Применение схемы позволило значительно увеличить шаг интегрирования по времени за счет ослабления условия устойчивости – устойчивость достигается за счет использования определенного порядка корней полиномов Чебышева как итерационных параметров.

5. Решение эллиптической задачи для динамического давления и коррекция вектора скорости.

Расчет динамической составляющей давления выполнен с использованием метода Якоби. Его эффективность на данном этапе обусловлена малостью изменения давления – за начальное приближение берется давление на предыдущем временном шаге.

3.2. Верификация алгоритма

Ввиду отсутствия в широком доступе экспериментальных данных по неокислительной конверсии метана в присутствии лазерного излучения верификация алгоритма проводилась на основании стехиометрического уравнения для брутто-реакции процесса:



Из стехиометрического уравнения следует, что 2 моль метана CH_4 превращаются в 1 моль водорода H_2 и 1 моль этана C_2H_6 .

Для проведения вычислительного эксперимента рассмотрим цилиндрическую трубу длины 0.1 м и радиуса 0.05 м, на 100% заполненную метаном без подвода реакционной смеси. При подаче энергии от нагрева стенок и лазерного излучения расчет для полного распада метана дает следующие концентрации продуктов: 6.3% водорода и 93.7% этана.

С учетом значений молярной массы используемых веществ:

$$M(CH_4) = 16 \text{ г/моль}, \quad M(H_2) = 2 \text{ г/моль}, \quad M(C_2H_6) = 28 \text{ г/моль}$$

сделаем пересчет на 1 кг реакционной смеси по результатам вычислительного эксперимента:

$$CH_4 : 1000 \text{ г} \sim 62.5 \text{ моль}, \quad H_2 : 63 \text{ г} \sim 31.2 \text{ моль}, \quad C_2H_6 : 937 \text{ г} \sim 31.5 \text{ моль}.$$

Из пересчета количества продуктов на 1 кг реакционной смеси по стехиометрическому уравнению

$$CH_4 : \sim 62.5 \text{ моль}, \quad H_2 : \sim 31.25 \text{ моль}, \quad C_2H_6 : \sim 31.25 \text{ моль},$$

Из хорошей согласованности расчетных данных и результатов, вычисленных по стехиометрическому уравнению, следует адекватность материального баланса модели и вычислительного алгоритма.

Исследуем сходимость алгоритма на последовательности сгущающихся сеток. Были выбраны сетки размерности 300×10 , 600×20 , 1200×40 , интегрирование велось с сохранением числа Куранта $\frac{a\Delta t}{h} \approx 0.01$. Рис. 3.1 иллюстрирует результаты расчета для различных размеров пространственных сеток (измельчающихся шагов по пространству).

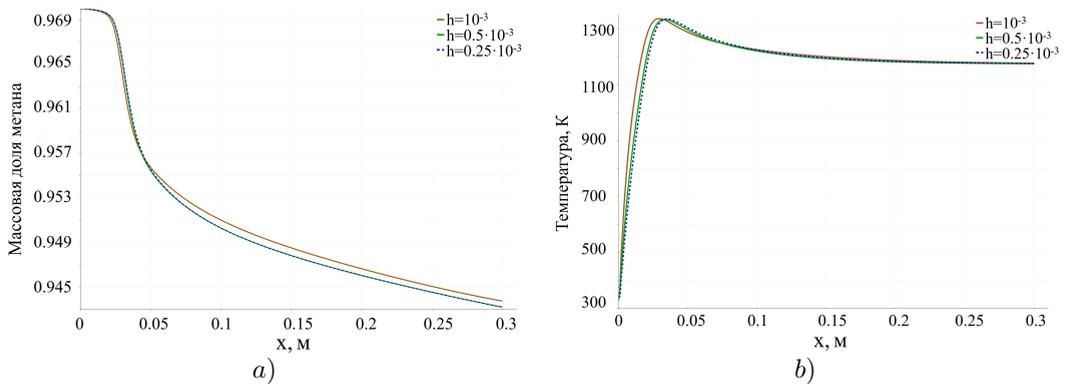


Рис. 3.1. Расчет на последовательности сгущающихся сеток:
а) массовая доля метана, б) температура газа

