

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 26 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2024

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 26, № 4. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 26, NO. 4. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

С 2024 года журналу в базе данных Scopus присвоены квартили Q3 по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) и Q4 по направлению Control and Optimization.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

Since 2024, the journal in the Scopus database has been assigned Q3 quartiles by area Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) and Q4 in Control and Optimization.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2024

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — заместитель главного редактора, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер-исследователь научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ"(Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Леонтьев Виктор Леонтьевич — доктор физико-математических наук, профессор Научного центра мирового уровня «Передовые цифровые технологии» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартьянов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Deputy Editor, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Research Engineer, Scientific Center for Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology (Sirius Federal Territory, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics

and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Victor L. Leontiev — D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the World-class Scientific Center “Advanced Digital Technologies” of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), President of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Багаев А. В.

Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства 359

Косов А. А.

Об устойчивости относительно части переменных в некоторых критических случаях 376

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.

К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли 392

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х.

Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера 404

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А.

Численное моделирование турбулентного течения в канале с коленом 424

Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А.

Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах 442

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 70 – ЛЕТИЮ НИКОЛАЯ ДМИТРИЕВИЧА КУЗЬМИЧЕВА 458

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 460

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 464

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 468

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 474

Алфавитный указатель авторов 478

Contents

MATHEMATICS

A. V. Bagaev

Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space 359

A. A. Kosov

On stability with respect to part of variables in some critical cases 376

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov

An embedding theorem for filtered deformations of graded nonalternating Hamiltonian Lie algebras 392

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, H. Zhang

Comparative analysis of some iterative processes for realisation of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables 404

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

T. Y. Balabina, Yu. N. Deryugin, E. A. Kudryashov

Numerical simulation of turbulent flow in a channel with a bend 424

P. A. Velmisov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova

Application of equations with deviating argument to mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media 442

MATHEMATICAL LIFE

TO THE 70TH ANNIVERSARY OF NIKOLAY KUZMICHEV 458

The rules of article design (in Russian) 460

The rules of article design (in English) 464

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 468

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 474

Author Index 478

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.359-375

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 514.7

Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства

Багаев А. В.

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе исследуются свойства полугрупповых динамических систем (G, X) , где полугруппа G порождена конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства X . Доказано, что такие динамические системы (G, X) всегда имеют единственный глобальный аттрактор A , который представляет собой непустое компактное подмножество в X , при этом A является единственным минимальным множеством динамической системы (G, X) . Показано, что динамическая система (G, X) и динамическая система (G_A, A) , полученная сужением действия G на A , не являются чувствительными к начальным условиям. Глобальный аттрактор A может иметь как простую, так и сложную структуру. Изучается связность глобального аттрактора A . Найдено условие, при котором A не является вполне несвязным множеством. В частности, для полугрупп G , порожденных двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями, указано условие связности глобального аттрактора A . Также получены достаточные условия, при которых A является канторовым множеством. Приведены примеры глобальных аттракторов динамических систем из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: полугрупповая динамическая система, глобальный аттрактор, минимальное множество, чувствительность к начальным условиям, система итерированных функций, канторово множество

Для цитирования: Багаев А. В. Аттракторы полугрупп, порожденных конечным семейством сжимающих преобразований полного метрического пространства // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 359–375. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.359-375>

Об авторе:

Багаев Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com



MSC2020 28A80

Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space

A. V. Bagaev

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The present paper is devoted to the properties of semigroup dynamical systems (G, X) , where the semigroup G is generated by a finite family of contracting transformations of the complete metric space X . It is proved that such dynamical systems (G, X) always have a unique global attractor \mathcal{A} , which is a non-empty compact subset in X , with \mathcal{A} being unique minimal set of the dynamical system (G, X) . It is shown that the dynamical system (G, X) and the dynamical system $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ obtained by restricting the action of G to \mathcal{A} both are not sensitive to the initial conditions. The global attractor \mathcal{A} can have either a simple or a complex structure. The connectivity of the global attractor \mathcal{A} is also studied. A condition is found under which \mathcal{A} is not a totally disconnected set. In particular, for semigroups G generated by two one-to-one contraction mappings, a connectivity condition for the global attractor \mathcal{A} is indicated. Also, sufficient conditions are obtained under which \mathcal{A} is a Cantor set. Examples of global attractors of dynamical systems from the considered class are presented.

Keywords: semigroup dynamical system, global attractor, minimal set, sensitivity to initial conditions, system of iterated functions, Cantor set

For citation: A. V. Bagaev. Attractors of semigroups generated by a finite family of contraction transformations of a complete metric space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 359–375. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.359-375>

About the author:

Andrey V. Bagaev, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com

1. Введение

Пусть топологическая полугруппа G непрерывно действует на топологическом пространстве X . Тогда пара (G, X) называется полугрупповой динамической системой или просто динамической системой, при этом X называется фазовым пространством.

Важными примерами полугрупповых динамических систем являются каскады, полупотоки, потоки.

К центральным проблемам теории полугрупповых динамических систем можно отнести вопросы существования глобальных аттракторов и минимальных множеств, их описания, а также существования хаоса в таких динамических системах [1–5].

В настоящей работе рассматриваются динамические системы (G, X) , где полугруппа G порождена конечным семейством $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ сжимающих отображений полного

метрического пространства X . Отметим, что само конечное семейство S называется системой итерированных функций (СИФ), заданной на X .

Теория систем итерированных функций является одним из мощных инструментов построения фракталов и находит широкое применение в различных областях знания ([6–7]). Согласно теореме Хатчинсона [8], для любой СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданной на полном метрическом пространстве X , существует единственное непустое компактное подмножество $A \subset X$, инвариантное относительно S :

$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_k(A) = A. \quad (1.1)$$

Множество A , называемое аттрактором СИФ S , может иметь как простую структуру, так и быть фракталом.

Любая СИФ S , заданная на X , определяет динамическую систему (G, X) , где G – полугруппа, состоящая из всевозможных композиций отображений из S . Обозначим через \mathfrak{S} множество всех таких полугрупповых динамических систем. Целью данной работы является исследование свойств динамических систем из класса \mathfrak{S} .

Доказано, что динамическая система (G, X) имеет единственный глобальный аттрактор A , совпадающий с аттрактором СИФ S , причем A является единственным минимальным множеством динамической системы (G, X) (Теорема 5.1). В частности, динамическая система (G_A, A) , полученная сужением действия полугруппы G на A , является минимальной.

Для СИФ известны два алгоритма построения аттракторов: детерминированный и рандомизированный. Теорема 5.1 позволяет применить указанные алгоритмы для визуализации глобальных аттракторов динамических систем из класса \mathfrak{S} .

Показано, что динамические системы (G, X) и (G_A, A) не являются чувствительными к начальным условиям (Теорема 6.1).

Одним из важных топологических свойств глобальных аттракторов является его связность. В разделе 7 найдены достаточные условия, при которых глобальный аттрактор не является вполне несвязным (Теорема 7.1). В Следствии 7.1 сформулированы условия, при которых глобальный аттрактор полугруппы, порожденной двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями, является связным. Также получены достаточные условия, при которых глобальный аттрактор является канторовым множеством (Теорема 7.2).

В разделе 8 приведены примеры глобальных аттракторов динамических систем из исследуемого класса \mathfrak{S} .

2. Динамические системы, заданные непрерывным действием полугруппы

Напомним основные определения теории полугрупповых динамических систем (см., например, [5]). Пусть G – топологическая полугруппа, X – топологическое пространство. Непрерывным действием G на X называется такое непрерывное отображение

$$\Phi: G \times X \rightarrow X: (g, x) \mapsto g.x \quad \forall (g, x) \in G \times X,$$

что $g.(h.x) = (gh).x \quad \forall (g, h, x) \in G \times G \times X$. Если задано непрерывное действие Φ топологической полугруппы G на топологическом пространстве X , то пара (G, X) называется полугрупповой динамической системой или просто динамической системой. Топологическое пространство X называется фазовым пространством. Множество $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ называется орбитой точки $x \in X$.

Пример 2.1. Пусть $f: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение топологического пространства X в себя, $G = \{f^n, n \in \mathbb{N}, \text{id}_X\}$. Пара (G, X) называется классической динамической системой или каскадом.

Пример 2.2. Множество \mathbb{R}_+^1 всех неотрицательных действительных чисел относительно сложения является моноидом. Непрерывное действие полугруппы \mathbb{R}_+^1 на топологическом пространстве X называется полупотоком. Множество \mathbb{R}^1 всех действительных чисел по сложению образует группу. Пара (\mathbb{R}^1, X) называется потоком на топологическом пространстве X .

Пусть дана динамическая система (G, X) . Если G — топологическая группа, то на X задано отношение эквивалентности: две точки $x, y \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной орбите. Таким образом, совокупность всех орбит образует разбиение X . В случае если же G — топологическая полугруппа, то из условия $G.x \cap G.y \neq \emptyset$ не следует $G.x = G.y$, то есть множество всех орбит не образует разбиение.

Подмножество $B \subset X$ называется инвариантным, если $g.b \in B \forall g \in G, b \in B$.

Непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset X$ называется глобальным аттрактором динамической системы (G, X) , если $\overline{G.x} \supset \mathcal{A} \forall x \in X \setminus \mathcal{A}$, где $\overline{G.x}$ — замыкание орбиты $G.x$.

Непустое замкнутое инвариантное подмножество $\mathcal{A} \subset X$ называется минимальным множеством динамической системы (G, X) , если $\overline{G.x} = \mathcal{A} \forall x \in \mathcal{A}$. Динамическая система (G, X) называется минимальной, если $\overline{G.x} = X \forall x \in X$, то есть любая орбита полугруппы G всюду плотна в X .

Минимальность множества означает, что \mathcal{A} не содержит собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Действительно, пусть \mathcal{A}' — собственное замкнутое инвариантное подмножество в \mathcal{A} : $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Тогда в силу инвариантности \mathcal{A}' для любого $x \in \mathcal{A}'$ имеем $G.x \subset \mathcal{A}'$. Так как \mathcal{A}' замкнуто, то $\overline{G.x} \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A}'$. С другой стороны, \mathcal{A} — минимальное, следовательно, $\mathcal{A} = \overline{G.x}$. Таким образом, имеем обратное включение $\mathcal{A} = \overline{G.x} \subset \mathcal{A}'$. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Теорема 2.1. Если динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор \mathcal{A} , являющийся минимальным множеством, то он единственен и динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от \mathcal{A} .

Доказательство. Предположим, что динамическая система (G, X) имеет два различных глобальных аттрактора \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , являющихся минимальными множествами. Тогда существует точка одного аттрактора, не принадлежащая другому. Пусть, например, $x \in \mathcal{A}_1$, но $x \notin \mathcal{A}_2$. Тогда инвариантность \mathcal{A}_1 влечет $G.x \subset \mathcal{A}_1$, а в силу замкнутости \mathcal{A}_1 имеем $\overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$. Так как $x \in X \setminus \mathcal{A}_2$, а \mathcal{A}_2 — глобальный аттрактор, то $\overline{G.x} \supset \mathcal{A}_2$. Таким образом, $\mathcal{A}_2 \subset \overline{G.x} \subset \mathcal{A}_1$, то есть $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Как было сказано выше, минимальное множество \mathcal{A}_1 не может содержать собственного замкнутого инвариантного подмножества, поэтому $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$.

Предположим, что у динамической системы (G, X) есть минимальное множество \mathcal{M} , отличное от \mathcal{A} . Во-первых, отметим, что $\mathcal{M} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Действительно, если $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{A}$, то в силу минимальности множеств $\overline{G.x} = \mathcal{M}$ и $\overline{G.x} = \mathcal{A}$, отсюда $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, что противоречит выбору \mathcal{M} . Итак, $\mathcal{M} \subset X \setminus \mathcal{A}$. Во-вторых, если $x \in \mathcal{M}$, то $\overline{G.x} = \mathcal{M}$. С другой стороны, $x \in X \setminus \mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Но минимальное множество \mathcal{M} не может содержать собственного замкнутого инвариантного подмножества, отсюда

$\mathcal{A} = \mathcal{M}$, что противоречит выбору \mathcal{M} . Итак, динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от \mathcal{A} . \square

Замечание 2.1. Как показывает следующий пример, глобальный аттрактор динамической системы может и не быть минимальным множеством.

Пример 2.3. Пусть действие Φ группы $G = \mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел на вещественной проективном прямой $X = \mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \{[x_1 : x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ задано формулой $\Phi(t, [x_1 : x_2]) = [2^t x_1 : x_2] \forall t \in \mathbb{R}^1, [x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Отметим, что $[2^t x_1 : x_2] = [x_1 : 2^{-t} x_2]$. Нетрудно видеть, что фазовое пространство динамической системы (G, X) разбивается на 4 орбиты: $O_1 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \mid x_1 x_2 > 0\}$, $O_2 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \mid x_1 x_2 < 0\}$, $O_3 = \{[x_1 : 0] \mid x_1 \neq 0\} = [1 : 0]$, $O_4 = \{[0 : x_2] \mid x_2 \neq 0\} = [0 : 1]$. Поскольку

$$\Phi(t, [x_1 : 0]) = [2^t x_1 : 0] = [x_1 : 0], \quad \Phi(t, [0 : x_2]) = [0 : 2^{-t} x_2] = [0 : x_2],$$

то орбиты O_3 и O_4 представляют собой неподвижные точки действия Φ . Поскольку

$$\overline{O_i} = O_i \cup O_3 \cup O_4 \quad \forall i = 1, 2,$$

то динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор \mathcal{A} , состоящий из двух неподвижных точек O_3 и O_4 , при этом \mathcal{A} не является минимальным множеством. Поскольку вещественная проективная прямая $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ гомеоморфна окружности, то фазовое пространство динамической системы имеет вид как на Рис. 2.1.

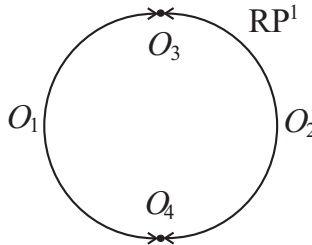


Рис. 2.1. Фазовое пространство динамической системы $(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}\mathbb{P}^1)$

Fig. 2.1. The phase space of a dynamical system $(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}\mathbb{P}^1)$

3. Системы итерированных функций и их аттракторы

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Обозначим через $D_\varepsilon(x)$ открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in X$, а через $\overline{D_\varepsilon(x)}$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в x . Расширением множества $B \subset X$ радиуса $\varepsilon > 0$ называется множество

$$B + \varepsilon = \bigcup_{x \in B} \overline{D_\varepsilon(x)}.$$

Обозначим через \mathcal{K} множество всех непустых компактных подмножеств из X . Функция $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством

$$d_H(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + \varepsilon, B \subset A + \varepsilon\} \quad \forall A, B \in \mathcal{K},$$

определяет метрику на \mathcal{K} . Метрика d_H называется метрикой Хаусдорфа. Как известно, метрическое пространство (X, d) полно тогда и только тогда, когда (\mathcal{K}, d_H) полно.

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ — система итерированных функций (СИФ), заданная на полном метрическом пространстве (X, d) . СИФ S определяет отображение

$$F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}: B \mapsto f_1(B) \cup \dots \cup f_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}.$$

Согласно теореме Хатчинсона, отображение F является сжимающим, а потому, по теореме Банаха о неподвижной точке, существует такое единственное непустое компактное подмножество $\mathcal{A} \subset X$, что $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то есть имеет место равенство (1.1). Более того, для любого компактного подмножества B последовательность $\{B_n = F^n(B)\}$ сходится к \mathcal{A} в метрике Хаусдорфа:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \mathcal{A}.$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$B_n \subset \mathcal{A} + \varepsilon, \quad \mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon.$$

Множество \mathcal{A} называется аттрактором СИФ S , а отображение F — отображением Хатчинсона.

В работе [9] указано, что СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданная на X , удовлетворяет условию открытого множества, если существует такое открытое множество $U \subset X$, что

$$f_j(U) \subset U \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Известно (Теорема 9.3 [9]), что если СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, заданная на X , удовлетворяет условию открытого множества, то размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ аттрактора \mathcal{A} СИФ S совпадают и равны такому единственному числу d , что

$$(\lambda_1)^d + \dots + (\lambda_k)^d = 1,$$

где λ_j — коэффициент сжатия преобразования f_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

4. Ассоциированная СИФ

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ — СИФ, заданная на полном метрическом пространстве (X, d) , \mathcal{A} — ее аттрактор. Введем следующие обозначения:

$$\Sigma = \{1, 2, \dots, k\}, \quad \Sigma^n = \Sigma \times \dots \times \Sigma \quad (n \text{ раз}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Семейство

$$S^n = \{f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n} \mid (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

представляет собой k^{n+1} сжимающих преобразований полного метрического пространства (X, d) , следовательно, S^n является СИФ. Обозначим через \mathcal{A}^n аттрактор СИФ S^n .

Т е о р е м а 4.1. *Аттракторы СИФ S^n и СИФ S совпадают: $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}$.*

Доказательство. Отображение Хатчинсона $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ для СИФ S задается равенством

$$F(B) = \bigcup_{i \in \Sigma} f_i(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}.$$

Заметим, что для произвольного $B \in \mathcal{K}$ имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F^2(B) &= \bigcup_{i_0 \in \Sigma} f_{i_0}(F(B)) = \bigcup_{i_0 \in \Sigma} f_{i_0} \left(\bigcup_{i_1 \in \Sigma} f_{i_1}(B) \right) = \\ &= \bigcup_{i_0 \in \Sigma} \bigcup_{i_1 \in \Sigma} f_{i_0} \circ f_{i_1}(B) = \bigcup_{(i_0, i_1) \in \Sigma^2} f_{i_0} \circ f_{i_1}(B). \end{aligned}$$

Аналогично можно получить

$$F^{n+1}(B) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma^{n+1}} f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}, \tag{4.2}$$

где объединение берется по всем $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^{n+1}$.

В силу равенства (4.2) отображением Хатчинсона для СИФ S^n является F^{n+1} . Поскольку $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то $F^{n+1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. В силу единственности неподвижной точки для сжимающего отображения $F^{n+1}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ на полном метрическом пространстве \mathcal{K} имеем $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}$. □

СИФ S^n будем называть *ассоциированной СИФ порядка n* для СИФ S .

5. Глобальный аттрактор полугруппы

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 5.1. Пусть A, B – непустые подмножества метрического пространства (X, d) , причем $A \subset B + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Тогда A лежит в замыкании \overline{B} множества B .

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in A$. Если $y \in B$, то $y \in \overline{B}$. Предположим, что $y \notin B$. Покажем, что y – предельная точка для B . Поскольку

$$A \subset B + \varepsilon = \bigcup_{x \in B} \overline{D_\varepsilon(x)} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

то найдется такая точка $x_0 \in B$, что $y \in \overline{D_\varepsilon(x_0)}$, откуда $d(x_0, y) \leq \varepsilon$. Поскольку $y \notin B$, то $y \neq x_0$ и $d(x_0, y) < \varepsilon$, т. е. x_0 принадлежит проколотой ε -окрестности $D_\varepsilon^0(y) = D_\varepsilon(y) \setminus \{y\}$. Таким образом, $x_0 \in D_\varepsilon^0(y) \cap B$, т. е. $D_\varepsilon^0(y) \cap B \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$. Последнее означает, что y – предельная точка для B , следовательно, $A \subset \overline{B}$. □

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ – СИФ на полном метрическом пространстве (X, d) . Тогда множество всех композиций отображений из S определяют полугруппу G . Таким образом, СИФ S задает динамическую систему (G, X) .

Лемма 5.2. Пусть \mathcal{A} – аттрактор СИФ S . Тогда $\mathcal{A} \subset \overline{G \cdot x} \quad \forall x \in X$.

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in X$ и положим $B = \{x\}$, $B_n = F^n(B)$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Хатчинсона, последовательность компактных подмножеств $\{B_n\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к аттрактору А СИФ S . Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$B_n \subset \mathcal{A} + \varepsilon, \quad \mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon.$$

Орбита $G.x$ точки x имеет вид

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} = \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x) \mid i_1, \dots, i_p \in \Sigma = \{1, \dots, k\}, p \in \mathbb{N}\}.$$

Поскольку

$$B_n = F^n(B) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma^n} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(B),$$

где объединение берется по всем наборам $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^n$, то $B_n \subset G.x \forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда $B_n + \varepsilon \subset G.x + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset B_n + \varepsilon \subset G.x + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, $n > N$. Таким образом, $\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \forall \varepsilon > 0$. Применяя Лемму 5.1, получаем $\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \forall x \in X$. \square

Теорема 5.1. Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями f_1, \dots, f_k полного метрического пространства X . Тогда:

- 1) существует единственный глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, X) ;
- 2) \mathcal{A} совпадает с аттрактором СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$;
- 3) \mathcal{A} является минимальным множеством динамической системы (G, X) ;
- 4) динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от \mathcal{A} .

Доказательство. Покажем, что аттрактор \mathcal{A} СИФ S является глобальным аттрактором динамической системы (G, X) . По определению \mathcal{A} — непустое компактное, a , следовательно, замкнутое подмножество в X . Равенство

$$f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

влечет $f_i(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \forall i = 1, \dots, k$. Поскольку любое преобразование $g \in G$ является композицией отображений из S , то $g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \forall g \in G$, т. е. \mathcal{A} — G -инвариантное. Согласно Лемме 5.2 имеет место включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \forall x \in X$, в т. ч. $\forall x \in X \setminus \mathcal{A}$. Таким образом, \mathcal{A} — глобальный аттрактор динамической системы (G, X) .

В силу G -инвариантности глобального аттрактора \mathcal{A} имеем $G.x \subset \mathcal{A} \forall x \in \mathcal{A}$. В силу замкнутости \mathcal{A} получаем $\overline{G.x} \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Из Леммы 5.2 следует обратное включение $\mathcal{A} \subset \overline{G.x}$. Таким образом, $\overline{G.x} = \mathcal{A}$, т. е. \mathcal{A} является минимальным множеством динамической системы (G, X) .

Согласно Теореме 2.1, глобальный аттрактор \mathcal{A} , являющийся минимальным множеством, единственен и динамическая система (G, X) не имеет других минимальных множеств, отличных от \mathcal{A} . \square

Следствие 5.1. Динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$, полученная сужением действия полугруппы G на глобальный аттрактор \mathcal{A} , является минимальной системой.

З а м е ч а н и е 5.1. Хатчинсон [8] показал, что аттрактор A СИФ S совпадает с замыканием множества неподвижных точек всевозможных композиций отображений из S . Поэтому в силу Теоремы 5.1 глобальный аттрактор динамической системы (G, X) является замыканием множества неподвижных точек всех преобразований из полугруппы G .

Из Теорем 4.1 и 5.1 вытекает

С л е д с т в и е 5.2. Пусть полугруппа G порождена СИФ S , заданной на X , а полугруппа G_n — ассоциированной СИФ S^n . Тогда глобальные аттракторы динамических систем (G, X) и (G_n, X) совпадают.

Т е о р е м а 5.2. Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями f_1, \dots, f_k полного метрического пространства X , H — произвольная подполугруппа полугруппы G , A_H и A_G — глобальные аттракторы динамических систем (H, X) и (G, X) соответственно. Тогда $A_H \subset A_G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения $\text{Fix}G = \{x \in X \mid \exists g \in G : g(x) = x\}$, $\text{Fix}H = \{x \in X \mid \exists h \in H : h(x) = x\}$. В силу замечания 5.1 имеем $A_H = \overline{\text{Fix}H}$, $A_G = \overline{\text{Fix}G}$. Поскольку $H \subset G$, то $\text{Fix}H \subset \text{Fix}G$, следовательно $A_H = \overline{\text{Fix}H} \subset \overline{\text{Fix}G} = A_G$. \square

6. Чувствительность к начальным условиям

Динамическая система (G, X) в метрическом пространстве (X, d) называется чувствительной к начальным условиям (или, для краткости, чувствительной) [5], если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного открытого подмножества $U \subset X$ найдется такой элемент $g \in G$, что $\text{diam}(g.U) \geq \varepsilon$. Число ε называется константой чувствительности для (G, X) .

З а м е ч а н и е 6.1. Как показывает следующий пример, наличие глобально-го аттрактора у динамической системы не влечет отсутствие чувствительности к начальным условиям.

П р и м е р 6.1. Зададим непрерывное действие Φ группы $G = \mathbb{R}$ на вещественной прямой $X = \mathbb{R}$ формулой $\Phi(t, x) = 2^t x \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. Фазовое пространство динамической системы (G, X) состоит из трех орбит: $O_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $O_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, $O_3 = \{0\}$, при этом O_3 — единственная неподвижная точка действия Φ . Поскольку

$$\overline{O_i} = O_i \cup O_3 \quad \forall i = 1, 2,$$

то динамическая система (G, X) имеет глобальный аттрактор A , состоящий из неподвижной точки O_3 . Нетрудно видеть, что динамическая система (G, X) чувствительна к начальным условиям.

Т е о р е м а 6.1. Пусть полугруппа G порождена сжимающими отображениями f_1, \dots, f_k полного метрического пространства X и A — ее глобальный аттрактор. Динамические системы (G, X) и (G_A, A) не являются чувствительными к начальным условиям.

Доказательство. Покажем, что $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не является чувствительной к начальным условиям. Возьмем любую точку $x \in \mathcal{A}$ и любое $\eta > 0$, тогда $U_{\eta} = D_{\eta/2}(x) \cap \mathcal{A}$ — открытое подмножество в \mathcal{A} , причем $\text{diam}U_{\eta} \leq \text{diam}D_{\eta/2}(x) = \eta$. Каждое отображение f_i является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_i \in (0, 1)$. Произвольное преобразование $g \in G$ имеет вид $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$, где $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$, и является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n} \in (0, 1)$. Поскольку $U_{\eta} \subset D_{\eta/2}(x)$, то $g.U_{\eta} \subset g.D_{\eta/2}(x)$. Отсюда получаем

$$\text{diam}(g.U_{\eta}) \leq \text{diam}(g.D_{\eta/2}(x)) = \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n} \cdot \eta < \eta.$$

Итак, для любого числа $\eta > 0$ существует такое открытое подмножество U_{η} в \mathcal{A} , что $\text{diam}(g.U_{\eta}) < \eta$ для всех $g \in G$. Следовательно, динамическая система $(G_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ не является чувствительной к начальным условиям.

Для доказательства того, что (G, X) не является чувствительной к начальным условиям, нужно взять $x \in X$ и любое $\eta > 0$, рассмотреть открытое множество $U_{\eta} = D_{\eta/2}(x)$ и повторить рассуждения, приведенные выше. □

7. Связность глобального аттрактора

В этом разделе исследуем связность глобального аттрактора \mathcal{A} динамической системы (G, X) .

Теорема 7.1. Пусть существуют такое непустое компактное подмножество $B \subset X$ и такие отображения $g, h \in G$, что

$$g(B) \cup h(B) \supset B. \tag{7.1}$$

Тогда: 1) $B \subset \mathcal{A}$; 2) если B — связное и состоит из более чем одной точки, то \mathcal{A} не является вполне несвязным множеством.

Доказательство. Поскольку полугруппа G порождена композициями отображений из $S = \{f_1, \dots, f_k\}$, то g и h могут быть записаны в следующем виде:

$$g = f_{i_0} \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}, \quad h = f_{j_0} \circ f_{j_1} \circ \dots \circ f_{j_m},$$

следовательно, $g \in S^n$, $h \in S^m$. Рассмотрим СИФ $\tilde{S} = S^n \cup S^m$. Согласно Теореме 4.1, аттракторы для СИФ S^n и S^m совпадают с аттрактором \mathcal{A} СИФ S . Если F^n и F^m — отображения Хатчинсона для СИФ S^n и S^m соответственно, то отображение $\tilde{F}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, заданное формулой $\tilde{F}(M) = F^n(M) \cup F^m(M) \forall M \in \mathcal{K}$, является отображением Хатчинсона для СИФ \tilde{S} . Поскольку

$$\tilde{F}(\mathcal{A}) = F^n(\mathcal{A}) \cup F^m(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

то в силу единственности неподвижной точки для сжимающего отображения $\tilde{F}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ полного метрического пространства \mathcal{K} получаем, что \mathcal{A} — аттрактор СИФ \tilde{S} .

Поскольку $g, h \in \tilde{S}$, то благодаря условию (7.1) имеем $B \subset \tilde{F}(B)$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств:

$$B \subset \tilde{F}(B) \subset \tilde{F}^2(B) \subset \dots \subset \tilde{F}^p(B) \subset \dots$$

Согласно теореме Хатчинсона,

$$\mathcal{A} = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{F}^p(B) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \tilde{F}^p(B).$$

Поскольку $B \subset \tilde{F}^p(B) \forall p \in \mathbb{N}$, то $B \subset \mathcal{A}$.

Если B — связное и состоит из более чем одной точки, то \mathcal{A} не может быть вполне несвязным. □

С л е д с т в и е 7.1. *Если полугруппа G порождена двумя взаимнооднозначными сжимающими отображениями f_1, f_2 полного метрического пространства X и найдутся такое связное компактное множество B и такие отображения $g, h \in G$, удовлетворяющие условию (7.1), то \mathcal{A} — связное множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [10], что аттрактор \mathcal{A} для СИФ $S = \{f_1, f_2\}$, состоящей из двух взаимнооднозначных сжимающих отображений, является либо связным, либо вполне несвязным. Поскольку, согласно Теореме 7.1, аттрактор \mathcal{A} не является вполне несвязным, то \mathcal{A} — связное множество. □

СИФ $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ на полном метрическом пространстве X называется вполне несвязной (см., например, [6]), если выполнены следующие условия:

- a) $f_i: X \rightarrow X$ — взаимнооднозначное отображение $\forall i \in \{1, \dots, k\}$;
- b) $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, k\}$,

где \mathcal{A} — аттрактор СИФ S .

Из [6] известно, что аттрактор \mathcal{A} вполне несвязной СИФ S является вполне несвязным множеством. Таким образом, глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, X) , где полугруппа G порождена отображениями вполне несвязной СИФ S , является вполне несвязным множеством.

Напомним, что совершенное вполне несвязное множество называется канторовым.

Т е о р е м а 7.2. *Пусть полугруппа G порождена взаимнооднозначными сжимающими отображениями f_1, \dots, f_k полного метрического пространства (X, d) и существует такое непустое компактное подмножество $B \subset X$, что:*

- a) $f_j(B) \subset B \forall j \in \{1, \dots, k\}$;
- b) $f_j(B) \cap f_l(B) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \{1, \dots, k\}$.

Тогда глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, X) является канторовым множеством в B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Sigma = \{1, \dots, k\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого набора $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^n$ положим $B_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(B)$. Отметим, что условия a), b), а также взаимнооднозначность отображений $f_j \forall j \in \Sigma$ гарантируют $B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_n} = \emptyset$ для различных наборов индексов из $\Sigma^n \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение Хатчинсона для СИФ S . Тогда

$$A_n := F^n(B) = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma^n} B_{i_1 \dots i_n}.$$

Условие $a)$ влечет включение $B \supset F(B)$, откуда получаем монотонную последовательность вложенных компактных подмножеств в X :

$$B \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

Согласно теореме Хатчинсона,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

при этом получаем $A \subset B$.

Отметим, что неподвижные точки отображений f_j , $j \in \Sigma$, а также их образы при отображениях из G принадлежат A и, следовательно, B . Из условия $b)$ следует, что неподвижные точки отображений f_j , $j \in \Sigma$ попарно различны. Поэтому можно точно сказать, что B состоит из более чем k различных точек. В силу взаимной однозначности отображений $\{f_j, j \in \Sigma\}$ то же самое можно сказать и про каждое множество $B_{i_1 \dots i_n}$, $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Аттрактор A является компактным, следовательно, замкнутым множеством. Покажем, что аттрактор A не имеет изолированных точек: для любого $x \in A$ найдем последовательность точек из A , сходящуюся к x . Поскольку $x \in A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой единственный набор $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Sigma^n$, что $x \in B_{i_1 \dots i_n}$. Пусть x_n — любая точка из $B_{i_1 \dots i_n}$, являющаяся образом $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(y)$ неподвижной точки y некоторого преобразования f_j , $j \in \Sigma$, и отличная от x . Как было замечено ранее, в силу условий теоремы такая точка x_n всегда найдется, и из определения x_n следует, что $x_n \in A$. Поскольку отображения из S сжимающие, то $d(x, x_n) \leq \text{diam} B_{i_1 \dots i_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Это показывает, что никакая точка $x \in A$ не является изолированной. Итак, A — совершенное множество.

Поскольку $A \subset B$, а по условию $b)$ $f_j(B) \cap f_l(B) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \Sigma$, то $f_j(A) \cap f_l(A) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \Sigma$. По условиям доказываемой теоремы все отображения $f_j: X \rightarrow X$, $j \in \Sigma$ взаимно-однозначные. Следовательно, СИФ $S = \{f_j, j \in \Sigma\}$ является вполне несвязной, а аттрактор A — вполне несвязным множеством.

Итак, глобальный аттрактор A динамической системы (G, X) является совершенным вполне несвязным подмножеством в B , т. е. A — канторово множество. \square

8. Примеры глобальных аттракторов

Пример 8.1. Пусть полугруппа G порождена двумя гомотетиями f_1 и f_2 n -мерного евклидова пространства \mathbb{E}^n с коэффициентами подобия $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ и центрами гомотетии $A_1, A_2 \in \mathbb{E}^n$. Если $A_1 = A_2 = A$, то глобальный аттрактор A динамической системы (G, \mathbb{E}^n) совпадает с точкой A . Далее предположим, что $A_1 \neq A_2$. Обозначим через I отрезок, соединяющий точки A_1 и A_2 . Поскольку при гомотетии любой отрезок переходит в отрезок, то $f_1(I)$ является отрезком, соединяющим A_1 и $f_1(A_2)$, $f_2(I)$ — отрезком, соединяющим $f_2(A_1)$ и A_2 . Отметим, что точки $f_1(A_2)$ и $f_2(A_1)$ лежат внутри отрезка I и $f_i(I) \subset I, i \in \{1, 2\}$.

