

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 26 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 3

2024

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 26, № 3. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 26, NO. 3. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

С 2024 года журналу в базе данных Scopus присвоены квартили Q3 по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) и Q4 по направлению Control and Optimization.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

Since 2024, the journal in the Scopus database has been assigned Q3 quartiles by area Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) and Q4 in Control and Optimization.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2024

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа — обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных урав-

нений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), President of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Кольчурина О. А.

Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами 231

Леонтьев В. Л.

Сходимость метода Фурье, связанного с ортогональными сплайнами . . . 245

Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г.

Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса 260

Шаманаев П. А.

О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению 280

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Анкилов Г. А.

Математическое моделирование системы измерения давления в авиационных двигателях 294

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Сыромясов А. О., Макаров Ю. А., Ерофеев В. Т.

Моделирование разрушения внецентренно нагруженной стеновой панели, изготовленной по каркасной технологии 313

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 326

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 330

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 334

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 340

Алфавитный указатель авторов 344

Contents

MATHEMATICS

O. A. Kolchurina	
The energy function for diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers	231
V. L. Leontiev	
Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines	245
I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev	
Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept	260
P. A. Shamanaev	
On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation	280

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, G. A. Ankilov	
Mathematical modeling of pressure measurement system in aircraft engines .	294

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

A. O. Syromyasov, Yu. A. Makarov, V. T. Erofeev	
Destruction of multilayer concrete slab that is off-center loaded	313

The rules of article design (in Russian)	326
The rules of article design (in English)	330
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian)	334
The rules for article layout in the LaTeX system (in English)	340
Author Index	344

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.231-244

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами

О. А. Кольчурина

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются Ω -устойчивые диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых ориентируемых многообразиях размерности $n \geq 3$, все нетривиальные базисные множества которых являются либо растягивающимися аттракторами, либо сжимающимися репеллерами коразмерности 1. Благодаря простой топологической структуре бассейнов аттракторов и репеллеров такого типа можно осуществить переход от данной динамической системы с нетривиальными базисными множествами к регулярной системе, представляющей собой гомеоморфизм с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Как известно, не все дискретные динамические системы обладают энергетической функцией — глобальной функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством системы. Контрпримеры были найдены как среди регулярных диффеоморфизмов, так и среди диффеоморфизмов с хаотической динамикой. Основным результатом данной работы является доказательство того, что топологические энергетические функции для исходного диффеоморфизма и соответствующего ему регулярного гомеоморфизма существуют или отсутствуют одновременно. Таким образом, многочисленные результаты, полученные в области существования энергетических функций для систем с регулярной динамикой, например, для диффеоморфизмов Морса-Смейла, можно применить к исследованию диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности 1.

Ключевые слова: энергетическая функция, Ω -устойчивые диффеоморфизмы, растягивающийся аттрактор, сжимающий репеллер

Для цитирования: Кольчурина О. А. Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 231–244. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.231-244>

Об авторах:

Кольчурина Ольга Александровна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4998-2186>, oakolchurina@edu.hse.ru

© Кольчурина О. А.



MSC2020 37D20

The Energy Function for Diffeomorphisms with Expanding Attractors and Contracting Repellers

O. A. Kolchurina

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper we consider Ω -stable diffeomorphisms defined on smooth closed orientable manifolds of dimension $n \geq 3$, whose all nontrivial basic sets are either expanding attractors or contracting repellers of co-dimension 1. Due to the simple topological structure of the basins of such attractors and repellers, one can make a transition from a given dynamical system with nontrivial basic sets to a regular system which is a homeomorphism with a finite hyperbolic chain-recurrent set. It is well known that not every discrete dynamical systems has energy functions, i.e. a global Lyapunov function whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of the system. Counterexamples were found both among regular diffeomorphisms and among diffeomorphisms with chaotic dynamics. The main result of this paper is the proof of the fact that the topological energy functions for the original diffeomorphism and for its corresponding regular homeomorphism exist or do not exist simultaneously. Thus, numerous results obtained in the field of existence of energy functions for systems with regular dynamics, e.g., for Morse–Smale diffeomorphisms, may be applied to the study of the diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers of co-dimension 1.

Keywords: energy function, Ω -stable diffeomorphism, expanding attractor, contracting repeller

For citation: O. A. Kolchurina. The Energy Function for Diffeomorphisms with Expanding Attractors and Contracting Repellers. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 231–244. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.231-244>

About the authors:

Olga A. Kolchurina, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4998-2186>, oakolchurina@edu.hse.ru

1. Введение

«Фундаментальная теорема динамических систем» Ч. Конли [1] гласит, что глобальная функция Ляпунова¹ существует для любой динамической системы, заданной на компактном многообразии. Естественно ожидать, что благодаря строгому убыванию функции Ляпунова вне цепно рекуррентного множества ее критические точки могут находиться только в цепно рекуррентном множестве, однако это неверно для произвольных динамических систем. Поэтому рассматриваются *энергетические функции* — функции

¹Строгие определения для терминов из этой части, посвященной истории изучения энергетической функции, будут даны ниже для удобства читателя.

Ляпунова, у которых множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы.

Одним из первых вопросом существования энергетических функций начал заниматься С. Смейл. В 1961 г. он доказал существование энергетической функции Морса (непрерывной функции, критическое множество которой состоит из невырожденных точек) у градиентно-подобных потоков [2]. Его результат был расширен К. Мейером в 1968 г. В своей работе [3] К. Мейер построил энергетическую функцию Морса-Ботта — непрерывную функцию, у которой любая компонента связности критического множества является или критической точкой, или критическим подмногообразием — для произвольного потока Морса-Смейла. Дж. Фрэнкс в 1985 г. указал на существование энергетической функции для любого гладкого потока на компактном многообразии [4].

Для потоков с конечным числом гиперболических периодических орбит, обобщающих потоки Морса-Смейла, имеет смысл искать энергетическую функцию среди функций Морса или Морса-Ботта. Результаты в этой области были получены А. А. Босовой, В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, С. Х. Зининой, А. Е. Колобяниной, В. Е. Кругловым, О. В. Починкой [5–9].

В отличие от потоков, каскады не всегда обладают энергетической функцией даже в топологическом смысле (см., например, обзор [10]). Первый пример такого каскада построил Д. Пикстон в 1977 г. на трехмерной сфере [11]. Пример Пикстона представляет собой диффеоморфизм Морса-Смейла² с четырьмя неподвижными точками. Энергетическая функция в данном примере отсутствует из-за дикого вложения сепаратрис в объемлющее многообразие. В этой же работе доказывается существование энергетической функции Морса для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на поверхностях.

Энергетические функции для каскадов с регулярной динамикой изучали В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Т. М. Митрякова, А. Е. Шишенкова и др. [12–13]. Следует отметить работу [14], в которой В. З. Гринес, Ф. Лауденбах и О. В. Починка ввели понятие динамически упорядоченной функции Морса-Ляпунова для произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях и доказали критерий существования такой энергетической функции. Условия существования определяются типом вложения одномерных аттракторов и репеллеров, каждый из которых является объединением нульмерных и одномерных неустойчивых и устойчивых многообразий орбит соответственно. Недавним результатом М. К. Бариновой, В. З. Гринеса и О. В. Починки в работе [15] стало доказательство критерия существования непрерывной энергетической функции Морса для регулярных гомеоморфизмов 3-сферы, согласно которому существование такой функции равносильно асимптотической тривиальности одномерных седловых многообразий.

Изучаются энергетические функции и для каскадов с хаотической динамикой. Для 2-многообразий в 2022 г. М. К. Барина выдвинула класс динамических систем на поверхностях, у которых нет энергетических функций [16], показав, что Ω -устойчивый 2-диффеоморфизм с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек не обладает энергетической функцией. А в работе [17] М. К. Барина (Носкова), В. З. Гринес и О. В. Починка установили существование энергетической функции для Ω -устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых двумерных многообразиях с нетривиальными базисными множествами размерности один. Построенная ими в этом случае энергетическая функция является функцией Морса вне нетри-

² Диффеоморфизмом Морса-Смейла называют структурно устойчивый диффеоморфизм, заданный на замкнутом n -многообразии M^n , с конечным неблуждающим множеством.

виальных аттракторов и репеллеров. Для динамических систем на 3-многообразиях М. К. Баринава, В. З. Гринес и О. В. Починка в работе [18] установили существование энергетической функции для структурно устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых 3-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор. Более того, построенная ими функция является функцией Морса вне нетривиального аттрактора. Кроме этого в работе [19] было доказано существование энергетической функции для Ω -устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых ориентируемых трехмерных многообразиях, с растягивающимся канонически вложенным аттрактором и сжимающимся репеллером размерности 1.

Работы М. К. Бариновой и Е. К. Шустовой [20–21] посвящены изучению энергетических функций для прямых произведений дискретных динамических систем. Они доказали, что отсутствие энергетической функции для одного из сомножителей не является достаточным условием для отсутствия такой функции у прямого произведения [20]. Также они показали, что для диффеоморфизмов, уже обладающих энергетическими функциями, их прямое произведение также обладает энергетической функцией [21].

Настоящая статья посвящена доказательству критерия существования топологической энергетической функции для класса n -диффеоморфизмов.

Пусть M^n — гладкое замкнутое ориентируемое n -многообразие с метрикой d и $f : M^n \rightarrow M^n$ — Ω -устойчивый³ диффеоморфизм. Из результатов [22–25] следует, что для таких диффеоморфизмов цепно рекуррентное множество R_f гиперболично и совпадает с неблуждающим множеством. Более того, верна теорема Смейла о спектральном разложении [26], т. е. неблуждающее множество можно представить в виде конечного объединения непересекающихся, компактных, инвариантных и топологически транзитивных подмножеств, называемых *базисными*. Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют *тривиальным*, в противном случае — *нетривиальным*.

У каждой точки x базисного множества Λ существуют устойчивое и неустойчивое многообразия W_x^s и W_x^u , определенные следующим образом:

$$W_x^s = \{y \in M^n \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\},$$

$$W_x^u = \{y \in M^n \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) = 0\}.$$

Аттрактором (репеллером) Ω -устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ называется базисное множество Λ (R), у которого существует компактная окрестность U_Λ ($U(R)$), называемая захватывающей, такая что $f(U_\Lambda) \subset \text{int} U_\Lambda$ ($f^{-1}(U(R)) \subset \text{int} U(R)$) и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_\Lambda) = \Lambda$ ($\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U(R)) = R$). В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, аттрактор (репеллер) называют *растягивающимся (сжимающимся)*. Множество $W_\Lambda^s = \bigcup_{x \in \Lambda} W_x^s$ ($W_R^u = \bigcup_{x \in R} W_x^u$) называется *бассейном аттрактора (репеллера)*.

Обозначим через G_Ω класс Ω -устойчивых диффеоморфизмов, заданных на гладких замкнутых ориентируемых многообразиях размерности $n \geq 3$, все нетривиальные базисные множества которых являются либо растягивающимися аттракторами, либо сжимающимися репеллерами коразмерности⁴ 1.

³ Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называют Ω -устойчивым, если C^1 -близкие к f диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах.

Точка $p \in M^n$ называется *регулярной* для непрерывной функции $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, если существует окрестность $V_p \subset M^n$ точки p и гомеоморфизм на образ $\phi_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_p(y) = (x_1(y), x_2(y) \dots x_n(y))$ такой, что

$$x_i(p) = 0, \text{ где } i \in 1, 2 \dots n, \text{ и } \varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y).$$

В противном случае точку p называют *критической* (Рис. 1.1).

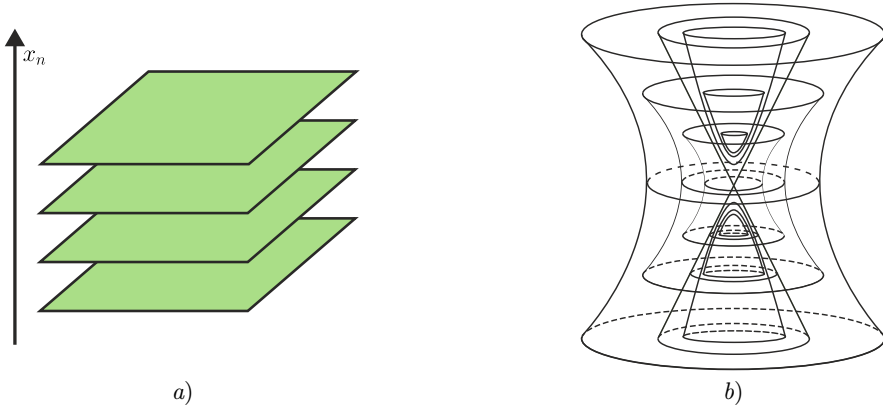


Рис. 1.1. Пример множеств уровня в окрестности регулярной и критической точки

Fig. 1.1. Example of level sets in the neighbourhood of a regular and critical point

Непрерывная функция $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для каскада f , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(f(x)) < \varphi(x), x \notin R_f$
- 2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x, y \in R_f$ и $x \sim y$, в том смысле, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -цепи⁵, соединяющие x с y и y с x . (Это условие не является обязательным;
- 3) $\varphi(R_f)$ — нигде не плотное подмножество \mathbb{R} .

Энергетическая функция — функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством диффеоморфизма. Если несущее многообразие гладкое, то часто от энергетической функции требуется еще и гладкость.

Известно, что для размерности 4 и более существуют топологические многообразия с несколькими гладкими структурами. Одним из ярких примеров является работа Милнора [27], в которой он приводит различные гладкие структуры на многообразии, гомеоморфном семимерной сфере. Есть также многообразия вовсе не допускающие гладких структур, их называют экзотическими. В своих работах С. Дональдсон и М. Фридман [28] показали, что многие односвязные компактные многообразия размерности 4 не обладают гладкой структурой. Поэтому на таких многообразиях рассматриваются

⁴Подмножество является подмножеством коразмерности 1, если размерность подмножества отличается на единицу от размерности самого множества.

⁵ ε -цепью длины $m \in \mathbb{N}$, соединяющей точку x с точкой y , для гомеоморфизма f называют конечный набор точек $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$, такой что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq m$.

только каскады, порожденные гомеоморфизмами и топологические – непрерывные – энергетические функции.

В разделе [2] будет показано, что каждому диффеоморфизму f из класса G_Ω с множеством нетривиальных аттракторов \mathcal{A} и репеллеров \mathcal{R} соответствует гомеоморфизм \tilde{f} с регулярной динамикой (цепно рекуррентное множество которого состоит из конечного числа гиперболических периодических орбит [8]), называемый «регулярный спутник», т. е. имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 1.1. *Для диффеоморфизма f из класса G_Ω существует гомеоморфизм $\tilde{f} : \tilde{M}^n \rightarrow \tilde{M}^n$, такой что $f|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ топологически сопряжен с $\tilde{f}|_{\tilde{M}^n \setminus (\tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{R}})}$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ являются подмножествами множеств всех стоков и источников \tilde{f} соответственно.*

Гладкий аналог этой теоремы доказан в статье [29] в случае, когда $n = 3$ и все нетривиальные базисные множества являются аттракторами.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы, которое будет представлено в разделе [3]:

Т е о р е м а 1.2. *Диффеоморфизм f из класса G_Ω обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его “регулярный спутник” обладает энергетической функцией.*

2. Переход к «регулярному спутнику»

Из работы [30], с учетом выкладок из Леммы 2.2 работы [15], справедливо следующее утверждение:

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть Λ – растягивающийся аттрактор коразмерности 1 Ω -устойчивого диффеоморфизма f , заданного на ориентируемом многообразии M^n . Существует захватывающая окрестность $U(\Lambda)$ аттрактора Λ , границей которой является объединение конечного числа $(n - 1)$ -мерных сфер и каждая компонента связности пространства орбит ограничения диффеоморфизма f на множество $W_\Lambda^s \setminus \Lambda$ гомеоморфно либо $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо $\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$.*

Аналогичное предложение верно и для репеллеров.

Обозначим за $U(\mathcal{A})$, $U(\mathcal{R})$ захватывающие окрестности аттрактора \mathcal{A} и репеллера \mathcal{R} такие, как в предложении 2.1 и с минимальным количеством компонент связности границы, т. е. $\partial(U(\mathcal{A}))$ состоит из n_ω копий $(n - 1)$ -мерных сфер и $\partial(U(\mathcal{R}))$ состоит из n_α таких копий. Положим $\mathcal{M} = M^n \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$. Несущее многообразие “регулярного спутника” будет иметь вид $\tilde{M}^n = \mathcal{M} \cup_h (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})$, где $h : (W_\mathcal{A}^s \setminus \mathcal{A}) \cup (W_\mathcal{R}^u \setminus \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}$ – гомеоморфизм.

Докажем Теорему 1.1, т. е. покажем, что для любого диффеоморфизма f из класса G_Ω существует гомеоморфизм $\tilde{f} : \tilde{M}^n \rightarrow \tilde{M}^n$, у которого n_ω стоков и n_α источников, расположенных в точках $q(\{O\} \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}) \subset \tilde{M}^n$, где $q : \mathcal{M} \sqcup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}) \rightarrow \tilde{M}^n$ – естественная проекция и O – начало координат. Причем $\tilde{f}|_{\tilde{M}^n \setminus q(\{O\} \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})}$ топологически сопряжен с $f|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Аттрактор \mathcal{A} и репеллер \mathcal{R} делят свои бассейны на конечное число компонент связности. Более того, $W_\mathcal{A}^s \setminus \mathcal{A}$ можно разбить на несколько непересекающихся множеств

B_i^A , состоящих из m_i^A связных подмножеств с периодом m_i^A , где $i \in \{1, 2, \dots, m_A\}$. Аналогичным образом множество $W_{\mathcal{R}}^u \setminus \mathcal{R}$ разбивается на множества B_j^R , состоящие из m_j^R периодических компонент, где $j \in \{1, 2, \dots, m_R\}$. Тогда $\sum_{i=1}^{m_A} m_i^A = n_\omega$ и $\sum_{j=1}^{m_R} m_j^R = n_\alpha$.

Из Предложения 2.1 следует, что все компоненты связности B_i^A (B_j^R) гомеоморфны $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, а пространства орбит $f^{m_i^A} |_{B_i^A}$ ($f^{m_j^R} |_{B_j^R}$) гомеоморфны $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, если $f^{m_i^A} |_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ ($f^{m_j^R} |_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$) сохраняет ориентацию, и $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, если меняет. Отметим, что такое же пространство орбит у ограничения действия диффеоморфизма с гиперболическими стоками и источниками на их бассейны без самих стоков и источников.

Положим $g_i^A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i^A} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$ — гомеоморфизм с m_i^A стоками, расположенными в точках $\{O\} \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$, $g_i^A = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}, (t+1) \bmod m_i^A \right)$, если $f^{m_i^A} |_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ сохраняет ориентацию, а если меняет, то $g_i^A = \left(a \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}, (t+1) \bmod m_i^A \right)$, где $a = -1$, если $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_1$, и $a = 1$ в остальных случаях. Аналогично определим $g_j^R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_j^R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$ — гомеоморфизм с m_j^R источниками, расположенными в $\{O\} \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$, $g_j^R = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, (t+1) \bmod m_j^R)$, если $f^{m_j^R} |_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ сохраняет ориентацию, и $g_j^R = (2ax_1, 2x_2, \dots, 2x_n, (t+1) \bmod m_j^R)$, если $f^{m_j^R} |_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ меняет ориентацию.

Поскольку пространства орбит $f^{m_i^A} |_{B_i^A}$ и $f^{m_j^R} |_{B_j^R}$ гомеоморфны пространствам орбит $g_i^A |_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}$ и $g_j^R |_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}$, то существуют гомеоморфизмы для аттракторов $h_i^A : B_i^A \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$, сопрягающие $f |_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ и $g_i^A |_{(\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_i^A}}$, и гомеоморфизмы для репеллеров $h_j^R : B_j^R \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$. Причем h_i^A и h_j^R могут быть выбраны таким образом, что $h_i^A(\partial \widehat{M} \cap B_i^A) = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$ и $h_j^R(\partial \widehat{M} \cap B_j^R) = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$.

Наконец определим гомеоморфизмы $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}$ и $h : ((W_{\mathcal{A}}^s \setminus \mathcal{A}) \cup (W_{\mathcal{R}}^u \setminus \mathcal{R})) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}$, составленные из g_i^A и g_j^R , h_i^A и h_j^R соответственно. Тогда $\widehat{M}^n = \widehat{M} \cup_h (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})$. Обозначим естественную проекцию $q : \widehat{M} \sqcup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}) \rightarrow \widehat{M}^n$. Тогда искомым гомеоморфизм $\tilde{f} : \widehat{M}^n \rightarrow \widehat{M}^n$ определен следующим образом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} qf(q |_{\mathcal{M}})^{-1}, & x \in q(\mathcal{M}), \\ qg(q |_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})})^{-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Доказательство критерия

В этом разделе приводится доказательство основной теоремы:

Т е о р е м а 3.1. *Диффеоморфизм f из класса G_Ω обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его «регулярный спутник» обладает энергетической функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .

В первую очередь докажем достаточность. Пусть существует энергетическая функция $\tilde{\varphi} : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ для гомеоморфизма \tilde{f} , который является «регулярным спутником» для

диффеоморфизма f . Покажем, что в таком случае существует энергетическая функция φ и для f .

Введем специальную энергетическую функцию $\tilde{\varphi} : \tilde{M}^n \rightarrow [0, 1]$, для гомеоморфизма \tilde{f} , которая принимает значение 0 на множестве $\tilde{\mathcal{A}}$ и 1 на множестве $\tilde{\mathcal{R}}$. Напомним, что $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ являются множествами, состоящими из периодических стоков и источников, на которые заменили нетривиальные аттракторы и репеллеры при переходе к «регулярному спутнику». Для этого докажем следующую лемму:

Л е м м а 3.1. *Если для регулярной системы $\tilde{f} : \tilde{M}^n \rightarrow \tilde{M}^n$ существует энергетическая функция $\tilde{\varphi} : \tilde{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то существует и такая энергетическая функция $\varphi : M^n \rightarrow [0, 1]$, что:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{\mathcal{R}}, \\ 0, & x \in \tilde{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку область определения функции $\tilde{\varphi}$ является компактным множеством, то она достигает своего максимума и минимума. Заметим, что $\min(\tilde{\varphi}) \neq \max(\tilde{\varphi})$, т. к. блуждающее множество не пусто, а значит, существует линейная функция $l_{\tilde{\varphi}} : [\min(\tilde{\varphi}), \max(\tilde{\varphi})] \rightarrow [0, 1]$, определенная следующим образом:

$$l_{\tilde{\varphi}}(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x) - \min(\tilde{\varphi})}{\max(\tilde{\varphi}) - \min(\tilde{\varphi})}.$$

Тогда определена композиция $\tilde{\varphi}_{norm} = l_{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{M}^n \rightarrow [0, 1]$.

Рассмотрим орбиту O_{ω_i} периодического стока $\omega_i \in \tilde{\mathcal{A}}$, где $i \in 1, 2, \dots, n_{\omega}$. Пусть $\tilde{U}(O_{\omega_i})$ — захватывающая окрестность орбиты O_{ω_i} , тогда для $\varepsilon > 0$, таких что неравенство $\tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon < \max(\tilde{\varphi}_{norm}(\tilde{U}(O_{\omega_i})))$ выполняется, можно определить ε -окрестность:

$$U_{\varepsilon}(O_{\omega_i}) = \tilde{\varphi}_{norm}^{-1}([\tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i), \tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon]) \cap \tilde{U}(O_{\omega_i}).$$

Заметим, что тогда $\max(\tilde{\varphi}_{norm}(U_{\varepsilon}(O_{\omega_i}))) = \tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon$. Определим линейную функцию $\delta_{A_i} : \tilde{\varphi}_{norm}(U_{\varepsilon}(O_{\omega_i})) \rightarrow [0, \tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon]$ следующим образом (Рис. 3.1):

$$\delta_{A_i} = (\tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon) \frac{x - \tilde{\varphi}_{norm}(\omega_i)}{\varepsilon}.$$

Аналогичным способом найдем линейную функцию δ_{R_j} для периодических источников $\alpha_j \in \tilde{\mathcal{R}}$, где $j \in [1, 2, \dots, n_{\alpha}]$. Пусть $\tilde{U}(O_{\alpha_j})$ — захватывающая окрестность орбиты O_{α_j} и для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon > \min(\tilde{\varphi}_{norm}(\tilde{U}(O_{\alpha_j})))$. Определим ε -окрестность для множества O_{α_j} :

$$U_{\varepsilon}(O_{\alpha_j}) = \tilde{\varphi}_{norm}^{-1}([\tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon, \tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j)]) \cap \tilde{U}(O_{\alpha_j}).$$

Заметим, что тогда $\min(\tilde{\varphi}_{norm}(U_{\varepsilon}(O_{\alpha_j}))) = \tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon$. Определим линейную функцию $\delta_{R_j} : \tilde{\varphi}_{norm}(U_{\varepsilon}(O_{\alpha_j})) \rightarrow [\tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon, 1]$ как

$$\delta_{R_j}(x) = 1 + \frac{(x - \tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j))(1 - \tilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Теперь получим искомую энергетическую функцию $\tilde{\varphi}_*(x)$, рассмотрев отображение из \tilde{M}^n в \mathbb{R} (рис 3.2):

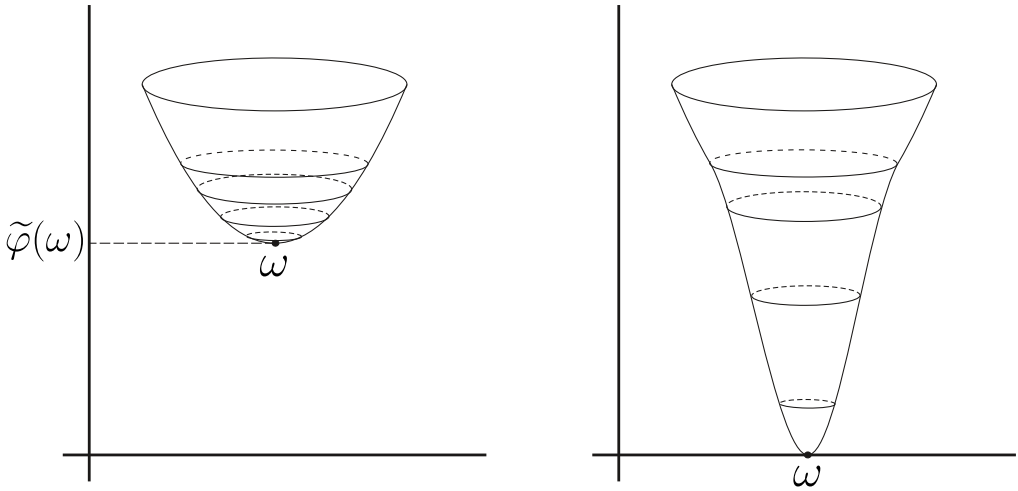


Рис. 3.1. Пример изменения линий уровня функции $\tilde{\varphi}$ под действием δ_{A_i}

Fig. 3.1. An example of the change of the level lines of the function $\tilde{\varphi}$ under the action of δ_{A_i}

$$\tilde{\varphi}_*(x) = \begin{cases} \delta_{A_i} \circ \tilde{\varphi}_{norm}(x), & x \in U_\varepsilon(O_{\omega_i}), \text{ где } \omega_i \in \tilde{\mathcal{A}}, \\ \delta_{R_j} \circ \tilde{\varphi}_{norm}(x), & x \in U_\varepsilon(O_{\alpha_j}), \text{ где } \alpha_j \in \tilde{\mathcal{R}}, \\ \tilde{\varphi}_{norm}(x), & \text{ иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что функции δ_{A_i} и δ_{R_i} – строго возрастающие по построению, а значит, сама функция $\tilde{\varphi}_*(x)$ сохраняет убывание вдоль траекторий.