Fig. 3.1. Calculation based on a sequence of thickening grids:
а) mass fraction of methane, б) gas temperature

На рис. 3.1 размер шага обозначен в легенде в правых верхних углах поля графиков. Как видно, алгоритм показывает достаточно быструю сходимость: графики для шагов

интегрирования по пространству $0.5 \cdot 10^{-3}$ м и $0.25 \cdot 10^{-3}$ м отличаются незначительно. Порядок аппроксимации по пространству рассчитан по правилу Рунге в норме L^2 . Для массовой доли метана получено значение 2.38, для температуры газа – 1.94.

Было проведено сравнение расчетного времени разработанного алгоритма и алгоритма, в котором не предусмотрено отщепление диффузионных потоков [6]. Посредством вычислительных экспериментов при сравнении двух алгоритмов расчетный шаг по времени увеличен в 5 раз по сравнению с требованиями диффузионных ограничений. Получено ускорение расчетов по разработанному алгоритму приблизительно в 6 раз при расчетах на кластере МГУ им. Н.П. Огарева на 12 вычислительных узлах.

4. Численные эксперименты по исследованию течения газа в осесимметричной трубе круглого сечения

Для проведения вычислительного эксперимента выбраны следующие расчетные параметры. Цилиндрическая труба длины 0.3 м, диаметра 0.02 м. В начальный момент времени труба заполнена метаном температурой 1073 К, температура ее стенок 1173 К. На вход подана смесь состава метан (97%), этилен (3%) с объемной скоростью 60 л/ч, температуры 300 К. Через левый торец трубы вдоль оси симметрии пущен лазерный луч мощности излучения 30 Вт. Давление на выходе из трубы 101325 Па. Для описания схемы химических превращений принята радикальная схема конверсии метана, включающая 15 компонент смеси [1].

Для расчета выбраны следующие шаги интегрирования по радиусу реактора и его оси: $h_r = h_z = 10^{-3}$ м. Шаг интегрирования по времени равен $5 \cdot 10^{-5}$ с. В качестве исследуемого процесса выбрана неокислительная конверсия метана. На рис. 4.1 представлены результаты расчетов, полученные с использованием программной реализации разработанного алгоритма при времени 5 секунд.

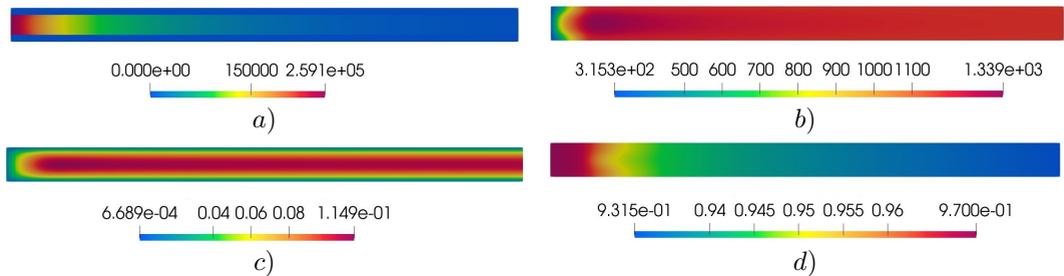


Рис. 4.1. Результаты расчетов для неокислительной конверсии метана под воздействием лазерного излучения: *a)* интенсивность излучения, Вт/м², *b)* температура, К, *c)* скорость, м/с, *d)* массовая доля метана

Fig 4.1. Calculation results for non-oxidative conversion of methane under the influence of laser radiation: *a)* radiation intensity, W/m², *b)* temperature, K, *c)* velocity, m/s, *d)* mass fraction of methane

Лазерное излучение поглощается этиленом, что объясняет снижение его интенсивности от левого торца трубы к правому (рис. 4.1*a*). Вклад поглощаемой энергии дает картину распределения температурного поля – в области максимального поглощения лазерного излучения температура увеличилась на 160 К по сравнению с температурой

стенок (рис. 4.1b). Распределение скорости (рис. 4.1c) параболично, что согласуется с ранее наблюдаемыми эффектами в вычислительных экспериментах [6]. При этом в первой половине трубы, в которой поглощается большая часть лазерного излучения, запускается процесс разложения метана (рис. 4.1d) с образованием радикалов и продуктов реакции. Во второй половине трубы реакции в основном протекают за счет энергии, подаваемой от стенок (рис. 4.1b).