Если $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$, то $f_1(I) \cup f_2(I) = I$. В этом случае глобальным аттрактором A динамической системы (G, \mathbb{E}^n) является отрезок I .

Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, то $f_1(I) \cap f_2(I) = \emptyset$. Таким образом, выполнены условия Теоремы 7.2, согласно которой глобальным аттрактором A динамической системы (G, \mathbb{E}^n) является канторово множество в отрезке I .

Пусть δ — половина расстояния между точками A_1 и A_2 , A_0 — середина отрезка I , $U = D_\delta(A_0)$ — открытый шар радиуса δ с центром в точке A_0 . Тогда при $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ выполнены условия открытого множества:

$$f_i(U) \subset U, i = 1, 2, \quad f_1(U) \cap f_2(U) = \emptyset.$$

Согласно Теореме 9.3 [9] размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора \mathcal{A} совпадают и равны d , где d удовлетворяет равенству $(\lambda_1)^d + (\lambda_2)^d = 1$. В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получаем

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \begin{cases} -\ln 2 / \ln \lambda, & \lambda \in (0, \frac{1}{2}); \\ 1 & \lambda \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 8.1. Отметим существенное отличие действия полугруппы G , порожденной двумя гомотетиями f_1 и f_2 , от действия группы H , порожденной теми же двумя гомотетиями. Как известно [11], вне зависимости от значений коэффициентов гомотетий $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$, глобальным аттрактором динамической системы (H, \mathbb{E}^n) является прямая, проходящая через точки A_1 и A_2 , $A_1 \neq A_2$.

П р и м е р 8.2. Пусть полугруппа G порождена гомотетиями f_1, f_2, \dots, f_{n+1} n -мерного евклидова пространства \mathbb{E}^n с аффинно независимыми центрами в точках A_1, \dots, A_{n+1} и коэффициентами подобия $\lambda_i \in (0, 1)$, $i \in \Sigma = \{1, \dots, n + 1\}$. Обозначим через \mathcal{A} глобальный аттрактор динамической системы (G, \mathbb{E}^n) .

Из работы [12] следует, что при $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} \geq n$ глобальный аттрактор \mathcal{A} совпадает с симплексом Δ_n с вершинами в точках A_1, \dots, A_{n+1} .

Пусть $\lambda_i + \lambda_j < 1 \forall i \neq j, i, j \in \Sigma$. Тогда $f_j(\Delta_n) \subset \Delta_n \forall j \in \Sigma, f_j(\Delta_n) \cap f_l(\Delta_n) = \emptyset \forall j \neq l, j, l \in \Sigma$, т. е. выполнены условия Теоремы 7.2. Следовательно, глобальный аттрактор \mathcal{A} является канторовым множеством в симплексе Δ_n .

Обозначим через Δ_n^0 внутренность симплекса Δ_n . Если $\lambda_i + \lambda_j \leq 1 \forall i \neq j, i, j \in \Sigma$, то выполнены условия открытого множества:

$$f_i(\Delta_n^0) \subset \Delta_n^0 \forall i \in \Sigma, \quad f_i(\Delta_n^0) \cap f_j(\Delta_n^0) = \emptyset \quad \forall i \neq j, i, j \in \Sigma.$$

Из Теоремы 9.3 [9] следует, что размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора \mathcal{A} совпадают и равны d , где d удовлетворяет равенству $(\lambda_1)^d + \dots + (\lambda_{n+1})^d = 1$. В частности, при $\lambda_i = \lambda \leq 1/2 \forall i \in \Sigma$ имеем

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = -\ln(n + 1) / \ln \lambda.$$

Если $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$, то глобальный аттрактор \mathcal{A} представляет собой треугольник (салфетку) Серпинского, при этом $\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \ln 3 / \ln 2 \approx 1, 585$.

П р и м е р 8.3. Пусть полугруппа G порождена двумя преобразованиями подобия плоскости f_1 и f_2 , заданными в комплексном виде равенствами:

$$f_1(z) = \lambda iz, \quad f_2(z) = \lambda i(z - 1) + 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ являются неподвижными точками преобразований f_1 и f_2 соответственно. Отметим, что преобразование f_j представляет собой композицию поворота плоскости против часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг точки z_j и сжатия с коэффициентом λ и центром в $z_j, j = 1, 2$.

Обозначим через P четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках

$$z_A = \frac{1}{1 - \lambda^2}, z_B = \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2}, z_C = \frac{-\lambda^2}{1 - \lambda^2}, z_D = 1 - \frac{\lambda i}{1 - \lambda^2}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \left\{ \frac{-1}{1 - \lambda^2}, \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \right\}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \left\{ \frac{-\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \frac{-\lambda}{1 - \lambda^2} \right\}.$$

Более того, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Таким образом, четырехугольник P является прямоугольником.

Поскольку преобразования подобия сохраняют углы между векторами, а отрезки переходят в отрезки, то образами прямоугольника P при преобразованиях f_1 и f_2 будут прямоугольники $P_1 = f_1(P)$, $P_2 = f_2(P)$. Поскольку $f_1(A) = B$, $f_1(B) = C$, $f_2(C) = D$, $f_2(D) = A$, то точки $D_1 = f_1(D)$ и $A_2 = f_2(A)$ находятся на стороне AB , а точки $C_1 = f_1(C)$ и $B_2 = f_2(B)$ — на стороне CD . Непосредственно вычисляя, получим:

$$z_{D_1} = \lambda i + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}, z_{A_2} = 1 + \frac{\lambda^3 i}{1 - \lambda^2}, z_{C_1} = \frac{-\lambda^3 i}{1 - \lambda^2}, z_{B_2} = 1 - \lambda i - \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}.$$

Отметим, что при $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ точка D_1 совпадет с точкой A_2 , а точка C_1 — с точкой B_2 :

$$z_{D_1} = z_{A_2} = 1 + i \frac{1}{\sqrt{2}}, z_{C_1} = z_{B_2} = -i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ вершины прямоугольников P_1 и P_2 будут располагаться на сторонах прямоугольника P в следующем порядке (см. Рис. 8.1 а)):

$$A, D_1, A_2, B, C, B_2, C_1, D,$$

а при $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — в таком порядке (см. Рис. 8.1 б)):

$$A, A_2, D_1, B, C, C_1, B_2, D.$$

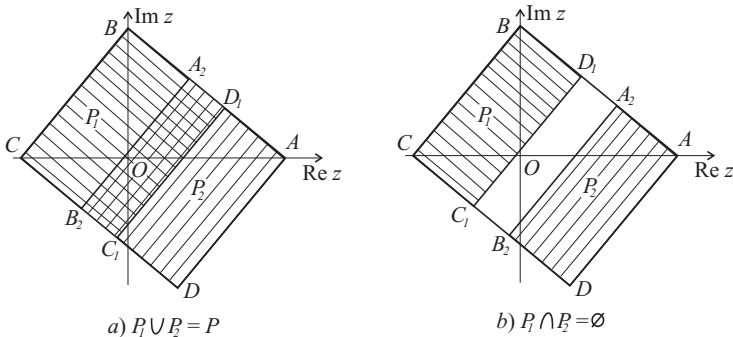


Рис. 8.1. Образы прямоугольника P : а) $\lambda > 1/\sqrt{2}$, б) $\lambda < 1/\sqrt{2}$

Fig. 8.1. The images of the rectangle P : а) $\lambda > 1/\sqrt{2}$, б) $\lambda < 1/\sqrt{2}$

Таким образом, при $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $f_1(P) \cup f_2(P) = P$, следовательно, глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, \mathbb{C}) представляет собой прямоугольник P (см. Рис. 8.2).

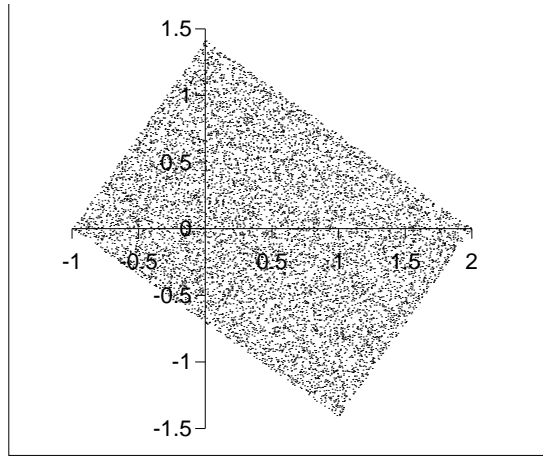


Рис. 8.2. Глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, \mathbb{C}) — прямоугольник P , $\lambda = 1/\sqrt{2}$

Fig. 8.2. The global attractor \mathcal{A} of the dynamical system (G, \mathbb{C}) is the rectangle P , $\lambda = 1/\sqrt{2}$

Если же $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $f_j(P) \subset P$, $j = 1, 2$, $f_1(P) \cap f_2(P) = \emptyset$, т. е. выполнены условия Теоремы 7.2, из которой следует, что глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, \mathbb{C}) является канторовым множеством в прямоугольнике P (см. Рис. 8.3).

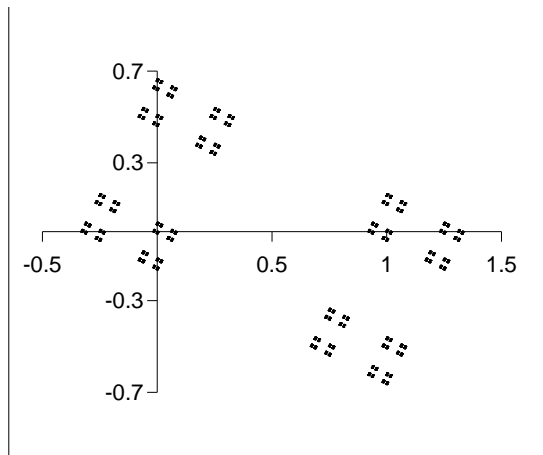


Рис. 8.3. Глобальный аттрактор \mathcal{A} динамической системы (G, \mathbb{C}) — канторово множество в прямоугольнике P , $\lambda = 1/2$

Fig. 8.3. The global attractor \mathcal{A} of the dynamical system (G, \mathbb{C}) is the Cantor set in the rectangle P , $\lambda = 1/2$

Обозначим через P^0 внутренность прямоугольника P . Тогда при $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $f_j(P^0) \subset P^0$, $j = 1, 2$, $f_1(P^0) \cap f_2(P^0) = \emptyset$.

Таким образом, выполнены условия открытого множества, и согласно Теореме 9.3 [9], размерность Минковского $\dim_M \mathcal{A}$ и размерность Хаусдорфа $\dim_H \mathcal{A}$ глобального аттрактора \mathcal{A} совпадают и равны d , где d удовлетворяет равенству $\lambda^d + \lambda^d = 1$, откуда $d = -\ln 2 / \ln \lambda$. Следовательно,

$$\dim_M \mathcal{A} = \dim_H \mathcal{A} = \begin{cases} -\ln 2 / \ln \lambda, & \lambda \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \\ 2 & \lambda \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right). \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kontorovich E., Megrelishvili M. A note on sensitivity of semigroup actions // Semigroup Forum. 2008. Vol. 76, Issue 1, pp. 133–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-007-9033-5>
2. Schneider F.M., Kerkhoff S., Behrisch M., Siegmund S. Chaotic actions of topological semigroups // Semigroup Forum. 2013. Vol. 87, pp. 590–598.
3. Iglesias J., Portela A. Almost open semigroup actions // Semigroup Forum. 2019. Vol. 98, pp. 261–270. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-018-9936-3>
4. Nagar A., Singh M. Topological dynamics of enveloping semigroups. Singapore: Springer, 2023. 87 p.
5. Zhukova N.I. Sensitivity and chaoticity of some classes of semigroup actions // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, No. 1, pp. 174–189. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354724010118>
6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
7. Barnsley M. F. Fractals everywhere. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.
8. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana University Mathematics Journal. 1981. Vol. 30. pp. 713–747.
9. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley and Sons, 2014. 400 p.
10. Yamaguti M., Hata M., Kigami J. Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals. American Mathematical Society, Providence, RI. 1997. 96 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/167>
11. Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Труды математического института имени В. А.Стеклова. 2007, Т. 256, С. 115–147.
12. Багаев А. В., Киселева А. В. О многомерных аналогах треугольника Серпинского // XXVI Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии – 2020»: сб. мат. Н. Новгород, 2020. — С. 1148–1152.

Поступила 06.09.2024; доработана после рецензирования 09.10.2024;
принята к публикации 27.11.2024

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. E. Kontorovich, M. Megrelishvili, “A note on sensitivity of semigroup actions”, *Semigroup Forum*, **76**:1 (2008), 133–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-007-9033-5>.
2. F. M. Schneider, S. Kerckhoff, M. Behrlich, S. Siegmund, “Chaotic actions of topological semigroups”, *Semigroup Forum*, **87** (2013), 590–598.
3. J. Iglesias, A. Portela, “Almost open semigroup actions”, *Semigroup Forum*, **98** (2019), 261–270. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-018-9936-3>.
4. A. Nagar, M. Singh, *Topological dynamics of enveloping semigroups*, Springer, Singapore, 2023, 87 p.
5. N. I. Zhukova, “Sensitivity and chaoticity of some classes of semigroup actions”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **29**:1 (2024), 174–189. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354724010118>.
6. R. M. Crownover, *Introduction to fractals and chaos*, Postmarket Publ., Moscow, 2000, 352 p.
7. M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988, 394 p.
8. J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana University Mathematics Journal*, **30** (1981), 713–747.
9. K. J. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, New York, 2014, 400 p.
10. M. Yamaguti, M. Hata, J. Kigami, *Translations of Mathematical Monographs. Mathematics of Fractals*, **167**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997 DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/167>, 96 p.
11. N. I. Zhukova, “Minimal Sets of Cartan Foliations”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **256**:1 (2007), 105–135 (In Russ.).
12. A. V. Bagaev, A. V. Kiseleva, “On multidimensional analogs of the Sierpinski triangle”, *XXVI International Scientific and Technical Conference «Information Systems and Technologies-2020»: Proceedings*, Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev, N. Novgorod, 2020, 1148–1152 (In Russ.).

Submitted 06.09.2024; Revised 09.10.2024; Accepted 27.11.2024

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.376-391

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925.51

Об устойчивости относительно части переменных в некоторых критических случаях

Косов А. А.

*Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО
РАН (ИДСТУ СО РАН) (Иркутск, Российская Федерация)*

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости относительно части переменных и критических случаях, когда необходимо принимать во внимание нелинейные слагаемые в разложениях правых частей уравнений в ряды. Эта задача является нелокальной из-за наличия неконтролируемых переменных, устойчивость по которым не анализируется и имеет ряд особенностей, затрудняющих исследование по сравнению с аналогичной задачей об устойчивости по всем переменным. Обсуждается аналог принципа сведения Ляпунова применительно к данной задаче. Выделены две ситуации, различающиеся характером вхождения критических переменных в уравнения для некритических переменных. Предложены признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных, устанавливаемые на основе аналогичных свойств вспомогательных систем меньшей размерности по сравнению с исходной. Для случая нескольких нулевых корней характеристического уравнения системы линейного приближения получены условия асимптотической устойчивости относительно части переменных, устанавливаемые по выделяемым устойчивым подсистемам с однородной правой частью. Для доказательства используются знакопостоянные скалярные функции Ляпунова, а также векторные функции Ляпунова–Матросова и метод сравнения. Для сопоставления с известными результатами приводится ряд примеров, показывающих эффективность применения доказанных теорем.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость относительно части переменных, критические случаи

Для цитирования: Косов А. А. Об устойчивости относительно части переменных в некоторых критических случаях // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 376–391. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.376-391>

Об авторе:

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, kosov_idstu@mail.ru



MSC2020 34D20, 34H15, 70E50

On Stability with Respect to Part of Variables in some Critical Cases

A. A. Kosov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. We consider the problem of stability with respect to a part of variables in critical cases, when it is necessary to take into account nonlinear summands in series expansions of the right-hand sides of equations. This problem is nonlocal because of presence of uncontrolled variables (the stability with respect to them is not analyzed), and has a number of features that complicate the study in comparison with the analogous problem of stability with respect to all variables. We discuss an analogue of the Lyapunov reduction principle as applied to this problem. Two situations, differing in the way for critical variables entering the equations for non-critical variables, are distinguished. We propose the signs of stability, asymptotic stability and instability with respect to a part of variables. They are established basing on similar properties of auxiliary systems of smaller dimension. For the case when the characteristic equation for the linear approximation system has several zero roots we obtain the conditions of asymptotic stability with respect to a part of variables, which are established on the basis of stable subsystems with homogeneous right-hand side. For the proof, the sign-constant scalar Lyapunov functions as well as vector Lyapunov – Matrosov functions and the comparison method are used. In order to compare our results with known ones, we present a number of examples that show the effectiveness of the application of the proved theorems.

Keywords: nonlinear differential equations, stability with respect to a part of variables, critical cases

For citation: A. A. Kosov. On Stability with Respect to Part of Variables in some Critical Cases. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 376–391. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.376-391>

About the author:

Alexander A. Kosov, Ph. D. (Mathematics and Physics), Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov Str., Irkutsk 664033, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, kosov_idstu@mail.ru

1. Введение

Задача об устойчивости движения относительно части переменных в критических случаях имеет ряд особенностей, затрудняющих исследование по сравнению с аналогичной задачей по отношению ко всем координатам. Поэтому имеется сравнительно небольшое число публикаций по названной задаче. Случай одного нулевого корня рассматривался в [1]. В [2] изучался случай k пар чисто мнимых корней. В [3–4] на основе

установления асимптотической эквивалентности по отдельным координатам с решениями системы линейного приближения были получены условия устойчивости (неустойчивости) по части переменных в случае кратного нулевого корня с кратными элементарными делителями. Случай $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений рассматривался в [5].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = Pw + F(w, z), \quad \dot{z} = Qw + Sz + f(w, z), \quad (2.1)$$

где $w \in \mathbb{R}^N$ — вектор размерности $N = k + n$, составленный из тех компонент вектора состояния системы, относительно которых требуется установить свойства устойчивости; $z \in \mathbb{R}^p$ — вектор размерности p , включающий те компоненты вектора состояния, по которым свойства устойчивости не анализируются; P, Q, S — постоянные матрицы соответствующих размерностей; $F(w, z), f(w, z)$ — вектор-функции размерностей N и p соответственно, компоненты которых представляют собой не содержащие линейных слагаемых ряды по степеням w_i и z_j , абсолютно сходящиеся в области $\Gamma_1 = \{(w, z) : \|w\| < H_1 \leq +\infty, \|z\| \leq H_2 < \infty\}$ равномерно относительно z . Будем считать также, что все решения системы (2.1) z — ограничены, т. е. на всех возмущенных движениях $\|z(t)\| \leq H_2 < \infty$ (в частности, это заведомо так в случае, когда переменные z_j угловые по модулю 2π).

Предположим, что функция $F(w, z)$ удовлетворяет в области Γ_1 условию

$$\|F(w, z)\| \leq r_1 \|w\|, \quad (2.2)$$

где r_1 — достаточно малое положительное число, т. е. $r_1 = r_1(H_1) \rightarrow 0$ при $H_1 \rightarrow 0$ (таким образом, область Γ_1 всегда можно выбрать так, чтобы r_1 было достаточно малым числом).

При указанных условиях вопрос об устойчивости нулевого решения $w = 0, z = 0$ системы (2.1) по переменным w в широком классе случаев решается по знакам вещественных частей $Re \lambda_j(P)$ собственных чисел $\lambda_j(P)$ матрицы P : если $Re \lambda_j(P) < 0, j = \overline{1, N}$, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически w — устойчиво [6]; если для некоторого $1 \leq i \leq N$ будет $Re \lambda_i(P) > 0$, то нулевое решение системы (2.1) w — неустойчиво [1]. Такие случаи названы в [1] некритическими случаями задачи об устойчивости относительно части переменных. Если же $Re \lambda_j(P) \leq 0, j = \overline{1, N}$, причем для некоторого $1 \leq i \leq N$ выполняется равенство $Re \lambda_i(P) = 0$, то вопрос о w — устойчивости нулевого решения системы (2.1) линейным приближением не решается [1], и требуется рассмотрение слагаемых более высоких порядков, входящих в разложения правых частей (2.1) в ряды. Такие случаи названы в [1] критическими случаями задачи об устойчивости по части переменных. Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы получить достаточные условия устойчивости по части переменных для некоторых критических случаев.

Для решения задачи об устойчивости по всем переменным в критических случаях А. М. Ляпуновым был предложен метод [7–8], названный впоследствии принципом сведения Ляпунова. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы свести задачу об устойчивости для исходной системы к аналогичной задаче для некоторой вспомогательной системы меньшей размерности, иногда называемой «критической», «укороченной»,

«модельной» и т. п. ([9], с. 22). Принцип сведения Ляпунова, являющийся основным методом исследования критических случаев, получил существенное обобщение и развитие в работах [9–14]. Предположим, что матрица P имеет $k \geq 1$ собственных чисел с нулевыми и $n \geq 1$ с отрицательными вещественными частями. Следуя основной идее указанных выше работ, с помощью не особого линейного преобразования $w = T\bar{w}$, где вектор \bar{w} размерности $N = k + n$ представляет собой вектор $\bar{w} = \text{col}(x, y)$, составленный из векторов $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$, приведем систему (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{11}x + P_{12}y + X(x, y, z), \\ \dot{y} &= P_{22}y + Y(x, y, z), \\ \dot{z} &= P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + Z(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где P_{ij} — постоянные матрицы соответствующих размерностей, причем $\text{Re } \lambda_j(P_{11}) = 0$, $\text{Re } \lambda_i(P_{22}) < 0$, а вектор-функции X, Y, Z соответствующих размерностей представляют собой ряды по степеням x_i, y_j, z_m , не содержащие линейных членов, причем для X, Y выполняются условия типа (2.2).

Очевидно, что задача о w -устойчивости нулевого решения системы (2.1) эквивалентна задаче о (x, y) -устойчивости решения $x = 0, y = 0, z = 0$ системы (2.3). Введем обозначения: $\bar{X}(x, z) = P_{11}x + X(x, 0, z)$, $\bar{Y}(x, z) = Y(x, 0, z)$, $\bar{Z}(x, z) = P_{31}x + P_{33}z + Z(x, 0, z)$, $\bar{\bar{X}}(x, y, z) = P_{11}x + P_{12}y + X(x, y, z) - \bar{X}(x, z)$, $\bar{\bar{Y}}(x, y, z) = Y(x, y, z) - \bar{Y}(x, z)$, $\bar{\bar{Z}}(x, y, z) = P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + Z(x, y, z) - \bar{Z}(x, z)$. Тогда систему (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{X}(x, z) + \bar{\bar{X}}(x, y, z), \\ \dot{y} &= P_{22}y + \bar{Y}(x, z) + \bar{\bar{Y}}(x, y, z), \\ \dot{z} &= \bar{Z}(x, z) + \bar{\bar{Z}}(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом нетрудно видеть, что в области $\Gamma_2 = \{(x, y, z) : \|x\| + \|y\| < H_1, \|z\| \leq H_2 < +\infty\}$ будут выполняться условия:

$$\|\bar{\bar{X}}(x, y, z)\| + \|\bar{\bar{Z}}(x, y, z)\| \leq c_1\|y\|, \quad \|\bar{Y}(x, z)\| \leq c_2\|x\|, \quad \|\bar{\bar{Y}}(x, y, z)\| \leq r_2\|y\|, \quad (2.5)$$

где c_1, c_2 и r_2 — положительные постоянные, причем r_2 можно считать достаточно малой. В качестве «укороченной» для системы (2.4) естественно рассматривать систему

$$\dot{x} = \bar{X}(x, z), \quad \dot{z} = \bar{Z}(x, z). \quad (2.6)$$

Таким образом, задача об устойчивости по части переменных в критических случаях может быть сформулирована следующим образом.

Задача А. Указать условия, при выполнении которых x -устойчивость (асимптотическая x -устойчивость, x -неустойчивость) нулевого решения $x = 0, z = 0$ системы (2.6) влечет (x, y) -устойчивость (соответственно асимптотическую (x, y) -устойчивость, (x, y) -неустойчивость), правые части которой удовлетворяют в области Γ_2 условиям (2.5), а все решения z -ограничены $\|z(t)\| \leq H_2 < +\infty$.

Аналогичную задачу можно поставить и для систем более общего вида, чем (2.4).

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{X}(t, x, z) + \overline{\bar{X}}(t, x, y, z), \\ \dot{y} &= P(t)y + \bar{Y}(t, x, z) + \overline{\bar{Y}}(t, x, y, z), \\ \dot{z} &= \bar{Z}(t, x, z) + \overline{\bar{Z}}(t, x, y, z),\end{aligned}\tag{2.7}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) правые части непрерывны в области $\Gamma_3 = \{(t, x, y, z) : \|x\| + \|y\| < H_1\}$, обеспечивают в этой области единственность и z -продолжимость [15] решений;
- б) матрица $P(t)$ ограничена и такова, что нулевое решение линейной системы $\dot{y} = P(t)y$ экспоненциально устойчиво, т. е. для каждого решения $y(t, y_0, t_0)$ этой системы имеет место оценка $y(t, y_0, t_0) \leq \beta_1 \|y_0\| \exp(-\beta_2(t - t_0))$, где β_1 и β_2 – положительные постоянные;
- в) $\|\overline{\bar{X}}(t, x, y, z)\| + \|\overline{\bar{Z}}(t, x, y, z)\| \leq c_1 \|y\|$, $\|\bar{Y}(t, x, z)\| \leq c_2 \|x\|$, $\|\overline{\bar{Y}}(t, x, y, z)\| \leq r_2 \|y\|$, где c_1 , c_2 и r_2 – положительные постоянные, причем r_2 можно считать достаточно малой;
- г) система (2.7) имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача Б. Указать условия, при выполнении которых x -устойчивость (асимптотическая x -устойчивость, x -неустойчивость) нулевого решения $x = 0$, $z = 0$ системы

$$\dot{x} = \bar{X}(t, x, z), \quad \dot{z} = \bar{Z}(t, x, z).\tag{2.8}$$

влечет (x, y) -устойчивость (соответственно асимптотическую (x, y) -устойчивость, (x, y) -неустойчивость) нулевого решения системы (2.7), правые части которой удовлетворяют в области Γ_3 условиям а)–г).

Задачи А и Б будем считать основными, поскольку, как показано выше, задача об устойчивости по части переменных в критических случаях [1] сводится к ним. При решении этих задач будем различать два случая. Первый случай, когда $\bar{Y}(t, x, z) \equiv 0$ (т. е. критические переменные слабо влияют на поведение некритических переменных). Второй случай, когда $\bar{Y}(t, x, z) \neq 0$. Рассмотрим сначала более простой, первый случай.

3. Случай, когда $\bar{Y}(t, x, z) \equiv 0$

В этом случае очевидно, что множество $M = \{(x, y, z) : \|y\| = 0\}$ является инвариантным множеством для системы (2.7), и движения на этом множестве описываются системой (2.8). Отсюда сразу вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. [16] *Если правые части системы (2.7) удовлетворяют условиям а)–г) и $\bar{Y}(t, x, z) \equiv 0$, то x -неустойчивость нулевого решения $x = 0$, $z = 0$ системы (2.8) влечет x -неустойчивость нулевого решения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ системы (2.7).*

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нулевое решение системы (2.8) асимптотически x -устойчиво.

Т е о р е м а 3.2. Пусть правые части системы (2.7) удовлетворяют в области Γ_3 условиям а)–г), условиям [17], обеспечивающим существование предельных систем, $\bar{Y}(t, x, z) \equiv 0$ и пусть все решения равномерно z -ограничены в Γ_3 . Тогда, если нулевое решение $x = 0, z = 0$ системы (2.8) равномерно асимптотически x -устойчиво в целом по z , то нулевое решение $x = 0, y = 0, z = 0$ системы (2.7) равномерно асимптотически (x, y) -устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия б) следует [18], что существует квадратичная форма $V_2 = V_2(t, y)$ переменных y , удовлетворяющая условиям

$$l_1 \|y\|^2 \leq V_2(t, y) \leq l_2 \|y\|^2, \quad \|\text{grad}_y V_2(t, y)\| \leq l_3 \|y\|, \quad \dot{V} \Big|_{\dot{y}=P(t)y} \leq -l_4 \|y\|^2. \quad (3.1)$$

Учитывая условия в) и (3.1) для производной \dot{V}_2 функции $V_2(t, y)$, в силу системы (2.7) получим в области Γ_3 оценку

$$\dot{V}_2 \leq -W = -\gamma V_2, \quad (3.2)$$

где $\gamma = l_4 l_2^{-1} - l_3 l_1^{-1} r_2 > 0$ при достаточно малом $r_2 > 0$. Для знакопостоянных функций $V_2(t, y) \geq 0$ и $W(t, y) \geq 0$ находим множества $M = V_2^{-1}(\infty, 0) = \{(x, y, z) : \|y\| = 0\}$, $M_{(x,y)} = \{(x, y, z) : \|x\| = \|y\| = 0\}$, $W^{-1}(\infty, 0) = \{(x, y, z) : \|y\| = 0\} = M$. На множестве M система (2.7) принимает вид (2.8), поэтому из условий теоремы следует, что множество $M_{(x,y)}$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества M , функция $V_2(t, y)$ допускает бесконечно малый высший предел, а множество $W^{-1}(\infty, 0) \setminus M = M \setminus M = \emptyset$ и поэтому не содержит целых траекторий предельных к (2.7) систем.

Таким образом, выполнены все условия Теоремы 3 из [19], на основании которой нулевое решение системы (2.7) равномерно асимптотически (x, y) -устойчиво.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим трехмерную систему в критическом случае одного нулевого корня

$$\dot{x} = -x^3 + 4yz, \quad \dot{y} = -y + y^2xz, \quad \dot{z} = z(1 - z^2). \quad (3.3)$$

Покажем, что нулевое решение асимптотически (x, y) -устойчиво. Легко проверить, что для системы (3.3) выполнены все условия Теоремы 2.2, на основании которой и получаем требуемое. Отметим, что Теорема 4 из [1] здесь неприменима, поскольку функция $V = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2$ не является для системы (3.3) функцией Ляпунова в области $\{|x| + |y| < h, |z| \leq 1\}$, сколь бы малым ни выбиралось число $h > 0$. Действительно, на кривой $y = x^3$ получаем, что производная $\dot{V} = 2x^6 - 4x^6z - x^{10}z$ при $z > \frac{1}{2}$ и достаточно малых $|x| > 0$ принимает значения одного знака с функцией V .

Рассмотрим теперь случай, когда нулевое решение системы (2.8) является x -устойчивым, но не асимптотически.

Т е о р е м а 3.3. Пусть правые части системы (2.7) удовлетворяют в области Γ_3 условиям а)–г) и $\bar{Y}(t, x, z) \equiv 0$. Тогда если нулевое решение системы (2.7) x -устойчиво, причем это установлено на основании теоремы В. В. Румянцева [20] с помощью функции Ляпунова $V_1 = V_1(t, x, z)$, удовлетворяющей в области Γ_3 условию

$$\|\text{grad}_x V_1(t, x, z)\| + \|\text{grad}_z V_1(t, x, z)\| \leq l < +\infty, \quad (3.4)$$

то нулевое решение системы (2.7) (x, y) -устойчиво.

Доказательство. Следуя [21], построим двухкомпонентную вектор-функцию Ляпунова (ВФЛ). В качестве первой компоненты ВФЛ возьмем функцию $V_1(t, x, z)$, указанную в условиях Теоремы 2.3, а в качестве второй компоненты – квадратичную форму $V_2(t, y)$, построенную при доказательстве Теоремы 2.2. Для производных \dot{V}_1 и \dot{V}_2 в силу системы (2.7) на основании условий б), (3.1), (3.2), (3.4), получаем в области Γ_3 оценки

$$\dot{V}_1 \leq d\sqrt{V_2}, \quad \dot{V}_2 \leq -\gamma\sqrt{V_2}, \tag{3.5}$$

где $d = 2lc_1l_1^{-1/2} > 0$, а $\gamma > 0$ – то же, что и в (3.2). Соответствующая (3.5) система сравнения имеет вид

$$\dot{u}_1 = d\sqrt{u_2}, \quad \dot{u}_2 = -\gamma u_2. \tag{3.6}$$

Легко проверить [21], что правые части системы (3.6) удовлетворяют условию Важевского, а нулевое решение этой системы равномерно устойчиво.

Таким образом, выполнены все условия теоремы об устойчивости по части переменных с ВФЛ ([15], Теорема 3), на основании которой нулевое решение системы (2.7) будет (x, y) –устойчиво.

Рассмотрим теперь пример, являющийся некоторым обобщением примера 1 из [16].

Пример 3.2. Рассмотрим механическую систему с $n + m + p$ обобщенными координатами $(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_m, Q_{m+1}, \dots, Q_{m+p})$, $\tilde{Q} = \text{col}(Q_1, \dots, Q_m)$, кинетической энергией $T = (q, \tilde{Q}, \dot{q}, \dot{Q}) = T^{(1)}(q, \tilde{Q}, \dot{q}) + T^{(2)}(\tilde{Q}, \dot{Q})$ ($T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ – определено-положительные квадратичные формы \dot{q} и \dot{Q} соответственно), потенциальной энергией $U(q, \tilde{Q}) = U_2^{(1)}(q) + U^{(2)}(\tilde{Q})$, где $U_2^{(1)}(q)$ – определено-положительная квадратичная форма, а $U^{(2)}(\tilde{Q})$ – некоторая аналитическая функция, которая, в частности, может быть однородной формой второй или более высокой степени.

