

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  26  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  2

2024



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 26, № 2. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 26, NO. 2. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий (ВАК) по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

С 2024 года журналу в базе данных Scopus присвоены квартили Q3 по направлениям Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) и Q4 по направлению Control and Optimization.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева», 2024

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications (Higher Attestation Commission). List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

Since 2024, the journal in the Scopus database has been assigned Q3 quartiles by area Applied Mathematics, Computational Mathematics, Mathematics (miscellaneous) and Q4 in Control and Optimization.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2024

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдулаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных урав-

нений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

- А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова**  
Об одном группоиде, ассоциированном с композицией многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала . . . . . 111
- В. Г. Малинов**  
Модифицированный проекционный обобщённый двухточечный двухэтапный экстраградиентный квазиньютоновский метод решения седловых задач . . . . . 123
- 

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

- Р. В. Жалнин, А. И. Кулягин, М. С. Нефедов**  
Применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для моделирования двумерных задач о развитии гидродинамической неустойчивости . . . . . 143
- 

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

- Ю. Н. Дерюгин, Д. А. Шишканов**  
Континуальная модель перидинамики для задач хрупкого разрушения . . 157
- С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач**  
Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц . . . . . 175
- 

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

- Памяти Ильи Владимировича Бойкова . . . . . 195
- 
- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 197
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 201
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 205
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 211
- 
- Алфавитный указатель авторов . . . . . 215

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**A. V. Litavrin, T. V. Moiseenkova**

About one groupoid associated with the composition of multilayer neural networks of direct signal propagation . . . . . 111

**V. G. Malinov**

Modified projection generalized two-point two-stage extragradient quasinewton method for saddle point problems . . . . . 123

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**R. V. Zhalnin, A. I. Kulyagin, M. S. Nefedov**

Application of computational algorithms of higher order of accuracy to the modeling of two-dimensional problems on development of hydrodynamic instabilities . . . . . 143

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov**

Continuum model of peridynamics for brittle fracture problems . . . . . 157

**S. I. Martynov, L. Yu. Tkach**

Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles . . . . . 175

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

In memory of Ilya Vladimirovich Boykov . . . . . 195

---

The rules of article design (in Russian) . . . . . 197

The rules of article design (in English) . . . . . 201

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 205

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . . 211

---

Author Index . . . . . 215

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.111-122

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.577+519.68:007.5

## Об одном группоиде, ассоциированном с композицией многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала

А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова

*ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Работа направлена на создание алгебраических систем, описывающих композицию нейронных сетей, и изучение алгебраических свойств данных систем. Строится группоид, элементы которого ассоциированы с многослойными нейронными сетями прямого распространения сигнала. Построенный группоид получает название «полный группоид композиции нейронных сетей». Моделирование многослойной нейронной сети прямого распространения сигнала (далее – нейронные сети) происходит с помощью определения кортежа специального вида. Компоненты данного кортежа определяют слои нейронов и структурные отображения, которые задают веса синаптических связей, функции активации и пороговые значения. С помощью модели искусственно-отображение, которое моделирует работу нейронной сети как вычислительной схемы. Данный подход отличается от определения нейронной сети с помощью абстрактных автоматов и близких конструкций. Моделирование нейронных сетей предложенным способом дает возможность описывать архитектуру нейронной сети (т. е. граф нейронной сети, веса синаптических связей и т. д.). Операция в полном группоиде композиции нейронных сетей моделирует композицию двух нейронных сетей. Нейронная сеть, полученная в виде произведения пары нейронных сетей, действует на входных сигналах путем последовательного применения исходных сетей, и содержит информацию об их структуре. Доказано, что построенный группоид является свободным.