5. Заключение

В статье представлен численный алгоритм для исследования дозвуковых химически реагирующих потоков с учетом многокомпонентных теплопроводности, вязкости, диффузии и в присутствии лазерного излучения, которое существенно меняет температуру компонентный состав смеси. Исследуемая математическая модель представляет собой модифицированную систему уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха. Вычислительный алгоритм основан на принципе расщепления по физическим процессам: задача разделена на несколько подзадач, для решения каждой из которых применен адекватный ей численный метод. Особенностью алгоритма является адаптация в него схемы локальных итераций для снятия диффузионных ограничений на шаг интегрирования по времени. Алгоритм исследован на сходимость в постановке сгущающихся сеток с сохранением числа Куранта. Верификация алгоритма проведена на примере брутто-реакции неокислительной конверсии метана.

В дальнейшем планируется расширение разработанного алгоритма на решение трехмерных задач в цилиндрической системе координат, а также на расчет течения многофазной среды газ-пылевая твердая фаза с химическими реакциями на ее поверхности.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект N 23-21-002, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лашина Е. А., Пескова Е. Е., Снытников В. Н. Математическое моделирование нестационарной температурной конверсии метан-этановых смесей в широком диапазоне температур // *Химия в интересах устойчивого развития*. 2023. Т. 31, № 3. С. 288–296. DOI: 10.15372/KhUR2023467
2. Bezyaev V. I., Sadekov N. K. On Hemodynamics Problems on Graphs. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 239, no. 6. P. 725–738. DOI: 10.1007/S10958-019-04322-W
3. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Белова Ю. В., Кузнецова И. Ю. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36, № 3. С. 95–114. DOI: 10.20948/mm-2024-03-07
4. Majda A., Sethian J. The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion. *Combustion Science and Technology*. 1985. Vol. 42, no. 3-4. P. 185–205. DOI: 10.1080/00102208508960376

5. Rehm R. G., Baum H. R. The equation of motion for thermally driven, buoyant flows. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. 1978. Vol. 83, no. 3. P. 297–308. DOI: 10.6028/jres.083.019
6. Пескова Е. Е., Снытников В. Н., Жалнин Р. В. Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с разномасштабными химическими процессами // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2023. Т. 15, № 5. С. 1169–1187. DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1169-1187
7. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry. *Combustion Theory and Modelling*. 2000. Vol. 4, no. 4. P. 535–556. DOI: 10.1088/1364-7830/4/4/309
8. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Термохимическое действие лазерного излучения // *Успехи физических наук*. 1982. Т. 138, № 1. С. 45–94. DOI: 10.3367/UFNr.0138.198209b.0045
9. Hall R. T., Pimentel G. C. Isomerization of Nitrous Acid: An Infrared Photochemical Reaction. *The Journal of Chemical Physics*. 1963. Vol. 38, no. 8. P. 1889–1897. DOI: 10.1063/1.1733892
10. Басов Н. Г., Маркин Е. П., Ораевский А. Н., Панкратов А. В. Фотохимическое действие инфракрасного излучения // *Докл. АН СССР*. 1971. Т. 198, № 5. С. 1043–1045.
11. Торбин А. П., Михеев П. А., Аязов В. Н. Гетерогенные реакции атомов йода в лазерной среде $O_2 (^1\Delta) - I$ // *Известия Самарского научного центра РАН*. 2013. Т. 15, № 4. С. 133–135.
12. Snytnikov V. N., Snytnikov V. N., Masyuk N. S., Markelova T. V. The Absorption of CO₂ Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2020. Vol. 253, 107119. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2020.107119
13. Пескова Е. Е., Снытников В. Н. Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 3. С. 159–173. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202303.159-173
14. Марчук Г. И. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988. – 263 с.
15. Zhukov V. T., Feodoritova O. B., Novikova N. D., Duben A. P. Explicit-Iterative Scheme for the Time Integration of a System of Navier–Stokes Equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2020. Vol. 12, no. 6. P. 958–968. DOI: 10.1134/S2070048220060174
16. Peskova E. E., Yazovtseva O. S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024. Vol. 64, no. 2. P. 326–339. DOI: 10.1134/S0965542524020106
17. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Springer-Verlag, 1996. DOI: 10.1007/978-3-662-09947-6