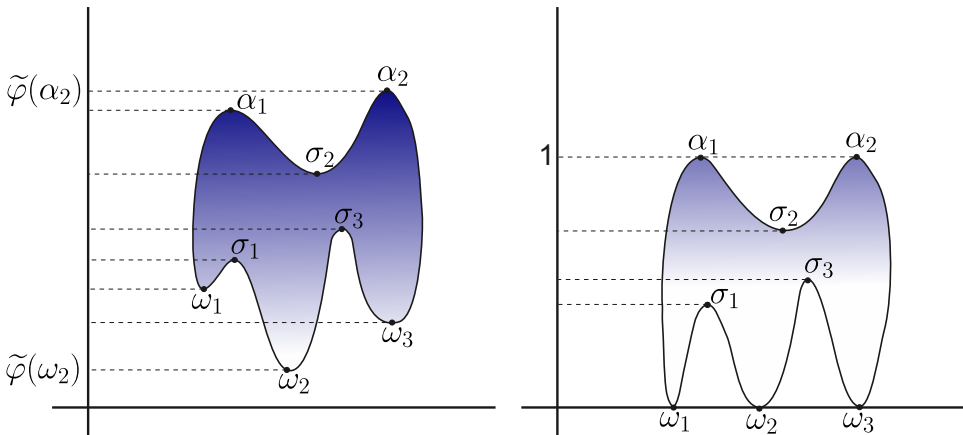


Рис. 3.2. Пример изменения энергетической функции $\tilde{\varphi}$

Fig. 3.2. An example of a change in the energy function $\tilde{\varphi}$

Напомним, что $q|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}: M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) \rightarrow \tilde{M}^n \setminus (\tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{R}})$ – естественная проекция, сопрягающая $f|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ с $\tilde{f}|_{\tilde{M}^n \setminus (\tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{R}})}$. Определим функцию $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ следующим

образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{A} \\ 1 & x \in \mathcal{R} \\ \tilde{\varphi} \circ q & x \in M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}). \end{cases}$$

Тогда критические точки функции φ совпадают с неблуждающим множеством диффеоморфизма f по построению, а значения функции $\tilde{\varphi}(x)$ при стремлении x к \mathcal{A} (\mathcal{R}) стремятся к нулю (единице), следовательно, функция φ непрерывна. Тогда $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая энергетическая функция.

Теперь докажем необходимость.

Пусть $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — энергетическая функция для f . Покажем, что найдется энергетическая функция $\tilde{\varphi} : \tilde{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ для «регулярного спутника» \tilde{f} .

Пусть функция $\tilde{\varphi}(x) = \varphi \circ q^{-1}(x)$, где $x \in \tilde{M}^n \setminus (\tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{R}})$. Таким образом, функция $\tilde{\varphi}$ не определена только на множестве $\tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{R}}$, состоящим из конечного числа точек. Продолжим по непрерывности функцию $\tilde{\varphi}(x)$ на это множество.

Множество критических точек $\tilde{\varphi}$ совпадает с неблуждающим множеством гомеоморфизма \tilde{f} , и аналогично прошлому случаю $\tilde{\varphi}$ непрерывна, следовательно, является энергетической. Значит, из существования энергетической функции для f следует существование энергетической функции для \tilde{f} .

Благодарности. Автор благодарит М. К. Баринкову за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Финансирование. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) в 2024 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence: American Mathematical Society, 1978. Vol. 38, No. 1. 100 p.
2. Smale. S. On gradient dynamical systems // Ann. of Math. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206.
3. Meyer K.R. Energy functions for Morse Smale systems // American Journal of Mathematics. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
4. Franks J. Nonsingular smale flows on S^3 // Topology. 1985. Vol. 24. pp. 265–282. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(85\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3)
5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В. Энергетическая функция градиентно-подобных потоков и проблема топологической классификации // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 6. С. 856–863. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1056>
6. Босова А. А., Круглов В. Е., Починка О. В. Энергетическая функция для Ω -устойчивого потока с седловой связкой на сфере // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 4. С. 51–58.

7. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω -устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 4. С. 434–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441>
8. Починка О. В., Зинина С. Х. Динамика регулярных топологических потоков // Таврический вестник информатики и математики. 2020. № 3. С. 77–91.
9. Pochinka O., Zinina S. Construction of the Morse – Bott energy function for regular topological flows // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, No. 4. P. 350–369. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354721040031>
10. Гринес В. З., Починка О. В. Построение энергетических функций для омега-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 2. С. 191–222. DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222>
11. Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. Vol. 16, Issue 2. pp. 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
12. Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 175–183. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8474>
13. Митрякова Т. М., Починка О. В., Шипенкова А. Е. Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14, № 1. С. 98–106.
14. Починка О. В., Лауденбах Ф., Гринес В. З. Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2012. Т. 278. № 0,5. С. 34–48.
15. Барина М. К., Гринес В. З., Починка О. В. Критерий существования энергетической функции у регулярного гомеоморфизма 3-сферы // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2023. Т. 321, № 1. С. 45–61. DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4323>
16. Barinova M. On Existence of an energy function for Ω -stable surface diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 14. P. 3317–3323. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222020020>
17. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Энергетическая функция для A-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. 2015. Т. 5, № 1-2. С. 31–37.
18. Починка О. В., Гринес В. З., Носкова М. К. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. 2015. Т. 76, № 2. С. 271–286.
19. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 6. Article number: 063112. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0026293>

20. Барина М. К., Шустова Е. К. Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 11–21. . DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21>
21. Барина М. К., Шустова Е. К. Динамические свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24. № 1. С. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30>
22. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems: an introduction. NY: Springer New York, 2012. 198 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>
23. Shub M. Stabilité globale des systèmes dynamiques // Astérisque. 1978. Vol. 56. 224 p.
24. Smale S. The Ω -stability theorem // Same Proceedings. 1970. Vol. 14. pp. 289–297.
25. Franke J. E., Selgrade J.F. Hyperbolicity and chain recurrence // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 26. No. 1. pp. 27–36. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(77\)90096-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90096-1)
26. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 73. №. 6. pp. 747–817.
27. Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-Sphere // Annals of Mathematics. 1956. Vol. 64, No. 2. pp. 399–405. DOI: <https://doi.org/10.2307/1969983>
28. Donaldson S. K. An application of gauge theory to four-dimensional topology // Journal of Differential Geometry 1983. Vol. 18. No. 2. pp. 279–315.
29. Barinova M. On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1 // Cornell University. Series Math Arxiv.org. 2024. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.15699>
30. Grines V. Z., Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. On the topological structure of manifolds supporting axiom A Systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, No. 6. pp. 613–628. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354722060028>

*Поступила 11.05.2024; доработана после рецензирования 14.08.2024;
принята к публикации 28.08.2024*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. C. Conley, “Isolated invariant sets and the Morse index”, **38**:1 (1978), 100 p.
2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math*, **74**:1 (1961), 199–206.

3. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>.
4. J. Franks, “Nonsingular smale flows on S^3 ”, *Topology*, **24** (1985), 265–282. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(85\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3).
5. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, “The energy function of gradient-like flows and the topological classification problem”, *Math. Notes*, **96**:6 (2014), 856–863. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1056> (In Russ.).
6. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “Energy function for an Ω -stable flow with a saddle connection on a sphere”, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **4** (2017), 51–58 (In Russ.).
7. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, “Morse-Bott energy function for surface Ω -steady flows”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **22**:4 (2020), 434–441. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441> (In Russ.).
8. O. V. Pochinka, S. K. Zinina, “Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows”, *Math. Notes*, **107**:2 (2020), 313–321 (In Russ.).
9. O. V. Pochinka, S. K. Zinina, “Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **26**:4 (2021), 350–369. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354721040031>.
10. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Construction of energetic functions for Ω -stable diffeomorphisms on 2- and 3-manifolds”, *Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, CMFD*, **63**:2 (2017), 191–222. DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222> (In Russ.).
11. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16** (1977), 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3).
12. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, “Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices”, *Mat. Zametki*, **86**:2 (2009), 175–183. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8474> (In Russ.).
13. T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, A. E. Shishenkova, “Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **14**:1 (2012), 98–106 (In Russ.).
14. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, “Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27–40 (In Russ.).
15. M. K. Barinova, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Criterion for the existence of an energy function for a regular homeomorphism of the 3-sphere”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 45–61. DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4323> (In Russ.).
16. M. K. Barinova, “On existence of an energy function for ω -stable surface diffeomorphisms”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43** (2022), 257–263.

17. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “Energy function for A-diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional non-trivial basic sets”, *Dynamical Systems*, **5**:1–2 (2015), 31–37 (In Russ.).
18. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor”, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **76**:2 (2015), 237–249 (In Russ.).
19. M. K. Barinova, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, B. Yu, “Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades”, *Chaos*, **31**:6 (2021), 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0026293>.
20. M. K. Barinova, E. K. Shustova, “Energy function for direct products of discrete dynamical systems”, *Zhurnal SVMO*, **25**:2 (2023), 11–21. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21> (In Russ.).
21. M. K. Barinova, E. K. Shustova, “Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems”, *Zhurnal SVMO*, **24**:1 (2022), 21–30. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30> (In Russ.).
22. J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer New York, NY, 2012 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>, 198 p.
23. M. Shub, “Stabilité globale des systèmes dynamiques”, *Astérisque*, 1978, no. 56, 224 p.
24. S. Smale, “The ω -stability theorem, global analysis”, *Proc. Symp. Pure Math*, **14** (1970), 289–297.
25. J. E. Franke, J. F. Selgrade, “Hyperbolicity and chain recurrence”, *Journal of Differential Equations*, **26**:1 (1977), 27–36. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(77\)90096-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90096-1).
26. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
27. J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Annals of Mathematics*, **64**:2 (1956), 399–405. DOI: <https://doi.org/10.2307/1969983>.
28. S. K. Donaldson, “An application of gauge theory to four-dimensional topology”, *Journal of Differential Geometry*, **18**:2 (1983), 279–315.
29. M. K. Barinova, “On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1”, *Cornell University. Series Math Arxiv.org*, 2024. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.15699>.
30. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, “On the topological structure of manifolds supporting axiom a systems”, *Regul. Chaot. Dyn.*, **27** (2022), 613–628. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354722060028>.

Submitted 11.05.2024; Revised 14.08.2024; Accepted 28.08.2024

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.245-259
Original article

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 35G16, 35C10

Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines

V. L. Leontiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. Fourier method and Fourier series have wide fields of application. The use of the theory of orthogonal splines, created by the author of this article and developed in the last thirty years, has led to significant progress in a number of numerical and analytical methods of deformable solid mechanics and mathematical physics. In particular, the generalized Fourier method associated with the use of finite Fourier series and orthogonal splines was successfully applied earlier by the author in solving parabolic initial boundary value problems for regions with curved boundaries. Recent article proposes further development and novel full research of the algorithm of this method, designed to solve parabolic initial boundary value problems in non-canonical domains. The method gives approximate analytical solutions in form of finite Fourier series whose structure is similar to that of partial sums of an infinite Fourier series for an exact solution. Full investigation of the method's convergence presented in this article is based on the theory of finite difference methods. As a number of grid nodes in a region increases, such finite Fourier series approach an exact solution of a parabolic initial boundary value problem. Investigation of convergence shows efficiency of the novel algorithm of the generalized Fourier method in solving parabolic initial boundary value problems for non-canonical regions.

Keywords: parabolic initial boundary value problems, curvilinear boundary, non-canonical regions, method of variable separation, finite Fourier series; orthogonal splines

For citation: V. L. Leontiev. Convergence of Fourier Method connected with Orthogonal Splines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 245–259. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.245-259>

About the authors:

Victor L. Leontiev, Dr. Sci. in Phys. and Math., professor of World-Class Research Center for Advanced Digital Technologies, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (29, Politechnicheskaya str., litera B, St. Petersburg 195251, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru

© V. L. Leontiev



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УДК 517.951:517.955

Сходимость метода Фурье, связанного с ортогональными сплайнами

В. Л. Леонтьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. Применение теории ортогональных сплайнов, созданной автором данной статьи и получившей развитие в последние тридцать лет, привело к существенному прогрессу в алгоритмах ряда численных и аналитических методов механики деформируемого твердого тела и математической физики. В частности, обобщенный метод Фурье, связанный с использованием конечных рядов Фурье и ортогональных сплайнов, был успешно применен ранее автором данной статьи при решении параболических начально-краевых задач для областей с криволинейными границами. В данной статье предлагается дальнейшее развитие и новое всестороннее исследование алгоритма этого метода Фурье, предназначенного для решения параболических начально-краевых задач в неканонических областях. Этот метод дает приближенные аналитические решения в виде конечного ряда Фурье, структура которого аналогична структуре частных сумм бесконечного ряда Фурье точного решения. Полное исследование сходимости этого метода, представленное в данной статье, основано на теории конечно-разностных методов. По мере увеличения числа узлов сетки в области такие конечные ряды Фурье приближаются к точному решению параболической начально-краевой задачи. Исследование сходимости показывает эффективность нового алгоритма обобщенного метода Фурье при решении параболических начально-краевых задач для неканонических областей.

Ключевые слова: параболические начально-краевые задачи, криволинейная граница, неканонические области, метод разделения переменных, конечные ряды Фурье, ортогональные сплайны

Для цитирования: Леонтьев В. Л. Сходимость метода Фурье, связанного с ортогональными сплайнами // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 245-259. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.245-259>

Об авторе:

Леонтьев Виктор Леонтьевич, доктор физико-математических наук, профессор Научно-исследовательского центра передовых цифровых технологий мирового уровня Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, литера Б), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8669-1919>, leontiev_vl@spbstu.ru

1. Introduction

The modified Fourier method [1] was proposed and investigated earlier [1] in parabolic initial boundary value problems for regions with a noncanonical curvilinear boundaries. The method [1] connected with explicit difference scheme is similar to another variant of Fourier method connected with implicit difference scheme and proposed here. Convergence of approximate analytic solutions was obtained in [1] only with respect to eigenvalues

and functions in the framework of the Sturm-Liouville problem. Here is proposed full investigation of convergence of approximate solutions obtained in form of finite Fourier series for novel variant of Fourier method connected with orthogonal splines in parabolic initial boundary value problems. An estimate is obtained, which shows a high rate of convergence of such finite Fourier series to exact solutions of problems for regions with a noncanonical curvilinear boundaries.

The method of separation of variables (Fourier method) allows finding solutions in analytical form of many initial boundary value problems. The method is connected with the Sturm-Liouville problem and in many cases of initial boundary value problems with using of special functions. Implementation of classical Fourier method for many types of initial boundary value problems, including problems to which all parts of the boundary of a canonical region are coordinate lines or surfaces, meets with significant difficulties. One way to expand the scope of the classical Fourier method is to solve mathematical questions related to structure of boundary conditions [2]. Special functions appear in the algorithm of the Fourier method when a Sturm-Liouville problem is solved in curvilinear coordinate systems in cases of canonical regions whose boundaries are coordinate lines or surfaces. In the general case of initial boundary value problems for noncanonical regions with curvilinear boundaries, the use of special functions is inefficient. The classical Fourier method is applicable only in initial boundary value problems for canonical regions of classical shape, in particular, in solving contact problems [3] for elastic bodies. The applications of the classical Fourier method are given, for example, in the articles [4–5].

Other directions of development of different methods for solving initial boundary value problems for not canonical regions with curvilinear boundaries are associated, first, with the application of other methods, for example [6–10], and, secondly, with a modification of the Fourier method itself.

Finite difference methods [6–9] and finite element methods [10] have wide scopes. But numerical methods [6–10] not give solutions in form of Fourier series.

Fourier series are used in many applications, in particular, [11–12]. Scope of spline approximations, for example [13], also is enough wide. The generalized Fourier method associated with the use of orthogonal splines was proposed for parabolic initial boundary value problems in the article [1]. It gives solutions in form of finite Fourier series. This method, thanks to orthogonal splines, has expanded scope which contains initial boundary value problems for noncanonical regions with any curvilinear boundaries. Used in [1] and here finite Fourier series, based on orthogonal splines, shows high efficiency [14] also in problems of approximation of functions in regions with curvilinear boundaries and generates fast algorithm of approximations.

The numerical solutions of some initial boundary value problems for noncanonical regions with curvilinear boundaries shown high computational possibilities of the method [1]. Investigations of the method [1] are continued here, efficiency of the similar generalized Fourier method is demonstrated in parabolic initial boundary value problems for noncanonical regions. The investigation of convergence of such method is proposed here. This study is based on the theory of finite difference methods.

2. Problem Statement

The parabolic initial boundary value problem

$$\begin{aligned} L[u] &= \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \\ L[u] &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ u|_{t=0} &= \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in S; \\ u|_{\partial S} &= 0 \quad \forall t \geq 0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

is considered. Here ∂S is a piecewise smooth curvilinear boundary of the not canonical region S , $u = u(x, y, t)$ – a function, continuous $\forall t \geq 0$ in a closed region $\bar{S} = S + \partial S$, $a^2 = \text{const} > 0$.

The not canonical region \bar{S} is, for the example, the circular region of radius $R = 1$ with the hole cut out by the elliptical line

$$\frac{(x - 0.6)^2}{0.1^2} + \frac{y^2}{0.2^2} = 1.$$

The boundary ∂S of the not canonical region S in this case consists of a circle of radius $R = 1$ and a given ellipse.

In the general case, a not canonical region \bar{S} with a curvilinear boundary ∂S fits into a rectangular region \bar{Q}

$$\bar{Q} = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}.$$

An auxiliary initial boundary value problem

$$\begin{aligned} L[u] &= \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \\ u|_{t=0} &= \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in S; \\ u|_{\partial Q} &= 0, \quad u = 0 \quad \forall (x, y) \in (Q \setminus S), \quad \forall t \geq 0; \end{aligned} \tag{2.2}$$

is also considered. This task is equivalent to task (2.1) in the region \bar{S} .

3. Description of Method

According to the Fourier method, the solutions of the problems (2.1)–(2.2) is sought as a product of two functions

$$u(x, y, t) = U(x, y) \cdot V(t).$$

Substitution of this product in (2.1)–(2.2) and separation of variables U, V leads to the equation with the parameter λ

$$\frac{dV}{dt} + \lambda V = 0 \quad \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

and to the Sturm-Liouville problem

$$L[U] + \lambda U = 0 \quad (S), \quad U|_{\partial S} = 0, \tag{3.2}$$

which connected with the problem (2.1), and also leads to the modified Sturm-Liouville problem

$$\begin{aligned} L[U] + \lambda U &= 0 \quad (S), \\ U &= 0 \quad (Q \setminus S); \quad U|_{\partial Q} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

which connected with the problem (2.2). The problems (3.2)–(3.3) are equivalent in the region \bar{S} .

The B -spline of first degree

$$b_i(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu - \mu_{i-1}}{h}, & \mu \in [\mu_{i-1}, \mu_i]; \\ \frac{\mu_{i+1} - \mu}{h}, & \mu \in [\mu_i, \mu_{i+1}]; \\ 0, & \mu \in (-\infty, \mu_{i-1}) \cup (\mu_{i+1}, +\infty); \end{cases}$$

corresponds to node μ_i of the grid. Coordinates of nodes

$$\mu_i = -1 + ih; \quad 0 \leq i \leq N; \quad h = 2/N;$$

are defined here for constant step h and, for example, on $[-1, 1]$. The compact support of the spline $b_i(\mu)$ is $[\mu_{i-1}, \mu_{i+1}]$. The B -spline of first degree

$$b_i^{(-)}(\mu) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(\mu - \mu_{i-1})}{h}, & \mu \in [\mu_{i-1}, \mu_{i-1} + h/2]; \\ \frac{\sqrt{2}[h - (\mu - \mu_{i-1})]}{h}, & \mu \in [\mu_{i-1} + h/2, \mu_i]; \\ 0, & \mu \in (-\infty, \mu_{i-1}) \cup (\mu_i, \infty); \end{cases}$$

has the compact support $[\mu_{i-1}, \mu_i]$. The B -spline of first degree

$$b_i^{(+)}(\mu) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(\mu - \mu_i)}{h}, & \mu \in [\mu_i, \mu_i + h/2]; \\ \frac{\sqrt{2}[h - (\mu - \mu_i)]}{h}, & \mu \in [\mu_i + h/2, \mu_{i+1}]; \\ 0, & \mu \in (-\infty, \mu_i) \cup (\mu_{i+1}, +\infty); \end{cases}$$

has the compact support $[\mu_i, \mu_{i+1}]$. The compactly supported functions

$$\hat{\varphi}_i(\mu) = b_i(\mu) + b_i^{(-)}(\mu) + b_i^{(+)}(\mu)$$

have properties

$$(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_j) = \|\hat{\varphi}_i\|^2 \delta_{ij}$$

and are orthogonal differentiable continuous splines [15] on each specific grid. It are piecewise linear finite differentiable continuous functions. Here δ_{ij} – the Kronecker symbols.

The splines

$$\gamma_i(x) = \varphi_i(x), \quad \delta_j(y) = \varphi_j(y),$$

where

$$\varphi_i = \frac{\hat{\varphi}_i}{\|\hat{\varphi}_i\|^2}, \quad (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij},$$

are used in the approximation

$$U_N(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M d_{ij} \gamma_i(x) \delta_j(y) \quad (3.4)$$

of a solution of the problem (3.3) on a region \overline{Q} . Here N, M are numbers of a grid respectively for axes Ox, Oy ; d_{ij} are unknown constant coefficients.

A system of splines $\varphi_i(x)$ on an infinite sequence of grids formed by a discrete decrease of step $h \rightarrow 0$ is complete and this system of splines approximates in Sobolev space W_2^0 any function $U(x)$ of the Sobolev space W_2^1 [15]:

$$\left\| U - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right\|_{W_2^0} \leq Ch \|U\|_{W_2^1},$$

where C is a constant which not depends on U, h ; c_i —some constant coefficients.

The coefficients d_{ij} , corresponding to nodes placed in the region $(Q \setminus S)$ and on the boundary ∂Q are equal to zero, thus the sum (3.4) takes into account how the conditions $U = 0(Q \setminus S)$, so the boundary conditions $U|_{\partial Q} = 0$. It is used that in accordance with properties [15] of used splines each coefficient d_{ij} is equal to a value of $U_N(x, y)$ at the node (x_i, y_j) of a grid in a region $(Q \setminus S)$.

The stationary condition

$$\delta F = \int_S \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda U}{a^2} \right] \delta U - \left(\frac{\partial U}{\partial x} - U_1 \right) \delta U_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} - U_2 \right) \delta U_2 \right\} dS + \\ + \int_{Q \setminus S} U \delta U dQ + \int_{\partial S} U (n_x \delta U_1 + n_y \delta U_2) dl + \int_{\partial Q} U \delta U dl = 0 \quad (3.5)$$

of the functional

$$2F(U, U_1, U_2) = \\ = \int_S \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda U}{a^2} \right] U - \left(\frac{\partial U}{\partial x} - U_1 \right) U_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} - U_2 \right) U_2 \right\} dS + \\ + \int_{Q \setminus S} U^2 dQ + \int_{\partial S} U (U_1 n_x + U_2 n_y) dl + \int_{\partial Q} U^2 dl, \quad (3.6)$$

is used for determination of the coefficients d_{ij} of the approximate analytical solution (3.4). Here

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \quad (S);$$

n_x, n_y are components of external normal to a boundary ∂S .

The condition (3.5) is equivalent to

$$a^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) + \lambda U = 0 \quad (S),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2 \quad (S);$$

$$U = 0 \quad (Q \setminus S); \quad U|_{\partial S} = 0, \quad U|_{\partial Q} = 0; \tag{3.7}$$

because variations δU and $\delta U_1, \delta U_2$ are independent and arbitrary in $S, \partial S, Q \setminus S$ and on ∂Q . The condition $U|_{\partial S} = 0$ follows from the condition $U = 0 \quad (Q \setminus S)$, therefore, equations and conditions (3.7) after exclusion U_1, U_2 are written as (3.3).

To obtain an approximate analytical solution of the problem (2.2) on a region \bar{Q} , into which the region \bar{S} fits, a uniform grid with steps h_1, h_2 is constructed.

Substitution (3.4) into the condition (3.5) leads to a system of finite difference equations

$$a^2 \left[\frac{U_{n+1,m} - 2U_{nm} + U_{n-1,m}}{h_1^2} + \frac{U_{n,m+1} - 2U_{nm} + U_{n,m-1}}{h_2^2} \right] + \lambda_p U_{nm} = 0, \tag{3.8}$$

$$U_{nm} = 0 \quad (Q \setminus S); \quad U_{nm} = 0 \quad (\partial Q). \tag{3.9}$$

The equation (3.1) is presented in next finite difference form

$$\frac{V^{l+1} - V^l}{\Delta t} + \lambda_p V^{l+1} = 0. \tag{3.10}$$

The exception λ_p from finite difference equations (3.8), (3.10), taken in pairs for each internal node of the region S , gives for the node (x_n, y_m) , taking into account that $u_{nm}^l = U_{nm} V^l$, the finite difference equation

$$a^2 (\Lambda_{nm,x}^{l+1} u + \Lambda_{nm,y}^{l+1} u) = \Lambda_{nm,t}^l u \quad (S), \tag{3.11}$$

where

$$\Lambda_{nm,x}^{l+1} u = \frac{u_{n+1,m}^{l+1} - 2u_{nm}^{l+1} + u_{n-1,m}^{l+1}}{h_1^2},$$

$$\Lambda_{nm,y}^{l+1} u = \frac{u_{n,m+1}^{l+1} - 2u_{nm}^{l+1} + u_{n,m-1}^{l+1}}{h_2^2},$$

$$\Lambda_{nm,t}^l u = \frac{u_{nm}^{l+1} - u_{nm}^l}{\Delta t}$$

– finite-difference operators on a uniform grid with steps h_1, h_2 for the directions Ox, Oy respectively and with a step Δt of a grid of time.

Nodes of the grid, for example, on

$$\bar{Q} = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$$

have coordinates

$$(x_i = -1 + ih, y_j = -1 + jh) \in \bar{Q}, \quad 0 \leq i, j \leq N.$$

The conditions

$$u_{nm}^l = 0 \quad (Q \setminus S), \quad u_{nm}^l = 0 \quad (\partial Q) \tag{3.12}$$

containing a boundary condition

$$u_{nm}^l = 0 \quad (\partial S),$$

are added to the system of equations (3.11).

The equations and the conditions (3.11)–(3.12) are considered together with the initial condition (2.2), written in nodes of a grid

$$u_{nm}^l|_{t_l=0} = \varphi(x_n, y_m) \quad \forall (x_n, y_m) \in S. \quad (3.13)$$

Solving a system of grid equations and conditions (3.11)–(3.13) for a given sequence of time values t_l gives the values u_{nm}^l of a numerical solution in all nodes of the grid in a region \bar{Q} for given points of time.

