ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga Mathematical Society Journal

Том / Vol. 27 № / No. 1

2025

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Том 27, № 1. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны
Журнал публикует статьи на русском и английском языках.
Периодичность издания: 1 раз в квартал.

Middle Volga Mathematical Society

National Research Mordovia State University

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Vol. 27, no. 1. 2025

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

С 2024 года журналу в базе данных Scopus присвоены квартили Q3 по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) и Q4 по направлению Control and Optimization.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — E94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

Since 2024, the journal in the Scopus database has been assigned Q3 quartiles by area Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) and Q4 in Control and Optimization.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Редакционная коллегия

Editorial Board

Содержание

Математика

Гермидер О. В., Попов В. Н.
О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами 11

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.
Фундаментальные представления ортогональной алгебры Ли и новые простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли 25

Литаврин А. В.
Об одном универсальном критерии неподвижной точки 34

Лукащук В. О., Лукащук С. Ю.
Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности с дробно-дифференциальным малым двухфазным запаздыванием 49

Сидоров С. В., Уткин Г. В.
О подобии над кольцом целых чисел верхних треугольных нильпотентных матриц 4-го и 5-го порядков обобщённой жордановой клетке 69

Ступин Д. Л.
Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции 81

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 97
Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 101
Правила верстки рукописей в системе LaTex (на рус. яз.) 105
Правила верстки рукописей в системе LaTex (на англ. яз.) 111

Алфавитный указатель авторов 115

Contents

Mathematics

O. V. Germider, V. N. Popov
On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels 11

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov
Fundamental representations of orthogonal Lie algebra and new simple subalgebras of nonalternating Hamiltonian Lie algebras 25

A. V. Litavrin
On some universal criterion for a fixed point 34

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk
Group classification of nonlinear time-fractional dual-phase-lag heat equation with a small parameter 49

S. V. Sidorov, G. V. Utkin
On the Similarity of Upper Triangular Nilpotent Matrices of the 4th and the 5th Orders to a Generalized Jordan Block over the Ring of Integers 69

D. L. Stupin
The Krzyz conjecture and convex univalent functions 81

The rules of article design (in Russian) 97
The rules of article design (in English) 101
The rules for article layout in the LaTex system (in Russian) 105
The rules for article layout in the LaTex system (in English) 111

Author Index 115

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.642.4

О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

Аннотация. Представленная работа посвящена развитию итерационных методов решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами. Предложен новый подход к построению их решений, основанный на использовании метода последовательных приближений и полиномиальной интерполяции функций на отрезке $[-1, 1]$. При этом исходное интегральное уравнение сведено к уравнению типа Вольтерра, в котором неизвестная функция подлежит определению на отрезке $[-1, 1]$. В качестве начального приближения принимается свободный член рассматриваемого уравнения. На каждой итерации метода последовательных приближений осуществлено представление ядра интегрального уравнения в виде частичной суммы ряда по ортогональным на отрезке $[-1, 1]$ многочленам Чебышева. Коэффициенты в записанном разложении найдены с использованием ортогональности системы векторов, образованных значениями этих многочленов в нулях многочлена со степенью, равной числу неизвестных коэффициентов. Путем интерполяции по полученным значениям функции решения в узлах Чебышева на каждой итерации произведено приближение искомого решения. В работе также выполнено построение решения интегрального уравнения, свободный член которого имеет точку разрыва первого рода. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения Фредгольма, метод последовательных приближений, многочлены Чебышева, узлы Чебышева

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24

Об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 17, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич, д.ф.-м.н, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 17, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

Original article

MSC2020 45B05

On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. The work is devoted to the development of iterative methods for solving nonlinear Fredholm integral equations of the second kind with piecewise-smooth kernels. A new approach to constructing their solutions is proposed which combines the method of successive approximations with polynomial interpolations of functions on the segment $[-1, 1]$. In this case, the original integral equation is reduced to a Volterra-type equation where the unknown function is defined on the segment mentioned. The free term of the equation is chosen as the initial approximation. At each iteration of successive approximations method, the kernel of the integral equation is represented as a partial sum of a series in Chebyshev polynomials orthogonal on the segment $[-1, 1]$. The coefficients in this expansion are found using the orthogonality of vectors formed by the values of these polynomials at the zeros of the polynomial whose degree is equal to the number of unknown coefficients. An approximation of the solution is made by interpolation of the obtained values of the solution at the Chebyshev nodes at each iteration. The work also constructs a solution to an integral equation whose free term has a discontinuity point of the first kind. The results of the computational experiments are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: nonlinear Fredholm integral equations, method of successive approximations, Chebyshev polynomials, Chebyshev nodes

For citation: *O. V. Germider, V. N. Popov.* On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24

About the authors:

Oksana V. Germider, Ph. D. in Phys. and Math., associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Vasily N. Popov, D. Sc. in Phys. and Math., Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

1. Введение

Многие классы нелинейных интегральных уравнений используются в качестве универсального инструмента при моделировании физических процессов [1], [2]. К одному из таких классов относятся уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами. Точные решения этих уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальным является разработка эффективных численных методов их решения и развитие уже существующих. Так в [3] для решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода разработан численный метод, основанный на тригонометрических базисных функциях. Применение этого метода при построении решения интегрального уравнения приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений для получения коэффициентов в разложении решения по базисным функциям. Основная концепция метода, предложенного в [2], заключается в представлении неизвестной функции с помощью двухточечного метода интерполяции Эрмита или двухточечной формулы Тейлора. В этом методе для аппроксимации решения использованы значения функции и ее производных в конечных точках рассматриваемого интервала. В [4] и [5] для аппроксимации решения нелинейных интегральных уравнений использованы функции и вейвлеты Хаара, при этом численное интегрирование в [2] выполнено методом Ньютона–Котеса. Вопрос существования и единственности решения рассмотрен в [6]. Численное исследование систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядрами, имеющими конечные разрывы вдоль непрерывных кривых, проведено в [7] итерационным методом с использованием линеаризации интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича.

В представленной работе предложен новый итерационный подход построения решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами, основанный на использовании метода последовательных приближений [8] и полиномиальной интерполяции ядра интегрального уравнения на каждой итерации. Осуществлен переход к новым переменным, которые принимают значения, принадлежащие отрезку $[-1, 1]$, а исходное уравнение при этом сведено к уравнению типа Вольтерра. В качестве базисной системы функций при разложении ядра использованы многочлены Чебышева [9], областью определения которых является отрезок $[-1, 1]$. Коэффициенты в записанном разложении найдены с использованием ортогональности системы векторов, образованных значениями этих многочленов в нулях многочлена со степенью, равной числу неизвестных коэффициентов. При таком выборе узлов интерполяции минимизируется ошибка округлений полученных значений для коэффициентов [9] и [10]. На каждой итерации число узлов Чебышева остается неизменным, что позволяет снизить вычислительные затраты при реализации метода с использованием операций над матрицами. В результате решение интегрального уравнения на каждой итерации получается путем полиномиальной интерполяции полученных значений искомой функции в рассматриваемых узлах. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода. В работе также выполнено построение решения интегрального уравнения, свободный член которого имеет точку разрыва первого рода. Предложенный подход обобщает решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами, не требует решения системы алгебраических уравнений, необходимая точность построенного решения при этом достигается на основе итеративных приближений решений нелинейных интегральных уравнений интерполяционными многочленами по узлам Чебышева.

2. Постановка задачи. Построение решения уравнения Фредгольма

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу, которая представляет большой интерес в магнитной гидродинамике [3], [4] и [11]

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = \exp u(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.1}$$

с граничными условиями $u(0) = 0$ и $u(1) = 0$. Аналитическое решение этой двухточечной краевой задачи имеет вид [4]:

$$u(x) = -\ln 2 + 2\ln\left(\frac{c}{\cos\left(\frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}\right), \tag{2.2}$$

где c – корень уравнения $c = \sqrt{2}\cos(c/4)$, принадлежащий отрезку $[0, \pi]$, с точностью до 10^{-10} равный $c = 1.3360556949$.

Интегрируя уравнение (2.1), получаем следующее однородное нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] и [4]

$$u(x) - \int\limits_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.3}$$

где $K(x, y, u(y))$ – ядро интегрального уравнения (2.3):

$$K(x, y, u(y)) = \begin{cases} -y(1-x)\exp u(y) & 0 \le y \le x, \\ -x(1-y)\exp u(y) & x \le y \le 1. \end{cases}$$

Для получения решения уравнения (2.3) с использованием многочленов Чебышева первого рода введем новые переменные x^* и y^*: $x^* = 2x - 1$, $y^* = 2y - 1$. Запишем уравнение (2.3) в виде

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 K(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \quad -1 \le x^* \le 1. \tag{2.4}$$

Решение интегрального уравнения (2.4) находим путем сведения к уравнению типа Вольтерра

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* - \frac{1}{2}\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \tag{2.5}$$

где

$$K_1(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(y^*+1)(1-x^*)\exp u(y^*)}{4},$$

$$K_2(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(x^*+1)(y^*-1)\exp u(y^*)}{4}.$$

Найдем решение уравнения (2.5) методом последовательных приближений [8]

$$2u_i(x^*) = \int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* + \int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^*, \tag{2.6}$$

где $u_0(x^*) = 0$ и $i \geq 1$. Получим u_i методом коллокации с использованием полиномов Чебышева первого рода и корней этих полиномов в качестве точек коллокаций. Доказательство существования и единственности решений интегральных уравнений (2.4) и (2.5) приведено в [6] и [12], соответственно.

Представляем функции K_1 и K_2 в виде частичной суммы ряда по многочленам Чебышева первого рода

$$K_l(x^*, y^*, u_{n,i-1}(y^*)) = \sum_{j=0}^{n} a_{l,i-1,j}(x^*)T_j(y^*) = \mathbf{T}(y^*)\mathbf{A}_{l,i-1}(x^*), \tag{2.7}$$

где $u_{n,i-1}$ – приближенное решение уравнения (2.5), полученное на $(i-1)$-й итерации при разложении функций K_1 и K_2 по многочленам Чебышева степени не выше n, $\mathbf{T}(y^*) = \big(T_0(y^*)\, T_1(y^*) \ldots T_n(y^*)\big)$, $\mathbf{A}_{l,i-1} = \big(a_{l,i-1,0}\, a_{l,i-1,1} \ldots a_{l,i-1,n}\big)^T$ $(l = 1, 2;$ $i \geq 1)$. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов в матрицах начинаем с нуля. Многочлены Чебышева определяем согласно [9] следующим образом

$$T_j(y^*) = \cos(j \arccos y^*), \quad y^* \in [-1,\, 1],\, j \geq 0. \tag{2.8}$$

Рекуррентная формула для многочленов Чебышева имеет вид [6]

$$T_0(y^*) = 1, \quad T_1(y^*) = y, \quad T_{j+1}(y^*) = 2yT_j(y^*) - T_{j-1}(y^*), \quad j \geq 1. \tag{2.9}$$

В качестве узлов в (2.6) и (2.7) выберем корни многочлена T_{n+1} [9] и [13]

$$x_k^* = y_k^* = \cos\left(\frac{\pi(2n-2k+1)}{2(n+1)}\right), \quad k = \overline{0, n}. \tag{2.10}$$

Используя представление (2.7), для интегралов в (2.6) получаем

$$\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \left(\int\limits_{-1}^{x^*} \mathbf{T}(y^*)\mathrm{d}y^*\right)\mathbf{A}_{1,i-1}(x^*), \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \left(\int\limits_{x^*}^{1} \mathbf{T}(y^*)\mathrm{d}y^*\right)\mathbf{A}_{2,i-1}(x^*). \tag{2.12}$$

Найдем интегралы в (2.11) и (2.12) от многочленов Чебышева первого рода. Из (2.9) вытекает, что

$$\int\limits_{-1}^{x^*} T_0(y^*)\mathrm{d}y^* = T_1(x^*) + T_0(x^*), \quad \int\limits_{-1}^{x^*} T_1(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_2(x^*)}{4} - \frac{T_0(x^*)}{4}, \tag{2.13}$$

$$\int_{x^*}^{1} T_0(y^*)\mathrm{d}y^* = -T_1(x^*) - T_0(x^*), \quad \int_{x^*}^{1} T_1(y^*)\mathrm{d}y^* = -\frac{T_2(x^*)}{4} - \frac{T_0(x^*)}{4}. \tag{2.14}$$

Для полиномов Чебышева степени $j \geq 2$ согласно [13] имеем

$$2\int T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_{j+1}(y^*)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(y^*)}{j-1}.$$

Тогда, учитывая, что $T_j(1) = 1$ и $T_j(-1) = (-1)^j$ [13], получаем

$$2\int_{-1}^{x^*} T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_{j+1}(x^*)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x^*)}{j-1} + \frac{(-1)^{j+1}2}{j^2-1}, \tag{2.15}$$

$$2\int_{x^*}^{1} T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = -\frac{T_{j+1}(x^*)}{j+1} + \frac{T_{j-1}(x^*)}{j-1} - \frac{2}{j^2-1}. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.13) и (2.15) в (2.11) и используя равенство $T_{n+1}(x_k^*) = 0$, имеем

$$\int_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{H}_1\mathbf{A}_{1,i-1}(x^*), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{H}_1$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$ ($n' = n+1$), в которой элементы, отличные от нуля:

$$H_{1,0\,0} = 1, \quad H_{1,0\,1} = -\frac{1}{4}, \quad H_{1,0\,j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j^2-1}, \quad j = \overline{2,n},$$

$H_{1,1\,0} = 1$, $H_{1,1\,2} = -1/2$, $H_{1,n\;n-1} = 1/(2n)$, парные элементы остальных строк:

$$H_{1,j\;j+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{2j}, \quad i = 1,2,\ j = \overline{2,n-1}.$$

Аналогично, из (2.14) и (2.16) в (2.12), получим

$$\int_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{H}_2\mathbf{A}_{2,i-1}(x^*), \tag{2.18}$$

где элементы квадратной матрицы $\mathbf{H}_2$ определяем на основе элементов $\mathbf{H}_1$

$$H_{2,0\,k} = (-1)^k H_{1,0\,k}, \quad H_{2,j\,k} = -H_{1,j\,k}, \quad j = \overline{1,n};\ k = \overline{0,n}.$$

Для $n=6$ квадратная матрица $\mathbf{H}_1$ имеет вид

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{35} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя точки x_k^* $(k=\overline{0,n})$ в (2.7), приходим к уравнению относительно $\mathbf{A}_{l,i-1}$

$$\mathbf{J}\mathbf{A}_{l,i-1}(x_k^*) = \mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*), \tag{2.19}$$

где $\mathbf{J}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой k-я строка $\mathbf{T}(y_k^*)$ $(k = \overline{0,n})$, матрица $\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*)$ имеет размер $n' \times 1$: $\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*) = (K_l(x_k^*, y_0^*, u_{n,i-1}(y_0^*))\ K_l(x_k^*, y_1^*, u_{n,i-1}(y_1^*))\ \ldots\ K_l(x_k^*, y_n^*, u_{n,i-1}(y_n^*)))^T$. Из (2.19) находим $\mathbf{A}_{l,i-1}$:

$$\mathbf{A}_{l,i-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_{l,i-1} \quad l=1,2. \tag{2.20}$$

В силу равенства [13]

$$\sum_{k=0}^{n} T_{j_1}(y_k^*) T_{j_2}(y_k^*) = \gamma_{T,j_1}\delta_{j_1,j_2},$$

где δ_{j_1,j_2} – символ Кронекера, $\gamma_{T,0}=n+1$, $\gamma_{T,j}=(n+1)/2$ $(j>0)$, получаем $\mathbf{J}^{-1}$ из матрицы $2/(n+1)\mathbf{J}^T$, в которой элементы первой строки делим на 2.

Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.6), получаем для $i \geq 1$

$$2\mathbf{U}_{n,i} = \left(\left(\mathbf{J}\mathbf{H}_1\mathbf{J}^{-1}\right) \circ \mathbf{W}_{1,n,i-1} + \left(\mathbf{J}\mathbf{H}_2\mathbf{J}^{-1}\right) \circ \mathbf{W}_{2,n,i-1}\right)\mathbf{V}, \quad i \geq 1, \tag{2.21}$$

где $\mathbf{U}_{n,i} = \left(u_{n,i}(x_0^*)\, u_{n,i}(x_1^*) \ldots u_{n,i}(x_n^*)\right)^T$, $\mathbf{W}_{l,n,i-1}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой k-я строка равна $\left(\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*)\right)^T$ $(k=\overline{0,n};\ l=1,2)$; $\mathbf{V} = (1\ 1\ 1 \ldots\ 1)^T$. Знаком $\circ$ обозначено поэлементное произведение Адамара двух матриц [14].

Функцию $u_{n,i}(x^*)$ находим, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева с определением коэффициентов в этом разложении аналогично (2.7). В итоге

$$u_{n,i}(x^*) = \sum_{j=0}^{n} b_{i,j} T_j(x^*) = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}_{n,i}. \tag{2.22}$$

В случае, когда свободный член интегрального уравнения имеет точку разрыва первого рода, рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] и [5]

$$u(x) - \int_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = b(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.23}$$

где $K(x, y, u(y)) = xy\sqrt{u(y)}$,

$$b(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x & x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x} + \alpha x & x > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha = -10\cos 1 + \frac{11}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^2\frac{1}{8} + 6\sin 1 - 9\sin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналитическое решение уравнения (2.23) имеет вид [3]:

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x} & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.24}$$

С использованием метода последовательных приближений и полиномиальной интерполяции найдем решение интегрального уравнения (2.23), в котором свободный член имеет точку разрыва первого рода $x = \dfrac{1}{2}$. Уравнение (2.23) при этом сводим к решению системы интегральных уравнений

$$u_l(x_l) = \sum_{l=1}^{2} \int_{\beta_{l,1}}^{\beta_{l,2}} K(x_l, y_l, u_l(y_l))\mathrm{d}y_l + b_l(x_l), \quad \beta_{l,1} \leq x_l \leq \beta_{l,2};\ l = 1,\ 2; \tag{2.25}$$

где $\beta_{1,1} = 0$, $\beta_{1,2} = \beta_{2,1} = \dfrac{1}{2}$, $\beta_{2,2} = 1$, $b_1(x) = x^2 + \alpha$, $b_2(x) = \sqrt{x} + \alpha x$.

Вводим новые переменные x_l^*, $y_l^* \in [-1,\ 1]$:

$$x_l = \frac{\beta_{l,2} - \beta_{l,1}}{2}x_l^* + \frac{\beta_{l,1} + \beta_{l,2}}{2}, \quad l = 1,\ 2. \tag{2.26}$$

Решение системы уравнений (2.25) в новых переменных x_l^*, $y_l^* \in [-1,\ 1]$ находим методом последовательных приближений

$$u_{l,n,i}(x_l^*) = \sum_{l=1}^{2} \kappa_l \int_{-1}^{1} K(x_l^*, y_l^*, u_{l,n,i-1}(y_l^*))\mathrm{d}y_l^* + b_l(x_l^*), \tag{2.27}$$

где $u_{l,n,0}(x_l^*) = b_l(x_l^*)$, $\kappa_l = \dfrac{1}{4}$ и ($l = 1,2$; $i \geq 1$).

Представляем функции $K_l(x^*, y^*, u_{l,n,i-1}(y^*)) = K(x^*, y^*, u_{l,n,i-1}(y^*))$ $(l = 1, 2)$ в виде частичной суммы ряда по многочленам Чебышева (2.7). Для интегралов в (2.27) имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} K_l(x_l^*, y_l^*, u_{l,n,i-1}(y_l^*))\mathrm{d}y_l^* = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{T}(y_l^*)\mathrm{d}y_l^*\right)\mathbf{A}_{l,i-1}(x_l^*) = \mathbf{G}\mathbf{A}_{l,i-1}(x_l^*), \tag{2.28}$$

где $\mathbf{G}$ – матрица размером $1 \times n'$, в которой элементы, отличные от нуля:

$$G_{0\,0} = 2, \quad G_{0\,j} = \frac{2}{1-j^2}, \quad j - \text{чет.},\ j = \overline{1,n}.$$

Для $n = 6$ матрица $\mathbf{G}$ имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 & -\dfrac{2}{15} & 0 & -\dfrac{2}{35} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (2.7) в (2.27) и используя (2.28), получаем для $i \geq 1$

$$\mathbf{U}_{l,n,i} = \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{W}_{1,n,i-1} + \mathbf{W}_{2,n,i-1}\right) + \mathbf{B}_l, \quad i \geq 1, \tag{2.29}$$

где $\mathbf{U}_{l,n,i} = (u_{l,n,i}(x_{l,0}^*)\, u_{l,n,i}(x_{l,1}^*)\, \ldots\, u_{l,n,i}(x_{l,n}^*))$, элементы квадратной матрицы $\mathbf{W}_{l,n,i-1}$ определяются ядром уравнения (2.27): $W_{l,n,i-1,j\,k} = K_l(x_{l,j}^*, y_{l,k}^*, u_{l,n,i-1}(y_{l,k}^*))$ $(j,\ k = \overline{0,n};\ l = 1,2)$; $\mathbf{B}_l = (b_l(x_0^*)\ b_l(x_1^*)\ b_l(x_2^*) \ldots\ b_l(x_n^*))$.

Функцию $u_{l,n,i}(x_l^*)$ находим, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева

$$u_{l,n,i}(x_l^*) = \mathbf{T}(x_l^*)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}_{l,n,i}^T. \tag{2.30}$$

3. Анализ полученных результатов

В таблице 3.1 приведены значения отклонения построенного решения (2.22) от аналитического решения (2.2) по бесконечной норме векторов значений этих функций, вычисленных в равномерно распределенных точках на отрезке [0, 1]:

$$e_{\infty,n,i} = \max_{0\leq j\leq 100} |u(x_j) - u_{n,i}(x_j)|,$$

где i – минимальные значения, при которых соответственно $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-30}$. Величина $\zeta_{n,i}$ определяется следующим образом: $\zeta_{n,i} = \|\mathbf{U}_{n,i} - \mathbf{U}_{n,i+1}\|_\infty$, где векторы $\mathbf{U}_{n,i}$ и $\mathbf{U}_{n,i+1}$ состоят из элементов, найденых в точках x_k, которые соответствуют узлам (2.10). Результаты вычисления $e_{\infty,n,i}$ представлены в таблице 3.1, в которой также приведены значения величин $e_{n,i} = \max\limits_{0\leq j\leq 100} |u_{n,i}(x_j) - u_{n-1,i}(x_j)|$ и $\tilde{e}_{\infty,n} = \max\limits_{0\leq j\leq 100} |u(x_j) - g_n(x_j)|$, где $g_n(x^*)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $u(x^*)$ при выборе узлов (2.10).

Из таблицы 3.1 видно, что с увеличением значений числа узлов $n+1$ наблюдается уменьшение величины отклонения построенного решения (2.22) от аналитического решения по бесконечной норме. При выполнении условия $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ минимальное значение i равно 20 для всех значений n, приведенных в таблице 3.1. В случае $\zeta_{n,i} < 10^{-30}$ это

Таблица 3.1. Значения величин $e_{\infty,n,i}$, $e_{n,i}$ и $\tilde{e}_{\infty,n}$ для уравнения (2.3)
Table 3.1. Values of $e_{\infty,n,i}$, $e_{n,i}$ and $\tilde{e}_{\infty,n}$ for equation (2.3)

n	$\zeta_{n,i} < 10^{-20}$		$\zeta_{n,i} < 10^{-30}$		$\tilde{e}_{\infty,n}$
	$e_{\infty,n,i}$	$e_{n,i}$	$e_{\infty,n,i}$	$e_{n,i}$	
8	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$3.34 \cdot 10^{-10}$
12	$4.92 \cdot 10^{-13}$	$1.19 \cdot 10^{-12}$	$4.92 \cdot 10^{-13}$	$1.19 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-14}$
15	$1.64 \cdot 10^{-16}$	$5.65 \cdot 10^{-15}$	$1.64 \cdot 10^{-16}$	$5.65 \cdot 10^{-15}$	$1.64 \cdot 10^{-16}$
20	$8.55 \cdot 10^{-21}$	$9.59 \cdot 10^{-21}$	$8.38 \cdot 10^{-21}$	$9.59 \cdot 10^{-21}$	$3.65 \cdot 10^{-22}$

значение i становится равным 30. Из сравнения значений $e_{\infty,n,i}$ и $\tilde{e}_{\infty,n}$, следует что $u_{n,i}$ приближается к результату полиномиальной интерполяции функции $u(x) = \exp(-x)$. При этом для фиксированного числа узлов $n+1$ полученные значения отклонений $e_{n,i}$ между $u_{n,i}$ и $u_{n-1,i}$ не превышают по бесконечной норме соответствующих значений отклонений $e_{\infty,n,i}$, что согласуется с критерием практической оценки погрешности в случае полиномиальной интерполяции непрерывной функции [9]. В качестве сравнения полученных результатов с [3] и [4] приведем значение $e_{\infty,n,i}$ при $n = 15$. В [3] $e_{\infty,n,i}$ равно $2.2 \cdot 10^{-7}$, в [4] $e_{\infty,n,i} < 10^{-6}$.

Значения $e_{\infty,n,i}$ для уравнения (2.23) представлены в таблице 3.2 при $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ в сравнении с результатами [3] и [5]. В этом случае минимальное значение i равно 29 для всех значений n, приведенных в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Значения величины $e_{\infty,n,i}$ для уравнения (2.23)
Table 3.2. Values of $e_{\infty,n,i}$ for the equation (2.23)

n	7	15	31
(2.30)	$2.41 \cdot 10^{-8}$	$5.61 \cdot 10^{-15}$	$6.64 \cdot 10^{-22}$
[3]	$4.07 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$
[5]	$7.27 \cdot 10^{-4}$	$1.88 \cdot 10^{-4}$	$4.77 \cdot 10^{-5}$

Из таблиц 3.1, 3.2 видно, что решения уравнений Фредгольма второго рода, полученные представленным методом с использованием многочленов Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n. Полученные значения отклонений $e_{n,i}$ для числа узлов $n+1$ и n не превышают по бесконечной норме соответствующих значений отклонений $e_{\infty,n,i}$ и могут использованы для практической оценки погрешности.

Распределение величины $u(x) - u_{n,i}(x)$ на отрезке [0, 1] при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.3) продемонстрировано на рисунке 3.1.

Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.23) показано на рисунке 3.2. Из рисунка 3.2 видно, что вблизи точки разрыва $x = 1/2$, отклонение построенного решения от аналитического не превосходит $0.6 \cdot 10^{-15}$ и приближается к точному значению.