Поступила 18.02.2025; доработана после рецензирования 22.04.2025;
принята к публикации 28.05.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. E. A. Lashina, E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Mathematical Modeling of the Dynamics of Thermal Conversion of Methane-Ethane Mixtures in a Wide Temperature Range”, *Chemistry for Sustainable Development*, **31**:3 (2023), 278–286. DOI: 10.15372/KhUR2023467
2. V. I. Bezyaev, N. K. Sadekov, “On Hemodynamics Problems on Graphs”, *Journal of Mathematical Sciences*, **239**:6 (2019), 725–738. DOI: 10.1007/S10958-019-04322-W
3. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, Yu. V. Belova, I. Yu. Kuznetsova, “Analytical and numerical study of the problem of plankton population dyncrossrefamics in the presence of microplastics”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **36**:3 (2024), 95–114 (In Russ.). DOI: 10.20948/mm-2024-03-07
4. A. Majda, J. Sethian, “The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion”, *Combustion Science and Technology*, **42** (1986), 185–205. DOI: 10.1080/00102208508960376
5. R. G. Rehm, H. R. Baum, “The equation of motion for thermally driven, buoyant flows”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **83**:3 (1978), 297–308. DOI: 10.6028/jres.083.019
6. E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, R. V. Zhalnin, “The computational algorithm for studying internal laminar flows of a multicomponent gas with different-scale chemical processes”, *Computer research and modeling*, **15**:5 (2023), 1169–1187. DOI: 10.1080/00102208508960376
7. M. S. Day, J. B. Bell, “Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry”, *Combustion Theory and Modelling*, **4**:4 (2000), 535–556. DOI: 10.1088/1364-7830/4/4/309
8. F. V. Bunkin, N. A. Kirichenko, B. S. Luk’yanchuk, “Thermochemical action of laser radiation”, *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **138**:1 (1982), 45–94 (In Russ.). DOI: 10.3367/UFNr.0138.198209b.0045
9. R. T. Hall, G. C. Pimentel, “Isomerization of Nitrous Acid: An Infrared Photochemical Reaction”, *The Journal of Chemical Physics*, **38**:8 (1963), 1889–1897. DOI: 10.1063/1.1733892
10. N. G. Basov, E. P. Markin, A. N. Oraevsky, A. V. Pankratov, “Photochemical action of infrared radiation”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **198**:5 (1971), 1043–1045 (In Russ.).
11. A. P. Torbin, P. A. Mikheyev, V. N. Azyazov, “Heterogeneous reactions of iodine atoms in the laser medium $O_2(^1\Delta) - I^*$ ”, *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra*, **15**:4 (2013), 133–135 (In Russ.).

12. V.I. N. Snytnikov, V.N. Snytnikov, N.S. Masyuk, T. V. Markelova, “The Absorption of CO₂ Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **253**:107119 (2020). DOI: 107119. -10.1016/j.jqsrt.2020.107119
13. E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Numerical Study of Methane Mixtures’ Conversion Under the Influence of Laser Radiation”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **25**:3 (2023), 159–173. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202303.159-173
14. G. I. Marchuk, *Splitting methods*, Nauka, Moscow, 1988, 264 p.
15. V. T. Zhukov, O. B. Feodoritova, N. D. Novikova, A. P. Duben, “Explicit-Iterative Scheme for the Time Integration of a System of Navier–Stokes Equations”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **12**:6 (2020), 958–968. DOI: 10.1134/S2070048220060174
16. E. E. Peskova, O. S. Yazovtseva, “Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **61**:2 (2024), 326–339. DOI: 10.1134/S0965542524020106
17. E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, 1996 DOI: 10.1007/978-3-662-09947-6.