Solutions of problems (3.1), (3.2) or (3.3) have next form within the framework of the classical Fourier method

$$u^{(K)}(x, y, t) = \sum_{k=1}^K V_k(t) U_N^{(k)}(x, y), \quad (3.14)$$

where the functions $V_k, U_N^{(k)}$ correspond to eigenvalues $\lambda_k (k = 1, \dots, K)$ of the Sturm-Liouville problems (3.2)–(3.3). Functions $V_k, U_N^{(k)}$ are formed as result of solving of a system of finite-difference equations (3.10)–(3.11) together with (3.12)–(3.13). The finite series (3.14) are Fourier series generated by orthogonal splines for all nodal values t_l of time, but Fourier series (3.14) are formed here immediately for used grids and for nodal values of time in a final form without first determining the eigenvalues λ_k and functions $U_N^{(k)}$, what is possible thanks to the use of orthogonal splines. Solutions of the systems of equations (3.10)–(3.13) gives values of solutions in nodes of a grid in regions \bar{S}, \bar{Q} at defined moments t_l of time and these nodal values are equal to coefficients d_{ij} of finite series (3.4). Such solutions in form of finite Fourier series are followed from (3.10)–(3.13) for every set moments t_l of time.

General solutions of differential equations (3.1) within the framework of the classical Fourier method have the form

$$V_k(t) = A_k \exp(-\lambda_k t), \quad (k = 1, \dots, K); \quad (3.15)$$

where A_k are unknown constant coefficients.

The sum (3.14), taking into account (3.4), (3.15), has the form

$$u^{(K)}(x, y, t) = \sum_{k=1}^K \left[A_k \exp(-\lambda_k t) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M d_{ij}^{(k)} \gamma_i(x) \delta_j(y) \right] \quad (3.16)$$

on each given grid in regions \bar{S}, \bar{Q} .

Substituting (3.16) into the initial condition (2.1)–(2.2) gives an equation, after multiplying both parts of which by $U_N^{(k)}(x, y)$ for a fixed value k and integrating it over the region S , taking into account the orthogonality of the eigenfunctions, the formula appears

$$A_k = \frac{\iint_S \varphi(x, y) U_N^{(k)}(x, y) dS}{\|U_N^{(k)}\|^2}. \quad (3.17)$$

Thus, the sum (3.16), whose coefficients A_k are determined by formula (3.17), satisfies equation (3.3) in variational form, equation (3.1), as well as boundary condition (3.3) and

initial condition (2.1)–(2.2). The sums (3.16) for different values of N, M are approximate analytical solutions of equivalent parabolic problems (2.1)–(2.2) in regions \bar{S}, \bar{Q} .

For given fixed values of time, sums (3.16) represent finite generalized Fourier series which are approximate analytical solutions of boundary value problems (2.1)–(2.2) in regions S, Q , and also are finite generalized Fourier series generated by orthogonal splines.

The solution (3.16) is written at moments t_l of time in the form

$$\begin{aligned} u^{(K)}(x, y, t_l) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij}^l \gamma_i(x) \delta_j(y), \\ u_{ij}^l &= \sum_{k=1}^K \left[A_k \exp(-\lambda_k t_l) d_{ij}^{(k)} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. Convergence of Method

The convergence investigation of the proposed method uses here the theory of finite difference schemes [16–17].

Theorem 4.1. *The solutions (3.16), (3.18) of the parabolic initial boundary value problem (2.2) converge to an exact solution u of the problem (2.2) in a region \bar{Q} and to an exact solution of the problem (2.1) in a region \bar{S} , if*

$$h = \max(h_1, h_2)$$

and

$$\Delta t = \alpha h^2, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

The inequality

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_{h,2}^0} \leq Ch^2,$$

determinates rate of convergence of numerical solutions u_{nm}^l in (3.18). Here, the Sobolev space $W_{h,2}^0$ on grid which is defined by the norm

$$\|u\|_{W_{h,2}^0} = \left(h^2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M |u(x_i, y_j)|^2 \right)^{1/2}$$

associated with a grid in a region \bar{Q} .

Proof. Approximation of differential equations. The next notations are used

$$(x_n, y_m, t_l) = \chi_{n,m,l}, \quad (x_n, y_m, t_{l+1}) = \chi_{n,m,l+1}.$$

If continuous partial derivatives of a function $u(x, y, t)$ of the fourth order in coordinates and the first order in time are existed, then the Taylor formula gives

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nm,x}^{l+1}u &= \frac{u_{n+1,m}^{l+1} - 2u_{nm}^{l+1} + u_{n-1,m}^{l+1}}{h_1^2} = \\
&= \frac{u(x_n + h_1, y_m, t_{l+1}) - 2u(x_n, y_m, t_{l+1}) + u(x_n - h_1, y_m, t_{l+1})}{h_1^2} = \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ \left[u_{nm}^{l+1} + h_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_1^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_1^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_1^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + o(h_1^4) \right] - 2u_{nm}^{l+1} + \left[u_{nm}^{l+1} - h_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_1^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} - \frac{h_1^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_1^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + o(h_1^4) \right] \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + o(h_1^2) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + O(h_1^2) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nm,y}^{l+1}u &= \frac{u_{n,m+1}^{l+1} - 2u_{nm}^{l+1} + u_{n,m-1}^{l+1}}{h_2^2} = \\
&= \frac{u(x_n, y_m + h_2, t_{l+1}) - 2u(x_n, y_m, t_{l+1}) + u(x_n, y_m - h_2, t_{l+1})}{h_2^2} = \\
&= \frac{1}{h_2^2} \left\{ \left[u_{nm}^{l+1} + h_2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_2^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_2^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_2^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + o(h_2^4) \right] - 2u_{nm}^{l+1} + \left[u_{nm}^{l+1} - h_2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_2^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} - \frac{h_2^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_2^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + o(h_2^4) \right] \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + o(h_2^2) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\chi_{n,m,l+1}} + O(h_2^2) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Lambda_{nm,t}^l u &= \frac{u_{nm}^{l+1} - u_{nm}^l}{\Delta t} = \frac{u(x_n, y_m, t_l + \Delta t) - u(x_n, y_m, t_l)}{\Delta t} = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[u_{nm}^l + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\chi_{n,m,l}} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\chi_{n,m,l}} + o((\Delta t)^2) \right] - \frac{u_{nm}^l}{\Delta t} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\chi_{n,m,l}} + O(\Delta t). \quad (4.3)
\end{aligned}$$

The formulas (4.1)– (4.3) show that the finite difference equations

$$a^2(\Lambda_{nm,x}^{l+1}u + \Lambda_{nm,y}^{l+1}u) = \Lambda_{nm,t}^l u (S),$$

approximate the equation

$$L[u] = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall (x, y) \in S, \quad \forall t \geq 0; \tag{4.4}$$

in nodes of a grid with errors, magnitudes of which have the order

$$a^2 [O(h_1^2) + O(h_2^2)] + O(\Delta t).$$

If $h = \max(h_1, h_2)$ and $\Delta t = \alpha h^2$, $\alpha = const > 0$, then the order of approximation of the differential equation (4.4) in all nodes of the region S is determined by $O(h^2)$.

The differential equation (4.4) will be considered in an entire region Q , which is consistent with the equation

$$u = 0 \quad (Q \setminus S),$$

since taking this condition into account in the equation (4.4) turn it into an identity within the region $(Q \setminus S)$. Also the finite difference equations (3.11) are extended to an entire region Q . The finite difference equations (3.11) turn into identities in all nodes of the grid located in a region $(Q \setminus S)$. Thus, the finite difference equations (3.11) approximate the differential equation (4.4) in the region $(Q \setminus S)$ without errors. The boundary and initial conditions (2.2) are approximated by (3.12) and (3.13) in the grid nodes without errors. Consequently, the finite difference equations (3.11) together with a boundary condition (3.12) and together with an initial condition (3.13) approximate the problem (2.2) in a region Q with an error of an order $O(h^2)$.

Stability of solutions of finite difference equations. It is widely known [16, Chapter 6; 17, Chapter 8] that the system of the finite difference equations

$$a^2 (\Lambda_{nm,x}^{l+1} u + \Lambda_{nm,y}^{l+1} u) = \Lambda_{nm,t}^l u$$

is characterized by absolute stability in the rectangular region Q .

Convergence of solutions of finite difference equations. Finite difference equations (3.11), together with boundary condition (3.12) and together with the initial condition (3.13), approximate the problem (2.2) in a region Q with an error of the order $O(h^2)$. The system of these finite difference equations in the rectangular region Q is characterized by absolute stability [16–17].

This means [17, Chapter 5] convergence

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_{h,2}^0} \leq C_1 h^2$$

of values in grid nodes of a sequence of approximate solutions $u^{(K)}$ to an exact solution u when a grid step h decreases. Here C_1 is some positive constant coefficient.

End of the proof.

From the convergence of numerical solutions u_{ij}^l of finite difference equations (3.11) obtained at grid nodes at specified time points follows the convergence of a sequence of analytical approximate solutions in the form of finite Fourier series (3.18). The inequality

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_2^0(Q)} \leq C_2 h^2 \tag{4.5}$$

defines this convergence. Here C_2 is some positive constant coefficient, $W_2^0(Q)$ is the Sobolev space.

Problems (2.1), (2.2) are equivalent in the region \bar{S} , so

$$\|u - u^{(K)}\|_{W_2^0(S)} \leq C_3 h^2 \quad (4.6)$$

follows from (4.5). Here C_3 is some positive constant coefficient.

5. Conclusion

The convergence of the modified Fourier method was investigated in [1] in a parabolic initial boundary value problem for a region with a noncanonical curvilinear boundary. The theory of finite difference equations was not used for investigation of convergence. Convergence conclusions in general case were obtained in [1] only with respect to eigenvalues and functions in the framework of the Sturm-Liouville problem. The modified Fourier method [1] connected with explicit difference scheme is similar to another variant of Fourier method connected with orthogonal splines proposed and investigated here and connected with implicit difference scheme.

The estimate (4.6) obtained here shows a high rate of convergence of finite Fourier series (3.16), (3.18) to an exact solution of problems (2.1)–(2.2) for a region S with a curvilinear boundary ∂S . The approximate solutions (3.16), (3.18), in contrast to the solutions obtained in such problems without using the Fourier method using the finite difference method or the finite element method, have the analytical form of Fourier series characteristic of the Fourier method. The algorithm of modified Fourier method considered in this article is associated with the use of the orthogonal splines and allows finding solutions to parabolic initial boundary value problems for non-canonical regions in the general case of their curved multi-connected boundaries.

The investigation realized here for any numbers of grid nodes demonstrated that approximate solutions (3.16), (3.18) converge to known exact solution. For example, approximate solutions (3.16), (3.18) of problems (2.1)–(2.2) for the circular region of radius $R = 1$ with the hole cut out by the elliptical line

$$\frac{(x - 0.6)^2}{0.1^2} + \frac{y^2}{0.2^2} = 1$$

converge to exact solution.

The theoretical studies of convergence which were made here and in [1] show high accuracy of approximate analytical solutions in form of finite Fourier series.

Expanding of regions of application of classical analytical methods of solving initial boundary value problems is an actual problem. One of the directions of development of such methods is presented in [1] and here, where the methods of separating of variables described to solve hyperbolic and parabolic initial boundary value problems for not canonical regions. These methods give solutions in the form of finite generalized Fourier series, which converge to exact solutions. The methods pull together numerical methods for solving initial boundary value problems with an analytical method for solving them. The use of orthogonal splines brings together numerical and analytical methods - finite difference methods and the Fourier method, expanding the scope of their applications.

In the method proposed here the potential capabilities of the method of separation of variables, orthogonal splines, and the finite difference method are used together, it leads to analytical solutions in the form of finite Fourier series. The theoretical investigation of

the convergence presented here shows that the modified Fourier method gives approximate analytical solutions to parabolic initial boundary value problems in the form of finite Fourier series with high accuracy.

REFERENCES

1. V. L. Leontiev, “Fourier method related with orthogonal splines in parabolic initial boundary value problem for domain with curvilinear boundary”, *Ufa Mathematical Journal*, **14**:2 (2022), 56–66. DOI: <https://doi.org/10.13108/2022-14-2-56>.
2. E. A. Gasymov, A. O. Guseinova, U. N. Gasanova, “Application of generalized separation of variables to solving mixed problems with irregular boundary conditions”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:7 (2016), 1305–1309. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542516070071>.
3. I. A. Savichev, A. D. Chernyshov, “Application of the angular superposition method to the contact problem on the compression of an elastic cylinder”, *Mechanics of Solids*, **44**:3 (2009), 463–472. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654409030157>.
4. Yu. I. Malov, L. K. Martinson, K. B. Pavlov, “Solution by separation of the variables of some mixed boundary value problems in the hydrodynamics of conducting media”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **12**:3 (1972), 71–86. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90035-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90035-3).
5. M. Sh. Israilov, “Diffraction of Acoustic and Elastic Waves on a Half-Plane for Boundary Conditions of Various Types”, *Mechanics of Solids*, **48**:3 (2013), 337–347. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654413030102>.
6. A. Y. Majeed, L. G. Juan, O. M. Pshtiwan, N. Chorfi, D. Baleanu, “A computational study of time-fractional gas dynamics models by means of conformable finite difference method”, *AIMS Mathematics*, **9**:7 (2024), 19843–19858. DOI: <https://doi.org/10.3934/math.2024969>.
7. R. J. LeVeque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007, 356 p.
8. *Finite Difference Methods. Theory and Applications. 7th International Conference*, Lozenetz, Bulgaria, 2018 DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5>, 701 p.
9. D. Kh. Ivanov, P. N. Vabishchevich, “Iterative Process for Numerical Recovering the Lowest Order Space-Wise Coefficient in Parabolic Equations”, *Finite Difference Methods. Theory and Applications. 7th International Conference*, Lozenetz, Bulgaria, 2018, 289–296 DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5_32.
10. G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Englewood Cliffs, 1973, 349 p.
11. P. Li, “A Fourier series model and parametric study for single person three-way continuous walking load”, *Transactions on Computer Science and Intelligent Systems Research*, **4** (2024). DOI: <https://doi.org/10.62051/a32pct74>.

12. H. N. Amadi, K. O. Uwho, D. M. Kornom, “Modelling of Electrical Cable Parameters and Fault Detection using Fourier Series”, *Journal of Recent Trends in Electrical Power System*, **7:2** (2024), 44–56. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11096455>.
13. G. F. Voronin, S. A. Degtyarev, “Spline-approximation of thermodynamic properties of solutions”, *Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry*, **6:3** (1982), 217–227.
14. V. L. Leontiev, “Orthogonal Splines in Approximation of Functions”, *Mathematics and Statistics*, **8:2** (2020), 167–172. DOI: <https://doi.org/10.13189/ms.2020.080212>.
15. V. L. Leontiev, *Orthogonal splines and special functions in methods of computational mechanics and mathematics*, POLITEKH-PRESS, St. Petersburg, 2021 (In Russ.), 466 p.
16. E. A. Volkov, *Numerical Methods*, Hemisphere Publishing Corp., New York, 1990, 238 p.
17. S. K. Godunov, V. S. Ryabenkii, *Difference Schemes. An Introduction to the Underlying Theory*, Elsevier Science Publishers B.V., 1987. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0168-2024\(08\)x7019-5](https://doi.org/10.1016/s0168-2024(08)x7019-5), 489 p.

Submitted 3.06.2024; Revised 15.08.2024; Accepted 28.08.2024

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leontiev V. L. Fourier method related with orthogonal splines in parabolic initial boundary value problem for domain with curvilinear boundary // *Ufa Mathematical Journal*. 2022. Vol. 14, no. 2. pp. 56–66. DOI: <https://doi.org/10.13108/2022-14-2-56>
2. Гасымов Э. А., Гусейнова А. О., Гасанова У. Н. Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями // *Журнал вычислит. матем. и матем. физики*. 2016. Т. 56, № 7. С. 1335–1339. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466916070073>
3. Савичев И. С., Чернышев А. Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. № 3. С. 151–162. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654409030157>
4. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Решение некоторых смешанных краевых задач гидродинамики проводящих сред методом разделения переменных // *Журнал вычислит. матем. и матем. физики*. 1972. Т. 12, № 3. С. 627–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90035-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90035-3)
5. Исраилов М. Ш. Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 3. С. 121–134. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654413030102>

6. Majeed A. Yousif, Juan L. G. Guirao, Pshtiwan Othman Mohammed, Nejmeddine Chorfi, D. Baleanu. A computational study of time-fractional gas dynamics models by means of conformable finite difference method // AIMS Mathematics. 2024. Vol. 9, № 7. Pp. 19843–19858. DOI: <https://doi.org/10.3934/math.2024969>
7. LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics. 2007. 356 p.
8. Finite Difference Methods. Theory and Applications. 7th International Conference. Lozenetz, Bulgaria, 11–16 June 2018. 701 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5>
9. Ivanov D. Kh, Vabishchevich P. N. Iterative Process for Numerical Recovering the Lowest Order Space-Wise Coefficient in Parabolic Equations // Finite Difference Methods. Theory and Applications. 7th International Conference. Lozenetz, Bulgaria, 11–16 June 2018. Pp. 289–296. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5_32
10. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир. 1977. 349 с.
11. Ping Li. A Fourier series model and parametric study for single person three-way continuous walking load // Transactions on Computer Science and Intelligent Systems Research. 2024. vol. 4. DOI: [crossref https://doi.org/10.62051/a32pct74](https://doi.org/10.62051/a32pct74)
12. Amadi Hachimenum N., Uwho Kingsley O., Kornom Dennis M. Modelling of Electrical Cable Parameters and Fault Detection using Fourier Series // Journal of Recent Trends in Electrical Power System. 2024. Vol. 7, № 2. Pp. 44–56. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11096455>
13. Voronin G. F., Degtyarev S. A. Spline-approximation of thermodynamic properties of solutions // Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry. 1982. Vol. 6, № 3. Pp. 217–227.
14. Leontiev V. L. Orthogonal Splines in Approximation of Functions // Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 8, № 2. pp. 167–172. DOI: <https://doi.org/10.13189/ms.2020.080212>
15. Леонтьев В. Л. Ортогональные сплайны и специальные функции в методах вычислительной механики и математики. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. 2021. 466 с.
16. Волков Е. А. Численные методы. М.: Наука. 1982. 256 с.
17. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука. 1977. 440 с.

*Поступила 3.06.2024; доработана после рецензирования 15.08.2024;
принята к публикации 28.08.2024*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.5

Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса

И. В. Лутошкин, А. Г. Чекмарев

ФГБОУ ВО Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Проводится анализ существующих подходов к разработке программных решений, предназначенных для решения задач оптимального управления, делается вывод о необходимости развития специализированных численных программных комплексов. В качестве численного метода решения задач оптимального управления предлагается метод параметризации, позволяющий на основе единого подхода решать задачи оптимального управления с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. В рамках метода описывается схема представления управляющего воздействия в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами и последующего сведения исходной задачи оптимального управления с запаздыванием/без запаздывания к задаче нелинейного программирования относительно параметров сплайна и временных узлов. Для поставленной задачи нелинейного программирования представлены алгоритмы вычисления производных первого и второго порядка целевой функции. Представленные алгоритмы позволяют вычислять производные на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем. Этот подход отличается от стандартного способа вычисления на основе разностной аппроксимации и позволяет существенно сократить общий объем вычислений. Исходя из специфики метода параметризации, предлагается концепция разработки программного комплекса, выводятся основные положения разработки. Так, в программном комплексе предлагается независимость реализации методов решения задач нелинейного программирования и дискретных схем решения задач Коши; единый (не зависящий от типа задачи оптимального управления) подход к параметризации управления. Также приводятся результаты вычислительных экспериментов, проведенных методом параметризации. Результаты подтверждают эффективность применения единого подхода к решению задач оптимального управления с точечным запаздыванием, распределенным запаздыванием, без запаздывания.

Ключевые слова: оптимальное управление, запаздывание, метод параметризации, нелинейное программирование, программный комплекс

Для цитирования: Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 260–279. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279>

Об авторах:

Лутошкин Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4108-7646>, lutoshkiniv@ulsu.ru

© Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г.



Чекмарев Артем Геннадьевич, аспирант кафедры цифровой экономики, Ульяновский государственный университет (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5376-9421>, armind@mail.ru

Original article

MSC2020 49M37

Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept

I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. An analysis of existing approaches to the development of software solutions designed to solve optimal control problems is carried out, and a conclusion is drawn about the need to develop specialized numerical software systems. As a numerical method for solving optimal control problems, a parameterization method is proposed, which allows, on the basis of a unified approach, to solve optimal control problems with point or distributed delay and without delay as well. The method describes a scheme for representing a control action in the form of a generalized spline with moving nodes and subsequent reduction of the original optimal control problem with or without delay to a nonlinear programming problem with respect to the spline parameters and temporary nodes. For stated nonlinear programming problem, algorithms for calculating the first and second order derivatives of the objective function are presented. These algorithms make it possible to calculate derivatives based on solving Cauchy problems for direct and adjoint systems. This approach differs from the standard method of calculation based on difference approximation and can significantly reduce the overall amount of calculations. Based on the specifics of the parameterization method, a concept for developing a software package is proposed, and the main provisions of the development are derived. Thus, the software package offers independence in the implementation of methods for solving nonlinear programming problems and discrete schemes for solving Cauchy problems. It also offers a unified (independent of the type of optimal control problem) approach to control parameterization. The results of computational experiments carried out using the parameterization method are also presented. These results confirm the effectiveness of using a unified approach while solving of optimal control problems with point delay, distributed delay, and with no delay.

Keywords: optimal control, delay, parameterization method, nonlinear programming, software package

For citation: I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev. Development of a parameterization method for solving optimal control problems and development of a software package concept. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 260–279. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.260-279>

About the authors:

Igor V. Lutoshkin, Ph.D. in Phys. and Math., Head of the Department of Digital Economics, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy Str., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4108-7646>, lutoshkiniv@ulsu.ru

Artem G. Chekmarev, Postgraduate Student, Ulyanovsk State University (42 Lev Tolstoy Str., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-5376-9421>, armind@mail.ru

1. Введение

Задачи моделирования управляемых нелинейных динамических систем возникают в разных областях науки, техники и технологии: машиностроении, робототехнике, авиации, химической промышленности, медицине, экономике и др. Для поддержки технологии моделирования таких систем разработано немало программных инструментов, предлагающих необходимое лингвистическое, информационное и алгоритмическое обеспечение. Наиболее известными и широко применяемыми пакетами программ общего назначения являются Matlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Scilab, SCAD Suite, OpenModelica, Julia и др.

Часть пакетов (Mathlab, Maple, GNU Octave, Mathematica, Julia) базируется на специализированных высокоуровневых мультипарадигменных интерпретируемых «полных» языках программирования, ориентированных на математические вычисления. На практике при использовании указанных пакетов чаще всего применяются сочетания процедурной, структурной и функциональной парадигм программирования. Другие пакеты (OpenModelica) реализуют декларативные компилируемые объектно-ориентированные языки, поддерживающие прежде всего компонентно-ориентированную парадигму проектирования. Такие пакеты ориентированы на имитацию: исполнение модели в модельной среде. Для имитационного моделирования и анализа динамических систем также применяются инструменты компонентно-ориентированного визуального программирования (Mathlab+Simulink, OpenModelica OMEdit, SCAD Suite), где модели представляются в формализме иерархии функциональных блоков и связей между ними. Альтернативный подход заключается в расширении существующих языков общего назначения специализированными библиотеками, примером может служить Python с библиотеками SciPy, NumPy и др.

При моделировании управляемых динамических систем, требующих оптимизации, формулируются проблемы в терминах задач теории оптимального управления (ЗОУ) (например, [1–4]). На практике нелинейность и высокая размерность ограничивают возможность получения аналитического решения таких задач, поэтому применяются специальные численные методы, среди которых наиболее часто используемыми в инструментах численного решения ЗОУ являются т. н. «прямые» методы, основанные на преобразовании ЗОУ в конечномерную задачу нелинейного программирования (НП) [5]. Прямые методы не требуют предварительных аналитических решений и относительно просты в использовании, но их реализация сталкивается с рядом вычислительных проблем [6], в связи с чем подобные инструменты изначально не были интегрированы в пакеты общего назначения.

Для моделирования динамических систем, формулируемых в терминах ЗОУ, создан ряд методов и специализированных инструментов численного решения ЗОУ, реализованных как приложения, библиотеки или дополнения к существующим пакетам общего назначения: CasADi, PSOPT, PROPT, GPOPS, ICLOCS2, ACADO, acados, GPOPS-II, CGPOPS, GEKKO, MEOPT, OPTCON и др. ([7–10]). Большая часть существующих инструментов решения задач оптимального управления (ОУ) либо являются библиотеками (например, CGPOPS), либо реализуют eDSL (например, GEKKO, PROPT) и базируются на полных языках общего назначения (Python, Matlab, Modelica), наследуя синтаксические решения и парадигмы, что требует от пользователя соответствующих знаний и значительно повышает уровень входа. Кроме этого, постоянно увеличивающаяся количественная сложность состава пакетов программ общего назначения приводит к усложнению процесса обучения.

Таким образом, создание простых, удобных и эффективных предметно-ориентированных инструментов является актуальной задачей. Для решения этой задачи можно использовать метод параметризации [11–12]. Разрабатываемый метод относится к классу прямых методов, в котором управляющая функция представляется в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами. Такая параметризация порождает задачу нелинейного программирования, в которой параметры сплайна являются переменными. При этом структура управления определяется пользователем модели и не зависит от формы задачи ОУ, а также вида уравнений, описывающих динамику. Это позволяет использовать единый подход к решению задач ОУ различной формы. Принципиальное отличие метода параметризации от других прямых методов состоит в способе вычисления производных в задаче нелинейного программирования, это делается на основе использования сопряженных переменных. Такой подход позволяет существенно сократить количество вычислений по сравнению с разностной аппроксимацией производных в задаче нелинейного программирования. При этом методы решения задачи нелинейного программирования не связаны с методами решения задач Коши. Такая независимость позволяет относительно просто строить расширяемую модульную архитектуру методов. Таким образом, реализуется единый концептуальный подход к решению задач ОУ достаточно общего вида.

2. Метод параметризации для решения задач оптимального управления

2.1. Задача оптимального управления без запаздывания

Рассмотрим задачу оптимального управления в виде:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0; \quad (2.1)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (2.2)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (2.3)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $t_0 \leq t \leq T$. Функции $f(x, u)$, $g(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемы.

Введем разбиение отрезка $[t_0; T]$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T; \quad (2.4)$$

и на каждом отрезке разбиения определим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r. \quad (2.5)$$

Здесь $v_\mu^k \in \mathbb{R}^d$.

Введем вектор параметров $w^k = (t_k, v^k) \equiv (w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \dots, w_{r,d}^k)$. Если в задачу Коши (2.1) подставить управление (2.4), (2.5), то получаемое решение будет зависеть от введенных параметров:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ интегральными соотношениями:

$$z(t, v^1) = x^0 + \int_{t_0}^t f(z(s; v^1), u^1(s; v^1)) ds, \quad t_0 \leq t < t_1;$$

$$z(t; w^1, \dots, w^k, v^{k+1}) = z(t_k; w^1, \dots, v^k) + \int_{t_k}^t f(z(s; w^1, \dots, v^{k+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1})) ds,$$

$$t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Определим функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)). \quad (2.6)$$

В этом случае вместо исходной задачи ОУ (2.1)-(2.3) получаем замещающую ее задачу НП:

$$\begin{aligned} \varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min \quad & \text{при ограничениях} \\ W = \{w^k : w_{0,0}^{k-1} \leq w_0^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ & k = 1, \dots, N; w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь T^* – известная фиксированная величина.