Предположим, что на систему действуют гироскопические силы $g_i = g_i(\dot{q})$, $i = \overline{1, n}$ и $G_j = G_j(\dot{Q})$, $j = \overline{1, m+p}$, диссипативные силы $d_i = d_i(\dot{q})$, $i = \overline{1, n}$ и $D_j = D_j(\dot{Q})$, $j = \overline{1, m+p}$, а также некоторые дополнительные силы $F_i^{(1)} = F_i^{(1)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})$, $i = \overline{1, n}$ и $F_j^{(2)} = F_j^{(2)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})$, $i = \overline{1, m+p}$, т.е. уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + g_i + d_i + F_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Q_j} = -\frac{\partial U^{(2)}}{\partial Q_j} + G_j + D_j + F_j^{(2)}, \quad j = \overline{1, m+p}, \tag{3.8}$$

В этих уравнениях

$$g_i = \sum_{s=1}^n g_{is} \dot{q}_s, \quad g_{is} = -g_{si}, \quad i = \overline{1, n}, \quad G_i = \sum_{s=1}^{m+p} G_{js} \dot{Q}_s, \quad G_{js} = -G_{sj}, \quad j = \overline{1, m+p},$$

$$d_i = -\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad D_j(\dot{Q}) = -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \dot{Q}_j}, \quad j = \overline{1, m+p},$$

где $f^{(1)} = f^{(1)}(\dot{q})$ – определено-положительная квадратичная форма, $f^{(2)} = f^{(2)}(\dot{Q})$ – неотрицательная квадратичная форма, дополнительные силы $F^{(1)} = F^{(1)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})$ и $F^{(2)} = F^{(2)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})$ удовлетворяют в области

$$\Gamma_4 = \{(q, \dot{q}, Q, \dot{Q}) : \|q\| + \|\dot{q}\| + \|\tilde{Q}\| + \|\dot{Q}\| \leq H_4 < +\infty\}$$

условиям

$$\begin{aligned} \|F^{(1)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})\| &\leq a_1 (\|q\| + \|\dot{q}\|)^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a_1 > 0, \\ \|F^{(2)}(q, \dot{q}, Q, \dot{Q})\| &\leq a_2 (\|q\| + \|\dot{q}\|), \quad a_2 > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что если $p = 0$, $Q = \tilde{Q}$, $T^{(2)}$ не зависит от \tilde{Q} , $U^{(2)}(Q)$ квадратичная форма, $f^{(2)}(\dot{Q}) \equiv 0$, функции $F_j^{(2)}$ не содержат линейных по q, \dot{q} членов, то уравнения (3.7), (3.8) переходят в рассмотренные в примере 1 из [16]. В системе (3.7), (3.8) переменные Q_{m+1}, \dots, Q_{m+p} выступают в роли неконтролируемых переменных z , устойчивость относительно которых не анализируется, переменные q, \dot{q} играют роль некритических переменных y , а переменные $\tilde{Q}, \dot{\tilde{Q}}$ являются критическими переменными x .

Уравнения линейного приближения для (3.7) записываются так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^n g_{is} \dot{q}_s - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}, \quad T_0^{(1)} = T_0^{(1)}(0, 0, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}$$

и имеют экспоненциально устойчивое нулевое решение $q = \dot{q} = 0$ [16].

Полагая в (3.8) $q = \dot{q} = 0$, получим систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Q_j} = -\frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial Q_i} + G_j + D_j, \quad j = \overline{1, m+p}. \tag{3.9}$$

Взяв в качестве функции Ляпунова для системы (3.9) полную энергию $V = T^{(2)} + U^{(2)}$, получим [6] для производной в силу системы следующее выражение:

$$\dot{V} = -2f^{(2)}(\dot{Q}) \leq 0. \tag{3.10}$$

При этом, очевидно, что в области Γ_4 все частные производные $\frac{\partial V}{\partial Q_j}, \frac{\partial V}{\partial \dot{Q}_j}$ ограничены. На основании Теоремы 2.3 получаем, что если функция $U^{(2)}(\tilde{Q})$ определено-положительная, то состояние равновесия $q = \dot{q} = 0, Q = \tilde{Q} = 0$ системы (3.7), (3.8) устойчиво по $q, \dot{q}, \tilde{Q}, \dot{\tilde{Q}}$.

Далее будем считать, что квадратичная форма $f^{(2)}(\dot{Q})$ положительно определена и, следовательно, производная в силу системы (3.10) – отрицательно определенная форма относительно скоростей \dot{Q} . Предположим также, что из каких-либо соображений известно, что координаты Q_{m+1}, \dots, Q_{m+p} на всех возмущенных движениях ограничены. Последнее условие выполняется, например, в том случае, когда эти координаты угловые по модулю 2π .

Если функция $U^{(2)}(\tilde{Q})$ определено-положительна и в множестве $U^{(2)}(\tilde{Q}) > 0$ нет состояний равновесия системы (3.9), то, как показано в [6], решение $Q = \dot{Q} = 0$ системы (3.9) будет равномерно асимптотически устойчиво по \tilde{Q} и $\dot{\tilde{Q}}$, причем в целом по Q_{m+1}, \dots, Q_{m+p} , поскольку функция $V = T^{(2)} + U^{(2)}$ допускает в области Γ_4 бесконечно малый высший предел по \tilde{Q} и $\dot{\tilde{Q}}$. Применяя теперь теорему 2.2, получаем, что состояние равновесия $q = \dot{q} = 0, Q = \tilde{Q} = 0$ системы (3.7), (3.8) равномерно асимптотически устойчиво по $q, \dot{q}, \tilde{Q}, \dot{\tilde{Q}}$.

Если же функция $U^{(2)}(\tilde{Q})$ в любой окрестности точки $\tilde{Q} = 0$ может принимать отрицательные значения, а в множестве $U^{(2)}(\tilde{Q}) < 0$ нет состояний равновесия системы (3.9), то из (3.10) на основании Теоремы 3 из [6] следует, что решение $Q = \dot{Q} = 0$ системы (3.9) неустойчиво по переменным \tilde{Q} и $\dot{\tilde{Q}}$, а тогда по Теореме 2.1 положение

равновесия $q = \dot{q} = 0$, $Q = \dot{Q} = 0$ системы (3.7), (3.8) также неустойчиво по этим переменным \tilde{Q} и \dot{Q} .

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $\bar{Y}(t, x, z) \neq 0$. Для этого случая будут указаны условия, при выполнении которых из равномерной асимптотической x -устойчивости нулевого решения системы (2.8) будет следовать равномерная асимптотическая (x, y) -устойчивость нулевого решения системы (2.7). Неустойчивость и неасимптотическая устойчивость здесь не рассматриваются.

4. Случай, когда $\bar{Y}(t, x, z) \neq 0$

Далее будем считать, что в области Γ_3 выполняется условие

$$\|\bar{Y}(t, x, z)\| < b(\|x\|), \quad (4.1)$$

где $b(\cdot) \in \mathcal{K}$ — функция класса Хана. Предположим, что нулевое решение системы (2.8) равномерно асимптотически x -устойчиво, причем это установлено на основании Теоремы 19 из [15] с помощью функции Ляпунова $V_1 = V_1(t, x, z)$, удовлетворяющей в области Γ_3 условиям (3.4) и

$$a(\|x\|) \leq V_1(t, x, z) \leq a_1(\|x\| + \|z\|), \quad \dot{V}_1 \Big|_{(2.8)} \leq -c(V_1), \quad (4.2)$$

где $a(\cdot)$, $a_1(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — функции класса Хана. Тогда для этой функции V_1 и функции $V_2 = V_2(t, y)$, удовлетворяющей условиям (3.1), на основании б), в), (3.1), (3.4) и (4.2) получим в области Γ_3 оценки производных \dot{V}_1 и \dot{V}_2 в силу системы (2.7)

$$\dot{V}_1 \leq -c_1(V_1) + d\sqrt{V_2}, \quad \dot{V}_2 \leq -\gamma V_2 + b_1(V_1)\sqrt{V_2}, \quad (4.3)$$

где $\gamma > 0$ и $d > 0$ — те же, что в (3.5), $b_1(r) = l_3 l_1^{-1/2} b(a^{-1}(r)) \in \mathcal{K}$ — функция класса Хана, в которой $a^{-1}(r) \in \mathcal{K}$ есть обратная функция для $a(r) \in \mathcal{K}$. Соответствующая (4.3) система сравнения имеет вид

$$\dot{u}_1 = -c_1(u_1) + d\sqrt{u_2}, \quad \dot{u}_2 = -\gamma u_2 + b_1(u_1)\sqrt{u_2}. \quad (4.4)$$

Правые части (4.4) удовлетворяют условию Важевского в области $(u_1 \geq 0, u_2 \geq 0)$. Из Теоремы 3.1 [22] следует, что для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.4) необходимо и достаточно, чтобы в области $G(r) = \{(u_1, u_2) : 0 < u_i < r\}$, где $r > 0$ — сколь угодно мало, была совместна система неравенств

$$-c_1(u_1) + d\sqrt{u_2} < 0, \quad -\gamma u_2 + b_1(u_1)\sqrt{u_2} < 0. \quad (4.5)$$

Применяя теперь Теорему 23 из [15] об устойчивости при наличии вектор-функции Ляпунова, приходим следующему результату.

Т е о р е м а 4.1. Пусть правые части системы (2.7) удовлетворяют условиям а)–г) и (4.1), а для системы (2.8) найдена функция Ляпунова $V_1 = V_1(t, x, z)$, удовлетворяющая условиям (3.4) и (4.2). Тогда если система неравенств (4.5) при любом $r > 0$ совместна в области $G(r)$, то нулевое решение системы (2.7) равномерно асимптотически (x, y) -устойчиво.

З а м е ч а н и е 4.1. Как установлено в [23], для широкого класса систем существование функции $V_1(t, x, z)$, удовлетворяющей условиям (3.4) и (4.2), вытекает из равномерной асимптотической x -устойчивости нулевого решения системы (2.7).

З а м е ч а н и е 4.2. Если функции $c(r)$ и $b_1(r)$ являются степенными $c(r) = k_1 r^{\alpha_1}$, $b_1(r) = k_2 r^{\alpha_2}$, где k_i, α_i — положительные постоянные, то система неравенств (4.5) будет совместна, если $\alpha_2 > \alpha_1$.

Вернемся к системе (2.1). Пусть характеристическое уравнение $\det(P - \lambda E) = 0$ имеет $k \geq 1$ нулевых корней, которым соответствуют простые элементарные делители, и $n \geq 1$ корней с отрицательными вещественными частями. Тогда уравнения движения приводятся к виду (2.4), где разложения функций $\bar{X}_i(x, z)$ в ряды по степеням x_s начинаются с членов не ниже второй степени, а коэффициентами этих разложений являются голоморфные функции переменных z_j .

Предположим, что такие разложения функций $\bar{X}_i(x, z)$ начинаются с однородных форм $\bar{X}_i^{(m)}(x)$ одной и той же нечетной степени $m \geq 3$, коэффициенты которых не зависят от z_j . Рассмотрим систему уравнений, правые части которой — формы $\bar{X}_i^{(m)}(x)$

$$\dot{x} = \bar{X}^{(m)}(x) \quad (4.6)$$

Т е о р е м а 4.2. Пусть система (2.1) в критическом случае k нулевых корней с простыми элементарными делителями приведена к виду (2.4), где разложения функций $\bar{X}_i(x, z)$ в ряды по степеням x_s начинаются с однородных форм $\bar{X}_i^{(m)}(x)$ одной и той же нечетной степени $m \geq 3$, коэффициенты которых не зависят от z_j . Тогда если нулевое решение однородной системы (4.6) асимптотически устойчиво, а разложения функций $\bar{Y}_j(x, z)$ в ряды по степеням x_s начинаются с членов не ниже $m+1$ -й степени, то нулевое решение системы (2.4) равномерно асимптотически (x, y) -устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как установлено в [24], если нулевое решение системы (4.6) асимптотически устойчиво, то оно будет $t^{-\alpha}$ — устойчивым, т. е. все решения $x(t)$ системы (4.6) удовлетворяют оценкам $\|x(t)\| \leq \beta_1 \|x_0\| (1 + \beta_2 t)^{-\alpha}$, где β_1, β_2, α — положительные числа. Тогда, как показано в [10, с. 107], существует непрерывно дифференцируемая функция $V_1(x)$, удовлетворяющая оценкам

$$A_1 \|x\|^a \leq V_1(x) \leq A_2 \|x\|^a, \quad \|\text{grad}_x V_1(x)\| \leq A_3 \|x\|^{a-1}, \quad \dot{V}_1 \Big|_{(4.6)} \leq -A_4 \|x\|^{a-1+m}.$$

Здесь A_i и a — положительные числа, причем $a > 1$.

Из условий Теоремы 3.2 следует, что функцию $\bar{X}(x, z)$ можно записать в виде $\bar{X}(x, z) = \bar{X}^{(m)}(x) + \tilde{X}(x, z)$, при этом $\tilde{X}(x, z)$ и $\bar{Y}(x, z)$ будут удовлетворять в области $\Gamma_5 = \{(x, y, z) : \|x\| + \|y\| < H_5, \|z\| \leq H_2 < +\infty\}$ при достаточно малом $H_5 > 0$ условиям $\|\tilde{X}(x, z)\| \leq d_1 \|x\|^{m+1}$, $\|\bar{Y}(x, z)\| \leq d_2 \|x\|^{m+1}$, где d_1 и d_2 — положительные числа.

Далее, из условия $\text{Re } \lambda_j(P_{22}) < 0$ следует существование квадратичной формы $V_2(y)$, удовлетворяющей оценкам (3.1). Оставшаяся часть доказательства является простым повторением доказательства Теоремы 3.1 с учетом замечания 3.2 к ней.

Теперь рассмотрим тот случай, когда в разложениях функций $\bar{X}_i(x, z)$ выделены несколько компонент с разными порядками однородности. Пусть вектор критических переменных x представлен двумя компонентами $x = \text{col}(u, v)$, и система (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Phi_1^{(\mu_1)}(u) + \Phi_{12}(u, v, y, z) + \Psi_1(u, v, y, z), \\ \dot{v} &= \Phi_2^{(\mu_2)}(v) + \Phi_{21}(u, v, y, z) + \Psi_2(u, v, y, z), \\ \dot{y} &= P_{22}y + Y_1(u, z) + Y_2(v, z) + \bar{Y}(x, y, z), \quad \dot{z} = \bar{Z}(x, z) + \bar{Z}(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\Phi_1^{(\mu_1)}(u)$ и $\Phi_2^{(\mu_2)}(v)$ однородные вектор-функции порядков μ_1 и μ_2 соответственно, где μ_1 и μ_2 — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями. Вектор-функции, присутствующие в правых частях системы (4.7), будем считать удовлетворяющими в области $\Gamma_6 = \{(u, v, y, z) : \|u\| + \|v\| + \|y\| < H_6 < +\infty\}$ оценкам

$$\begin{aligned} \|\Phi_{12}(u, v, y, z)\| &\leq k_{12}\|v\|^{\alpha_1}, \quad \|\Phi_{21}(u, v, y, z)\| \leq k_{21}\|u\|^{\alpha_2}, \\ \|\Psi_1(u, v, y, z)\| &\leq q_1\|y\|^{\beta_1}, \quad \|\Psi_2(u, v, y, z)\| \leq q_2\|y\|^{\beta_2}, \\ \|Y_1(u, v, y, z)\| &\leq p_1\|u\|^{\gamma_1}, \quad \|Y_2(u, v, y, z)\| \leq p_2\|u\|^{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Т е о р е м а 4.3. Пусть для системы (4.7) выполнены условия:

1. Все собственные значения матрицы P_{22} имеют отрицательные вещественные части.
2. Нулевые решения однородных систем $\dot{u} = \Phi_1^{(\mu_1)}(u)$ и $\dot{v} = \Phi_2^{(\mu_2)}(v)$ асимптотически устойчивы.
3. Справедливы оценки (4.8), причем показатели степеней удовлетворяют неравенствам $\mu_1 < \beta_1\gamma_1$, $\mu_2 < \beta_2\gamma_2$, $\mu_1\mu_2 < \min\{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2\gamma_1, \alpha_2\beta_1\gamma_2\}$.

Тогда нулевое решение системы (4.7) асимптотически (u, v, y) — устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия 1 следует существование квадратичной формы $V_3(y)$, для которой выполняются оценки, аналогичные оценкам (3.1). Из условия 2 так же, как в доказательстве Теоремы 3.2, выводится существование однородных функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам

$$A_1\|u\|^a \leq V_1(u) \leq A_2\|u\|^a, \quad \|\text{grad}V_1(u)\| \leq A_3\|u\|^{a-1}, \quad \dot{V}_1 \Big|_{\dot{u}=\Phi_1^{(\mu_1)}(u)} \leq -A_4\|u\|^{a-1+\mu_1},$$

$$B_1\|v\|^b \leq V_2(v) \leq B_2\|v\|^b, \quad \|\text{grad}V_2(v)\| \leq B_3\|v\|^{b-1}, \quad \dot{V}_2 \Big|_{\dot{v}=\Phi_2^{(\mu_2)}(v)} \leq -B_4\|v\|^{b-1+\mu_2},$$

Используя оценки (4.8), для производных в силу системы (4.7) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -A_4A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}}V_1^{\frac{a-1+\mu_1}{a}} + A_3A_1^{-\frac{a-1}{a}}V_1^{\frac{a-1}{a}} \left(k_{12}B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}}V_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1l_1^{-\frac{\beta_1}{2}}V_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right), \\ \dot{V}_2 &\leq -B_4B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}}V_2^{\frac{b-1+\mu_2}{b}} + B_3B_1^{-\frac{b-1}{b}}V_2^{\frac{b-1}{b}} \left(k_{21}A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}}V_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2l_1^{-\frac{\beta_2}{2}}V_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right), \end{aligned}$$

$$\dot{V}_3 \leq -l_4 l_2^{-1} V_3 + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} V_3^{-\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} V_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} V_2^{\frac{\beta_2}{b}} \right).$$

Соответствующая система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -A_4 A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}} U_1^{\frac{a-1+\mu_1}{a}} + A_3 A_1^{-\frac{a-1}{a}} U_1^{\frac{a-1}{a}} \left(k_{12} B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}} U_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1 l_1^{-\frac{\beta_1}{2}} U_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right), \\ \dot{U}_2 &= -B_4 B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}} U_2^{\frac{b-1+\mu_2}{b}} + B_3 B_1^{-\frac{b-1}{b}} U_2^{\frac{b-1}{b}} \left(k_{21} A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} U_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2 l_1^{-\frac{\beta_2}{2}} U_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right), \\ \dot{U}_3 &= -l_4 l_2^{-1} U_3 + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} U_3^{-\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} U_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} U_2^{\frac{\beta_2}{b}} \right). \end{aligned}$$

Из Теоремы 3.1 [22] следует, что для равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы сравнения необходимо и достаточно, чтобы в области $G(r) = \{(U_1, U_2, U_3) : 0 < U_i < r\}$, где $r > 0$ – сколь угодно мало, была совместна система неравенств

$$\begin{aligned} -A_4 A_2^{-\frac{a-1+\mu_1}{a}} U_1^{\frac{\mu_1}{a}} + A_3 A_1^{-\frac{a-1}{a}} \left(k_{12} B_1^{-\frac{\alpha_1}{b}} U_2^{-\frac{\alpha_1}{b}} + q_1 l_1^{-\frac{\beta_1}{2}} U_3^{-\frac{\beta_1}{2}} \right) &< 0, \\ -B_4 B_2^{-\frac{b-1+\mu_2}{b}} U_2^{\frac{\mu_2}{b}} + B_3 B_1^{-\frac{b-1}{b}} \left(k_{21} A_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} U_1^{-\frac{\alpha_2}{a}} + q_2 l_1^{-\frac{\beta_2}{2}} U_3^{-\frac{\beta_2}{2}} \right) &< 0, \\ -l_4 l_2^{-1} U_3^{\frac{1}{2}} + l_3 l_1^{-\frac{1}{2}} U_3^{\frac{1}{2}} \left(p_1 A_1^{-\frac{\gamma_1}{a}} U_1^{\frac{\alpha_1}{a}} + p_2 B_1^{-\frac{\gamma_2}{b}} U_2^{\frac{\beta_2}{b}} \right) &< 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Найдем условия совместности этой системы неравенств на кривой, заданной параметрически следующими равенствами $U_1 = \tau^{am_1}$, $U_2 = \tau^{bm_2}$, $U_3 = \tau^{2m_3}$. Здесь $\tau > 0$ – параметр, а $m_i > 0$ – положительные числа.

Система неравенств (4.9) будет совместна на параметрически заданной кривой при всех достаточно малых значениях параметра $\tau > 0$, если после подстановки мы получим в первых отрицательных слагаемых наименьшие степени τ . Таким образом, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \mu_1 m_1 &< \min\{\alpha_1 m_2, \beta_1 m_3\}, \quad \mu_2 m_2 < \min\{\alpha_2 m_1, \beta_2 m_3\}, \\ m_3 &< \min\{\gamma_1 m_1, \gamma_2 m_2\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из условия 3 следует, что система неравенств (4.10) имеет положительное решение $m_i > 0, i = 1, 2, 3$. Значит, нулевое решение системы сравнения асимптотически устойчиво, а тогда, по Теореме 23 из [15], нулевое решение системы (4.7) асимптотически (u, v, y) –устойчиво.

Пример 4.1. Рассмотрим систему из четырех скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u^3 + v^5 + y^2 \cos^2(z), \quad \dot{v} = -v^3 + Gu^2 + y^2 \sin^2(z), \\ \dot{y} &= -y + Qu^2 + v^3 + y^2 \cos^2(z), \quad \dot{z} = Z(u, v, y, z). \end{aligned}$$

Из Теоремы 3.3 следует, что нулевое решение этой системы (u, v, y) –устойчиво. В этом примере в уравнениях как для критических, так и для некритических переменных присутствуют слагаемые второго порядка с произвольными коэффициентами G, Q , не являющиеся малыми по сравнению с правыми частями однородных третьего порядка асимптотически устойчивых подсистем $\dot{u} = -u^3, \dot{v} = -v^3$. Теорема 3.2 в данном случае неприменима.

Пример 4.2. Из теоремы 6 следует, что нулевое решение системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u^3 + vg_1(u, v, y) + yg_2(u, v, y), & \dot{v} &= -v^3 + y^2g_3(u, v, z), \\ \dot{y} &= -y + v^2g_4(u, v, y) \end{aligned}$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову, каковы бы ни были непрерывные функции $g_s(u, v, y)$. В этом примере характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет двукратный нулевой корень, которому, в зависимости от свойств функции $g_1(u, v, y)$, могут соответствовать как один кратный, так и два простых элементарных делителя. Поэтому исследование устойчивости нулевого решения с помощью методов, разработанных для критического случая двух нулевых корней [8, 12], обязательно требует привлечения дополнительной информации о функциях $g_s(u, v, y)$.

5. Заключение

В данной статье предложен аналог принципа сведения Ляпунова для задачи частичной устойчивости, и на основе использования знакопостоянных скалярных и векторных функций Ляпунова получены достаточные признаки устойчивости относительно части переменных в критических случаях. Результаты данной статьи, как и всех упомянутых во введении работ, не являются исчерпывающими, поэтому задача анализа частичной устойчивости в критических случаях сохраняет актуальность и представляет интерес для приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокопьев В. П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 422–426.
2. Щенников В. Н. О частичной устойчивости в критическом случае $2k$ чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики: межвуз. сб. Горький: Горьковский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 1985. С. 46–50.
3. Шаманаев П. А. Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 3. С. 374–390. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306>.
4. Шаманаев П. А. О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 280–293. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14>.
5. Карасев А. А., Ламоткин А. Е. Об устойчивости по части переменных в критическом случае $2n$ нулевых корней с $2n$ групп решений // Механика. Исследования и инновации (Гомель). 2017. Вып. 10. С. 75–79.

6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 659–665.
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М; Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.
8. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.
9. Веретенников В. Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 320 с.
10. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л. ЛГУ. 1957. 241 с.
11. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л. Машиностроение(Ленингр. отд-ние), 1974. 336 с.
12. Каменков Г. В. Избранные труды в 2 томах. Т. 1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. М.: Наука. 1971. 260 с.
13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 532 с.
14. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1297–1324.
15. Озиранер А. С., Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36, вып. 2. С. 364–384.
16. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критических случаях // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 415–421.
17. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 23, Issue 2. P. 216–223. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(77\)90127-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90127-9)
18. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. Физматгиз. 1959. 211 с.
19. Косов А. А. К задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука. 1988. С. 185–194.
20. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. Химия. Астрономия. 1957. № 4. С. 9–16.
21. Матросова Н. И. Вектор-функции Ляпунова в изучении особенного критического случая нулевых корней / Метод функций Ляпунова и его приложения: сборник научных трудов. Новосибирск. Наука. 1984. С. 53–64.
22. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, вып. 8. С. 1392–1407.

23. Озиранер А. С. К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестник МГУ. Серия Математика и механика. 1971. № 1. С. 92–100.
24. Ахметгалеев И. И. Устойчивость систем с однородными отображениями / Метод функций Ляпунова и его приложения: сборник научных трудов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 126–137.

*Поступила 23.10.2024; доработана после рецензирования 06.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. P. Prokop'ev, "On stability of motion with respect to a part of variables in the critical case of a single zero root", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39**:3 (1975), 399-403.
2. V. N. Shchennikov, "On partial stability in the critical case of $2k$ purely imaginary roots", *Differential and integral equations: Methods of topological dynamics*, Gor'kiy state university named after N. I. Lobachevsky, Gor'kiy, 1985, 46-50 (In Russ.).
3. P. A. Shamanaev, "On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19**:3 (2023), 374-390. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306> (In Russ.).
4. P. A. Shamanaev, "On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **26**:3 (2024), 280-293. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14> (In Russ.).
5. A. A. Karasev, A. E. Lamotkin, "On sustainability by the part of variables in the critical case of $2n$ zero roots with $2n$ groups of decisions", *Mechanics. Research and Innovations. Gomel.*, 2017, no. 10, 75-79. (In Russ.).
6. A. S. Oziraner, "On asymptotic stability and instability relative to a part of variables", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.*, **37**:4 (1973), 623-629.
7. A. M. Liapunov, "The general problem of the stability of motion", *International Journal of Control*, **55**:3 (1992), 531–534.
8. A. M. Lyapunov, *Study of one of the special cases of the problem of stability of motion*, Leningrad. State University Press, Leningrad, 1963 (In Russ.), 116 p.
9. V. G. Veretennikov, *Stability and oscillations of nonlinear systems.*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1984. (In Russ.), 320 p.
10. V. I. Zubov, *Methods of A. M. Lyapunov and their application. Transl. prep. under the auspices of the United States Atomic energy commis. Ed. for this Engl. ed. by L. F. Boron.*, P. Noordhoff, Groningen, 1964, 263 p.

11. N. N. Krasovskii, *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Translated by J.L. Brenner.*, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1963, 188 p.
12. V. I. Zubov, "Mathematical methods for the study of automatic control systems", 1962, 328 p.
13. G. V. Kamenkov, *Selected works. Vol. 1. Stability of motion. Oscillations. Aerodynamics.*, Science, Moscow, 1971 (In Russ.), 260 p.
14. I. G. Malkin, *Theory of stability of motion*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1966 (In Russ.), 532 p.
15. V. A. Pliss, "Reduction principle in the theory of stability of motion", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **28**:6. (1964), 1297–1324 (In Russ.).
16. A. S. Oziraner, "On the stability of motion in critical cases", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39**:3 (1975), 392-399..
17. Z. Artstein, "Topological dynamics of an ordinary differential equations", *Journal of Differential Equations*, **23**:2 (1977), 216-223. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(77\)90127-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90127-9).
18. A. A. Kosov, "On the problem of stability of motion with respect to a part of variables", *Problems of qualitative theory of differential equations*, 1988, 185 - 194 (In Russ.).
19. V. V. Rumyantsev, "On motion stability with respect to a part of variables", 1957, no. 4, 9–16 (In Russ.).
20. N. I. Matrosova, "Lyapunov vector-functions in the study of the special critical case of zero roots", *Method of Lyapunov functions and its applications.*, Nauka, Novosibirsk, 1984, 53–64 (In Russ.).
21. A. S. Oziraner, V. V. Rumyantsev, "Method of Liapunov functions in the problem stability for motion with respect to a part of the variables", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **36**:2 (1972.), 364–384.
22. A. A. Martynyuk, A. Yu. Obolenskij, "Stability of solutions of autonomous Wazewski systems", *Differential Equations*, **16**:8 (1980), 1392–1407.
23. A. S. Oziraner, "On the question about the stability of motion with respect to a part of variables", *Moscow University Bulletin. Series Mathematics and Mechanics*, 1971, no. 1, 92-100 (In Russ.).
24. I. I. Akhmetgaleev, "Stability of systems with homogeneous mappings", *Method of Lyapunov functions and its applications*, Nauka, Novosibirsk, 1984, 126-137 (In Russ.).

Submitted 23.10.2024; Revised 06.11.2024; Accepted 27.11.2024

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.554.31

К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.

ННГУ им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Для градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли над совершенным полем характеристики два, соответствующих флагу пространства переменных, доказывается выполнение условия теоремы вложения фильтрованных деформаций. Дается описание группы одномерных гомологий первого члена стандартной фильтрации градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли. В случае, когда число переменных $n \neq 4$, получена оценка кратности стандартного модуля над ортогональной алгеброй Ли в композиционном ряде группы гомологий относительно естественной структуры модуля над нулевым членом градуировки. Для $n = 4$ оценка справедлива, если множество переменных, согласованных с флагом, содержит переменную высоты больше 1, которая неизотропна относительно неальтернирующей скобки Пуассона, соответствующей неальтернирующей гамильтоновой форме. При вычислении группы гомологий используется канонический вид неальтернирующей гамильтоновой формы, соответствующий ее классу эквивалентности. Найдены мономы алгебры разделенных степеней, входящие в коммутант первого члена фильтрации. При вычислении кратности вхождения стандартного модуля над ортогональной алгеброй Ли в композиционный ряд первого члена градуировки группы гомологий используется структура весов относительно специального максимального тора p -замыкания нулевого члена градуировки в алгебре Ли линейных операторов, действующих на отрицательной части градуировки неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли.

Ключевые слова: совершенное поле характеристики два, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, фильтрованные деформации, теорема вложения

Для цитирования: Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 392–403. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.392-403>

Об авторах:

Кондратьева Алиса Витальевна, ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7722-870X>, alisakondr@mail.ru

Кузнецов Михаил Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-301X>, kuznets-1349@yandex.ru

© Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.



MSC2020 17B50, 17B70

On an Embedding Theorem for Filtered Deformations of Graded Nonalternating Hamiltonian Lie Algebras

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov

National Research Lobachevsky State University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. It is proved that for graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras over a perfect field of characteristic two corresponding to a flag of the variables' space the condition of the embedding theorem of filtered deformations is fulfilled. The group of one-dimensional homology of the first member of the standard filtration for a graded non-alternating Hamiltonian Lie algebra is described. In the case when the number of variables $n \neq 4$, the estimate is obtained for multiplicity of the standard module over an orthogonal Lie algebra in a composition series of the homology group with respect to the natural structure of a module over the null-member of the grading. For $n = 4$ the estimate is true if a set of variables coordinated with the flag contains a variable of height greater than 1 which is non-isotropic with respect to Poisson bracket, corresponding to the non-alternating Hamiltonian form. The homology computation employs the normal shape of non-alternating Hamiltonian form, corresponding to its class of equivalence. The monomials of the divided power algebra included into the commutant of the filtration's first member are found. The multiplicity of the standard module over an orthogonal Lie algebra in a composition series of the first member of grading of the homology group is calculated. This calculation is based on the structure of weights with respect to a special maximal torus of the p -closure of the null-member of the standard grading in the Lie algebra of linear operators acting on the negative part of the grading of a non-alternating Hamiltonian Lie algebra.

Keywords: perfect field of characteristic two, non-alternating Hamiltonian Lie algebras, filtered deformations, embedding theorem

For citation: A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov. On an Embedding Theorem for Filtered Deformations of Graded Nonalternating Hamiltonian Lie Algebras. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 392–403. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.392-403>

About the authors:

Alisa V. Kondrateva, Assistant at the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7722-870X>, alisakondr@mail.ru

Michael I. Kuznetsov, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-301X>, kuznets-1349@yandex.ru

1. Введение

Классификация простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 3$ получена в начале этого века (подробное изложение см.

Кондратьева А. В., Кузнецов М. И.. К теореме вложения фильтрованных деформаций...

в [1–3]). Над полями малой характеристики $p = 2, 3$ проблема классификации остается открытой. В связи с этим представляет интерес описание фильтрованных деформаций известных градуированных алгебр Ли L , т. е. фильтрованных алгебр Ли \mathcal{L} , таких что ассоциированная градуированная алгебра $gr \mathcal{L}$ изоморфна L .