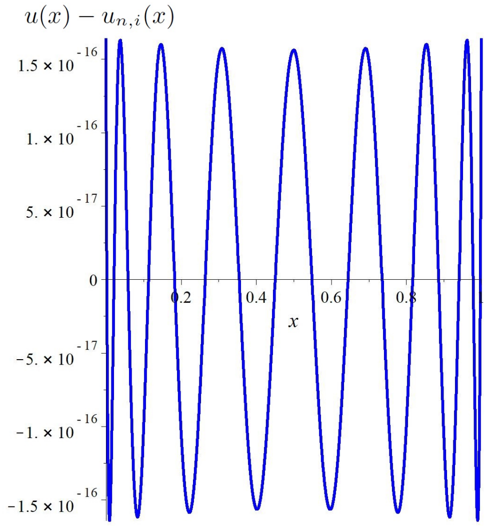

Рис. 3.1. Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.3)

Fig. 3.1. The deviation of $u(x) - u_{n,i}(x)$ for $n = 15$ and $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ for the equation (2.3)

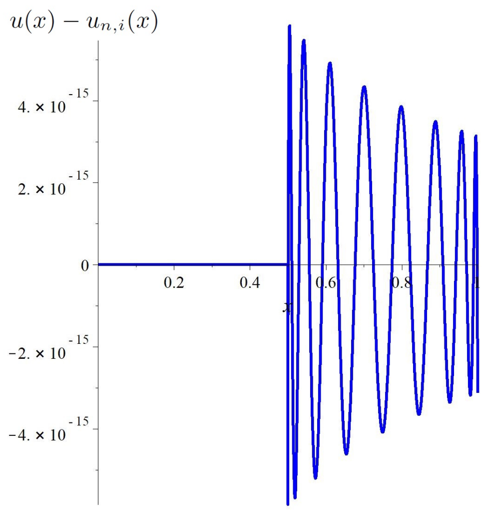

Рис. 3.2. Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i}a < 10^{-20}$ для уравнения (2.23)

Fig. 3.2. The deviation of $u(x) - u_{n,i}(x)$ for $n = 15$ and $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ for the equation (2.23)

4. Заключение

В работе предложен новый комбинированный подход, который позволяет находить решения интегральных уравнений типа Фредгольма в отсутствии выполнения условия гладкости для ядра интегрального уравнения и вблизи точек разрыва, при этом необходимая точность достигается на основе итеративных аппроксимаций ядра и решений нелинейных интегральных уравнений ортогональной системой многочленов Чебышева. Представленные результаты вычислительных экспериментов показывают эффективность предложенного подхода, который может применен для построения решений нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, Фредгольма–Вольтерра и их систем.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

Список литературы

1. Wazwaz A. M. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Beijing. Springer-Verlag. 2011. 658 p. DOI:10.1007/978-3-642-21449-3

2. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani Gh. B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. Vol. 187. pp. 414–432. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.015

3. Amiri S., Hajipour M., Baleanu D. On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 150. pp. 478–490. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.10.017

4. Ordokhani Y., Razzaghi M. Solution of nonlinear Volterra-Fredholm–Hammerstein integral equations via a collocation method and rationalized Haar functions // Applied Mathematics Letters. 2008. Vol. 21, Issue 1. pp. 4–9. DOI: 10.1016/j.aml.2007.02.007

5. Islam S., Aziz I., Al-Fhaid A. An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014. Vol. 260. pp. 449–469. DOI: 10.1016/j.cam.2013.10.024

6. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J. S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 439. Article number: 115602. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115602

7. Тында А. Н., Сидоров Д. Н., Муфтахов И. Р. Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, №. 1, С. 55–63. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63

8. Davis H. T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. New York: Dover Publications, 1962. 566 p.

9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.

10. Гермидер О. В., Попов В. Н. Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов // Журнал Средневолжского математического общества, 2023. Т. 25, №. 4. С. 242–254. DOI: 2079-6900.25.202304.242-254

11. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems. New York: Elsevier, 1965. 62 p.

12. Bazm S., Limaand P., Nemati S. Analysis of the Euler and trapezoidal discretization methods for the numerical solution of nonlinear functional Volterra integral equations of Urysohn type // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 398. Article number: 113628. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113628

13. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. New York: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p. DOI: 10.1201/9781420036114

14. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. Vol. 4, Issue 1. pp. 160–177.

Поступила 15.10.2024; доработана после рецензирования 12.01.2025; принята к публикации 26.02.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Beijing, 2011 DOI: 10.1007/978-3-642-21449-3, 658 p.

2. N. Karamollahi, M. Heydari, Gh. B. Loghmani, "Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials", *Mathematics and Computers in Simulation*, **187** (2021), 414–432. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.015.

3. S. Amiri, M. Hajipour, D. Baleanu, "On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind", *Applied Numerical Mathematics*, **150** (2020), 478–490. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.10.017.

4. Y. Ordokhani, M. Razzaghi, "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm–Hammerstein integral equations via a collocation method and ationalized Haar functions", *Applied Mathematics Letters*, **21** (2008), 4–9. DOI: 10.1016/j.aml.2007.02.007.

5. S. Islam, I. Aziz, A. Al-Fhaid, "An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **260** (2014), 449–469.

6. S. Bazm, A. Hosseini, J.S. Azevedo, F. Pahlevani, "Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **439** (2024), 115602. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115602.

7. A. N. Tynda 4, D. N. Sidorov 5, Ildar R. Muftahov, “Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **20**:1 (2018), 55–63. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63 (In Russ.).

8. H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, New York, 1962, 566 p.

9. N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel’kov, *Chislennyye metody*, Laboratoriya znaniy, M., 2020 (In Russ.), 636 p.

10. O.V. Germider, V.N. Popov, “Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:4 (2023), 242–254. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.242-254 (In Russ.).

11. R. Bellman, R. Kalaba, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*, Elsevier, New York, 1969, 62 p.

12. S. Bazm, P. Limaand, S. Nemati, “Analysis of the Euler and trapezoidal discretization methods for the numerical solution of nonlinear functional Volterra integral equations of Urysohn type”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **398** (2021), 113628. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113628.

13. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002 DOI: 10.1201/9781420036114, 360 p.

14. S. Liu, G. Trenkler, “Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products”, *International Journal of Information and Systems Sciences*, **4**:1 (2008), 160–177.

Submitted 15.10.2024; Revised 12.01.2025; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.554.31

Фундаментальные представления ортогональной алгебры Ли и новые простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

А. В. Кондратьева, М. И. Кузнецов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Россия)

Аннотация. В работе для векторного пространства V размерности n над совершенным полем K характеристика два с заданной невырожденной ортогональной формой рассматривается действие ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ на внешних степенях пространства V. Внешняя алгебра отождествляется с алгеброй срезанных многочленов от n неизвестных, а внешние степени как модули над $\mathfrak{o}(V)$ – с однородными подпространствами неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n)$ относительно скобки Пуассона, соответствующей ортонормированному базису пространства переменных. Доказывается, что все внешние степени стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ неприводимы и попарно неэквивалентны. Относительно подалгебры $so(V)$, $n = 2l + 1$ или $n = 2l$, существует l попарно неэквивалентных фундаментальных представлений в пространствах $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l$. Все они допускают невырожденную инвариантную ортогональную форму и неприводимы при $n = 2l + 1$. При $n = 2l$ представления $so(V)$ на $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l - 1$ неприводимы, а пространство $\Lambda^l V$ имеет единственное нетривиальное собственное инвариантное подпространство M, которое является максимальным изотропным подпространством относительно инвариантной формы. Найдены две исключительные простые подалгебры Ли $P_1(6)$, $P_2(6)$ в $P(6)$, размерности $2^5 - 1$ и $2^6 - 1$, соответственно, содержащие подмодуль M, которые существуют только в случае 6 неизвестных.

Ключевые слова: совершенное поле характеристики два, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, фундаментальные представления

Для цитирования: Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фундаментальные представления ортогональной алгебры Ли и новые простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 25–33. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33

Об авторах:
Кондратьева Алиса Витальевна, ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru
Кузнецов Михаил Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

Original article

MSC2020 17B50, 17B70

Fundamental representations of orthogonal Lie algebra and new simple subalgebras of nonalternating Hamiltonian Lie algebras

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov

National Research Lobachevsky State University (Nizhny Novgorod, Russia)

Abstract. In the paper the action of the orthogonal Lie algebra $\mathfrak{o}(V)$ on the exterior powers of a space V is considered for n-dimensional vector space V over a perfect field K of characteristic two with a given nondegenerate orthogonal. The exterior algebra is identified with the algebra of truncated polynomials in n variables. The exterior powers of V taken as modules over $\mathfrak{o}(V)$ are identified with homogeneous subspaces of non-alternating Hamiltonian Lie algebra $P(n)$ with respect to the Poisson bracket corresponding to an orthonormal basis of the space V of variables. It is proved that the exterior powers of the standard representation for Lie algebra $\mathfrak{o}(V)$ are irreducible and pairwise nonequivalent. With respect to subalgebra $so(V)$, $n = 2l+1$ or $n = 2l$, there exist l pairwise nonequivalent fundamental representations in the spaces $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l$. All of them admit a nondegenerate invariant orthogonal form, being irreducible when $n = 2l + 1$. When $n = 2l$ the representations of $so(V)$ in $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l - 1$ are irreducible and the space $\Lambda^l V$ possesses the only non-trivial proper invariant subspace M, which is a maximal isotropic subspace with respect to an invariant form. Two exceptional simple Lie subalgebras $P_1(6)$, $P_2(6)$ of $P(n)$, of dimension $2^5 - 1$ and $2^6 - 1$, correspondingly, containing the submodule M, and exising only in the case of 6 variables, are found.

Keywords: perfect field of characteristic two, non-altenating Hamiltonian Lie algebras, fundamental representations

For citation: *A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov.* Fundamental representations of orthogonal Lie algebra and new simple subalgebras of nonalternating Hamiltonian Lie algebras. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 25–33. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33

About the authors:

Alisa V. Kondrateva, Assistant at the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru

Michael I. Kuznetsov, D. Sc. in Phys. and Math., Professor of the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

1. Введение

Цель работы – описать строение внешних степеней стандартного представления ортогональной алгебры Ли над совершенным полем характеристики $p = 2$.

Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем K характеристики p, $\langle , \rangle$ – невырожденная симметрическая неальтернирующая билинейная форма на V, которую будем называть *ортогональной*. Ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}(V)$ состоит из всех линейных операторов A на V таких, что $\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle = 0$ для любых $x, y \in V$.

Случаи $p \neq 2$ и $p = 2$ существенно отличаются. Если $p \neq 2$, то $\mathfrak{o}(V)$ изоморфна алгебре Шевалле типа B_l, при $n = 2l + 1$, или D_l, при $n = 2l$, $\dim \mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ([1]), первое продолжение Картана $(V, \mathfrak{o}(V))^{(1)} = 0$ (см. [2]), не существует транзитивных алгебр Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $L_{-1} = V$, $L_0 \subset \mathfrak{o}(V)$, $L_1 \neq 0$.

Для $p = 2$ алгебра Ли $\mathfrak{o}(V)$ не изоморфна алгебре Шевалле типа B_l или D_l, $\dim \mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, первое продолжение Картана $(V, \mathfrak{o}(V))^{(1)} \neq 0$ и существует бесконечное множество простых неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $L_{-1} = V$, $L_0 \subset \mathfrak{o}(V)$, $L_1 \neq 0$. Строение алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ над совершенным полем K описано в [3]. Определение и свойства неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли приведены в [3–6]. Некоторые свойства L_0-модулей L_k рассматривались в [7].

В дальнейшем предполагается, что K – совершенное поле характеристики $p = 2$. Для наших целей удобно рассматривать модель пары $(V, \mathfrak{o}(V))$ как неположительную часть неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n) = L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$, где $P(n)$ – пространство многочленов $O(n)$ в разделенных степенях от переменных $x_1, \ldots, x_n$ без свободного члена со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g.$$

Конечномерные подалгебры Ли $P(n, \overline{m})$ относительно этой скобки Пуассона рассматривались в [6]. В алгебре Ли $P(n)$ $L_{-1} = V = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ – ортонормированный базис относительно формы $\langle x, y\rangle = \{x, y\}$, $x, y \in V$. Здесь $\{x, y\} \in K$. С помощью присоединенного представления $l \mapsto ad\, l\big|_{L_{-1}}$ отождествим L_0 и $\mathfrak{o}(V)$. Таким образом, $\mathfrak{o}(V) = \langle x_i x_j, x_i^{(2)},\ i, j = 1, \ldots, n\rangle$. Нам понадобятся следующие результаты о строении $\mathfrak{o}(V)$, приведенные в [3]:

- Производная алгебра $\mathfrak{o}(V)^{(1)} = \mathfrak{o}(V)' = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, n\rangle$;
- $T = \langle x_i^{(2)},\ i = 1, \ldots, n\rangle$ – максимальный тор алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$;
- $T_1 = \langle x_i^{(2)} + x_{i+1}^{(2)},\ i = 1, \ldots, n-1\rangle$ – максимальный тор p-замыкания алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)'$ в $gl(V)$,
$$\mathfrak{o}(V) \cap sl(V) = so(V) = \mathfrak{o}(V)' + T_1.$$

Так как $x_i^2 = 0$, алгебра разделенных степеней $O(n, \overline{1})$ совпадает с $T(V)$. Поэтому однородную компоненту L'_{r-2} алгебры $P(n, \overline{1})$ мы будем рассматривать как $\Lambda^r V$ для $r = 1, 2, \ldots, n$. При этом действие $\mathfrak{o}(V)$ на $\Lambda^r V$ соответствует присоединенному представлению подалгебры Ли L_0 на L'_{r-2}.

В работе внешние степени стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ называются фундаментальными по аналогии с фундаментальными представлениями алгебры Ли $sl(V)$.

Фундаментальные представления рассматриваются в параграфе 2. Доказывается, что фундаментальные представления алгебры $\mathfrak{o}(V)$ неприводимы. Если n нечетно, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль для всех r. Если $n = 2l$, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль при $r \neq l$, $T^l V$ содержит единственный ненулевой собственный подмодуль M, $\dim M = \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{l}$.

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли над полями малой характеристики $p = 2, 3$ представляет интерес построение исключительных простых алгебр Ли, которые не встречаются при большей характеристике основного поля. Описание исключительных простых алгебр Ли над полем характеристики 3 приведено в [8]. В случае, когда $p = 2$, исключительные простые алгебры Ли построены в работах [6], [9–15]. Отметим, что проблема изоморфизма между построенными алгебрами представляется очень сложной. Для алгебр Ли небольшой размерности в работах [12–15] с помощью компьютера найдены простые алгебры Ли над $\mathbb{Z}_2$ и установлено, что некоторые известные алгебры Ли изоморфны. Но уже для 15-мерных алгебр Ли полный список простых алгебр Ли неизвестен, а построение списка в случай размерности 31 при использовании существующих методов превышает возможности компьютера (см. [15]). В настоящей работе построены две исключительные простые алгебры Ли $P_1(6)$, $P_2(6)$ размерности 31 и 63, соответственно, как подалгебры неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(6)$, которые не имеют аналогов при другом количестве переменных.

2. Фундаментальные модули над $so(V)$

Для подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset N = \{1, \ldots, n\}$ положим $X_I = x_{i_1} \ldots x_{i_r} \in \Lambda^r V$, $I' = N \backslash I$. Обозначим через I_{st} подмножество в N, полученное заменой элемента $s \in I$ на $t \notin I$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно

Л е м м а 2.1. *Пусть $x_s x_t \in \mathfrak{o}(V)'$, $I \subset N$, $|I| = r$. Тогда*

1. $\{x_s x_t, X_I\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \{s,t\} \subset I \text{ или } \{s,t\} \subset I', \\ X_{I_{st}}, & \text{если } \{s,t\} \cap I = s. \end{cases}$

2. $(I_{st})' = (I')_{ts}$.

Применяя индукцию по числу различных индексов в I, J, $|I| = |J|$, из леммы 2.1 получаем

С л е д с т в и е 2.1. *Для любых подмножеств $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J|$ существует последовательность элементов $x_{s_1}x_{t_1}, \ldots, x_{s_k}x_{t_k} \in \mathfrak{o}(V)'$ такая, что*

$$\{x_{s_k}x_{t_k}, \ldots \{x_{s_1}x_{t_1}, X_I\} \ldots\} = X_J,$$
$$\{x_{s_k}x_{t_k}, \ldots \{x_{s_1}x_{t_1}, X_{I'}\} \ldots\} = X_{J'}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть K – совершенное поле характеристики два, V – n-мерное векторное пространство над K, $\langle , \rangle$ – невырожденная симметрическая неальтернирующая билинейная форма на V, $\mathfrak{o}(V)$ – соответствующая ортогональная алгебра Ли. Тогда*

1. $\Lambda^r V$ – неприводимый $\mathfrak{o}(V)$-модуль для $r = 1, \ldots, n-1$.

2. Если $n = 2l$, то при $r \neq l$, $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль. При $r = l$, $\Lambda^l V$ содержит единственный нетривиальный $so(V)$-подмодуль M, $\dim M = \frac{1}{2}\binom{n}{l}$.

3. Если $n = 2l+1$, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль для $r = 1, \ldots, n-1$.

4. С точностью до изоморфизма, фундаментальными модулями над $so(V)$ являются модули $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. На $\Lambda^r V$ существует инвариантная относительно $so(V)$ ортогональная форма.

Доказательство. 1. Элементы $X_I = x_{i_1} \ldots x_{i_r}$ являются весовыми векторами веса $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$. Веса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ линейно независимы на торе $T = \langle x_i^{(2)},\ i = 1, \ldots, n \rangle = \langle E_{ii},\ i = 1, \ldots, n \rangle \subset gl(n)$, где E_{ij} – стандартные матричные единицы. Следовательно, все весовые пространства $\mathfrak{o}(V)$-модуля $\Lambda^r V$ одномерны. Из следствия 2.1 получаем, что любой нетривиальный $\mathfrak{o}(V)$-подмодуль в $\Lambda^r V$ совпадает с $\Lambda^r V$.

2-3. Ограничения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ на $T_1 \subset so(V)$, где $T = \langle x_i^{(2)} + x_j^{(2)},\ i < j \rangle$ удовлетворяют единственному соотношению $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 0$. Поэтому два веса $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$ и $\varepsilon_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_r}$ равны на T_1 тогда и только тогда, когда $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r} + \varepsilon_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_r} = 0$. Отсюда получаем, что $n = 2r$, $I \cup J = N$, $I \cap J = \varnothing$. Таким образом, когда $n = 2l+1$ или $n = 2l$, $r \neq l$, все весовые пространства относительно T_1 в $\Lambda^r V$ одномерны, что, также как в п.1, влечет неприводимость $\Lambda^r V$ как $so(V)$-модуля.

Пусть $n = 2l$, $r = l$. Тогда весовые пространства $so(V)$-модуля $\Lambda^l V$ двумерны и имеют базис $X_I, X_{I'}$. Пусть M – $so(V)$-подмодуль в $\Lambda^l V$. Если M содержит двумерное весовое подпространство, то из следствия 2.1 получаем, что M содержит все весовые подпространства $\Lambda^l V$, то есть $M = \Lambda^l V$. Если M содержит вектор $X_I + aX_{I'}$, $a \in K$, то, применяя следствие 2.1, получаем, что $X_{I'} + aX_I \in M$. Значит, при $a \neq 1$, $X_I, X_{I'} \in M$. Как было показано, в этом случае $M = \Lambda^l V$. Так как M – прямая сумма одномерных весовых подпространств относительно T_1, $a = 1$ и $M \subset \langle X_I + X_{I'},\ I \subset N \rangle$. Из следствия 2.1 заключаем, что $\langle X_I + X_{I'},\ I \subset N \rangle$ – неприводимый $so(V)$-модуль. Таким образом, $M = \langle X_I + X_{I'},\ I \subset N \rangle$, $\dim M = \frac{1}{2}\binom{n}{l}$.

4. Из леммы 2.1 следует, что линейное отображение $\varphi\colon \Lambda^r V \to \Lambda^{n-r} V$ такое, что $\varphi(X_I) = X_{I'}$, является изоморфизмом $so(V)$-модулей. Пусть $\Phi\colon \Lambda^r V \times \Lambda^{n-r} V \to K$ – инвариантное спаривание, которое определяется умножением в $\Lambda(V)$. Для $u \in \Lambda^r V$, $v \in \Lambda^{n-r} V$

$$u \wedge v = \Phi(u, v) x_1 \ldots x_n.$$

Комбинируя φ с Φ, получаем инвариантную билинейную форму $\langle u, v \rangle$ на $\Lambda^r V$,

$$\langle u, v \rangle = \Phi(u, \varphi(v)).$$

Так как для $X_I, X_J \in \Lambda^r V$

$$\langle X_I, X_J \rangle = \Phi(X_I, X_{J'}) = \delta_{I,J} = \langle X_J, X_I \rangle,$$

$\langle u, v \rangle$ – симметрическая форма и $\{X_I,\ |I| = r\}$ – ортонормированный базис $\Lambda^r V$. Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 2.1. *1. Так как $so(V)$ – p-замыкание $\mathfrak{o}(V)'$, неприводимый $\mathfrak{o}(V)'$-модуль в $\Lambda^r V$ является неприводимым $so(V)$-модулем. Следовательно, во всех утверждениях теоремы 2.1 можно заменить $so(V)$ на $\mathfrak{o}(V)'$.*

2. В случае нечетного n все фундаментальные представления $so(V)$ неприводимы. При $n = 2l$ представление на $\Lambda^l V$ содержит инвариантное подпространство M, которое является максимальным изотропным подпространством относительно формы $\langle u, v\rangle$ из доказательства утверждения 4 теоремы 2.1. В классической теории фундаментальные представления по определению неприводимы, поэтому при $n = 2l$ к фундаментальным модулям над $so(V)$ следовало бы отнести модуль M вместо $\Lambda^l V$.

3. Новые простые подалгебры Ли неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

Для исследования простых конечномерных 1-градуированных алгебр Ли представляет интерес описание однородных конечномерных простых подалгебр Ли $G = G_{-1} + G_0 + G_1 + \ldots$ неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n) = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $G_{-1} = L_{-1}$, $L'_0 \subseteq G_0 \subseteq L_0$, $G_1 \subset L_1$. Для этого нужна информация о структуре L'_0-подмодулей пространства L_1. Мы ограничиваемся здесь построением двух исключительных простых подалгебр, существование которых следует из теоремы 2.1. Согласно этой теореме только при $n = 6$ пространство L_1 содержит подмодуль $M = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3\rangle$. Обозначим через $P_1(6)$ подалгебру алгебры Ли $P(6)$, порожденную локальной частью $G_{-1} + G_0 + G_1$, где

$$G_{-1} = \langle x_1, \ldots, x_6\rangle,$$
$$G_0 = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, 6\rangle,$$
$$G_1 = M = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3\rangle.$$

Легко проверить, что $[G_1, G_1] = 0$, следовательно,

$$P_1(6) = G_{-1} + G_0 + G_1$$

является простой алгеброй Ли, $\dim P_1(6) = 6 + 15 + 10 = 2^5 - 1$.

Пространство $L_1 \subset P(n)$ содержит $\mathfrak{o}(V)'$-подмодуль $\widetilde{V} = \langle zx_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle$, где $z = x_1^{(2)} + \ldots + x_n^{(2)}$, $ad\, z\big|_{L_k} = k \cdot id$. Легко проверить, что подалгебра $G = G_{-1} + G_0 + G_1$ такая, что $G_{-1} = L_{-1}$, $G_0 = L'_0 + \langle z\rangle$, $G_1 = \widetilde{V}$, изоморфна простой алгебре Ли $\mathfrak{o}(n+2)'$ при $n > 2$. Действительно, выберем базис $\{y_1, \ldots, y_{n+2}\}$ пространства V так, чтобы форма $\omega = (dx_1)^{(2)} + \ldots + (dx_{n+2})^{(2)}$ имела вид

$$\omega = (dy_1)^{(2)} + \ldots + (dy_n)^{(2)} + dy_{n+1} dy_{n+2}.$$

Алгебра Ли $P(n+2)$ относительно переменных $\{y_1, \ldots, y_{n+2}\}$ задается скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g + \partial_{n+1} f \partial_{n+2} g + \partial_{n+2} f \partial_{n+1} g.$$

Рассмотрим градуировку Γ типа $(0, \ldots, 0, -1, 1)$ в $P(n+2)$ относительно переменных $\{y_i\}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{o}(n+2)' = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, n+2\rangle = \langle y_i y_j,\ i, j = 1, \ldots, n+2\rangle$ содержится в $P(n+2)$. Относительно градуировки Γ $\mathfrak{o}(n+2)'$ изоморфна подалгебре $G = G_{-1} + G_0 + G_1 \subset P(n)$, где $G_1 = \widetilde{V} = \langle zx_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle$.

Пусть $n = 6$. В этом случае можно построить подалгебру $P_2(6)$, порожденную локальной частью $G_{-1} + G_0 + G_1$, где

$$G_{-1} = \langle x_1, \ldots, x_6 \rangle,$$
$$G_0 = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, 6 \rangle + \langle z \rangle,$$
$$G_1 = M + \widetilde{V} = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3 \rangle + \langle z x_i,\ i = 1, \ldots, 6 \rangle.$$

Учитывая, что $\{M, M\} = \{\widetilde{V}, \widetilde{V}\} = 0$, последовательно находим, что

$$G_2 = \langle X_I + z X_{I'},\ |I| = 4 \rangle,$$
$$G_3 = zM = \langle z(X_J + X_{J'}),\ |J| = 3 \rangle,$$
$$G_4 = 0.$$

Здесь $I \subset N = \{1, \ldots, 6\}$, $I' = N \backslash I$.

Докажем, что $G = P_2(6)$ – простая алгебра Ли. Пусть Q – ненулевой однородный идеал алгебры Ли G. В силу транзитивности $Q_{-1} \neq 0$. Так как G_{-1} – неприводимый G_0-модуль, $Q_{-1} = G_{-1}$. Отсюда получаем, $G_{-1} + G_0 + G_1 \subset Q$, следовательно, $Q = G$, $\dim P_2(6) = 6 + 16 + 16 + 15 + 10 = 2^6 - 1$.

Алгебры Ли $P_1(6)$ и $P_2(6)$ не имеют аналогов при $n \neq 6$.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект FSWR-2023-0034, и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII, VIII. М.: Мир. 1978. 342 с.

2. Гийемин В., Штернберг Ш. Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии // Математика. 1966. Т. 10 Вып.4. С. 3–31.

3. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Russian Math. (Изв. вузов. Матем.). 2024. №. 9. С. 100–105. DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-100-105

4. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2 // Russian Math. (Изв. вузов. Матем.). 2023. №. 6. С. 95–100.

5. Kondrateva A. V. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras of characteristic two in three variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. P. 2841-2853. DOI: 10.1134/S1995080221120209

6. Lin L. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic two // Communications in Algebra. 1993. Vol. 21(2). P. 399–411.

7. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал СВМО. 2024. Т. 26, № 4. С. 392–403. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403

8. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. Berlin: de Gruyter Expositions in Math. 2004. 540 p. DOI: 10.1515/9783110197945

9. Brown G. Families of simple Lie algebras of characteristic two // Comm. Algebra, 1995. Vol. 23. P. 941–954. DOI: 10.1080/00927879508825259

10. Kaplansky I. Some simple Lie algebras of characteristic 2 // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1982. Vol. 993. P. 127–129. DOI: 10.1007/BFb0093357

11. Skryabin S. M. Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics // J. Algebra. 1998. Vol. 200(2). P. 650–700.

12. Vaughan-Lee M. Simple Lie algebras of low dimension over GF(2) // London Math. Soc. J. Comput. Math. 2006. Vol. 9, P. 174–192. DOI: 10.1112/S1461157000001248

13. Eick B. Some new simple Lie algebras in characteristic 2 // J. Symbolic Comput. 2010. Vol. 45(9), P. 943–951. DOI: 10.1007/BFb0093357

14. Eick B., Moede T. Computing subalgebras and $\mathbb{Z}_2$-gradings of simple Lie algebras over finite fields // Commun. Math. 2022. Vol. 30(2). P. 37–50. DOI: 10.46298/cm.10193

15. Cushing D., Stagg G. W., Stewart D. I. A Prolog assisted search for new simple Lie algebras // Math. Comp. 2024. Vol. 93. P. 1473–1495. DOI: 10.48550/arXiv.2207.01094

Поступила 27.12.2024; доработана после рецензирования 07.02.2025; принята к публикации 26.02.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Ch. VII, VIII*, Hermann, Paris, 1975.

2. V. W. Guillemin, S. Sternberg, "An algebraic model of transitive differential geometry", *Bull. AMS*, **10**:1 (1964), 16–47, 342 p.

3. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Filtered deformations of graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **68**:9 (2024), 86–90. DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-100-105.

4. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Nonalternating Hamiltonian Forms over a Divided Power Algebra of Characteristic 2", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **67**:6 (2023), 82–87. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-6-95-100.

5. A. V. Kondrateva, "Non-alternating Hamiltonian Lie algebras of Characteristic Two in three variables", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2841–2853. DOI: 10.1134/S1995080221120209.

6. L. Lin, "Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic two", *Communications in Algebra*, **21**:2 (1993), 399–411.

7. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "On an embedding theorem for filtered deformations of graded nonalternating Hamiltonian Lie algebras", *Zhurnal SVMO*, **26**:4 (2024), 392–403. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403 (In Russ.).

8. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory*, de Gruyter Expositions in Math., Berlin, 2004 DOI: 10.1515/9783110197945, 540 p.

9. G. Brown, "Families of simple Lie algebras of characteristic two", *Comm. Algebra*, **23** (1995), 941–954. DOI: 10.1080/00927879508825259.

10. I. Kaplansky, "Some simple Lie algebras of characteristic 2", *Lecture Notes in Math.*, **993** (1982), 127–129.

11. S. M. Skryabin, "Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics", *J. Algebra*, **200**:2 (1998), 650–700.

12. M. Vaughan-Lee, "Simple Lie algebras of low dimension over $GF(2)$", *London Math. Soc. J. Comput. Math.*, **9** (2006), 174–192. DOI: 10.1112/S1461157000001248.

13. B. Eick, "Some new simple Lie algebras in characteristic 2", *J. Symbolic Comput.*, **45**:9 (2010), 943–951. DOI: 10.1007/BFb0093357.

14. B. Eick, T. Moede, "Computing subalgebras and $\mathbb{Z}_2$-gradings of simple Lie algebras over finite fields", *Commun. Math.*, **30**:2 (2022), 37–50. DOI: 10.46298/cm.10193.

15. D. Cushing, G. W. Stagg, D. I. Stewart, "A Prolog assisted search for new simple Lie algebras", *Math. Comp.*, **93** (2022), 1473–1495. DOI: 10.48550/arXiv.2207.01094.

Submitted 27.12.2024; Revised 07.02.2025; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.34-48 ISSN 2079-6900 (Print)
Original article ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 20N02, 20M30

On some universal criterion for a fixed point

A. V. Litavrin

Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russian Federation)

Abstract. Fixed point criteria may be applied in various fields of mathematics. The problem of finding sufficient conditions for transformations of a certain class to have a fixed point is well known. In the context of element-wise description for the monoid of all endomorphisms of a groupoid, the following were formulated: a bipolar classification of endomorphisms and related mathematical objects. In particular, the concept of a bipolar type of endomorphism of a groupoid (or simply a bipolar type) was stated. Every endomorphism of an arbitrary groupoid has exactly one bipolar type. In this paper, using bipolar types, a fixed point criterion for an arbitrary transformation of a nonempty set (hereinafter, the universal fixed point criterion) is formulated and proved. This criterion is not easy to apply. Further expansion of the range of problems to which this criterion can be applied depends directly on the success in studying the properties of groupoids' endomorphisms. The paper formulates such general problems (unsolved for today), that the success in their study will expand the possibilities of using the universal fixed point criterion. The connection between the formulated problems and the obtained criterion is discussed. In particular, necessary and sufficient conditions for the Riemann hypothesis on the zeros of the Riemann zeta function to be satisfied are obtained using the universal fixed point criterion.

Keywords: groupoid, endomorphism, bipolar type, bipolar classification of endomorphisms of a groupoid, fixed point, universal fixed point criterion, Riemann hypothesis on the zeros of the zeta function, Riemann zeta function

For citation: *A. V. Litavrin*. On some universal criterion for a fixed point. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:1(2025), 34–48. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.34-48

About the authors:
Andrey V. Litavrin, Ph. D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University (79 Svobodny Av., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6285-0201, anm11@rambler.ru

Оригинальная статья

УДК 512.577+512.548.2+512.534.2

Об одном универсальном критерии неподвижной точки

А. В. Литаврин

Сибирский Федеральный Университет (г. Красноярск, Российская Федерация)

Аннотация. Критерии неподвижной точки находят применение в различных областях математики. Хорошо известен интерес к проблеме нахождения достаточных условий того, что преобразование из некоторого класса имеет неподвижную точку. В контексте изучения проблемы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов группоида были сформулированы: биполярная классификация эндоморфизмов и сопутствующие математические объекты. В частности, было сформулировано понятие «биполярный тип эндоморфизма» группоида (или просто «биполярный тип»). Всякий эндоморфизм произвольного группоида имеет ровно один биполярный тип. В данной работе с помощью биполярных типов формулируется и доказывается критерий неподвижной точки произвольного преобразования некоторого непустого множества (далее универсальный критерий неподвижной точки). Данный критерий не является простым в применении. Дальнейшее расширение круга задач, к которым можно применять данный критерий, напрямую зависит от успехов в исследовании свойств эндоморфизмов группоидов. В работе формулируются открытые общие проблемы, успехи в исследовании которых расширят возможности применения универсального критерия неподвижной точки. Обсуждается связь между сформулированными проблемами и полученным критерием. Получены необходимые и достаточные условия того, что выполняется гипотеза Римана о нулях дзета-функции Римана. Эти условия получены с помощью универсального критерия неподвижной точки.

Ключевые слова: группоид, эндоморфизм, биполярный тип, биполярная классификация эндоморфизмов группоида, неподвижная точка, универсальный критерий неподвижной точки, гипотеза Римана о нулях дзета-функции, дзета-функция Римана

Для цитирования: Литаврин А. В. Об одном универсальном критерии неподвижной точки // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 34-48. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.34-48

Об авторах:

Литаврин Андрей Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики № 2, ИМиФИ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: https://orcid.org/0000- 0001-6285-0201, anm11@rambler.ru

1. Introduction

Information on *fixed point methods* can be found in the review [1]. Fixed point methods are widely used in functional analysis, differential equations and other areas of mathematics. All fixed point methods are characterized by the identification of sufficient (and sometimes necessary) conditions for some partial transformation f (i.e., a mapping of the form $f : A \to X$, where $A \subseteq X$) of some set X to have a fixed point (i.e., there exists $x \in X$ such that $f(x) = x$). For example, according to Brouwer's fixed point theorem, any continuous mapping of a closed ball into itself (in a finite-dimensional Euclidean space) has a fixed point. Let us denote some well-known theorems that give sufficient conditions for the existence of a fixed point: Hopf's Theorem ([2]), Birkhoff-Kellogg's Theorem ([3]), Schauder's Theorem ([4]). Methods for constructive construction of a fixed point have also been developed. The Banach contraction mapping Theorem (the case of a metric space) is well known.

The main result of the paper is Theorem 3.1 (see Section 2), which gives necessary and sufficient conditions for a point x to be a fixed point of a mapping $f : X \to X$ (i.e. f is a *transformation* of X). Theorem 3.1 is valid for any nonempty set X and any transformation f of X. The necessary and sufficient conditions are formulated using the concept of a *bipolar type of endomorphism of a groupoid* with pairwise distinct left translations. In addition, sufficient conditions are obtained for a point not to be a fixed point of a transformation of some nonempty set. These conditions are expressed as Theorem 3.2 and are formulated using bipolar types of endomorphism of an arbitrary groupoid. The restrictions on left translations disappear. The latter makes Theorem 3.2 easier to use than Theorem 3.1; but the latter gives a stronger statement. The bipolar type of groupoid endomorphism arises in ([5]) in the context of *bipolar classification of groupoid endomorphisms*, which aims to study the following general problems.

Problem 1.1. *For a fixed groupoid G, give an element-wise description of the monoid of all endomorphisms.*

Problem 1.2. *For a fixed groupoid G, give an element-wise description of the group of all automorphisms.*

The fixed point criterion given by Theorem 3.1 is not easy to use. The difficulties in working with it are explained by its universality and problems in working with endomorphisms of a groupoid (as specific transformations). In this paper, we formulate general Problems 4.1–4.5 (see Section 3). Successes in studying these problems should facilitate working with endomorphisms of a groupoid in the context of Theorem 3.1. Consequently, the possibilities in applying the obtained fixed point criterion should be expanded.

The fixed point criterion of Theorem 3.1 is formulated for a transformation. Every partial transformation of any nonempty set can be represented as an ordinary transformation on the new set. In analysis, the connection between fixed points and zeros of some function is well known. All this allows us to apply Theorem 3.1 to the study of the Riemann hypothesis on the zeros of the zeta function. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for the Riemann hypothesis to be satisfied. The result is expressed as Theorem 5.1 (see Section 4). Theorem 5.1 demonstrates how the results of Theorem 3.1 can be adapted to partial transformations.

Progress in solving Problems 4.1–4.5 may be useful for proving or disproving the Riemann Hypothesis. It is possible that Theorem 5.1 together with accumulated experience with the Riemann zeta function will lead to significant results on its own (without solving the indicated problems). Corollaries 5.1 and 5.2 (see Section 4) of Theorem 5.1 clearly demonstrate that the results of studying Problems 4.1–4.5 can be applied to studying the Riemann Hypothesis.

In 2024, the material [1] «Michael Francis Atiyah. The Riemann Hypothesis» with a proof of the truth of the Riemann hypothesis (open access since 2018) is easily found on the Internet. This work is not published in a peer-reviewed scientific journal (it appeared in the fall of 2018). The author is the outstanding mathematician Michael Francis Atiyah. Criticism of Atiyah's proof is found on the Internet, which is also not published in peer-reviewed scientific journals. A rigorous assessment (and publication of this assessment) of Atiyah's results is complicated by the lack of detail in the proof. Indeed, due to the style of presentation of the material, any assessment of it can only be based on assumptions. The situation is aggravated by Atiyah's death in January 2019. Due to the lack of detail in the proof and the lack of publication in a peer-reviewed journal, the author of this paper considers the Riemann hypothesis about the zeros of the zeta function to be unproven.

2. Basic Definitions and Preliminary Results

A *groupoid* (or *magma*) is a tuple $G = (G, *)$, where $(*)$ is a binary algebraic operation on a set G. The set G is called the *support* of the groupoid $G = (G, *)$. In this paper, the name of the groupoid and its support will be denoted differently where appropriate.

The set of all transformations of a set X will be denoted by $I(X)$ (other notations are also available). The set $I(X)$ is called the *symmetric semigroup of transformations* of the set X (since it is a semigroup with respect to composition). A homomorphism of a groupoid G into itself is called an *endomorphism* of the groupoid G. The set of all endomorphisms of a groupoid G is denoted by $\mathrm{End}(G)$. A transformation α of a groupoid G is an endomorphism of the groupoid G if and only if for any $x, y \in G$ the equality $\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$ holds.

In [5], the definition of a bipolar type of endomorphism of a groupoid is introduced. We present this definition and related objects. By $\mathrm{Bte}(G)$ we denote the set of all possible mappings of the set G into the set $\{1, 2\}$. Mappings from this set will be called *bipolar types of endomorphisms* of the groupoid G (or simply *bipolar types*). In [5], for each bipolar type γ, a *base set of endomorphisms* $D(\gamma)$ of the bipolar type γ is introduced (see Definition 3 in [5]). It follows from Theorem 1 of [5] that every endomorphism of an arbitrary groupoid lies in exactly one base set of endomorphisms. Therefore, each endomorphism of a groupoid can be assigned its bipolar type in a unique way (this is the bipolar classification of endomorphisms).

The bipolar type of endomorphism α is denoted by Γ_α. A *left translation* (or an internal translation) of an element $x \in G$ of a groupoid $G = (G, *)$ is a transformation h_x of a set G such that for any $x, y \in G$ the equality $h_x(y) = x * y$ holds. We say that G is a groupoid with *pairwise distinct left translations* if for any $x, y \in G$ the equivalence $h_x = h_y \Leftrightarrow x = y$ holds. Theorem 2.2 from [6] is formulated below as Lemma 2.1.

Lemma 2.1. *Let G be a groupoid with pairwise distinct left translations. Then for an arbitrary $g \in G$ and any endomorphism ϕ of the groupoid G the following equivalences hold:*

$$\Gamma_\phi(g) = 1 \Leftrightarrow \phi(g) = g, \qquad \Gamma_\phi(g) = 2 \Leftrightarrow \phi(g) \neq g. \tag{2.1}$$

Let G be a groupoid. For each $g \in G$, we introduce the set $M_g := \{m \in G \mid h_m = h_g\}$. Theorem 2.1 from [6] is formulated below as Lemma 2.2.

Lemma 2.2. *Let G be a groupoid. Then for any $g \in G$ and any endomorphism ϕ of the groupoid G, the following equivalences hold:*

$$\Gamma_\phi(g) = 1 \Leftrightarrow \phi(g) \in M_g, \qquad \Gamma_\phi(g) = 2 \Leftrightarrow \phi(g) \in G \setminus M_g.$$

[1] https://drive.google.com/file/d/17NBICP6OcUSucrXKNWvzLmrQpfUrEKuY/view

3. Universal Fixed Point Criterion

In this section we formulate and prove Theorem 3.1, which will give a universal fixed point criterion for an arbitrary transformation of a set in terms of bipolar types. We will preface it with the preliminary results.

A groupoid $G = (G, *)$ is called a singular semigroup if for any $x, y \in G$ the equality $x * y = x$ holds (more precisely, a left zero semigroup). This groupoid is associative. The following lemma is trivially established.

Lemma 3.1. *On any non-empty set G, we can define a singular semigroup $G = (G, *)$. For a singular semigroup $G = (G, *)$, the equality of sets $\mathrm{End}(G) = I(G)$ holds. The singular semigroup $G = (G, *)$ is a groupoid with pairwise distinct left translations.*

Proposition 3.1. *Let ϕ be some transformation of the set G, $G_1 = (G, *_1)$ and $G_2 = (G, *_2)$ be two groupoids with pairwise distinct left translations such that ϕ is an endomorphism of both groupoids. We assume that $\Gamma_\phi^{G_1}$ is the bipolar endomorphism type ϕ of the groupoid G_1 and $\Gamma_\phi^{G_2}$ is the bipolar endomorphism type ϕ of the groupoid G_2. Then the equality $\Gamma_\phi^{G_1} = \Gamma_\phi^{G_2}$ holds.*

Proof. The assertion follows directly from Lemma 2.1.

In general, the following assertion holds.

Proposition 3.2. *One can specify a set G and its transformation ϕ such that there will exist two groupoids $G_1 = (G, *_1)$ and $G_2 = (G, *_2)$ satisfying the conditions*

$$\phi \in \mathrm{End}(G_1), \quad \phi \in \mathrm{End}(G_2), \quad \Gamma_\phi^{G_1} \neq \Gamma_\phi^{G_2}.$$

Proof. Take the groupoid from Example 1 of [6]. In this example, the base set $D(1, 1, 2, 1)$ contains an endomorphism $(2, 2, 2, 3)$. For this groupoid $\Gamma_\phi(1) = 1$, but 1 is mapped to 2 by $\phi = (2, 2, 2, 3)$. On the other hand, one can construct a singular semigroup with the same support (see Lemma 3.1). In a singular semigroup, the bipolar endomorphism $\phi = (2, 2, 2, 3)$ on 1 will be equal to 2, since 1 is not a fixed point of this endomorphism and the singular semigroup has pairwise distinct left translations (i.e., it satisfies the conditions of Lemma 2.1). The assertion is proved.

Theorem 3.1. *Let G be an arbitrary nonempty set and α be an arbitrary transformation of G. Then a point $g \in G$ is a fixed point of the transformation α if and only if the following conditions are simultaneously satisfied:*
1) there exists a groupoid $G_0 = (G, *)$ with pairwise distinct left translations such that the transformation α is an endomorphism of this groupoid;
2) the equality $\Gamma_\alpha(g) = 1$ holds, where Γ_α is the bipolar type of the endomorphism α of the groupoid G_0.

Proof. Let us show necessity. Let $g \in G$ be an arbitrary fixed point of the transformation α. Introduce a singular semigroup $G_0 = (G, *)$ with support G (this is possible by Lemma 3.1). The transformation α is an endomorphism of the semigroup G_0 (follows from Lemma 3.1). Since all left translations of elements of the semigroup G_0 are distinct, the equality $\Gamma_\alpha(g) = 1$ holds (the latter follows from the equivalence (2.1)). Thus, we have shown that if $g \in G$ is a fixed point of the transformation α, then statements 1 and 2 from the hypothesis of the Theorem hold.

Let us show sufficiency. If statements 1 and 2 from the conditions of the current Theorem are satisfied, then by virtue of the equivalence (2.1) from Lemma 2.1 we obtain that g is a fixed point of the transformation α. The Theorem is proved.

In [5], Ω denotes the bipolar type of a groupoid G such that for any $g \in G$, $\Omega(g) = 2$ (*the second bipolar type*) holds. Theorem 3.1 implies

Corollary 3.1. *A transformation α of a nonempty set G has at least one fixed point if and only if there exists a groupoid $G_0 = (G, *)$ with pairwise distinct left translations such that α is an endomorphism of the given groupoid and the bipolar type of the endomorphism α of this groupoid does not coincide with Ω.*

It follows from Lemma 3.1 that every transformation of the set G is an endomorphism of the singular semigroup with support G. This makes it possible to apply the fixed point criterion from Theorem 3.1 to any transformation of an arbitrary set G. The latter indicates the universality of the above criterion.

If we abandon the condition of pairwise distinctness of left translations in the groupoid, then we can obtain sufficient (but not necessary) conditions for the point $g \in G$ not to be a fixed point of the transformation α.

Theorem 3.2. *Let G be an arbitrary nonempty set and α be an arbitrary transformation of G. We assume that for an element $g \in G$ the following conditions are simultaneously satisfied:*
1) there exists a groupoid $G_0 = (G, *)$ such that the transformation α is an endomorphism of this groupoid;
2) the equality $\Gamma_\alpha(g) = 2$ holds, where Γ_α is the bipolar type of the endomorphism α of the groupoid G_0.

Then the element g is not a fixed point of the transformation α.

Proof. Suppose that g is a fixed point of the transformation α and statements 1 and 2 from the condition of the Theorem hold. Since $\alpha(g) = g$, the set M_g contains the element $\alpha(g)$. Therefore, $\alpha(g) \notin G \setminus M_g$. The latter leads to a contradiction with the assertion of Lemma 2.2. Thus, g is not a fixed point of α. The Theorem is proved.

The above Theorem gives sufficient conditions for a point $g \in G$ not to be a fixed point of α. These conditions are precisely sufficient. They trivially imply necessary conditions for a point g to be a fixed point of α. We formulate these conditions as

Corollary 3.2. *If a transformation α of a nonempty set G has a fixed point $g \in G$, then there is no groupoid with support G and endomorphism α such that $\Gamma_\alpha(g) = 2$ in this groupoid.*

Example 3.1. *Let $\varphi(x) := (1/2)x + 1$ be a transformation of the set $\mathbb{R}$, where $(+)$, $(/)$ are the usual operations on real numbers. Let us show that $x = 2$ is a fixed point of the transformation φ. Consider the groupoid $G = (\mathbb{R}, *)$, where for any $x, y \in \mathbb{R}$ the equality $x * y := x + y - 2$ holds. For any $x, y \in \mathbb{R}$ we have the equalities*

$$\varphi(x * y) = (1/2)(x + y - 2) + 1 = (1/2)(x + y),$$

$$\varphi(x) * \varphi(y) = (1/2)x + 1 + (1/2)y + 1 - 2 = (1/2)(x + y).$$

These equalities show that φ is an endomorphism of the groupoid G. The element $e = 2$ is the neutral element of the groupoid G. It is easy to verify that the groupoid G is a group. Therefore, G has pairwise distinct left translations of elements. It is well known that the neutral element is invariant under all endomorphisms. Therefore e is a fixed point of φ and $\Gamma_{\varphi}(e) = 1$ (the last equality holds by Lemma 3.1).

Another way to check that $e = 2$ is a fixed point of φ (and the only one at that) is to directly check that $\Gamma_{\varphi}(e) = 1$. We will do this using equivalence (2) from [6]. The definitions of the sets $L^{(i)}(g)$ can be found in [5] or [6] (type-forming sets). Thus $\Gamma_{\varphi}(g) = 1$ if and only if $\varphi \in L^{(1)}(g)$. Let $\varphi \in L^{(1)}(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Then for any $y \in \mathbb{R}$ the following equalities hold: $h_{\varphi(x)}(y) = h_x(y)$, $\varphi \cdot h_x = h_x \cdot \varphi$. Each of these equalities holds if and only if $x = 2$. Indeed, the latter follows from the relations:

$$h_{\varphi(x)}(y) = \varphi(x) * y = (1/2)x + 1 + y - 2, \quad h_x(y) = x + y - 2,$$

$$\varphi \cdot h_x(d) = (1/2)(x + d - 2) + 1, \quad h_x \cdot \varphi(d) = ((1/2)d + 1) + x - 2, \quad (\forall d \in \mathbb{R}).$$

Therefore, only for $x = 2$ does the equality $\Gamma_{\varphi}(x) = 1$ hold, hence $x = 2$ is the only fixed point of the transformation φ (follows from Theorem 3.1).

In Example 3.1 above, we established that 2 is a fixed point of ϕ by using the well-known fact that *a group-to-group homomorphism maps an identity element to an identity element* (in this case, we did not use linear equation solving methods). On the other hand, when we computed $\Gamma_{\varphi}(g)$ by definition, we were forced to work with linear equations (i.e., we used methods that could by themselves give a fixed point of φ). The latter circumstance illustrates that further investigations of the properties of groupoid endomorphisms and the properties of bipolar types are needed to make productive use of the fixed point criterion given by Theorem 3.1. In the next section we formulate general problems 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, and 4.5. Advances in the study of these problems will expand the possibilities of applying the fixed point criterion from Theorem 3.1.

Theorem 3.1 can be applied to a wider range of problems than the statement about the image of the neutral element under a group homomorphism into a group. Indeed, for a particular transformation φ, it is easier to find a groupoid whose endomorphism is ϕ than to construct a group with a similar condition.

Remark 3.1. In recent years, groupoids have found applications. For example, an application of groupoids in biology can be found in [7]. An application of groupoids (more precisely, non-associative groupoids) in cryptography can be found in [8], [9], [10]. There are works aimed at modeling various processes associated with neural networks using groupoids. In this context, the study of the fixed point criterion from Theorem 3.1 seems relevant from the standpoint of algebra applications.

4. Open Problems

For any nonempty set G, let $\mathrm{Gru}(G)$ denote the set of all groupoids with universe G. This set is equivalent to the set $\mathrm{Hom}(G \times G, G)$. For any transformation α of a nonempty set G, let $\mathrm{Gru}(G, \alpha)$ denote the set of all groupoids $S = (G, *)$ in $\mathrm{Gru}(G)$ such that α is an endomorphism of the groupoid S. In the context of Theorem 3.1, there is a natural interest in the following general problem.

Problem 4.1. *For a fixed set G and a fixed transformation α of $I(G)$, solve the following problems.*

(a) Give an element-wise description of the set $\mathrm{Gru}(G,\alpha)$.

(b) Give an element-wise description of all groupoids from $\mathrm{Gru}(G,\alpha)$ *that have pairwise distinct left translations.*

(c) Give an element-wise description of all groupoids $S = (G,*)$ from $\mathrm{Gru}(G,\alpha)$ *such that for any $x \in G$ the transformation inequality $h_x \neq \alpha$ holds, where h_x is the left translation of element x in groupoid S.*

Lemma 3.1 shows that on every non-empty set one can introduce a singular semigroup. The operation in the singular semigroup is structured quite simply, and the set of all endomorphisms coincides with the symmetric semigroup. Consequently, all base sets of endomorphisms of the singular semigroup are non-empty (follows from Lemma 2.1). Therefore, the singular semigroup does not have specificity that can be applied for productive use of Theorem 3.1. There is a natural interest in having a list of all groupoids with pairwise distinct left translations and endomorphism α, which is studied for fixed points. This explains the interest in Problem 4.1, items (a) and (b). Problem 4.1, item (a) is relevant in the context of Theorem 3.2.

If there is a problem in finding fixed points of the transformation α, then this can be explained by the complex conditions of the definition of the transformation α (i.e. it is difficult to find images of elements under the action of this transformation). In order for the difficulties in working with the transformation α not to transfer to working with the groupoid in which the work with the bipolar type of endomorphism α will take place, it is necessary to be able to work in a groupoid, all left translations of which are different from the transformation α itself. This explains the interest in Problem 4.1, point (c).

There are situations when the transformation α is specified by simple conditions (i.e. there is no fundamental difficulty in finding the α-images of elements). But the method of specifying the transformation α is not convenient for solving the corresponding equations. For example, the Riemann zeta function can be attributed to such partial transformations (partial transformations can be reduced to ordinary transformations of a new set). The Riemann zeta function is defined by fairly simple conditions and there is no fundamental difficulty in calculating its values on specific complex numbers. At the same time, the Riemann zeta function zeros hypothesis is associated with it (the function zeros and fixed points are closely related, see the next section). The latter indicates that the Riemann zeta function is simply inconvenient for solving equations written with its help.