Для эффективного решения задачи НП (2.7) требуется применение методов, использующих производные целевой функции $\varphi(w^1, \dots, w^N)$. Так как зависимость φ от переменных (w^1, \dots, w^N) задана опосредованно, вычисление производной представляет собой отдельную проблему.

Формально производную целевой функции можно записать в виде:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T; \dots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}.$$

Введем вариации траектории

$$y^{j\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; v^1, \dots, v^k)}{\partial w_{\mu, \alpha}^j}, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad 1 \leq j \leq k \leq N. \quad (2.8)$$

Они удовлетворяют задачам Коши: для параметров $w_{0,0}^k = t_k$ ($1 \leq k \leq N-1$) это [11]

$$\begin{cases} \dot{y}^{k00} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k00}, & t_k \leq t \leq T, \\ y^{k00}(t_k) = f(x(t_k), u^k(t_k; v^k)) - f(x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1})); \end{cases} \quad (2.9)$$

для вариаций относительно $v_{\mu, \alpha}^k$ ($1 \leq \mu \leq r$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq k \leq N$) это

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha} + \theta(t_k - t) \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k}, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \quad t_{k-1} \leq t \leq T, \quad (2.10)$$

Здесь функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Вариация по конечному времени T конечна:

$$y^{N00}(T) = f(x(T), u(T)). \tag{2.11}$$

Таким образом, вычисление сомножителя $\frac{\partial z(T; w^1, \dots, v^N)}{\partial w_{\mu, \alpha}^k}$ эквивалентно решению соответствующей задачи: (2.9), (2.10), (2.11). Следовательно, вычисление градиента целевой функции может быть сведено к решению ряда задач Коши, количество которых совпадает с количеством переменных (w^1, \dots, w^N) . Однако, за счет использования сопряженных переменных объем вычислений удастся существенно сократить.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина и сопряженную систему:

$$\begin{aligned} H(p, x, u) &= \langle p, f(x, u) \rangle; \\ \begin{cases} \dot{p} = - \frac{\partial H(p(t), x, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t)}, & t_0 \leq t \leq T, \\ p(T) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Big|_{z=x(T)}. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Теорема 2.1 ([11]). Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (2.1)–(2.3), непрерывно дифференцируемы по фазовым и управляющим переменным, тогда для первых производных функции φ по параметрам управления верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= H(p(T), x(T), u(T)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 2.1 дает алгоритм вычисления градиента целевой функции задачи НП (2.7) на основе решения двух задач Коши (2.1), (2.12).

Для вычисления производных второго порядка с помощью сопряженных функций p определим матричные импульсы [13]:

$$\dot{\Psi} = - \frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(x, u(t))}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(p(t), x, u(t))}{\partial x^2} \Big|_{x=x(t)}, \quad 0 \leq t \leq T; \tag{2.13}$$

с конечными условиями

$$\Psi(T) = \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=x(T)}. \tag{2.14}$$

Т е о р е м а 2.2 ([13]). Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (2.1)–(2.3), дважды непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным, кроме того функция f дважды непрерывно дифференцируема по управляющим переменным $u_i, i = 1, \dots, r$, тогда для вторых производных функции φ по параметрам управления верны формулы:

$$(v_{\mu,\alpha}^j, v_{\nu,\beta}^k; j \leq k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^j \partial v_{\nu,\beta}^k} = & \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} \left(\left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu} \partial x}, y^{j\mu\alpha}(t) \right\rangle + \right. \right. \\ & + [\Psi(t)y^{j\mu\alpha}(t)]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\nu}} \left. \right) + \delta_{jk} \left[\frac{\partial u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} \times \right. \\ & \times \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu} \partial u_{\mu}} + \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} \left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\mu} \partial x}, y^{k\nu\beta}(t) \right\rangle + \\ & + \frac{\partial u_{\mu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} [\Psi(t)y^{k\nu\beta}(t)]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\mu}} + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k \partial v_{\nu,\beta}^k} \times \\ & \left. \left. \times \frac{\partial H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu}} \right] \right\} dt; \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$(v_{\mu\alpha}^j, t_k; j \leq k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^j \partial t_k} = & \left[\frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} \right]^T y^{j\mu\alpha}(t_k) + [\Psi(t_k)y^{j\mu\alpha}(t_k)]^T \times \\ & \times y^{k00}(t_k) + \delta_{jk} \frac{\partial u_{\mu}^k(t_k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial u_{\mu}}; \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$(t_j, v_{\nu,\beta}^k; j < k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial v_{\nu,\beta}^k} = & -\delta_{j(k-1)} \frac{\partial H(p(t_{k-1}), x(t_{k-1}), u^k(t_{k-1}; v^k))}{\partial u_{\nu}} + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial u_{\nu}^k(t; v^k)}{\partial v_{\nu,\beta}^k} \left[\left\langle \frac{\partial^2 H(p(t), x(t), u(t))}{\partial u_{\nu} \partial x}, y^{j00}(t) \right\rangle + \right. \\ & \left. + [\Psi(t)y^{j00}(t)]^T \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u_{\nu}} \right] dt; \quad (2.17) \end{aligned}$$

(t_j, t_k)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_j \partial t_k} = & \left\langle \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x} + \Psi(t_k) y^{k00}(t_k), y^{j00}(t_k) \right\rangle + \\ & + \delta_{jk} \left\{ - \left\langle \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x}, y^{k00}(t_k) \right\rangle + \right. \\ & + \left\langle \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^k(t_k; v^k))}{\partial x}, \frac{\partial u^k(t_k; v^k)}{\partial t} \right\rangle - \\ & \left. - \left\langle \frac{\partial H(p(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k; v^{k+1}))}{\partial x}, \frac{\partial u^{k+1}(t_k; v^{k+1})}{\partial t} \right\rangle \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Теорема 2.2 дает алгоритм вычисления матрицы Гессе целевой функции в задаче НП (2.7), что позволяет применять методы второго порядка в задаче (2.7).

2.2. Задача оптимального управления с точечным запаздыванием

Рассмотрим задачу ОУ с постоянным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - h), u(t)); \quad (2.19)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (2.20)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \quad (2.21)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (2.22)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ при $t_0 \leq t \leq T$, $f: \mathbb{R}^{1+2n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если в задачу Коши (2.19), (2.21) подставить параметризованное управление (2.4)–(2.5), то получим решение

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ соотношениями:

$$z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0;$$

$$z(t; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k) = \psi(t_0) +$$

$$\int_{t_0}^t f(s, z(s; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), z(s - h; w^1, \dots, w^{k-1}, v^k), u^k(s; v^k)) ds,$$

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Аналогично (2.6) можно определить функцию φ :

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)).$$

Таким образом, задача ОУ (2.19)-(2.22) формально аппроксимируется задачей НП (2.7). Вычисление производных целевой функции задачи (2.7) может быть основано на решении задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина и систему уравнений для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}
 & H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle; \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= - \left. \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \right|_{x=x(t), \xi=x(t-h)} \\
 & - \left. \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} \theta(T-h-t) \right|_{x=x(t+h), \xi=x(t)}; \\
 p(T) &= \frac{\partial g(x(T))}{\partial x(T)}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Т е о р е м а 2.3 ([14]). Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (2.19)–(2.22), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (2.7) по параметрам верны формулы:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - \\
 & H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, p(\tau), x(\tau), x(\tau - h), u(\tau))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau.$$

Теорема 2.3 позволяет построить алгоритм вычисления градиента целевой функции в задаче НП (2.7), аппроксимирующей задачу ОУ с точечным запаздыванием (2.19)-(2.22). Это открывает возможность применения методов первого порядка к задаче (2.7).

2.3. Задача оптимального управления с распределенным запаздыванием

Рассмотрим задачу ОУ с распределенным запаздыванием в виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \psi \left(t, x(t), u(t), \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds \right), \\
 x(t_0) &= x^0;
 \end{aligned} \right. \tag{2.23}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{2.24}$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min \tag{2.25}$$

Здесь $x(t) \in R^n, u(t) \in R^r, t_0 \leq t \leq T, U$ замкнуто в R^r . Функции $\psi : R^{1+n+r+m} \rightarrow R^n, f : R^{2+n+r} \rightarrow R^m, g : R^n \rightarrow R$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы.

Если в задачу Коши (2.23) подставить параметризованное управление (2.4)–(2.5), то полученное решение зависит от параметров управления:

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функция $z(t; v^1, t_1, \dots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k)$ определяется на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$ соотношениями:

$$z(t; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k) = x^0 + \int_{t_0}^t \left(\psi(\tau, z(\tau; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k), u^k(\tau, v^k), \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s; v^1, \dots, t_{k-1}, v^k), u(s)) ds) \right) d\tau, \quad t_{k-1} \leq t < t_k.$$

Таким образом, можно определить функцию

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N)).$$

В приведенных обозначениях задача ОУ (2.23)–(2.25) формально аппроксимируется задачей НП (2.7). Для применения методов первого порядка к задаче (2.7) необходимо вычисление первых производных функции $\varphi(w^1, \dots, w^N)$. Поскольку данная функция задана опосредованно, то вычисление производных нетривиально.

Для решения этой проблемы введем

$$q(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad h(t, s, x, u) = \frac{\partial f(t, s, x, u)}{\partial t}.$$

Определим функцию

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds;$$

и сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \left[\frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[\frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds; \\ \dot{p}_q(t) &= - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t); \\ p_x(T) &= \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}; \quad p_q(T) = 0. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 2.4 ([12, 14]). Пусть функции f, g, ψ , входящие в постановку задачи (2.23)–(2.25), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче (2.7) верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ &\quad - H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\mu}^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 2.4 позволяет построить алгоритм вычисления производных в задаче НП (2.7), аппроксимирующей задачу ОУ с распределенным запаздыванием (2.23)–(2.25).

Таким образом, Теоремы 2.1–2.4 позволяют сформировать единый подход к численному решению задач ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. Реализация алгоритмов, реализующих метод параметризации для задач ОУ как с запаздыванием, так и без запаздывания, может быть концептуально решена в рамках единого программного комплекса.

3. Концепция программного комплекса

Единый концептуальный подход, предлагаемый в методе параметризации, определяет основные положения, описывающие структуру программного комплекса и соответствующий набор функций. Отметим, что существующие инструменты решения ЗОУ не учитывают функциональную разницу между ролью разработчика (исследователя) модели и ролью пользователя модели. Причины этого заключаются в том, что актуальные методы решения ЗОУ требуют достаточно высокого уровня входа не только от разработчика модели, но и от пользователя модели. Более того, математическое представление модели и методы решения тесно интегрированы, оказывая взаимное влияние друг на друга.

Применение метода параметризации позволяет разделить роли разработчика (исследователя) модели и пользователя модели. Разработчик модели выбирает математический вид задачи ОУ: со связями в виде ОДУ без запаздывания; с точечным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных; с распределенным запаздыванием в фазовых и/или управляющих переменных. Также к функциям роли разработчика относятся: ввод уравнений модели; ввод промежуточных и терминальных ограничений; идентификация параметров модели; ввод целевого функционала задачи в терминальной форме; ввод частных производных функций, входящих в исходную постановку задачи ОУ. Роль пользователя модели относится к процессу решения задачи ОУ, в ходе решения пользователь может: менять параметрическое представление управляющих функций; менять значение параметров модели; выбирать сценарий решения задачи НП, порожденной методом параметризации; обрабатывать отчеты, полученные при решении задачи. Ниже приведен общий алгоритм действий пользователей программного комплекса: разработчика модели, пользователя модели.

Общий алгоритм действий пользователей программного комплекса:

- S1.** Ввести структурные параметры задачи: размерность фазовой переменной, размерность управляющей переменной.
- S2.** Если задача ОУ без запаздывания, то переход к S3, иначе к S4.
- S3.** Ввести: параметры задачи; дифференциальные уравнения; частные производные функций, описывающих ОДУ; целевой функционал. Переход к S7.
- S4.** Если запаздывание точечное, то переход к S5, иначе S6.
- S5.** Ввести: лаг запаздывания; параметры задачи; дифференциальные уравнения с запаздыванием; частные производные функций, описывающих ДУ; целевой функционал. Переход к S7.
- S6.** Ввести: параметры задачи; дифференциальные уравнения; частные производные функций, описывающих ИДУ; целевой функционал.
- S7.** Ввести: размерность структуры параметризации управления; параметрическое представление управления.
- S8.** Создать сценарий решения задачи НП; настроить параметры отчета. Запустить выполнение сценария.
- S9.** Проанализировать отчет. Если решение удовлетворяет пользователя, то переход к S10, иначе переход к S7.
- S10.** Задача решена.

В приведенном алгоритме пункты S1-S6 относятся к действиям разработчика модели, пункты S7-S10 к действиям пользователя модели.

В методе параметризации переменные задачи НП, аппроксимирующей исходную задачу ОУ, не связаны с дискретной схемой решения задач Коши. Это позволяет в рамках программного комплекса применять независимые библиотеки решения задач НП и решения задач Коши. Следовательно, появляется возможность строить различные сценарии решения задач НП, применять методы условной и безусловной оптимизации, не опираясь на дискретные схемы решения задач Коши. В свою очередь, независимо можно применять различные дискретные схемы решения задач Коши, не связывая их с задачами НП, т. к. они не влияют на структуру и вид задачи НП.

В рамках программного комплекса реализуется несколько подходов к реализации алгоритма вычисления производных целевой функции: на основе решения задач Коши для прямой и сопряженной систем (требуется реализация методов решения задач Коши для систем с точечным запаздыванием, распределенным запаздыванием, без запаздывания) и последующего численного интегрирования; аппроксимация на основе конечных разностей; комбинация разностного дифференцирования и решения задач Коши для прямой и сопряженной систем.

В методе параметризации управляющая функция представляется в виде обобщенного сплайна. Структура управления определяется пользователем модели и не зависит от формы задачи ОУ, а также вида уравнений, описывающих динамику. Таким образом, в рамках программного комплекса реализуется единый подход к параметрическому представлению управляющих функций.

Можно определить основные характеристики программного комплекса:

- выделение роли разработчика модели и роли пользователя модели;
- независимость модуля для решения задачи НП и модуля решения задач Коши;

- расширяемая модульная архитектура, позволяющая добавлять новые модули решения НП и модули решения задач Коши в виде библиотек;
- единый модуль параметрического представления управления;
- единый концептуальный подход к решению задач ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания.

4. Вычислительные эксперименты

Пример 4.1. В [15] рассмотрена задача с особым оптимальным управлением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_2, & \dot{x}_2 &= 2u, & x_1(0) &= -7, & x_2(0) &= 3, \\ |u(t)| &\leq 1, \\ J(u) &= x_1^2(2) + x_2^2(2) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для задачи (4.1) в классе непрерывных управлений существует оптимальное $u^*(t)$ ($J(u^*(\cdot)) = 0$):

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1; \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Задача (4.1) решалась методом параметризации в [13], для этого она трансформировалась к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_2, & \dot{x}_2 &= 2u, & \dot{x}_3 &= \left([u - 1]^+\right)^2 + \left([-u - 1]^+\right)^2; \\ x_1(0) &= -7, & x_2(0) &= 3, & x_3(0) &= 0, & x_3(2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Управление рассматривалось в классе непрерывных кусочно-линейных функций

$$u(t) = \begin{cases} v_{11} + v_{12}t, & 0 \leq t < \tau; \\ v_{21} + v_{22}t, & \tau \leq t \leq 2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Таким образом решалась задача НП относительно коэффициентов $(v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ и момента переключения τ . Соответственно, введен функционал

$$J(u, c_1, c_2) = x_1^2(2) + x_2^2(2) + c_1 x_3(2) + c_2 (v_{11} + v_{12}\tau - v_{21} - v_{22}\tau)^2. \quad (4.4)$$

Здесь c_1, c_2 – коэффициенты штрафа.

Задача безусловной минимизации (4.2)–(4.4) решалась методами: градиентным методом (проекция градиента, МПГ), методом Дэвидона-Флэтчера-Пауэлла (ДФП), методом Ньютона (МН). В качестве начального приближения принималось: $v_{11} = -0.5$, $v_{12} = 0$, $v_{21} = 0.5$, $v_{22} = 0$, $\tau = 1$, параметры штрафа $c_1 = c_2 = 100$. Значение функционала при этом приближении $J(u, 100, 100) = 173$. Все задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования 0,1.

При применении МПГ, ДФП, МН использовались следующие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10} ; если приращение аргумента меньше 10^{-10} ; если достигается предельное количество итераций (для МПГ и ДФП 1000, для МН 15). Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев.

При решении методом МПГ после 20 итераций было получено решение: $J(u) = 0,36$. После этого, уменьшение значения функционала на каждой итерации было менее одного процента. После 210 итераций процесс был остановлен. При решении методом ДФП после 18 итераций процесс был остановлен, было получено решение: $J(u) = 0,14637$. При решении методом МН процесс был остановлен после 8 итераций, было получено решение: $J(u) = 1,73 \cdot 10^{-11}$. Все решения приведены в таблице 4.1, в последней строке указаны коэффициенты оптимального управления задачи (4.1).

Таблица 4.1. Параметры оптимального решения при различных методах НП

Table 4.1. Parameters of the optimal solution for various NP methods

метод	v_{11}	v_{12}	τ	v_{21}	v_{22}	$J(u)$
МПГ	-1,06139	0,24723	1,57807	-0,04631	-0,39538	0,20703
ДФП	-1,05512	0,24724	1,99360	-0,04631	-0,26435	0,14637
МН	-1,00000	$1,3 \times 10^{-4}$	1,00048	-2,00096	1,00060	$1,7 \times 10^{-11}$
точное решение	-1	0	1	-2	1	0

Из Таблицы 4.1 можно сделать вывод, что наилучшее решение по значению функционала получается при решении методом Ньютона, наихудшее методом проекции градиента. Если сравнить максимальное отклонение получаемого управления от оптимального $u^*(t)$, то ситуация аналогична: для МПГ - 0,837, ДФП - 0,575, МН - 0,0002. Таким образом, метод параметризации является работоспособным при применении различных методов НП; при использовании производных второго порядка получается гораздо лучшее приближение.

Пример 4.2. Рассмотрим тестовую задачу, приведенную в [14] (h – лаг запаздывания):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1(t) - u_1(t) + u_2(t); \\
 x_2 &= (2x_1(t) - 2u_1(t-h) + 4u_2(t-h) - u_1(t))^2 \\
 &\quad + (x_1(t) - u_1(t-h) + 2u_2(t-h) - u_2(t))^2; \\
 x_1(0) &= -h + h^2, \quad x_2(0) = 0, \quad u_1(t) = 3 + 4t, \quad u_2(t) = 1 + t, \quad t \in [-h; 0]; \\
 x_2(1) &\rightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В задаче ОУ (4.5) вырождается принцип максимума Понтрягина, целевой функционал ограничен снизу нулем. Задача (4.5) решалась методом параметризации в классе кусочно-линейных и кусочно-квадратичных управлений с одним и двумя моментами переключений. Лаг запаздывания h варьировался. Полученная задача НП решалась градиентным методом и методом Ньютона последовательно. Производные первого порядка вычислялись на основе формул, приведенных в Теореме 2.3, матрица Гессе вычислялась на основе разностной аппроксимации градиентами, построенными по формулам, приведенным в Теореме 2.3. Результаты экспериментов представлены в таблице 4.2.

Первый столбец Таблицы 4.2 описывает вид параметризации, второй столбец модельные лаги запаздывания системы. Основные данные таблицы – значения функционала решаемой задачи ОУ, они приведены при трёх шагах интегрирования (0,01; 0,005;

0, 001). Задачи Коши решались методом Рунге-Кутты 2-го порядка, интегралы методом Симпсона.

Задача НП решалась методом скорейшего спуска (МСС) и методом Ньютона (МН) последовательно. В сценарии такая процедура запускалась пятикратно. При применении МСС, МН использовались следующие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10} ; если приращение аргумента меньше 10^{-10} ; если достигается предельное количество итераций (для МСС 100, для МН 15). Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев. При фиксированной параметризации управления и фиксированном лаге запаздывания использовалось одинаковое начальное приближение перед запуском сценария для разных шагов интегрирования. При усложнении параметризации управления начальное приближение выбиралось исходя из решения, полученного в более простой параметризации.

Таблица 4.2. Значение функционала в задаче (4.5)

Table 4.2. The meaning of the functionality in the problem (4.5)

Параметризация управления	h	Δt		
		0,01	0,005	0,001
линейное управление с одним моментом переключения	0,1	$3,0594 \cdot 10^{-7}$	$2,8670 \cdot 10^{-7}$	$2,7797 \cdot 10^{-7}$
	0,3	$6,8041 \cdot 10^{-5}$	$6,7493 \cdot 10^{-5}$	$6,7307 \cdot 10^{-5}$
	0,5	$8,4106 \cdot 10^{-4}$	$8,6700 \cdot 10^{-4}$	$8,3637 \cdot 10^{-4}$
линейное управление с двумя моментами переключения	0,1	$2,5100 \cdot 10^{-8}$	$1,9245 \cdot 10^{-8}$	$1,7526 \cdot 10^{-8}$
	0,3	$4,4043 \cdot 10^{-6}$	$4,2653 \cdot 10^{-6}$	$4,2200 \cdot 10^{-6}$
	0,5	$5,4889 \cdot 10^{-5}$	$5,4278 \cdot 10^{-5}$	$5,4051 \cdot 10^{-5}$
квадратичное управление с одним моментом переключения	0,1	$1,2023 \cdot 10^{-9}$	$7,7235 \cdot 10^{-11}$	$1,4670 \cdot 10^{-13}$
	0,3	$3,7005 \cdot 10^{-9}$	$2,3301 \cdot 10^{-10}$	$3,7583 \cdot 10^{-13}$
	0,5	$6,1816 \cdot 10^{-9}$	$3,9196 \cdot 10^{-10}$	$4,4879 \cdot 10^{-12}$

В этом примере аналитическое решение неизвестно, качество решения определяется целевым функционалом, ограниченным снизу нулем. Анализ данных в Таблице 4.2 показывает, что процесс решения задачи ОУ методом параметризации является устойчивым: с усложнением структуры параметризации управления улучшается решение задачи. Наилучшее решение получается при кусочно квадратичной параметризации управляющих функций. При этом шаг интегрирования слабже влияет на качество решения. Усложнение структуры параметризации прекращается тогда, когда достигается необходимая точность, что определяется пользователем модели.

Пример 4.3.

Рассмотрим тестовую задачу ОУ с распределенным запаздыванием из [12]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t) \exp\{s(t - s)\} ds, \\ \dot{x}_2(t) = (tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (4.6)$$

Оптимальное решение задачи: $u^*(t) = t \exp\{t^2\} + 1$, $x_1^*(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$, $x_2^*(t) \equiv 0$; целевой функционал равен нулю.

Задача (4.6) решалась методом параметризации в классе кусочно-линейных управлений и кусочно-квадратичных управлений с одним и двумя моментами переключений. Все задачи НП решались методом Ньютона, матрица вторых производных вычислялась на основе градиентов разностными аппроксимациями. Градиенты вычислялись по формулам, представленным в Теореме 2.4. При применении метода Ньютона использовались следующие условия окончания итерационного процесса: если норма градиента меньше 10^{-10} ; если приращение аргумента меньше 10^{-10} ; если достигается предельное количество итераций 15. Итерационный процесс останавливался, когда выполнялся хотя бы один из критериев. При фиксированной параметризации управления использовалось одинаковое начальное приближение в задаче НП для разных шагов интегрирования. При усложнении параметризации управления начальное приближение выбиралось исходя из решения, полученного в более простой параметризации. Результаты решения приведены в Таблице 4.3.

Первый столбец Таблицы 4.3 описывает вид параметризации; столбец Δt – шаг интегрирования задач Коши (интегрирование выполнялось методом Рунге-Кутты 2-го порядка); столбец J содержит значения целевого функционала в задаче (4.6); $\Delta u = \max_{k \in K} |u^*(t_k) - u(t_k)|$; $\Delta x_1 = \max_{k \in K} |x_1^*(t_k) - x_1(t_k)|$.

Таблица 4.3. Значение функционала в задаче (4.6)

Table 4.3. The meaning of the functionality in the problem (4.6)

Параметризация управления	Δt	J	Δu	Δx_1
линейное управление с одним моментом переключения	0,005	0,002652	0,164	0,0068
	0,01	0,002663	0,164	0,0068
	0,05	0,002705	0,163	0,0067
линейное управление с двумя моментами переключения	0,005	0,000502	0,070	0,0023
	0,01	0,000507	0,070	0,0020
	0,05	0,000525	0,070	0,0019

Параметризация управления	Δt	J	Δu	Δx_1
квадратичное управление с одним моментом переключения	0,005	0,000063	0,025	0,0007
	0,01	0,000064	0,026	0,0006
	0,05	0,000075	0,032	0,0013
квадратичное управление с двумя моментами переключения	0,005	0,000019	0,016	0,0004
	0,01	0,000011	0,008	0,0005
	0,05	0,000023	0,010	0,0022

Анализируя данные таблицы 4.3, можно отметить, что процесс решения методом параметризации является устойчивым: численное решение сходится к оптимальному с усложнением структуры параметризации; влияние шага интегрирования менее значительно. Выбор приемлемой точности решения задачи ОУ определяется пользователем модели.

5. Заключение

В работе предлагается концепция построения программного комплекса для численного решения задач ОУ. Концепция строится на особенностях развиваемого авторами метода параметризации. Специфика метода позволяет в рамках единого подхода решать задачи ОУ с точечным запаздыванием, с распределенным запаздыванием, без запаздывания. В работе приведены результаты численных экспериментов с различными типами задач ОУ, в которых подтверждается эффективность предлагаемого подхода к созданию программного комплекса.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542 (URL: <https://rscf.ru/project/24-28-00542/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федосеев С. А., Горбунов Д. Л. Алгоритм оптимального управления замкнутой системой рынка труда на заданном временном интервале // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2024. Т. 24. № 1. С. 96–105. DOI: <https://doi.org/10.14529/ctcr240109>
2. Корсун О. Н., Стуловский А. В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. Т. 58, № 2. С. 75–89.
3. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. вып. 2. С. 264–273. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>

4. Eichmeir P., Nachbagauer K., Laub T., Sherif K., Steiner W. Time-optimal control of dynamic systems regarding final constraints // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 16. no. 3. 12 p. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4049334>
5. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems // IEEEJ Journal of Industry Applications. J-STAGE. 2016. Vol. 5, no. 2. pp. 154–166. DOI: <https://doi.org/10.1541/ieejia.5.154>
6. Горнов А. Ю. Классификация проблем, возникающих при численном решении задач оптимального управления // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № S1. С. 17–26.
7. Rodrigues H. S., Monteiro M. T. T., Torres D. F. M. Optimal control and numerical software: an overview // Syst. Theory Perspect. Appl. Dev. 2014. pp. 93–110.
8. Ozana S., Docekal T., Nemic J., Krupa F., Mozaryn J. A comparative survey of software computational tools in the field of optimal control // 23rd International Conference on Process Control (PC). 2021. DOI: <https://doi.org/10.1109/PC52310.2021.9447510>
9. Rao A. V. Trajectory optimization: a survey // Optimization and optimal control in automotive systems. Cham. Springer. 2014. pp. 3–21. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05371-4_1
10. Сороковиков П. С., Горнов А. Ю. Пакет программ МЕОРТ для решения невыпуклых задач параметрической идентификации // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2022. № 2. С. 53–60. DOI: <https://doi.org/10.38028/ESI.2022.26.2.005>
11. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.
12. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации // Известия Иркутского государственного университета. Сер. «Математика». 2011. Т. 4, № 1. С. 44–56.
13. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67–84.
14. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа : монография. Ульяновск: УлГУ, 2024. 188 с.
15. Антоник В. Г., Срочко В. А. Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 4. С. 564–572.