Пусть \mathcal{L} – фильтрованная алгебра Ли, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \dots$ с ассоциированной градуированной алгеброй $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots$. Согласно теореме вложения [4], для транзитивной алгебры Ли \mathcal{L} с отмеченной подалгеброй \mathcal{L}_0 существует минимальное вложение

$$\tau: (\mathcal{L}, \mathcal{L}_0) \rightarrow (W(\mathcal{F}'), W(\mathcal{F}')_{(0)})$$

Пусть $\tau: (L, L_{(0)}) \rightarrow (W(\mathcal{F}), W(\mathcal{F})_{(0)})$ – минимальное вложение транзитивной алгебры Ли $(L, L_{(0)})$, где $L_{(0)} = L_0 + L_1 + \dots$. Известно, что $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$. Достаточные условия совпадения флагов содержатся в теореме вложения фильтрованных деформаций, которая является частным случаем теоремы, доказанной в [4–5].

Теорема вложения фильтрованных деформаций. Пусть $L = L_{-1} + L_0 + \dots$ – транзитивная градуированная алгебра Ли. Если

- (i) L_{-1} – неприводимый L_0 -модуль,
- (ii) $H^1(L_0, L_{-1}) = 0$,
- (iii) $mtp(L_{-1}, H_1(L_{(1)})) \leq m(\mathcal{F}(L, L_{(0)})) - n$, $n = \dim L_{-1}$,

то для любой фильтрованной деформации \mathcal{L} алгебры Ли L справедливы утверждения:

- (a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$,
- (b) $Der \mathcal{L} \cong N_{\overline{W}(\mathcal{F})}(\tau(\mathcal{L}))$.

Здесь $\tau: \mathcal{L} \rightarrow W(\mathcal{F})$ – минимальное вложение, $\overline{W}(\mathcal{F})$ – p -замыкание $W(\mathcal{F})$ в $Der O(\mathcal{F})$, $mtp(Q, V)$ – кратность вхождения L_0 -модуля Q в композиционный ряд L_0 -модуля V .

В настоящей работе доказывается утверждение, анонсированное в [6] (предложение 2), о том, что для градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли L , $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots$ выполняется условие (iii) теоремы вложения фильтрованных деформаций при некоторых ограничениях, когда $n = 4$ (Предложение 2.3 настоящей работы). Доказательство основано на вычислении группы $H_1(L_{(1)})$ (предложения 2.1 и 2.2). Отметим, что А. И. Кострикин и И. Р. Шафаревич вычислили группу $H_1(L_{(1)})$ для алгебр Ли L картановских типов W, S, H в случае, когда $p > 3$ (см. [7], глава III, параграф 3, предложение 1).

Всюду в дальнейшем K – совершенное поле характеристики $p = 2$. Пусть $E = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – векторное пространство над K , $\mathcal{F}: E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_r \supseteq E_{r+1} = 0$ – флаг E . В работе используются стандартные обозначения для алгебр $O(\mathcal{F})$, $O(n, \overline{m})$, $W(\mathcal{F})$, $W(n, \overline{m})$ ([1, 7]).

Напомним определения, связанные с неальтернирующими гамильтоновыми алгебрами Ли [8–9]. Пусть $R = O(\mathcal{F})$, $W = W(\mathcal{F})$, $S(W)$ – симметрическая биалгебра R -модуля W с копроизведением $\Delta(D) = D \otimes 1 + 1 \otimes D$ для $D \in W$. Двойственная градуированная алгебра $S\Omega = \bigoplus_{i \geq 0} S\Omega^i$, $S\Omega^i = \text{Hom}_R(S^i(W), R)$, с умножением $\omega_r \omega_s = (\omega_r \otimes \omega_s) \circ \Delta$, $\omega_r \in S\Omega^r$, $\omega_s \in S\Omega^s$ является алгеброй симметрических дифференциальных форм

над R . На $S\Omega$ имеется естественная структура алгебры разделенных степеней. Если $\omega \in S\Omega^1$, то $\omega^{(k)} \in S\Omega^k$, $\omega^{(k)}(D_1, \dots, D_k) = \omega(D_1) \cdot \dots \cdot \omega(D_k)$. Внешний дифференциал $d: S\Omega^r \rightarrow S\Omega^{r+1}$ задается так же, как и для альтернирующих форм. Форма $\omega \in S\Omega^2$ называется неальтернирующей, если $\omega(D, D) \neq 0$ для некоторого $D \in W$.

Пусть $\omega \in S\Omega^2$,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i dx_j.$$

Здесь $dx_i^{(2)} = (dx_i)^{(2)}$. Положим $\omega_{ji} = \omega_{ij}$, $M = (\omega_{ij})$ – матрица формы ω . Форма называется невырожденной, если $\det M$ – обратимый элемент в R . Замкнутая невырожденная неальтернирующая форма $\omega \in S\Omega^2$ называется неальтернирующей гамильтоновой формой над R . Через $\omega(0)$ обозначим редукцию формы ω по модулю \mathfrak{m} , $\omega \equiv \omega(0) \pmod{\mathfrak{m}S\Omega^2}$, $a_{ij} = \omega_{ij}(0) \in K$,

$$\omega(0) = \sum_{i=1}^n a_{ii} dx_i^{(2)} + \sum_{i < j} a_{ij} dx_i dx_j.$$

Для неальтернирующей гамильтоновой формы ω форма $\omega(0)$ является невырожденной симметрической неальтернирующей билинейной формой на пространстве $V = \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle \cong E^*$. Обозначим $M^{-1} = (\bar{\omega}_{ij})$, $M^{-1}(0) = (\bar{a}_{ij})$. Матрица $M^{-1}(0)$ является матрицей двойственной формы $\bar{\omega}(0)$ на пространстве E в базисе $\{x_1, \dots, x_n\}$. Обозначим E^0 подпространство всех изотропных векторов E .

Пусть ω – неальтернирующая гамильтонова дифференциальная форма над R ,

$$\tilde{P}(\mathcal{F}, \omega) = \{D \in W(\mathcal{F}) \mid D\omega = 0\}.$$

Векторное поле $D \in \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$ однозначно определяется элементом $f \in \tilde{O}(\mathcal{F})/K$, где $\tilde{O}(\mathcal{F}) = O(\mathcal{F}) + \langle x_1^{(2^{m_1})}, \dots, x_n^{(2^{m_n})} \rangle$, $D = D_f = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{ij} \partial_i f \partial_j$. Здесь мы предполагаем, что базис $\{x_1, \dots, x_n\}$ согласован с флагом \mathcal{F} , $(m_1, \dots, m_n) = \bar{m}$ – набор высот неизвестных x_1, \dots, x_n .

Соответствие $f \mapsto D_f$ является изоморфизмом алгебры Ли $\tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$ и алгебры Ли $\tilde{O}(\mathcal{F})/K$ со скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{ij} \partial_i f \partial_j g$. Положим

$$P(\mathcal{F}, \omega) = \{D_f, f \in O(\mathcal{F})/K\},$$

$P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)}$ – коммутант алгебры Ли $P(\mathcal{F}, \omega)$. Алгебра Ли \mathcal{L} , такая что $P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$, называется неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли. Алгебра \mathcal{L} имеет стандартную фильтрацию, индуцированную стандартной фильтрацией алгебры Ли W . Неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли L является градуированной подалгеброй в $W(\mathcal{F})$ относительно стандартной градуировки, если $\omega = \omega(0)$ – форма с постоянными коэффициентами.

Для упрощения вычислений предполагаем, что неальтернирующая гамильтонова форма ω имеет канонический вид в терминах Теоремы 2 из [9].

Если $E_1 \not\subseteq E^0$, то матрица формы имеет вид

$$diag(M_0, \dots, M_0, M_1, \dots, M_1, 1_s),$$

где $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и 1_s – единичная матрица размерности s . Количество матриц M_0 , M_1 и размерность матрицы 1_s определяется инвариантами.

Если $E_1 \subset E^0$, то канонический вид один и зависит от четности числа переменных:

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 + \dots + dx_{n-2} dx_{n-1} + dx_n^{(2)}, & \text{ если } n = 2t + 1; \\ dx_1 dx_2 + \dots + dx_{n-1} dx_n + dx_n^{(2)}, & \text{ если } n = 2t. \end{aligned}$$

Далее для упрощения введем несколько определений.

Назовем пару (x_i, x_j) M_0 -парой, если в форму ω входит слагаемое $dx_i dx_j$ и нет других слагаемых с данными индексами. Здесь $|i - j| = 1$. Тогда $\{x_i, h\} = \partial_j h$ и $\{x_j, h\} = \partial_i h$.

Назовем пару (x_i, x_{i+1}) M_1 -парой, если в форму ω входят слагаемые $dx_i dx_{i+1} + dx_{i+1}^{(2)}$. Тогда $\{x_i, h\} = \partial_i h + \partial_{i+1} h$ и $\{x_{i+1}, h\} = \partial_i h$. Отметим, что в этом случае важен порядок переменных.

Назовем пару (x_i, x_j) M -парой, если она M_0 -пара или M_1 -пара.

Назовем x_i чистым квадратом, если в форму ω входит слагаемое $dx_i^{(2)}$ и нет слагаемых $dx_i dx_j$ для некоторого j . Тогда $\{x_i, h\} = \partial_i h$.

Назовем x_i M_1 -квадратом, если (x_i, x_{i+1}) – M_1 -пара.

Назовем x_i квадратом, если она M_1 -квадрат или чистый квадрат.

2. Строение модуля $H_1(L_{(1)})$

Пусть $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots$ – неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли, $P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)} \subseteq L \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$, $L_{(1)} = L_1 + L_2 + \dots$. Докажем, что для алгебры Ли L выполняется условие (iii) теоремы вложения фильтрованных деформаций (см. Введение) о кратности вхождения L_0 -модуля L_{-1} в композиционный ряд L_0 -модуля $H_1(L_{(1)})$.

Введем обозначения

$$\bar{L}_k = \sum_{i=1}^{k-1} [L_i, L_{k-i}], \quad k > 1.$$

Тогда

$$H_1(L_{(1)}) = L_{(1)} / [L_{(1)}, L_{(1)}] = L_1 + \sum_{k>1} L_k / \bar{L}_k.$$

Если моном $f = x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$ имеет степень $s = h_1 + \dots + h_n$, то $f \in L_{s-2}$, что следует из определения стандартной градуировки.

Пусть моном $f \in L_{(1)}$, $f = x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$. Очевидным условием того, что f попадает в $[L_{(1)}, L_{(1)}] \subset L_{(2)}$, является $\deg f \geq 4$. Обозначим f_i моном f без переменной x_i , т. е. $f_i = \prod_{q \neq i} x_q^{(h_q)}$. Аналогично f_{ij} и т. д.

Отметим, что поскольку скобка Пуассона $\{h, g\}$ представляет собой сумму произведений двух многочленов в разделенных степенях $\partial_i h \partial_j g$, то справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2.1. *Если моном f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$, то f раскладывается в произведение многочленов степени не ниже 2. В частности, мономы вида $x_j^{(2^t)}$ и $x_j^{(2^t)} x_s$ не лежат в коммутанте $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.*

Если $f = \bar{x} = x_1^{(2^{m_1-1})} \dots x_n^{(2^{m_n-1})} \in L_{(1)}$ и существует квадрат x_i высоты больше 1, то $\{x_i^{(2)} x_j^{(2^{m_j-1})}, f_j\} = f$ для некоторого $j \neq i$, т. е. $\bar{x} \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$. Если же нет квадратов высоты больше 1 ($E_1 \subset E^0$), то из теоремы о простоте (см. [9], теорема 5) следует $\bar{x} \notin [L, L]$, а значит $\bar{x} \notin [L_{(1)}, L_{(1)}]$. Далее считаем, что $f \neq \bar{x}$.

Л е м м а 2.2. Пусть $f = x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$ – моном из $L_{(1)}$ и (x_i, x_j) – M -пара. Если $h_i = 0, h_j > 0$, то $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$, за исключением случаев $f = x_s^{(2^t)}$ или $f = x_s^{(2^t)} x_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мономы вида $x_s^{(2^t)}$ или $x_s^{(2^t)} x_k$ не лежат в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.1.

Если $x_j^{(h_j)}$ разложим, а именно $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geq 1, f_j \neq 0$ или $\alpha > \beta \geq 2$, то

$$f = \{x_j^{(\alpha+1)}, x_i x_j^{(\beta)} f_j\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Случай $\alpha > \beta = 1, f_j = 0$ исключается, поскольку, если $\alpha = 2^t$, то $f = x_j^{(2^j)} x_j$, а если $\alpha \neq 2^t$, то $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha_1)} x_j^{(\beta_1)}$, где $\alpha_1 > \beta_1 \geq 2$.

Если $x_j^{(h_j)}$ неразложим (т. е. $h_j = 2^t$) и $h_j \neq 1$, то, поскольку мономы $f = x_j^{(2^t)}$ и $f = x_j^{(2^t)} x_s$ исключаются, $\deg f_j \geq 2$. Тогда

$$f = \{x_j^{(2^t+1)}, x_i f_j\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Если $h_j = 1$, то (поскольку $f \in L_{(2)}$) $\deg f_j \geq 3$. Поскольку случай $f_j = x_s^{(2^t)}$ исключается, то моном f_j разложим. Для определенности $f_j = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \leq \deg g_2$. Тогда

$$f = \{x_i x_j g_1, x_j g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 2.3. Пусть $f = x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$ – моном из $L_{(1)}$. Если $h_i = 0$, где x_i – квадрат или x_i – часть M_0 -пары, то $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$, за исключением случаев $f = x_s^{(2^t)}$ или $f = x_s^{(2^t)} x_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку случаи из Леммы 2.1 исключаются, то моном f разложим в произведение мономов степени не меньше 2. Для определенности $f = g_1 g_2$.

(1) Если x_i – чистый квадрат, то

$$f = \{x_i g_1, x_i g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

(2) Если x_i – M_1 -квадрат или x_i – часть M_0 -пары (x_i, x_j) , то в силу Леммы 2.2 можно считать, что также $h_j = 0$ (в случае M_1 -квадрата $j = i + 1$). Тогда

$$f = \{x_i g_1, x_j g_2\} \in [L_{(1)}, L_{(1)}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Пусть $E_1 \not\subset E^0$. Тогда существует квадрат x_i высоты больше 1. Зафиксируем этот квадрат и рассмотрим различные случаи в зависимости от степени x_i в мономе $f =$

$= x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}$. В силу Леммы 2.3 можно считать, что x_i входит в моном f , т. е. $h_i > 0$.

(1) Если $x_i^{(h_i)}$ разложим, а именно $x_i^{(h_i)} = x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)}$, где либо $\alpha > \beta \geq 1$, $f_i \neq 0$, либо $\alpha > \beta \geq 2$, то

$$\{x_i^{(\alpha+1)}, x_i^{(\beta+1)} f_i\} = f + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и } h_{i+1} > 0) + x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta+1)} x_{i+1}^{(h_{i+1}-1)} f_{i,i+1}.$$

Последнее слагаемое также подпадает под пункт (1), но степень x_{i+1} понизилась. Следовательно, через несколько повторений $h_{i+1} = 0$ и второго слагаемого не будет. Случай $\alpha > \beta = 1$, $f_i = 0$ исключается в силу леммы 2.1.

(2) Пусть $x_i^{(h_i)}$ неразложим (т. е. $h_i = 2^t$) и $h_i \neq 1$. Поскольку мономы $f = x_i^{(2^t)}$ и $f = x_i^{(2^t)} x_s$ не рассматриваются (см. Лемму 2.1), то $\deg f_i \geq 2$. Тогда

$$\{x_i^{(2^t+1)}, x_i f_i\} = f + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и } h_{i+1} > 0) + x_i^{(2^t+1)} x_{i+1}^{(h_{i+1}-1)} f_{i,i+1}$$

Последнее слагаемое подпадает под пункт (1).

(3) Если $h_i = 1$, то $\deg f_i \geq 3$ (поскольку $f \in L_{(2)}$), и f_i – разложим (см. Лемму 2.1). Для определенности $f_i = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \leq \deg g_2$. Тогда

$$\{x_i^{(2)} g_1, x_i g_2\} = f + x_i^{(3)} \{g_1, g_2\} + (\text{если } x_i - M_1\text{-квадрат и в } g_1 \text{ есть } x_{i+1}) + x_i^{(2)} g_2 \{x_i, g_1\}.$$

Второе слагаемое подпадает под пункт (1). Последнее слагаемое подпадает под пункт (2).

Таким образом, если $E_1 \not\subset E^0$, то любой моном $f \in L_{(2)}$, кроме описанных в Лемме 2.1, лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.

Пусть $E_1 \subset E^0$. Тогда есть один канонический вид формы, зависящий от четности числа переменных. Отметим, что если число переменных n – нечетное, то присутствует только один чистый квадрат x_n , а остальные переменные разбиваются на M_0 -пары. Если же число переменных n – четное, то присутствует только одна M_1 -пара (x_{n-1}, x_n) , а остальные переменные разбиваются на M_0 -пары.

Сначала рассмотрим случай, когда f не содержит чистый квадрат или f не содержит M_1 -пару в максимальных степенях. Максимальная степень для x_i – это $2^{m_i} - 1$. С учетом Леммы 2.3, нужно рассмотреть только случай $h_{n-1} = 1$, $h_n \neq 2^{m_n} - 1$, когда n – четное. Также в силу Леммы 2.2, если $f_{n,n-1} \neq 0$, то $f_{n,n-1}$ содержит минимум одну M_0 -пару, т. е. $f_{n,n-1}$ разложим.

(1) Пусть $f_{n,n-1} = g_1 g_2$, где $\deg g_1 \geq \deg g_2 \geq 1$. Тогда

$$\{x_{n-1} g_1, x_{n-1} x_n^{(h_n+1)} g_2\} = f + x_n^{(h_n+1)} f_{n,n-1} \quad (\deg g_1 \geq 2),$$

$$\{x_{n-1} f_{n,n-1}, x_{n-1} x_n^{(h_n+1)}\} = f + x_n^{(h_n+1)} f_{n,n-1} \quad (\deg g_1 = 1).$$

Если $\deg g_1 = \deg g_2 = 1$, то $h_n \geq 2$. Второе слагаемое лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.3.

(2) Пусть $f_{n,n-1} = 0$. Тогда $f = x_{n-1} x_n^{(h_n)}$ и $x_n^{(h_n)}$ разложим (см. Лемму 2.1), т. е. $x_n^{(h_n)} = x_n^{(\alpha)} x_n^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geq 1$.

(2.1) Если $n > 2$, то найдется M_0 -пара (x_i, x_j) и $f \in [L_{(1)}, L_{(1)}]$ по Лемме 2.3.

(2.2) Если $n = 2$, $f = x_1 x_2^{(h_2)}$ и h_2 можно представить как $2^t q + 2^{t-1} - 1$, где $t \geq 2$, $q \geq 1$, то

$$\{x_1 x_2^{(2^t q)}, x_1 x_2^{(2^{t-1})}\} = f + x_2^{(h_2+1)}.$$

Второе слагаемое лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ в силу Леммы 2.3.

(2.3) Если $n = 2$, $f = x_1 x_2^{(h_2)}$, то f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ только если $x_2^{(h_2)} = x_2^{(\alpha)} x_2^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geq 1$ и $\binom{h_2 + 1}{\alpha} = 1$. Данное условие возникает, поскольку γf ($\gamma \in K^*$) появляется исключительно при произведении мономов

$$\{x_1 x_2^{(\alpha)}, x_1 x_2^{(\beta+1)}\} = \binom{h_2}{\alpha} f + \binom{h_2}{\alpha - 1} f + \binom{h_2 + 1}{\alpha} x_2^{(h_2+1)} = \binom{h_2 + 1}{\alpha} (f + x_2^{(h_2+1)}).$$

Отметим, что если $h_2 = 2^t - 1$, то $\binom{h_2 + 1}{\alpha} = \binom{2^t}{\alpha}$ не равен нулю только при $\alpha = 0, 2^t$, следовательно, моном $x_1 x_2^{(2^t-1)}$ не лежит в коммутанте.

Предположим далее, что для нечетного числа переменных $h_n = 1$, а для четного числа переменных $h_{n-1} = 1$, $h_n = 2^{m_n} - 1$. В силу Леммы 2.2 и Леммы 2.3 можно считать, что если существует M_0 -пара, то обе переменные присутствуют в рассматриваемом мономе f . Поскольку $f \neq \bar{x}$, то существует M_0 -пара (x_i, x_j) с $h_j \neq 2^{m_j} - 1$. Зафиксируем эту пару. Отметим, что $\deg f_i \geq 2$, поскольку f_i содержит x_j и либо x_n , либо x_{n-1}, x_n .

(3) Если $x_i^{(h_i)}$ разложим, а именно $x_i^{(h_i)} = x_i^{(\alpha)} x_i^{(\beta)}$, $\alpha > \beta \geq 1$, то

$$f = \{x_i^{(\alpha+1)}, x_i^{(\beta)} x_j^{(h_j+1)} f_{ij}\}.$$

(4) Если $x_i^{(h_i)}$ неразложим (т. е. $h_i = 2^t$) и $h_i \neq 1$, то

$$f = \{x_i^{(2^t+1)}, x_j^{(h_j+1)} f_{ij}\}.$$

(5) Пусть $h_i = 1$. Тогда $\deg f_i \geq 3$. Напомним, что $\deg f_{ij} \geq 1$ для нечетного n и $\deg f_{ij} \geq 2$ для четного n .

(5.1) Если $\deg f_{ij} \geq 2$, то

$$f = \{x_i x_j^{(h_j+1)}, x_i f_{ij}\}.$$

(5.2) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$ и $m_i > 1$, то

$$f = \{x_j^{(h_j+1)}, x_i^{(2)} x_n\}.$$

(5.3) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$ и h_j представляется в виде $2^t q + 2^{t-1} - 1$, где $t \geq 1$, $q \geq 1$, то

$$f = \{x_i x_j^{(2^t q)}, x_i x_j^{(2^{t-1})} x_n\}.$$

(5.4) Если $f = x_i x_j^{(h_j)} x_n$, $n = 3$, то f лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$ только если $x_j^{(h_j)} = x_j^{(\alpha)} x_j^{(\beta)}$, где $\alpha > \beta \geq 1$ и $\binom{h_j + 1}{\beta} = 1$. Данное условие возникает, поскольку γf ($\gamma \in K^*$) появляется исключительно при произведении мономов

$$\{x_i x_j^{(\alpha+1)}, x_i x_j^{(\beta)} x_n\} = \binom{h_j}{\beta} f + \binom{h_j}{\beta - 1} f = \binom{h_j + 1}{\beta} f.$$

Отметим, что если $h_j = 2^t - 1$, то $\binom{h_j + 1}{\beta} = \binom{2^t}{\beta}$ не равен нулю только при $\beta = 0, 2^t$, следовательно, моном $x_i x_j^{(2^t - 1)} x_n$ не лежит в коммутанте.

Таким образом, если $E_1 \subset E^0$, то любой моном $f \in L_{(2)}$, кроме описанных в Лемме 2.1 и пунктах (2.3) и (5.4), лежит в $[L_{(1)}, L_{(1)}]$.

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод:

Предложение 2.1. Пусть L – градуированная неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли, $P(\mathcal{F}, \omega)^{(1)} \subseteq L \subseteq \tilde{P}(\mathcal{F}, \omega)$.

1. Если $E_1 \not\subset E^0$, или $E_1 \subset E^0$, $n > 3$, или $E_1 \subset E^0$, $n = 3$, $\dim E_1 = 2$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \bar{L}_k &= L_k, \quad k \neq 2^t - 2, 2^t - 1, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_j^{(2^t)}, x_j \in E_t \rangle \cong E_t, \quad k = 2^t - 2, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_j^{(2^t)} x_s, x_j \in E_t \rangle \cong E_t \otimes L_{-1}, \quad k = 2^t - 1. \end{aligned}$$

2. Если $E_1 \subset E^0$, $n = 3$, $\dim E_1 = 1$, $\omega = dx_1 dx_2 + dx_3^{(2)}$ и для определенности высота $m_2 > 1$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \bar{L}_k &= L_k, \quad k = 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geq 1, q \geq 1), k \neq 2^t - 2, \\ L_k / \bar{L}_k &\subseteq \overline{\langle x_1 x_2^{(k)} x_3 \rangle}, \quad k \neq 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geq 1, q \geq 1), 2^t - 2, 2^t - 1, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_2^{(2^t)} \rangle, \quad k = 2^t - 2, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)}, x_2^{(2^t)} x_3, x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3 \rangle, \quad k = 2^t - 1. \end{aligned}$$

3. Если $E_1 \subset E^0$, $n = 2$, $\omega = dx_1 dx_2 + dx_2^{(2)}$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \bar{L}_k &= L_k, \quad k = 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geq 2, q \geq 1), \\ L_k / \bar{L}_k &\subseteq \overline{\langle x_1 x_2^{(k+1)} \rangle}, \quad k \neq 2^t q + 2^{t-1} - 1 (t \geq 2, q \geq 1), 2^t - 2, 2^t - 1, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_2^{(2^t)}, x_1 x_2^{(2^t-1)} \rangle, \quad k = 2^t - 2, \\ L_k / \bar{L}_k &\cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)} \rangle \cong L_{-1}, \quad k = 2^t - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, можно посчитать кратность вхождения L_0 -модуля L_{-1} в сумме $\sum_{k>1} L_k / \bar{L}_k$. При выполнении соответствующих условий из Предложения 2.1(1) следует, что для $k = 2^t - 1$, $k > 1$, $L_k / \bar{L}_k \cong E_t \otimes L_{-1}$ и среди оставшихся слагаемых нет фактор-модулей, изоморфных L_{-1} . Получаем, что количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1} , равно $\sum_{i>1} \dim E_i = m(\mathcal{F}) - \dim E_1 - n$.

Пусть выполняются условия пункта 2 Предложения 2.1. Отметим, что $\langle x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3 \rangle$ – неприводимый L_0 -модуль и

$$L_k / \langle x_1 x_2^{(2^t-1)} x_3 \rangle \cong \langle x_1 x_2^{(2^t)}, x_2^{(2^t+1)}, x_2^{(2^t)} x_3 \rangle \cong L_{-1}, \quad k = 2^t - 1.$$

И среди оставшихся слагаемых нет фактор-модулей, изоморфных L_{-1} . Таким образом, количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1} , равно $m_2 - 2 = (1 + m_2 + 1) - 1 - 3 = m(\mathcal{F}) - \dim E_1 - n$.

Пусть выполняются условия пункта 3 Предложения 2.1. Видим, что при $k = 2^t - 2 \dim \langle x_2^{(2^t)}, x_1 x_2^{(2^t-1)} \rangle = \dim L_{-1}$, но нет изоморфизма L_0 -модулей, т. е. учитываются только случаи $k = 2^t - 1$. Таким образом, количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1} , равно $m_2 - 2 = (1 + m_2) - 1 - 2 = m(\mathcal{F}) - \dim E_1 - n$.

Получаем одинаковую формулу для всех случаев. Далее, поскольку

$$L_1/L'_1 \cong \langle x_j^{(2)} x_s, x_j \in E_1 \rangle \cong E_1 \otimes L_{-1},$$

где $L'_1 = \langle x_i x_j x_k, i \neq j \neq k \rangle$, то количество фактор-модулей, изоморфных L_{-1} , равно $m(\mathcal{F}) - n$. Осталось проверить нет, ли в L'_1 фактор-модуля, изоморфного L_{-1} .

Очевидно, алгебра Ли типа $P(n, \bar{m}, \omega)$ содержит алгебру $P(n, \bar{1}, \omega)$, которая не зависит от выбранной формы ω и изоморфна алгебре Ли $P(n, \bar{1})$, в которой переменные $\{x_i\}$ образуют ортонормированный базис L_{-1} , а умножение определяется скобкой

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \partial_i f \partial_i g.$$

Предложение 2.2. Пусть $L'_1 = \langle x_i x_j x_k, i \neq j \neq k \rangle \subseteq L_1$ и $L'_0 = \langle x_i x_j, i \neq j \rangle \subseteq L_0$, где $\{x_i\}$ – ортонормированный базис L_{-1} . Тогда если $n \neq 4$, то композиционный ряд L'_0 -модуля L'_1 не содержит фактора изоморфного L_{-1} . Если $n = 4$, то $L'_1 \cong L_{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим p -замыкание $\overline{L'_0}$ идеала L'_0 в $gl(L_{-1})$. Согласно [6], $\overline{L'_0} = T + L'_0$, где $T = \langle x_i^{(2)} + x_j^{(2)}, i, j = 1, \dots, n \rangle$ – тор размерности $n - 1$.

Векторы $\{x_i\}$ являются весовыми векторами относительно T . Обозначим вес x_i через ε_i . При этом веса ε_i удовлетворяют единственному соотношению

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0.$$

Весовыми векторами L'_1 являются $x_i x_j x_k$, имеющие веса $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$ соответственно. Любой фактор композиционного ряда L'_0 -модуля L'_1 раскладывается на весовые подпространства с теми же весами. Если композиционный ряд L'_1 содержит фактор-изоморфный L_{-1} , то для некоторых i, j, k, s должно выполняться соотношение $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k = \varepsilon_s$ или $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_s = 0$. Это возможно только при $n = 4$.

Доказательство завершено.

Из Предложения 2.2 следует, что при $n \neq 4$ в L'_1 нет L'_0 -фактор-модулей изоморфных L_{-1} . Следовательно, нет и L_0 -модулей. Если $n = 4$, то $L'_1 \cong L_{-1}$ как L'_0 -модуль.

Пусть $n = 4$. Если нет таких $y \in L_{-1}$, что $y^{(2)} \in L_0$, то $L_0 = L'_0$. Предположим, что есть $y \in L_{-1}$, такой что $y^{(2)} \in L_0$. Пусть $y = a_1 x_1 + \dots + a_4 x_4$. Тогда $y^{(2)} = a_1^2 x_1^{(2)} + \dots + a_4^2 x_4^{(2)} + \sum_{i < j} a_i a_j x_i x_j = \bar{y} + y_0$, где $\bar{y} = a_1^2 x_1^{(2)} + \dots + a_4^2 x_4^{(2)}$ и $y_0 \in L'_0$.

С точностью до константы из основного поля изоморфизм L'_0 -модулей $\varphi: L'_1 \rightarrow L_{-1}$ задается следующим образом: $\varphi(x_i x_j x_k) = x_s$, где $\{i, j, k, s\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Проверяем сохранится ли изоморфизм при умножении на $y^{(2)}$. Для этого достаточно взять \bar{y} .

С одной стороны,

$$\{\bar{y}, x_1 x_2 x_3\} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1 x_2 x_3.$$

С другой стороны,

$$\{\bar{y}, \varphi(x_1 x_2 x_3)\} = \{\bar{y}, x_4\} = a_4^2 x_4 = a_4^2 \varphi(x_1 x_2 x_3).$$

Получаем, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ или $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$, что равносильно $\{y, y\} = 0$.

Таким образом, если $E_1 \not\subset E^0$, то L'_1 неизоморфен L_{-1} как L_0 -модуль и для $n = 4$ не появляется еще одного фактор-модуля, изоморфного L_{-1} , в сумме. Если же $E_1 \subset E^0$, то $L'_1 \cong L_{-1}$ как L_0 -модуль и количество L_0 -модулей может быть равно $m(\mathcal{F}) - n + 1$. В результате мы получаем предложение, анонсированное в [6] (см. [6] предложение 2)

Предложение 2.3. *Кратность L_0 -модуля L_{-1} в L_0 -модуле $H_1(L_{(1)})$ не превосходит $m(\mathcal{F}) - n$, где $m(\mathcal{F}) = m_1 + \dots + m_n$, при условии $n \neq 4$ или $n = 4$, $E_1 \not\subset E^0$.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2023-0034.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 38. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2004. 540 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110197945>
2. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. II: Classifying the absolute toral rank two case. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 42. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2009. 385 p.
3. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. III: Completion of the classification. de Gruyter Expositions in Mathematics. Vol. 57. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2013. 239 p.
4. Кузнецов М. И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 557–589.
5. Кузнецов М. И. Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p // Изв. вузов. Матем. 1991. № 10. С. 43–45.
6. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Изв. вузов. Матем. 2024. №. 9. С. 100–105. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-9-100-105>
7. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 251–322.
8. Кузнецов М. И., Кондратьева А. В., Чебочко Н. Г. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2 // Математический журнал (НАН Казахстана). 2016. Т. 16, № 2. С. 54–65.
9. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2 // Изв. вузов. Матем. 2023. № 6. С. 95–100. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-6-95-100>

10. Kondrateva A. V. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, Issue 12. pp. 2841-2853. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.00398>

*Поступила 20.10.2024; доработана после рецензирования 05.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **38**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004 DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110197945>.
2. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. II: Classifying the absolute toral rank two case. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **42**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2009.
3. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. III: Completion of the classification. de Gruyter Expositions in Mathematics*, **57**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 20013.
4. M. I. Kuznetsov, "Truncated induced modules over transitive Lie algebras of characteristic p ", *Math. USSR-Izv.*, **34**:3 (1990), 575–608 (In Russ.).
5. M. I. Kuznetsov, "The embedding theorem for transitive filtered Lie algebras of characteristic p ", *Izv. Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, **10** (1991), 43–45 (In Russ.).
6. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Filtered deformations of graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, **9** (2024), 100–105. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2024-9-100-105> (In Russ.).
7. A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich, "Graded Lie algebras of finite characteristic", *Math. USSR-Izv.*, **33**:2 (1969), 251–322 (In Russ.).
8. M. I. Kuznetsov, A. V. Kondrateva, N. G. Chebochko, "On Hamiltonian Lie algebras of characteristic 2", *Mathematical Journal*, **16**:2 (2016), 54–65 (In Russ.).
9. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, "Non-alternating Hamiltonian forms over a divided power algebra in characteristic 2", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **67**:6 (2023), 82–87. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X23060038> (In Russ.).
10. A. V. Kondrateva, "Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2841–2853. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.00398>.