**Ключевые слова:** группоид, свободный группоид, многослойная нейронная сеть прямого распространения сигнала, полный группоид композиции многослойных нейронных сетей

**Для цитирования:** Литаврин А. В., Моисеенкова Т. В. Об одном группоиде, ассоциированном с композицией многослойных нейронных сетей прямого распространения сигнала // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 111–122. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.111-122>

*Об авторах:*

**Литаврин Андрей Викторович**, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики № 2, ИМиФИ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, [anm11@rambler.ru](mailto:anm11@rambler.ru)

© А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова



**Моисеенкова Татьяна Владимировна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики № 2, ИМиФИ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2216195X>, [tanya-mois11@yandex.ru](mailto:tanya-mois11@yandex.ru)

*Original article*

MSC2020 08A62

## About One Groupoid Associated with the Composition of Multilayer Feedforward Neural Networks

A. V. Litavrin, T. V. Moiseenkova

*Siberian Federal University, (Krasnoyarsk, Russian Federation)*

**Abstract.** The authors construct a groupoid whose elements are associated with multilayer feedforward neural networks. This groupoid is called the complete groupoid of the composition of neural networks. Multilayer feedforward neural networks (hereinafter referred to as neural networks) are modelled by defining a special type of tuple. Its components define layers of neurons and structural mappings that specify weights of synaptic connections, activation functions and threshold values. Using the artificial neuron model (that of McCulloch-Pitts) for each such tuple it is possible to define a mapping that models the operation of a neural network as a computational circuit. This approach differs from defining a neural network using abstract automata and related constructions. Modeling neural networks using the proposed method makes it possible to describe the architecture of the network (that is, the network graph, the synaptic weights, etc.). The operation in the full neural network composition groupoid models the composition of two neural networks. A network, obtained as the product of a pair of neural networks, operates on input signals by sequentially applying original networks and contains information about their structure. It is proved that the constructed groupoid is a free.

**Keywords:** groupoid, free groupoid, multilayer feedforward neural network, complete groupoid composition of multilayer neural networks

**For citation:** A. V. Litavrin, T. V. Moiseenkova. About One Groupoid Associated with the Composition of Multilayer Feedforward Neural Networks. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 111–122. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.111-122>

*About the authors:*

**Andrey V. Litavrin**, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University (79 Svobodny Av., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6285-0201>, [anm11@rambler.ru](mailto:anm11@rambler.ru)

**Tatyana V. Moiseenkova**, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University (79 Svobodny Av., Krasnoyarsk 660041, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2216195X>, [tanya-mois11@yandex.ru](mailto:tanya-mois11@yandex.ru)

### 1. Введение

В данной работе рассматриваются только многослойные нейронные сети с прямым распределением сигнала (далее, просто сети, нейросети или нейронные сети). Инфор-

мацию о нейронных сетях и их структурах (архитектурах) можно найти в [1–4]. Работа направлена на построение группоидов, позволяющих моделировать композицию многослойных нейронных сетей.

В работах [5–6] изучались коммутативные (но в общем случае не ассоциативные) группоиды  $AGS(\mathcal{N})$ , элементы которых тесно связаны с подсетями нейронной сети  $\mathcal{N}$ . Изучались эндоморфизмы (см. теорема 2 из [5] и теорема 1 из [6]) этих группоидов и их подгруппоиды (см. теорема 1 из [5]). Определение 2.1, которое формализует понятие нейронной сети в данной работе, строится на основании определения нейронной сети из работ [5–6]. Нейронная сеть в смысле данного определения является математическим объектом: кортежем, элементы которого определяют структуру (по другому архитектуру или внутреннее устройство) нейронной сети.

Другим подходом к математической формализации понятия нейронной сети является понятие *абстрактной нейронной сети*, построенное в работе [7]. Такой подход имеет свои достоинства и близок к подходу, используемому в теории абстрактных автоматов ([8]). Представление нейронной сети в виде конкретного абстрактного автомата, который при этом не является конструкцией, построенной с помощью других абстрактных автоматов, не дает возможности изучать или принимать во внимание архитектуру нейронной сети. Данное обстоятельство является хорошо известным и отмечалось В. М. Глушковым в обзоре [8] для любых конкретных автоматов, представляемых в виде абстрактных автоматов.

**Основные результаты.** В работе строится *полный группоид композиции многослойных нейронных сетей* (см. определение 2.2). Основным результатом работы является Теорема 5.1, которая показывает, что полный группоид композиции является свободным группоидом. Найдена система свободных образующих группоида построенного группоида (см. теорема 5.1, лемму 5.2 и предложение 5.3). Свойство группоида быть свободным достаточно полно характеризует его алгебраические свойства. В частности, можно считать известным моноид всех эндоморфизмов такого группоида.