*Поступила 01.06.2024; доработана после рецензирования 10.07.2024;
принята к публикации 28.08.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. S. A. Fedoseev, D. L. Gorbunov, “An algorithm for optimal control of a closed labor market system at a given time interval”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, **24**:1 (2024), 96–105. DOI: <https://doi.org/10.14529/ctcr240109> (In Russ.).
2. O. N. Korsun, A. V. Stulovskii, “Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **58**:2 (2019), 229–243.
3. I. V. Lutoshkin, M. S. Rybina, “Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease”, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, **23**:2 (2023), 264–273. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273> (In Russ.).
4. P. Eichmeir, K. Nachbagauer, T. Laub, K. Sherif, W. Steiner, “Time-optimal control of dynamic systems regarding final constraints”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **16**:3 (2021), 12. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.404933476>.
5. F. Biral, E. Bertolazzi, P. Bosetti, “Notes on numerical methods for solving optimal control problems”, *IEEJ Journal of Industry Applications. J-STAGE*, **5**:2 (2016), 154–166. DOI: <https://doi.org/10.1541/ieejia.5.154>.
6. A. Y. Gornov, “Classification of problems arising in numerical studies of the optimal control problems”, *Computational Technologies*, **13**:S1 (2008), 17–26 (In Russ.).
7. H. S. Rodrigues, M. T. T. Monteiro, D. F. M. Torres, “Optimal control and numerical software: an overview”, *Syst. Theory Perspect. Appl. Dev.*, 2014, 93–110.
8. S. Ozana, T. Docekal, J. Nemcik, F. Krupa, J. Mozaryn, “A comparative survey of software computational tools in the field of optimal control”, *23rd International Conference on Process Control (PC)*, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1109/PC52310.2021.9447510>.
9. A. V. Rao, “Trajectory optimization: a survey”, *Optimization and optimal control in automotive systems*, 2014, 3–21. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05371-4_1.
10. P. S. Sorokovikov, A. Yu. Gornov, “MEOPT software package for solving non-convex problems of parametric identification”, *Information and Mathematical Technologies in Science and Management*, 2022, no. 2, 53–60. DOI: <https://doi.org/10.38028/ESI.2022.26.2.005> (In Russ.).
11. V. K. Gorbunov, “[Parameterization method for optimal control problems]”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **19**:2 (1979), 292–303 (In Russ.).
12. I. V. Lutoshkin, “The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations”, *Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics*, **4**:1 (2011), 44–56 (In Russ.).

13. V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, “Development and experience of using the parameterization method in singular problems of dynamic optimization”, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **43**:5 (2004), 725–742.
14. I. V. Lutoshkin, *Dynamic models of economic systems and methods of their analysis*, UISU Publ., Ulyanovsk, 2024 (In Russ.), 188 p.
15. V. G. Antonik, V. A. Srochko, “The projection method in linear-quadratic problems of optimal control jour computational mathematics and mathematical physics”, **38**:4 (1998), 564–572 (In Russ.).

Submitted 01.06.2024; Revised 10.07.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.280-293

ISSN 2079-6900 (Print)

Оригинальная статья

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.928

О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению

П. А. Шаманаев

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Получены достаточные условия неустойчивости относительно части переменных нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению. Приведены результаты, когда правая часть исследуемой системы представлена как в наиболее общем виде, так и в виде векторного полинома. В качестве первого приближения взята линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей, которая может иметь собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать. Подход основан на установлении некоторого соответствия между решениями исследуемой системы и ее линейного приближения. В случае, если такое соответствие существует, начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля решения таких систем обладают некоторыми одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами. В настоящей работе в качестве такого свойства выступает неустойчивость по отношению к части переменных. Приведены условия, когда свойства неустойчивости нулевого решения одной системы сохраняются при переходе к другой системе. Приведен пример неустойчивости по отношению к части переменных нулевого решения нелинейной системы, матрица линейного приближения которой содержит по одному положительному, отрицательному и нулевому собственному значению, причем алгебраическая и геометрическая кратности нулевого собственного значения не совпадают.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, частичная неустойчивость, равномерная локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность, первое приближение

Для цитирования: Шаманаев П. А. О частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем по первому приближению // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 280–293. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.280-293>

Об авторе:

Шаманаев Павел Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

© Шаманаев П. А.



MSC2020 34D20

On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Sufficient conditions for instability with respect to a part of the variables of the zero solution of a nonlinear system in the linear approximation are obtained. The results are presented when the right-hand of the system under study is presented both in the most general form and in the form of a vector polynomial. The results are given for the cases when the right-hand of the system under study is presented both in the most general form and in the form of a vector polynomial. As a first approximation, a linear system of ordinary differential equations with a constant matrix is taken, whose eigenvalues may have zero real parts. Moreover, algebraic and geometric multiplicities of these eigenvalues may not coincide. The approach is based on establishing some correspondence between the solutions of the system under study and its linear approximation. If such correspondence exists, solutions of such systems starting in a sufficiently small neighborhood of zero have some identical component-wise asymptotic properties. In particular, this article focuses on solution instability with respect to some variables, which is one of such properties. Conditions are given for the case when the instability properties of the zero solution of one system are preserved upon transition to another system. The paper gives an example of instability with respect to a part of variables of the zero solution of a nonlinear system, whose linear approximation matrix contains one positive, one negative and one zero eigenvalue, and algebraic and geometric multiplicities of the zero eigenvalue do not coincide.

Keywords: ordinary differential equations, partial instability, uniform local component-wise asymptotic equivalence, first approximation

For citation: P. A. Shamanaev. On the partial instability of the zero solution of nonlinear systems to the first approximation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 280–293. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.280-293>

About the author:

Pavel A. Shamanaev, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

1. Введение

Основы теории устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости) изложены в работах [1–5].

Исследованию частичной устойчивости нулевого решения по линейному приближению посвящены работы [6–7], в том числе и в критическом случае (см. [7–11]).

Настоящая работа посвящена исследованию частичной неустойчивости нулевого решения и является продолжением исследований, изложенных в работах [12–15]. Описанный в этих работах подход основан на установлении покомпонентной асимптотической

эквивалентности между исследуемой системой и ее первым приближением [16], [17]. При выполнении некоторых дополнительных условий соответствующие решения этих систем будут обладать одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами. В частности, показано, что если нулевое решение первого приближения является частично неустойчивым, то этим же свойством будет обладать и нулевое решение исследуемой системы.

2. Равномерно локально покомпонентно асимптотическая эквивалентность и частичная неустойчивость

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений [15]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$, $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $T \geq 0$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Обозначим через $x(t : t_0, x^{(0)})$ решение с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ системы (2.1) и будем считать, что у всех систем из множества Ξ существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$. Здесь D — некоторая область пространства R^n , содержащая окрестность нуля.

Пусть [15]

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (2.2)$$

есть некоторая другая система из множества Ξ , а $y(t : t_0, y^{(0)})$ — ее решение с начальными данными $(t_0, y^{(0)})$.

Для систем (2.1) и (2.2) определим через $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ и $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ — i -е компоненты соответствующих решений.

Положим $U, V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля, $M_0 \subseteq N = \{1, \dots, n\}$.

Определение 2.1 ([15]). Системы (2.1) и (2.2) будем называть равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, если выполняются следующие условия:

1) при любом фиксированном $t_0 \geq T$ между множествами начальных точек систем (2.1) и (2.2) существует непрерывное в нулевой точке отображение

$$P(x^{(0)}) = y^{(0)}, \quad P(0) = 0, \quad (2.3)$$

где $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, такое, что для i -х компонент решений систем (2.1) и (2.2) выполняются равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}), \quad (2.4)$$

здесь $i \in M_0$, $\mu_i \in C([T, +\infty), R^+)$, $\delta_i \in C^{(0,0,1)}([t_0, +\infty) \times [T, +\infty) \times R^n, R)$;

2) в равенстве (2.4) функции $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, ограничены при всех $t \geq t_0$ и стремятся к нулю при $\|x^{(0)}\| \rightarrow 0$, $x^{(0)} \in U$ равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$;

3) в равенстве (2.4) функции $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$.

Для равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем сформулируем достаточные условия, которые сохраняют свойство частичной неустойчивости нулевого решения при переходе от одной системы к другой.

Л е м м а 2.1. Пусть системы (2.1) и (2.2) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$. Тогда, если в сколь угодно малой проколотой окрестности нуля V существуют области V_i , $i \in M_0$, такие, что для всех $y^{(0)} \in V_i \subset V$ и функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, таких что

$$\mu_i(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (2.5)$$

выполняются соотношения

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0, y^{(0)}) \neq 0, \quad (2.6)$$

где $q_i \in C([T, +\infty) \times R^n, R)$ то нулевые решения систем (2.1), (2.2) неустойчивы по каждой из переменных x_i , y_i , $i \in M_0$, соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем проводить доказательство неустойчивости нулевых решений систем (2.1) и (2.2) по каждой из переменных x_i , y_i , $i \in M_0$, соответственно, при каждом фиксированном $i \in M_0$.

Из определения верхнего предела и соотношения (2.6) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ существует момент времени $t_1 > t_0$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} < q_i(t_0, y^{(0)}) + \varepsilon_0 \quad \text{при всех } t > t_1 \quad (2.7)$$

и существует подпоследовательность $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t_k)} = q_i(t_0, y^{(0)}) \quad \text{при } t_k \rightarrow +\infty.$$

Откуда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ и момент времени $t_2 > t_0$, такие что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$q_i(t_0, y^{(0)}) - \varepsilon_0 < \frac{y_i(t_k : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} \quad \text{при } t_k > t_2. \quad (2.8)$$

Не ограничивая общности будем считать, что проколота окрестность V_i состоит из таких точек y , что $\|y\| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число. Зафиксируем t_0 и разобьем область V_i на два подмножества:

$$V_{i, t_0}^+ = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V_i, q_i(t_0, y^{(0)}) > 0 \right\},$$

$$V_{i, t_0}^- = \left\{ y^{(0)} : y^{(0)} \in V_i, q_i(t_0, y^{(0)}) < 0 \right\}.$$

Из соотношения (2.6) следует, что хотя бы одно из множеств V_{i, t_0}^+ , V_{i, t_0}^- будет непустым.

Пусть V_{i,t_0}^+ – непустое подмножество и $y^{(0)} \in V_{i,t_0}^+$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, y^{(0)}) - \varepsilon_0 > 0$. Учитывая (2.5), для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^* > t_2$ и $y^* \in V_{i,t_0}^+$ такие, что

$$(q_i(t_0, y^*) - \varepsilon_0)\mu_i(t^*) \geq \varepsilon. \quad (2.9)$$

Тогда из оценок (2.8) и (2.9) следует, что в момент времени $t^* > t_2$ и $y^* \in V_{i,t_0}^+$ будет справедливо неравенство

$$y_i(t^* : t_0, y^*) \geq \varepsilon. \quad (2.10)$$

Пусть теперь V_{i,t_0}^- – непустое множество и $y^{(0)} \in V_{i,t_0}^-$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, y^{(0)}) + \varepsilon_0 < 0$. Учитывая соотношение (2.5), для фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^{**} > t_2$ и $y^{**} \in V_{i,t_0}^-$ такие, что

$$(q_i(t_0, y^{**}) + \varepsilon_0)\mu_i(t^{**}) < -\varepsilon. \quad (2.11)$$

С учётом оценок (2.7) и (2.11) в момент времени $t^{**} > t_2$ и $y^{**} \in V_{i,t_0}^-$ получим

$$y_i(t^{**} : t_0, y^{**}) \leq -\varepsilon. \quad (2.12)$$

Полагая $\bar{t} = \max\{t^*, t^{**}\}$, из неравенств (2.10) и (2.12) следует, что для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени \bar{t} и $y^{(0)} \in V_i$ такие, что

$$|y_i(\bar{t} : t_0, y^{(0)})| \geq \varepsilon. \quad (2.13)$$

Откуда и следует неустойчивость нулевого решения системы (2.2) по переменной y_i .

Для доказательства неустойчивости нулевого решения $x \equiv 0$ системы (2.1) по переменной x_i запишем равенство (2.4) в виде

$$\frac{x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = \delta_i(t, t_0, x^{(0)})$$

и найдем верхний предел при $t \rightarrow +\infty$ от обеих частей равенства. Учитывая соотношение (2.6) и условие 3) определения, из последнего равенства получим

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t : t_0, x^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0, y^{(0)}). \quad (2.14)$$

Определяя множества

$$U_{i,t_0}^+ = \left\{ x^{(0)} : x^{(0)} \in U, Px^{(0)} \in V_i, q_i(t_0, Px^{(0)}) > 0 \right\},$$

$$U_{i,t_0}^- = \left\{ x^{(0)} : x^{(0)} \in U, Px^{(0)} \in V_i, q_i(t_0, Px^{(0)}) < 0 \right\},$$

проведем доказательство неустойчивости нулевого решения системы (2.2) по переменной x_i аналогично доказательству неустойчивости нулевого решения системы (2.2) по переменной y_i .

Действительно, из определения верхнего предела и соотношения (2.14) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ существует момент времени $t_1 > t_0$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{x_i(t : t_0, x^{(0)})}{\mu_i(t)} < q_i(t_0, Px^{(0)}) + \varepsilon_0 \quad \text{при всех } t > t_1 \tag{2.15}$$

и существует подпоследовательность $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ и для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ найдется номер $k_0 \in \mathbb{N}$ и момент времени $t_2 > t_0$ такие, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство

$$q_i(t_0, Px^{(0)}) - \varepsilon_0 < \frac{x_i(t_k : t_0, x^{(0)})}{\mu_i(t)} \quad \text{при } t_k > t_2. \tag{2.16}$$

Пусть $x^{(0)} \in U_{i,t_0}^+$. Тогда выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, Px^{(0)}) - \varepsilon_0 > 0$. Учитывая (2.5) и (2.16), для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^* > t_2$ и $x^* \in U_{i,t_0}^+$ такие, что

$$x_i(t^* : t_0, x^*) \geq (q_i(t_0, Px^*) - \varepsilon_0)\mu_i(t^*) > \varepsilon. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $x^{(0)} \in U_{i,t_0}^-$. Выбирая достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, получим неравенство $q_i(t_0, Px^{(0)}) + \varepsilon_0 < 0$. Учитывая соотношения (2.5) и (2.15), для фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого достаточно малого $\delta > 0$ можно выбрать момент времени $t^{**} > t_2$ и $x^{**} \in U_{i,t_0}^-$ такие, что

$$x_i(t^{**} : t_0, x^{**}) \leq (q_i(t_0, Px^{**}) + \varepsilon_0)\mu_i(t^{**}) < -\varepsilon. \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.17) и (2.18) следует неустойчивость нулевого решения системы (2.1) по переменной x_i .

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 2.1. Лемма 2.1 останется справедливой, если в соотношении (2.6) верхний предел заменить на нижний предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y_i(t : t_0, y^{(0)})}{\mu_i(t)} = q_i(t_0, y^{(0)}) \neq 0. \tag{2.19}$$

3. Достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения по первому приближению

Сформулируем достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения нелинейных систем из множества Ξ на основании леммы 2.1.

Рассмотрим нелинейную систему [15]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, A – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $f(t, 0) \equiv 0$,

$$|f_j(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \psi_j(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \quad \forall x \in U \subseteq D, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.2}$$

здесь $\psi_j \in C([T, +\infty) \times U_+, [0, +\infty))$, $U_+ = \{x : x \in U, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$, $\psi_j(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$, причем $\psi_j(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \leq \psi_j(t, |\tilde{x}_1|, \dots, |\tilde{x}_n|)$, $|x_i| \leq |\tilde{x}_i|$, $x, \tilde{x} \in U$, $t \in [T, +\infty)$.

Первое приближение системы (3.1) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{3.3}$$

где $y \in R^n$.

Пусть матрица A имеет $r \leq n$ различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, вещественные части которых обозначим

$$\Lambda_1 = \text{Re } \lambda_1, \dots, \Lambda_r = \text{Re } \lambda_r.$$

Тогда, учитывая оценки (24.29) и (24.31) из работы [18], для элементов i -й строки ($i = \overline{1, n}$) нормированной фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$ системы (3.3) будут справедливы оценки [15]

$$|y_{i1}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\hat{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} Q_{i1}(t - t_0), \dots, |y_{in}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\hat{\Lambda}_{in}(t-t_0)} Q_{in}(t - t_0), \quad t \geq t_0, \tag{3.4}$$

$$|y_{i1}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\check{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} q_{i1}(t - t_0), \dots, |y_{in}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\check{\Lambda}_{in}(t-t_0)} q_{in}(t - t_0), \quad t \leq t_0, \tag{3.5}$$

в которых $D_0 > 0$ – некоторая константа, $\hat{\Lambda}_{i1}, \dots, \hat{\Lambda}_{in}, \check{\Lambda}_{i1}, \dots, \check{\Lambda}_{in} \in \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r\}$; $Q_{i1}(t - t_0), \dots, Q_{in}(t - t_0), q_{i1}(t - t_0), \dots, q_{in}(t - t_0)$ – некоторые полиномы относительно $t - t_0$. Степени этих полиномов меньше алгебраических кратностей собственных значений, вещественные части которых равны $\hat{\Lambda}_{i1}, \dots, \hat{\Lambda}_{in}, \check{\Lambda}_{i1}, \dots, \check{\Lambda}_{in}$ соответственно.

Пусть [15]

$$\beta_i \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\Lambda}_{ij_i^*} = \max\{\hat{\Lambda}_{i1}, \dots, \hat{\Lambda}_{in}\}, \quad \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \check{\Lambda}_{ik_i^*} = \min\{\check{\Lambda}_{i1}, \dots, \check{\Lambda}_{in}\}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.6}$$

Тогда b_i и a_i , $i = \overline{1, n}$, определим как степени полиномов $Q_{ij_i^*}(t - t_0)$ и $q_{ik_i^*}(t - t_0)$ соответственно.

Учитывая формулы (3.6) и определения чисел b_i и a_i , оценки (3.4) и (3.5) примут вид [15]

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t - t_0), \quad t \geq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.7}$$

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t - t_0), \quad t \leq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.8}$$

где $i = \overline{1, n}$,

$$\rho^\nu(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < 1, \\ |t|^\nu, & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Полагая $M_0 = N$, определим функции [15]

$$\mu_i(t) = D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t - t_0), \quad t \geq t_0, \tag{3.10}$$

здесь $i = \overline{1, n}$, и введем множества $N_i = \{j : y_{ij}(t - t_0) \equiv 0, \text{ при всех } t, t_0 \geq T\}$, $K_i = N \setminus N_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 3.1. Пусть для любого $t_0 \geq T$ существует полуинтервал $[0, c)$, $c > 0$, такой, что для всех $c_0 \in [0, c)$ выполняются такие условия:

А) при всех $j \in K_i, i = \overline{1, n}$ сходятся интегралы

$$I_{ij}(c_0) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha_i(s-t_0)} \rho^{a_i}(s) \psi_j(s, c_0 e^{\beta_1(s-t_0)} \rho^{b_1}(s), \dots, c_0 e^{\beta_n(s-t_0)} \rho^{b_n}(s)) ds, \quad (3.11)$$

Б) справедливы неравенства

$$\sum_{j \in K_i} I_{ij}(c_0) < c_0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) справедливы соотношения (2.5) и (2.6) леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы (3.1) неустойчиво по переменной x_i .

Доказательство. В работе [15] показано, что при выполнении условий А и Б теоремы 3.1 системы (3.1) и (3.3) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t), i = \overline{1, n}$.

Тогда, применяя лемму 2.1 к системам (3.1) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных $x_i, y_i, i \in M_0$, соответственно.

Доказательство завершено.

Рассмотрим частный случай системы (3.1), когда $f(t, x)$ есть векторный полином по x . В этом случае система (3.1) примет вид [15]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t, x), \quad (3.13)$$

где

$$P(t, x) = \begin{pmatrix} P_1(t, x), \\ \dots, \\ P_n(t, x) \end{pmatrix}, \quad P_j(t, x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)}(t) x^{p_j}, \quad x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}}, \quad \sigma \geq 2, \quad (3.14)$$

$$d_j^{(p_j)} \in C([T, +\infty), R), \quad p_j = (p_{j1}, \dots, p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \dots + p_{jn}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теорема 3.2. Пусть сходятся интегралы

$$I_{ij}^{(p_j)} = \int_{t_0}^{+\infty} \rho^{a_i+p_{j1}b_1+\dots+p_{jn}b_n}(s) e^{(-\alpha_i+p_{j1}\beta_1+\dots+p_{jn}\beta_n)(s-t_0)} |d_j^{(p_j)}(s)| ds, \quad (3.15)$$

по всем наборам $p_j = (p_{j1}, \dots, p_{jn}), i, j = \overline{1, n}$.

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) справедливы соотношения (2.5) и (2.6) леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы (3.1) неустойчиво по переменной x_i .

Доказательство.

В работе [15] показано, что при сходимости интегралов (3.15) теоремы 3.2 выполняются условия А и Б теоремы 3.1, и, следовательно, системы (3.13) и (3.3) являются

равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Далее, применяя лемму 2.1 к системам (3.13) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных $x_i, y_i, i \in M_0$, соответственно. Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 3.1. Пусть коэффициенты $d_j^{(p_j)}(t)$ векторного полинома $P(t, x)$ в формуле (3.14) постоянны:

$$d_j^{(p_j)}(t) \equiv d_j^{(p_j)} \quad \text{при всех } t \geq T \quad (3.16)$$

и для всех наборов $p_j = (p_{j1}, \dots, p_{jn})$, $j = \overline{1, n}$, и выполняются неравенства

$$\gamma_{ij}^{(p_j)} \equiv -\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \dots + p_{jn}\beta_n < 0, \quad j \in K_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Тогда, если для функции $\mu_i(t)$ и компоненты $y_i(t; t_0, y^{(0)})$ решения системы (3.3) справедливы соотношения (2.5) и (2.6) леммы 2.1, соответственно, то нулевое решение системы (3.1) неустойчиво по переменной x_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о.

В работе [15] показано, что при выполнении условий (3.16) и (3.17) следствия интегралы 3.1 сходятся (3.15) теоремы 3.2, и, следовательно, системы (3.13) и (3.3) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Далее, с учетом формулы (3.16) применяя лемму 2.1 к системам (3.13) и (3.3), получим, что нулевые решения этих систем неустойчивы по каждой из переменных $x_i, y_i, i \in M_0$, соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В качестве примера рассмотрим задачу о частичной неустойчивости нулевого решения нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^3 x_2 x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3, \\ \dot{x}_4 = 2x_4 + x_1 x_2, \end{cases} \quad (3.18)$$

Тогда система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = 0, \\ \dot{y}_4 = 2y_4, \end{cases} \quad (3.19)$$

имеет следующие различные собственные значения:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2,$$

причем алгебраические кратности λ_1 и λ_3 равны по 1, для λ_2 алгебраическая и геометрическая кратности равны 2 и 1 соответственно.

Проверим условия следствия 3.1 для системы (3.18). Для этого вычислим нормированную в точке t_0 фундаментальную матрицу линейного приближения (3.19)

$$Y(t-t_0) = \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t-t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Тогда в оценках (3.7), (3.8) для элементов строк фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ в качестве параметров $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1,4}$, можно взять

$$\beta_1 = \alpha_1 = -1, \quad \beta_i = \alpha_i = 0, \quad i = 2, 3, \quad \beta_4 = \alpha_4 = 2,$$

а в качестве параметров $b_i, a_i, i = \overline{1,4}$,

$$b_i = a_i = 0, \quad i = 1, 3, 4, \quad b_2 = a_2 = 1.$$

Следовательно, согласно формулам (3.10), функции $\mu_i(t)$, при $t \geq t_0$ имеют вид

$$\mu_1(t) = e^{-(t-t_0)}, \quad \mu_2(t) = \rho(t-t_0), \quad \mu_3(t) = 1, \quad \mu_4(t) = e^{2(t-t_0)}. \quad (3.20)$$

Здесь $D_0 = 1$. Далее, представляя нелинейную часть системы (3.18) по формулам (3.14) находим, что

$$p_1 = (2, 1, 1, 0), \quad p_2 = (3, 1, 0, 1), \quad p_3 = (1, 0, 1, 0), \quad p_4 = (1, 1, 0, 0).$$

Подставляя полученные значения в формулы (3.17), и учитывая, что для приведенного примера $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2, 3\}$, $K_3 = \{3\}$, $K_4 = \{4\}$ имеем

$$\gamma_{11}^{(p_1)} = \gamma_{22}^{(p_2)} = \gamma_{23}^{(p_2)} = \gamma_{33}^{(p_3)} = -1 < 0, \quad \gamma_{44}^{(p_4)} = -3 < 0.$$

Следовательно, неравенства (3.17) справедливы и следуя доказательству следствия 3.1 заключаем, что системы (3.18) и (3.19) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$.

Проверим выполнение условий леммы 2.1. Так как условие (2.5) выполняется только для $\mu_2(t)$ и $\mu_4(t)$, то будем находить пределы (2.6) только для компонент

$$y_2(t; t_0, y^{(0)}) = y_2^{(0)} + (t-t_0)y_3^{(0)}, \quad y_4(t; t_0, y^{(0)}) = e^{2(t-t_0)}y_4^{(0)}.$$

Учитывая формулы (3.20), найдем пределы (2.6)

$$q_2(t_0, y^{(0)}) = y_3^{(0)}, \quad q_4(t_0, y^{(0)}) = y_4^{(0)}.$$

Тогда, для компонент $y_2(t; t_0, y^{(0)})$ и $y_4(t; t_0, y^{(0)})$ в сколь угодно малой проколотовой окрестности нуля V в качестве областей V_2 и V_4 можно взять области, для точек которых выполняются неравенства $y_3^{(0)} \neq 0$ и $y_4^{(0)} \neq 0$, соответственно.

Таким образом, для $i = 2, 4$ соотношения (2.6) леммы 2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (3.18) неустойчиво по переменным x_2 и x_4 .

4. Заключение

В настоящей работе на основании равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности получены достаточные условия частичной неустойчивости нулевого решения нелинейной системы по первому приближению в случае, когда матрица первого приближения может содержать собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать.