Submitted 20.10.2024; Revised 05.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.404-423

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных ЭйлераЛадонкина М. Е.^{1,2}, Повещенко Ю. А.^{1,2}, Чжан Х.^{1,2}¹ ИИМ им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. В итерационных алгоритмах для полностью консервативных разностных схем (ПКРС) для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера разработаны новые методы выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ), применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе отдельных прогонок. В работе рассматриваются различные методы включения АИВ, в том числе для эффективного подавления осцилляций в профилях скорости. Все итерационные методы подробно описаны, приведены блок-схемы. Предложен метод сеточных вложений для моделирования на пространственно неравномерных сетках. Выполнены расчёты классической задачи распада произвольного разрыва (задачи Сода) с использованием ПКРС и разработанных методов АИВ в различных итерационных процессах. Проведён их сравнительный анализ и показана эффективность разработанных улучшенных итерационных процессов и подходов к выбору АИВ по сравнению с работами других авторов. Все расчёты проиллюстрированы. На рисунках приведены варианты решений задачи Сода на равномерной и неравномерной сетках, а также сравнение предложенных в работе методов при расчёте задачи Сода на равномерной сетке.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 404–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.404-423>

Об авторах:

Ладонкина Марина Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Повещенко Юрий Андреевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

© Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х.



Чжан Хаочэнь, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

Original article

MSC2020 57N10

Comparative analysis of some iterative processes for realization of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables

M. E. Ladonkina^{1,2}, Yu. A. Poveschenko^{1,2}, H. Zhang^{1,2}

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow, Russian Federation)*

² *Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow, Russian Federation)*

Abstract. In iterative algorithms for fully conservative difference schemes (FCDS) for the equations of gas dynamics in Euler variables, new methods for selecting adaptive artificial viscosity (AAV) have been developed, which are used both in explicit iterative processes and in the separate tridiagonal matrix algorithm. Various methods for incorporating AAV are discussed in this paper, including those for effectively suppressing oscillations in velocity profiles. All iterative methods are described in detail and block diagrams are given. A grid embedding method for modeling on spatially irregular sects is proposed. Calculations of the classical arbitrary discontinuity decay problem (the Sod problem) using FCDS and the developed AAV methods in different iterative processes have been performed. Comparative analysis is carried out and the efficiency of the developed improved iterative processes and approaches to the choice of AAV in comparison with the works of other authors is shown. All calculations are illustrated. The figures show variants of solutions of the Sod problem on uniform and non-uniform meshes, as well as a comparison of the methods proposed in the paper for the calculation of the Sod problem on a uniform grid.

Keywords: completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem

For citation: M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, H. Zhang. Comparative analysis of some iterative processes for realization of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 404–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.404-423>

About the authors:

Marina E. Ladonkina, Ph.D. (Phys. and Math.), Senior researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Yurii A. Poveschenko, D. Sci. (Phys. and Math.), Leading researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Haochen Zhang, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

1. Введение

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения массы, импульса и энергии в сплошной среде. Поэтому естественно строить дискретную модель изучаемой среды так, чтобы в ней также выполнялись аналоги этих законов. Практика показывает, что применение таких схем особенно эффективно при использовании в том числе для задач, в которых профили решений резко изменяются во времени и пространстве. Дальнейшее развитие принципов интегральных согласований массы, импульса и различных видов энергий привело к понятию полностью консервативных разностных схем (ПКРС) [1], применяемых при лагранжевых и эйлеровых способах описания сплошной среды [2–5]. А введение адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [6] в ПКРС позволяет подавлять возникающие в численном решении осцилляции локально, управляя пространственной аппроксимацией дискретной модели, и не изменяя при этом её консервативно согласованных свойств по компонентам различных видов энергий, массопереносу и импульсу. При этом обеспечивается получение качественного физического решения задачи. Отметим также, что выбор описываемых в работе различных итерационных процессов, применяемых в неявных ПКРС, также влияет на используемые в разностной схеме виды АИВ и тем самым определяет динамически формируемую локальную аппроксимацию задачи.

Настоящее исследование представляет собой продолжение работ [7–10]. Предлагается простая реализация ПКРС с АИВ различными итерационными процессами. Также в данной работе разработаны новые методы выбора АИВ, применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе раздельных прогонок. В данном исследовании рассматриваются различные методы включения АИВ в том числе для эффективного подавления осцилляций в профилях скорости. Предложен метод сеточных вложений для моделирования на пространственно неравномерных сетках. Выполнены расчёты классической задачи распада произвольного разрыва (задачи Сода) с использованием ПКРС и разработанных методов АИВ в различных итерационных процессах. Также проведён их сравнительный анализ и показана эффективность разработанных улучшенных итерационных процессов и подходов к выбору АИВ по сравнению с работами других авторов.

В параграфе 2 приведена исходная постановка задачи газовой динамики в эйлеровых переменных и двухслойная по времени полностью консервативная разностная схема и также операторы аппроксимации для системы уравнений Эйлера. В параграфе 3 описываются методы, разработанные и использованные в нашей работе: метод явных итераций, метод прогонки, улучшенный метод явных итераций, подход скоростной вязкости и метод сеточных вложений. В параграфе 4 демонстрируются результаты расчётов, полученные различными методами, приводится их сравнительный анализ.

2. Полностью консервативная разностная схема для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных

Рассмотрим пространственно-одномерное течение сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат.

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \frac{\partial \mu}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{D}{Dt}(udM) = -dV \frac{\partial P}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu u) + df, \tag{2.2}$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \frac{\partial u}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu \varepsilon) + dQ. \tag{2.3}$$

здесь \vec{u} – скорость течения, ρ – плотность среды, $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ – плотность потока массы, P – давление, ε – удельная внутренняя энергия. Считается, что масса dM заключена в объём dV , через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu}E$.

Для системы уравнений (2.1) – (2.3) выпишем двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера.

$$m_t = -vDIN_D \vec{\mu}_D^{\sim}, \tag{2.4}$$

$$(mu)_t = -vGRAD_{\sigma} \pi^{\sim} - vDIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}), \tag{2.5}$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} VDIV_{\sigma} \vec{u}^{\sim})_{\Omega} - vDIN_D \vec{\mu}_{ED}^{\sim}, \tag{2.6}$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -v(u^{\sim}, GRAD_{\sigma} \pi^{\sim}) - vDIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^{\sim 2}}{2}), \tag{2.7}$$

где

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_{\rho})}, \quad \psi_{\rho} = const,$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}, \quad \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim},$$

$$\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_{\sigma}(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}), \quad P_{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_{\omega}, \quad \psi_u = const,$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_{\varepsilon})}), \quad \psi_{\varepsilon} = const,$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)} \text{ и } M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}.$$

Здесь ω – узлы разностной сетки, Ω – ячейки. Термодинамические величины ρ , ε , P и внутренняя энергия $E = \rho \varepsilon$ относятся к узлам ω . Будем также относить скорость \vec{u} , объём v и приузловую массу $m = \rho v$ к узлам ω , а объём V – к ячейкам сетки.

Очевидно

$$v_{\omega} = \tilde{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_{\Omega} = h_i, \quad \rho_{\omega} = \frac{m_{\omega}}{v_{\omega}} = \rho_k,$$

где под h и \tilde{h} понимаются размеры ячеек Ω и узловых доменов ω соответственно.

Величины из набора искусственных вязкостей $\{\nu, \nu_u, \nu_E\}$ определяются в ячейках формулами $\nu = \beta \frac{h^2}{\tau}$, $\nu_u = \beta_u \frac{h^2}{\tau}$ и $\nu_E = \beta_E \frac{h^2}{\tau}$ в [9], где $\{\beta, \beta_u, \beta_E\}$ – приведенные

вязкости зависимые от числа Куранта. Также в ячейке, образованной узлами ω и ω' , введены величины

$$\vec{u}_D^{\sim} = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)} + \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}), \quad \vec{u}_D^{2\sim} = (\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)}, \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}).$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = \frac{\hat{a} - a}{\tau}$, $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω , например, по закону: $\delta = \sqrt{\hat{m}} / (\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$, ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и \hat{a} между слоями t и \hat{t} понимаются некоторые интерполяционные величины a^{\sim} , например, для скорости полагаем $u^{\sim} = u^{(\delta)}$.

Разностные аналоги операций векторного анализа, используемые в (2.4)–(2.7), определяются следующим образом:

$$DIN_D \vec{\mu}_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad DIN_D : (\Omega), \rightarrow (\omega), \quad (2.8)$$

$$DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega), \quad DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (2.9)$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{v} \Delta_\Omega P, \quad GRAN_D : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (2.10)$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \quad GRAD_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (2.11)$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad DIV_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (2.12)$$

где $\Delta_\Omega P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega$, $\Delta_\sigma \pi = +\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\Omega + S_{\partial\omega} \pi_{\partial\omega}$.

Знаковая функция $S_\Omega(\omega)$, на границе приузлового домена узла ω равна $+1$ справа и -1 слева. $\sum_{\omega(\Omega)}$ подразумевает суммирование по узлам ω , образующих ячейку Ω . Также $\sum_{\Omega(\omega)}$ – суммирование по ячейкам Ω , смежных в узле ω . Наконец, в выражении для $\Delta_\sigma \pi$, в граничном узле $\omega = \partial\omega$, добавлено слагаемое $\pi_{\partial\omega}$ на границе области со знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, зависящей от направления граничной нормали.

3. Методы вычислений ПКРС

В данной работе для реализации нелинейной неявной ПКРС применяются два метода – метод явных итераций (пп. 4.1 и 4.3) и метод прогонки (п. 4.2). Также при аппроксимации уравнения (2.5) нами используется искусственная скоростная вязкость в форме (3.9). Для моделирования задач на неравномерной сетке предложен метод сеточных вложений (см. п. 3.5)

Здесь и далее все величины определяются в узлах кроме числа Куранта и вязкости (приведенная вязкость β и искусственная вязкость ν). Кроме этого переменными, например ρ, u, E обозначаются величины на явном слое по времени, а $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{E}$ – величины на неявном. Внешние итерации используются для вычисления значений с явного слоя на неявный слой по времени и обозначаются индексом s , в то время как внутренние итерации также применяются в итерационном процессе или процедуре внутри одной внешней итерации.

3.1. Метод явных итераций

В работе [12] для реализации нелинейной неявной ПКРС применялся метод явных итераций (далее – Метод 1, см. Алгоритм 3.1).

Алгоритм 3.1. Метод явных итераций (Метод 1)

Algorithm 3.1. Explicit iteration method (Method 1)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
 $Convergence = false$

while $Convergence == false$ **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;
 $monotonicity = false$, $\beta = 0$, $\beta_u = 0$, $\beta_E = 0$;

while $monotonicity = false$ **do**

Compute ρ^{s+1} using formula (3.1);

$monotonicity = true$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k ($(\rho_{k+1}^{s+1} - \rho_k^{s+1})(\rho_k^{s+1} - \rho_{k-1}^{s+1}) < 0$)

between cell i and $i - 1$) **AND** ($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k after small addends to density in k -th nodel ($(\rho_{k+1}^{s+1} - (\rho_k^{s+1} + \varepsilon))((\rho_k^{s+1} + \varepsilon) - \rho_{k-1}^{s+1}) < 0$, ε – tiny value) between cells i and $i - 1$ in zone of expansion wave and contact discontinuity) **AND**

($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}$, $i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

Do the same cycle for $\{u_k, E_k\}$ to set viscosity;

if $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$ **else**

$Convergence = true$;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

На каждой итерации использовался внутренний итерационный процесс для выбора АИВ. В данной работе (Метод 1) также используются подробно описанные в [12] дополнительные оптимизационные критерии выбора АИВ в структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва, которые тестировались на решении задачи Сода [11]. В излагаемых ниже пп. 4.2, 4.3 такая оптимизация не требовалась. При использовании данного метода были получены удовлетворительные результаты (см. Рис. (4.1)), однако процессорное время потраченное на итерационные процессы, оказалось значительным.

В Методе 1 для вычисления величин на следующем шаге по времени выполняется итерационный процесс. Формулы этого итерационного процесса для уравнений (2.4) – (2.6) имеют следующий вид

$$\rho_k^{s+1} = f_\rho(\rho, \rho^s, u, u^s, \beta) = \rho_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_k^{s+1} &= f_u(\rho, \rho^{s+1}, u, u^s, E, E^s, \beta_u) = \\ &= \frac{1}{\rho_k^{s+1}}(\rho_k u_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\pi_i^\sim - \pi_{i-1}^\sim) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim u_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim u_{i-1}^\sim)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} E_k^{s+1} &= f_\varepsilon(\rho, \rho^{s+1}, u, u^{s+1}, E, E^s, \beta_E) = \\ &= E_k - \frac{\tau}{2\hbar_k}(\pi_i^\sim(u_{k+1}^\sim - u_k^\sim) + \pi_{i-1}^\sim(u_k^\sim - u_{k-1}^\sim)) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{E,i}^\sim - \mu_{E,i-1}^\sim). \end{aligned} \quad (3.3)$$

При определении вязкости в потоке μ^\sim в уравнении (3.1) используется интерполяция по времени $\rho^\sim = \psi_\rho \rho^s + (1 - \psi_\rho)\rho$. Так же для уравнений (3.2) $u^\sim = \psi_u u^s + (1 - \psi_u)u$ и (3.3) $E^\sim = \psi_E E^s + (1 - \psi_E)E$. В s -ой итерации величины обозначаются верхним индексом s , например, ρ^s, u^s, E^s . На этапе внешних итераций при вычислении ρ^{s+1} выбирается вязкость следующим образом: в начале данной внешней итерации полагается $\beta = 0$, и выполняются вычисления. При наличии осцилляций, β увеличивается, и внутренняя итерация повторяется в цикле, если значение β не достигает своего лимитера [10]. Аналогичные действия производятся в импульсной (3.2) и энергетической (3.3) группах при вычислениях u^{s+1} и E^{s+1} . Сходимость внешнего итерационного процесса определяется следующим образом. Если $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}, y = \{\rho, u, E\}, k = \overline{1, n}$, то результат внешнего процесса сходится и получают величины на следующем слое по времени.

3.2. Метод совместных итераций

В текущей работе для оптимизации вычислительного процесса реализации ПКРС и выбора АИВ предложен метод совместных итераций (далее – Метод 2, см. Алгоритм 3.2), одновременно уточняющих итерационное разностное решение и корректирующих АИВ.

Наряду с Методом 1 в Методе 2 применяется метод отдельных прогонок для разностных балансов (2.1) – (2.3), в котором вычисляются приращения на трех узлах с s -ой итерации на $s + 1$ -ую итерацию.

Данный метод реализуется следующим образом. Если при вычислении ρ^{s+1} возникли осцилляции, то их неограниченное лимитером подавление производится только один раз на данном шаге по времени на итерации, следующей после $(s + 1)$ -ой. Этот процесс происходит следующим образом. К коэффициенту приведённой вязкости q добавляется соответствующая конкретной переменной, например ρ , константа $const_\rho$ где приведённая вязкость β является произведением коэффициента q на число Куранта $\beta = q \times kr$; затем вычисляется приращение плотности $\delta\rho^{s+2}$, которое добавляется к ρ^{s+1} , т.е. $\rho^{s+2} = \delta\rho^{s+2} + \rho^{s+1}$. Далее, аналогичным образом данный алгоритм повторяется для вычисления скорости и давления. Если полученные на данной итерации величины удовлетворяют условию сходимости $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}, y = \{\rho, u, E\}, k = \overline{1, n}$, и дальнейшая монотонизация не производится (осцилляции отсутствуют или соответствующие β достигают своего лимитера), то итерационный процесс заканчивается и

Алгоритм 3.2. Метод совместных итераций (Метод 2)

Algorithm 3.2. Joint iteration method (Method 2)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
 $\beta = 0, \beta_u = 0, \beta_E = 0$,

$Convergence = false, monotonicity = false$

while ($Convergence == false$) **OR** ($monotonicity == false$) **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

$monotonicity = true$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k between cell i and $i - 1$) **AND**

 ($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}, i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

 Compute $\{\delta\rho_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$ using tridiagonal matrix algorithm;

 Update: $\rho_k^{s+1} = \delta\rho_k^{s+1} + \rho_k^s$, $k = \overline{1, n}$;

 Do the same thing for $\{u_k, E_k\}$ and get $\{u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

if ($|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$) **else**

$Convergence = true$;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

происходит переход на следующий шаг по времени, с величинами, вычисленными на последней итерации. Иначе итерационный процесс продолжается. Согласно [10], с целью ограничения увеличения приведённой вязкости β вводится лимитер β_0 , который по принципу максимума должен быть меньше единицы и больше числа Куранта. Так же для выполнения метода прогонки в импульсной группе (2.5) проверяется условие диагонального преобладания.

В начале каждого шага по времени перед началом итераций все вязкости полагаются равными 0, величины на первой итерации равные величинам на явном слое $\{\rho_k^1, u_k^1, E_k^1\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$, и выбирается локальное число Куранта для каждой ячейки. Здесь и в дальнейшем, число Куранта выбирается локально по следующей формуле:

$$kr_i = 0.5 \left| \frac{u_k + u_{k+1}}{2} + C_i \right| \frac{\tau}{h_i}, \quad (3.4)$$

где $C_i = \sqrt{\frac{\gamma(P_k + P_{k+1})}{\rho_k + \rho_{k+1}}}$ - локальная скорость звука.

3.3. Улучшенный метод явных итераций

Эффективность Метода 2, дающая хорошую точность в тестовых задачах, и малое затрачиваемое процессорное время привело к модификации Метода 1, повышающей его запас неявности. Такой алгоритм (далее – Метод 3) представляется следующим образом (см. Алгоритм 3.3.).

Алгоритм 3.3. Полный улучшенный метод явных итераций (Метод 3)

Algorithm 3.3. Full improved iterative method (Method 3)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
Convergence = false

while *Convergence* == false **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;
monotonicity = false, $\beta = 0, \beta_u = 0, \beta_E = 0$;

while (*monotonicity* = false) **do**

Compute ρ^{s+1} using algorithm 3.4 for ρ ;
monotonicity = true;

if (there is nonmonotonicity in nodel k between cell i and $i - 1$) **AND**

($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;
monotonicity = false;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}, i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

Do the same cycle for $\{u_k, E_k\}$ to set viscosity;

if ($|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$) **else**

Convergence = true;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

На s -ой итерации сначала выполняются вычисления явной схемой и получаются предикторные величины на неявной $(s + 1)$ -ой итерации. Затем, используются эти предикторные величины и выполняется предикторно-корректирующая процедура, сходящаяся к $s + 1$ -ому неявному значению внешней итерации (см. Алгоритм 3.4).

Эта процедура может повторяться 1 или более раз, приближая $(s + 1)$ -ое итерационное значение к его сходимости. Предикторно-корректирующая процедура выполняется с фиксированной вязкостью. При необходимости корректировки вязкости (при наличии осцилляций) итерационный процесс будет продолжаться, так же и, как при нарушении условий его сходимости. Соответственно, уравнения (3.1) – (3.3) в Метод 3 для итера-

Алгоритм 3.4. Предикторно-корректирующая процедура

Algorithm 3.4. Predictive-corrective procedure

Input: $\{y_k, y_k^s\}, k = \overline{1, n}$
Initial Parameters: $\{y_{predictor, k}^{s+1}\} = \{y_k^s\} k = \overline{1, n},$
 $(\delta y_k)_{old} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|,$
 $Convergence = false$
while $Convergence = false$ (or fixed number of iterations) **do**
 Compute equation using $\{y_{predictor, k}^{s+1}\}$ and other nonchanged variables;
 Update $\{y_{predictor, k}^{s+1}\}$ (for each value using corresponding formula (3.5)-(3.7));
 $(\delta y_k)_{new} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|;$
 if $(|(\delta y_k)_{new} - (\delta y_k)_{old}| < \varepsilon_{rel} \cdot \delta y_k + \varepsilon_{abs}, k = \overline{1, n})$ **else**
 $Convergence = true;$
 $(\delta y_k)_{old} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|;$
 $\{y_k^{s+1}\} = y_{predictor, k}^{s+1};$
Output: $\{y_k^{s+1}\}, k = \overline{1, n}$

ций будут иметь следующий вид:

$$\rho_k^{s+1} = f_\rho(\rho, \rho_{predictor}^{s+1}, u, u^s, \beta) = \rho_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim), \tag{3.5}$$

$$u_k^{s+1} = f_u(\rho, \rho^{s+1}, u, u_{predictor}^{s+1}, E, E^s, \beta_u) = \frac{1}{\rho_k^{s+1}}(\rho_k u_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\pi_i^\sim - \pi_{i-1}^\sim) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim u_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim u_{i-1}^\sim)), \tag{3.6}$$

$$E_k^{s+1} = f_\varepsilon(\rho, \rho^{s+1}, u, u^{s+1}, E, E_{predictor}^{s+1}, \beta_E) = E_k - \frac{\tau}{2\hbar_k}(\pi_i^\sim(u_{k+1}^\sim - u_k^\sim) + \pi_{i-1}^\sim(u_k^\sim - u_{k-1}^\sim)) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{E,i}^\sim - \mu_{E,i-1}^\sim). \tag{3.7}$$

При определении вязкости в потоке μ^\sim в уравнении (3.5) используется интерполяция по времени $\rho^\sim = \psi_\rho \rho_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_\rho)\rho$. Так же для уравнений (3.6) – $u^\sim = \psi_u u_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_u)u$ и (3.7) – $E^\sim = \psi_E E_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_E)E$.

Такой процесс реализации решения явными итерациями вводит внутренний итерационный процесс с фиксированной вязкостью. Далее при наличии осцилляций, вязкости увеличиваются и внешний итерационный процесс заканчивается при коррекции осцилляций и наличии сходимости к решению.

Таким образом, Метод 3 отличается от Метода 1 процедурой вычисления на $(s+1)$ -ой итерации значений $\{\rho^{s+1}, u^{s+1}, E^{s+1}\}$ внутренним предикторно-корректирующим итерационным процессом. Процедура же выбора вязкости в Методе 1 и Методе 3 аналогична. Локальные числа Куранта для каждой ячейки выбираются по формуле (3.4). В начале каждой следующей $(s + 1)$ -ой итерации вязкость β полагается равной нулю.

Так же в начале каждого шага по времени перед началом итераций все вязкости полагаются равными 0, величины на первой итераций равны величинам на явном слое $\{\rho_k^1, u_k^1, E_k^1\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}, k = \overline{1, n}$ и выбирается локальное число Куранта для каждой ячейки по формуле 3.4.

3.4. Переход с импульсной вязкости на скоростную вязкость

При численном решении данными методами возможно возникновение осцилляций в профилях плотности и скорости, при отсутствии осцилляций в профилях импульса. Оказалось, что это явление вызывает импульсная вязкость $\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_{\sigma}(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)})$. В этой формуле вязкость выбиралась по условию монотонности импульса. При этом так как скорость определяется делением импульса на плотность, существует риск возникновения осцилляций в профилях скорости. Поэтому в уравнении сохранения импульса АИВ выбирается, учитывая возможность возникновения немонотонности скорости и добавляется к давлению следующим образом:

$$\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} \rho^{\sim} DIV_{\sigma}(u^{(\psi_u)}) \quad (3.8)$$

На Рис. (3.1) представлено сравнение профилей скорости для расчётов с применением Метода 3 с использованием скоростной и импульсной вязкостей. При этом показана эффективность работы скоростной вязкости сглаживающей осцилляции за зоной волны разрежения, также в зоне контактного разрыва.

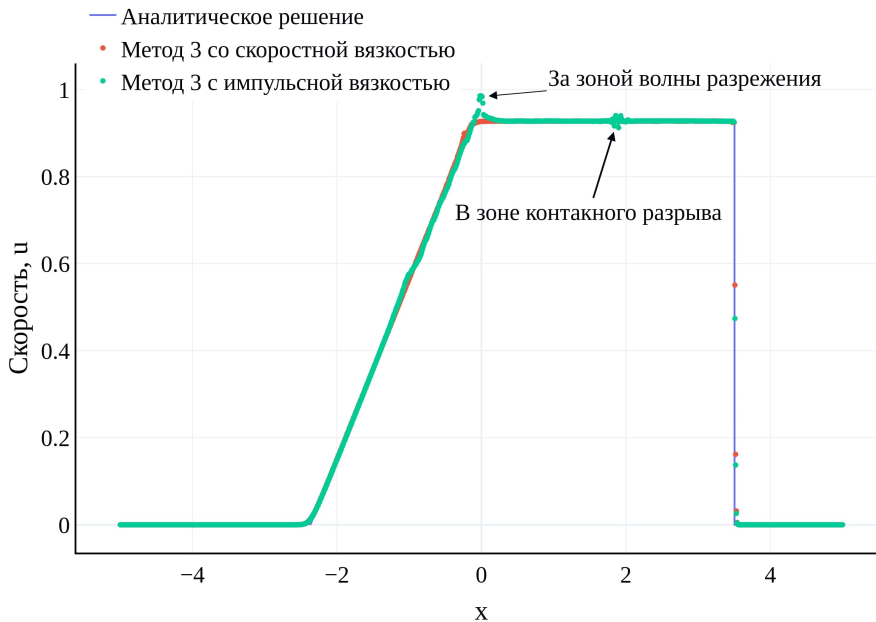


Рис. 3.1. Сравнение расчётов выполненных Методом 3 с импульсной вязкостью и с скоростной вязкостью

Fig. 3.1. Comparison of calculations using Method 3 with pulse viscosity and with velocity viscosity

3.5. Метод вложенных сеток

При расчёте на пространственно неравномерной сетке с большим коэффициентом неравномерности может происходить потеря точности решения вокруг точки перехода с ячеек одного размера на другой. В этом случае предлагается вычислительные значения газодинамических величин определять не в исходных узлах сетки, а в центрах тяжести узловых доменов. Для повышения точности расчёта на неравномерной сетке используется представленный ниже метод вложенных сеток.

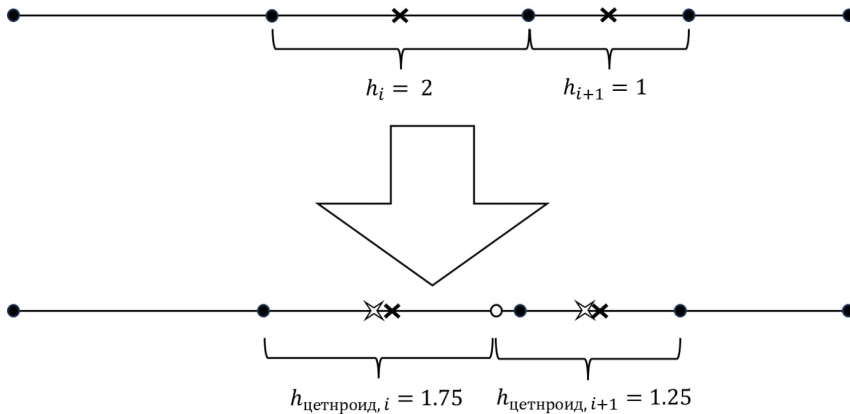


Рис. 3.2. Пример вложения сетки

Fig. 3.2. Example of a grid attachment

В зоне разрыва равномерности сетки (узел, вокруг которого две соседние ячейки разной длины) определяется новый узел как центр тяжести двух соседних полуячеек. Таким образом, генерируется новая сетка (в случае равномерной сетки, полностью совпадающая со старой), называемая центроидной сеткой с вложением первого порядка. Например, для одномерной сетки с изменением длины ячейки с 2 на длину 1, после одного такого вложения коэффициент неравномерности центроидной сетки становится $\frac{8}{7}$ по сравнению с коэффициентом неравномерности исходной сетки, равным 2 (см. 3.2). Этот процесс может повторяться до тех пор, пока коэффициент неравномерности не становится приемлемым и количество таких сеточных вложений невелико. После нахождения центроидной сетки выполняется решение системы разностных уравнений (2.4) – (2.6) на новой сетке.

4. Численные эксперименты и анализ результатов

Для тестирования построенной схемы и разработанных методов выполнены расчёты классической задачи Сода (*Sod problem*)[11] о распаде произвольного разрыва. В Таблице 4.1 представлены начальные условия этой задачи. За систему единиц измерения в расчетах принята система СИ. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Расчётная область является отрезком с -5 до 5 . Момент времени $T = 2.0$ s.

Таблица 4.1. Начальные условия в задаче Сода**Table 4.1.** Initial conditions in the Soda problem

Левая область			Правая область		
ρ	u	P	ρ	u	P
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

Полученные результаты полностью совпадают с [6]. В дальнейших всех расчётах полагается $\nu_E = \nu$. Выбираются веса по времени $\psi_\rho = 0.5, \psi_u = 0.5, \psi_E = 0.5$. В расчётах с использованием Методов 1 и 3 выполнено $\nu_u \geq \nu$, поскольку перед вязкой коррекцией для баланса импульса полагается $\nu_u = \nu, \beta_u = \beta$. Но в Методе 2 это не так, поскольку начальные вязкие коррекции считаются нулевыми. В Методе 1 выбраны лимитер приведенной вязкости $\beta = 0.2$ и параметры накопления АИВ $const_\rho = 0.1, const_u = 0.1$. Расчёты проведены на равномерных и неравномерных сетках. Длина шага по пространству равномерной сетки $h = 0.01$. Неравномерная сетка разделяется на 4 зоны - в двух из которых длина шага по пространству $h = 0.02$, а в двух других зонах пространственная длина $h = 0.01$:

$$h(x) = \begin{cases} 0.02, & -5 \leq x \leq -2, \\ 0.01, & -2 < x \leq 0, \\ 0.02, & 0 < x \leq 3, \\ 0.01, & 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

4.1. Расчёт с использованием метода совместных итераций на равномерной сетке

Из Рис. 4.1 видим, что Метод 2 улучшает результаты расчётов в зонах волны разрежения и контактного разрыва. При этом графики расчётов, выполненных Методом 2, в большей мере приближаются к аналитическому решению чем график расчёта, выполненного Методом 1, в зонах волны разрежения во всех профилях. Так же благодаря выбору скоростной вязкости в зоне контактного разрыва в Методе 2 полностью отсутствуют осцилляции, в то время как в Методе 1 наблюдается их небольшая амплитуда. Метод 2 существенно сокращает процессорное время, потраченное на вычисления и точнее приближается к аналитическому решению, чем Метод 1. Это происходит в силу неявности нахождения приращений методом прогонки в итерационном процессе. Также во всех расчётах Методом 2 вязкий лимитер β_0 [10] достигался выбираемыми АИВ в силу неявности метода прогонки. При этом полагалось $\beta_0 = 0.8$. В расчётах полагалось $const_\rho = 0.2, const_u = 1.0$.

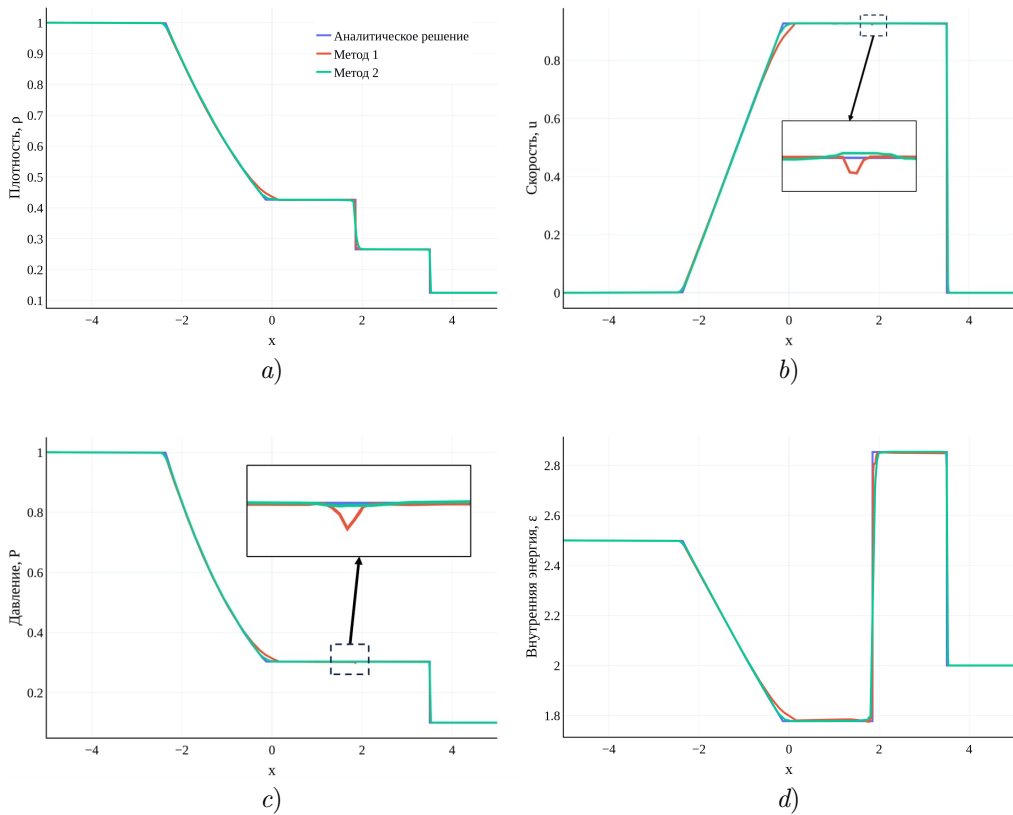


Рис. 4.1. Сравнение Методов 1 и 2 при расчёте задачи Сода на равномерной сетке: а) плотность, б) скорость, в) давление, д) внутренняя энергия

Fig. 4.1. Comparison of Methods 1 and 2 for calculating the Soda problem on a uniform grid: а) density, б) velocity, в) pressure, д) internal energy

4.2. Расчёт с использованием улучшенного метода явных итераций на равномерной сетке

Улучшенный метод явных итераций (Метод 3) действительно уменьшил процессорное время и количество итераций для сходимости, по сравнению с Методом 1. На Рис. 4.2 показано, что по точности результаты, выполненные Методом 3, тоже ближе к аналитическому решению, чем результаты, выполненные Методом 1. Из Рис. 4.2 видим, что точность решений в Метод 3 существенно выше (в смысле приближения к аналитическому решению), чем в Метод 1. Также в зоне контактного разрыва в Метод 3 не наблюдается пика в профилях скорости и давления. Процессорное время в Метод 3 на порядок меньше, чем в Метод 1, и примерно такое же, как в Метод 2.