Результаты работы будут полезны для разработки методов исследования нейронных сетей с помощью алгебраических объектов. Другим подходом исследований в этом направлении является моделирование композиции с помощью частичных группоидов (результаты авторов по этому направлению в настоящее время готовятся к отправке в журнал).

## 2. Основные определения и обозначения

Всюду далее  $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел;  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел и  $F(\mathbb{R}) := \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  – множество всех отображений множества  $\mathbb{R}$  в множество  $\mathbb{R}$ . Сформулируем определение многослойной нейронной сети. Как обычно, мощность множества  $X$  обозначим через  $|X|$ .

**Определение 2.1.** Пусть заданы следующие объекты:

- 1) кортеж  $(M_1, \dots, M_n)$  длины  $n \geq 1$  конечных непустых множеств, где при  $i \neq j$  справедливо условие  $M_i \cap M_j = \emptyset$ ;
- 2) множество  $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup \dots \cup (M_{n-1} \times M_n)$ ;
- 3) отображение  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- 4) множество  $A := M_1 \cup \dots \cup M_n$ ;
- 5) отображение  $g : A \rightarrow F(\mathbb{R})$ ;
- 6) отображение  $l : A \rightarrow \mathbb{R}$ ;

7) биективное отображение  $i : M_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, |M_1|\}$ ;

8) биективное отображение  $o : M_n \rightarrow \{1, 2, \dots, |M_n|\}$ .

Тогда кортеж  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, i, o, f, g, l)$  будем называть многослойной нейронной сетью прямого распределения.

Отображение  $f$  задает веса синаптических связей, отображение  $g$  определяет функции активации у каждого нейрона,  $l$  определяет пороговые значения нейронов (подробную информацию о перечисленных структурных единицах можно найти, например, в [5]). Совокупность нейронов  $M_1$  будем называть входным слоем, а  $M_n$  – выходным слоем. Отображения  $i$  и  $o$  задают упорядочение входного и выходного слоя. Отображения  $i, o, f, g, l$  будем называть структурными отображениями нейронной сети  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, i, o, f, g, l)$ , поскольку они определяют структуру сети  $\mathcal{N}$ . Количество слоев в сети  $\mathcal{N}$  будем обозначать через  $n(\mathcal{N})$ .

Приведенное определение построено на основе определения 1 из [5], в котором отсутствовали пункты 7) и 8). Последнее объясняется тем, что в работе [5] изучались подсети нейронной сети и не было необходимости рассматривать пункты 7) и 8), которые отвечают за упорядочение входного и выходного слоя нейронов. Последнее необходимо в контексте передачи выходного сигнала первой сети на вход второй сети. Кроме того, определение 2.1 разрешает однослойные нейронные сети (в отличие от определения 1 из [5]).

Для каждого целого  $n \geq 0$  и непустого множества  $P$  введем следующие обозначения:

$$D_0(P) := P, \quad D_n(P) := \{(d, i) \mid d \in D_{n-1}(P), i \in \{1, 2\}\} \quad (n > 0).$$

В частности, выполняются равенства

$$D_1(P) = \{(p, i) \mid p \in P, i \in \{1, 2\}\},$$

$$D_n(P) = \{(((\dots((p, i_1), i_2), \dots), i_{n-1}), i_n) \mid p \in P; i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2\}\}.$$

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Для любого множества  $Q \neq \emptyset$  через  $\text{SN}(k, Q)$  обозначим множество всевозможных нейронных сетей, таких что нейронная сеть из  $\text{SN}(k, Q)$  имеет ровно  $k$  входов и ровно  $k$  выходов, а ее нейроны являются элементами множества  $Q$ . Пусть  $P \neq \emptyset$  – множество свободное от специальных кортежей. Тогда введем множество нейронных сетей

$$\text{SAN}(k, P) := \text{SN} \left( k, P \cup \left( \bigcup_{s \in \mathbb{N}} D_s(P) \right) \right),$$

где объединение берется по всем натуральным  $s$ .