Полученные результаты могут быть применены к исследованию неустойчивости по всем переменным нулевого решения нелинейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.
2. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Математический сборник, 1938. Т. 3(45). № 1. С. 47–101.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
4. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
5. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
6. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659–665.
7. Прокопьев В. П. Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 422–426.
8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. Озиранер А. С. Об устойчивости движения в критическом случаях // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.
10. Щенников В. Н. О частичной устойчивости в критическом случае $2k$ чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики: сб. ст. Горький: Горьк. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. 1985. С. 46–50.
11. Щенников В. Н. Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1645–1649.

12. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102–115. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115>
13. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.304-317>
14. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321–332. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.321-332>
15. Шаманаев П. А. Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, № 3. С. 374–390. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306>
16. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: Изд-во Средне-Волжского матем. об-ва, 2000. 300 с.
17. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та, 1990. 224 с.
18. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

*Поступила 21.05.2024; доработана после рецензирования 10.07.2024;
принята к публикации 28.08.2024*

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. M. Lyapunov, *Issledovanie odnogo iz osobennykh sluchaev zadachi ob ustoychivosti dvizheniya [Study of one of the special cases of the problem of stability of motion]*, Leningr. State University Press, Leningrad, 1963 (In Russ.), 116 p.
2. I. G. Malkin, “Über die Stabilität der Bewegung im Sinne von Liapounoff.”, *Mat. Sbornik*, **45**:1 (1938), 47–101 (In Russ.).
3. V. V. Rumyantsev, “Ob ustoychivosti dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh [On motion stability with respect to a part of variables]”, *Vestnik of Moscow University. Series. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Physics. Chemistry*, 1957, no. 4, 9-16 (In Russ.).

4. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Ustoichivost i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh* [Stability and stabilization of motion with respect to a part of variables], Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.
5. V. I. Vorotnikov, *Ustojchivost dinamicheskikh sistem po otnosheniyu k chasti peremennykh* [Stability of dynamical systems with respect to a part of variables], Nauka, M., 1991 (In Russ.), 288 p.
6. A. S. Oziraner, “Ob asimptoticheskoy ustoychivosti i neustoychivosti otnositelno chasti peremennykh [On asymptotic stability and instability with respect to a part of the variables]”, *Applied Mathematics and Mechanics* [J. Appl. Math. Mech.], **37**:4 (1973), 659-665 (In Russ.).
7. V. P. Prokopiev, “Ob ustoychivosti dvizheniya otnositel’no chasti peremennykh v kriticheskom sluchae odnogo nulevogo kornya [On the stability of motion with respect to a part of variables in the critical case of one zero root]”, *Applied Mathematics and Mechanics* [J. Appl. Math. Mech.], **39**:3 (1975), 422-426 (In Russ.).
8. I. G. Malkin, “Teoriya ustoychivosti dvizheniya [Theory of stability of motion]”, 1966 (In Russ.), 533 p.
9. A. S. Oziraner, “Ob ustoychivosti dvizheniya v kriticheskom sluchayakh [On stability of motion in critical cases]”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **39**:3 (1975), 415-421 (In Russ.).
10. V. N. Shchennikov, “O chastichnoy ustoychivosti v kriticheskom sluchae 2k chisto mni-mykh korney [On partial stability in the critical case of 2k purely imaginary roots]”, *Differential and integral equations: Methods of topological dynamics. Gor’kiy: Gor’kiy state university named after N. I. Lobachevsky*, 1985., 46-50 (In Russ.).
11. V. N. Shchennikov, “Issledovanie ustoychivosti po chasti peremennykh differentsial’nykh sistem s odnorodnymi pravymi chastyami [Investigation of the stability with respect to a part of the variables of differential systems with homogeneous right-hand sides]”, *Differential Equations*, **20**:9 (1984.), 1645-1649.
12. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, “The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **19**:1 (2017), 102-115. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115> (In Russ.).
13. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, “The sufficient conditions for polystability of solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **20**:3 (2018), 304-317. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201803.304-317> (In Russ.).
14. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, “Studying the equilibrium state stability of the biocenosis dynamics system under the conditions of interspecies interaction”, *Vestnik Mordovskogo universiteta* [Mordovia University Bulletin journal], **28**:3 (2018), 321-332. DOI: <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.321-332> (In Russ.).

15. P. A. Shamanaev, “On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19:3** (2023), 374-390. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306> (In Russ.).
16. E. V. Voskresenskiy, *Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya [Asymptotic methods: theory and applications]*, Middle Volga Mathematical Society Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.
17. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison methods in nonlinear analysis]*, Saratovsky University Press, Saratov, 1990 (In Russ.), 224 p.
18. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemytskii, *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [Theory of Lyapunov Exponents and Its Applications to Stability Problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Submitted 21.05.2024; Revised 10.07.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.294-312

ISSN 2079-6900 (Print)

Оригинальная статья

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:539.3:532.5

Математическое моделирование системы измерения давления в авиационных двигателях**А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Г. А. Анкилов***ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

Аннотация. В работе рассматриваются линейный дифференциальный оператор и несколько нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов, на основе которых записываются уравнения колебаний деформируемой пластины. В нелинейных операторах введены слагаемые, учитывающие нелинейность изгибающего момента и сил демпфирования, а также продольной силы, возникающей вследствие удлинения пластины из-за ее деформации. На основе предложенных уравнений разработаны математические модели механической системы, состоящей из недеформируемого трубопровода, скрепленного одним концом с датчиком, предназначенным для измерения давления в камере сгорания авиационного двигателя, и другим концом с этой камерой. Чувствительным элементом датчика, передающим информацию о давлении, является деформируемая пластина, концы которой закреплены жестко. В моделях учитывается аэрогидродинамическое воздействие на элемент рабочей среды и изменение температуры с течением времени по толщине элемента. На основе метода малого параметра в первом приближении получены асимптотические уравнения, описывающие совместную динамику рабочей среды в трубопроводе и деформируемого элемента датчика. Исследование динамики упругого элемента основано на применении метода Бубнова-Галеркина и проведении численных экспериментов в системе Mathematica 12.0. Произведен сравнительный анализ решений для линейной и нелинейных моделей. Показано влияние перечисленных выше видов нелинейностей на изменение величины прогиба пластины.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, аэрогидроупругость, датчик давления, трубопровод, упругий элемент, метод малого параметра, метод Бубнова-Галёркина

Для цитирования: Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Анкилов Г. А. Математическое моделирование системы измерения давления в авиационных двигателях // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 294–312. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.294-312>

Об авторах:

Анкилов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, ankil@ulstu.ru

© Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Анкилов Г. А.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Анкилов Григорий Андреевич, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

Original article

MSC2020 74F10

Mathematical Modeling of the Pressure Measurement System in Aircraft Engines

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, G. A. Ankilov

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. The paper considers a linear differential operator and several nonlinear differential and integro-differential operators that form the basis to the equations of vibration of a deformable plate. In the nonlinear operators, the nonlinearity of the bending moment and of the damping forces, as well as the longitudinal force arising from the elongation of the plate due to its deformation are taken into account. Basing on the proposed equations, mathematical models of the mechanical system consisting of a non-deformable pipeline connected at one end with a sensor designed to measure the pressure in the combustion chamber of an aircraft engine and at the other end with this chamber have been developed. The sensitive element of the sensor, which transmits the pressure information, is a deformable plate, whose edges are rigidly fixed. The models take into account the aerohydrodynamic effect of the working medium on this element and the temperature variation over time along the thickness of the element. Using the small parameter method, the first approximation for asymptotic equations is obtained that describes joint dynamics of the working medium in the pipeline and of the sensitive element. The study of the elastic element's dynamics is based on the application of the Bubnov-Galerkin method and on the numerical experiments in Mathematica 12.0. A comparative analysis of solutions for linear and nonlinear models is performed. The influence of the above-mentioned nonlinearity types on the change in the value of the plate deflection is shown.

Keywords: nonlinear partial differential equations, aero-hydroelasticity, pressure sensor, pipeline, elastic element, small parameter method, Bubnov-Galerkin method

For citation: A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, G. A. Ankilov. Mathematical Modeling of the Pressure Measurement System in Aircraft Engines. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 294–312. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.294-312>

About the authors:

Andrey V. Ankilov, Ph. D. in Phys. and Math., Head of the Department, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, ankil@ulstu.ru

Petr A. Velmisov, D. Sci. in Phys. and Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Grigory A. Ankilov, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

1. Введение

При проектировании приборов и конструкций, составной частью которых являются деформируемые элементы, контактирующие с газожидкостной средой, особое значение имеет исследование динамики и устойчивости этих элементов [1–5]. При разработке датчиков давления с чувствительным механизмом в виде упругой пластины необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия на нее рабочих сред, давление которых измеряется, могут повышать амплитуду и частоту колебаний пластины до критических значений, не позволяющих обеспечивать необходимую точность измерений. Практическим и теоретическим вопросам проектирования датчиков давления газожидкостных сред посвящено много научных работ, в частности отметим [6–10]. Научные работы [6–8] посвящены описанию принципов работы датчиков давления и определению их технических характеристик. В работах [9–10] приводятся основные принципы проектирования датчиков давления.

При некоторых режимах работы авиационных двигателей чувствительный элемент датчика давления подвергается агрессивному воздействию высоких температур и виброускорений. Эти факторы являются основной проблемой при эксплуатации датчиков давления газожидкостных сред в авиационных двигателях, что приводит к неточности измерений и к быстрому разрушению чувствительного механизма датчика. Основным способом ослабить агрессивное воздействие температур и виброускорений является отведение датчика от двигателя с помощью трубопровода. Такие математические модели, в которых датчик расположен на конце отводного трубопровода, исследовались в работах авторов [11–13].

Целью данной работы является проведение сравнительного анализа решений, полученных на основе разработанных нелинейных начально-краевых задач, с решением линейной начально-краевой задачи для систем дифференциальных уравнений, описывающих совместную динамику чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Анализ производился на основе численных экспериментов в системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0 для конкретных параметров механической системы.

2. Асимптотические модели деформируемого твердого тела

В работе исследуется динамика деформируемой пластины, подверженной аэрогидродинамическому и тепловому воздействию. Пусть прогиб пластины длиной H и толщиной h в зависимости от координаты точки пластины $y \in [0, H]$ и времени $t \geq 0$ описывается функцией $w(y, t)$. Рассматривается случай жесткого закрепления концов пластины:

$$w(0, t) = w_y(0, t) = 0, \quad w(H, t) = w_y(H, t) = 0. \quad (2.1)$$

Для описания динамики деформируемой пластины введем несколько видов дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов:

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (2.2)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt} - w_{yy} \left(\mu \int_0^H w_y^2 dy + \eta \left(\int_0^H w_y^2 dy \right)_t \right); \quad (2.3)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \gamma w + \beta_1 w_t + \beta_2 w_{yyyyt}; \quad (2.4)$$

$$L(w(y, t)) \equiv Mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + \beta_1 w_t + \beta_2 \left[w_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt} + N(t)w_{yy} + \gamma w. \quad (2.5)$$

Нижние индексы y, t обозначают частные производные по переменным y, t соответственно. В операторах (2.2)–(2.5) введены следующие обозначения механических характеристик деформируемой пластины: M, D – погонная масса и изгибная жесткость пластины; $N(t)$ – растягивающее или сжимающее пластину усилие; γ – коэффициент жесткости основания пластины; β_1 – коэффициент внешнего демпфирования; β_2, η – коэффициенты, описывающие внутреннее демпфирование пластины; μ – коэффициент, зависящий от прочностных и геометрических характеристик пластины. В операторе (2.3) произведен учет нелинейности продольной силы, возникающей вследствие удлинения пластины из-за ее деформации; в операторе (2.4) учтена нелинейность изгибающего момента; в операторе (2.5) производится уточнение оператора (2.4) в случае учета нелинейности демпфирования пластины. Целью работы является сравнительный анализ колебаний деформируемой пластины, полученных на основе нелинейных моделей деформируемого твердого тела (2.3)–(2.5), с колебаниями, полученными на основе линейной модели (2.2).

Для расчета коэффициентов M, D используем формулы:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad M = \rho_0 h, \quad (2.6)$$

где E – модуль упругости пластины; ν – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность пластины.

При учете теплового воздействия на пластину коэффициент растягивающего или сжимающего усилия зависит от времени:

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1 - \nu} \int_0^h T(x, t) dx, \quad (2.7)$$

где $T(x, t)$ – функция, описывающая изменение температуры с течением времени по толщине элемента; N_0 – созданная при закреплении пластины постоянная составляющая усилия; α_T – температурный коэффициент линейного расширения.

Считая деформацию пластины и температурный коэффициент линейного расширения материала пластины малыми, разложим их по малому параметру $\varepsilon = \frac{h}{H}$:

$$w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots, \quad \alpha_T = \varepsilon \alpha_{T1} + \dots \quad (2.8)$$

Ограничиваясь членами первого порядка ε , представим оператор $L(w(y, t))$ в виде $L(w(y, t)) = L_1(w_0(y)) + \varepsilon L_2(w_0(y), w_1(y, t))$. Тогда, подставляя (2.8) в операторы (2.2)–(2.5), получим:

– для модели (2.2)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = Dw_{0yyyy} + N_0 w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + Dw_{1yyyy} + N_1(t)w_{0yy} + N_0 w_{1yy} + \gamma w_1 + \\ + \beta_1 w_{1t} + \beta_2 w_{1yyyyt}; \end{cases} \quad (2.9)$$

– для модели (2.3)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = Dw_{0yyyy} + N_0 w_{0yy} + \gamma w_0 - \mu w_{0yy} \int_0^H w_{0y}^2 dy, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + Dw_{1yyyy} + N_1(t)w_{0yy} + N_0 w_{1yy} + \\ + \gamma w_1 + \beta_1 w_{1t} + \beta_2 w_{1yyyyt} - \mu w_{1yy} \int_0^H w_{0y}^2(y) dy - \\ - 2w_{0yy} \left(\mu \int_0^H w_{0y}(y) w_{1y}(y, t) dy + \eta \int_0^H w_{0y}(y) w_{1yt}(y, t) dy \right); \end{cases} \quad (2.10)$$

– для модели (2.4)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = D \left(w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy} w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0 w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = D \left(w_{1yyyy} - \frac{3}{2} (2w_{0yy} w_{0y} w_{1y} + w_{0y}^2 w_{1yy})_{yy} \right) + \\ + Mw_{1tt} + N_1(t)w_{0yy} + N_0 w_{1yy} + \gamma w_1 + \beta_1 w_{1t} + \beta_2 w_{1yyyyt}; \end{cases} \quad (2.11)$$

– для модели (2.5)

$$\begin{cases} L_1(w_0(y)) = D \left(w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy} w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0 w_{0yy} + \gamma w_0, \\ L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = Mw_{1tt} + N_1(t)w_{0yy} + N_0 w_{1yy} + \gamma w_1 + \beta_1 w_{1t} + \\ + D \left(w_{1yyyy} - \frac{3}{2} (2w_{0yy} w_{0y} w_{1y} + w_{0y}^2 w_{1yy})_{yy} \right) + \\ + \beta_2 \left(w_{1yyyyt} - \frac{3}{2} (2w_{0yy} w_{0y} w_{1yt} + w_{0y}^2 w_{1yyt})_{yy} \right), \end{cases} \quad (2.12)$$

где $N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1-\nu} \int_0^h T(z, t) dz$.

В силу граничных условий (2.1) для функции $w(y, t)$, получим граничные условия для функций $w_0(y)$, $w_1(y, t)$:

$$w_0(0) = w_{0y}(0) = 0, \quad w_0(H) = w_{0y}(H) = 0, \quad (2.13)$$

$$w_1(0, t) = w_{1y}(0, t) = 0, \quad w_1(H, t) = w_{1y}(H, t) = 0. \quad (2.14)$$

3. Математическая модель системы измерения давления

Пусть чувствительным элементом датчика измерения давления рабочей среды в камере сгорания авиационного двигателя является упругая пластина. Система представлена на Рис. 3.1, где l – длина трубопровода 2, соединяющего датчик давления 3 с камерой сгорания 1. На одном конце трубопровода ($x = -l$), закрепленного на выходе из камеры сгорания двигателя, задан закон изменения давления рабочей среды 4. На другом конце трубопровода расположен чувствительный элемент 5 ($x \in [0, h]$) датчика, предназначенного для измерения этого давления.

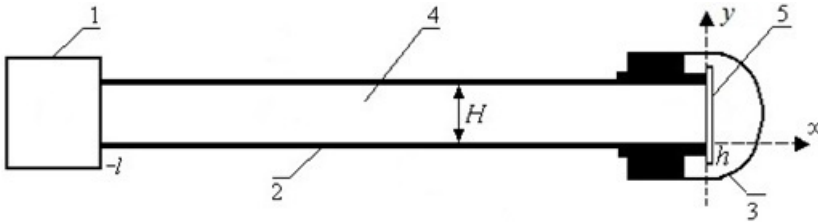


Рис. 3.1. Трубопровод с датчиком
Fig. 3.1. Pipe with sensor

Математическая постановка задачи в модели несжимаемой среды примет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, w(y, t)), \quad y \in (0, H), \quad (3.1)$$

$$\Phi_x g_x + \Phi_y g_y = -g_t, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (3.2)$$

$$L(w(y, t)) = P - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (3.3)$$

$$P = P_0 - \rho \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right), \quad (3.4)$$

$$P(-l, y, t) = F(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (3.5)$$

Здесь $\Phi(x, y, t)$, $P(x, y, t)$ – потенциал скорости и давление рабочей среды в трубопроводе; $g(x, y, t) = 0$ – уравнение поверхности упругого элемента; $F(y, t)$ – давление рабочей среды на входе в трубопровод; P_0 – давление в рабочей среде в состоянии покоя; \bar{P} – воздействие внешней среды на упругий элемент; ρ – плотность среды.

Уравнение (3.1) описывает колебания газа или жидкости в трубопроводе в модели идеальной несжимаемой среды; условие (3.2) задает закон непротекания газожидкостной среды через поверхность элемента; уравнение (3.3), в которое входит один из введенных операторов (2.2)–(2.5), описывает динамику упругого элемента; давление в рабочей среде определяется интегралом Лагранжа-Коши (3.4); условие (3.5) задает закон равенства давлений на выходе из камеры сгорания двигателя и на входе в трубопровод.

Учитывая (2.8), запишем уравнение поверхности упругого элемента в виде

$$g(x, y, t) = x - w(y, t) = x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y, t) - \dots = 0. \quad (3.6)$$

Разложим функции $\Phi(x, y, t)$, $F(y, t)$ по малому параметру ε :

$$\Phi(x, y, t) = \varepsilon \varphi(x, y, t) + \dots, \quad F(y, t) = P_0 + \varepsilon P_*(y, t) + \dots \quad (3.7)$$

где $P_*(y, t)$ – функция, описывающая избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении $x = -l$).

Подставляя разложения (3.6)–(3.7) в систему (3.1)–(3.5) и ограничиваясь членами первого порядка ε , получим асимптотическую модель задачи в первом приближении:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, w_0(y)), \quad (3.8)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - w_{0y}(y)\varphi_y(w_0(y), y, t) = w_{1t}(y, t), \quad (3.9)$$

$$L_1(w_0(y)) = P_0 - \bar{P}, \quad (3.10)$$

$$L_2(w_0(y), w_1(y, t)) = -\rho\varphi_t(w_0(y), y, t), \quad (3.11)$$

$$-\rho\varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t). \quad (3.12)$$

Во всех формулах (3.8)–(3.12) координата $y \in (0, H)$.

4. Решение задачи в нулевом приближении

Уравнение (3.10) является обыкновенным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением для одной неизвестной функции $w_0(y)$ с краевыми условиями (2.13). Из (3.10) получим:

– для модели (2.9)

$$Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad (4.1)$$

– для модели (2.10)

$$Dw_{0yyyy} + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 - \mu w_{0yy} \int_0^H w_{0y}^2 dy = P_0 - \bar{P}, \quad (4.2)$$

– для моделей (2.11)–(2.12)

$$D \left(w_{0yyyy} - \frac{3}{2} (w_{0yy} w_{0y}^2)_{yy} \right) + N_0w_{0yy} + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}. \quad (4.3)$$

Если разность между давлением в покоящейся среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой $P_0 - \bar{P} = 0$, то для каждой модели получим $w_0(y) \equiv 0$.

Возьмем ненулевую разность $P_0 - \bar{P} = 2 \cdot 10^4$. Предположим, что пластина толщиной $h = 7 \cdot 10^{-4}$ и длиной $H = 2 \cdot 10^{-2}$ изготовлена из алюминия, тогда плотность $\rho_0 = 2700$, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\eta = 0,34$, изгибная жесткость $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2,262$, погонная масса $M = \rho_0 h = 1,89$. Предположим, что постоянная составляющая усилия $N_0 = 10^5$, коэффициент жесткости обжимного слоя пластины $\gamma = 4$, коэффициенты при нелинейных слагаемых $\mu = 30$, $\eta = 20$. Все значения даны в системе СИ. В системе Mathematica численно найдем решения краевых задач для уравнений (4.1)–(4.3) с краевыми условиями (2.13). Введем обозначения: $w_{01}(y)$, $w_{02}(y)$, $w_{03}(y)$ – решения уравнений (4.1)–(4.3) соответственно. Решение уравнения (4.1) представлено на Рис. 4.1.

В силу малости нелинейных членов в уравнениях (4.2), (4.3), графики их решений будут иметь такой же вид, как на рисунке 4.1. Рассмотрим отличия решений уравнений (4.1) и (4.2) на рисунке 4.2а, и уравнений (4.1) и (4.3) на рисунке 4.2б.

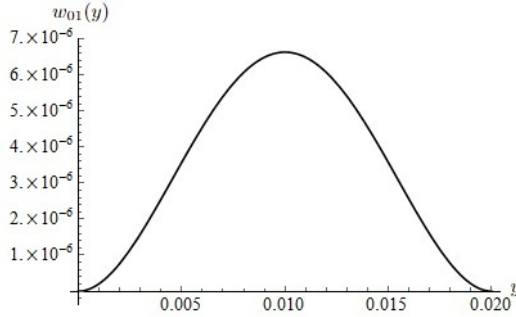


Рис. 4.1. Начальное приближение прогиба пластины

Fig. 4.1. Initial approximation of plate deflection

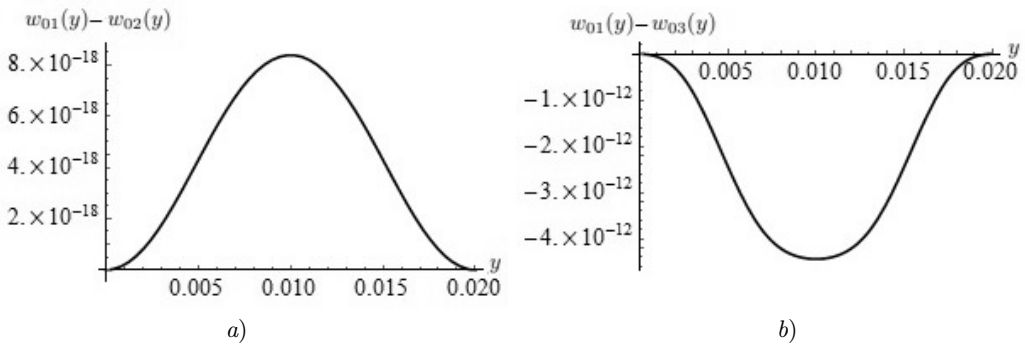


Рис. 4.2. Начальное влияние нелинейности
 а) продольной силы; б) изгибающего момента

Fig 4.2. Initial effect of nonlinearity
 a) of the longitudinal force; b) of the bending moment

Как видно из Рис. 4.2а, в нулевом приближении нелинейная продольная сила, возникающая вследствие удлинения пластины из-за ее деформации, приводит к уменьшению прогиба пластины, а из Рис. 4.2б следует, что нелинейная составляющая изгибающего момента приводит к увеличению прогиба пластины.

5. Решение аэрогидродинамической задачи

Решим аэрогидродинамическую задачу (3.8)–(3.9), (3.12). Предположим, что избыточное давление не зависит от координаты y , т. е. $P_*(y, t) = P_*(t)$. Чтобы функция $\varphi(x, y, t)$ являлась решением уравнения (3.8) и удовлетворяла условию (3.12), будем искать ее в виде

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t P_*(z) dz + (x + l) \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (x + l), \quad (5.1)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$.

Согласно методу Бубнова-Галеркина функцию $w_1(y, t)$ будем искать в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y), \quad (5.2)$$

где $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная система базисных функций на отрезке $[0, H]$, удовлетворяющих условиям жесткого закрепления концов пластины (2.14). Возьмем базисные функции в виде

$$\xi_n(y) = ch(\mu_n y) - \cos(\mu_n y) - \frac{ch(\mu_n H) - \cos(\mu_n H)}{sh(\mu_n H) - \sin(\mu_n H)} (sh(\mu_n y) - \sin(\mu_n y)), \quad (5.3)$$

где коэффициенты μ_n находятся как корни уравнения $ch(\mu_n H) \cos(\mu_n H) = 1$.

Подставим (5.1)–(5.2) в условие (3.9)

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot \lambda_n ch \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ + \lambda_n w_{0y}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_n(y). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина проецируем (5.4) на полную систему поверочных функций $\{\cos \lambda_k y\}_{k=0}^{\infty}$. Проецируя на первую поверочную функцию $\cos \lambda_0 y = 1$, получим

$$\begin{aligned} \alpha(t) \cdot H + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha(t) = -\frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy + \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем обозначения

$$A_n = \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y ch \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y sh \lambda_n (w_0(y) + l)) dy, \quad (5.6)$$

$$B_n = \int_0^H \xi_n(y) dy. \quad (5.7)$$

Тогда из (5.5) получим

$$\alpha(t) = -\frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(t) + \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{nt}(t). \quad (5.8)$$

Проецируя (5.4) на остальные поверочные функции $\{\cos \lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$, согласно методу Бубнова-Галеркина получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy + \\ + \alpha(t) \int_0^H \cos \lambda_k y dy = \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Введем обозначения

$$C_{nk} = \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_{0y}(y) \sin \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy, \quad (5.10)$$

$$V_{nk} = \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy. \quad (5.11)$$

Учитывая, что

$$\int_0^H \cos \lambda_k y dy = 0, \quad (5.12)$$

из (5.9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{nk} w_{nt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} \varphi_n(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Следовательно, из (5.13) получим систему однородных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_{nk} w_{nt}(t) - C_{nk} \varphi_n(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Подставим (5.1)–(5.2) в уравнение (3.11)

$$\begin{aligned} L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) = \\ = P_*(t) - \rho(w_0(y) + l) \alpha_t(t) - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nt}(t) \cos \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Проецируя (5.15) на систему базисных функций $\{\xi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, согласно методу Бубнова-Галеркина получим:

$$\int_0^H L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) \xi_k(y) dy = P_*(t) \int_0^H \xi_k(y) dy - \rho \alpha_t(t) \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{nt}(t) \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) \cdot \xi_k(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

Введем обозначения

$$D_k = \rho \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy, \quad E_{nk} = \rho \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot sh \lambda_n (w_0(y) + l) \cdot \xi_k(y) dy. \quad (5.17)$$

Тогда, подставляя $\alpha(t)$ из (5.8), из (5.16) получим

$$\int_0^H L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right) \xi_k(y) dy = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{nt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

В результате для определения неизвестных функций $\varphi_n(t)$, $w_n(t)$ получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.14), (5.18), на основе которой производятся численные эксперименты.