Problem 4.1 is a general problem. It can be seen as a template for similar problems solved for a particular set G and a particular transformation α. In this case, together with Theorem 3.1, the results of solving Problem 4.1 will be useful for finding fixed points of a particular transformation α. Problem 4.1 can also be investigated in a general form. The results of such investigations will be useful for solving Problem 4.1 for particular G and α. Partial solutions of Problem 4.1 (i.e., not all groupoids with the required properties are found) can also be useful in the context of Theorem 3.1. An element-wise description of a groupoid in Problem 4.1 is any description of a groupoid that allows one to write out left translations of this groupoid (i.e., to define its arithmetic).

For a particular groupoid $G = (G,*)$, let $\mathrm{Bte}^*(G)$ denote the subset of the set $\mathrm{Bte}(G)$ defined by the equivalence: $\gamma \in \mathrm{Bte}^*(G) \Leftrightarrow D(\gamma) \neq \varnothing$. For any groupoid G, the set $\mathrm{Bte}^*(G)$

is not empty. Indeed, it always contains the first bipolar type A (i.e., $A(g) = 1$ for any $g \in G$).

Problem 4.2. *For a fixed groupoid G, give a description of the elements of set* $\mathrm{Bte}^*(G)$.

Problem 4.2 is relevant in the context of Problem 1.1 (describing the monoid of all endomorphisms) and Problem 1.2 (describing the group of all automorphisms) without the condition of pairwise distinctness of left translations. Solving Problem 4.2 may cause difficulties even for groupoids for which Problem 1.1 has been solved. In the context of Theorem 3.1, the following proposition indicates the relevance of solving Problem 4.2.

Proposition 4.1. *Let $G = (G, *)$ be a groupoid with pairwise distinct left translations, $g \in G$ be some element of G, and α be an endomorphism of G distinct from the identity transformation. If the set $\mathrm{Bte}^*(G) \setminus \{A\}$ does not contain a bipolar type γ such that $\gamma(g) = 1$, then g is not a fixed point of the endomorphism α.*

P r o o f. Since G is a groupoid with pairwise distinct left translations, the base set of $D(A)$ (of endomorphisms of the first bipolar type) consists only of the identity transformation (this follows directly from Lemma 2.1). Therefore, the endomorphism α from the conditions of the proposition is not contained in $D(A)$. By the conditions of the proposition, the endomorphism α is contained in the base set of endomorphisms $D(\gamma)$ such that $\gamma(g) \neq 1$ (hence, $\gamma(g) = 2$). Therefore, g is not a fixed point of the endomorphism α. Indeed, the latter follows from both Theorem 3.1 and Theorem 3.2 (independently). The proposition is proved.

In this case, it is not important for us to know the bipolar type of the endomorphism α. It is enough to know that α is an endomorphism of the groupoid G that is distinct from the identity transformation. Problem 4.2 can be considered for specific groupoids G. It is also relevant to study Problem 4.2 in the general case.

Let $G = (G, *)$ be an arbitrary groupoid and A be the first bipolar type. Let us distinguish subsets $\mathrm{APriori}(G, 1)$ and $\mathrm{APriori}(G, 2)$ in the set G:

$$\mathrm{APriori}(G, i) := \{g \in G \mid \forall \gamma \in \mathrm{Bte}^*(G) \setminus \{A\} : \ \gamma(g) = i\}, \quad i = 1, 2.$$

The exclusion of the bipolar type A from the set $\mathrm{Bte}^*(G)$ is done so that the set $\mathrm{APriori}(G, 2)$ can be calculated. The base set of endomorphisms of the first type is always non-empty. Therefore, if we do not remove the first bipolar type from the conditions introducing $\mathrm{APriori}(G, 2)$, then $\mathrm{APriori}(G, 2)$ will always be the empty set. The values of all bipolar types from $\mathrm{Bte}^*(G) \setminus \{A\}$ on elements of $\mathrm{APriori}(G, 2)$ and $\mathrm{APriori}(G, 2)$ are known a priori. Indeed, this follows directly from the definition of these sets.

Problem 4.3. *For a fixed groupoid G, give an element-wise description of the sets* $\mathrm{APriori}(G, 1)$ *and* $\mathrm{APriori}(G, 2)$.

The solution of the above problem can be difficult even if we know the element-wise description of the monoid of all endomorphisms of the groupoid G.

P r o b l e m 4.4. *For a fixed set G and a fixed transformation α of set G, solve the following problems:*

(a) For a fixed set $H \subseteq G$, give a description of all groupoids $S = (G, *)$ from $\mathrm{Gru}(G, \alpha)$ *such that $H \subseteq$* $\mathrm{APriori}(S, 1)$.

(b) For a fixed set $H \subseteq G$, give a description of all groupoids $S = (G, *)$ from $\mathrm{Gru}(G, \alpha)$ *such that $H \subseteq$* $\mathrm{APriori}(S, 2)$.

In Example 3.1 we used the fact that the neutral element of a group is a fixed point for any endomorphism. Hence, $e \in \mathrm{APriori}(G, 1)$ when G is a group. Thus, successes in solving Problems 4.3 and 4.4 will allow us to construct (or select, if there are successes in solving Problem 4.1) groupoids from the conditions of Theorem 3.1 (analogously to Theorem 3.2) such that the analysis of the condition $\Gamma_\alpha(g) = 1$ (analogously to $\Gamma_\alpha(g) = 2$) will be significantly simplified. Successes in investigating Problem 4.4, item (a), are not necessarily necessary to lead to success in investigating item (b), and vice versa.

In [11], the possibility of computing the bipolar type of the composition $\phi \cdot \psi$ of two endomorphisms ϕ and ψ of some groupoid G is investigated using the bipolar types Γ_ϕ and Γ_ψ (i.e., it is necessary to compute $\Gamma_{\phi\cdot\psi}$ without computing the composition $\phi\cdot\psi$). In [11], the concept of *alternating pair of endomorphisms* arises. Thus, a pair of endomorphisms (ψ, ϕ) of a groupoid G is called alternating if for any $g \in G$ the condition $(\Gamma_\phi(g), \Gamma_\psi(\phi(g))) \neq (2, 2)$ is satisfied. For every alternating pair of endomorphisms, the equality $\Gamma_{\phi\cdot\psi}(g) = \Gamma_\phi(g) \times \Gamma_\psi(\phi(g))$ holds, where $(\times)$ is the product of two natural numbers (see Theorem 2 in [11]). For non-alternating pairs of endomorphisms, the above equality obviously does not hold (since the values of the bipolar type on an element are 1 or 2). In the context of this result, the following general problem is of interest.

P r o b l e m 4.5. *Let $G = (G, *)$ be an arbitrary groupoid and (ψ, ϕ) be an arbitrary non-alternating pair of endomorphisms of the groupoid G. For all $g \in G$ such that the equality $(\Gamma_\phi(g), \Gamma_\psi(\phi(g))) = (2, 2)$ holds, compute $\Gamma_{\phi\cdot\psi}(g)$.*

Example 1 of [11] suggests that the solution to Problem 4.5 will be considerably more difficult than the analogous result for alternating pairs of endomorphisms. The solution to Problem 4.5 provides additional properties that allow one to calculate the value of the bipolar type of an arbitrary endomorphism on elements of a groupoid. Therefore, progress in the study of Problem 4.5 may be useful in the context of Theorems 3.1 and 3.2.

R e m a r k 4.1. Each of Problems 4.1–4.5 can be solved for specific parameters (for example, a specific G and a specific α) that define the problem (let's call such solutions – particular solutions). These problems can also be solved in the general case. In the latter case, it is necessary to use systems of mathematical objects that allow working with arbitrary groupoids. Problems 4.1–4.5 in the general case can be solved differently (i.e., the solution will be implemented using different systems of mathematical objects). In the context of Theorem 3.1, different solutions to one problem can be relevant. Thus, one solution is conveniently applied to one class of specific problems, and another solution to another class. The latter also applies to the general Problems 1.1 and 1.2.

R e m a r k 4.2. Corollaries 5.1 and 5.2 from the next section indicate a direct connection between Problems 4.1–4.4 and the Riemann hypothesis on the zeros of the zeta function.

5. Riemann's hypothesis on the zeros of the zeta function

In this section, Theorem 5.1 will be formulated and proved. We will preface this Theorem with the necessary theoretical information about the zeta function and Lemma 5.1.

The Riemann zeta function $\zeta(s)$ is defined for any $s \in \mathbb{C}$ except for the number $s = 1$. Therefore, the zeta function $\zeta(s)$ is a partial transformation of the set $\mathbb{C}$. If $\{x\} := x - [x]$ is the fractional part of a number $x \in \mathbb{R}$, then the values of the zeta function can be obtained from the equalities (see paper [12]):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1;$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1,\ s \neq 1. \tag{5.1}$$

Information on the values of the zeta function on other complex numbers are not required in this paper. This information can be found, for example, in the papers: [12],[13],[14] and [15]. Other methods for calculating the zeta function values can also be found there.

Non-trivial zeros of the zeta function ζ are the zeros of ζ that lie in the strip $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ (this set of complex numbers is called the *critical strip*). The line $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ is called the *critical line*.

Riemann Hypothesis. All non-trivial zeros of the Riemann zeta function lie on the critical line.

If z is a zero of the zeta function, then the zeros of the zeta function are complex numbers: $1 - z, \overline{z}, 1 - \overline{z}$ (see [12]). The zeros of the zeta function do not lie on the lines: $\mathrm{Re}(s) = 0$ and $\mathrm{Re}(s) = 1$. The absence of zeros of the zeta function on the line $\mathrm{Re}(s) = 1$ follows from Theorem 7.1 in the review paper [15]. If the line $\mathrm{Re}(s) = 0$ contains a zero $z = it$ of the zeta function, then $1 - z = 1 - (0 + it) = 1 - it$ is a zero of the zeta function. The latter is impossible, in view of what was said above. Thus, to study the Riemann hypothesis, it will be sufficient for us to define the zeta function ζ on the set $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ (for example, using the relation (5.1)).

Auxiliary set and transformation. Next, we introduce the set $\mathbb{C}^o$ and the transformation Θ on it, which will help us apply Theorem 3.1 to study the properties of the zeros of the zeta function.

By $\diamond$ we denote the symbol, which by definition is not a complex number. Next, we introduce the set $\mathbb{C}^o := \mathbb{C} \cup \{\diamond\}$. As usual, $(\setminus)$ is the difference of sets. On the set $\mathbb{C}^o$, we define the transformation

$$\Theta(s) := \begin{cases} \zeta(s) + s & s \in \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\} \\ \diamond, & s \in \mathbb{C}^o \setminus \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}. \end{cases} \tag{5.2}$$

The mapping $\Theta(s)$ is a transformation of the set $\mathbb{C}^o$. It follows from (5.2) that $\diamond$ is a fixed point of the transformation $\Theta(s)$. For any complex number s from the set $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ the following implications hold:

$$\zeta(s) = 0 \ \Rightarrow\ \Theta(s) = \zeta(s) + s = s, \quad \Theta(s) = s \ \Rightarrow\ \zeta(s) + s = s \ \Rightarrow\ \zeta(s) = 0.$$

Therefore, the point $s \in \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ is a fixed point of Θ if and only if it is a nontrivial zero of the Riemann zeta function $\zeta(s)$. The connection between a fixed point of a function and a zero of the function used above is well known in analysis. Since $\diamond$ by definition does not belong to the set $\mathbb{C}$, then for any point $s \in \mathbb{C} \setminus \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ the condition $\Theta(s) \neq s$ holds. Thus, the following lemma is proved.

Lemma 5.1. *Every fixed point of Θ is either $\diamond$ or a nontrivial zero of the Riemann zeta function. Every nontrivial zero of the Riemann zeta function is a fixed point of Θ.*

Theorem 5.1. *The Riemann Hypothesis is true if and only if the following statements hold.*
1) There exists a groupoid $(\mathbb{C}^o, *)$ with pairwise distinct left translations such that the transformation Θ is an endomorphism of this groupoid.
2) For any point $s \in \mathbb{C}^o$ the following implications hold:

$$\Gamma_\Theta(s) = 1 \Rightarrow \left(\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\right) \vee (s = \diamond), \quad \left(\mathrm{Re}(s) \neq \frac{1}{2}\right) \wedge (s \neq \diamond) \Rightarrow \Gamma_\Theta(s) = 2, \tag{5.3}$$

where Γ_Θ is the bipolar endomorphism type Θ of the groupoid $(\mathbb{C}^o, *)$.

P r o o f. Suppose the Riemann hypothesis. Then for every nontrivial zero s of the zeta function ζ the equality $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ holds. By Lemma 5.1 the transformation Θ has fixed points (at least one point: $\diamond$). Therefore, by Theorem 3.1, there exists a groupoid $\mathbb{C}^o = (\mathbb{C}^o, *)$ with pairwise distinct left translations and an endomorphism Θ. Moreover, the equality $\Gamma_\Theta(s) = 1$ holds if and only if $s \in \mathbb{C}^o$ is a fixed point of the endomorphism Θ of the groupoid $\mathbb{C}^o$ (the latter follows from Theorem 3.1). Since the fixed points of the transformation Θ are exhausted by the nontrivial zeros of the zeta function and the symbol $\diamond$, then if $s \in \mathbb{C}^o$ is a fixed point of Θ, then either $s = \diamond$ or $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Therefore, the first implication (5.3) holds. This implication cannot be replaced by an equivalence, since the critical line contains not only the zeros of the zeta function. The second implication of (5.3) follows from the assumption that the Riemann hypothesis is true.

Let statements 1 and 2 from the statement of the current Theorem be true. Consequently, any fixed point of the transformation Θ lies on the critical line or is a symbol of $\diamond$ (deduced from Theorem 3.1). Therefore, Lemma 5.1 implies that all nontrivial zeros of the zeta function lie on the critical line (i.e., the Riemann hypothesis is true). The Theorem is proved.

The following corollaries follow from Theorem 5.1 and the definitions of the sets $\mathrm{Gru}(G, \alpha)$, $\mathrm{APriori}(S, 1)$, and $\mathrm{Bte}^*(S)$.

Corollary 5.1. *If there exists a groupoid $S \in \mathrm{Gru}(\mathbb{C}^o, \Theta)$ with pairwise distinct left translations and there exists a set*

$$H \subseteq \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1, \mathrm{Re}(s) \neq \frac{1}{2}\},$$

such that $H \subseteq \mathrm{APriori}(S, 1)$, then the Riemann hypothesis does not hold.

If the premises of Corollary 5.1 hold, then there exist nontrivial zeros of the zeta function that do not lie on the critical line. In this case, the Riemann hypothesis does not hold.

Corollary 5.2. *If there exists a groupoid $S \in \mathrm{Gru}(\mathbb{C}^o, \Theta)$ with pairwise distinct left translations such that for any $\gamma \in \mathrm{Bte}(S)$ the implication*

$$\gamma \in \mathrm{Bte}^*(S) \setminus \{A\} \Rightarrow \left(\forall s \in \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\} : \gamma(s) = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}\right),$$

then the Riemann hypothesis holds.

If the premises of Corollary 5.2 hold, then there exists a groupoid $S \in \mathrm{Gru}(\mathbb{C}^o, \Theta)$ with pairwise distinct left translations such that all endomorphisms, except those lying in $D(A)$, of this groupoid have fixed points only on the critical line. Since S is a groupoid with pairwise distinct left translations, the base set of endomorphisms $D(A)$ contains only the identity transformation. In this case, the Riemann Hypothesis holds.

Corollaries 5.1 and 5.2 demonstrate that the solution of Problems 3-6 for $G = \mathbb{C}^o$ and $\alpha = \Theta$ is useful for investigating the Riemann Hypothesis.

If the Riemann hypothesis is not satisfied, then the existence of the groupoid S from Corollary 5.1 does not follow. Similarly, the existence of the groupoid S from Corollary 5.1 does not follow from the Riemann hypothesis. At the same time, the author of this paper is inclined to believe that the following hypotheses are satisfied.

Hypothesis 5.1. *If the Riemann hypothesis is not satisfied, then the groupoid S from* $\mathrm{Gru}(\mathbb{C}^o, \Theta)$ *from the conditions of Corollary* 5.1 *exists.*

Hypothesis 5.2. *If the Riemann hypothesis is satisfied, then the groupoid S from* $\mathrm{Gru}(\mathbb{C}^o, \Theta)$ *from the conditions of Corollary* 5.2 *exists.*

Acknowledgements. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

References

1. E. M. Bogatov, "On the history of the fixed point method and the contribution of the soviet mathematicians (1920s-1950s.)", *Chebyshevskii Sbornik*, **19**:2 (2018), 30–55. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55 (In Russ.).

2. M. Bernkopf, "The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory", *Arch. Hist. Exact Sci.*, **3** (1966), 1–96.

3. G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, "Invariant points in function space", *Transactions of the American Mathematical Society*, **23**:1 (1922), 96–115. DOI: 10.2307/1988914.

4. J. Schauder, "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen", *Math. Zeitschrift*, **26**:1 (1927), 47–65. DOI: 10.1007/bf01475440.

5. A. V. Litavrin, "On an Elemmaent-by-Elemmaent Description of the Monoid of all Endomorphisms of an Arbitrary Groupoid and One Classification of Endomorphisms of a Groupoid", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **321**:1 (2023), S170–S185. DOI: 10.1134/S008154382303015X.

6. A. V. Litavrin, "On the bipolar classification of endomorphisms of a groupoid", *Journal of SFU. Series Mathematics and Physics*, **17**:3 (2024), 378–387.

7. M. N. Nazarov, "A Self-Induced Metric on Groupoids and its Application to the Analysis of Cellular Interactions in Biology", *J. Math. Sci.*, **206**:5 (2015), 561–569. DOI: 10.1007/s10958-015-2333-5.

8. S. Yu. Katyshev, V. T. Markov, A. A. Nechaev, “Application of non-associative groupoids to the realization of an open key distribution procedure”, *Discrete Math. Appl.*, **25**:1 (2015), 9–24. DOI: 10.1515/dma-2015-0002.

9. A. V. Baryshnikov, S. Yu. Katyshev, “Application of non-associative structures to the construction of public key distribution algorithms”, *Mathematical Aspects of Cryptography*, **9**:4 (2018), 5–30. DOI: 10.4213/mvk267 (In Russ.).

10. V. T. Markov, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, “Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **245**:2 (2020), 178–196. DOI: 10.1007/s10958-020-04685-5.

11. A. V. Litavrin, “On Alternating Semigroups of Endomorphisms of a Groupoid”, *Siberian Adv. Math.*, **34**:2 (2024), 105–115. DOI: 10.1134/S1055134424020032.

12. M. A. Korolev, “Gram’s law in the theory of Riemann zeta-function. Part 1”, *Modern problems of mathematics*, **20** (2015), 3–161. DOI: doi.org/10.4213/spm53 (In Russ.).

13. M. K. Kerimov, “Methods of computing the Riemann zeta-function and some generalizations of it”, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **20**:6 (1980), 212–230. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90015-4.

14. A. Yu. Yeremin, I. E. Kaporin, M. K. Kerimov, “Calculation of the Riemann zeta function in a complex domain”, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **25**:2 (1985), 111–119. DOI: 10.1016/0041-5553(85)90116-8.

15. G. Diamond, “Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **45**:2 (1990), 79–114 (In Russ.).

Submitted 18.11.2024; Revised 23.01.2025; Accepted 26.02.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

Список литературы

1. Богатов Е. М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е–1950-е гг.) // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 30–55. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55

2. Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory // Arch. Hist. Exact Sci. 1966. Vol. 3. pp. 1–96.

3. Birkhoff G. D., Kellogg O. D. Invariant points in function space // Transactions of the American Mathematical Society. 1922. Vol. 23, Issue 1. pp. 96–115. DOI: 10.2307/1988914

4. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen // Math. Zeitschrift. 1927. Vol. 26, Issue. 1. pp. 47–65. DOI: 10.1007/bf01475440

5. Литаврин А. В. О поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида и одной классификации эндоморфизмов группоида // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 143–159. DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-143-159

6. Litavrin A. V. On the bipolar classification of endomorphisms of a groupoid // Журнал СФУ. Серия Математика и физика, 2024. Т. 17, № 3. С. 378–387.

7. Назаров М. Н. Собственная метрика на группоидах и ее приложение к анализу межклеточных взаимодействий в биологии // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 3. С. 149–160.

8. Катышев С. Ю., Марков В. Т., Нечаев А. А. Использование неассоциативных группоидов для реализации процедуры открытого распределения ключей // Дискрет. матем. 2014. Т. 26, № 3. С. 45–64. DOI: 10.4213/dm1289

9. Барышников А. В., Катышев С. Ю. Использование неассоциативных структур для построения алгоритмов открытого распределения ключей // Матем. вопр. криптогр. 2018. Т. 9, № 4. С. 5–30. DOI: 10.4213/mvk267

10. Марков В. Т., Михалёв А. В., Нечаев А. А. Неассоциативные алгебраические структуры в криптографии и кодировании // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 4. С. 99–124.

11. А. В. Литаврин, "Об альтернирующих полугруппах эндоморфизмов группоида", Матем. тр. 2024. Т. 27, № 1. 73–95. DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-1-73-95

12. Королёв М. А. Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 1 // Совр. пробл. математики. 2015. Т. 20, С. 3–161. DOI: 10.4213/spm53

13. Керимов М. К. О методах вычисления дзета-функции Римана и некоторых её обобщений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20, № 6. С. 1580–1597.

14. Ерёмин А. Ю., Капорин И. Е., Керимов М. К. О вычислении дзета-функции Римана в комплексной области // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25, № 4. С. 500–511.

15. Диамонд Г. Элементарные методы в изучении распределения простых чисел // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 2. С. 79–114.

Поступила 18.11.2024; доработана после рецензирования 23.01.2025; принята к публикации 26.02.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958

Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности с дробно-дифференциальным малым двухфазным запаздыванием

В. О. Лукащук, С. Ю. Лукащук

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. В статье решается задача групповой классификации нелинейного одномерного дробно-дифференциального уравнения теплопроводности с полной памятью и двухфазным запаздыванием, включающим тепловую релаксацию и термическое демпфирование. Характерные времена релаксационных процессов считаются малыми, что учитывается в уравнении введением малого параметра при дробно-дифференциальных релаксационных слагаемых. Все теплофизические параметры считаются функциями температуры. Групповая классификация выполняется с точностью до преобразований эквивалентности по допускаемым уравнением группам приближенных точечных преобразований в линейном приближении по малому параметру. Доказано, что в общем случае допускаемая уравнением приближенная группа является пятипараметрической. Выделены случаи ее расширения до семи- и девятипараметрической, соответственно. Показано также, что рассматриваемое нелинейное уравнение обладает бесконечной группой приближенных симметрий в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение является линейным. Доказано, что рассматриваемое уравнение всегда точно наследует симметрии невозмущенного уравнения. Полученные результаты дают возможность построения приближенно-инвариантных решений рассматриваемого уравнения. В частности, из найденной классификации следует, что рассматриваемое уравнение всегда будет обладать решением типа бегущей волны, а автомодельные решения возможны только в случае степенных зависимостей теплофизических параметров от температуры. Получены анзацы данных типов решений и выполнена симметрийная редукция рассматриваемого уравнения к соответствующим обыкновенным дробно-дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение теплопроводности, дробная производная Герасимова–Капуто, малый параметр, допускаемая группа приближенных преобразований, приближенно-инвариантное решение

Для цитирования: Лукащук В. О., Лукащук С. Ю. Групповая классификация нелинейного уравнения теплопроводности с дробно-дифференциальным малым двухфазным запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 49–68. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68

Об авторах:

Лукащук Вероника Олеговна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3082-1446, voluks@gmail.com

Лукащук Станислав Юрьевич, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9209-5155, lsu@ugatu.su

Original article

MSC2020 70G65

Group classification of nonlinear time-fractional dual-phase-lag heat equation with a small parameter

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we solve the group classification problem for a nonlinear one-dimensional time-fractional heat conduction equation with full memory and dual-phase-lag, including thermal relaxation and thermal damping. The characteristic times of relaxation processes are assumed to be small enough and therefore a small parameter for fractional differential relaxation terms is introduced. All thermal properties of a medium are considered as functions of temperature. Group classification is performed with respect to groups of approximate point transformations (groups of approximate symmetries) admitted by the equation up to equivalence transformations. We prove that generally the equation admits five-parameter group of approximate transformations, and the cases of its extension to seven- and nine-parameters groups are found. Also, it is shown that the considered nonlinear equation has an infinite approximate symmetry group if the corresponding unperturbed equation is linear. We find that the equation in question always exactly inherits the symmetries of the unperturbed equation. The obtained results make it possible to construct approximately invariant solutions of equation under consideration. In particular, it follows from the classification found that the equation always has a traveling wave solution. The self-similar solutions can be constructed only if the medium thermal properties have power-law dependences on temperature. Ansatzes of these types of solutions are obtained and symmetry reductions of the equation under consideration to the corresponding ordinary fractional differential equations are performed.

Keywords: time-fractional heat equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, small parameter, admitted approximate transformations group, approximately-invariant solution

For citation: *V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk.* Group classification of nonlinear time-fractional dual-phase-lag heat equation with a small parameter. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 49–68. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.49-68

About the authors:

Veronika O. Lukashchuk, Ph.D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of High Performance Computing Systems and Technologies, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3082-1446, voluks@gmail.com

Stanislav Yu. Lukashchuk, Dr.Sci. in Phys. and Math., Professor, Department of High Performance Computing Systems and Technologies, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9209-5155, lsu@ugatu.su

1. Введение

Классический групповой анализ дифференциальных уравнений [1–3] является эффективным математическим инструментом исследования их симметрийных свойств, нахождения инвариантных решений и построения законов сохранения. Основы теоретико-группового подхода были заложены в работах С. Ли и в дальнейшем развивались многими отечественными и зарубежными исследователями. В современном групповом анализе [4–6] области применимости теоретико-групповых методов были существенно расширены. В настоящее время эти методы успешно адаптированы для исследования интегро-дифференциальных уравнений [7–8] и дифференциальных уравнений с производными дробных порядков различных типов [9–10]. В [10–14] была развита теория приближенных групп преобразований для исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений с малым параметром. Относительно недавно [15–17] на основе этой теории были предложены алгоритмы нахождения приближенных симметрий и приближенных законов сохранения для дробно-дифференциальных уравнений в случае, когда порядок дробного дифференцирования оказывается близок к целому и, следовательно, в уравнение может быть введен малый параметр.