Всюду далее  $P$  – это множество свободное от кортежей, содержащих компоненты, равные числам 1 или 2 (или просто множество, свободное от специальных кортежей). Обозначение SAN возникает как аббревиатура *Set of All Networks*. В следующем разделе на множестве  $\text{SAN}(k, P)$  будет введена бинарная алгебраическая операция (см. определение 4.1).

Две сети  $\mathcal{N}_1 = (M_1, \dots, M_n, i, o, f, g, l)$  и  $\mathcal{N}_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i', o', f', g', l')$  из  $\text{SAN}(k, P)$  считаем равными, когда они равны как кортежи. Ясно, что  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$n = d, \quad M_1 = M'_1, \quad M_2 = M'_2, \dots, \quad M_n = M'_d, \quad i = i', \quad o = o', \quad f = f', \quad g = g', \quad l = l',$$

где под равенством отображений понимается поточечное равенство.

### 3. Описание основных результатов

Каждой нейронной сети  $\mathcal{N} \in \text{SAN}(k, P)$  будет соответствовать отображение  $F_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , которое реализует действие нейронной сети  $\mathcal{N}$  на входных сигналах  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$  из  $\mathbb{R}^k$ . Отображение  $F_{\mathcal{N}}$  определяется стандартным способом с помощью модели искусственного нейрона Мак-Каллока – Питтса, (подробную информацию об этом можно найти, например, в [1] или [2]).

На множестве  $\text{SAN}(k, P)$  вводится бинарная алгебраическая операция  $(\odot)$  (см. определение 4.1), которая любым двум сетям  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  ставит в соответствие нейронную сеть  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ , такую что на любом входном сигнале  $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$  имеет место равенство

$$F_{\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2}(\bar{x}) = F_{\mathcal{N}_2}(F_{\mathcal{N}_1}(\bar{x})) \quad (3.1)$$

(см. утверждение 4.1). Поэтому нейронная сеть  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  действует на множестве входных сигналов  $\mathbb{R}^k$  как последовательное применение сетей  $\mathcal{N}_1$  и потом  $\mathcal{N}_2$ . Такой подход, с точки зрения теории абстрактных автоматов, можно интерпретировать, как подачу выходных сигналов первого автомата на вход второго автомата (см., например, определение 25 [8, с. 54]). Операция  $(\odot)$  некоммутативна и неассоциативна (следует из теоремы 5.1).

Нейронная сеть  $\mathcal{T} := \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  содержит в себе информацию о структуре нейронных сетей  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ . Однако при этом сеть  $\mathcal{T}$  не содержит нейронов, входящих в сети  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ . Вместо них нейронами сети  $\mathcal{T}$  выступают кортежи  $(n_1, 1)$  и  $(n_2, 2)$ , где  $n_1$  – нейрон сети  $\mathcal{N}_1$  и  $n_2$  – нейрон сети  $\mathcal{N}_2$ . Данный прием необходим для корректного определения сети  $\mathcal{T}$  как математического объекта, введенного определением 2.1 (подробнее см. замечание 4.1). Группоид  $\text{SAN}(k, P)$  строился так, чтобы для любых двух сетей  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ , принадлежащих ему, выполнялось соотношение (3.1) (это позволяет использовать его для моделирования композиций сетей). Свойство группоида  $\text{SAN}(k, P)$  быть свободным не обеспечивалось специально.

### 4. Построение группоида $\text{SAN}(k, P)$

В данном разделе строится группоид  $\text{SAN}(k, P) = (\text{SAN}(k, P), \odot)$ , в котором  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  будет являться сетью из  $\text{SAN}(k, P)$ , полученной в соответствие с принципом композиции нейронных сетей. Введем объекты, которые необходимы для формулировки группоида  $\text{SAN}(k, P)$ . Как правило,  $X \times Y$  – декартово произведение множеств. Для всякого множества  $X$  и каждого  $i \in \{1, 2\}$  определим множество  $L_i(X) := X \times \{i\}$ .