Submitted 18.02.2025; Revised 22.04.2025; Accepted 28.05.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются переносом основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей в журнале принята система BGN/PCGN без диакритических знаков. Ей можно воспользоваться на сайте <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Здесь необходимо выбрать **BGN/PCGN** упрощенная без диакритических знаков.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018)*, 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society (American Mathematical Society)* and *European Mathematical Society (European Mathematical Society)*. To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet into Latin, the journal uses the BGN/PCGN system without diacritics. It can be used on the website <https://www.translit.site/ru/type/bgn-pcgn-simplified>. Here you need to select BGN/PCGN simplified without diacritics.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы (на англ.): {MSC 2020} {Название статьи} {И.О. Фамилия} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова}

Для оформления заголовков статьи на английском языке используются команды `\headerFirstEn` и `\headerSecondRus`, соответственно.

Аргументы команды `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Название статьи на англ. яз.} {И.О. Фамилия на англ. яз.} {И.О. Фамилия со сносками на организации на англ. яз.} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов) на англ. яз.} {Аннотация на англ. яз.} {Ключевые слова на англ. яз.} {Название статьи на рус. яз.} {Фамилия И.О. на рус. яз.}

Аргументы команды `\headerSecondRus` на рус. яз.: {УДК} {Название статьи} {Фамилия И.О.} {И.О. Фамилия со сносками на организацию(-и)} {Организации (название, город, страна) со сносками на автора(-ов)} {Аннотация} {Ключевые слова} {Фамилия И.О.}.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить

использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилового пакета svmbib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневолжского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе thebibliography:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
```

\yr 2016

\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}

\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,

\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

\jour Ogarev-online

\vol 20

\yr 2016

\lang In Russ.

\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}

\by A. B. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев

\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий

\inbook Прикладная математика и механика

\publaddr Ульяновск

\publ УлГТУ

\yr 2014

\issue 10

\pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}

\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev

\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]

\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]

\publaddr Ulyanovsk

\publ UIGTU Publ.

\yr 2014

\issue 10

\pages 4–13

\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}

\by Ю. Н. Бибииков

\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений

\publaddr М.

\publ Выш. шк.

\yr 1991
 \totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991
 \totalpages 303
 \lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
 \by В. Г. Малинов
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
 \bookvol II
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ ФИЦ ИУ РАН
 \publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
 \by V. G. Malinov
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
 \bookvol II
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ FRC CSC RAS Publ.
 \publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmo.sty` and `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles.

To format article headings in English, use the following commands: `\headerFirstEn` and `\headerSecondRus`, respectively.

Command arguments `\headerFirstEn`: {MSC2020} {Article title in English} {I. O. Last name in English} {I. O. Last name with footnotes to organizations in English} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors in English} {Abstract in English} {Keywords in English} {Article title in Russian} {Last name I. O. in Russian}

Command arguments `\headerSecondRus` in Russian: {UDC} {Article title} {Last name I. O.} {I. O. Last name with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Last name I. O.}.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment `equation`. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the `equation*` environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` and `Example`. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the `table` environment with the nested `tabular` environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name \ \ \textbf{Table} \ref{shamanaevtable1}.} Table name in
English \label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \ \ \
First column name in English & Second column name in English \ \ \
```

```

\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript). The editors of the journal must also provide the same images in JPG format with a resolution of 300 dots per inch (dpi).

To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert one picture

```

\insertpicture1 {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\insertpicture2 {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {common_caption} {common_caption_in_English}

```

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

```
\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

Articles in collections in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

Books (monographs and collections) in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