6. Численный эксперимент

Проведем численный эксперимент для операторов (2.9)–(2.12), взяв отрезки рядов в разложениях (5.1)–(5.2) длиной $m = 8$.

Пусть рабочей средой в трубопроводе длиной $l = 0,5$ и шириной $H = 0,02$ является вода, плотность которой $\rho = 1000$. Зададим разность между давлением в покоящейся среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой $P_0 - \bar{P} = 2 \cdot 10^4$. Предположим, что пластина толщиной $h = 7 \cdot 10^{-4}$ изготовлена из алюминия, тогда плотность $\rho_0 = 2700$, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\eta = 0,34$, изгибная жесткость $D = 2,262$, погонная масса $M = 1,89$. Будем считать, что постоянная составляющая усилия $N_0 = 10^5$, коэффициент жесткости обжимного слоя пластины $\gamma = 4$, остальные коэффициенты: $\mu = 30$, $\eta = 10$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$. Пусть окружающей трубопровод средой является воздух с температурой $T_0 = 293,15$. Введем закон изменения температуры по толщине элемента $T(x, t) = T_0 + 40 \sin(2t) \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)$. Избыточное давление считаем переменным $P_*(t) = 10^6(5 - \cos 10t)$. Все значения даны в системе СИ.

Зададим начальные условия $w_k(0) = 0$, $w_{kt}(0) = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Решая систему (5.14), (5.18) в программе Mathematica 12.0, взяв отрезки рядов в формулах длиной $m = 8$, построим графики функции деформации $w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^m w_n(t) \xi_n(y)$.

I. Рассмотрим линейную модель деформируемого твердого тела (2.9). Подставив $L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$ в (5.18), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left(M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) + N_1(t)w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \right. \\ & \left. + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.1) \\ & = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$F_{nk} = \int_0^H \xi_{nyyyy}(y) \xi_k(y) dy, \quad J_k = \int_0^H w_{0yy} \xi_k(y) dy, \quad G_{nk} = \int_0^H \xi_{nyy}(y) \xi_k(y) dy. \quad (6.2)$$

Учитывая (5.17) и ортогональность функций (5.3) на отрезке $[0, H]$:

$$\int_0^H \xi_n(y) \xi_k(y) dy = 0, \quad n \neq k, \quad \int_0^H \xi_k^2(y) dy = H, \quad (6.3)$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(MH \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk}) w_{nt}(t) + (DF_{nk} + N_0 G_{nk} + \right. \\ & \left. + \gamma H \delta_{nk}) w_n(t) - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \right] = B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.4) \end{aligned}$$

На Рис. 6.1 представлены деформации пластины в момент времени $t = 5$ и $t = 20$ при $m = 8$. На Рис. 6.2 представлены деформации пластины в средней точке пластины $y = 0.01$ при $t \in [0, 5]$ и $t \in [0, 20]$ при $m = 8$.

II. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.10). Подставляя $L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$ в (5.18), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left(M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) + N_1(t)w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \right. \\ & \left. + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) - \right. \\ & \left. - \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) \int_0^H w_{0y}^2(y) dy - \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.5) \end{aligned}$$

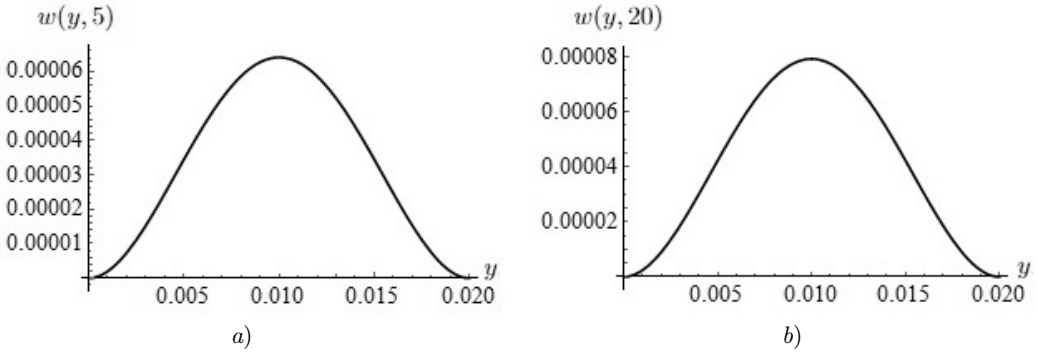


Рис. 6.1. Деформация пластины в моменты времени а) $t = 5$; б) $t = 20$
Fig 6.1. Deformation of the plate at the moments of time а) $t = 5$; б) $t = 20$

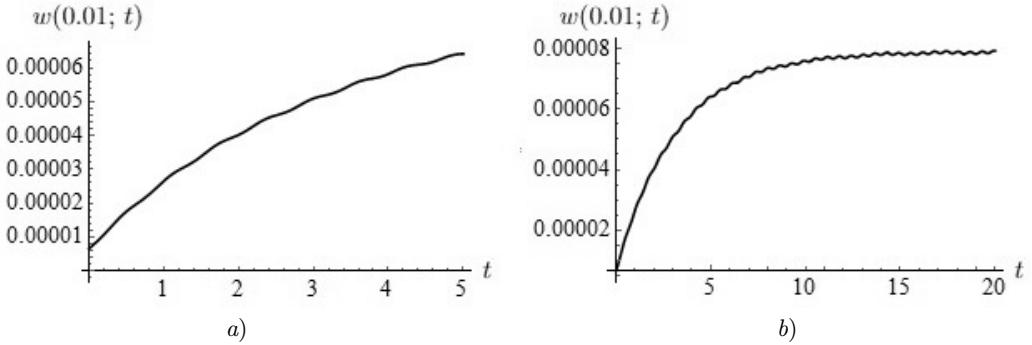


Рис. 6.2. Деформация пластины в точке $y = 0.01$:
 а) при $t \in [0, 5]$; б) при $t \in [0, 20]$
Fig 6.2. Deformation of the plate at the point $y = 0.01$:
 а) at $t \in [0, 5]$; б) at $t \in [0, 20]$

$$\begin{aligned}
 & -2w_{0yy} \left(\mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \int_0^H w_{0y}(y) \xi_{ny}(y) dy + \eta \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \int_0^H w_{0y}(y) \xi_{ny}(y) dy \right) \xi_k(y) dy = \\
 & = B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$U = \int_0^H w_{0y}^2(y) dy, \quad Q_k = \int_0^H w_{0y} \xi_{ky}(y) dy. \tag{6.6}$$

Тогда с учетом (6.2)–(6.3), (6.6) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(MH \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk} - 2\eta Q_n J_k) w_{nt}(t) + (DF_{nk} + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+N_0G_{nk} + \gamma H\delta_{nk} - \mu UG_{nk} - 2\mu Q_n J_k) w_n(t) - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk}\right) \varphi_{nt}(t) \Big] = \quad (6.7) \\
 &= B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

На Рис. 6.3 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.7) для $m = 8$ при $t = 5$ и $t = 20$, где $w_{lin}(y, t)$, $w_{non1}(y, t)$ это решения этих систем соответственно.

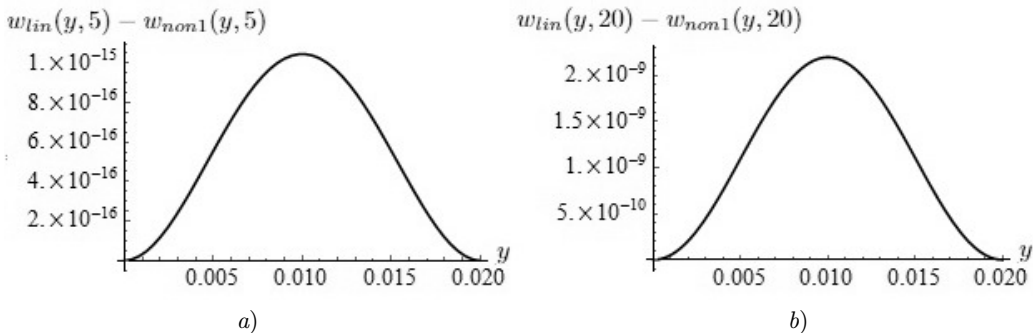


Рис. 6.3. Отличие деформации пластины в моделях (2.9) и (2.10) в моменты времени: а) $t = 5$; б) $t = 20$

Fig 6.3. Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.10) at the moments of time: а) $t = 5$; б) $t = 20$

III. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.11). Подставив $L_2\left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y)\right)$ в (5.18), получим

$$\begin{aligned}
 &\int_0^H \left(M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - \right. \right. \\
 &- 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \Big) + N_1(t) w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) + \\
 &\quad \left. + \beta_1 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \sum_{n=1}^m w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) \right) \xi_k(y) dy = \quad (6.8) \\
 &= B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$R_{nk} = 3 \int_0^H (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} \xi_k(y) dy, \quad S_{nk} = 1.5 \int_0^H (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \xi_k(y) dy. \quad (6.9)$$

Тогда с учетом (6.2)–(6.3), (6.9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(M H \delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H \delta_{nk} + \beta_2 F_{nk}) w_{nt}(t) + (D (F_{nk} - R_{nk} - S_{nk}) + \right.$$

$$+N_0G_{nk} + \gamma H\delta_{nk}) w_n(t) - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \Big] = B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad (6.10)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

На Рис. 6.4 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.10) для $m = 8$ при $t = 5$ и $t = 20$, где $w_{lin}(y, t)$, $w_{non2}(y, t)$ это решения этих систем соответственно.

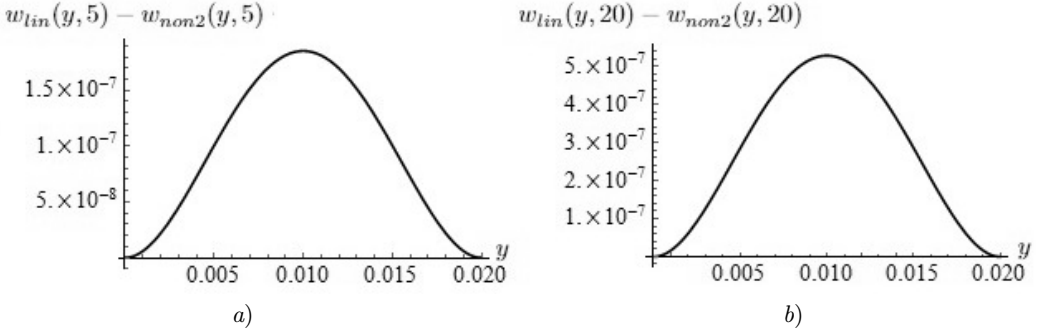


Рис. 6.4. Отличия деформации пластины в моделях (2.9) и (2.11) в моменты времени: а) $t = 5$; б) $t = 20$

Fig 6.4. Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.11) at the moments of time: а) $t = 5$; б) $t = 20$

VI. Рассмотрим нелинейную модель деформируемого твердого тела (2.12). Подставив $L_2 \left(w_0(y), \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) \right)$ в (5.18), получим

$$\int_0^H \left(M \sum_{n=1}^{\infty} w_{ntt}(t) \xi_n(y) + D \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyyyy}(y) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - \right. \right.$$

$$\left. - 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \right) + N_1(t) w_{0yy} + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_{nyy}(y) + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \xi_n(y) +$$

$$+ \beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_n(y) + \beta_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) \xi_{nyyyy}(y) - \right. \quad (6.11)$$

$$\left. - 3 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) (w_{0yy} w_{0y} \xi_{ny}(y))_{yy} - 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} w_{nt}(t) (w_{0y}^2 \xi_{ny}(y))_{yy} \right) \xi_k(y) dy =$$

$$= B_k P_*(t) + \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_{nt}(t) - \frac{D_k}{H} \sum_{n=1}^{\infty} B_n w_{ntt}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \varphi_{nt}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда с учетом (6.2)–(6.3) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(MH\delta_{nk} + \frac{D_k B_n}{H} \right) w_{ntt}(t) + (\beta_1 H\delta_{nk} + \beta_2 (F_{nk} - R_{nk} - S_{nk})) w_{nt}(t) + \right.$$

$$+ (D(F_{nk} - R_{nk} - S_{nk}) + N_0 G_{nk} + \gamma H \delta_{nk}) w_n(t) - \left(\frac{D_k A_n}{H} - E_{nk} \right) \varphi_{nt}(t) \Big] = \quad (6.12)$$

$$= B_k P_*(t) - J_k N_1(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

На Рис. 6.5 представлены отличия деформаций пластины, полученные при решении систем уравнений (6.4), (6.12) для $m = 8$ при $t = 5$ и $t = 20$, где $w_{lin}(y, t)$, $w_{non3}(y, t)$ это решения этих систем соответственно.

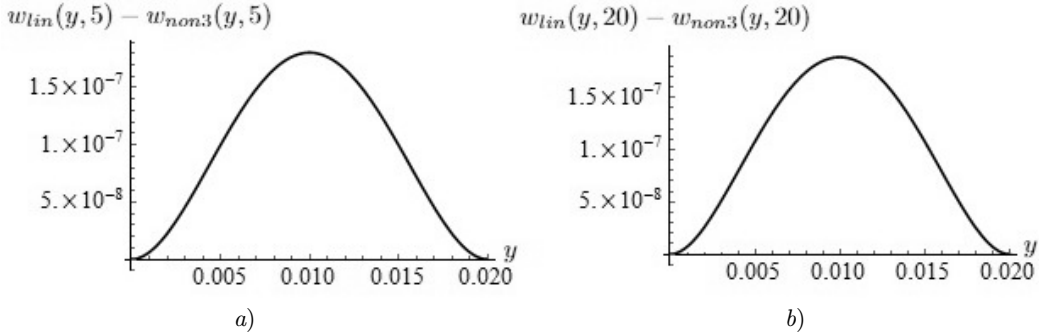


Рис. 6.5. Отличие деформации пластины в моделях (2.9) и (2.12) в моменты времени: а) $t = 5$; б) $t = 20$

Fig 6.5. Difference of plate deformation in the models (2.9) and (2.12) at the moments of time: а) $t = 5$; б) $t = 20$

Как видно из Рис. 6.3–6.5 все учтенные нелинейные силы приводят к уменьшению прогиба пластины. Причем наибольшее изменение прогиба достигается вследствие учета нелинейной составляющей изгибающего момента.

7. Заключение

В работе на основе предложенных математических моделей системы измерения давления в авиационных двигателях произведено исследование влияния нелинейных сил на динамику жестко закрепленного чувствительного элемента датчика измерения давления рабочей среды в камере сгорания авиационного двигателя. Исследование проведено на основе сравнения решений, полученных для линейной и нелинейных математических моделей деформируемого твердого тела. Исследование динамики упругого элемента основано на применении методов малого параметра и Бубнова-Галеркина и проведении численного эксперимента в системе Mathematica 12.0.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 473. 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>

2. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 118. 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
3. Kondratov D. V., Kondratova T. S., Popov V. S., Popova M. V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2023. pp. 261–270. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27
4. Могилевич Л. И., Попова Е. В. Продольные волны в стенках кольцевого канала из материала с дробной нелинейностью, заполненного жидкостью // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2023. Т. 31, № 3. С. 365–376. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>
5. Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 259, No. 2. pp. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>
6. Дмитриенко А. Г., Исаков С. А., Белозубов Е. М. Датчики давления на основе нано- и микроэлектромеханических систем для ракетной и авиационной техники // *Датчики и системы*. 2012. Т. 160, № 9. С. 19–25.
7. Стучебников В., Васьков Ю., Савченко Е. Специальные датчики давления промышленной группы «МИДА» // *Компоненты и технологии*. 2021. Т. 238, № 5. С. 12–15.
8. Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices // *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70, No. 2. pp. 32–36. DOI: <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>
9. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
10. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.] ; пер. с франц. М.: Мир, 1992. 419 с.
11. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Нелинейная математическая модель систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средне-волжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 4. С. 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325>
12. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the «pipeline – pressure sensor» system // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1353, No. 1. pp. 012085. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
13. Вельмисов, П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>

Поступила 01.06.2024; доработана после рецензирования 4.08.2024;
принята к публикации 28.08.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. D. B. Giacobbi, C. Semler, M. P. Paidoussis, “Dynamics of Pipes Conveying Fluid of Axially Varying Density”, *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>.
2. A. R. Abdelbaki, M. P. Paidoussis, A. K. Misra, “A Nonlinear Model for a Hanging Cantilevered Pipe Discharging Fluid with a Partially-Confined External Flow”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **118** (2020), 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>.
3. D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, V. S. Popov, M. V. Popova, “Modeling Hydroelastic Response of the Channel Wall Resting on a Nonlinear Elastic Foundation”, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2023, 261–270. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27.
4. L. I. Mogilevich, E. V. Popova, “Longitudinal Waves in the Walls of an Annular Channel Filled with Liquid and Made of a Material with Fractional Nonlinearity”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **31**:3 (2023), 365–376. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003040>.
5. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova, “On the Stability of Solutions of Certain Classes of Initial-Boundary-Value Problems in Aerohydroelasticity”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:2 (2021), 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05618-6>.
6. A. G. Dmitrienko, S. A. Isakov, E. M. Belozubov, “Pressure Sensors Based on Nano- and Microelectromechanical Systems for Rocket and Aviation Equipment”, *Sensors and Systems*, **160**:9 (2012), 19–25 (In Russ.).
7. V. Stuchebnikov, Y. Vaskov, E. Savchenko, “Special Pressure Sensors of the Industrial Group «MIDA»”, *Components and Technologies*, **238**:5 (2021), 12–15 (In Russ.).
8. S. P. Pirogov, D. A. Cherentsov, A. Yu. Chuba, N. N. Ustinov, “Simulation of Forced Oscillations of Pressure Monitoring Devices”, *International Journal of Engineering Trends and Technology*, **70**:2 (2022), 32–36. DOI: <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>.
9. L. G. Etkin, *Vibrofrequency Sensors. Theory and Practice*, Bauman MSTU Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
10. J. Ash et al., *Sensors of Measuring Systems: In 2 books*, Mir Publ., Moscow, 1992 (In Russ.), 419 p.

11. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “Nonlinear Mathematical Model of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:4 (2023), 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.313-325> (In Russ.).
12. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical Modelling of the «Pipeline – Pressure Sensor» System”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353**:1 (2019), 012085_1–012085_6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
13. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “Mathematical Modeling of the Dynamics of the Aeroelastic «Pipeline – Pressure Sensor» System”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 2, 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08> (In Russ.).

Submitted 01.06.2024; Revised 4.08.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.313-325

ISSN 2079-6900 (Print)

Оригинальная статья

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63:51-74

Моделирование разрушения внецентренно нагруженной стеновой панели, изготовленной по каркасной технологии

А. О. Сыромьясов¹, Ю. А. Макаров¹, В. Т. Ерофеев²

¹ Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск, Российская Федерация)

² Московский государственный строительный университет (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. Моделируется неоднородное распределение напряжений в многослойной ограждающей конструкции, отдельные слои которой выполнены из бетонов, различных по своим механическим свойствам, и жестко скреплены друг с другом. Подобные конструкции представляют значительный практический интерес, поскольку их теплоизоляционные свойства могут быть существенно выше, чем у однородных плит той же толщины (при сохранении необходимых механических свойств). Обсуждается вид критерия прочности для панелей изучаемого типа. На примере конкретной панели поставлена задача об определении эквивалентных и главных напряжений в ней под действием нагрузок и кинематических ограничений, характерных для промышленных и гражданских зданий. Для численного моделирования стационарного нагружения панели используется конечно-элементный пакет ANSYS Workbench. Обсуждается нефизичное поведение решения (возрастание напряжений вблизи некоторых ребер панели) при измельчении расчетной сетки. Показано, что в рамках модели изотропного линейно-упругого тела данный феномен связан с несогласованностью граничных условий задачи на поверхностях, имеющих общее ребро, выступающее в роли концентратора напряжений; предложен метод решения этой проблемы. Разработанный подход используется для определения критической нагрузки, при которой плита начинает разрушаться.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, многослойные ограждающие конструкции, прочность конструкций

Для цитирования: Сыромьясов А. О., Макаров Ю. А., Ерофеев В. Т. Моделирование разрушения внецентренно нагруженной стеновой панели, изготовленной по каркасной технологии // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.313-325>

Об авторах:

Сыромьясов Алексей Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

© Сыромьясов А. О., Макаров Ю. А., Ерофеев В. Т.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Макаров Юрий Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6242-4138>, makarov.yira75@mail.ru

Ерофеев Владимир Трофимович, доктор технических наук, академик РААСН, профессор кафедры строительного материаловедения, Московский государственный строительный университет (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8407-8144>, erofeevvt@bk.ru

Original article

MSC2020 74S05, 74G70, 74-04, 74A45, 35Q74

Desctruction of frame composite concrete slab that is off-center loaded

A. O. Syromyasov¹, Yu. A. Makarov¹, V. T. Erofeev²

¹ *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

² *Moscow State University of Civil Engineering (Moscow, Russian Federation)*

Abstract. The authors simulate non-uniform stress distribution in multilayer building envelope. Its layers, made of different kinds of concrete, are tightly coupled with each other. Such constructions are of significant practical interest because their heat insulation properties may be much better than the corresponding properties of uniform slabs of the same thickness (though their toughness is still sufficient). The authors state the problem about the distribution of equivalent and maximal principal stresses in such a slab. In the framework of this problem loads and kinematic constraints imposed on the body of interest are typical for industrial and civil buildings. Numerical simulation is provided with the aid of ANSYS finite element software package. The paper discusses the reasons for non-physical behaviour demonstrated by the stress after mesh refinement and proposes the way to fix this problem. Then the authors use the approach described to find a critical load causing destruction of the slab.

Keywords: numerical modelling, finite element method, stress-strain state, multilayer building envelopes, strength of constructions

For citation: A. O. Syromyasov, Yu. A. Makarov, V. T. Erofeev. Desctruction of frame composite concrete slab that is off-center loaded. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 313–325. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.313-325>

About the authors:

Alexey O. Syromyasov, Ph.D. in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

Yurii A. Makarov, Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6242-4138>, makarov.yira75@mail.ru

Vladimir T. Erofeev, D. Sci. in Engineering, academic of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Department of Construction Materials Science, Moscow State University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8407-8144>, erofeevt@bk.ru

1. Введение

Наружные стены здания обеспечивают восприятие нагрузок, жесткость и устойчивость сооружения, а также выполняют ограждающую функцию – отделяют помещения от внешних воздействий и поддерживают внутри здания благоприятный микроклимат. Наиболее экономичными по расходу материала и по технологии возведения являются стены из сборных однослойных и многослойных железобетонных панелей.

Однослойные панели проще в изготовлении, но не удовлетворяют современным требованиям по теплоизоляции. Многослойные панели более эффективны с теплотехнической точки зрения. Их наружные слои изготавливаются из конструкционных бетонов, а вкладыши – из плитных материалов с низкой теплопроводностью: минеральной ваты, стекловолокна, полимерных материалов [1]. Связь слоев в таких изделиях обеспечивается гибкими связями, с помощью железобетонных ребер и т. д.

Наряду с преимуществами – хорошими теплоизолирующими свойствами, малой массой – традиционные слоистые панели обладают рядом недостатков: недолговечность утеплителя и гибких связей, а также (из-за ненадежности соединения внутреннего слоя с внешними) склонность к значительным деформациям при действии нагрузок [2].

Эта проблема устраняется использованием изделий на основе каркасных бетонов, изготавливаемых по специальной технологии [3]. Благодаря ей слои бетонной плиты оказываются жестко сцеплены между собой, что придает конструкции монолитность и гораздо большую прочность по сравнению с конструкциями со вкладышами; при этом каркасные панели сохраняют пониженную теплопроводность.

Прогресс технологии производства и использования каркасных композитов, в частности, и строительных технологий в целом невозможен без применения методов математического и компьютерного моделирования. Они способствуют удешевлению и ускоряют сроки разработки новых материалов и конструкций. Моделированию и компьютерной оптимизации подвергаются не только составы и свойства строительных материалов и отдельных конструкций [4], но и здания в целом [5–6].

Ниже в работе методы математического и компьютерного моделирования применяются для исследования поведения стеновой панели на основе каркасного композита под действием нагрузок, типичных для зданий и сооружений. В частности, обсуждается корректность и согласованность различных ограничений в постановке задачи о нагружении конструкции. Также в статье предлагается подход, позволяющий установить предельно допустимые для заданной конструкции внешние нагрузки.

2. Постановка задачи о нагружении многослойной плиты

Будем рассматривать ограждающую конструкцию (плиту, панель) в форме прямого прямоугольного параллелепипеда длины l , толщины b и высоты h . Для удобства введем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, оси которой направлены вдоль ребер параллелепипеда так, как показано на Рис. 2.1, и будем задавать положение произвольной точки плиты радиус-вектором $\vec{r} = \text{col}(x, y, z)$.

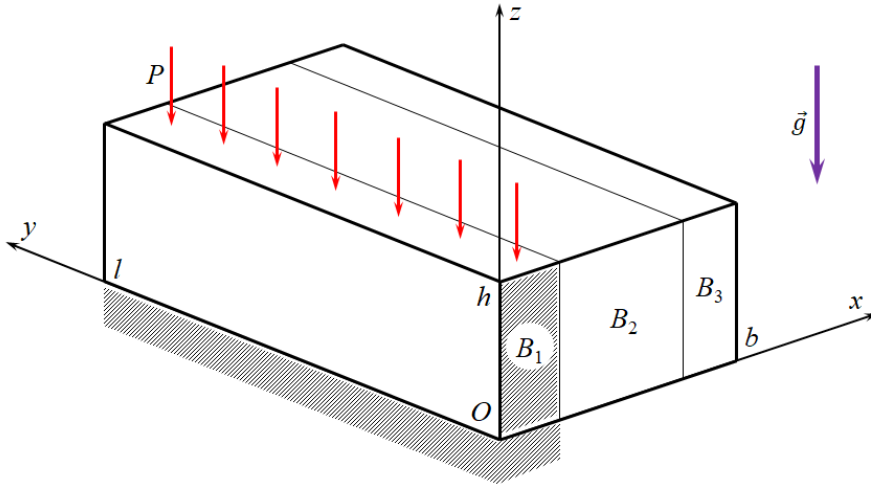


Рис. 2.1. Конструкция с приложенными к ней нагрузками
Fig. 2.1. The construction with imposed loads and constraints

Конструкция в целом находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = (0, 0, -g)$, направленным вертикально вниз параллельно ребру h ; здесь $g = 9.8086 \text{ м/с}^2$.

Плита состоит из трех продольных слоев B_1 , B_2 и B_3 , жестко сцепленных между собой и имеющих толщину b_1 , b_2 и b_3 соответственно; зазоры между ними отсутствуют, так что $b = b_1 + b_2 + b_3$. Физико-механические характеристики отдельных слоев различны; обозначим через ρ_n , E_n , ν_n и R_n соответственно плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и прочность при сжатии тела B_n .

Слой B_1 является несущим: три его грани неподвижно закреплены (нижняя и две боковые), к верхней грани приложено некое постоянное давление P , моделирующее нагрузку от более высоко расположенных панелей. Теплоизоляционный слой B_2 имеет показатели теплопроводности и прочности более низкие, чем у B_1 и B_3 . Таким образом, конструкция представляет собой своеобразный сэндвич, в котором теплоизолятор B_2 помещен между более прочными слоями B_1 и B_3 .