Каждой паре сетей

$$\mathcal{N}_1 = (M_1, \dots, M_n, i_1, o_1, f_1, g_1, l_1), \quad \mathcal{N}_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i_2, o_2, f_2, g_2, l_2)$$

из  $\text{SAN}(k, P)$  сопоставим множества

$$A(\mathcal{N}_1) := \bigcup_{i=2}^n (L_1(M_{i-1}) \times L_1(M_i)); \quad B(\mathcal{N}_2) := \bigcup_{i=2}^d (L_2(M'_{i-1}) \times L_2(M'_i));$$

$$S[\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2] := A(\mathcal{N}_1) \cup (L_1(M_n) \times L_2(M'_1)) \cup B(\mathcal{N}_2).$$

Пусть  $h_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  и  $h_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  – два отображения. Тогда через  $[h_1, h_2]$  будем обозначать отображение множества  $L_1(X_1) \cup L_2(X_2)$  в множество  $Y_1 \cup Y_2$ , которое для

любого  $x_1 \in X_1$  и  $x_2 \in X_2$  действует по правилу:

$$[h_1, h_2]((x_1, 1)) = h_1(x_1); \quad [h_1, h_2]((x_2, 2)) = h_2(x_2).$$

Пусть  $h : X \rightarrow Y$  и  $i \in \{1, 2\}$ . Тогда через  $[h]_i$  обозначим отображение множества  $L_i(X)$  в множество  $Y$ , которое для любого  $x \in X$  действует следующим образом:  $[h]_i((x, i)) = h(x)$ .

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Для любых нейронных сетей

$$\mathcal{N}_1 = (M_1, \dots, M_n, i_1, o_1, f_1, g_1, l_1), \quad \mathcal{N}_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i_2, o_2, f_2, g_2, l_2)$$

из множества  $\text{SAN}(k, P)$  определяем отображения

$$i_3 := [i_1]_1, \quad o_3 := [o_2]_2, \quad g_3 := [g_1, g_2], \quad l_3 := [l_1, l_2]$$

и отображение  $f_3 : S[\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , которое однозначно определяется соотношениями:

$$f_3((a, 1), (b, 1)) = f_1((a, b)) \quad ((a, 1), (b, 1) \in A(\mathcal{N}_1));$$

$$f_3((a', 2), (b', 2)) = f_2((a', b')) \quad ((a', 2), (b', 2) \in B(\mathcal{N}_2));$$

$$f_3((m, 1), (m', 2)) = 1 \iff o_1(m) = i_2(m') \quad (m \in M_n, m' \in M'_1);$$

$$f_3((m, 1), (m', 2)) = 0 \iff o_1(m) \neq i_2(m') \quad (m \in M_n, m' \in M'_1).$$

Операцию  $(\odot)$  определим равенством

$$\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2 = (L_1(M_1), \dots, L_1(M_n), L_2(M'_1), \dots, L_2(M'_d), i_3, o_3, f_3, g_3, l_3). \quad (4.1)$$

**З а м е ч а н и е 4.1.** Отметим, что отображения  $L_1$  и  $L_2$  выполняют функцию покраски элементов множества в два различных цвета (первый цвет и второй цвет). Покраска является необходимым условием корректности определения 4.1. В самом деле, для покрашенных множеств выполняется равенство

$$(L_1(M_1) \cup \dots \cup L_1(M_n)) \cap (L_2(M'_1) \cup \dots \cup L_2(M'_d)) = \emptyset,$$

которое обеспечивает корректность введения структурных отображений  $i_3, o_3, f_3, g_3, l_3$ . При отсутствии покраски и наличия в двух сетях одинаковых нейронов данный способ задания структурных отображений результирующей сети приводил бы к тому, что на одном нейроне одно и то же отображение имеет различные значения. Последнее не корректно.

Структурные отображения  $i_3, o_3, f_3, g_3, l_3$  из определения 4.1 подобраны так, чтобы сеть  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  действовала на любом входном сигнале, как последовательное приращение сетей  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ .

**О п р е д е л е н и е 4.2.** Группоид  $\text{SAN}(k, P) = (\text{SAN}(k, P), \odot)$  назовем полным группоидом композиции многослойных нейронных сетей.