Conference proceedings in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
```

`\paper` Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
`\inbook` VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
`\bookvol` II
`\procinfo` Moscow, October 17-22, 2016
`\yr` 2016
`\pages` 48–50
`\publ` FRC CSC RAS Publ.
`\publaddr` Moscow

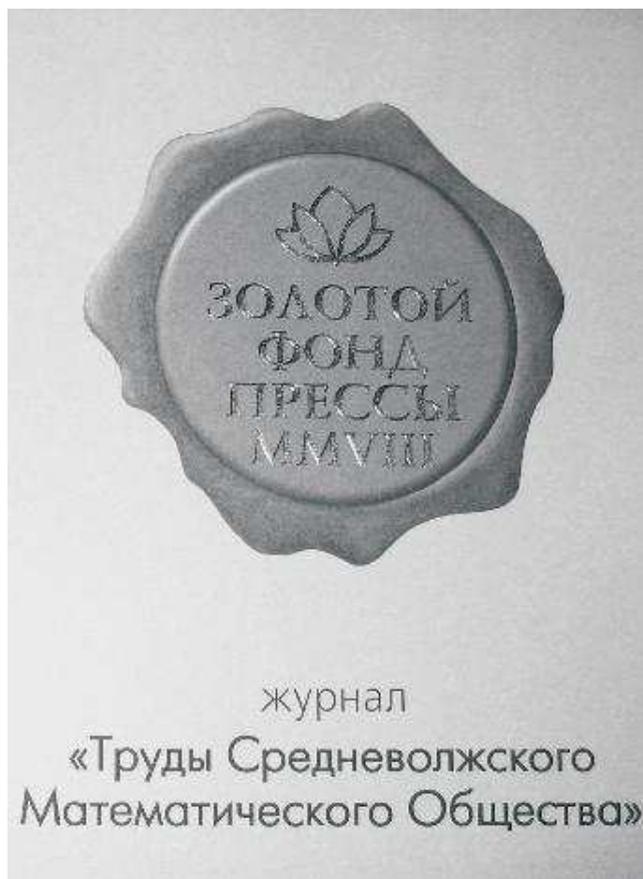
Алфавитный указатель авторов

| | |
|-------------------|-----|
| Дрегля А. И. | 143 |
| Леонтьев В. Л. | 111 |
| Морозкин Н. Д. | 127 |
| Морозкин Н. Н. | 127 |
| Мустайкин М. С. | 243 |
| Нойягдам С. | 143 |
| Пелиновский Е. Н. | 229 |
| Пескова Е. Е., | 243 |
| Сахаров А. Н. | 171 |
| Сидоров Д. Н. | 143 |
| Соломатин Д. В. | 185 |
| Талипова Т. Г. | 229 |
| Ткачев В. И. | 127 |
| Фламарион М. В. | 229 |
| Язовцева О. С. | 243 |

Author Index

| | |
|------------------|-----|
| A. I. Dreglea | 143 |
| N. D. Morozkin | 127 |
| N. N. Morozkin | 127 |
| M. S. Mustaykin | 243 |
| M. V. Flamarion | 229 |
| V. L. Leontiev | 111 |
| S. Noeiaghdam | 143 |
| E. N. Pelinovsky | 229 |
| E. E. Peskova | 243 |
| A. N. Sakharov | 171 |
| D. N. Sidorov | 143 |
| D. V. Solomatin | 185 |
| T. G. Talipova | 229 |
| V. I. Tkachev | 127 |
| V. T. Vo | 143 |
| O. S. Yazovtseva | 243 |

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редакторы: *Зинина С. Х., Пескова Е. Е., Иванова-Тюрькина В. А.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 18.06.2025. Дата выхода в свет 30.06.2025. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 14 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 268.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editors: *S. Kh. Zinina, E. E. Peskova, V. A. Ivanova-Tyurkina*

Translation: *A. O. Syromyasov*

Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 18.06.2025. Date of publishing 30.06.2025. Free price.

Sheet size $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 14.

Number of copies 100. Order no. 268.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University

Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,

Republic of Mordovia, Russia