В рамках данной статьи изучается поведение панели с размерами $l = 6 \text{ м}$, $b = 0.4 \text{ м}$ и $h = 1.2 \text{ м}$. Слои B_1 и B_3 выполнены из легкого, а B_2 – из крупнопористого бетона. Геометрические и механические характеристики B_1 , B_2 и B_3 приведены в Табл. 2.1.

Таблица 2.1. Характеристики слоев конструкции
Table 2.1. Properties of construction layers

Номер слоя n Layer number n	b_n , м b_n , m	ρ_n , кг/м ³ ρ_n , kg/m ³	E_n , МПа E_n , MPa	R_n , МПа R_n , MPa
1	0.08	1800	10000	30
2	0.26	700	3500	10
3	0.06	1800	10000	30

Коэффициент Пуассона для всех слоев считается одинаковым: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.18$.

Под действием указанных выше нагрузок и кинематических ограничений конструкция деформируется и в ней образуются внутренние усилия. Соответственно, формулировка возникающей задачи такова: описать напряженно-деформированное состояние (НДС) плиты, т. е. найти компоненты вектора перемещения \vec{u} и тензоров относительных деформаций $\vec{\varepsilon}$ и напряжений \vec{p} в каждой точке внутри нее:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где, например,

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

При этом компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям статики твердого тела. Внутри каждого из слоев B_n они в выбранной системе координат записываются следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho_n g. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из описания наложенных на конструкцию связей и нагрузок следует, что граничными условиями (2.2) служат соотношения:

$$\sigma_z = -P, \quad x \in (0, b_1), \quad z = h; \quad (2.3)$$

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad x \in (0, b_1), \quad z = 0; \quad (2.4)$$

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad x \in (0, b_1), \quad y \in \{0, l\}; \quad (2.5)$$

$$\vec{u} \Big|_{x=b_1-0} = \vec{u} \Big|_{x=b_1+0}; \quad \vec{u} \Big|_{x=b_1+b_2-0} = \vec{u} \Big|_{x=b_1+b_2+0}. \quad (2.6)$$

Действительно, равенство (2.3) задает нагружение верхней грани слоя B_1 . Условие (2.4) отражает закрепление нижней грани B_1 , а (2.5) – двух боковых граней этого тела. Наконец, соотношения (2.6) являются математической моделью сцепления B_1 и B_2 , а также B_2 и B_3 : перемещения точек, имеющих совпадающие координаты, но лежащих по разные стороны границы раздела слоев, должны быть равны.

Здесь предполагается, что если какая-то из координат в записи опущена, то она может принимать любые значения из «своего» диапазона: $x \in (0, b)$, $y \in (0, l)$, $z \in (0, h)$.

Панель разрушится под действием заданных нагрузок, когда значение некоторого критерия прочности F , зависящего от распределения напряжений внутри нее, хотя бы в одной точке превысит заданное критическое значение:

$$F(\vec{p}) > F_{\text{crit}}. \quad (2.7)$$

Соответственно, исследуя возможное разрушение конструкции, можно рассматривать две задачи – прямую и обратную. В первом случае давление P известно заранее и необходимо проверить, выполнено ли условие (2.7) при соответствующем тензоре \vec{p} . Во втором случае P неизвестно и его необходимо *подобрать* так, чтобы удовлетворить (2.7). Далее обратная задача рассматривается как основная.

Известно много видов критериальных функций. Некоторые из них имеют общий характер, иные предназначены для описания специфических свойств конкретных материалов. В частности, большое количество критериев прочности бетона приведено в [8]. Поскольку они имеют достаточно сложные формулировки, их применение не вполне удобно. Поэтому далее для описания разрушения плиты в качестве (2.7) используется сочетание двух общеупотребительных критериев: максимальных нормальных напряжений и Губера – Мизеса [9]. Примем, что тело *не* разрушается, если одновременно

$$\sigma_1(\vec{p}) \leq R \text{ и } \sigma_{\text{eq}}(\vec{p}) \leq 1.15R.$$

Здесь σ_1 – максимальное по модулю главное (собственное) значение тензора \vec{p} , а σ_{eq} есть эквивалентное напряжение по Мизесу:

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Критические значения σ_1 и σ_{eq} выбраны из практических соображений, величины R содержатся в Табл. 2.1.

Будем считать, что σ_1 и σ_{eq} суть непрерывные и монотонно возрастающие функции параметра P из (2.3) в каждой точке панели. Это позволяет свести задачу определения «опасной» нагрузки к поиску минимального P , при котором

$$\max_{\vec{r}} \sigma_1 = R \text{ или } \max_{\vec{r}} \sigma_{\text{eq}}(\vec{p}) = 1.15R, \quad (2.8)$$

причем критерии σ_1 и σ_{eq} вычисляются на решениях системы (2.2)–(2.6). Нахождение такого давления и является главной целью настоящей работы.

Отметим, что число неизвестных функций в (2.2) равно шести и превышает количество уравнений. Кроме того, условия (2.3)–(2.6) являются смешанными: они записаны как в напряжениях, так и в перемещениях. Чтобы устранить перечисленные сложности, необходимо связать друг с другом величины $\vec{\varepsilon}$ и \vec{p} из (2.1).

Бетон при деформировании, как правило, демонстрирует хрупкие и пластические свойства. Это значит, что остаточные деформации, возникающие перед его разрушением, невелики. Кроме того, при практически значимых величинах давления P перемещения точек панели малы. Указанные соображения позволяют достаточно достоверно оценивать «опасное» давление, решая задачу об упругой деформации конструкции; при этом можно считать, что связь между тензорами \vec{p} и $\vec{\varepsilon}$ линейна [7]. В сочетании с гипотезой об изотропии бетона это предположение замыкает систему (2.2).

3. Выбор методов и инструментов моделирования

Ранее было отмечено, что приступая к нахождению критических нагрузок, необходимо предварительно в той или иной форме знать, как распределены напряжения внутри конструкции. В свою очередь, решать прямую задачу (2.2)–(2.6) для каждого рассматриваемого значения P будем численно, поскольку в трехмерной формулировке уравнения Ламе, возникающие при замыкании системы (2.2), весьма сложны.

Предположение о непрерывной и монотонной зависимости σ_1 и σ_{eq} от P позволяет исследовать (2.8) с помощью известных подходов к численному решению уравнений. Выполнив расчеты для заведомо малых и больших внешних нагрузок, можно определить отрезок $[P_{\text{min}}; P_{\text{max}}]$, которому принадлежит искомое давление. Далее этот отрезок

можно сужать, например, методом половинного деления; применение методов хорд или Ньютона затруднено, поскольку информации о выпуклости критериальных функций не имеется.

Исходя из практических соображений в качестве условия окончания итераций прием не достижение заданной точности величины P , а достаточное приближение значений критериев σ_1 или σ_{eq} к максимально допустимым (с меньшей стороны).

Для численного моделирования НДС многослойной панели под действием известных нагрузок будем использовать пакет ANSYS Workbench, лицензионная копия которого имеется в МГУ им. Н. П. Огарева. Данное ПО позволяет описывать разнообразные нагрузки и связи, наложенные на конструкцию, проводить расчеты как для стационарных, так и для нестационарных режимов нагружения, а также автоматически вычислять значения критериев прочности (включая σ_1 и σ_{eq}) в любой выбранной точке тела. Вычисления будем вести методом конечных элементов при выбранном в ANSYS типе расчета «Static Structural».

4. Свойства расчетной сетки и особенности распределения напряжений вблизи ребер панели

Предварительный расчет на грубой сетке показывает, что т.н. концентраторами напряжений выступают два участка \mathbf{e} и \mathbf{e}' конструкции:

$$\mathbf{e} = \{\vec{r} \mid 0 \leq x \leq b_1, y = 0, z = h\}, \quad \mathbf{e}' = \{\vec{r} \mid 0 \leq x \leq b_1, y = l, z = h\}.$$

Как видно из Рис. 2.1, это верхние ребра слоя B_1 , вдоль которых происходит «стыковка» граничных условий (2.3) и (2.5).

Для повышения точности вычислений сетку требуется локально измельчить вблизи указанных ребер. С этой целью можно использовать инструмент пакета ANSYS «Sphere of influence», регулирующий размер ячеек в границах заданной сферы. Конкретнее, будем измельчать сетку внутри двух сфер с радиусом $1.25b_1 = 0.1$ м и центрами в точках $P_0(b_1, 0, h)$ и $P'_0(b_1, l, h)$. Такой выбор гарантирует, что \mathbf{e} и \mathbf{e}' полностью попадут в области измельчения.

Чтобы обеспечить локализацию вносимых изменений, будем строить сетку, состоящую не из гексаэдрических, а из тетраэдрических конечных элементов (КЭ) – типа SOLID187. Каждый из них имеет по 10 узлов, расположенных в вершинах тетраэдра и в середине его ребер, что позволяет выполнять квадратичную интерполяцию данных, полученных при расчетах.

Изначально величины искомых критериев прочности вычислялись в центре одной из упомянутых выше сфер – в точке P_0 . Она лежит не просто на ребре \mathbf{e} , но и на границе слоев B_1 и B_2 , имеющих разные механические свойства, поэтому максимальные напряжения должны достигаться именно в ней и в P'_0 . Однако последовательное дробление КЭ внутри сфер не приводит к сходимости σ_1 и σ_{eq} в этих точках. Напротив, при уменьшении размеров элементов эти величины растут приблизительно линейно в зависимости от количества дроблений.

Причина такого нефизичного поведения критериев прочности состоит в том, что условие (2.3) не согласовано с (2.5). Для обоснования этого утверждения будем рассуждать от противного: изучим граничные условия на поверхности B_1 более детально (Рис. 4.1) и предположим, что на \mathbf{e} и \mathbf{e}' (2.3) и (2.5) выполнены одновременно.

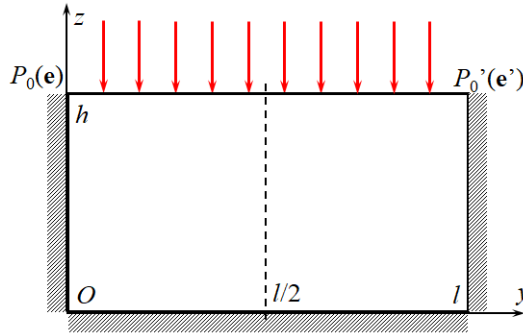


Рис. 4.1. Граничные условия на поверхности слоя B_1
Fig. 4.1. Boundary conditions on the surface of layer B_1

Выразив нормальное напряжение σ_z через частные производные перемещений [7], получим, что на верхней грани закрепленного слоя

$$\lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = -P. \quad (4.1)$$

Если граничные условия на поверхности B_1 согласованы, то последнее равенство выполняется в т.ч. на ребрах \mathbf{e} , \mathbf{e}' .

С другой стороны, согласно (2.5), перемещения u_x и u_z на боковых гранях слоя постоянны, а значит,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

(дифференцирование выполняется по касательной к поверхности, на которой заданы значения $u_{x,z}$). Продолжая этот результат на \mathbf{e} , \mathbf{e}' и подставляя его в (4.1), получим, что из согласования условий (2.3) и (2.5) на верхних ребрах B_1 должно следовать

$$\lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} = -P, \quad \vec{r} \in \mathbf{e} \cup \mathbf{e}'.$$

Однако смещения точек конструкции вдоль оси Oy должны быть зеркально симметричны относительно плоскости $y = l/2$, а значит, их производные $\partial u_y / \partial y$ на симметричных ребрах \mathbf{e} , \mathbf{e}' должны быть противоположными, а не равными. Полученное противоречие и доказывает «нестыковку» (2.3) с (2.5).

Установленное несогласование носит скорее теоретический характер. С технической точки зрения невозможно обеспечить равномерное нагружение *всей* верхней грани ограждающей конструкции. Так, между поверхностями соседних плит обязан находиться слой цементного раствора, а значит, ребра \mathbf{e} и \mathbf{e}' не воспринимают нагрузку непосредственно. В настоящей работе рассматривается упрощенная модель многослойной конструкции, не учитывающая подобные нюансы.

5. «Прикидочный» расчет для однослойной плиты

Предложим подход, позволяющий обойти нефизичность результатов расчета, оставаясь в рамках упрощенной модели. Станем вместо P_0 рассматривать значения σ_1 и σ_{eq}

в близких к ней «пробных» точках P_1, \dots, P_5 таких, что $P_k(b_1, 0.01k, h - 0.01k)$. Они находятся на расстоянии 1 см, ..., 5 см от верхней и боковой грани B_1 (Рис. 5.1).

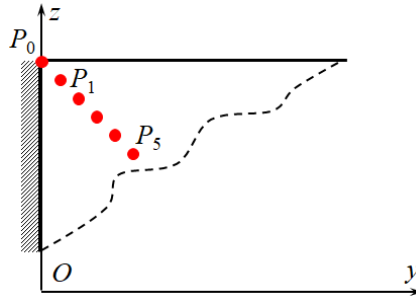


Рис. 5.1. Выбор “пробных” точек для вычисления напряжений
Fig. 5.1. The choice of “sample” points for calculation of stresses

Изучим сходимость эквивалентного напряжения в зависимости от размера КЭ вне (Δ_{out}) и внутри (Δ_{in}) описанных ранее сфер влияния. Будем считать при этом, что $P = 1$ МПа, и для простоты не станем принимать во внимание силу тяжести в (2.2). Значение внешнего давления в данном случае может быть выбрано достаточно произвольно, поскольку цель расчета – выявить зависимость (или независимость) вычисленного критерия прочности от качества сетки.

Результаты вычислений приведены в Табл. 5.1

Таблица 5.1. Зависимость σ_{eq} , МПа от размеров КЭ
Table 5.1. Dependence of σ_{eq} , MPa on finite element size

№ п/п No	Размеры конечных элементов, м Finite element size, m	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	$\Delta_{out} = 4 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{in} = 1 \cdot 10^{-2}$	7.51	3.58	2.70	2.36	2.10	1.93
2	$\Delta_{out} = 4 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{in} = 5 \cdot 10^{-3}$	9.00	3.56	2.73	2.35	2.11	1.93
3	$\Delta_{out} = 4 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{in} = 2.5 \cdot 10^{-2}$	11.3	3.52	2.73	2.35	2.11	1.93
4	$\Delta_{out} = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{in} = 1 \cdot 10^{-2}$	7.13	3.47	2.70	2.36	2.10	1.93
5	$\Delta_{out} = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_{in} = 5 \cdot 10^{-3}$	9.03	3.54	2.71	2.33	2.09	1.91

Как видно, в отличие от P_0 , в остальных «пробных» точках значение критерия прочности при измельчении сетки не возрастает, а лишь незначительно осциллирует вокруг некоторых средних значений. Поэтому при исследовании вопроса о разрушении плиты с помощью условия (2.8) будем использовать σ_1 и σ_{eq} , вычисленные в точке P_1 при $\Delta_{out} = 2 \cdot 10^{-2}$ м и $\Delta_{in} = 5 \cdot 10^{-3}$ м (строка 5 Табл. 5.1).

Найденная при $P = 1$ МПа величина σ_{eq} в точке P_1 почти в 10 раз меньше критического значения, получаемого из (2.8) и Табл. 2.1. С другой стороны, проведенный расчет не учитывал ни взаимодействия слоя B_1 с остальными частями панели, ни, как было отмечено выше, силы тяжести. Поэтому в последующих вычислениях для

многослойной конструкции в качестве грубого начального приближения для опасного давления выберем величину, в 8 раз большую: $P \approx 8$ МПа.

6. Определение критической нагрузки для многослойной конструкции

При моделировании НДС трехслойной панели сохраним для слоя B_1 определенные выше Δ_{out} и Δ_{in} . Напряжения и их градиенты в ненагруженных слоях существенно меньше, чем внутри B_1 , а значит, сетку в них можно делать более грубой – лишь бы на ширину каждого из них приходилось хотя бы по 2–3 элемента. Поэтому примем $\Delta_{\text{out}} = 8 \cdot 10^{-2}$ м для слоя B_2 и $\Delta_{\text{out}} = 3 \cdot 10^{-2}$ м для B_3 . При этом действие инструмента “Sphere of influence” автоматически распространяется и на B_2 , т. к. построенные нами сферы с центрами P_0 и P'_0 имеют с этим слоем непустое пересечение.

Чтобы отследить концентрацию напряжений вблизи поверхности раздела слоев B_1 и B_2 , но со стороны внутреннего (менее прочного) слоя, дополнительно станем вычислять σ_1 и σ_{eq} в точке $P_1(b_1 + 0.001, 0.01, h - 0.01)$, находящейся «напротив» P_1 , но незначительно (на 1 мм) погруженной в этот слой.

С учетом вышесказанного для определения опасного давления была выполнена серия расчетов; таким образом, была последовательно решена серия прямых задач, описанных в разделе 2. Начальным приближением искомой величины в них послужило полученное в предыдущем разделе значение 8 МПа. В качестве критерия разрушения рассматривалось выполнение (2.8) хотя бы в одной из точек P_1 и P'_1 , причем в точке P_1 прочность R принималась равной R_1 , а в P'_1 считалось, что $R = R_2$. В итоге было получено, что критическое давление равно 8.72 МПа: при нем главное напряжение в несущем слое B_1 достигает значения R_1 .

Результаты расчетов приведены в Табл. 6.1, в скобках указаны максимальные допустимые значения критериев прочности.

Таблица 6.1. Значения критериев прочности при $P = 8.72$ МПа
Table 6.1. Value of failure criteria when $P = 8.72$ МПа

Точка Point	σ_1 , МПа σ_1 , МПа	σ_{eq} , МПа σ_{eq} , МПа
P_1	30.0 ($R_1 = 30.0$)	33.1 ($1.15R_1 = 34.5$)
P'_1	9.2 ($R_2 = 10.0$)	11.2 ($1.15R_2 = 11.5$)

На Рис. 6.1 показано распределение критерия σ_1 вдоль отрезка прямой, проходящей через P_1 и P'_1 параллельно ребру e . Координата x отсчитывается от наружной грани плиты (плоскости Oyz).

Как видно, наибольшие напряжения возникают в слое B_1 вблизи границы его раздела с B_2 ; за пределами несущего слоя, т. е. при $x \geq b_1$, величина σ_1 очень быстро падает до пренебрежимых значений.

Распределение эквивалентного напряжения по Мизесу вдоль этой же прямой выглядит аналогичным образом.

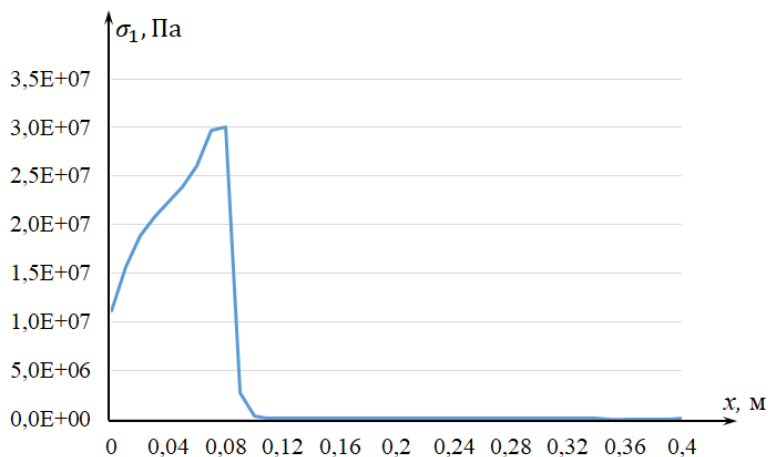


Рис. 6.1. Распределение σ_1 вдоль прямой, проходящей через пробную точку
Fig. 6.1. The distribution of σ_1 along a straight line passing through a sample point

7. Заключение

В работе поставлена задача об определении НДС жестко закрепленной внецентренно нагруженной панели на основе каркасного композита, находящейся под действием силы тяжести и внешнего давления, а также о разрушении такой панели.

Показано, что граничные условия на поверхности несущего слоя не согласованы, что является причиной нефизичного поведения напряжений вблизи ребер этого слоя при измельчении конечно-элементной сетки. Обсуждается подход, позволяющий обойти указанную проблему.

Предложен алгоритм численного исследования поставленной задачи о многослойной плите. Первым этапом вычислений служит «прикидочный» расчет, выполняемый для единственного (нагруженного) слоя. Цель этих вычислений – определить качество сетки, при котором достигается удовлетворительная точность результатов, а также найти начальное приближение для искомой критической нагрузки. Далее производится серия расчетов на полном объеме панели, уточняющих найденную ранее грубую оценку опасной нагрузки.

Описанный метод реализован в пакете ANSYS Workbench на примере конкретной конструкции.

Получено, что наиболее уязвимыми к разрушению являются точки плиты, находящиеся на границе раздела несущего и ненагруженного слоев и одновременно расположенные вблизи ребер, по которым происходит «стыковка» граничных условий на поверхности несущего слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сизов В. Д., Павловская А. В. Эффективная многослойная стеновая панель // Наука и техника, 2022. Т. 21, № 5. С. 410–418. DOI: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-5-410-418>.

2. Федосов С. В., Ибрагимов А. М., Гнедина Л. Ю. Проблемы трехслойных ограждающих конструкций // *Жилищное строительство*. 2012. № 7. С. 9–12.
3. Баженов Ю. М., Король Е. А., Ерофеев В. Т., Митина Е. А. Ограждающие конструкции с использованием бетонов низкой теплопроводности (основы теории, методы расчета и технологическое проектирование). М. : Изд-во ассоциации строит. вузов, 2008. 320 с.
4. Чиненков Ю. В. Расчет железобетонных трехслойных ограждающих конструкций из легкого бетона // *Бетон и железобетон*, 2007. № 6. С. 7–11.
5. Moftakhari A., Aghanajafi C., Moftakhari Chaei Ghazvin A. Inverse heat transfer analysis of radiator central heating systems inside residential buildings using sensitivity analysis // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2017. Vol. 25, no. 4. pp. 580–607. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2016.1178258>.
6. Lakshmi K., Keerthivas M. Damage diagnosis of high-rise buildings under variable ambient conditions using subdomain approach // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2021. Vol. 29, no. 13. pp. 2579–2610. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2021.1941922>
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. СПб. : Лань, 2004. Т. 2. 580 с.
8. Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М. : Стройиздат, 1974. 316 с.
9. Биргер И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. 560 с.

*Поступила 26.06.2024; доработана после рецензирования 29.07.2024;
принята к публикации 28.08.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. D. Sizov, A. V. Pavlovskaya, “Efficient Multi-Layer Wall Panel”, *Science and Technique*, **21**:5 (2022), 410–418. DOI: <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-5-410-418> (In Russ.).
2. S. V. Fedosov, A. M. Ibragimov, L. Yu. Gnedina, “[Problems of three-layer building envelopes]”, *Zhilishhnoe stroitel'stvo*, 2012, no. 7, 9–12 (In Russ.).
3. Yu. M. Bazhenov, E. A. Korol, V. T. Erofeev, E. A. Mitina, [*Building envelopes using concrete with low heat conduction (basics of theory, methods of calculation and technological desigh)*], Izdatel'stvo Associacii Stroitel'nyx Vuzov Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 320 p.
4. Yu. V. Chinenkov, “[Calculation of ferroconcrete three-layer building envelopes made of lightweight concrete]”, *Beton i zhelezobeton*, 2007, no. 6, 7–11 (In Russ.).

5. A. Moftakhari, C. Aghanajafi, A. Moftakhari Chaei Ghazvin, “Inverse heat transfer analysis of radiator central heating systems inside residential buildings using sensitivity analysis”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **25**:4 (2017), 580–607. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2016.1178258>.
6. K. Lakshmi, M. Keerthivas, “Damage diagnosis of high-rise buildings under variable ambient conditions using subdomain approach”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **29**:13 (2021), 2579–2610. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2021.1941922>.
7. L. I. Sedov, *A course in continuum mechanics*, **2**, Wolters-Noordhoff Publ., Netherlands, 1971, 580 p.
8. G. A. Geniev, V. N. Kissyuk, G. A. Tyupin, [*The plasticity theory for concrete and ferroconcrete*], Strojizdat Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 316 p.
9. I. A. Birger, R. R. Mavlyutov, [*Strength of materials*], Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russ.), 560 p.

Submitted 26.06.2024; Revised 29.07.2024; Accepted 28.08.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете `svmbib.sty`. Этот пакет разработан на основе пакета `amsbib.sty`.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

The rules for article layout in the LaTeX system

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\page О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}

```

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oliger
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

```
\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

Articles in collections in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

Books (monographs and collections) in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

Conference proceedings in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

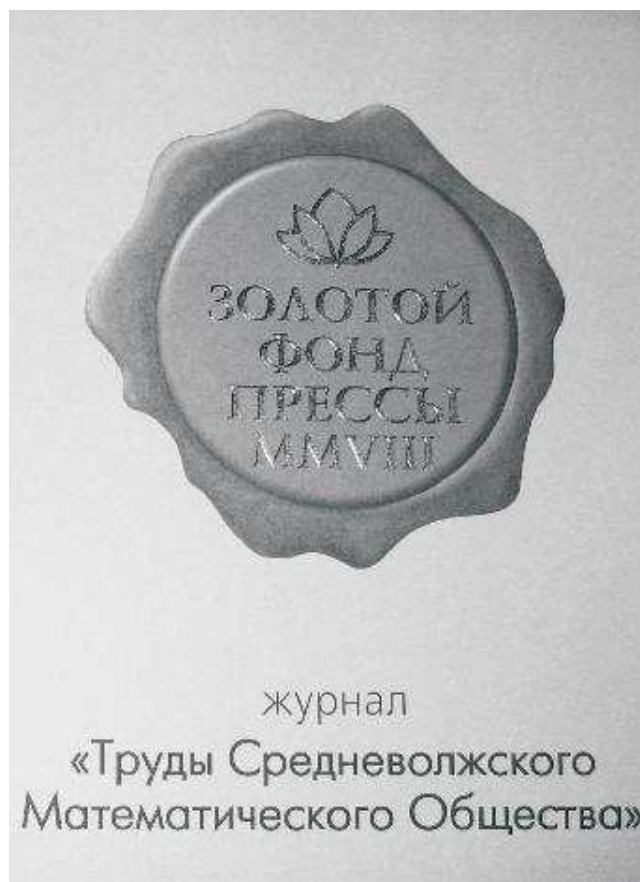
Алфавитный указатель авторов

Анкилов А. В.	294
Анкилов Г. А.	294
Вельмисов П. А.	294
Ерофеев В. Т.	313
Кольчурина О. А.	231
Леонтьев В. Л.	245
Лутошкин И. В.	260
Макаров Ю. А.,	313
Сыромясов А. О.	313
Чекмарев А. Г.	260
Шаманаев П. А.	280

Author Index

A. V. Ankilov	294
G. A. Ankilov	294
A. G. Chekmarev	260
P. A. Velmisov	294
V. T. Erofeev	313
O. A. Kolchurina	231
V. L. Leontiev	245
I. V. Lutoshkin	260
Yu. A. Makarov	313
P. A. Shamanaev	280
A. O. Syromyasov	313

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 20.09.2024. Дата выхода в свет 30.09.2024. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,55 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 522.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 20.09.2024. Date of publishing 30.09.2024. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,55.

Number of copies 100. Order no. 522.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