**Работа сети.** Работу нейронной сети  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_d, i, o, f, g, l)$  из  $\text{SAN}(k, P)$  как вычислительной схемы будет реализовывать функция  $F_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Действие этой функции опишем помощью модели искусственного нейрона Мак-Каллока – Питтса ([1]). Пусть  $n$  – нейрон слоя  $M_j$  при  $j > 1$ . Нейрон  $n$  получает сигнал (в виде числа) от

каждого нейрона предыдущего слоя. Обозначим эти нейроны символами  $n_1, \dots, n_{|M_{j-1}|}$ , а сигналы (числа), которые они посылают, обозначим символами  $a_1, \dots, a_{|M_{j-1}|}$ . Тогда  $n$  генерирует свой сигнал  $G_n$  по правилу

$$G_n = y_n \left( \sum_{s=1}^{|M_{j-1}|} f((n_s, n)) \cdot a_s + l(n) \right),$$

где  $y_n := g(n)$  – функция активации нейрона  $n$  (для каждого нейрона  $n$  функцию активации определяет структурное отображение  $g$ ; здесь  $g(n)$  – значение отображения  $g$  на нейроне  $n$ ). Далее сигнал передается через соответствующие синаптические связи.

Действие функции  $F_{\mathcal{N}}$  состоит в том, что сигнал  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  передается на входной слой  $M_1$  так, что нейрон  $n \in M_1$  получает сигнал  $x_s$ , когда  $i(n) = s$ . Нейроны входного слоя передают свои сигналы  $y_n(x_s + l(n))$  ( $y_n = g(n)$ ,  $i(n) = s$ ) по синаптическим связям на второй слой. Далее сигнал распространяется по сети в соответствии с моделью искусственного нейрона, описанной выше. Выходной слой  $M_d$  генерирует вектор  $(u_1, \dots, u_k)$ , где число  $u_s$  сгенерировано нейроном  $n \in M_d$  таким, что  $o(n) = s$ .

**Утверждение 4.1.** Для любых двух сетей  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  из  $\text{SAN}(k, P)$  и всякого сигнала  $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$  выполняется равенство  $F_{\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2}(\bar{x}) = F_{\mathcal{N}_2}(F_{\mathcal{N}_1}(\bar{x}))$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сети

$$\mathcal{N}_1 = (M_1, \dots, M_n, i_1, o_1, f_1, g_1, l_1), \quad \mathcal{N}_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i_2, o_2, f_2, g_2, l_2)$$

из множества  $\text{SAN}(k, P)$ .

Из построения сети  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  видно, что сигнал  $\bar{x}$  распространяется по слоям  $L_1(M_1), L_1(M_2), \dots, L_1(M_n)$  так же, как он распространялся бы по сети  $\mathcal{N}_1$  (действительно, это гарантируется способом задания структурных отображений сети  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ ). Поэтому слой  $L_1(M_n)$  сгенерирует сигнал  $F_{\mathcal{N}_1}(\bar{x})$ . Нейрон  $(a, 1)$  из  $L_1(M_n)$  будет соединяться с нейроном  $(b, 2) \in L_2(M'_1)$  синаптической связью, имеющей вес 1, тогда и только тогда, когда  $o_1(a) = i_2(b)$ . С другими нейронами слоя  $L_2(M'_1)$  нейрон  $a$  соединяется синаптическими связями, имеющими вес 0. Следовательно, слой  $L_2(M'_1)$  получает сигнал  $F_{\mathcal{N}_1}(\bar{x})$ , который распространяется по слоям  $L_2(M'_1), L_2(M'_2), \dots, L_2(M'_d)$  так же, как он распространялся бы по сети  $\mathcal{N}_2$ . Поэтому сеть  $\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$  возвращает сигнал  $F_{\mathcal{N}_2}(F_{\mathcal{N}_1}(\bar{x}))$ , когда на ее вход подается сигнал  $\bar{x}$ . Утверждение доказано.

## 5. Структура группоида $\text{SAN}(k, P)$

Главным результатом данного раздела будет являться теорема 5.1, которая показывает, что группоид  $\text{SAN}(k, P)$  является свободным группоидом. Вспомогательные утверждения дадут арифметические свойства данного группоида в терминах нейронных сетей.