В Метод 3 лимитер $\beta_0 = 0.2$ и константы приращений АИВ $const_\rho = 1.0$, $const_u = 0.5$.

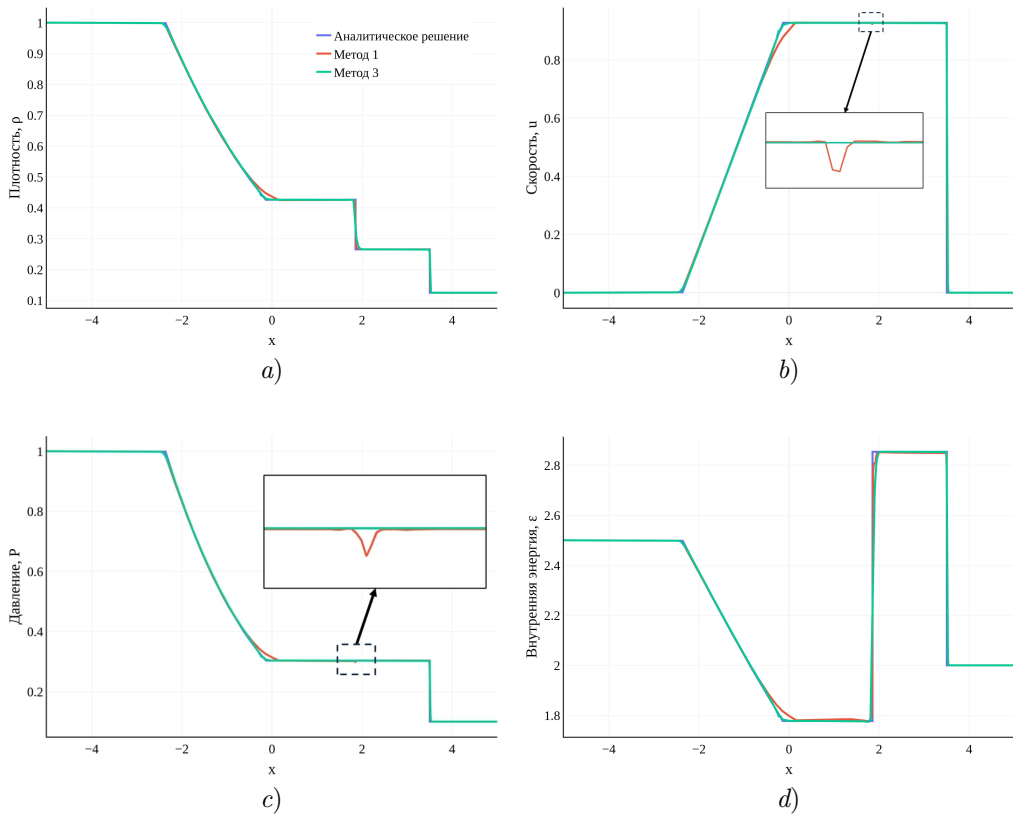


Рис. 4.2. Сравнение Методов 1 и 3 при расчёте задачи Сода на равномерной сетке: а) плотность, б) скорость, в) давление, д) внутренняя энергия

Fig. 4.2. Comparison of Methods 1 and 3 for calculating the Soda problem on a uniform grid: a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy

4.3. Расчёт с использованием улучшенного метода явных итераций на неравномерной сетке

На Рис. 4.3 показаны результаты расчёта задачи Сода с использованием метода 3 на неравномерной сетке и результаты того же метода на равномерной сетке. Наблюдаются удовлетворительные результаты как без использования метода вложения, так и с использованием метода сеточных вложений. Хотя в двух зонах шаги по пространству неравномерной сетки крупнее на 2 раза чем шаги по пространству равномерной сетки, результаты фактически совпадают.

На Рис. 4.4 показан сильно увеличенный масштаб профиля плотности после прохождения перехода (разрыва) сетки с крупной на мелкую в направлении движения ударной волны. На этом масштабе можно увидеть уменьшение пика плотности на центроидной сетке.

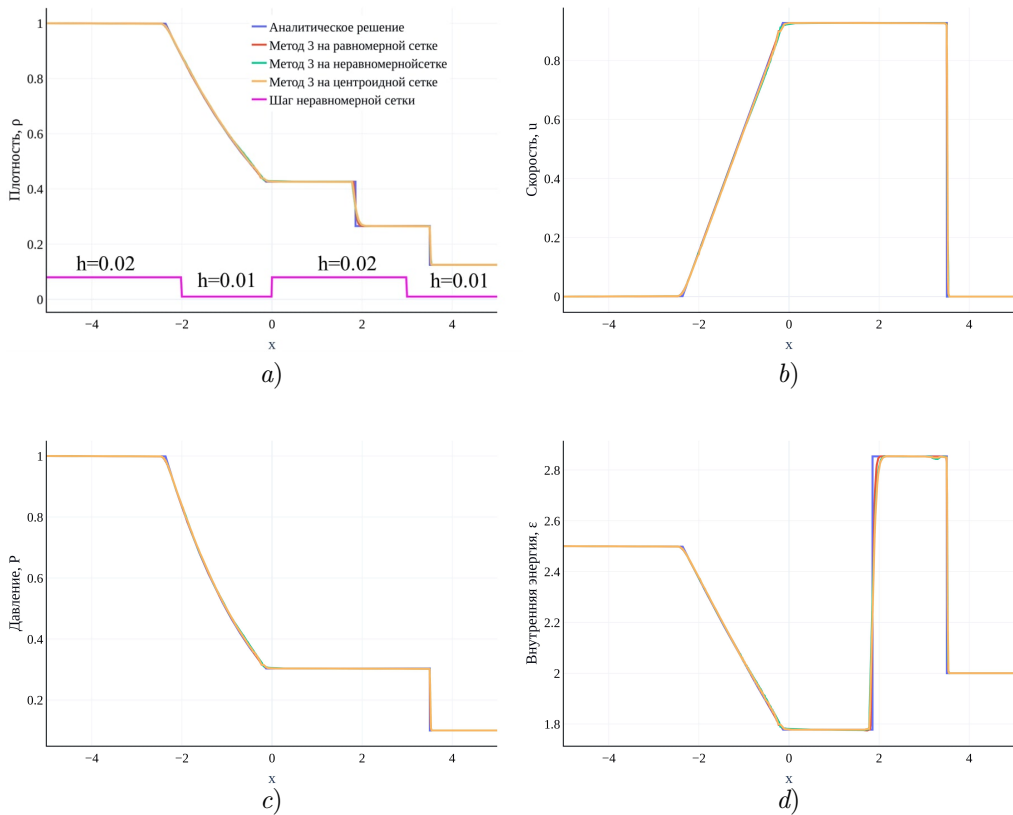


Рис. 4.3. Сравнение вариантов решений Методом 3 при расчёте задачи Сода на равномерной и неравномерной сетках: *a)* плотность, *b)* скорость, *c)* давление, *d)* внутренняя энергия

Fig. 4.3. Comparing variants of Method 3 solution for calculating the Soda problem on non-uniform and uniform grids: *a)* density, *b)* velocity, *c)* pressure, *d)* internal energy

4.4. Сравнение результатов

Задача Сода является наиболее распространенной при тестировании программных комплексов вычислительной газовой динамики, поскольку содержит в себе и зону разрежения, контактного разрыва и ударной волны. Сравнивая наши расчёты с [13] отметим, что обе работы имеют достаточно хорошие результаты (без осцилляций в обычном масштабе) хотя расчёты в [13] выполнены на более мелкой сетке (длина шага которой равна $1/200$). Сравнивая данную работу с [14] (Метод IST) видим, что точность наших расчётов существенно лучше (см. Таблицу (4.2)). Также структура фронта при использовании Метода IST размывается на 3-4 узла, что больше, чем 2 узла сетки в нашей работе. В [14] на основе схемы Годунова клеточно-центрированного метода контрольных объёмов предложена техника заточки интерфейса (Interface Sharpening Technique, IST), как постпроцессор для уменьшения ошибки диффузии и сохранения тонкости

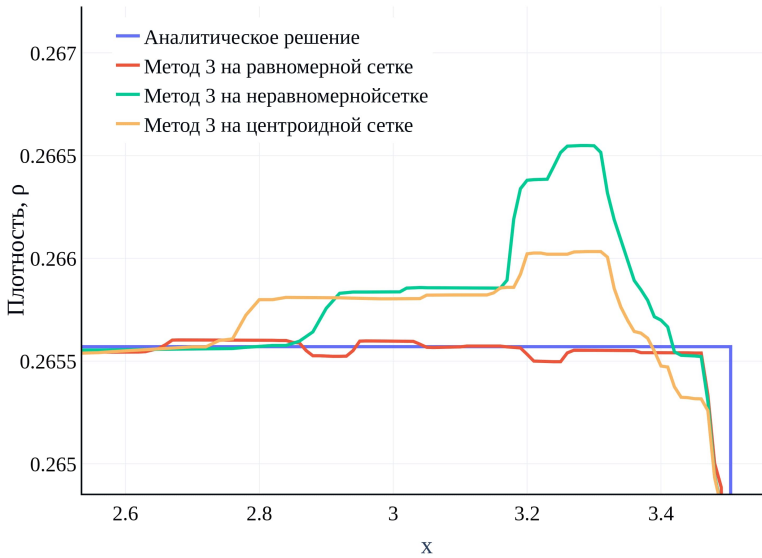


Рис. 4.4. Увеличение масштаба профиля плотности

Fig. 4.4. Zooming-in on the density profile

структуры ударной волны.

Таблица 4.2. Погрешность в C -норме для задачи Сода при различном методе (показан лучший вариант в работе [14]: размер сетки – 800, шаг по пространству – 0.00125)

Table 4.2. Error in the C -norm for the Soda problem with different methods (the best option in the work of [14] is shown: grid size – 800, spatial step – 0.00125)

	Δ_ρ	Δ_u	Δ_P
Метод 1	0.00190	0.00343	0.00064
Метод 2	0.00112	0.00097	0.00043
Метод 3	0.00074	0.00038	0.00011
Метод IST	0.04577	0.08545	0.02997

В Таблице 4.2 показано, что Метод 2 и Метод 3 достаточно повысил точность расчёта наряду с Методом 1 и методом IST, уменьшив погрешность в 2 раза и более. Кроме этого в наших расчётах меньше точек в зоне ударной волны, чем в расчётах [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 352 с.

2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953–958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123–132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171–181.
5. Головизнин В. М., Краюшкин И. В., Рязанов М. А., Самарский А. А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринт ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105. 33 с.
6. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метода адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 288 с.
7. Повещенко Ю. А., Ладонкина М. Е., Подрыга В. О., Рагимли О. Р., Шарова Ю. С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 2019. № 14. 23 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
8. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Large Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11958 / eds by I. Lirkov, S. Margenov. Springer: Cham, 2020. pp. 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71
9. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>
10. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330>
11. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics, Elsevier, 1978. Vol. 27, Issue 1. pp. 1–31. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90023-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90023-2)
12. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Об одной полностью консервативной разностной схеме с вязким наполнением для уравнений газовой динамики // Молодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики – 2024». ИПМ им. М. В. Келдыша. № 1. С. 48–49.

13. Wu Z., Ren Y.-X. A Shock Capturing Artificial Viscosity Scheme in Consistent with the Compact High-Order Finite Volume Methods // *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 516, Issue 8. Article number: 113291. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113291>
14. Nguyen V.-T., Phan T.-H., Park W.-G. Numerical Modeling of Multiphase Compressible Flows with the Presence of Shock Waves Using an Interface-Sharpener Five-Equation Model // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. Vol. 135. Article number: 103542. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103542>

*Поступила 06.10.2024; доработана после рецензирования 13.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Samarsky, Yu. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1980 (In Russ.), 352 p.
2. Yu. P. Popov, A. A. Samarsky, “Completely conservative difference schemes”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**:4 (1969), 296–305. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90049-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90049-4) (In Russ.).
3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, “An algorithm for constructing completely conservative difference schemes”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **22**:1 (1982), 128–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90170-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90170-7) (In Russ.).
4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, V. G. Meladze, “A completely conservative difference scheme for gas-dynamics equations of in Eulerian variables”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 187–198. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90072-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90072-5) (In Russ.).
5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarsky, “Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with separated velocities”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, **105** (1983) (In Russ.), 33 p.
6. Yu. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Adaptive artificial viscosity method numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand, Moscow, 2014 (In Russ.), 288 p.
7. Yu. A. Poveschenko, M. E. Ladonkina, V. O. Podryga, O. R. Rahimly, Yu. S. Sharova, “On a two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Keldysh Institute Preprints*, 2019, 14. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>, 23 p.
(In Russ.)

8. O. Rahimly, V. Podryga, Y. Poveshchenko, P. Rahimly, Y. Sharova, “Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution.”, *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science*, **11958**, Springer, Cham, 2020, 618–625 DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71.
9. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical analysis of fully conservative difference schemes with adaptive viscosity”, *Zhurnal SVMO*, **23**:4 (2021), 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423> (In Russ.).
10. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables”, *Zhurnal SVMO*, **24**:3 (2022), 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330> (In Russ.).
11. G. A. Sod, “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **27**:1 (1978), 1–31.
12. M. E. Ladonkina, Y. A. Poveschenko, H. Zhang, “On one completely conservative difference scheme with viscous filling for gas dynamics equations”, Youth Scientific Conference “New horizons of applied mathematics – 2024” (Keldysh Institute of Applied Mathematics), **1**, 2024 (In Russ.).
13. Z. Wu, Y.-X. Ren, “A shock capturing artificial viscosity scheme in consistent with the compact high-order finite volume methods”, *Journal of Computational Physics*, **516**:8 (2024), 113291. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113291>.
14. V.-T. Nguyen, T.-H. Phan, W.-G. Park, “Numerical modeling of multiphase compressible flows with the presence of shock waves using an interface-sharpening five-equation model”, *International Journal of Multiphase Flow*, **135** (2021), 103542. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103542>.

Submitted 06.10.2024; Revised 13.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.424-441

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Численное моделирование турбулентного течения в канале с коленом

Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А.

ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики» (г. Саров, Российская Федерация)

Аннотация. В данной статье приводятся результаты численного исследования структуры турбулентных потоков в рассматриваемых элементах конструкций, для которых построены сеточные модели, отвечающие подходам моделирования турбулентности: подходы, базирующиеся на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS), замкнутых с помощью SST полуэмпирической модели турбулентности, а также вихреразрешающий, в частности метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES). Расчеты течений были выполнены как в стационарной, так и нестационарной постановках по комплексу «ЛОГОС» на параллельном суперкомпьютере. Из анализа полученных результатов делается вывод о том, что осредненные параметры потока в нестационарной постановке с использованием зонного RANS-LES перехода в модели турбулентности качественно и количественно лучше совпадают с экспериментальными данными, чем результаты стационарных расчетов, основанные на использовании RANS подхода. Верификация численной методики проводилась экспериментальными данными, которые были получены на аэродинамическом стенде ФТ-18 на базе НГТУ им. П. Е. Алексеева. Количественным критерием влияния конструкционных изменений на однородность потока является уровень завихренности.

Ключевые слова: численное моделирование, структура газового турбулентного потока, уравнения Навье-Стокса, осреднение по Рейнольдсу, сеточные модели

Для цитирования: Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А. Численное моделирование турбулентного течения в канале с коленом // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 424–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.424-441>

Об авторах:

Балабина Татьяна Юрьевна, начальник научно-исследовательской группы Института лазерно-физических исследований, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5765-5014>, kaktus2401@mail.ru

Дерюгин Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607181, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Кудряшов Евгений Александрович, начальник научно-исследовательской лаборатории Института лазерно-физических исследований, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, ул. пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <http://orcid.org/0009-0000-7407-8191>, eakudryashov@vniief.ru

© Балабина Т. Ю., Дерюгин Ю. Н., Кудряшов Е. А.



MSC2020 76D05

Numerical simulation of turbulent flow in a channel with a bend

T. Yu. Balabina, Yu. N. Deryugin, E. A. Kudryashov

RFNC - VNIIEF (Sarov, Russia)

Abstract. This article presents the results of a numerical study of the turbulent flows' structure in the construction elements under consideration, for which grid models are constructed that correspond to turbulence modeling approaches. More specifically, these approaches invoke Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS), equations closed using one or another semi-empirical turbulence model, as well as vortex-resolving approach, in particular, the method of large vortices modeling (Large Eddy Simulation – LES). The flow calculations were performed both in stationary and non-stationary settings using the LOGOS complex on a parallel supercomputer. From the analysis of the results obtained, it is concluded that the averaged flow parameters found within a non-stationary formulation using a zone RANS-LES transition in the turbulence model qualitatively and quantitatively better coincide with experimental data than the results of stationary calculations based on the use of the RANS approach. Verification of the numerical technique was carried out by experimental data obtained on the FT-18 aerodynamic stand on the basis of Nizhny Novgorod State Technical university named after R.E. Alekseev. A quantitative criterion for the effect of structural changes on the uniformity of the flow is the vorticity level.

Keywords: numerical modeling, gas turbulent flow structure, Navier-Stokes equations, Reynolds averaging, grid models

For citation: T. Yu. Balabina, Yu. N. Deryugin, E. A. Kudryashov. Numerical simulation of turbulent flow in a channel with a bend. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 424–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.424-441>

About the authors:

Tatiana Yu. Balabina, Head of the Research Group, Department of the Institute of Laser Physics Research, RFNC-VNIIEF (10 Muzrukov Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5765-5014>, kaktus2401@mail.ru, tybalabina@vniief.ru

Yuriy N. Deryugin, D. Sci. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, RFNC-VNIIEF (10 Muzrukov Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Evgeny A. Kudryashov, Head of the Research Group, Department of the Institute of Laser Physics Research, RFNC-VNIIEF (10 Muzrukov Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), <http://orcid.org/0009-0000-7407-8191>, eakudryashov@vniief.ru

1. Введение

Одной из актуальных задач в создании газовых лазеров с замкнутым газодинамическим контуром является получение однородного профиля скорости в области резонатора [1], где на структуру потока могут существенно влиять различные конструктивные

элементы канала, такие как повороты, изменение профиля, изменение сечения канала и экранирующие потоки. Элементы конструкции приводят к возникновению возмущений и развитию турбулентности в потоке. Для оценки влияния возникающих неоднородностей и их влияния на характеристики лазерного излучения необходимо систематическое изучение воздействия различных элементов конструкции на уровень возникающих неоднородностей в газовом потоке. Данная работа посвящена численному исследованию структуры турбулентного потока за коленом цилиндрического канала, который характерен для лазерных установок с замкнутым циклом.

Исследования структуры потока за поворотами каналов проводились численно и экспериментально во многих работах ([2–5]). Численные исследования течений в каналах подобного типа проводились в основном с применением полуэмпирических моделей турбулентности, базировавшихся на осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса и гипотезе Буссинеска. Как отмечается в работе [6], такой подход не позволяет получить приемлемой точности расчета характеристик турбулентного потока и не обеспечивает сходимости численного решения к решению уравнений Навье-Стокса. В настоящее время для расчета потоков с пристенной турбулентностью развиваются вихреразрешающие модели, которые позволяют увеличить разрешающую способность моделирования турбулентных течений [6–7] и получать более адекватные результаты.

В данной работе численное исследование структуры турбулентных потоков за коленом проводится на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с использованием двух подходов. В первом подходе осредненные уравнения замыкаются с привлечением полуэмпирической SST модели турбулентности [8]. Во втором подходе используется вихреразрешающая модель, построенная на основе SST модели [6]. Расчеты течений были выполнены как в стационарной, так и нестационарной постановках по комплексу программ «ЛОГОС» [9]. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными [10], которые были получены на аэродинамическом стенде ФТ-18 на базе НГТУ им. Р.Е. Алексеева [10].

2. Постановка задачи

Рассматривается задача о структуре турбулентного течения воздушного потока за коленом и определении расстояния, на котором затухают возмущения, вызванные поворотом потока. Исследуемая конструкция состоит из прямолинейного участка трубы длиной 20 калибров, поворота на угол 90 градусов (так называемое «колено») и последующего прямолинейного участка трубы длиной 100 калибров. На входе поток подается от компрессора. Длинный прямолинейный участок канала на входе предназначен для уменьшения пульсаций скорости и формирования равномерного потока перед поворотным участком. Фрагмент конструкции представлен на Рис. 2.1. Условия исследуемой среды – воздух при нормальных условиях. Средняя скорость на входе составляет $V_{in} = 22.1$ м/с. Этой скорости соответствует число Рейнольдса 105000, определенное по диаметру трубы. Модель исследования отвечает конструкции экспериментальной установки аэродинамического стенда ФТ-18 на базе НГТУ им. Р.Е. Алексеева, на котором проводились экспериментальные исследования структуры потока. Методика проведенного эксперимента и экспериментальные данные приведены в [10]. На Рис. 2.1 красной линией показано место сбора экспериментальных данных по сечению канала.

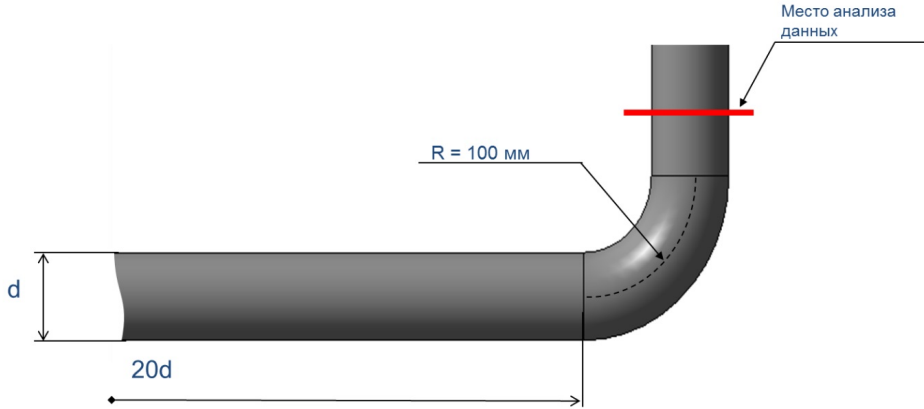


Рис. 2.1. Схема исследуемой конструкции
Fig. 2.1. Diagram of the structure under study

3. Расчетная модель

Математическая модель, используемая для описания турбулентных течений газа в криволинейном канале, состоит из осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса и уравнений модели турбулентности [6–7]. Для несжимаемого газа уравнения Рейнольдса (Reynolds Averaged Navier-Stokes или RANS) имеют следующий вид:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \nabla p + \nabla \cdot (\tau_m + \tau_t),$$

где \vec{u} – вектор скорости осредненного течения; τ_m и τ_t – молекулярная и турбулентная составляющие тензора касательных напряжений. Молекулярная составляющая тензора касательных напряжений определяется с помощью реологического закона Ньютона:

$$\tau_m = 2\mu \left(S - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right),$$

где $S = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t)$ – тензор скоростей деформаций; \mathbf{I} – единичный тензор; μ – коэффициенты динамической вязкости.

Турбулентные составляющие тензора касательных напряжений определяется в соответствии с гипотезой Буссинеска:

$$\tau_t = 2\mu_t \left(S - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{2}{3} k \mathbf{I},$$

где μ_t – турбулентная вязкость; k – кинетическая энергия турбулентности.

Для описания турбулентных течений применяются два подхода. В первом подходе (RANS-постановка) турбулентное течение моделировалось на основе полуэмпирической модели турбулентности, в качестве которой использовалась двухпараметрическая модель SST Менгера [8]. SST модель представляет собой комбинацию $k-\epsilon$ и $k-\omega$ моделей,

обеспечивающую сочетание лучших свойств этих моделей [6]. Уравнения модели следующие:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}k) = \nabla[(\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k] + P_k - \beta^* \rho \omega k,$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u} \omega) = \nabla[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega},$$

где:

$$P_k = \min(\mu_T S^2, 20\beta^* \rho k \omega), \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij}, \quad F_2 = \tanh(\arg g_2^2),$$

$$\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\mu}{\rho d^2 \omega}\right), \quad \phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad \phi = \{\sigma_k, \sigma_\omega, \beta\}, \quad F_1 = \tanh(\arg_1^4),$$

$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\mu}{\rho d^2 \omega}\right), \frac{4\sigma_\omega k}{CD_{k\omega} d^2}\right], \quad CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20}),$$

$$D_{k\omega} = \frac{2\sigma_\omega^2}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega), \quad \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \sigma_{k2} = 1.0,$$

$$\sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41, \quad a_1 = 0.31, \quad \gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}.$$

Турбулентная вязкость в этой модели определяется следующим выражением

$$\mu_T = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}.$$

Во втором подходе (вихреразрешающая постановка) используется модель в формулировке IDDES [6], которая построена на основе SST-модели. В этой модели уравнение переноса кинетической энергии турбулентности берется в виде

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}k) = \nabla [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k] + P_k - \rho k^{3/2} / l_{IDDES}.$$

Входящий в это уравнение линейный масштаб определяется в соответствии с формулировкой IDDES [6].

При численном моделировании на стенке канала ставилось граничное условие – «прилипание». Давление на стенке определялось из соотношения $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$.

На входе в канал задавалось распределение компонент вектора скорости при постоянном давлении. На выходе из канала производные по маршевой переменной от параметров потока полагались равными нулю.

Граничные условия к уравнениям SST модели задавались следующим образом. На стенке кинетическая энергия турбулентности (k_t) полагалась равной нулю, а ее удельная диссипация (ω_t) определялась по формуле $(\omega_t)_W = \frac{6\nu}{0.0075 \Delta y_1^2}$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, Δy_1 – первый пристеночный шаг сетки.

Во входном сечении турбулентные параметры потока определялись по заданию величин интенсивности $(T_t)_{in}$ и масштаба $(L_t)_{in}$ турбулентного потока через расходную скорость V_{in} :

$$(k_t)_{in} = \frac{3}{2} (T_t)_{in}^2 V_{in}^2,$$

$$(\omega_t)_{in} = \frac{(0,09)^{\frac{3}{4}} \sqrt{(k_t)_{in}}}{(L_t)_{in}}.$$

Для расчета в RANS-постановке с использованием сеточного генератора [11] комплекса программ ЛОГОС были построены три сеточные модели с числом точек: $0.5 \cdot 10^6$, $2 \cdot 10^6$ и $8 \cdot 10^6$, в которых сетка измельчалась только в сечении. В области центральной части потока строилась структурированная декартова сетка. Для описания пристеночного течения около стенки формировалось 15 слоев призматических ячеек с изменением размера по геометрической прогрессии. Первый начальный шаг Δy_1 полагался равным $2 \cdot 10^{-6}$ м. В области колена использовалось сгущение сетки по маршевой переменной.

Во втором, вихреразрешающем подходе использовался зонный RANS-LES переход. Для расчета турбулентного течения в рамках этого подхода была адаптирована сеточная модель по схеме, приведенной на Рис. 3.1. В области LES была построена в 4 раза более подробная сетка. На входе в LES область турбулентные параметры потока задавались с помощью генерации искусственных турбулентных полей по методам из работ [12–13].

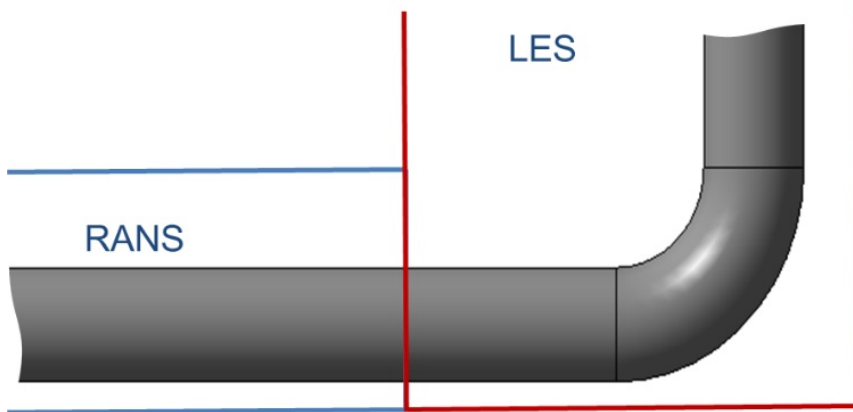


Рис. 3.1. Схема построения сеточной модели для нестационарного счета с использованием вихреразрешающего подхода

Fig. 3.1. Diagram of the construction of a grid model for non-stationary counting using a vortex-resolving approach

Численное исследование структуры турбулентных потоков в криволинейном канале проводилось по комплексу программ ЛОГОС [9], включающему в себя модуль расчета течений несжимаемого газа. В этом модуле уравнения Навье-Стокса, совместно с уравнениями моделей турбулентности интегрируются на неструктурированных сетках, с использованием расщеплениям по физическим процессам. Разностные уравнения построены на основе метода конечного объема, неявных разностных аппроксимаций и методов SIMPLE [14] и PISO [15] для определения в стационарных и нестационарных задачах согласованного распределения компонент вектора скорости и давления из условия сохранения массы газа.

4. Результаты и обсуждение

Поток на вход в канал формируется с помощью компрессора и имеет неоднородности в компонентах скорости и, соответственно, в турбулентных параметрах. Для оценки влияния неоднородностей были проведены расчеты в RANS постановке для различного

уровня задания начальных возмущений. В этих расчетах компоненты вектора скорости на входе в цилиндрической системе координат определялись зависимостями

$$u = u_0 + \Delta u \cos\left(\pi \frac{r}{d} n\right), \quad v = \Delta u \sin\left(\pi \frac{r}{d} n\right),$$

где n полагалась равной 10, а Δu определялось через заданную величину интенсивности $(T_t)_i n$ по формуле $\Delta u = \sqrt{3/2} (T_t)_i n V_{in}$. Значение u_0 задавалось из условия, что средняя скорость на входе в канал равна заданной скорости потока V_{in} .

Расчеты с вариацией начальных возмущений были проведены на разных сетках. Проведенный анализ результатов, полученных на разных сетках по распределению скорости на выходе из колена, показал сходимость численного решения. На грубой сетке был проведен расчет в URANS постановке, в которой стационарное решение было получено методом установления. Это решение качественно и количественно совпало с решением полученным в RANS постановке на той же сетке. Сравнительный анализ проводился по распределению маршевой компоненты скорости. Зависимость результатов расчетов от начального уровня турбулизации потока показана на Рис. 4.1, на котором приведены распределения маршевой компоненты вектора скорости в сечении, где в экспериментах снималась информация. Как видно из представленных результатов, есть существенная зависимость структуры потока за коленом от параметров турбулизации потока, которые на линейном участке не успевают затухнуть.

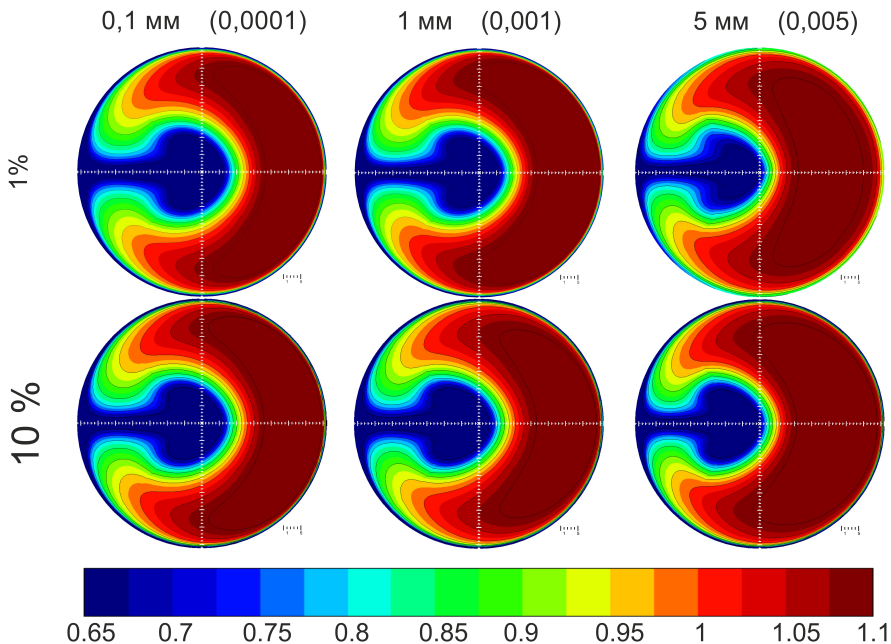


Рис. 4.1. Распределение маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора экспериментальной информации

Fig. 4.1. Distribution of the marching component of the velocity vector in the section of experimental information collection

Сопоставление результатов расчетов с данными эксперимента [10], на основе которых была выбрана постановка граничных условий на входе для последующего анализа,

приводится на рисунках 4.2 и 4.3.