Классической и практически важной задачей группового анализа является задача групповой классификации [1]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка эта задача была впервые поставлена и частично решена С. Ли [18] (см. также [19]). Одной из первых полностью решенных задач групповой классификации дифференциальных уравнений в частных производных стала решенная академиком Л. В. Овсянниковым задача классификации нелинейного уравнения теплопроводности [20]. В работе [21] данная классификация была расширена на случай уравнения теплопроводности с нелинейным источником. Аналогичная задача для уравнения диффузии с дробной производной типа Римана–Лиувилля по времени рассматривалась в [22–23]. В [24] выполнена групповая классификация по приближенным группам точечных преобразований допускаемых дробно-дифференциальным уравнением теплопроводности с близким к целому порядком дробного дифференцирования, являющаяся дальнейшим расширением классификации Л. В. Овсянникова.

Хорошо известно [25] (см.также [26]), что классическое уравнение теплопроводности, основанное на феноменологическом законе Фурье, не позволяет адекватно описывать быстропротекающие процессы теплопереноса (например, при интенсивном лазерном нагреве [27]). Также это уравнение часто оказывается несправедливым на микромасштабах [28] и в гетерогенных сложных средах [29]. В этом случае используются различные модификации закона Фурье [30]. Наиболее известным из них является закон Максвелла–Каттанео, учитывающий эффект тепловой релаксации и приводящий к гиперболическому уравнению теплопроводности [31–32]. Дальнейшей модификацией этого закона является модель с двухфазным запаздыванием, известная в зарубежной литературе как dual-phase-lag model [33]. Она вводит в уравнение дополнительный коэффициент запаздывания для градиента температуры, называемый термическим демпфированием, который позволяет учесть влияние микроструктуры при макроскопическом описании быстропротекающих тепловых процессов. Недавно в работе [34] была предложена дробно-дифференциальная по времени модификация этой модели, позволяющая дополнительно учесть эффект памяти среды, затухающей по степенному закону. Помимо биологических тканей, такой макроскопический эффект в процессах теплопереноса наблюдается в некоторых пористых средах [35], композитах [36], транзисторных структурах [37]. Вывод этой модели на основе общего реологического соотношения для однородной и изотропной среды представлен в работе [38].

Целью данной работы является решение задачи групповой классификации дробно-дифференциального по времени уравнения теплопроводности с двухфазным запаздыванием в предположении зависимости от температуры всех теплофизических параметров модели. Также предполагается, что влияние релаксационных эффектов мало по сравнению с эффектом молекулярной теплопроводности, описываемой классическим законом Фурье. Это дает возможность ввести в уравнение малый параметр при всех производных дробного порядка. В результате групповая классификация проводится по приближенным группам преобразований, допускаемым рассматриваемым уравнением в линейном приближении по малому параметру. Насколько известно авторам, задача приближенной групповой классификации дробно-дифференциального уравнения с малым параметром при дробных производных в данной работе решается впервые.

2. Постановка задачи и метод решения

Объектом исследования в данной работе является нелинейное одномерное дробно-дифференциальное уравнение теплопроводности

$$u_t + \varepsilon g(u) D_t^\alpha u_t = \big(k(u) u_x\big)_x + \varepsilon \left(f(u) D_t^\alpha u_x\right)_x, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.1}$$

Здесь t, x — независимые переменные (время и пространственная координата), $u = u(t, x)$ — зависимая переменная (температура), $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $k(u)$ — коэффициент температуропроводности, $g(u)$ и $f(u)$ — переменные коэффициенты, связанные с тепловой релаксацией и термическим демпфированием, соответственно,

$$(D_t^\alpha v)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{v_s(s, x)}{(t-s)^\alpha} ds \tag{2.2}$$

— дробная производная типа Герасимова–Капуто [39] порядка $\alpha \in (0, 1)$, определенная на всей временной оси $t \in (-\infty, \infty)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Уравнение (2.1) получается из уравнения энергии в форме первого закона термодинамики и обобщенного феноменологического соотношения для процесса теплопроводности в среде с полной памятью и двухфазным запаздыванием (тепловой релаксацией и термическим демпфированием) в предположении зависимости основных теплофизических характеристик среды от температуры. Малый параметр ε учитывает малость характерного времени соответствующих релаксационных процессов. Полная память системы определяется бесконечным нижним пределом в интеграле (2.2). Заметим, что в этом случае из естественного физического требования конечности энергии системы следует справедливость равенств $u_t|_{t\to-\infty} = u_x|_{t\to-\infty} = 0$. В этом случае дробные производные типа Герасимова–Капуто в уравнении (2.1) будут совпадать с дробными производными типа Римана–Лиувилля [40].

Решается задача групповой классификации уравнения (2.1) по допускаемым группам приближенных точечных преобразований относительно функций $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$. При этом все вычисления выполняются приближенно относительно малого параметра ε с точностью до $o(\varepsilon)$.

В дальнейшем будет удобно использовать развернутую форму уравнения (2.1):

$$u_t = k(u) u_{xx} + k'(u) u_x^2 + \varepsilon \left[f(u) D_t^\alpha u_{xx} + f'(u) u_x D_t^\alpha u_x - g(u) D_t^\alpha u_t \right]. \tag{2.3}$$

Здесь учтено, что оператор дробного дифференцирования D_t^α коммутирует с оператором дифференцирования по пространственной переменной x.

Инфинитезимальный оператор (генератор) приближенной с точностью до $o(\varepsilon)$ группы точечных преобразований имеет вид [11–12]

$$X = (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)\frac{\partial}{\partial t} + (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta^0 + \varepsilon\eta^1)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.4}$$

где τ^0, τ^1, ξ^0, ξ^1, η^0 и η^1 являются функциями t, x, u. Уравнение (2.3) включает в себя дифференциальные u_t, u_x, u_{xx} и дробно-дифференциальные $D_t^\alpha u_t$, $D_t^\alpha u_x$, $D_t^\alpha u_{xx}$ переменные. Для решения поставленной задачи оператор (2.4) продолжается на эти переменные:

$$\begin{aligned}\tilde{X} = X + (\zeta_t^0 + \varepsilon\zeta_t^1)\frac{\partial}{\partial u_t} + (\zeta_x^0 + \varepsilon\zeta_x^1)\frac{\partial}{\partial u_x} + (\zeta_{xx}^0 + \varepsilon\zeta_{xx}^1)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \\ + \zeta_t^\alpha\frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_t} + \zeta_x^\alpha\frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_x} + \zeta_{xx}^\alpha\frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u_{xx}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь учтено, что все дробно-дифференциальные переменные входят в рассматриваемое уравнение только в ε-порядке, поэтому в продолжении оператора для соответствующих координат оставлен только нулевой порядок по ε.

Для нахождения координат продолженного оператора (2.5) может быть использована единая формула (доказательство см., например, в [10])

$$\zeta \equiv \zeta^0 + \varepsilon\zeta^1 = \mathcal{D}(W) + (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)D_t(\mathcal{D}u) + (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)D_x(\mathcal{D}u),$$

где

$$W = \eta^0 + \varepsilon\eta^1 - (\tau^0 + \varepsilon\tau^1)u_t - (\xi^0 + \varepsilon\xi^1)u_x$$

и в качестве оператора $\mathcal{D}$ выступают операторы D_t, D_x, D_x^2, $D_t^\alpha D_t$, $D_t^\alpha D_x$ и $D_t^\alpha D_x^2$ для нахождения ζ_t, ζ_x, ζ_{xx}, ζ_t^α, ζ_x^α и ζ_{xx}^α, соответственно. При вычислении координат дробно-дифференциальных переменных используются формулы

$$\begin{aligned}
&D_t^\alpha D_x(tu) = tD_t^\alpha u_x + \alpha D_t^{\alpha-1}u_x,\\
&D_t^\alpha D_t(tu) = tD_t^{\alpha+1}u + (\alpha+1)D_t^\alpha u,\\
&D_t^\alpha D_x(tu_t) = tD_t^{\alpha+1}u_x + \alpha D_t^\alpha u_x,\\
&D_t^\alpha D_t(tu_t) = tD_t^{\alpha+2}u + (\alpha+1)D_t^{\alpha+1}u,\\
&D_t^\alpha D_x(t^2u_t) = t^2D_t^{\alpha+1}u_x + 2\alpha tD_t^\alpha u_x + \alpha(\alpha-1)D_t^{\alpha-1}u_x,\\
&D_t^\alpha D_t(t^2u_t) = t^2D_t^{\alpha+2}u + 2(\alpha+1)tD_t^{\alpha+1}u + \alpha(\alpha+1)D_t^\alpha u,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

справедливость которых проверяется непосредственными вычислениями с учетом соотношения $D_t^\alpha D_t = D_t^{\alpha+1}$.

Как и в классическом групповом анализе [1], действие продолженного оператора (2.5) на дробно-дифференциальное уравнение (2.3) дает определяющее уравнение

$$\begin{aligned}\Big[(\eta^0 + \varepsilon\eta^1)(k'u_{xx} + k''u_x^2) - \varepsilon\eta^0(f'D_t^\alpha u_{xx} + f''u_xD_t^\alpha u_x - g'D_t^\alpha u_t) + (\zeta_{xx}^0 + \varepsilon\zeta_{xx}^1)k + \\ + 2(\zeta_x^0 + \varepsilon\zeta_x^1)ku_x + \varepsilon(\zeta_{xx}^\alpha f + \zeta_x^\alpha f'u_x + \zeta_x^0 f'D_t^\alpha u_x - \zeta_t^\alpha g) - \zeta_t^0 - \varepsilon\zeta_t^1\Big]_{(2.3)} = o(\varepsilon),\end{aligned} \tag{2.7}$$

которое должно выполняться с точностью до $o(\varepsilon)$ для любой допускаемой уравнением приближенной группы в силу самого уравнения. При этом отметим одну важную особенность. Так как используются дробные производные на всей оси, то есть конечный постоянный предел интегрирования в дробно-дифференциальном операторе отсутствует, то никаких дополнительных требований на сохранение такого предела при групповом преобразовании не возникает. Детальное обсуждение этого вопроса для дробных производных на отрезке можно найти, например, в [9].

Нетрудно заметить, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.1) превращается в классическое нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \tag{2.8}$$

задача групповой классификации которого была решена академиком Л. В. Овсянниковым [20]. Соответствующие значения координат τ^0, ξ^0 и η^0 для различных неэквивалентных случаев функции $k(u)$ могут быть записаны следующим образом [1]:

1) $k(u)$ — произвольная,

$$\tau^0 = C_1 + 2C_3t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x, \quad \eta^0 = 0; \tag{2.9}$$

2) $k(u) = e^u$,

$$\tau^0 = C_1 + (2C_3 - C_4)t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x, \quad \eta^0 = C_4; \tag{2.10}$$

3) $k(u) = u^\sigma$ $(\sigma \neq 0)$,

$$\tau^0 = C_1 + 2C_3t, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x + C_4\sigma x - C_5x^2, \quad \eta^0 = (2C_4 + 3C_5x)u, \tag{2.11}$$

причем $C_5 \neq 0$ только при $\sigma = -4/3$;

4) $k(u) = 1$,

$$\begin{gathered} \tau^0 = C_1 + 2C_3t - 4C_5t^2, \quad \xi^0 = C_2 + C_3x - 2C_4t - 4C_5tx, \\ \eta^0 = (C_6 + C_4x + C_5x^2 + 2C_5t)u + h(t,x), \end{gathered} \tag{2.12}$$

где функция $h(t,x)$ — произвольное решение уравнения $h_t = h_{xx}$.

В (2.9)–(2.12) через C_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ обозначены произвольные постоянные. В результате задача групповой классификации уравнения (2.1) по группам приближенных преобразований сводится к исследованию наследования известных групп различных видов невозмущенного уравнения при его соответствующем дробно-дифференциальном возмущении.

Отметим еще один важный момент. Решение задачи групповой классификации всегда должно проводиться с точностью до преобразований эквивалентности, общая методика построения которых изложена в [1]. Конструктивный алгоритм построения группы преобразований эквивалентности был предложен в работе [41] и распространен на дробно-дифференциальные уравнения в работе [22]. Однако для рассматриваемого уравнения (2.1) вследствие наличия одновременно малого параметра и производных дробного порядка задача построения полной группы приближенных преобразований эквивалентности становится достаточно сложной и трудоемкой задачей. Тем не менее, поскольку классификация по функции $k(u)$ уже известна, а функции $f(u)$ и $g(u)$

стоят при малом параметре, для выделения их классов эквивалентности оказывается достаточно знать преобразования эквивалентности только в нулевом порядке по ε. Эти преобразования легко получаются из известных для уравнения теплопроводности с источником [21] и имеют вид

$$\begin{gathered}\bar{t}=a_1^2 t, \quad \bar{x}=a_1 a_2 x, \quad \bar{u}=a_3 u+a_4, \quad \bar{k}(\bar{u})=a_2^2 k(a_3 u+a_4), \\ \bar{f}(\bar{u})=(a_1^\alpha a_2)^2 f(a_3 u+a_4), \quad \bar{g}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} g(a_3 u+a_4).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Здесь a_i $(i=1,2,3,4)$ — произвольные постоянные.

Для рассматриваемой задачи преобразования (2.13) не должны изменять приведенную выше классификацию функции $k(u)$. Поэтому для конкретных видов этой функции данные преобразования дополнительно упрощаются. Имеем

1) $k(u)$ — произвольная: справедливы преобразования (2.13);

2) $k(u)=e^u$: $a_2^2=1$, $a_3=1$, $a_4=0$, следовательно

$$\bar{t}=a_1^2 t, \quad \bar{x}=\pm a_1 x, \quad \bar{u}=u, \quad \bar{f}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} f(u), \quad \bar{g}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} g(u); \tag{2.14}$$

3) $k(u)=u^\sigma$ $(\sigma\neq 0)$: $a_2^2=a_3^{-\sigma}$, $a_3>0$, $a_4=0$, следовательно

$$\begin{gathered}\bar{t}=a_1^2 t, \quad \bar{x}=\pm a_1 a_3^{-\sigma/2} x, \quad \bar{u}=a_3 u, \\ \bar{f}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} a_3^{-\sigma} f(a_3 u), \quad \bar{g}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} g(a_3 u);\end{gathered} \tag{2.15}$$

4) $k(u)=1$: $a_2^2=1$, следовательно

$$\begin{gathered}\bar{t}=a_1^2 t, \quad \bar{x}=\pm a_1 x, \quad \bar{u}=a_3 u+a_4, \\ \bar{f}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} f(a_3 u+a_4), \quad \bar{g}(\bar{u})=a_1^{2\alpha} g(a_3 u+a_4).\end{gathered} \tag{2.16}$$

В данной работе групповая классификации уравнения (2.1) проводится с точностью до преобразований эквивалентности (2.13) – (2.16).

3. Результаты групповой классификации

Рассмотрим наследование уравнением (2.1) группы невозмущенного нелинейного уравнения теплопроводности отдельно для каждого из случаев (2.9)–(2.12) его классификации.

1) *Случай произвольного* $k(u)$.

Подстановка (2.9) в (2.7) дает определяющее уравнение, которое будет содержать только слагаемые первого порядка по ε. Расщепление полученного уравнения по независимым переменным $D_t^{\alpha+1}u$ и $D_t^\alpha u_{xx}$ приводит к уравнениям

$$C_3 g=0, \quad C_3 f=0.$$

Решение $f=g=0$ является тривиальным, так как приводит к вырождению уравнения (2.1) в классическое уравнение теплопроводности (2.8), поэтому в дальнейшем не рассматривается. В результате из полученных уравнений следует, что $C_3 = 0$, а функции $f(u)$ и $g(u)$ являются произвольными. Примение преобразований эквивалентности (2.13) в данном случае не требуется.

Оставшаяся часть определяющего уравнения не содержит постоянных C_1, C_2 и оказывается идентичной определяющему уравнению для (2.8). В результате находим

$$\tau^1 = c_1 + 2c_3 t, \quad \xi^1 = c_2 + c_3 x, \quad \eta^1 = 0, \tag{3.1}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Таким образом, в случае произвольных функций $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$ допускаемая уравнением (2.1) приближенная группа точечных преобразований является пятипараметрической, соответствующей пяти постоянным C_1, C_2, c_1, c_2, c_3.

2) *Случай* $k(u) = e^u$.

Подставляя (2.10) в (2.7) и приравнивая к нулю выражения при дробнодифференциальных переменных $D_t^{\alpha+1}u$, $D_t^{\alpha}u_{xx}$ и $u_x D_t^{\alpha}u_x$, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} &C_4 g' - \alpha(2C_3 - C_4)g = 0, \\ &C_4 f' - [(\alpha-1)(2C_3 - C_4) + 2C_3]f = 0, \\ &C_4 f'' - [(\alpha-1)(2C_3 - C_4) + 2C_3]f' = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Легко видеть, что третье уравнение в (3.2) является дифференциальным следствием второго. Таким образом, первое уравнение в (3.2) является классифицирующим для функции $g(u)$, а второе — для функции $f(u)$. Оба уравнения выполняются тождественно при $C_3 = C_4 = 0$ и произвольных f и g. Этот случай включается в уже рассмотренный выше. Так как $\alpha \in (0,1)$, то к нему же сводится случай $C_4 = 0$. Поэтому важным для классификации является только случай $C_4 \neq 0$, при этом решение (3.2) имеет вид

$$f(u) = f_0 e^{(1+\beta)u}, \quad g(u) = g_0 e^{\beta u}, \tag{3.3}$$

где f_0, g_0, β — произвольные постоянные и выполнено условие

$$2\alpha C_3 - (\alpha+\beta)C_4 = 0. \tag{3.4}$$

В результате будет наследоваться группа, определяемая линейной комбинацией (3.4).

Применение преобразований эквивалентности (2.14) к (3.3) позволяет выделить два неэквивалентных случая:

$$\begin{gathered} f(u) = \pm e^{(1+\beta)u}, \quad g(u) = g_0 e^{\beta u}, \quad g_0 = const; \\ f(u) = 0, \quad g(u) = \pm e^{\beta u}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Разрешение оставшейся части определяющего уравнения дает ε-порядок допускаемой группы:

$$\tau^1 = c_1 + (2c_3 - c_4)t, \quad \xi^1 = c_2 + c_3 x, \quad \eta^1 = c_4, \tag{3.6}$$

где c_i $(i = 1,2,3,4)$ — произвольные постоянные.

Таким образом, в обоих случаях из (3.5) уравнение (2.1) допускает семипараметрическую группу приближенных точечных преобразований.

3) *Случай* $k(u) = u^{\sigma}$ $(\sigma \neq 0)$.

В данном случае определяющее уравнение, получающееся после подстановки (2.11) в (2.7), будет содержать уже четыре дробно-дифференциальные переменные: $D_t^{\alpha+1}u$, $D_t^{\alpha}u$, $D_t^{\alpha}u_{xx}$ и $D_t^{\alpha}u_x$. Приравнивание к нулю выражений, выступающих множителями при этих переменных, приводит к системе

$$\begin{aligned}
&(2C_4+3C_5x)ug'-2\alpha C_3 g=0,\\
&C_5f'=0,\\
&(2C_4+3C_5x)uf'-(2\sigma C_4+2\alpha C_3-4C_5x)f=0,\\
&u_x[(2C_4+3C_5x)uf''-(2\sigma C_4+2\alpha C_3-2C_4-2C_5x)f']+3C_5uf'+10C_5f=0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как f и g являются функциями только переменной u, данная система может быть дополнительно расщеплена по u_x и x. Отсюда следует, что если $C_5\neq 0$, то есть $\sigma=-4/3$, то

$$f(u)=0,\quad g(u)\equiv g_0=const. \tag{3.8}$$

При этом из первого уравнения (3.7) дополнительно следует $C_3=0$. Применение преобразований эквивалентности (2.15) позволяет привести (3.8) к виду

$$f(u)=0,\quad g(u)=\pm 1. \tag{3.9}$$

При $C_5=0$ четвертое уравнение в (3.7) становится дифференциальным следствием третьего. В результате классифицирующие соотношения для функций $f(u)$ и $g(u)$ принимают вид

$$C_4ug'-\alpha C_3g=0,\qquad C_4uf'-(\sigma C_4+\alpha C_3)f=0.$$

При $C_4=0$ получаем либо $C_3=0$ и произвольные f и g, либо $f=g=0$ и произвольное C_3. Оба эти случая уже рассмотрены ранее. Поэтому наследование группы возможно только при $C_4\neq 0$. В этом случае интегрирование приведенных уравнений дает

$$f(u)=f_0u^{\gamma+\sigma},\quad g(u)=g_0u^{\gamma}, \tag{3.10}$$

где f_0, g_0 и γ — произвольные постоянные и выполнено условие

$$\gamma C_4-\alpha C_3=0.$$

Применение к (3.10) преобразований эквивалентности (2.15) дает два неэквивалентных случая:

$$\begin{gathered}
f(u)=\pm u^{\gamma+\sigma},\quad g(u)=g_0u^{\gamma},\ \ g_0=const,\\
f(u)=0,\quad g(u)=\pm u^{\gamma}.
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Оставшаяся часть определяющего уравнения дает ε-порядок группы:

$$\tau^1=c_1+2c_3t,\quad \xi^1=c_2+c_3x+c_4\sigma x-c_5x^2,\quad \eta^1=(2c_4+3c_5x)u, \tag{3.12}$$

где c_i $(i=1,\ldots,5)$ — произвольные постоянные, причем $c_5\neq 0$ только при $\sigma=-4/3$.

Таким образом, допускаемая уравнением (2.1) приближенная группа является семипараметрической в случаях из (3.11) и девятипараметрической в случае (3.9).

4) *Случай* $k(u)=1$.

Данный случай соответствует линейному невозмущенному уравнению и является с точки зрения анализа наиболее трудоемким. В результате подстановки (2.12) в (2.7) получается определяющее уравнение, содержащее восемь различных переменных дробного порядка. Расщепление по ним определяющего уравнения приводит к следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&D_t^{\alpha-1}u_{xxx}: && (C_4+2C_5x)f=0,\\
&D_t^{\alpha}u_{xx}: && f'h+(C_6+C_4x+C_5x^2+2C_5t)uf'+\\
& && +[2(4\alpha-1)C_5t-2\alpha C_3+4\alpha(\alpha+1)C_5]f=0,\\
&D_t^{\alpha-1}u_{xx}: && (C_4+2C_5x)f'u_x=0,\\
&D_t^{\alpha}u_{x}: && [(C_6+C_4x+C_5x^2+2C_5t)u+h]f''u_x+f'h_x+(C_4+2C_5x)uf'+\\
& && +(C_6+C_4x+C_5x^2+2C_5t-2\alpha C_3)f'u_x+2(C_4+2C_5x)f-\\
& && -2(\alpha+1)(C_4+2C_5x)g=0,\\
&D_t^{\alpha-1}u_{x}: && C_5f'u_x=0,\\
&D_t^{\alpha+1}u: && (C_6+C_4x+C_5x^2+2C_5t)ug'+hg'+2\alpha(4C_5t-C_3)g=0,\\
&D_t^{\alpha}u: && (C_4+2C_5x+8\alpha C_5t)f'u_x-2(2\alpha+1)(\alpha+1)C_5g+2C_5f=0,\\
&D_t^{\alpha-1}u: && C_5f=0.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Из первого уравнения сразу следует, что либо $f=0$, либо

$$C_4=C_5=0. \tag{3.14}$$

Тогда из последнего уравнения из (3.13) вытекает, что если (3.14) не выполнено, то $g=0$. Однако этот случай является тривиальным. Поэтому наследование группы возможно только при выполнении условия (3.14), при этом первое, третье, пятое, седьмое и восьмое уравнения из (3.13) выполняются тождественно. Из оставшихся уравнений четвертое дополнительно расщепляются по u_x. В результате определяющая система для функций $f(u)$ и $g(u)$ приобретает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&(C_6u+h)f'-2\alpha C_3f=0,\\
&(C_6u+h)f''+(C_6-2\alpha C_3)f'=0,\\
&(C_6u+h)g'-2\alpha C_3g=0,\\
&f'h_x=0.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Легко заметить, что второе уравнение является дифференциальным следствием первого и поэтому может быть опущено. Из последнего уравнения следует, что либо $f(u)\equiv f_0=const$, либо $h(t,x)\equiv h_0=const$ (так как $h_t=h_{xx}$).

При $f=f_0\neq 0$ из первого уравнения в (3.15) следует $C_3=0$. Тогда третье уравнение дает либо $g(u)\equiv g_0=const$, либо $C_6=h=0$ при произвольной функции $g(u)$. Последний случай соответствует произвольному $k(u)$ и поэтому отдельно не выделяется. Таким образом, выделяется случай

$$f(u)\equiv f_0=const\neq 0,\quad g(u)\equiv g_0=const,\quad C_3=C_4=C_5=0. \tag{3.16}$$

Если $f = 0$, то из третьего уравнения в (3.15) при $h \neq const$ следует $g \equiv g_0 = const$ и $C_3 = 0$, при этом сохраняется $C_6 \neq 0$. Этот случай включается в (3.16) как расширение $f_0 = 0$.

Заметим, что при (3.16) уравнение (2.1) становится линейным. В силу очевидного при этом соотношения $\varepsilon u = \varepsilon u_{xx}$ получаем, что $\varepsilon D_t^\alpha u_{xx} = D_t^\alpha u_t$ и дробно-дифференциальные слагаемые в уравнении (2.1) объединяются в единое слагаемое $(g_0 - f_0) D_t^\alpha u_t$. Поэтому с точностью до преобразований эквивалентности (2.16) получаем

$$f(u) = 0, \quad g(u) = \pm 1. \tag{3.17}$$

При $h \equiv h_0 = const$ выделяются случаи

$$f(u) = f_0 e^{\delta u}, \quad g(u) = g_0 e^{\delta u}, \quad 2\alpha C_3 - \delta h_0 = 0, \quad C_6 = 0 \tag{3.18}$$

и

$$f(u) = f_0 (u+a)^\gamma, \quad g(u) = g_0 (u+a)^\gamma, \quad C_6 a - h_0 = 0, \quad 2\alpha C_3 - \gamma C_6 = 0. \tag{3.19}$$

Здесь f_0, g_0, δ, a и γ — произвольные постоянные.

Применение преобразований эквивалентности (2.16) к (3.18) и (3.19) дает

$$\begin{gathered} f(u) = \pm e^u, \quad g(u) = g_0 e^u \quad g_0 = const; \\ f(u) = 0, \quad g(u) = \pm e^u \end{gathered} \tag{3.20}$$

и

$$\begin{gathered} f(u) = \pm u^\gamma, \quad g(u) = g_0 u^\gamma, \quad g_0 = const; \\ f(u) = 0, \quad g(u) = \pm u^\gamma. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Разрешая оставшуюся часть определяющего уравнения, находим

$$\begin{gathered} \tau^1 = c_1 + 2c_3 t - 4c_5 t^2, \quad \xi^1 = c_2 + c_3 x - 2c_4 t - 4c_5 t x, \\ \eta^1 = (c_6 + c_4 x + c_5 x^2 + 2c_5 t) u + q(t,x), \end{gathered} \tag{3.22}$$

где c_i $(i = 1, \ldots, 6)$ — произвольные постоянные и функция $q = q(t,x)$ является произвольным решением уравнения $q_t = q_{xx} + (f_0 - g_0) D_t^\alpha h_t$.