Если элемент группоида нельзя разложить в произведение двух элементов данного группоида, то будем называть такой элемент *простым элементом*. Для каждой сети  $\mathcal{N}$  из  $\text{SAN}(k, P)$  определим множество

$$\Theta(\mathcal{N}) := \{(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \in \text{SAN}(k, P) \times \text{SAN}(k, P) \mid \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}\}.$$

Будем использовать обозначение

$$K(P) := P \cup \left( \bigcup_{s \in N} D_s(P) \right).$$

Ясно, что  $K(P)$  – это множество всех возможных нейронов, из которых формируются нейронные сети группоида  $\text{SAN}(k, P)$ .

**О п р е д е л е н и е 5.1.** Для каждой нейронной сети  $\mathcal{N}$  из  $\text{SAN}(k, P)$  введем натуральное число  $\text{Del}_1(\mathcal{N})$  такое, что выполняются условия:

1) если сеть  $\mathcal{N}$  имеет вид

$$\mathcal{N} = (L_1(M_1), \dots, L_1(M_n), L_2(M_{n+1}), \dots, L_2(M_d), i, o, f, g, l)$$

для подходящих подмножеств  $M_1, \dots, M_n, M_{n+1}, \dots, M_d$  множества  $K(P)$  и выполняются неравенства  $n \geq 1$ ,  $d \geq n + 1$ , то полагаем по определению  $\text{Del}_1(\mathcal{N}) := n$ ;

2) если не существует натурального числа  $n$  такого, что выполняются условия первого пункта, то  $\text{Del}_1(\mathcal{N}) := 0$ .

Число  $\text{Del}_1(\mathcal{N})$  назовем *разделителем первого типа* сети  $\mathcal{N}$ .

Из определения 4.1 операции  $(\odot)$  вытекает

**П р е д л о ж е н и е 5.1.** Если  $\text{Del}_1(\mathcal{N}) = 0$ , то  $\mathcal{N}$  – простой элемент группоида  $\text{SAN}(k, P)$ .

Если разделитель первого типа сети  $\mathcal{N}$  равен  $n = 0$ , то это означает, что основной кортеж нейронов сети  $\mathcal{N}$  имеет структуру непригодную для того, чтобы представить данную сеть в виде произведения некоторых двух сетей из группоида  $\text{SAN}(k, P)$  (см. равенство (4.1)).

При  $n \neq 0$  выполняется необходимое (но не достаточное) условие того, что нейронную сеть  $\mathcal{N}$  можно представить в виде произведения  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ , где  $n(\mathcal{N}_1) = n$ .

Не сложно увидеть, что все однослойные нейронные сети из  $\text{SAN}(k, P)$  являются простыми элементами группоида  $\text{SAN}(k, P)$  (обратное не верно). Последнее вытекает из того, что группоид для любого  $\mathcal{N}$  из  $\text{SAN}(k, P)$  выполняется неравенство  $n(\mathcal{N}) \geq 1$  и равенство  $n(\mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2) = n(\mathcal{N}_1) + n(\mathcal{N}_2)$ .

Далее введем объект, который позволит сформулировать необходимое и достаточное условие того, что нейронную сеть можно представить в виде композиции двух сетей (см. ниже предложение 5.2 пункт 3).

**О п р е д е л е н и е 5.2.** Пусть нейронная сеть  $\mathcal{N}$  принадлежит  $\text{SAN}(k, P)$ . Тогда определим множество  $\text{Del}_2(\mathcal{N})$ , состоящее из всевозможных натуральных чисел  $n$  (и только из них), таких что одновременно выполняются условия:

1) сеть  $\mathcal{N}$  имеет вид  $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, M_{n+1}, \dots, M_d, i, o, f, g, l)$ ;

2) выполняются равенства  $|M_n| = |M_{n+1}| = k$ ;

3) выполняются неравенства  $n \geq 1$  и  $d \geq n + 1$ ;

4) в каждый нейрон  $u$ , входящий в  $M_{n+1}$ , входит только одна синаптическая связь с весом 1, а все остальные синаптические связи, входящие в нейрон  $u$ , имеют нулевой вес;

5) из каждого нейрона  $v$ , принадлежащего  $M_n$ , выходит только одна синаптическая связь с весом 1, а все остальные синаптические связи, выходящие из нейрона  $v$ , имеют нулевой вес.