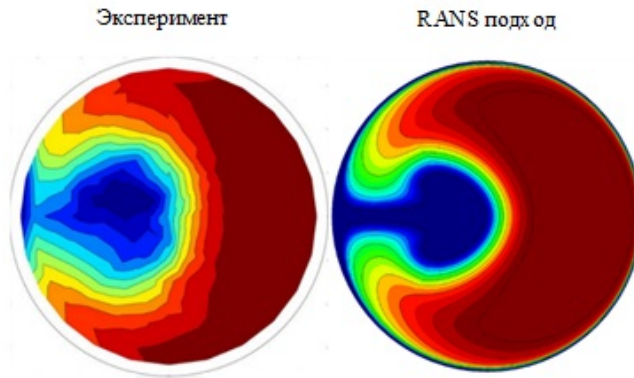


Рис. 4.2. Сравнительный анализ расчетного и экспериментального распределения маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора экспериментальной информации

Fig. 4.2. Comparative analysis of the calculated and experimental distribution of the marching component of the velocity vector in the section of experimental information collection

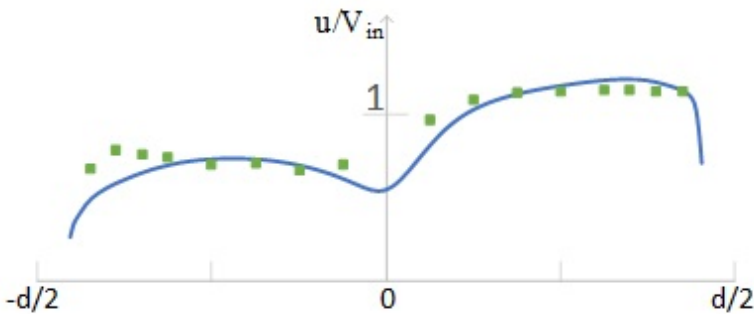


Рис. 4.3. Профиль относительной величины расходной составляющей скорости в плоскости симметрии, сплошная – расчет, точки – экспериментальные данные

Fig. 4.3. Profile of the relative magnitude of the flow component of the velocity in the plane of symmetry, solid – calculation, points – experimental data

На Рис. 4.2 показаны расчетные и экспериментальные распределения маршевой компоненты скорости в рассматриваемом сечении. На этом же рисунке приведены значения уровней начальных возмущений, при которых получено наилучшее согласие расчета с экспериментом по распределению маршевой скорости и формы области вторичного течения. Отметим, что экспериментальная картограмма была получена по 200 точкам, в которых производился сбор данных, а расчетное поле течения построено по 3600 точкам, которые приходились на одно сечение. На Рис. 4.3 проводится сравнительный анализ расчетного и экспериментального распределения относительной величины

расходной составляющей скорости в плоскости симметрии. Здесь и далее в качестве относительной скорости использована величина, равная отношению расходной составляющей скорости к среднерасходной скорости V_{in} . Среднее отклонение расходной составляющей компоненты вектора скорости по сечению от экспериментального значения составило менее 13.7%.

Расчетная структура потока в области колена иллюстрируется на рисунках 4.4 и 4.5. На рисунке 4.4 приводятся распределение относительной скорости и поле вектора скорости в продольном сечении.

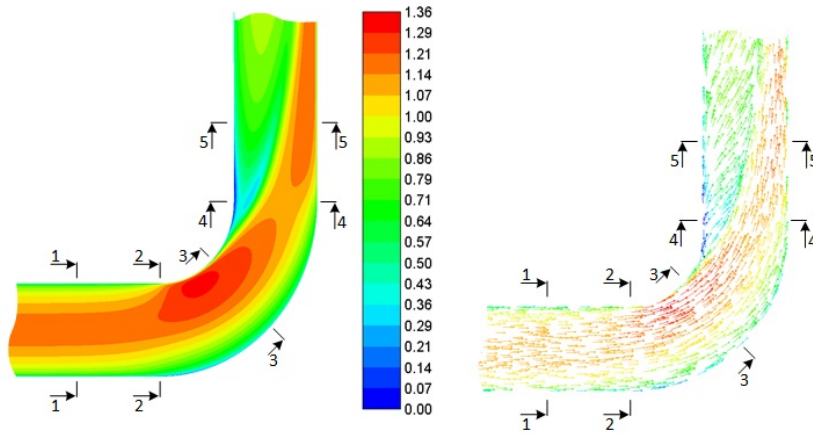


Рис. 4.4. Распределение относительной скорости в продольном сечении в области колена

Fig. 4.4. Distribution of relative velocity in the longitudinal section in the knee area

На рисунке 4.5 показаны поля относительной скорости в поперечных сечениях канала на изгибном участке.

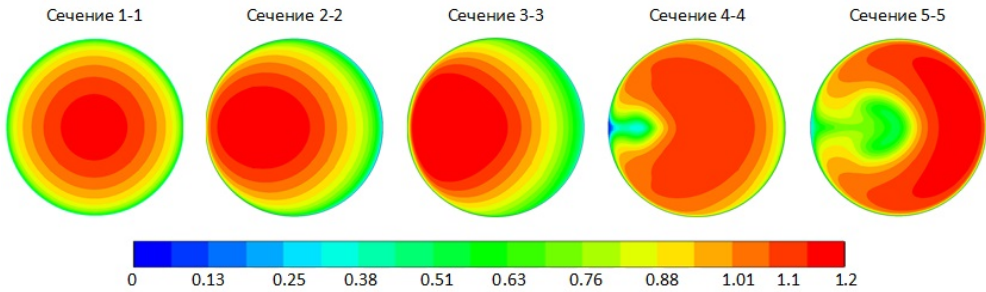


Рис. 4.5. Поля относительной скорости в поперечных сечениях на изгибном участке канала

Fig. 4.5. Relative velocity fields in cross sections on the bending section of the channel

Как видно из представленных результатов, на участке изгиба канала происходит перестройка структуры потока. Перед изгибом, в сечении 1-1, структура потока имеет

симметричный вид. По мере движения газа вдоль колена (сечения 2-2 и 3-3) вследствие искривления течения потока появляется центробежная сила, повышающая статическое давление, которое направлено от центра кривизны к внешней стенке, что приводит к перепаду давления по сечению трубы и, соответственно, изменению скорости. При переходе течения из прямолинейного участка в изогнутый поток проходит по наименьшей траектории, устремляясь к внешней стенке, образуя так называемый конфузорный эффект на внутренней стенке и диффузорный эффект на внешней стенке [3]. В области у внешней стенки формируется вторичное течение, где вектор скорости сильнее направлен к внешней поверхности канала. Образующееся вторичное течение, за счет увеличения масштаба турбулентности и силы трения по мере движения потока увеличивается в размерах и оттесняет к внутренней стенке центральную часть потока, которая имеет максимальную скорость и малые масштабы турбулентности. При дальнейшем движении за счет увеличения масштаба турбулентности и трения на внутренней поверхности канала за коленом происходит образование вторичного течения, которое оттесняет поток к внешней поверхности. Вследствие этого за поворотом поток с максимальной скоростью занимает большую площадь у вогнутой поверхности, поглощая область вторичного течения у выпуклой поверхности (сечения 4-4 и 5-5). Здесь характер течения меняется на противоположный: диффузорный эффект – у внутренней поверхности, а конфузорный – у внешней поверхности канала. Сразу за поворотом канала, на выпуклой поверхности в плоскости симметрии (сечение 4-4) намечается точка отрыва пограничного слоя, в окрестности которой скорость обращается в ноль не только на поверхности канала, но и в ближайших точках по расстоянию от поверхности. При этом возвратного течения, где маршевая компонента вектора скорости меняет направление, в расчетах не наблюдалось. Исследованный характер течения за рассматриваемой точкой эквивалентен обтеканию выступающей тонкой иглы, которая разделяет поток на два симметричных винтообразных вихревых потока.

Интересно проследить структуру течения за коленом. Для этого в сечении, где намечалась точка отрыва пограничного слоя, были поставлены лагранжевые частицы. На рисунке 4.6 показана расстановка частиц в этом сечении и их нумерация.

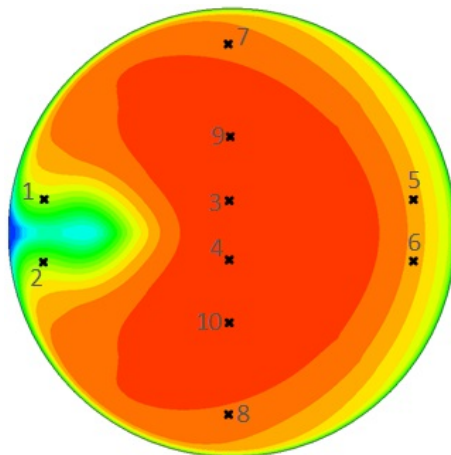


Рис. 4.6. Разметка точек в начальном сечении
Fig. 4.6. Marking of points in the initial section

По расчетным полям были вычислены траектории движения частиц, которые иллюстрируются на рисунках 4.7.

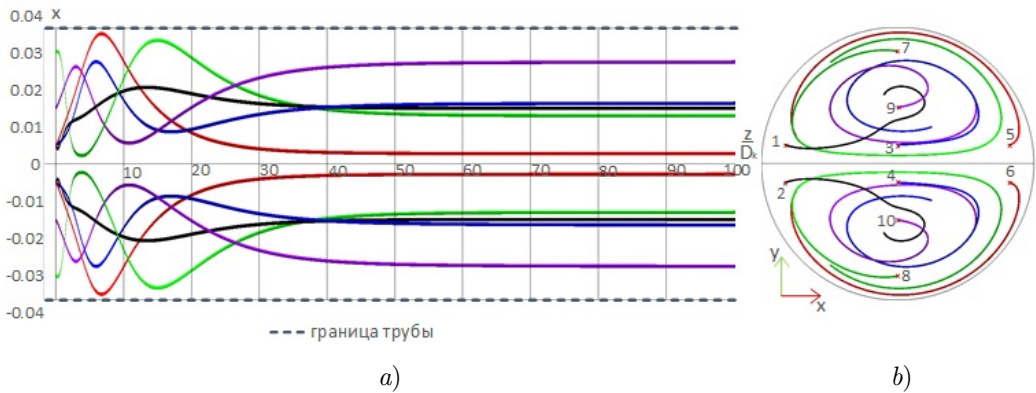


Рис. 4.7. Траектории частиц газового потока для стационарного течения:

a) плоскость (x, y) , *b)* плоскость (y, z)

Fig. 4.7. Trajectories of gas flow particles for stationary flow:

a) - plane (x, y) , *b)* plane (y, z)

Из представленных результатов видно, что течение за коленом состоит из двух зеркально симметричных вихревых движений, что соответствует литературным данным [3]. Проведенный анализ полученных результатов показал, что движение лагранжевых частиц носит винтовой характер. В верхней части потока частицы вращаются против часовой стрелки, а в нижней – по часовой стрелке. При этом частицы 1 и 2, которые находились в области вторичного течения около намечающейся точки отрыва, по винтовым траекториям попадают в центры вихревых потоков, где происходит их перемешивание, соответственно, с частицами 3, 4 и 9, 10, которые находились в центральной части вихревых потоков. Частицы 5, 6 и 7, 8, которые находились около поверхности канала в частях вихревых потоков с максимальной маршевой скоростью, совершают винтовое движения по поверхностям вихревых потоков. Получающееся вихревое движение проводит к существенному перемешиванию потока, что существенно может сказаться на качестве газового потока в области резонатора.

Приведем теперь результаты, полученные при использовании вихреразрешающего зонного RANS-LES подхода. Здесь нестационарное моделирование турбулентного течения за коленом было выполнено в два этапа. На первом этапе на сетке, построенной для RANS-LES подхода, был проведен расчет стационарного течения в RANS постановке. С полученных результатов был продолжен расчет течения в нестационарной постановке, в котором на входе в зону RANS-LES (см. Рис. 3.1) задавалась генерация синтетической турбулентности. Поскольку сбор данных для последующей обработки в экспериментах производился в каждой точке в течение 2 секунд, то нестационарный расчет был выполнен в течение такого же времени.

Полученные результаты иллюстрируются на Рис. 4.8–4.11. На рисунке 4.8 представлены поля распределения маршевой компоненты вектора скорости в экспериментальном сечении в разные моменты времени.

Видно, что решение существенно нестационарное и носит хаотический нерегулярный характер. Здесь с течением времени существенно изменяются области вторичного

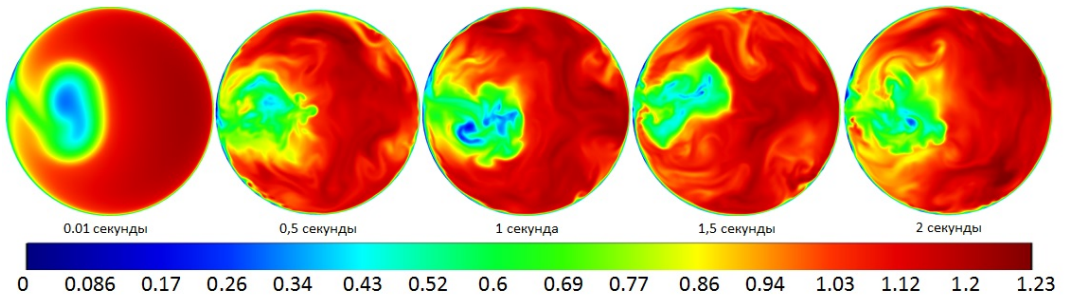


Рис. 4.8. Распределение маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора экспериментальной информации в зависимости от времени

Fig. 4.8. Distribution of the marching component of the velocity vector in the cross section of experimental information collection depending on time

и основного течения и распределение маршевой компоненты вектора скорости. По полученным результатам было проведено поточечное осреднение компонент вектора скорости по времени в течение второй секунды. На рисунке 4.9 показаны поля осредненных значений маршевой компоненты вектора скорости на последовательные моменты времени. Если сравнить распределение осредненных полей с результатами, полученными в RANS постановке (Рис. 4.1), то эти распределения принимают схожий вид, немного различаясь формой областей вторичного и основного течений.

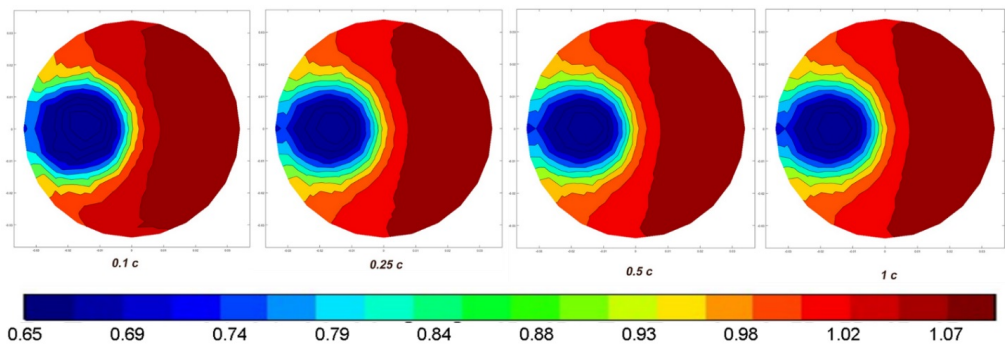


Рис. 4.9. Изменение распределения осредненного значения маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора информации в разные моменты времени

Fig. 4.9. Change in the distribution of the average value of the marching component of the velocity vector in the information collection section at different points in time

На рисунке 4.10 приводится сравнительный анализ экспериментального и осредненного распределения маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора информации.

Здесь среднее отклонение расходной составляющей компоненты вектора скорости по сечению от экспериментального значения составило менее 4.9 %, что говорит о луч-

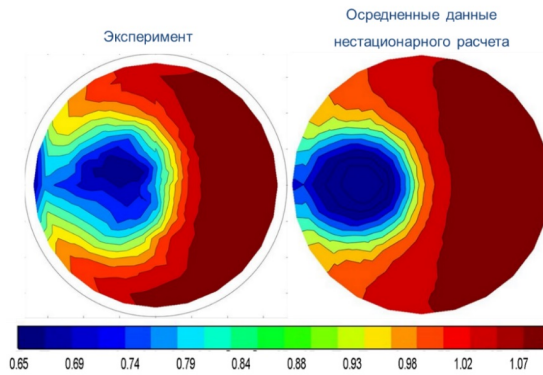


Рис. 4.10. Сравнительный анализ экспериментального и осредненного распределения маршевой компоненты вектора скорости в сечении сбора информации

Fig. 4.10. Comparative analysis of the experimental and averaged distribution of the marching component of the velocity vector in the information collection section

шем согласии результатов расчета с данными эксперимента. В этом расчете были также рассчитаны траектории лагранжевых частиц в течение последней секунды при аналогичной начальной расстановке частиц. Расчетные траектории частиц иллюстрируются на рисунке 4.11.

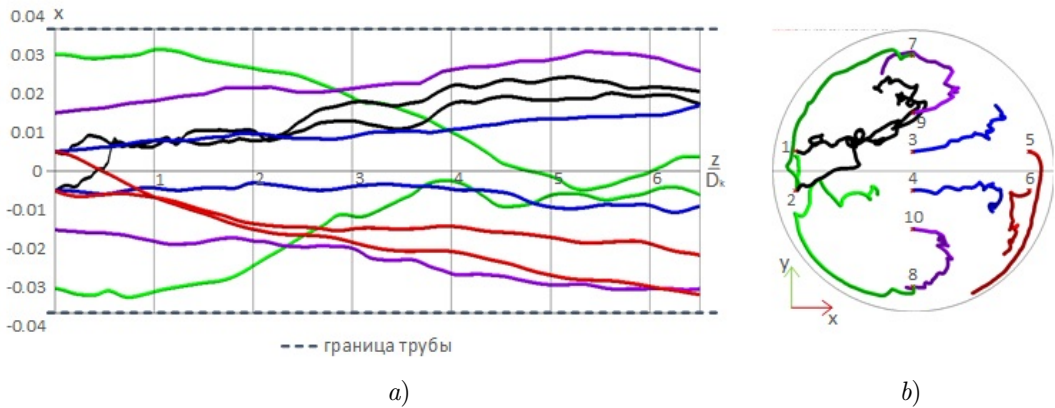


Рис. 4.11. Траектории частиц газового потока в нестационарном расчете: *a)* плоскость (x, y) , *b)* плоскость (y, z)

Fig. 4.11. Trajectories of gas flow particles in a non-stationary calculation: *a)* plane (x, y) , *b)* plane (y, z)

Как видно, полученное расчетное движение частиц носит стохастический характер. Формально поток не имеет ярко выраженных двух зеркально винтовых течений. Происходит перемешивание потока по всему сечению канала. В то же время линии тока,

определенные по осредненному по времени течению, повторяют структуру течения, полученного в стационарном RANS расчете. На рисунке 4.12 показаны линии тока для осредненного по времени течения.

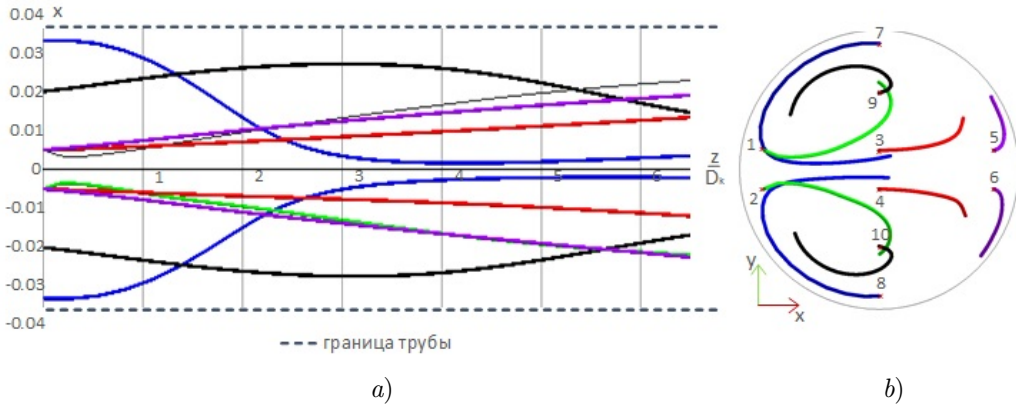


Рис. 4.12. Линии тока частиц осредненного течения:
 а) плоскость (x, y) , б) плоскость (y, z)
Fig. 4.12. Current lines of particles of the averaged flow:
 а) plane (x, y) , б) - plane (y, z)

Видно, что здесь осредненная по времени структура течения за коленом состоит, как и в RANS постановке, из двух зеркально симметричных вихревых движений. Из анализа результатов можно высказать предположение, что линии в фазовом пространстве линии тока осредненного по времени течения будут являться аттракторами траекторий отдельных частиц потока.

Как уже отмечалось, в проточных газовых лазерах с замкнутым циклом важной задачей является оценка газодинамических возмущений потока в рабочей зоне. Для оценки влияния вихревых зон на структуру потока, при моделировании турбулентных течений используются тензорно-инвариантные величины завихренности и деформации [16], которые являются составляющими тензора градиента компонент скорости. Для задач расчета внутренних течений предпочтительно использовать модуль тензор завихренности $||\Omega||$, где $\Omega = \frac{1}{2} [\nabla\nu - (\nabla\nu)^*]$, который наглядно показывает характер вихревого потока [16]. Для оценки уровня завихренности потока было проведено численное моделирование течения за коленом в прямолинейной трубе длиной в 100 диаметров трубы. На рисунке 4.13 представлены графики изменения уровня осредненного по сечению модуля тензора завихренности.

Для сравнительного анализа на этом рисунке приведен график уровня завихренности невозмущенного потока. Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что порожденное поле завихренности за рассматриваемым коленом существенно проявляется на расстоянии 20 калибров. При варьировании начальных турбулентных параметров и граничных условий существенных изменений в уровне завихренности не наблюдалось.

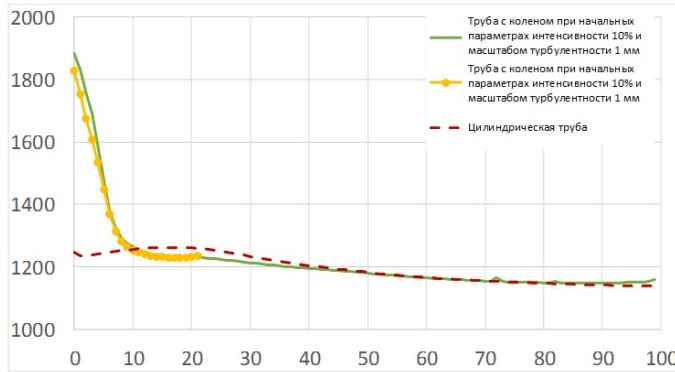


Рис. 4.13. График распределения модуля уровня завихренности вниз по потоку

Fig. 4.13. Graphics of the distribution of the vorticity level modulus downstream

5. Заключение

Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом: с помощью программного комплекса ЛОГОС получены расчетные картины турбулентного течения за коленом в рамках двух подходов. Осредненные параметры потока в нестационарной постановке с использованием вихререзающего зонного RANS-LES подхода качественно и количественно лучше совпадает с экспериментальными данными. Порожденное исследуемым конструкционным изменением поле завихренности сохраняется на расстоянии 20 калибров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харитонов В. В. Теплофизика лазерных зеркал: Учебное пособие. М.: Изд. МИФИ, 1993. 152 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: НАУКА, 1974. 712 с.
3. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
4. Xiaofeng G., Martonen T. B. Simulations of flow in curved tubes. *Aerosol Sci. Technology*, 1997. Vol. 26, no. 6. pp. 485–504. DOI: <https://doi.org/10.1080/02786829708965448>
5. Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакете труб. СПб.: Судостроение, 2005. 390 с.
6. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л. Современные подходы к моделированию турбулентности: Учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.

7. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
8. Menter F. R. Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAAPaper. 1993. Article number: 93-2906. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.1993-2906>
9. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Полищук С. Н., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Глазунов В. А., Яцевич С. В., Курулин В. В. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и теплопереноса. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. – 67 с.
10. Аношкин Ю. И., Добров А. А., Кузьма М. М., Минеев И. В., Мулин М. М., Субарев М. А. Разработка и обоснование экспериментального стенда ФТ-18 для исследования процессов смешения в моделях различной геометрии // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 2. С. 94–104. DOI: https://doi.org/10.46960/1816-210X_2019_2_94
11. Борисенко О. Н., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Попова Н. В., Потехина Е. В., Смолкина Д. Н., Турусов М. Р., Черенкова М. В., Чухманов Н. В. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 25–39.
12. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling // J. Fluids Eng. 2001. 123(2). P. 359–371. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1369598>
13. Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х., Травин А. К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 7. С. 3–19.
14. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Springer. 2002. 423 p.
15. Issa R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics. 1986. Vol. 62., Issue 1. P. 40–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9)
16. Волков К. Н., Запрягаев В. И., Емельянов В. Н., Киселева Н. П., Тетерина И. В., Губанов Д. А., Кавун И. Н. Визуализация данных физического и математического моделирования в газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2017. 338 с.

*Поступила 26.06.2024; доработана после рецензирования 29.10.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. V. Kharitonov, *Thermophysics of laser mirrors: Textbook*, MEPhI Publishing House, Moscow, 1993 (In Russ.), 152 p.
2. G. Schlichting, *Boundary layer theory*, Nauka, Moscow, 1974 (In Russ.), 712 p.
3. I. E. Idelchik, *Handbook of hydraulic resistance*, Mashinostroenie, Moscow, 1992. (In Russ.), 672 p.
4. G. Xiaofeng, T. B. Martonen, “Simulations of flow in curved tubes”, *Aerosol Sci. Technology*, **26**:6 (1997), 485–504. DOI: <https://doi.org/10.1080/02786829708965448>.
5. Yu. A. Bystrov., S. A. Isaev, N. A. Kudryavtsev, A. I. Leontiev, *Numerical modeling of vortex heat transfer intensification in pipe packages*, Sudostroenie, St. Petersburg, 2005 (In Russ.), 392 p.
6. A. V. Garbaruk, M. H. Strelets, A. K. Travin, M. L. Shur, *Modern approaches to the modeling of turbulence*, Publishing House of the Polytechnic University, St. Petersburg, 2016 (In Russ.), 233 p.
7. K. N. Volkov, V. N. Yemelyanov, *Modeling of large vortices in calculations of turbulent flows*, Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russ.), 368 p.
8. F. R. Menter, “Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows”, 1993, 93–2906.
9. A. S. Kozelkov, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, S. N. Polishchuk, S. V. Lashkin, R. N. Zhuchkov, V. A. Glazunov, S. V. Yatsevich, V. V. Kurulin, *Multifunctional software package LOGOS: physico-mathematical models for calculating problems of aero, hydrodynamics and heat and mass transfer*, RFNC-VNIIEF, Sarov, 2013 (In Russ.), 67 p.
10. Yu. I. Anoshkin, A. A. Dobrov, M. M. Kuzma, I. V. Mineev, M. M. Mulin, M. A. Subarev, “Development and validation of experimental stand ft-18 to study processes of mixing in models of different geometry”, *Transactions of NNSTU n.a. R. E. Alekseev*, 2019, no. 2, 94–104. DOI: https://doi.org/10.46960/1816-210X2019_2_94 (In Russ.).
11. D. N. Smolkina, O. N. Borisenko, M. V. Cherenkova, A. G. Giniyatullina, M. V. Kuz'menko, N. V. Chukhmanov, E. V. Potekhina, N. V. Popova, M. R. Turusov, “An automatic generator of unstructured polyhedral grids in the LOGOS software preprocessor”, *Problems of atomic Science and Technology. Ser. Mathematical modeling of physical processes*, 2018, no. 2, 25–39 (In Russ.).
12. A. Smirnov, S. Shi, I. Celik, “Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling”, *J. Fluids Eng*, 2001, no. 123(2), 359–371. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1369598>.
13. D. Y. Adamian, M. Kh. Strelets, A. K. Travin, “An efficient method of synthetic turbulence generation at les inflow in zonal rans-les approaches to computation of turbulent flows”, *Mat. Modeling*, 2011, no. 23(7), 3–19 (In Russ.).

14. J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, Springer, 2002
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>, 423 p.
15. R. I. Issa, “Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting”, *Journal of Computational Physics*, 1986, no. 62(1), 40–65. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9).
16. K. N. Volkov, V. I. Zapryagaev, V. N. Yemelyanov, N. P. Kiseleva, I. V. Teterina, D. A. Gubanov, I. N. Kavun, “Visualization of physical and mathematical modeling data in gas dynamics”, 2017 (In Russ.), 338 p.

Submitted 26.06.2024; Revised 29.10.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.929:519.6:539.3

Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах

Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А.

*ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель системы контроля за изменением давления в камере сгорания авиационного двигателя, составными частями которой являются трубопровод и датчик. Исследование исходной задачи сведено к решению линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом второго порядка, которое позволяет по величине деформации чувствительного элемента датчика определять давление рабочей среды в камере сгорания в каждый момент времени. В работе построены решения этого уравнения и рассмотрены применения их в прикладных задачах аэрогидроупругости, а именно при исследовании динамики упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с газом или жидкостью. Для уравнения с отклоняющимся аргументом указаны некоторые точные решения. Предложен численный метод исследования этого уравнения на основе метода Рунге – Кутты, проведены численные расчеты в системе Mathematica, на основе которых построены графики изменения деформации упругого элемента датчика с течением времени. Также рассмотрен численно-аналитический метод решения уравнения с отклоняющимся аргументом с помощью метода шагов (метода последовательного интегрирования). Исследования, проведенные в статье, предоставляют возможность на этапе проектирования определять оптимальные значения параметров механических систем измерения давления.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, метод Рунге – Кутты, система измерения давления, аэрогидроупругость, динамика

Для цитирования: Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А. Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 442–457. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.442-457>

Об авторах:

Вельмисов Пётр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Маценко Пётр Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027 Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8781-7401>, m.peter.k@mail.ru

Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

© Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А.



MSC2020 35Q74:65Q10

Application of Equations with Deviating Argument to Mathematical Modeling of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media

P. A. Velmisov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. This article discusses a mathematical model of a system for monitoring pressure changes in the combustion chamber of an aircraft engine, whose components are a pipeline and a sensor. The study of the original problem is reduced to solving a linear second-order differential equation with a deviating argument, which allows one to determine the pressure of the working medium in the combustion chamber at each moment of time basing on the deformation magnitude of the sensor's sensitive element. The aim of the work is to construct solutions to this equation and to use them in applied problems of aerohydroelasticity, namely, in studying the dynamics of elastic elements of pressure sensors interacting with gas or liquid. Some exact solutions are given for the equation with a deviating argument. A numerical method for studying this equation based on the Runge-Kutta method is proposed. Calculations are carried out in the Mathematica system; basing on their results graphs of changes in the elastic element deformation over the time are constructed. A numerical-analytical method for solving the equation with a deviating argument using the step method (the method of successive integration) is also considered. The research conducted in the article provides the opportunity to determine the optimal values for the parameters of mechanical pressure measurement systems at the design stage.

Keywords: differential-difference equations, Runge-Kutta method, pressure measurement system, aerohydroelasticity, dynamics

For citation: P. A. Velmisov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova. Application of Equations with Deviating Argument to Mathematical Modeling of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 442–457. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.442-457>

About the authors:

Petr A. Velmisov, D. Sci. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Petr K. Macenko, Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8781-7401>, m.peter.k@mail.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

1. Введение

Во многих областях современной науки и техники широко используются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в частности дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, которые применяются для описания процессов с последействием [1–6]. Учет результата последействия важен для корректного качественного и количественного описания различных систем и процессов (например модель работы смесительных баков, представляющих собой типовой элемент химико-технологических процессов; модель силовой установки самолета, создающей тягу, обеспечивающую требуемую скорость полета самолета; модели с последействием для описания напряженно-деформированного состояния ряда материалов, например полимеров и пластмассы, и т. д.). Однако исследование систем с последействием связано со значительными трудностями, поэтому разработка различных методов решения задач как аналитических, так и численных, ориентированных на определенные классы систем с последействием, является актуальной проблемой. Вопросам существования и единственности периодических решений для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка с отклоняющимся аргументом посвящена, например, работа [7]. В исследовании [8] построены решения нелинейных дробно-дифференциальных систем с отклоняющимися аргументами с помощью монотонного итерационного метода.

В данной работе рассматривается уравнение с отклоняющимся аргументом, полученное при исследовании начально-краевой задачи, которая соответствует трехмерной модели системы измерения давления в камере сгорания двигателя. Такая система измерения давления содержит трубопровод и датчик. Трубопровод нужен для того, чтобы отнести датчик на некоторое расстояние от двигателя с целью ослабления вибрационного и теплового воздействия. Описанию инженерных характеристик датчиков давления (в частности гибких датчиков, высокочувствительных МЭМС-датчиков) и их применению в практических задачах посвящены работы многих современных авторов, например, [9–14]. В работах [15–18] изучаются проблемы динамики и устойчивости трубопроводов при протекании в них жидкости. В данной статье авторами указаны некоторые точные решения линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Для решения этого уравнения разработан численный метод, основанный на методе Рунге – Кутты, а также метод шагов (метод последовательного интегрирования). С помощью разработанной программы в пакете Mathematica проведены численные расчеты, на основе которых получены графики деформации упругого элемента датчика. Статья является продолжением исследований авторов, представленных в работах [19–23].