Таким образом, допускаемая группа приближенных преобразований во всех случаях (3.17), (3.20), (3.21) является бесконечной, при этом нетривиальная конечномерная ее часть является девятипараметрической.

На этом задача групповой классификации решена полностью. Полученный результат может быть сформулирован в терминах n-мерных алгебр Ли L^n инфинитезимальных операторов групп приближенных точечных преобразований, допускаемых уравнением (2.1). Такие алгебры называются кратко алгебрами Ли приближенных симметрий данного уравнения. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Нелинейное уравнение* (2.1) *в случае произвольных* $k(u)$, $f(u)$ *и* $g(u)$ *обладает алгеброй Ли* L^5 *приближенных точечных симметрий с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2\varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = \varepsilon X_1, \quad X_5 = \varepsilon X_2.$$

Данная алгебра расширяется в следующих случаях:

1) до L^7 при $k(u)=e^u$ и $f(u)=\pm e^{(1+\beta)u}$, $g(u)=g_0e^{\beta u}$ или $f(u)=0$, $g(u)=\pm e^{\beta u}$:

$$X_6=2\beta t\frac{\partial}{\partial t}+(\alpha+\beta)x\frac{\partial}{\partial x}+2\alpha\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u};$$

2) до L^7 при $k(u)=u^\sigma$ ($\sigma\neq 0,-4/3$) и $f(u)=\pm u^{\gamma+\sigma}$, $g(u)=g_0u^\gamma$ или $f(u)=0$, $g(u)=\pm u^\gamma$:

$$X_6=2\gamma t\frac{\partial}{\partial t}+(\gamma+\alpha\sigma)x\frac{\partial}{\partial x}+2\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=\varepsilon\sigma x\frac{\partial}{\partial x}+2\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u};$$

3) до L^9 при $k(u)=u^{-\frac{4}{3}}$, $f(u)=0$, $g(u)=\pm 1$:

$$X_6=2x\frac{\partial}{\partial x}-3u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_8=\varepsilon X_6,\quad X_9=\varepsilon X_7;$$

4) до $L^9\oplus L^\infty$ при $k(u)=1$ и $f(u)=\pm e^u$, $g(u)=g_0e^u$ или $f(u)=0$, $g(u)=\pm e^u$:

$$X_6=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+2\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_8=2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9=4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t}+4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon(x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_\infty=\varepsilon q(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $q(t,x)$ — произвольное решение уравнения $q_t=q_{xx}$;

5) до $L^9\oplus L^\infty$ при $k(u)=1$ и $f(u)=\pm u^\gamma$, $g(u)=g_0u^\gamma$ или $f(u)=0$, $g(u)=\pm u^\gamma$:

$$X_6=2\gamma t\frac{\partial}{\partial t}+\gamma x\frac{\partial}{\partial x}+2\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=\varepsilon u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_8=2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9=4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t}+4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon(x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_\infty=\varepsilon q(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $q(t,x)$ — произвольное решение уравнения $q_t=q_{xx}$;

6) до $L^9\oplus L^\infty$ при $k(u)=1$, $f(u)=0$, $g(u)=\pm 1$:

$$X_6=u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_7=\varepsilon X_6,\quad X_8=2\varepsilon t\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon xu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_9=4\varepsilon t^2\frac{\partial}{\partial t}+4\varepsilon tx\frac{\partial}{\partial x}-\varepsilon(x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_\infty=[h(t,x)+\varepsilon q(t,x)]\frac{\partial}{\partial u},$$

где $h(t,x)$ — произвольное решение уравнения $h_t=h_{xx}$ и $q(t,x)$ — произвольное решение уравнения $q_t=q_{xx}\mp D_t^\alpha h_t$.

Здесь $\alpha\in(0,1)$ и g_0, β, γ, σ — произвольные постоянные.

4. Обсуждение результатов групповой классификации

Теорема 3.1 показывает, что уравнение (2.1) точно наследует операторы группы симметрий соответствующего невозмущенного уравнения, то есть ε-часть в инфинитезимальных операторах не возникает. Причина этого заключается в том, что возмущенная часть уравнения (2.1) является исключительно дробно-дифференциальной. В определяющем уравнении дифференциальные переменные целого и дробного порядков являются независимыми, что и определяет полученную структуру операторов. Очевидно, что это будет справедливо для любых уравнений с малым параметром, являющихся дифференциальными уравнениями целого порядка в нулевом приближении и содержащими в возмущенной части только дробно-дифференциальные слагаемые.

Наличие дробно-дифференциального возмущения в уравнении (2.1) приводит к уменьшению количества симметрий в нулевом порядке по ε. В целом, это характерно для любых дифференциальных уравнений с малым параметром. В приближенном групповом анализе полное наследование группы невозмущенного уравнения уравнением с малым параметром является скорее исключением, чем правилом. Тем не менее, размерность алгебры Ли приближенных симметрий всегда оказывается больше размерности алгебры Ли симметрий соответствующего невозмущенного уравнения, что дает возможность построения большего числа неподобных приближенно-инвариантных решений.

Уравнение (2.1) во всех случаях допускает преобразования переноса по t и x, определяемые операторами X_1 и X_2, соответственно. Следовательно, это уравнение всегда будет обладать решением типа бегущей волны вида

$$u(t,x)=\varphi(\kappa x-\omega t), \tag{4.1}$$

являющегося инвариантным решением, соответствующим группе преобразований с оператором $X=\kappa X_1+\omega X_2$. Подстановка (4.1) в (2.1) приводит к редуцированному обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению

$$k(\varphi)\varphi''+k'(\varphi)(\varphi')^2+a\varphi'+\varepsilon(-\omega)^\alpha[f(\varphi)D_\xi^\alpha\varphi''+f'(\varphi)\varphi'D_\xi^\alpha\varphi'+ag(\varphi)D_\xi^\alpha\varphi']=0, \tag{4.2}$$

где $\varphi=\varphi(\xi)$, $\xi=\kappa x-\omega t$, $a=\omega\kappa^{-2}$. В простейшем случае, приближенное решение (4.2) можно искать в виде $\varphi(\xi)=\varphi_0(\xi)+\varepsilon\varphi_1(\xi)$, что сводит задачу к поиску общего решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Возможность построения решения этой системы в явном виде определяется исключительно видом функций $k(u)$, $f(u)$ и $g(u)$.

Из теоремы 3.1 следует, что уравнение (2.1) не наследует оператор группы растяжений

$$X=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},$$

который допускается невозмущенным уравнением при любой функции $k(u)$. Данный оператор входит в допускаемую группу возмущенного уравнения только в первом порядке по ε. Это означает, что в общем случае уравнение (2.1) не обладает автомодельным решением.

Тем не менее, уравнение (2.1) будет обладать автомодельным решением при степенной зависимости его коэффициентов от u — пункты 2) и 5) теоремы 3.1. В этих случаях автомодельное решение является инвариантным решением, соответствующим однопараметрической группе преобразований растяжения с оператором X_6. При $\gamma+\alpha\sigma\neq 0$ это решение будет иметь вид

$$u=x^{\frac{2\alpha}{\gamma+\alpha\sigma}}\varphi\left(tx^{-\frac{2\gamma}{\gamma+\alpha\sigma}}\right),$$

где функция $\varphi(\xi)$ является решением редуцированного уравнения

$$\begin{aligned}(\gamma+\alpha\sigma)^2[\varphi'+\varepsilon g_0\varphi^\gamma D_\xi^\alpha\varphi'] &= 2\varphi^\sigma\left[(2\alpha-\alpha\sigma-\gamma)\psi-2\gamma\xi\psi'\right]+4\sigma\varphi^{\sigma-1}\psi^2\pm\\ &\pm 2\varepsilon\varphi^{\gamma+\sigma-1}\left[(\alpha\sigma+2\alpha-\gamma)\varphi D_\xi^\alpha\psi-2\gamma(\gamma+\sigma)\xi\varphi'D_\xi^\alpha\psi-2\gamma\xi\varphi D_\xi D_\xi^\alpha\psi\right].\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь для сокращения введены обозначения $\xi = tx^{-\frac{2\gamma}{\gamma+\alpha\sigma}}$ и $\psi(\xi) = \alpha\varphi(\xi) - \gamma\xi\varphi'(\xi)$.

При $\gamma = -\alpha\sigma$ инвариантное решение упрощается и принимает вид

$$u = t^{-\frac{1}{\sigma}}\varphi(x),$$

а соответствующее редуцированное уравнение становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\Gamma\left(1-\alpha-\frac{1}{\sigma}\right)[\sigma(\varphi^{\sigma}\varphi')' + \varphi] + \varepsilon\Gamma\left(-\frac{1}{\sigma}\right)[g_0\varphi^{1-\alpha\sigma} \mp (\varphi^{(1-\alpha)\sigma}\varphi')'] = 0. \qquad (4.4)$$

Заметим, что в случаях 3) и 4) теоремы также имеются автомодельные решения, соответствующие операторам X_6 в каждом из случаев. Поскольку эти операторы являются частными случаями уже рассмотренного оператора группы преобразований растяжения, то соответствующие анзацы инвариантных решений и редуцированные уравнения также являются частными случаями уже рассмотренных выше. В завершение отметим, что нахождение решений полученных редуцированных уравнений (4.1), (4.3), (4.4) является нетривиальной задачей, решение которой может рассматриваться в качестве одного из возможных направлений дальнейшей работы.

5. Заключение

В работе решена задача групповой классификации нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с малыми дробно-дифференциальными слагаемыми, учитывающими эффекты тепловой релаксации и термического демпфирования в приближении полной степенной памяти среды. Доказано, что рассматриваемое уравнение с малым параметром точно наследует симметрии соответствующего невозмущенного уравнения. Этот факт является общим для тех дробно-дифференциальных уравнений, которые содержат дробные производные только при малом параметре. Показано, что эффект полной памяти среды сохраняет в рассматриваемом уравнении теплопроводности группу преобразований переноса по времени, что дает возможность строить приближенно-инвариантные решения типа бегущей волны. Также в случае степенной зависимости теплофизических параметров от температуры рассматриваемое уравнение будет обладать автомодельными решениями.

Список литературы

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

4. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994. Vol. 1. 448 p.

5. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. Vol. 2. 576 p.

6. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. Vol. 3. 560 p.

7. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics. Dordrecht: Springer, 2010. 318 p.

8. Григорьев Ю. Н., Ковалев В. Ф., Мелешко С. В. Симметрии нелокальных уравнений: Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 2018. 436 с.

9. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // Ed. A. Kochubei, Y. Luchko, Vol 2. Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. P. 65–90. DOI: 10.1515/9783110571660-004

10. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs // Ed. A. Kochubei, Y. Luchko, Vol. 2. Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. P. 353–382. DOI: 10.1515/9783110571660-016

11. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 4. С. 435–450.

12. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. Т. 34. С. 85–147.

13. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии и законы сохранения // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 35–45.

14. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные группы преобразований // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.

15. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Approximations of Fractional Differential Equations and Approximate Symmetries // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 14022–14027. DOI:10.1016/j.ifacol.2017.08.2426

16. Lukashchuk S. Yu., Saburova R. D. Approximate symmetry group classification for a nonlinear fractional filtration equation of diffusion-wave type // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 93, No. 2. Pp. 295–305.

17. Lukashchuk S. Yu. Approximate conservation laws for fractional differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. Vol. 68. Pp. 147–159. DOI:10.1016/j.cnsns.2018.08.011

18. Lie S. Classification und integration von gewohnlichen differential-gleichungen zwischen x, y, die gruppe von transformationen gestatten // Arch. Math. Natur. Christiania. 1883. Vol. 9. P. 371–393.

19. Овсянников Л. В. Групповая классификация уравнений вида $y'' = f(x, y)$ // Прикл. мех. техн. физ. 2004. Т. 45, № 2. С. 5–10.

20. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 3, С. 492–495.

21. Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22, № 6, С. 1393–1400.

22. Lukashchuk S. Yu., Makunin A. V. Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term // Appl. Math. Comput. 2015. Vol. 257, P. 335–343.

23. Лукащук С. Ю. Симметрийная редукция и инвариантные решения нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с источником // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 4, С. 114–126.

24. Лукащук С. Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 4. С. 603–619. DOI : 10.14498/vsgtu1520

25. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

26. Костановский А. В., Костановская М. Е. Критерий применения параболического уравнения теплопроводности // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 12. С. 6–11.

27. Qiu T. Q., Tien C. L. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals // J. Heat Transfer. 1993. Vol. 115, No. 4. P. 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377

28. Wang H. D., Cao B. Y., Guo Z. Y. Non-Fourier Heat Conduction in Carbon Nanotubes // J. Heat Transfer. 2012. Vol. 134, No. 5. 051004.

29. Roetzel W., Putra N., Das S. K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // Int. J. Therm. Sci. 2003. Vol. 42, No. 6. P. 541–552.

30. Жмакин А. И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // ЖТФ. 2021. Т. 91, № 1. С. 5–25. DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20

31. Cattaneo C. A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1958. Vol. 247. P. 431–433.

32. Vernotte P. Paradoxes in the continuous theory of the heat equation // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.

33. Tzou D. Y. A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales // ASME J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117. P. 8–16. DOI: 10.1115/1.2822329

34. Xu H.-Y., Jiang X.-Y. Time fractional dual-phase-lag heat conduction equation // Chin. Phys. B. 2015. Vol. 24, No. 3. Article number 034401. DOI:10.1088/1674-1056/24/3/034401

35. Sobhani H., Azimi A., Noghrehabadi A., Mozafarifard M. Numerical study and parameters estimation of anomalous diffusion process in porous media based on variable-order time fractional dual-phase-lag model // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2023. Vol. 83, No. 7. P. 679–710. DOI: 10.1080/10407782.2022.2157915

36. Zhuang Q., Yu B., Jiang X. An inverse problem of parameter estimation for time-fractional heat conduction in a composite medium using carbon–carbon experimental data // Phys. B: Condens. Matter. 2015. Vol. 456. P. 9–15. DOI:10.1016/j.physb.2014.08.011

37. Fotovvat M. H., Shomali Z. A time-fractional dual-phase-lag framework to investigate transistors with TMTC channels (TiS3, In4Se3) and size-dependent properties // Micro and Nanostructures. 2022. Vol. 168. 207304. DOI:10.48550/arXiv.2203.06523

38. Lukashchuk S. Yu. A semi-explicit algorithm for parameters estimation in a time-fractional dual-phase-lag heat conduction model // Modelling. 2024. Vol. 5, No. 3. P. 776–796. DOI:10.3390/modelling5030041

39. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

40. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

41. Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. до-стиж. 1989. Т. 34. С. 3–83.

Поступила 23.09.2024; доработана после рецензирования 10.12.2024; принята к публикации 26.02.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982, 416 p.

2. N. H. Ibragimov, *Transformation groups applied to mathematical physics*, Reidel, Dordrecht, 1985, 394 p.

3. P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986, 497 p.

4. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol. 1, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 448 p.

5. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol. 2, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, 576 p.

6. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol. 3, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 560 p.

7. Yu. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko, *Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics*, Springer, Dordrecht, 2010, 305 p.

8. Yu. N. Grigoriev, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko, *Symmetries of non-local equations: Theory and Applications*, Nauka, Novosibirsk, 2018 (In Russ.), 436 p.

9. R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk, "Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations", *Volume 2 Fractional Differential Equations*, eds. A. Kochubei, Yu. Luchko, De Gruyter, Boston, 2019, 65–90 DOI: 10.1515/9783110571660-004.

10. R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk, "Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs", *Volume 2 Fractional Differential Equations*, eds. A. Kochubei, Yu. Luchko, De Gruyter, Boston, 2019, 353–382 DOI: 10.1515/9783110571660-016.

11. V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov, "Approximate symmetries", *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 427–441.

12. V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov, "Perturbation methods in group analysis", *J. Soviet Math.*, **55**:1 (1991), 1450–1490.

13. V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov, "Approximate symmetries and preservation laws", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **200** (1993), 35–47.

14. V. A. Baikov, R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov, "Approximate groups of transformations", *Differ. Equ.*, **29**:10 (1993), 1487–1504.

15. R. K. Gazizov, S. Yu. Lukashchuk, "Approximations of Fractional Differential Equations and Approximate Symmetries", *IFAC-PapersOnLine*, **50**:1 (2017), 14022–14027. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2426.

16. S. Yu. Lukashchuk, R. D. Saburova, "Approximate symmetry group classification for a nonlinear fractional filtration equation of diffusion-wave type", *Nonlinear Dyn.*, **93**:2 (2018), 295–305.

17. S. Yu. Lukashchuk, "Approximate conservation laws for fractional differential equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **68** (2019), 147–159. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.011.

18. S. Lie, "Classification und integration von gewohnlichen differential-gleichungen zwischen x, y, die gruppe von transformationen gestatten", *Arch. Math. Natur. Christiania.*, **9** (1883), 371–393.

19. L. V. Ovsyannikov, "Group classification of equations of the form $y'' = f(x, y)$", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **45**:2 (2004), 153–157.

20. L. V. Ovsyannikov, "Group properties of nonlinear heat-conduction equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **125**:3 (1959), 492–495 (In Russ.).

21. V. A. Dorodnitsyn, “On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **22**:6 (1982), 115–122.

22. S. Yu. Lukashchuk, A. V. Makunin, “Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term”, *Appl. Math. Comput.*, **257** (2015), 335–343.

23. S. Yu. Lukashchuk, “Symmetry reduction and invariant solutions for nonlinear fractional diffusion equation with a source term”, *Ufa Math. J.*, **8**:4 (2016), 111–122.

24. S. Yu. Lukashchuk, “An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation”, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.*, **20**:4 (2016), 603–619. DOI: 10.14498/vsgtu1520 (In Russ.).

25. A. V. Luikov, *Analytical Heat Diffusion Theory*, Academic Press, New York, 1968, 685 p.

26. A. V. Kostanovskiy, M. E. Kostanovskaya, “A criterion of applicability of the parabolic heat conduction equation”, *Tech. Phys. Lett.*, **34**:6 (2008), 500–502.

27. T. Q. Qiu, C. L. Tien, “Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals”, *J. Heat Transfer.*, **115**:4 (1993), 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377.

28. H. D. Wang, B. Y. Cao, Z. Y. Guo, “Non-Fourier Heat Conduction in Carbon Nanotubes”, *J. Heat Transfer*, **134**:5 (2012), 051004.

29. W. Roetzel, N. Putra, S. K. Das, “Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure”, *Int. J. Therm. Sci.*, **42**:6 (2003), 541–552.

30. A. I. Zhmakin, “Heat Conduction Beyond the Fourier Law”, *Tech. Phys.*, **66**:1 (2021), 1–22. DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20.

31. C. Cattaneo, “A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **247** (1958), 431–433.

32. P. Vernotte, “Paradoxes in the continuous theory of the heat equation”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, **246** (1958), 3154–3155.

33. D. Y. Tzou, “A unified field approach for heat conduction from macro to micro-scales”, *ASME J. Heat Transfer.*, **117** (1995), 8–16. DOI: 10.1115/1.2822329.

34. H.-Y. Xu, X.-Y. Jiang, “Time fractional dual-phase-lag heat conduction equation”, *Chin. Phys. B.*, **24**:3 (2015), 034401. DOI: 10.1088/1674-1056/24/3/034401.

35. H. Sobhani, A. Azimi, A. Noghrehabadi, M. Mozafarifard, “Numerical study and parameters estimation of anomalous diffusion process in porous media based on variable-order time fractional dual-phase-lag model”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **83**:7 (2023), 679–710. DOI: 10.1080/10407782.2022.2157915.

36. Q. Zhuang, B. Yu, X. Jiang, “An inverse problem of parameter estimation for time-fractional heat conduction in a composite medium using carbon–carbon experimental data”, *Phys. B: Condens. Matter.*, **456** (2015), 9–15. DOI: 10.1016/j.physb.2014.08.011.

37. M. H. Fotovvat, Z. Shomali, "A time-fractional dual-phase-lag framework to investigate transistors with TMTC channels (TiS3, In4Se3) and size-dependent properties", *Micro and Nanostructures*, **168** (2022), 207304. DOI: 10.48550/arXiv.2203.06523.

38. S. Yu. Lukashchuk, "A semi-explicit algorithm for parameters estimation in a time-fractional dual-phase-lag heat conduction model", *Modelling*, **5**:3 (2024), 776–796. DOI: 10.3390/modelling5030041.

39. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 p.

40. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993, 976 p.

41. I. Sh. Akhatov, R. K. Gazizov, N. Kh. Ibragimov, "Nonlocal symmetries. Heuristic approach", *J. Soviet Math.*, **55**:1 (1991), 1401–1450.

Submitted 23.09.2024; Revised 10.12.2024; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.64

О подобии над кольцом целых чисел верхних треугольных нильпотентных матриц 4-го и 5-го порядков обобщённой жордановой клетке

С. В. Сидоров, Г. В. Уткин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе ставится вопрос о том, при каких условиях верхняя треугольная нильпотентная матрица подобна над кольцом целых чисел обобщённой жордановой клетке, т. е. матрице, в которой ненулевыми являются элементы только первой наддиагонали. Получены необходимые и достаточные условия подобия обобщённой жордановой клетке для следующих классов матриц: для матриц четвёртого порядка ранга 3 с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для матриц пятого порядка ранга 4 и некоторыми дополнительными ограничениями на элементы первой наддиагонали. Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей матричных элементов. Доказано, что если в матрице первый и последний элементы первой наддиагонали взаимно просты, а произведение остальных элементов этой наддиагонали равно 1, то эта матрица подобна обобщённой жордановой клетке. Для получения критерия подобия используется следующий факт: если две нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n и ранга $n-1$ подобны над кольцом целых чисел, то среди трансформирующих матриц существует треугольная матрица. Этот факт сводит задачу распознавания подобия к решению в целых числах системы линейных уравнений. Основным инструментом для получения результатов в статье является критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений.

Ключевые слова: подобие матриц, обобщённая жорданова клетка, кольцо целых чисел, нильпотентная матрица, верхняя треугольная матрица

Для цитирования: Сидоров С. В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел верхних треугольных нильпотентных матриц 4-го и 5-го порядков обобщённой жордановой клетке // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 69–80. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80

Об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

Уткин Герман Владимирович, лаборант-исследователь, исследовательский центр в сфере искусственного интеллекта, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

Original article

MSC2020 15A04, 15A18, 15A21, 15B36

On the Similarity of Upper Triangular Nilpotent Matrices of the 4th and the 5th Orders to a Generalized Jordan Block over the Ring of Integers

S. V. Sidorov, G. V. Utkin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper conditions for similarity of an upper triangular nilpotent matrix and a generalized Jordan block (i. e. a matrix where only the elements of the first superdiagonal are non-zero) are considered. The problem is solved over the ring of integers. Necessary and sufficient conditions for similarity to a generalized Jordan block are obtained for the following classes of matrices: the fourth-order matrices of rank 3 with nonzero elements of the first superdiagonal; the fifth-order matrices of rank 4 and some additional restrictions on the elements of the first superdiagonal. These conditions are formulated in simple terms of divisibility and greatest common divisors of matrix elements. It is proved that if the first and last elements of the first superdiagonal are coprime, and the product of the remaining elements of this superdiagonal is equal to 1, then this matrix is similar to a generalized Jordan block. To obtain the similarity criterion, the following statement is used: if two nilpotent upper triangular matrices of order n and rank $n-1$ are similar over the ring of integers, then among the transforming matrices there is a triangular matrix. This statement reduces the problem of recognizing similarity to solving a system of linear equations in integers. The main tool for obtaining the results in the article is the criterion of consistency of a system of linear equations over the ring of integers.

Keywords: similarity of matrices, generalized Jordan block, ring of integers, nilpotent matrix, upper triangular matrix

For citation: *S. V. Sidorov, G. V. Utkin.* On the Similarity of Upper Triangular Nilpotent Matrices of the 4th and the 5th Orders to a Generalized Jordan Block over the Ring of Integers. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 69–80. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.69-80

About the authors:

Sergey V. Sidorov, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2883-6427, sesidorov@yandex.ru

German V. Utkin, Laboratory Researcher, Artificial Intelligence Research Center, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4794-2591, german.utkingu@gmail.com

1. Введение

Из линейной алгебры хорошо известно (см., например, [1]), что любая нильпотентная матрица A порядка n ранга $n-1$ подобна над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ жордановой клетке J_n

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это означает, что $AX = XJ_n$ для некоторой матрицы $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$.

Понятие подобия матриц над $\mathbb{Q}$ естественным образом переносится на кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, как обычно, обозначается множество обратимых над $\mathbb{Z}$ целочисленных матриц порядка n. Другими словами, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ — это множество всех унимодулярных матриц порядка n, т. е. целочисленных матриц, определитель которых равен 1 или -1.

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, если существует такая матрица $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрица X называется трансформирующей матрицей.*

Отметим, что задача классификации целочисленных матриц относительно подобия над $\mathbb{Z}$ находит приложение в топологии (см., например, [2, 3, 4]).

Если матрица A подобна над $\mathbb{Z}$ матрице B, то будем обозначать это через $A \sim B$.

Над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ упомянутый выше факт подобия жордановой клетке J_n перестаёт быть верным уже для $n = 2$ (см., например, [5, 6, 7, 8]). К примеру, любая матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, подобна над $\mathbb{Q}$ матрице J_2. Но над $\mathbb{Z}$ такая матрица A подобна жордановой клетке J_2 тогда и только тогда, когда $a \in \{1, -1\}$.

Обобщённой жордановой клеткой назовём целочисленную матрицу вида

$$\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Это название обусловлено тем, что обычная жорданова клетка $J_n = \mathrm{superdiag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1})$.

Возникает естественный вопрос: любая ли целочисленная нильпотентная матрица порядка n ранга $n-1$ подобна над $\mathbb{Z}$ обобщённой жордановой клетке (1.2)? Ответ на него отрицательный для $n \geq 3$. Действительно, пусть $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) > 1$. Рассмотрим матрицу A, полученную из матрицы вида (1.2) заменой хотя бы одного 0 выше диагонали на 1. Тогда легко видеть, что A не подобна $\mathrm{superdiag}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ над $\mathbb{Z}$.

Известно (см. [7, 9, 10]), что если все собственные числа матрицы $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ лежат в $\mathbb{Z}$, то A подобна над $\mathbb{Z}$ верхней треугольной матрице с собственными числами на диагонали. Поскольку у нильпотентных матриц все собственные числа нулевые, то, без ограничения общности, будем рассматривать верхние треугольные нильпотентные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $a_{i,i+1} \neq 0$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Хотелось бы получить критерий подобия таких матриц обобщённой жордановой клетке.