2. Сведение математической модели системы измерения давления к уравнению с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим механическую систему измерения давления в камере сгорания двигателя, содержащую трубопровод длиной l , поперечное сечение которого имеет вид сектора, образованного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$. В конце трубопровода ($x = l$) размещен датчик, содержащий упругий элемент в виде деформируемой пластины в форме сектора. Функцией $w(r, \theta, t)$ обозначим деформацию пластины. Потенциал скорости $\varphi(x, r, \theta, t)$ описывает движение рабочей среды в трубопроводе (среда считается сжимаемой). На входе в трубопровод ($x = 0$) задается закон изменения $P(r, \theta, t)$ избыточного давления рабочей среды. Для описания динамики механической системы предложена математическая модель [19–21]

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.1)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.2)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.3)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.5)$$

$$mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2). \quad (2.6)$$

Оператор Лапласа Δw и бигармонический оператор $\Delta^2 w$ определяются выражениями

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (2.1)–(2.6) индексы снизу обозначают частные производные; $P_0, \rho_0, a_0, P_*, m, D, N, \beta$ – некоторые физические постоянные; $f(w_t, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации w и скорости деформации w_t и характеризующая упругие силы и силы демпфирования внешних связей; x, r, θ – цилиндрические координаты, t – время.

Задачу (2.1)–(2.6) необходимо дополнить начальными условиями, а также граничными условиями для функции $w(r, \theta, t)$, соответствующими типу закрепления элемента.

Авторами в работах [19, 21] введены интегральные характеристики основных динамических величин задачи (2.1)–(2.6). Тогда решение задачи сводится к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом

$$m_0 \left[\ddot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\psi\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \psi\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) связывает функцию $\psi(t)$, характеризующую деформацию упругого элемента датчика, и функцию $G(t)$, характеризующую закон изменения давления рабочей среды в двигателе. В уравнении (2.7) введены обозначения [19, 21]:

$$G(t) = \iint_H P(r, \theta, t) r dr d\theta, \quad H = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

$$m_0 = m \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta, \quad w_0 = \iint_H r g(r, \theta) dr d\theta,$$

$$\alpha_0 = \alpha \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta + \beta \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta,$$

$$\gamma_0 = D \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta + N \iint_H \Delta g(r, \theta) r dr d\theta + \gamma \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta.$$

При этом деформация пластины $w(r, \theta, t)$ и функция $\psi(t)$ связаны соотношением $w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta)$, а функция $f(w, w_t)$ задана в виде $f(w, w_t) = \alpha w_t + \gamma w$ (α, γ – физические постоянные). Функция $g(r, \theta)$ должна удовлетворять граничным условиям, которые соответствуют жесткому закреплению: $g(R, \theta) = g_r(R, \theta) = 0$, $g(r, \theta_k) = g_\theta(r, \theta_k) = 0$, $k = 1, 2$, и задавалась в виде

$$g(r, \theta) = [1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3] (\theta - \theta_1)^2 (\theta - \theta_2)^2.$$

3. Примеры точных решений уравнения с отклоняющимся аргументом

Для уравнения (2.7) рассмотрим некоторые точные решения:

а) при периодическом возмущении постоянного рабочего давления функция $G(t)$ имеет вид:

$$G(t) = [a \cos \theta t + b \sin \theta t] + G_0.$$

В этом случае функцию $\psi(t)$ можно задать выражением

$$\psi(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t + C,$$

где a, b, G_0, A, B, C – некоторые постоянные. После подстановки $G(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (2.7) коэффициенты выражаются следующим образом:

$$A = \frac{4}{\Delta} \left[\frac{a}{m_0} \left((-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) - \frac{b}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right],$$

$$B = \frac{4}{\Delta} \left[\frac{b}{m_0} \left((-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) + \frac{a}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right],$$

$$C = \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2} \right],$$

где

$$\Delta = 4 \left[\frac{a}{m_0} \left(-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0} \right) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right]^2 + 4 \left(\frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta l}{a_0}. \quad (3.1)$$

б) в случае, когда

$$G(t) = at^2 + bt + G_0,$$

функция $\psi(t)$ отыскивается в виде

$$\psi(t) = At^2 + Bt + C.$$

Подставляя в (2.7), получим:

$$A = \frac{a}{\gamma_0}, \quad B = \frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2},$$

$$C = -\frac{m_0 a}{\gamma_0^2} \left(2 + \frac{\gamma_0 l^2}{m_0 a_0^2} + \frac{2\rho_0 w_0 l}{m_0} \right) - \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \left(\frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2} \right) + \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right].$$

в) при наложении на постоянное рабочее давление экспоненциального возмущения функция $G(t)$ задается в виде:

$$G(t) = G_0 + ae^{\lambda t}.$$

Если $\lambda < 0$, то для давления получим график с насыщением; если $\lambda > 0$, то имеет место экспоненциальный рост давления. Функция $\psi(t)$ имеет вид:

$$\psi(t) = C + Ae^{\lambda t}.$$

После подстановки $G(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (2.7) получим выражения для коэффициентов A и C :

$$A = \frac{a}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right) \left[m_0 \lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \gamma_0 + \rho_0 a_0 w_0 \operatorname{th}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right) \right]},$$

$$C = \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \quad (3.2)$$

Несложно получить «отклики» $\psi(t)$ и для некоторых других «сигналов» $G(t)$, например:

$$G(t) = G_0 + \sum_k [P_{mk}(t) \cos(\theta_k t) + Q_{lk}(t) \sin(\theta_k t)] e^{\lambda_k t},$$

в частности

$$G(t) = G_0 + (a \cos(\theta t) + b \sin(\theta t)) e^{\lambda t},$$

$$G(t) = G_0 + f(t) e^{\lambda t},$$

$$G(t) = G_0 + [P_m(t) \cos \theta t + Q_l(t) \sin \theta t] e^{\lambda t},$$

где $f(t)$ – многочлен заданной степени, $P_m(t), Q_l(t)$ – многочлены степени m и l , $P_{mk}(t), Q_{lk}(t)$ – многочлены степени m_k, l_k .

4. Численное решение уравнения с отклоняющимся аргументом. Примеры расчетов

Численное решение уравнения (2.7) будем строить методом Рунге – Кутты. Введем функцию $y(t) = \psi(t + \frac{l}{a_0})$. Тогда уравнение (2.7) примет вид:

$$y''(t) + y''\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_1 \left[y'(t) + y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) \right] + a_2 \left[y(t) + y\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) \right] =$$

$$= h(t) + a_3 y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right). \quad (4.1)$$

В (4.1) введены следующие обозначения: $a_1 = \frac{\alpha_0 + \rho_0 a_0 w_0}{m_0}$, $a_2 = \frac{\gamma_0}{m_0}$, $a_3 = \frac{2\rho_0 w_0}{m_0}$,

$$h(t) = \frac{2}{m_0} \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right].$$

Согласно работам [1–6], уравнение (4.1) будем решать с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (4.2)$$

и условиями на начальном множестве $t \leq 0$

$$y(t) = y_0 \eta_0(t), \quad y'(t) = y'_0 \eta_1(t), \quad y''(t) = y''(0) \eta_2(t), \quad t \in \left[-\frac{2l}{a_0}, 0 \right], \quad (4.3)$$

где $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ - непрерывные функции, которые удовлетворяют условию

$$\eta_0(0) = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 1.$$

Для удобства вычислений считаем, что

$$\eta_0\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_1\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_2\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = 0. \quad (4.4)$$

Для непрерывности решения уравнения (4.1), учитывая (4.4), найдем $y''(0)$ из (4.1) при $t = 0$:

$$y''(0) = h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0.$$

Рассмотрим алгоритм построения решения уравнения (4.1) на каждом из отрезков

$$[t_k, t_{k+1}], \quad t_k = \frac{2l}{a_0} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1) $k = 0$, отрезок $\left[0, \frac{2l}{a_0}\right]$. Уравнение (4.1) запишется следующим образом:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = h(t) - [h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0] \eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - \\ - a_1 y'_0 \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - a_2 y_0 \eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_3 y'_0 \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right). \quad (4.5)$$

В (4.5) правая часть задана. Методом Рунге – Кутты решаем задачу Коши для функции $y(t)$ с начальными условиями (4.2).

2) $k = 1, 2, 3, \dots$, отрезки $[t_k, t_{k+1}]$. После ввода функции $v_k(t) = y_k(t) + y_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$ получим уравнение

$$v_k''(t) + a_1 v_k'(t) + a_2 v_k(t) = h(t) + a_3 y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right).$$

Правая часть полученного уравнения содержит производную $y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$, которая определена на $(k - 1)$ -ом отрезке. Из значений функций, полученных на предыдущем шаге, находятся начальные условия. Таким образом, на каждом шаге для функции $v_k(t)$ решаем задачу Коши методом Рунге – Кутты.

Разработана программа в пакете Mathematica согласно вышеописанному алгоритму, которая в цикле просчитывает значения функции $y(t)$, а затем строит ее график. Программа позволяет задавать параметры механической системы, в частности закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод.

Пример 4.1. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.2$), пластина изготовлена из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$, $\rho_{pl} = 7.8 \cdot 10^3$). Параметры системы: $P_0 = 101325$, $a_0 = 343$ (при $t = 20^{\circ}C$), $l = 3$, $h_{pl} = 0.002$, $m = 15.6$, $D = 146.5$, $R = 0.025$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 100.1$, $N = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

На рисунках 4.1 – 4.4 представлены примеры расчетов при $r = 0.0125$, $\theta = \frac{\pi}{8}$ и различном задании $P(r, \theta, t)$.

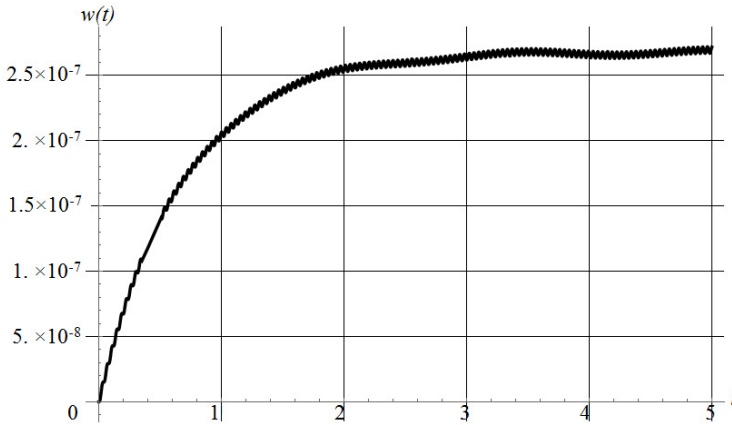


Рис. 4.1. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(4t)$

Fig. 4.1. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(4t)$

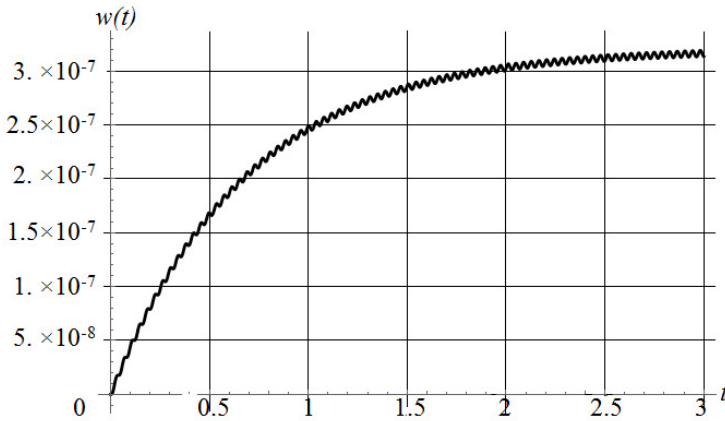


Рис. 4.2. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 6 \cdot 10^6$

Fig. 4.2. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 6 \cdot 10^6$

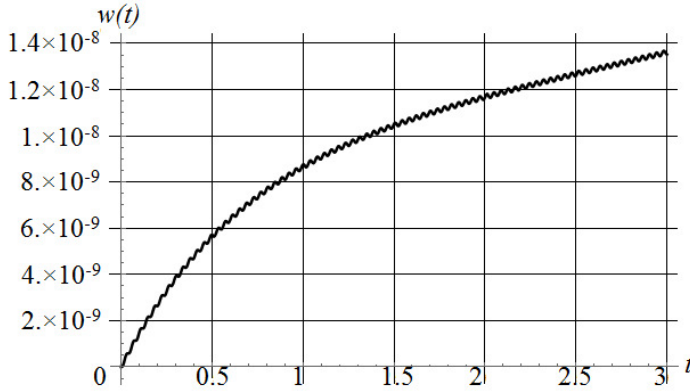


Рис. 4.3. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$

Fig. 4.3. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$

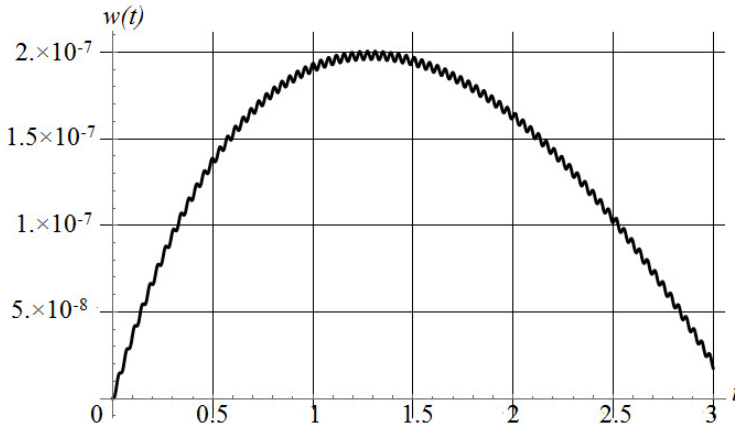


Рис. 4.4. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 t^2$

Fig. 4.4. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 t^2$

5. Численно-аналитический метод решения уравнения с отклоняющимся аргументом

Уравнение (4.1) будем решать методом шагов [1–5]. Обозначим $t_k = \frac{2l}{a_0} k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Через $y_k(t)$ обозначим решение задачи (4.1)–(4.3) на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) (Рис. 5.1).

В дальнейшем будем опираться на лемму.

Л е м м а 5.1. *Задача Коши для уравнения*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \quad t \geq t_{k-1} \quad (5.1)$$

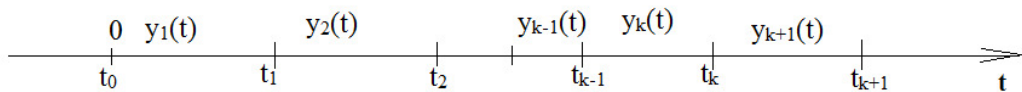


Рис. 5.1. Разбиение на отрезки

Fig. 5.1. Splitting into segments

с начальными условиями $y(t_{k-1}) = y_{k-1}, y'(t_{k-1}) = y'_{k-1}$ имеет решение

$$y(t) = A_k(t) + \int_{t_{k-1}}^t M_0(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $A_k(t), M_0(t, \tau)$ определяются выражениями

$$A_k(t) = \frac{-1}{W(t_{k-1})} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_{k-1}) & u_2(t_{k-1}) & y_{k-1} \\ u'_1(t_{k-1}) & u'_2(t_{k-1}) & y'_{k-1} \end{vmatrix}, \quad M_0(t, \tau) = \frac{1}{W(\tau)} \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix},$$

$u_1(t), u_2(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (5.1), $W(t)$ – определитель Вронского.

Уравнение (4.1) решаем на первом промежутке $t \in [t_0, t_1]$. С учетом условий (4.2), (4.3) на начальном множестве преобразуем уравнение (4.1) к виду (5.1)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = h_1(t), \tag{5.2}$$

где

$$h_1(t) = h(t) - [h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0] \eta_2(t - \frac{2l}{a_0}) - a_1 y'_0 \eta_1(t - \frac{2l}{a_0}) - a_2 y_0 \eta_2(t - \frac{2l}{a_0}) + a_3 y'_0 \eta_1(t - \frac{2l}{a_0}). \tag{5.3}$$

Согласно лемме, уравнение (5.2) с начальными условиями (4.2) имеет решение

$$y_1(t) = A_1(t) + \int_{t_0}^{t_1} M_0(t, \tau) h_1(\tau) d\tau, \quad A_1(t) = \frac{-1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_0) & u_2(t_0) & y_0 \\ u'_1(t_0) & u'_2(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Обозначим $z_k(t) = y'_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Из формулы (5.4) находим

$$z_1(t) = A'_1(t) + \int_{t_0}^{t_1} M(t, \tau) h_1(\tau) d\tau, \tag{5.5}$$

где $M(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} M_0(t, \tau)$.

На следующих промежутках $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) уравнение (4.1) будем решать методом индукции. Предположим, что на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ функция $z_k(t) = y'_k(t)$ уже найдена. Функцию $y_k(t)$ мы можем найти по формуле

$$y_k(t) = y_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t z_k(\tau) d\tau. \tag{5.6}$$

В самом деле, $y_k(t) = y_k(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t z_k(\tau) d\tau$, но $y_k(t_{k-1}) = y_{k-1}(t_{k-1})$.

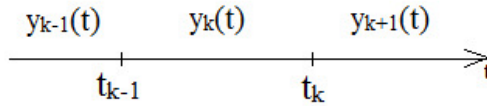


Рис. 5.2. Отрезок $[t_{k-1}, t_k]$

Fig. 5.2. The segment $[t_{k-1}, t_k]$

Из формулы (5.6) находим

$$y_k(t_k) = y_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} z_k(\tau) d\tau. \tag{5.7}$$

Теперь уравнение (4.1) преобразуем так

$$y''(t) + y''(t - \frac{2l}{a_0}) + a_1[y'(t) + y'(t - \frac{2l}{a_0})] + a_2[y(t) + y(t - \frac{2l}{a_0})] = h(t) + a_3y'(t - \frac{2l}{a_0}). \tag{5.8}$$

В уравнении (5.8) сделаем замену $v(t) = y(t) + y(t - \frac{2l}{a_0})$, получим уравнение

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_2v(t) = h(t) + a_3y'(t - \frac{2l}{a_0}). \tag{5.9}$$

На основании леммы уравнение (5.9) на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ эквивалентно уравнению

$$v(t) = A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3y'(\tau - \frac{2l}{a_0})] d\tau, \tag{5.10}$$

где

$$A_{k+1}(t) = \frac{-1}{W(t_k)} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_k) & u_2(t_k) & v(t_k) \\ u'_1(t_k) & u'_2(t_k) & v'(t_k) \end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Итак, на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ уравнение (4.1) эквивалентно уравнению

$$y_{k+1}(t) + y_k(t - \frac{2l}{a_0}) = A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3 y'_k(\tau - \frac{2l}{a_0})]d\tau.$$

Продифференцировав полученное уравнение, получим формулу для вычисления $z_{k+1}(t)$

$$z_{k+1}(t) = -z_k(t - \frac{2l}{a_0}) + A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3 z_k(\tau - \frac{2l}{a_0})]d\tau. \quad (5.12)$$

При этом величины $v'(t_k)$, $v(t_k)$ в формуле (5.11) находятся с учетом (5.6), (5.7) по формулам

$$\begin{aligned} v'(t_k) &= y'_k(t_k) + y'_k(t_{k-1}) = z_k(t_k) + z_k(t_{k-1}), \\ v(t_k) &= y_k(t_k) + y_k(t_{k-1}) = 2y_k(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} z_k(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Определив $z_{k+1}(t)$, находим $y_{k+1}(t)$ аналогично (5.6) по формуле

$$y_{k+1}(t) = y_k(t_k) + \int_{t_k}^t z_{k+1}(\tau)d\tau.$$

В системе Mathematica проведен расчет для уравнения (4.1) методом шагов на десяти отрезках длиной $\frac{2l}{a_0}$ при тех же значениях параметров механической системы, как и в примере 1. Результаты решения уравнения (4.1) методом шагов совпадают с численным решением этого уравнения методом Рунге–Кутта.

6. Заключение

Предложен метод исследования механической системы измерения давления в газожидкостных средах, приводящий к линейному дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом второго порядка, которое определяет связь между величиной деформации чувствительного элемента датчика и значением давления рабочей среды в камере сгорания двигателя. Получены точные решения уравнения, разработан численный метод, основанный на методе Рунге–Кутта, и метод шагов. Приведены примеры численных расчетов, которые позволяют исследовать динамику упругого элемента. Разработанный метод позволяет дополнить и усовершенствовать базу современного проектирования систем измерения давления в газожидкостных средах, а применение численных исследований дает возможность сократить время и средства, необходимые для натурных экспериментов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последствием. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 336 с.
4. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990. 168 с.
5. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. 356 с.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 448 с.
7. Wang Zh., Qian L., Lu S. On the existence of periodic solutions to a fourth-order p -Laplacian differential equation with a deviating argument // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2010. Vol.11, Issue 3. P. 1660-1669. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.03.018>.
8. Bica A.M., Curila M., Curila S. About a numerical method of successive interpolations for two-point boundary value problems with deviating argument // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol.217, Issue 19. P. 7772-7789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.085>.
9. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
10. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // *Измерительная техника*. 2008. № 3. С. 26–30.
11. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. Кн.2; пер. с франц. М.: Мир, 1992. 419 с.
12. Андреев А.И., Жуков А.В., Яковишин А.С. Разработка методики в области проектирования мембранных датчиков давления // *Вестник ПНИПУ. Машиностроение. Материаловедение*. 2022. Т. 24, № 1. С. 28–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9877/2022.1.04>.
13. Басов М. В., Пригодский Д. М., Холодков Д. А. Моделирование чувствительного элемента датчика давления на основе биполярного тензотранзистора // *Датчики и системы*. 2017. №6. С.17–24.
14. Chen J. Flexible pressure sensors and their applications // *Highlights in Science, Engineering and Technology*. 2023. Vol. 44. P. 54–60. DOI: <https://doi.org/10.54097/hset.v44i.7193>.

15. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S*. 2014. Vol. 7, Issue 6. P. 1133-1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>.
16. Paidoussis M. P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across *Applied Mechanics // Journal. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 310, Issue. 3. P. 462–492. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>.
17. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2015. Vol. 55. P. 204-217. DOI:[10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013).
18. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support // *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 14. P. 2986-2993. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.07.376>.
19. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>
20. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2020. Т. 22, № 3. С. 352-367. DOI: [10.15507/2079-6900.22.202003.352-367](https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367).
21. Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2021. Т. 23, № 4. С. 461-471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>.
22. Velmisov P., Tamarova Y., Pokladova Y. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // *AIP Conference Proceedings*, 2021, Vol.2333, Issue 1. Article number: 120004. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041778>.
23. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. Vol. 255, Issue 5. P. 587-594. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05395-2>.

*Поступила 15.10.2024; доработана после рецензирования 12.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. R. Bellman, K. L. Kuk, *Differential-difference equations*, Mir, Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.

2. A. D. Myshkis, *Linear differential equations with retarded argument*, Nauka, Moscow, 1972 (In Russ.), 352 p.
3. E. A. Andreeva, V. B. Kolmanovsky, L. E. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, Science. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1992 (In Russ.), 336 p.
4. V. G. Kurbatov, *Linear differential-difference equations*, Voronezh State University Publishing House, Voronezh, 1990 (In Russ.), 168 p.
5. S. V. Norkin, *Differential equations of the second order with retarded argument*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, M., 1965 (In Russ.), 356 p.
6. V. B. Kolmanovsky, V. R. Nosov, *Stability and periodic regimes of regulated systems with consequences*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1981 (In Russ.), 448 p.
7. Z. Wang, L. Qian, S. Lu, “On the existence of periodic solutions to a fourth-order p-Laplacian differential equation with a deviating argument”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11:3** (2010), 1660–1669. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.03.018>.
8. A. M. Bica, M. Curila, S. Curila, “About a numerical method of successive interpolations for two-point boundary value problems with deviating argument”, *Applied Mathematics and Computation.*, **217:19** (2011), 7772–7789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.085>.
9. L. G. Etkin, *Vibration sensors. Theory and practice*, Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
10. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, “Universal pressure transducer”, *Measurement Techniques*, **51:3** (2008), 269–275. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11018-008-9035-z> (In Russ.).
11. J. Ash, P. Andre, Zh. Bofron, *Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2*, Mir, Moscow, 1992 (In Russ.), 419 p.
12. A. I. Andreev, A. V. Zhukov, A. S. Yakovishin, “Development of a methodology for the design of membrane pressure sensors”, *Bulletin of PNRPU. Mechanical engineering, materials science*, **24:1** (2022), 28–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9877/2022.1.04>.
13. M. V. Basov, D. M. Prigodskiy, D. A. Kholodkov, “Modeling of a sensitive element for pressure sensor based on a bipolar strain gauge piezotransistor”, *Sensors & Systems*, **6** (2017), 17–24.
14. J. Chen, “Flexible pressure sensors and their applications”, *Highlights in Science, Engineering and Technology*, **44** (2023), 54–60. DOI: <https://doi.org/10.54097/hset.v44i.7193>.

15. E. Aulisa, A. Ibragimov, E.Y. Kaya-Cekin, “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **7**:6 (2014), 1133–1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>.
16. M.P. Paidoussis, “The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics”, *Journal of Sound and Vibration*, **310**:3 (2008), 462–492. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>.
17. M. Kheiri, M.P. Paidoussis, “Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **55** (2015), 204–217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>.
18. R.T. Faal, D. Derakhshan, “Flow-Induced vibration of pipeline on elastic support”, *Procedia Engineering*, **14** (2011), 2986–2993. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>.
19. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, “Mathematical modeling of the dynamics of the aeroelastic "pipeline – pressure sensor" system”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, **2** (2024), 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>.
20. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, “Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **22**:3 (2020), 352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>.
21. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin, “Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **23**:4 (2021), 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>.
22. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova, “Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media”, *AIP Conference Proceedings*, **2333**:1 (2021), 120004. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041778>.
23. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova, “Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 587–594. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05395-2>.

Submitted 15.10.2024; Revised 12.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 70 – ЛЕТИЮ
НИКОЛАЯ ДМИТРИЕВИЧА КУЗЬМИЧЕВА

Николай Дмитриевич Кузьмичев родился 24 ноября 1954 г. в с. Чеберчине Дубёнского района Мордовской АССР. В 1972 г. закончил Чеберчинскую среднюю школу и в этом же году поступил в Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева на физический факультет. В феврале 1975 г. поступил в Высшую школу физиков (специальный факультет физики, СФФ) при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ), которую окончил в 1978 г. Будучи студентом СФФ, Н. Д. Кузьмичев слушал лекции и обучался на практических занятиях у таких известных ученых – математиков, как В. Я. Арсенин, К. В. Брушлинский и др. Физическое образование получал под руководством известных ученых физиков, например, Н. Г. Басова, В. Л. Гинзбурга, А. П. Шотова, Ю. А. Быковского, Ю. М. Кагана, В. Ф. Елесина, А. С. Александрова и др. Для

выполнения дипломной работы был прикомандирован в сектор оптических и сверхпроводящих свойств металлов и сплавов оптической лаборатории Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР (ФИАН). Руководителем дипломной работы была известный учёный д.ф.-м.н., профессор Галина Павловна Мотулевич.

В 1979 г. Николай Дмитриевич поступил в аспирантуру МИФИ и для продолжения научных исследований был также прикомандирован в ФИАН, где диссертационную работу тоже выполнял под руководством Г. П. Мотулевич. После успешного окончания аспирантуры в 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности «физика твёрдого тела» на тему «Оптические свойства ряда соединений с решетками A15 и B1 на основе ниобия».

С 1983 г. Н. Д. Кузьмичев работает в Рузаевском институте машиностроения (РИМ), филиале Мордовского госуниверситета им. Н. П. Огарева. В настоящее время Николай Дмитриевич занимает должность профессора кафедры конструкторско-технологической информатики РИМ. В стенах РИМ в 1988 г. Н. Д. Кузьмичев организовал лабораторию по исследованию высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Исследования в лаборатории проводились совместно с ФИАН. Сотрудники лаборатории защитили кандидатские диссертации, а сам Н. Д. Кузьмичев в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова в 2002 г. защитил докторскую

диссертацию, которая была посвящена исследованию нелинейных магнитных свойств и вольт-амперных характеристик ВТСП. В 2003 г. Н. Д. Кузьмичев получил учёное звание профессора.

Научная деятельность Н. Д. Кузьмичева в основном посвящена физике конденсированного состояния, а именно изучению сверхпроводящего состояния в низкотемпературных и высокотемпературных сверхпроводниках и разработке технических устройств на их основе.

Основными научными достижениями Н. Д. Кузьмичева в области физики конденсированного состояния являются: разработка модели критического состояния среды Джоузефсона, метод определения температуры перехода Березинского-Костерлица-Таулеса, разработка радиоизмерительных на основе слабосвязанной системы ВТСП, разработка метода модуляционного Фурье-анализа (МФА) для изучения нелинейных и необратимых процессов и др.

К математическим научным достижениям Н. Д. Кузьмичева можно отнести разработку математических основ обоснования метода МФА. Были получены в общем виде ряды для коэффициентов Фурье при разложении бесконечно дифференцируемой функции с гармонически модулированным аргументом в ряд Тейлора. Также решена обратная задача, то есть получены ряды для производных, выраженные через коэффициенты Фурье функции. Поставлена и математически обоснована задача восстановления исследуемой характеристики и её производных из зависимостей амплитуд гармоник, полученных на эксперименте при статическом и гармоническом воздействиях на исследуемый объект. Выполнен анализ корректности данной задачи, дана оценка точности восстановления и приведено доказательство применимости развитой методики для функций, принадлежащих классу Гёльдера-Лишшица.

Николай Дмитриевич опубликовал более 200 научных работ в отечественных и иностранных журналах.

Н. Д. Кузьмичев около 10 лет являлся заместителем главного редактора журнала «Журнал Средневолжского математического общества». В настоящее время является членом редколлегии данного журнала. С 2008 по 2013 годы был членом совета по защите диссертаций по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» при Национальном исследовательском Мордовском государственном университете им. Н. П. Огарева. Николай Дмитриевич является постоянным участником научных конференций и школ-семинаров по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, проводимых в МГУ им. Н. П. Огарева.

Свой юбилей Николай Дмитриевич встречает в полном расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, счастья и благополучия!

*Редколлегия журнала,
Средне-Волжское математическое общество,
Коллектив Национального исследовательского Мордовского
государственного университета им. Н. П. Огарёва*

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

The rules for article layout in the LaTeX system

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

- а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

- г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате jpg.

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}
```

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name \ \ \textbf{Table} \ref{shamanaevtable1}.} Table name in
English \label{shamanaevtable1}
```



```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in format jpg.

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oligier
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`
`\jour Ogarev-online`
`\vol 20`
`\yr 2016`
`\lang In Russ.`
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

Articles in collections in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`
`\publaddr Ulyanovsk`
`\publ UIGTU Publ.`
`\yr 2014`
`\issue 10`
`\pages 4–13`
`\lang In Russ.`

Books (monographs and collections) in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`
`\by Yu. N. Bibikov`
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`
`\publaddr Moscow`
`\publ Visshay shkola Publ.`
`\yr 1991`
`\totalpages 303`
`\lang In Russ.`

Conference proceedings in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`
`\by V. G. Malinov`
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`
`\bookvol II`
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`
`\yr 2016`
`\pages 48–50`
`\publ FRC CSC RAS Publ.`
`\publaddr Moscow`

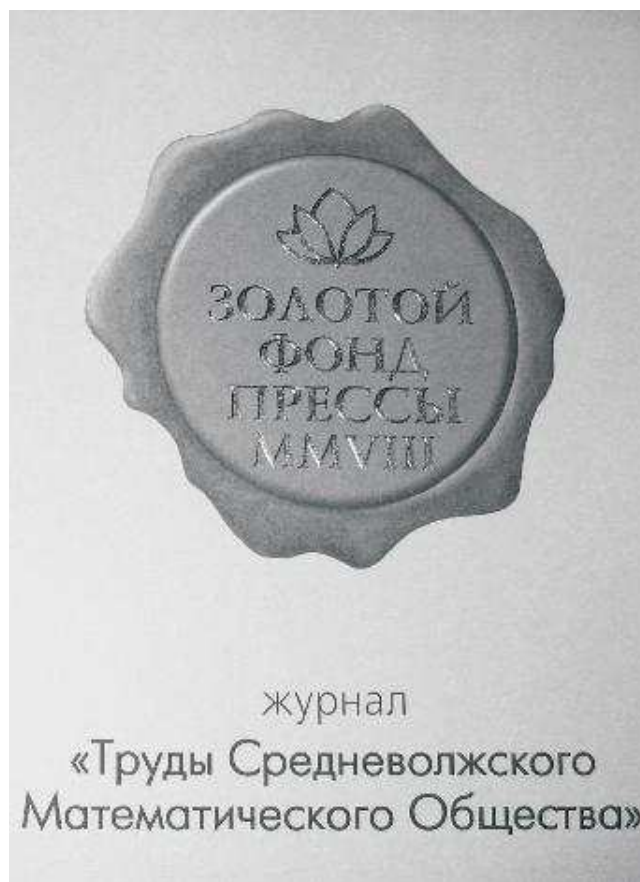
Алфавитный указатель авторов

Багаев А. В.	359
Балабина Т. Ю.	424
Вельмисов П. А.	442
Дерюгин Ю. Н.	424
Кондратьева А. В.	392
Косов А. А.	376
Кудряшов Е. А.	424
Кузнецов М. И.	392
Ладонкина М. Е.	404
Маценко П. К.	442
Повещенко Ю. А.	404
Тамарова Ю. А.	442
Чжан Х.	404

Author Index

A. V. Bagaev	359
T. Y. Balabina	424
P. A. Velmisov	442
Yu. N. Deryugin	424
A. V. Kondrateva	392
A. A. Kosov	376
E. A. Kudryashov	424
M. I. Kuznetsov	392
M. E. Ladonkina	404
P. K. Macenko	442
Yu. A. Poveschenko	404
Yu. A. Tamarova	442
H. Zhang	404

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 19.12.2024. Дата выхода в свет 31.12.2024. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,9 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 716.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 19.12.2024. Date of publishing 31.12.2024. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,9.

Number of copies 100. Order no. 716.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