Такая попытка была сделана в [11] для матриц вида (1.3) с двумя ненулевыми супердиагоналями, т. е. при дополнительных ограничениях $a_{i,j} = 0$, $j \geq i+3$. В [11] был получен ряд необходимых условий подобия над $\mathbb{Z}$ для таких матриц обобщённой жордановой клетке. Эти условия сформулированы в простых терминах делимости и наибольших общих делителей элементов матриц.

Кроме того, при $n = 3$ и $n = 4$ в [11] были получены критерии подобия. В частности, в [11] доказано, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2 \neq 0$, подобны над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $b_1 \,\vdots\, \text{НОД}(a_1, a_2)$.

Заметим, что из доказательств теорем о канонических матрицах классов подобия для $n = 3$ в работах [5, 6] можно вывести тот же результат.

Также в [11] был получен следующий критерий подобия для $n = 4$.

Т е о р е м а 1.1 (см. [11]). *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. *Тогда*

$$A \sim B \iff \begin{array}{l} \text{1. } b_1 \text{ делится на } d,\ b_2 \text{ делится на } d. \\ \text{2. } b_1 b_2 \text{ делится на } (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)). \\ \text{3. } (a_1 b_2 + b_1 a_3) \text{ делится на } d a_2. \end{array}$$

В данной статье мы обобщаем эту теорему на произвольные верхние треугольные нильпотентные матрицы 4-го порядка ранга 3, а также обобщаем результат из [12] в случае $n = 5$ при некоторых дополнительных ограничениях.

Ещё одной из причин, по которой представляет интерес получение критерия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1.3) и (1.2), является следующее обстоятельство. Если $a_{1,2} = a_{2,3} = \dots = a_{n-1,n} = 1$, то матрица вида (1.3) подобна над $\mathbb{Z}$ жордановой клетке J_n при любых

$a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $j \geq i+2$ (см. критерий подобия жордановой клетке в [13]). Оказывается, что есть и другие значения $a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n}$ такие, что матрица вида (1.3) подобна над $\mathbb{Z}$ обобщённой жордановой клетке $\mathrm{superdiag}(a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n})$ при любых $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $j \geq i+2$ (см. Следствие 2.3 и Следствие 3.2 ниже).

Отметим два важных момента. Пусть $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ — две нильпотентные верхние треугольные матрицы порядка n, причём все элементы их первых супердиагоналей отличны от 0 (т. е. $a_{i,i+1} \neq 0, b_{i,i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$). Если $A \sim B$, то

1. $a_{i,i+1} = \pm b_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ (Лемма 2.1 из [11]). Отсюда легко вывести, что если $A \sim \mathrm{superdiag}(\pm a_{1,2}, \pm a_{2,3}, \ldots, \pm a_{n-1,n})$, то $A \sim \mathrm{superdiag}(a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n})$ (Лемма 3.1 из [11]).

2. (см. [11, 14]) если $a_{i,i+1} = b_{i,i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица X (т. е. $AX = XB$ и X — верхняя треугольная матрица с единичной диагональю):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n-2)} & x_1^{(n-1)} \\ 0 & 1 & x_2^{(1)} & \ddots & x_2^{(n-3)} & x_2^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & x_3^{(n-4)} & x_3^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{n-1}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

(здесь $x_i^{(j)}$ — i-й элемент j-й супердиагонали (наддиагонали), т. е. в стандартных обозначениях $x_i^{(j)} = x_{i,i+j}$).

Следовательно, для получения критерия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1.3) и (1.2) мы можем сразу рассматривать матрицы с одинаковыми первыми супердиагоналями:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_2 & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Так как унитреугольная матрица X вида (1.4) автоматически лежит в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, то для матриц A и B вида (1.5) условие $A \sim B$ равносильно совместности в целых числах системы линейных уравнений $AX = XB$. Легко видеть, что если X — унитреугольная матрица, то система $AX = XB$ содержит $(n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ уравнений и $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 = \frac{n(n-1)-2}{2}$ неизвестных ($x_1^{(n-1)}$ входит с нулевым коэффициентом). В частности, для $n = 4$ имеем 3 уравнения и 5 неизвестных, а для $n = 5$ — 6 уравнений и 9 неизвестных.

Основным инструментом для получения результатов настоящей статьи является следующий критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений.

Т е о р е м а 1.2. *(критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений, см.* [15, с. 51]*). Пусть $P \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ — матрица ранга m и $b \in \mathbb{Z}^m$. Тогда система $Px = b$ имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда все миноры порядка m расширенной матрицы (P, b) делятся на наибольший общий делитель $\Delta_m(P)$ всех миноров порядка m матрицы P.*

2. Случай матриц 4-го порядка

В этом разделе мы получим критерий подобия над кольцом целых чисел нильпотентных матриц следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{superdiag}(a_1, a_2, a_3), \qquad (2.1)$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$.

Как уже было отмечено выше, если матрицы A и B вида (2.1) подобны над $\mathbb{Z}$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

В следующей теореме устанавливается критерий подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (2.1) при условии, что НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$.

Т е о р е м а 2.1. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ и НОД$(a_1, a_2, a_3) = 1$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *$(a_1b_2 + a_3b_1)$ делится на a_2.*
2. *$(b_1b_2 - a_2c_1)$ делится на НОД(a_1, a_3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку трансформирующая матрица X имеет вид (2.2), то условие $AX = XB$ равносильно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + a_1x_2 = a_2x_1, \\ b_2 + a_2x_3 = a_3x_2, \\ c_1 + b_1x_3 + a_1y_2 = a_3y_1. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & \\ \hline a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -b_1 & a_3 & -a_1 & c_1 \end{array}\right).$$

Выясним, при каких условиях эта система имеет целочисленное решение. Ранг основной матрицы этой системы равен 3, поскольку один из её миноров 3-го порядка равен $a_1a_2a_3 \neq 0$. Следовательно, согласно Теореме 1.2 данная система совместна над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда все миноры 3-го порядка её расширенной матрицы делятся на Δ_3 — НОД миноров основной матрицы системы. Имеем

$$\Delta_3 = \text{НОД}(-a_2a_3b_1, a_2a_3a_3, -a_1a_2a_3, -a_2a_2a_3, a_1a_2a_2, a_1a_2a_3, -a_1a_1a_2) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3b_1, a_3a_3, a_1a_3, a_2a_3, a_1a_2, a_1a_1) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3 \cdot \text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3), a_1a_2, a_1a_1) =$$

$$= a_2 \cdot \text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3).$$

Действительно, так как по условию теоремы $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$, то, во-первых, $\text{НОД}(b_1, a_1, a_2, a_3) = 1$, а, во-вторых, числа a_3 и $\text{НОД}(a_1, a_2)$ взаимно простые, следовательно, $\text{НОД}(a_3, a_1 \cdot \text{НОД}(a_1, a_2)) = \text{НОД}(a_1, a_3)$.

Выпишем миноры 3-го порядка расширенной матрицы, отличные от миноров основной матрицы:

$$M_1 = a_2a_3c_1,\ M_2 = a_2(b_1b_2 - a_2c_1),\ M_3 = -a_2a_3b_2,\ M_4 = a_1a_2b_2,$$

$$M_5 = -b_1(a_3b_1 + a_1b_2) + a_1a_2c_1,\ M_6 = a_3(a_3b_1 + a_1b_2),$$

$$M_7 = -a_1(a_3b_1 + a_1b_2),\ M_8 = -a_2a_3b_1,\ M_9 = a_1a_2b_1.$$

Заметим, что миноры M_1, M_3, M_4, M_8, M_9 заведомо делятся на $\Delta_3 = a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)$. Минор M_2 делится на Δ_3 тогда и только тогда, когда $(b_1b_2 - a_2c_1) \vdots \text{НОД}(a_1, a_3)$. Обозначив $s = a_3b_1 + a_1b_2$, имеем $M_5 = -b_1s + a_1a_2c_1, M_6 = a_3s, M_7 = -a_1s$. Поскольку $a_1a_2 \vdots \Delta_3$, то M_5, M_6, M_7 кратны Δ_3 тогда и только тогда, когда $b_1s, a_3s, a_1s \vdots \Delta_3$, что в свою очередь равносильно условию:

$$\text{НОД}(a_1s, a_3s, b_1s) = s \cdot \text{НОД}(a_1, a_3, b_1) \vdots (a_2 \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)).$$

Это означает, что

$$s \text{ делится на } a_2 \cdot \frac{\text{НОД}(a_1, a_3)}{\text{НОД}(a_1, a_3, b_1)}. \tag{2.3}$$

Поскольку $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$, то сомножители a_2 и $\frac{\text{НОД}(a_1,a_3)}{\text{НОД}(a_1,a_3,b_1)}$ взаимно простые. Следовательно, свойство (2.3) равносильно тому, что $s = (a_3b_1 + a_1b_2) \vdots a_2$. Доказательство завершено.

Отметим, что доказанная Теорема 2.1 (для произвольного $c_1 \in \mathbb{Z}$) является обобщением Теоремы 4.2 из [11] (в ней $c_1 = 0$).

Следствие 2.1. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ и $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда*

1. *b_1, b_2, c_1 делятся на d.*
2. *$(b_1b_2 - a_2c_1)$ делится на $d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3)$.*

3. $(a_1b_2 + a_3b_1)$ *делится на* da_2.

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2, a_3)$. Условие $A \sim B$ равносильно тому, что $c_1, b_1, b_2 \,\vdots\, d$ и $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$. Поскольку матрицы $\frac{1}{d}A$ и $\frac{1}{d}B$ удовлетворяют условиям Теоремы 2.1, то $\frac{1}{d}A \sim \frac{1}{d}B$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{a_1}{d}\frac{b_2}{d} + \frac{a_3}{d}\frac{b_1}{d}\right) \vdots \frac{a_2}{d} \text{ и } \left(\frac{b_1}{d}\frac{b_2}{d} - \frac{a_2}{d}\frac{c_1}{d}\right) \vdots \,\text{НОД}\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_3}{d}\right).$$

Это равносильно тому, что $(a_1b_2 + a_3b_1) \,\vdots\, da_2$ и $(b_1b_2 - a_2c_1) \,\vdots\, (d \cdot \text{НОД}(a_1, a_3))$. С учётом условий $c_1, b_1, b_2 \,\vdots\, d$ получаем требуемое.
Доказательство завершено.

Следствие 2.2. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Пусть* $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ *и НОД*$(a_1, a_3) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда* $(a_1b_2 + a_3b_1) \,\vdots\, a_2$.

Следствие 2.3. *Рассмотрим матрицы вида (2.1). Если НОД*$(a_1, a_3) = 1$ *и* $a_2 \in \{1, -1\}$, *то* $A \sim B$ *для любых* $b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{Z}$.

3. Случай матриц 5-го порядка

Здесь рассматриваем матрицы следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Как уже было отмечено выше, если матрицы A и B вида (3.1) подобны над $\mathbb{Z}$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В следующей теореме устанавливается критерий подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (3.1) при некоторых дополнительных ограничениях.

Теорема 3.1. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Пусть НОД*$(a_1, a_4) = 1$ *и НОД*$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. $(a_1b_2 + a_3b_1)$ *делится на* a_2.

2. $(a_2b_3 + a_4b_2)$ *делится на* a_3.

3. $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1)$ *делится на* a_2a_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку трансформирующая матрица имеет вид (3.2), то условие $AX = XB$ равносильно системе линейных уравнений. Выпишем матрицу системы $AX = XB$:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & z_1 & z_2 & \\
\hline
a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & a_4 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\
\hline
0 & 0 & -b_1 & 0 & a_3 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a_4 & -a_2 & 0 & 0 & c_2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & -b_1 & a_4 & -a_1 & d_1
\end{array}\right)$$

и выясним, при каких условиях эта система имеет целочисленное решение. Система $AX = XB$ состоит из трех подсистем.

Третья подсистема, состоящая из одного уравнения $a_4z_1 - a_1z_2 = b_1y_3 + c_1x_4 + d_1$, имеет целочисленные решения z_1, z_2 при любой правой части, так как НОД$(a_1, a_4) = 1$.

Вторая подсистема

$$\begin{cases} a_3y_1 - a_1y_2 = b_1x_3 + c_1 \\ a_4y_2 - a_2y_3 = b_2x_4 + c_2 \end{cases}$$

совместна в целых числах относительно y_1, y_2, y_3 при любых правых частях по Теореме 1.2, так как наибольший общий делитель миноров второго порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -a_2 \end{pmatrix}$$

равен НОД$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$.

Осталось выяснить, когда первая подсистема

$$\begin{cases} a_2x_1 - a_1x_2 = b_1 \\ a_3x_2 - a_2x_3 = b_2 \\ a_4x_3 - a_3x_4 = b_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

имеет целочисленные решения. Наибольший общий делитель миноров третьего порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -a_3 \end{pmatrix}$$

равен

$$\Delta_3 = \text{НОД}(a_1a_2a_3, a_2a_2a_3, a_2a_3a_3, a_2a_3a_4) = a_2a_3\text{НОД}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Поскольку по условию теоремы НОД$(a_1, a_4) = 1$, то НОД$(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$, поэтому $\Delta_3 = a_2a_3$.

Согласно Теореме 1.2 подсистема (3.3) совместна над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда все миноры 3-го порядка её расширенной матрицы делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Выпишем те из них, которые отличны от миноров основной матрицы (миноры 3-го порядка основной матрицы автоматически делятся на Δ_3):

$$M_1 = a_2a_3b_3,\ M_2 = -a_2(a_2b_3 + a_4b_2),\ M_3 = a_2a_3b_2,$$

$$M_4 = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1,\ M_5 = -a_3(a_1b_2 + a_3b_1),\ M_6 = a_2a_3b_1.$$

Миноры M_1, M_3, M_6 заведомо делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Минор M_2 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_2b_3+a_4b_2) \vdots a_3$. Минор M_5 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1b_2 + a_3b_1) \vdots a_2$. Наконец, минор M_4 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1) \vdots a_2a_3$.
Доказательство завершено.

Оказывается, что если НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$, то третье условие в предыдущей теореме вытекает из первых двух.

Следствие 3.1. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Пусть НОД$(a_1, a_4) = 1$, НОД$(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$, НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$. Тогда $A \sim B$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *$(a_1b_2 + a_3b_1)$ делится на a_2.*
2. *$(a_2b_3 + a_4b_2)$ делится на a_3.*

Доказательство. Пусть

$$f = a_1b_2 + a_3b_1,\ g = a_2b_3 + a_4b_2,\ h = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1.$$

Теорема 3.1 говорит о том, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $f \vdots a_2, g \vdots a_3$, то $h \vdots a_2a_3$. Заметим, что $fg = (a_1b_2 + a_3b_1)(a_2b_3 + a_4b_2) = b_2h + a_2a_3b_1b_3$, поэтому если $f \vdots a_2, g \vdots a_3$, то $b_2h \vdots a_2a_3$. Стало быть, если НОД$(b_2, a_2a_3) = 1$, то $h \vdots a_2a_3$.
Доказательство завершено.

Следствие 3.2. *Рассмотрим матрицы вида (3.1). Если НОД$(a_1, a_4) = 1$ и $a_2a_3 = 1$, то $A \sim B$ для любых $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, d_1 \in \mathbb{Z}$.*

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. Наука, 1988. С. 552.
2. Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: 10.15507/2079.6900.23.202103.295-307
3. Gorbatsevich V. V. Compact solvmanifolds of dimension at most 4 // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 50, no. 2. pp. 239–252.
4. Lerman L. M., Trifonov K. N. Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus // Journal of Geometry and Physics, 2024. Vol. 195, 105038. DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.105038

5. Appelgate H., Onishi H. The Similarity Problem for 3×3 Integer Matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol. 42, no. 2. pp. 159–174. DOI: 10.2307/2043695

6. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 119–127.

7. Сидоров С. В. Выделение эффективно разрешимых классов в задаче подобия матриц над кольцом целых чисел : дис. … канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2015. 121 с.

8. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. Т. 50, № 4. С. 56–63.

9. Newman M. Integral matrices. NY-London: Academic Press, 1972. 223 p.

10. Сидоров С. В. О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 86–94.

11. Сидоров С В., Уткин Г. В. О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, №4. С. 284–298. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298

12. Уткин Г. В. Критерий подобия над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц пятого порядка // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13–16 ноября 2023 года. Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. 2023. С. 154-157.

13. Сидоров С. В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 763–770. DOI: 10.4213/mzm11859

14. Husert D. Similarity of integer matrices: PhD Thesis. Paderborn, 2017. 147 p.

15. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. Wiley, 1998. 464 p.

Поступила 02.10.2024; доработана после рецензирования 03.12.2024; принята к публикации 26.01.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, M. Nauka, 1988 (In Russ.), 552 p.

2. S. V. Sidorov, E. E. Chilina, “On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus”, *Zhurnal SVMO*, **23**:3 (2021), 295–307. DOI: 10.15507/2079.6900.23.202103.295-307 (In Russ.).

3. V. V. Gorbatsevich, “Compact solvmanifolds of dimension at most ≤ 4”, *Sib. Math. J*, **50**:2 (2009), 239–252.

4. L. M. Lerman, K. N. Trifonov, “Symplectic partially hyperbolic automorphisms of 6-torus”, *Journal of Geometry and Physics*, **195** (2024), 105038. DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.105038.

5. H. Appelgate, H. Onishi, “The Similarity Problem for 3×3 Integer Matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **42**:2 (1982), 159–174. DOI: 10.2307/2043695.

6. S. V. Sidorov, “On similarity of matrices of third order over the ring of integers with reducible characteristic polynomial”, *Vestnik Nizhegorodsk. Univ.*, 2009, no. 1, 119–127 (In Russ.).

7. S. V. Sidorov, *Selection of effectively solvable classes in the problem of similarity of matrices over the ring of integers*, PhD Dissertation, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.).

8. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, “On the similarity of second-order matrices over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50**:4 (2006), 56–63 (In Russ.).

9. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.

10. S. V. Sidorov, “Similarity of matrices with integer spectra over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55**:3 (2011), 77–84 (In Russ.).

11. S. V. Sidorov, G. V. Utkin, “On the Similarity over the Ring of Integers of Certain Nilpotent Matrices of Maximal Rank”, *Zhurnal SVMO*, **25**:4 (2023), 284–298. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.284-298 (In Russ.).

12. G. V. Utkin, “Similarity criterion over the ring of integers for some nilpotent matrices of the fifth order”, *Mathematical modeling and supercomputer technologies: Proceedings of the XXIII International Conference, Nizhny Novgorod, November 13–16*, 2023, 154–157 (In Russ.).

13. S. V. Sidorov, “On the similarity of certain integer matrices with single eigenvalue over the ring of integers”, *Math Notes*, **105** (2019), 756–762. DOI: 10.1134/S0001434619050122 (In Russ.).

14. D. Husert, *Similarity of integer matrices*, PhD Thesis, University of Paderborn, 2017, 147 p.

15. A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley, 1998, 464 p.

Submitted 02.10.2024; Revised 03.12.2024; Accepted 26.01.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.54

Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции

Д. Л. Ступин

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (г. Тверь, Россия)

Аннотация. Найдены точные оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B ограниченных не обращающихся в ноль в единичном круге функций f. Получено два типа оценок: при «больших» значениях $|f(0)|$ и при «малых» значениях $|f(0)|$. Первый тип оценок является асимптотическим в том смысле, что чем больше $|f(0)|$, тем для большего количества начальных коэффициентов он применим. Второй тип оценок является асимптотическим в том смысле, что чем меньше $|f(0)|$, тем для большего количества начальных коэффициентов он применим. Оба типа оценок получены при помощи методов теории подчинённых функций и теоремы Каратеодори-Тёплица для класса Каратеодори. Это стало возможным благодаря найденной связи между коэффициентами выпуклых однолистных функций (класс S^0) и коэффициентами мажорирующих функций изучаемых подклассов класса B. Указаны границы применимости метода в зависимости от $|f(0)|$ и от номера коэффициента. Дано приложение полученных результатов к теории многочленов Лаггера. Полученные результаты сравниваются с известными ранее. Методы, изложенные здесь могут быть применены на произвольных классах подчинённых функций.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, ограниченные функции, выпуклые функции, подчинённые функции, класс Каратердори, оценки тейлоровских коэффициентов, многочлены Лагерра

Для цитирования: Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 81–96. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96

Об авторе:
Ступин Денис Леонидович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (170100, Россия, г. Тверь, ул. Желябова, 33), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, dstupin@mail.ru

Original article

MSC2020 30C50

The Krzyz conjecture and convex univalent functions

D. L. Stupin

Tver State University (Tver, Russia)

Abstract. We obtained the sharp estimates of the moduli of the initial Taylor coefficients for functions f of the class B of bounded nonvanishing functions in the unit circle. Two types of estimates are obtained: one for "large" values of $|f(0)|$ and another one for "small" values of $|f(0)|$. The first type of estimates is asymptotic in the sense that it applies to an increasing number of initial coefficients as $|f(0)|$ increases. Similarly, the second type of estimates is asymptotic in the sense that it applies to an increasing number of initial coefficients as $|f(0)|$ decreases. Both types of estimates are deduced using methods of subordinate function theory and the Caratheodory-Toeplitz theorem for the Caratheodory class. This became possible due to the relation we found between the coefficients of convex univalent functions (class S^0) and the coefficients of the majorizing functions in the studied subclasses of the class B. The bounds for the applicability of the method are provided depending on $|f(0)|$ and on the coefficient number. The obtained results are applied to the theory of Laguerre polynomials. These results are compared with the previously known ones. The methods outlined here can be applied to arbitrary classes of subordinate functions.

Keywords: the Krzyz conjecture, bounded nonvanishing functions, convex functions, subordinate functions, Caratheodory class, Taylor coefficient estimates, Laguerre polynomials

For citation: *D. L. Stupin.* The Krzyz conjecture and convex univalent functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 81–96. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96

About the authors:

Denis L. Stupin, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, Tver State University (33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, dstupin@mail.ru

1. Введение

1.1. Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Классом B будем называть множество голоморфных в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж, располагая точными оценками первых двух коэффициентов на классе B, высказал гипотезу [1] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant \frac{2}{e}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F^*(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F^*(z,t) = e^{-t\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1.1}$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана только для первых пяти тейлоровских коэффициентов включительно. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [2]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [3]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [4]. Автор данной статьи в работе [5] стр. 81 при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.00116077$, а в работе [6] стр. 114 оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e$ численным методом.

Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после добавления к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций.

1.2. Цель работы и актуальность

Цель данной статьи состоит в том, чтобы установить связь между начальными тейлоровскими коэффициентами функций $F^*(z,t)$ и начальными тейлоровскими коэффициентами выпуклых однолистных функций. Как показано далее, эта связь может быть установлена нетривиальным образом при достаточно больших и достаточно малых значениях параметра t.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая, в свою очередь, тесно связана с теорией подчинённых функций [7] и теорией пространств Харди [2]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n представляет собой задачу на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n - 3$ действительных переменных [8]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Класс B посредством известного класса Каратеодори связан с классами однолистных функций, в частности, с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно, проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также существуют параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

Упомянем, что лемма 2.2, теорема 2.1 и теорема 2.2 были опубликованы ранее в виде препринта на русском языке [9], в виде препринта на английском языке [10], а также теоремы 2.1 и 2.2 были упомянуты в трудах конференции [11]. В настоящее время через интернет доступен только препринт на английском, поэтому упомянутые результаты приводятся здесь как для полноты изложения, так и в целях обеспечения их доступности в рецензируемом издании.

1.3. Вспомогательные соображения

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). Следовательно, можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [7], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{1.2}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad z \in \Delta, \qquad \omega(0) = 0.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ формула (1.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Из геометрических соображений ясно [7], что каждую функцию из класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C, \tag{1.3}$$

где класс C состоит из голоморфных в круге Δ функций h с нормировкой $h(0) = 1$ и $\operatorname{Re} h(z) > 0$, при $z \in \Delta$.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы возможно будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t.

Класс функций c, регулярных и однолистных в круге Δ, с нормировкой $c(0) = 0$, $c'(0) = 1$, отображающих Δ на выпуклую область, обозначается S^0.

Отметим, что при $t > 0$ формула (1.3) задаёт биекцию B_t и C, а биекцию S^0 и C задаёт формула

$$h(z) = 1 + \frac{zc''(z)}{c'(z)}, \qquad c \in S^0, \quad h \in C. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что

$$\{c\}_0 = 0, \qquad \{c\}_1 = 1, \qquad \{c\}_n = \frac{1}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n-1} k\{c\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{1.5}$$

Добавим, что формулы (1.4) и (1.5) хорошо известны [12] стр. 89.

Продифференцировав (1.3) выведем, что

$$\{f\}_0 = e^{-t}, \qquad \{f\}_n = -\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

По всей видимости, впервые формула (1.6) появилась в статье [13]. Интересно, что если взять $t = 1/(n-1)$, то (1.6) можно записать следующим образом:

$$\{f\}_n = \frac{1}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k} - \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства в точности повторяет выражение (1.5) для $\{c\}_n$ при $n > 1$. Второе слагаемое имеет вид очень близкий к формуле, аналогичной (1.5), но для класса звёздных функций [12] стр. 88.:

$$\{s\}_0 = 0, \qquad \{s\}_1 = 1, \qquad \{s\}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\{s\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Класс функций s, регулярных и однолистных в круге Δ, с нормировкой $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$, отображающих Δ на звёздную относительно 0 область, обозначается S^*. В целях полноты изложения отметим, что биекцию S^* и C задаёт формула

$$h(z) = \frac{zs'(z)}{s(z)}, \qquad s \in S^*, \quad h \in C.$$

1.4. Подчинённые функции

Остановимся на представлениях вида (1.2). Пусть функции F и f голоморфны в Δ. Функция f называется подчинённой в Δ для функции F, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Факт подчинения обозначается символом «$\prec$», который используется следующим образом: $f(z) \prec F(z)$, $z \in \Delta$. Функцию F будем называть мажорантой для f в Δ.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [14], однако термин был введён Д. И. Литлвудом [15] и В. Рогозинским [7], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [2], [16]).

В случае проблемы Кшижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F^*\}_k(t)$ функции $F^*(z,t)$.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций f, подчинённых функции F. Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [7] и равенство достигается только на вращениях функций $F(z)$ и $F(z^2)$ в плоскости переменной z.

Следующее утверждение [7] выражает одну из основных идей принципа подчинения:

Утверждение 1.1. *Если функции f и F голоморфны в Δ и найдётся $\omega \in \Omega_0$ такая, что $f(z) = F(\omega(z))$ в Δ, то есть $f(z) \prec F(z)$ в Δ, то $\{f\}_0 = \{F\}_0$ и*

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n}\{F\}_j\{\omega^j\}_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Имеет место следующее простое, но важное для дальнейшего утверждение [7]:

Лемма 1.1. *Если функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{f\}_n z^n$, регулярная в Δ, подчинена функции $F \in S^0$, то справедливы точные оценки $|\{f\}_n| \leqslant |\{F\}_1| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Равенство достигается только на функциях $F(e^{i\varphi}z^n)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

1.5. Критерий Каратеодори–Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [17], [18]:

Т е о р е м а 1.1 (Каратеодори, Тёплиц). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. *Многочлен*

$$p_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k$$

можно продолжить до функции $h(z) = p_n(z) + o(z^n) \in C$ *тогда и только тогда, когда определители*

$$M_k = \begin{vmatrix} 2 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}}_1 & 2 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}}_{k-1} & \overline{\{h\}}_{k-2} & \cdots & 2 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}}_k & \overline{\{h\}}_{k-1} & \cdots & \overline{\{h\}}_1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера m, *начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и*

$$h(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \qquad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0, \quad 0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi.$$

2. Случай малых t

2.1. Связь с выпуклыми однолистными функциями

Введём обозначение

$$F(z,t) = \frac{F^*(z,t) - \{F^*\}_0(t)}{\{F^*\}_1(t)} = z + \{F\}_2(t) z^2 + \ldots \tag{2.1}$$

Теперь естественно напрашивается вопрос: существуют ли выпуклые однолистные функции $f \in S^0$, имеющие несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих с начальными коэффициентами функции $F(z,t)$?

Л е м м а 2.1. *Имеет место следующее соотношение*

$$h(z,t) = 1 + \frac{zF''(z,t)}{F'(z,t)} = 1 + 2\frac{z}{1-z} - 2t\frac{z}{(1-z)^2} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2(1 - jt) z^j. \tag{2.2}$$

Между функциями $F(z,t)$ и выпуклыми однолистными функциями есть связь. Функция $F(z,t)$ существенно нелинейная и имеет достаточно сложно устроенные коэффициенты. Тем не менее, при подстановке её в формулу (1.4) нелинейность «раскручивается» и мы получаем формулу (2.2), из которой видно, что $\{h\}_j = 2(1 - jt)$ является линейным по t. Заметим, что при логарифмировании $F(z,t)$ (см. (1.3)) нелинейность также «раскручивается», но другим способом. Например, если $g(z,t) = \ln F(z,t)$, то $\{h\}_j = -2t$.

По поводу формулы (2.2) заметим ещё, что мёбиусово преобразование $z/(1-z)$ является экстремальным во многих задачах для класса S^0, а функция Кёбе $z/(1-z)^2$, является экстремальной во многих задачах для класса всех однолистных отображений S, для его подкласса звёздных отображений S^* и для других подклассов однолистных функций.

Л е м м а 2.2 ([10]). *Если* $\{h\}_j = 2(1-jt)$, $j \in \mathbb{N}$, *то* $M_n = 2^{2n}t^n(2-nt)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Минор $M_n/2^{n+1}$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ 1-t & 1 & 1-t & \dots & 1-(n-2)t & 1-(n-1)t \\ 1-2t & 1-t & 1 & \dots & 1-(n-3)t & 1-(n-2)t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & 1-(n-3)t & \dots & 1 & 1-t \\ 1-nt & 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & \dots & 1-t & 1 \end{vmatrix}.$$

Отняв от каждой строки, за исключением первой, предыдущую получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ -t & t & t & \dots & t & t \\ -t & -t & t & \dots & t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t & -t & -t & \dots & t & t \\ -t & -t & -t & \dots & -t & t \end{vmatrix}.$$

К каждому столбцу, кроме последнего, прибавим последний столбец

$$\begin{vmatrix} 2-nt & 1-(n+1)t & 1-(n+2)t & \dots & 1-(2n-1)t & 1-nt \\ 0 & 2t & 2t & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 2t & \dots & 2t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} = 2^{n-1}t^n(2-nt).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Т е о р е м а 2.1 ([10]). *Для любого* $t > 0$ *и* $n \leqslant 2/t + 1$, $n \in \mathbb{N}$, *полином*

$$p_n(z,t) = z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$. *При* $t = 2/(n-1)$, $n > 1$, *продолжение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы обращаться с функцией F как с выпуклой функцией и, подставив ее в формулу (1.4), получить функцию h с тем, чтобы изучить возможность продолжения отрезков ряда Тейлора функции h до функций класса C. Для этого воспользуемся критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) продолжаемости полинома до функции класса C.

Отрезку ряда Тейлора функции F длины n, то есть многочлену p_n по формуле (1.4) соответствует отрезок ряда Тейлора функции h длины $n-1$. Согласно лемме 2.1 имеем $\{h\}_j = 2(1-jt)$, а по лемме 2.2 имеем $M_{j-1} = 2^{2(j-1)}t^{j-1}(2-(j-1)t)$, $j = 1, \dots, n-1$. Очевидно, что $M_1, \dots, M_{n-1}$ неотрицательны тогда и только тогда, когда $t \leqslant 2/(n-1)$, при $n > 1$, и $t > 2$, при $n = 1$, или $n \leqslant 2/t + 1$.

Из теоремы 1.1 следует, что продолжение единственно когда $t = 2/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

2.2. Основной результат для малых t

Пользуясь теоремой 2.1, формулой (1.7) и связанным с ней методом, леммой 1.1, с учётом нормировки (2.1), получаем следующий явный результат:

Т е о р е м а 2.2 ([10]). *Для любого $t > 0$, произвольного номера $N \leqslant 2/t + 1$ и каждой $f^* \in B_t$, справедливы точные оценки*

$$|\{f^*\}_n| \leqslant |\{F^*\}_1(t)| = \frac{2t}{e^t}, \qquad n = 1, \dots, N. \tag{2.3}$$

Равенства в этих оценках достигаются только на функциях $F^*(e^{i\varphi}z^n, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, где функция F^* определена формулой (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\omega \in \Omega_0$, $t > 0$ и $N \leqslant 2/t + 1$, $N \in \mathbb{N}$. Возьмём натуральный номер n, не превосходящий числа N. Используя формулу (1.7), запишем n-й коэффициент функции

$$f(z) = F(\omega(z), t),$$

где F определена в формулой (2.1), в виде

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{F\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Теперь применим теорему 2.1 к n-му отрезку тейлоровского разложения функции $F(z, t)$, который мы обозначили через $p_n(z, t)$. Пусть $S(z)$ — продолжение полинома $p_n(z, t)$ до функции класса S^0. Тогда, используя формулу (1.7), n-й коэффициент функции

$$s(z) = S(\omega(z), t)$$

можно записать в виде

$$\{s\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{S\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Откуда, согласно лемме 1.1 получаем, что

$$|\{s\}_n| \leqslant 1.$$

Но $\{S\}_j = \{F\}_j$, где $j = 1, \dots, n$, следовательно $\{f\}_n = \{s\}_n$, откуда

$$|\{f\}_n| \leqslant 1.$$

Используя нормировку (2.1), мы получаем оценки (2.3). Точность оценок (2.3) и вид экстремальных функций вытекает из леммы 1.1.
Доказательство завершено.

Из теоремы 2.2 следует, что чем меньшее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство в неравенстве (2.3), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi}z^n, t)$.

Этот результат интересен при $t \leqslant 2$. Так, например, при $t > 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \leqslant 2$ — два коэффициента, при $t \leqslant 1$ — три коэффициента, а при $t \leqslant 1/2$ — пять, и так далее.

Теорему 2.2 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кшижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например, можно утверждать, что гипотеза Кшижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t\in[0,\,1/2]} B_t$.

2.3. Приложение к теории многочленов Лагерра

Как уже упоминалось во введении, функции $F^*(z,t)$ тесно связаны с многочленами Лагерра [19]. Из соотношений для $F^*(z,t)$ можно выводить свойства этих многочленов.

Обобщённые многочлены Лагерра $L_n^\alpha(t)$, где $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, определим, следуя [19], как последовательность тейлоровских коэффициентов производящей функции $(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-t\frac{z}{1-z}}$, то есть формулой

$$e^{-t\frac{z}{1-z}} = (1-z)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(t)z^n.$$

Ясно, что

$$e^t\{F^*\}_n(t) = L_n^{-1}(2t), \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{2.4}$$

Согласно формуле (2.2) — $\{h\}_j = 2(1-jt)$, $j \in \mathbb{N}$, а согласно формуле (1.5) —

$$\{h\}_{n-1} = (n-1)n\{f\}_n - \sum_{k=2}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \geqslant 3.$$

Имея ввиду формулы (2.4), (2.1) и подставив сюда

$$\{f\}_j = \{F\}_j(t) = L_j^{-1}(2t), \qquad j \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

получаем

$$(n-1)nL_n^{-1}(2t) - \sum_{k=2}^{n-1} k(1-(n-k)t)L_k^{-1}(2t) = 2(1-(n-1)t), \qquad n \geqslant 3.$$

3. Случай больших t

При достаточно больших значениях параметра t начальные коэффициенты функции $F^*(-z,t)$ положительны и имеют тенденцию к возрастанию. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.

Нормируем функцию $F^*(-z,t)$ так, чтобы n-ый коэффициент в её тейлоровском разложении стал равен 1. Введём обозначение

$$F(z,t) = \frac{F^*(-z,t)}{|\{F^*\}_n(t)|}.$$

Существуют выпуклые однолистные функции $f \in S^0$, имеющие несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих со всеми первыми n коэффициентами функции $F(z,t)$, взятыми в обратном порядке. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Многочлен*

$$p_n(z,t) = z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_{n-k+1}(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$ для любого $t \geqslant t_2(n)$, где $t_2(n)$ есть наибольший положительный корень уравнения $M_{n-1}(t) = 0$, а M_{n-1} это минор из теоремы 1.1, составленный из коэффициентов функции h, полученной по формуле (1.4) из функции f. При $t = t_2(n)$ продолжение единственно.

Доказательство. При $n = 1$ имеем $p_1(z,t) = z$. Очевидно, что $p_1 \in S^0$. Более того, очевидно, что существует бесконечное множество продолжений многочлена p_1 до функций класса S^0 так как все функции класса S^0 имеют вид $f(z) = z + \ldots$

Пусть номер $n > 1$. Согласно [16], тейлоровские коэффициенты a_k функции $F^*(-z,t)$ заданы формулой

$$a_k = (-1)^k e^{-t} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-2)^j C_{k-1}^{j-1}}{j!} t^j, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

стало быть,

$$a_k \sim \frac{2^k}{k!} t^k e^{-t}, \qquad t \to \infty, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и

$$p_n(z,t) \sim z + \frac{\alpha_2}{t} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-1}} z^n, \qquad t \to \infty,$$

где α_j, $j = 2, \ldots, n-1$, — некоторые константы, не зависящие от t. Поскольку

$$z + \frac{\alpha_2}{t} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-1}} z^n \sim z, \qquad t \to \infty,$$

то

$$p_n(z,t) \sim z, \qquad t \to \infty,$$

и, следовательно, $p_n(z,t)$ может быть продолжен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n)$ класса S^0.

Доказательство завершено.

Имеет место [20] стр. 11

Теорема 3.2 (Маркс, Штрохеккер)**.** *Если $h(z) = 2g(z)/z - 1$ и $g \in S^0$, то $h \in C$.*

Имеет место [7]

Т е о р е м а 3.3 (Рогозинский)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f, F *голоморфны в* Δ *и* $f(z) \prec F(z)$ *в* Δ. *Если* $\{F\}_n > 0$ *и найдётся функция* h *такая, что* $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$, *где*

$$h(z) = \frac{1}{2}\{F\}_n + \{F\}_{n-1}z + \ldots + \{F\}_1 z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty}\{h\}_k z^k,$$

то

$$|\{f\}_n| \leqslant \{F\}_n.$$

Равенство достигается только если $f(z) = F(\eta z)$, $|\eta| = 1$, *или если*

$$\{F\}_k = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e^{i(n-k)\theta_j}, \qquad k = 2, \ldots, n, \quad 2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = \{F\}_n, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

Сформулируем основной результат для случая больших t:

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Для любого* $t \geqslant t_2(n)$ *и каждой* $f \in B_t$, *справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_k| \leqslant |\{F^*\}_k(t)|, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Экстремалями в этих оценках являются только функции $F^*(e^{i\varphi}z, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, *где функция* F^* *определена формулой* (1.1)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный номер n. Так как $f \in B_t$, то $f(z) \prec F^*(-z, t)$, $z \in \Delta$, следовательно $f(z)/|\{F^*\}_n(t)| \prec F(z, t)$, $z \in \Delta$. Согласно теореме 3.1, многочлен $p_n(z, t)$ (из теоремы 3.1) может быть дополнен до функции $g \in S^0$, где $g(z) = p_n(z, t) + o(z^n)$. Пусть $h(z) = 2g(z)/z - 1$. Так как $h \in C$ по теореме 3.2, то мы можем применить теорему 3.3 к функции $|\{F^*\}_n(t)|/2 \cdot h$, откуда сразу получим, что $|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_n(t)|$. Проведя эти рассуждения для всех номеров k не превосходящих n мы получим все неравенства (3.5).

Случаи достижения равенств в неравенствах (3.5) получаются из теоремы 3.3 с учётом того факта, что на B_t нет выпуклой структуры.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В отличии от случая малых значений параметра t, выражение для $t_2(n)$ достаточно сложное. Приведём несколько первых значений $t_1(n)$ и $t_2(n)$:

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 1, && t_2(3) = 4.575885\ldots,\\
&t_1(4) = 2/3, && t_2(4) = 6.880020\ldots,\\
&t_1(5) = 1/2, && t_2(5) = 9.005605\ldots,\\
&t_1(6) = 2/5, && t_2(6) = 11.03609\ldots.
\end{aligned}$$

Из теоремы 3.4 следует, что чем большее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство в неравенстве (3.5), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi}z, t)$.

Этот результат интересен при $t \geqslant 2$. Так, например, при $t < 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \geqslant 2$ — два коэффициента, при $t \geqslant t_2(3)$ — три коэффициента, а при $t \geqslant t_2(4)$ — четыре, и так далее.

Теорему 3.4 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кшижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например, можно утверждать, что гипотеза Кшижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t \geqslant t_2(5)} B_t$.

4. Асимптотические оценки коэффициентов

Пользуясь теорией подчинения [7] и критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) Р. Перец сформулировал [16] две теоремы, содержащие асимптотические оценки $|\{f\}_n|$ для достаточно больших и для достаточно малых неотрицательных значений t.

Теорема 4.1 (Перец)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_1(n) > 0$ такое, что для любой $f \in B_t$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_1(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F^*(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 4.2 (Перец)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_2(n) \geqslant 0$ такое, что для $f \in B_t$ при $t \geqslant t_2(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_n(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F^*(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 2.2 даёт явные границы $0 \leqslant t \leqslant 2/(n-1)$. В доказательстве теоремы 4.1 содержатся асимптотические границы $0 \leqslant t \leqslant 2/n$. Таким образом, границы из теоремы 2.2 асимптотически лучше границ из теоремы 4.1 Необходимо отметить, что указанные в теореме 2.2 границы для t не наилучшие. Мы воспользовались тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z,t)$ можно продолжить до выпуклой однолистной функции, что дало простую закономерность, связывающую n и t.

Заметим, что из теоремы 2.2 сразу следует теорема 4.1. Однако, Перец доказал свою теорему намного раньше. Он пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F^*(z,t)$ можно продолжить до функции класса Каратеодори. Используя этот подход при $t = 2$ мы по-прежнему сможем оценить только два коэффициента на классе B_t, зато при $t = 1$ этот метод позволяет оценить уже шесть коэффициентов.

Д. В. Прохоров и С. В. Романова методами оптимального управления получили аналогичные, но менее явные результаты [21], [22]. В частности, в статье [22] получены точные оценки для малых t, гарантирующие локальный максимум модуля n-го коэффициента.

В формулировках Переца не упоминаются границы для n и t, однако для фиксированного n эти границы можно получить используя критерий Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) в виде наименьшего положительного корня некоторого многочлена от t

для случая малых t и в виде наибольшего положительного корня некоторого многочлена от t для случая больших t.

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 3/2, && t_2(3) = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2},\\
&t_1(4) = 3 - \sqrt{3}, && t_2(4) = 6,\\
&t_1(5) = 1.129457\ldots, && t_2(5) = 7.899361\ldots,\\
&t_1(6) = 1.037289\ldots, && t_2(6) = 9.785796\ldots.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что для $n = 1$ и $n = 2$ проблема Кшижа, при помощи изучаемого в этой статье подхода, решена нами полностью. Однако, проблема Кшижа, уже при $n \geqslant 3$, в рамках предложенного здесь подхода, решена нами только частично. С другой стороны, интервалы, на которых задача не решена конечны.

Заметим, что эти границы также как и границы теоремы 2.2 не наилучшие. Подробнее об этом смотрите в работе [6].

Вообще, любые методы оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B следует считать асимптотическими, если они не точны на B_t при всех $t > 0$.

5. Заключение

В настоящей статье найдена связь коэффициентов мажорирующих функций классов B_t с коэффициентами функций класса S^0. При помощи этой связи найдены точные оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов при малых и больших значениях параметра t на классах B_t.

При малых t оценки являются асимптотическими в том смысле, что чем меньше t, тем больше начальных коэффициентов можно оценить. При больших t оценки являются асимптотическими в том смысле, что чем больше t, тем больше начальных коэффициентов можно оценить.

Эти результаты получены при помощи методов теории подчинённых функций и теоремы Каратеодори-Тёплица, дающей решение проблемы коэффициентов на классе Каратеодори. Указаны границы применимости метода в зависимости от t и от номера коэффициента. Дано приложение полученных результатов к теории многочленов Лаггера. Проведено сравнение полученных результатов с известными ранее асимптотическими оценками.

Методы, изложенные здесь не являются специфичными для классов B_t и могут быть применены на произвольных классах подчинённых функций.

Список литературы

1. Krzyz J. G. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 20. P. 314.

2. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Journal d'Analyse Mathematique. 1977. Vol. 31. P. 169–190. DOI: 10.1007/BF02813302

3. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. Vol. 48. P. 169–192.

4. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // Compl. Var. Theory and Appl. 2003 Vol. 48, Issue 9. P. 753–766. DOI: 10.1080/0278107031000152616

5. Ступин Д. Л. Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. №. 2. С. 71–84.

6. Ступин Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 145. С. 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120

7. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions // Proc. London Math. Soc. 1945. Vol. 48, Issue 1. P. 48–82. DOI: 10.1112/plms/s2-48.1.48

8. Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 143. С. 277–297. DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

9. Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа // Применение функционального анализа в теории приближений. 2010. № 32. С. 52–60.

10. Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. Electronic archive / Cornell University Library. 2011. DOI: 10.48550/arXiv.1104.3984

11. Ступин Д. Л. Асимптотические оценки коэффициентов в проблеме Кжижа // Комплексный анализ и приложения: Материалы VI Петрозаводской международной конференции. Петрозаводск. 2012. С. 69–74.

12. Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Томск: Издательство Томского университета. 1976. 156 с.

13. Гальперин И. М. Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций // УМН. 1965. Т. 20. Вып. 1(121). С. 197–202.

14. Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. Vol. 35. Issue 7. P. 1–35.

15. Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

16. Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // Compl. Var. 1992. Vol. 17. Issue 3-4. P. 213–222. DOI: 10.1080/17476939208814514

17. Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. Vol. 32. P. 193–217. DOI: 10.1007/BF03014795

18. Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. № 33. С. 45–74.

19. Lewandowski Z., Szynal J. An upper bound for the Laguerre polynomials // J. Comp. Appl. Math. 1998. Vol. 99. P. 529–533. DOI: 10.1016/S0377-0427(98)00181-2

20. Schober G. Univalent Functions – Selected Topics, Springer-Verlag. 1975.

21. Романова С. В. Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения // Известия вузов. Математика. 2002. № 11. С. 83–85.

22. Прохоров Д. В., Романова С. В. Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей // Известия РАН, Серия математическая. 2006. Т. 70, № 4. С. 209–224. DOI: 10.4213/im564

Поступила 10.03.2024; доработана после рецензирования 20.01.2025; принята к публикации 26.02.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Ann. Polon. Math.*, **70** (1968), 314.

2. J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J.d’Analyse Mathematique*, **31** (1977), 169–190. DOI: 10.1007/BF02813302.

3. W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A*, **48** (1994), 169–192.

4. N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48** (2003), 48–82. DOI: 10.1080/0278107031000152616.

5. D. L. Stupin, “One method of estimating moduli of Taylor coefficients of subordinate functions”, *Voronezh State University Reports. Physics. Mathematics*, 2024, no. 2, 71–84.

6. D. L. Stupin, “A new method of estimation of modules of initial Taylor coefficients on the class of bounded nonvanishing functions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120 (In Russ.).

7. W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82. DOI: 10.1112/plms/s2-48.1.48.

8. D. L. Stupin, “The coefficient problem for bounded functions and its applications”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297. DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297 (In Russ.).

9. D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, 2010, 52–60.

10. D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, *Cornell University Library*, 2011. DOI: 10.48550/arXiv.1104.3984.

11. D. L. Stupin, *Kompleksnyy analiz i prilozheniya: Proceedings of the VI Petrozavodsk International Conference*, Petrozavodsk, 2012.

12. I. A. Aleksandrov, *Conformal Mappings of Simply Connected and Multiply Connected Domains*, Tomsk University Press, Tomsk, 1976, 156 p.

13. I. M. Galperin, “Some Estimates for Functions Bounded in the Unit Disk”, *Russian Mathematical Surveys*, **20**:1(121) (1965), 197–202.

14. E. Lindelöf, “Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.

15. J. E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford university press, 1947, 251 p.

16. R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3-4 (1992), 213–222. DOI: https://doi.org/10.1080/17476939208814514.

17. C. Carathéodory, “Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion”, *Rendiconti Circ. Mat.*, **32** (1911), 193–217. DOI: 10.1007/BF03014795.

18. D. L. Stupin, “Coefficient problem for functions mapping a circle into a generalized circle and the Caratheodory-Fejer problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, 2012, 45–74 (In Russ.).

19. Z. Lewandowski, J. Szynal, “An upper bound for the Laguerre polynomials”, *J. Comp. Appl. Math.*, **99** (1998), 529–533. DOI: 10.1016/S0377-0427(98)00181-2.

20. G. Schober, *Univalent Functions — Selected Topics*, Springer-Verlag, 1975.

21. S. V. Romanova, “Asymptotic estimates of linear functionals for bounded functions that do not take a zero value”, *Izvestiya vuzov. Math.*, 2002, no. 11, 83–85 (In Russ.).

22. D. V. Prokhorov, S. V. Romanova, “Local extremal problems for bounded analytic functions without zeros”, *Izvestiya RAN, Seriya matematicheskaya*, **70**:4 (2006), 209–224. DOI: 10.4213/im564 (In Russ.).

Submitted 10.03.2024; Revised 20.01.2025; Accepted 26.02.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:
– УДК (только на русском);
– MSC2020 (только на английском);
– название статьи;
– аффиляция автора(-ов);
– информация об авторе(-ах);
– аннотация;
– ключевые слова;
– текст статьи (на русском или английском);
– список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффиляция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличие);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;

г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);

д) ученая степень (указывается при наличие);

е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте https://orcid.org/;

ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными"(написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка.* Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментиронном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];

– Название русскоязычного источника (транслитерация);

– [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];

– Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);

– Количество страниц в издании;

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом *https://translit.ru/ru/bgn/*. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутсвует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal SVMO, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]", Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTex**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

– UDC (only in Russian);
– MSC2020 (only in English);
– article title;
– affiliation of the author(s);
– information about every author(s);
– abstract;
– keywords;
– text of the article (in English);
– references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);

b) Position, Department (indicated if available);

c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;

d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);

e) academic degree (indicated if available);

f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at https://orcid.org/.

g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

– it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;

– do not include non-essential details;

– use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;

– the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;

– it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

- *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

The rules of article design

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

– Author(s) (transliteration);

- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];

– The name of the Russian-language source (transliteration);

– [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];

– Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);

– An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

– Author(s) (transliteration);

– title of the book (transliteration);

– [Translation of the book's name in square brackets];

– Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;

– The number of pages in the book;

– Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website *https://translit.ru/ru/bgn/* you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTex system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – *http://www.miktex.org.*

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой **\input** в файл-преамбулу. Например, **\input{shamanaev.tex}**

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды **\headerRus** и **\headerEn**, соответственно.

Команда **\headerRus** имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда **\headerEn** имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerEn**.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром: **\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
**Название первого столбца & Название второго столбца **
**Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке **
\hline
**1 & 2 **
\hline
**3 & 4 **
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись под_рис_на_английском_языке} {имя файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая подпись_на_английском_языке}

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под рис\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень сжатия} {имя файла.eps} {подпись_под_рис\\подпись_на_английском_языке} {степень сжатия} {общая подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате jpg.

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных бибилиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных бибилиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневолжского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибиков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Высш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}

\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTex system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – *http://www.miktex.org.*

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command **\input** in the preamble file. For example, **\input{shamanaev.tex}**

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English **\headerRus** and **\headerEn**, respectively.

The command **\headerRus** has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command **\headerEn** has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command **\headerFirstEn** *with the same parameters as for the command* **\headerEn**.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command **\sect** with one parameter:**\sect{Header}**

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands **\subsection**, **\subsubsection** and **\paragraph**.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands **\label{label}** and **\eqref{label}**, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked **\label{ivanov14}**, Theorem 5 of this articles — **\label{ivanovt5}**, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command **\ref{label}**).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands \ **proof** and **\proofend** (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

\begin{table}[h!]

\caption{Table name \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption of_the_figure_in_English}

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English} {file name.eps} {caption_of_the figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common caption_in_English}

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

e) insert two pictures with common caption only

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {common_caption} {common_caption_in_English}

g) insert of three pictures with common caption only

\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}

All inserted images must be in format jpg.

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

\RBibitem{label for a link to the source },

and every English reference – by a command

\Bibitem{label for a link to the source }.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

Алфавитный указатель авторов

Гермидер О. В.	11
Кондратьева А. В.	25
Кузнецов М. И.	25
Литаврин А. В.	34
Лукащук В. О.	49
Лукащук С. Ю.	49
Попов В. Н.	11
Сидоров С. В.	69
Ступин Д. Л.	81
Уткин Г. В.	69

Author Index

O. V. Germider	11
V. N. Popov	11
A. V. Kondrateva	25
M. I. Kuznetsov	25
A. V. Litavrin	34
V. O. Lukashchuk	49
S. Yu. Lukashchuk	49
S. V. Sidorov	69
D. L. Stupin	81
G. V. Utkin	69

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».

С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 19.03.2025. Дата выхода в свет 31.03.2025. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 10,5 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 132.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 19.03.2025. Date of publishing 31.03.2025. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 10,5.

Number of copies 100. Order no. 132.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

CBMO