Множество  $\text{Del}_2(\mathcal{N})$  будем называть *разделителем второго типа* сети  $\mathcal{N}$ .

Рассмотрим условия на число  $n$  из определения 5.2. Условие 2) продиктовано тем, что в множество  $\text{SAN}(k, P)$  входят только нейронные сети, у которых во входном слое  $k$  нейронов и в выходном слое  $k$  нейронов. Условие 3) продиктовано тем, что в множество  $\text{SAN}(k, P)$  входят нейронные сети, у которых число слоев строго больше 1. Условия 4) и 5) объясняются определением структурного отображения  $f_3$  результирующей сети из определения 4.1.

Вхождение некоторого натурального числа  $n$  в разделитель второго типа сети  $\mathcal{N}$  является необходимым условием для того, чтобы нейронную сеть  $\mathcal{N}$  можно было разбить в произведение  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ , где  $n(\mathcal{N}_1) = n$ . Из определений 4.1, 5.1 и 5.2 вытекает

**Предложение 5.2.** *Выполняются следующие утверждения:*

- 1) Если  $\text{Del}_2(\mathcal{N}) = \emptyset$ , то  $\mathcal{N}$  – простой элемент группоида  $\text{SAN}(k, P)$ .
- 2) Если  $\text{Del}_1(\mathcal{N}) \notin \text{Del}_2(\mathcal{N})$ , то  $\mathcal{N}$  – простой элемент группоида  $\text{SAN}(k, P)$ .
- 3) Сеть  $\mathcal{N}$  не является простым элементом группоида  $\text{SAN}(k, P)$  тогда и только тогда, когда разделитель первого типа является элементом разделителя второго типа.

Пусть  $\Pi(\text{SAN}(k, P))$  – множество всех простых элементов группоида  $\text{SAN}(k, P)$ . Тогда из пункта 3) предложения 5.2 вытекает

**Предложение 5.3.** *Справедливо равенство*

$$\Pi(\text{SAN}(k, P)) = \{\mathcal{N} \in \text{SAN}(k, P) \mid \text{Del}_1(\mathcal{N}) \notin \text{Del}_2(\mathcal{N})\}.$$

**Лемма 5.1.** *Для каждого элемента  $\mathcal{N}$  группоида  $\text{SAN}(k, P)$  выполняется условие  $|\Theta(\mathcal{N})| \leq 1$ .*

**Доказательство.** Если  $\mathcal{N}$  – простой элемент группоида  $\text{SAN}(k, P)$ , то  $|\Theta(\mathcal{N})| = 0$ . В этом случае неравенство из утверждения выполняется.

Пусть  $|\Theta(\mathcal{N})| > 0$ . Тогда существуют сети

$$\mathcal{N}_1 = (M_1, \dots, M_n, i_1, o_1, f_1, g_1, l_1), \quad \mathcal{N}_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i_2, o_2, f_2, g_2, l_2)$$

из множества  $\text{SAN}(k, P)$  такие, что  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ . Предположим, что существуют сети  $\mathcal{N}'_1$  и  $\mathcal{N}'_2$  такие, что  $\mathcal{N} = \mathcal{N}'_1 \odot \mathcal{N}'_2$  и  $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \neq (\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2)$ . В этом случае выполняются равенства

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2 = (L_1(M_1), \dots, L_1(M_n), L_2(M'_1), \dots, L_2(M'_d), i_3, o_3, f_3, g_3, l_3) = \mathcal{N}'_1 \odot \mathcal{N}'_2,$$

которые вместе с определением операции ( $\odot$ ) показывают, что

$$\mathcal{N}'_1 = (M_1, \dots, M_n, i'_1, o'_1, f'_1, g'_1, l'_1), \quad \mathcal{N}'_2 = (M'_1, \dots, M'_d, i'_2, o'_2, f'_2, g'_2, l'_2).$$

Из определения операции ( $\odot$ ) следует, что структурные отображения сети  $\mathcal{N}'_i$  совпадают со структурными отображениями сети  $\mathcal{N}_i$  при  $i = 1, 2$ . Поэтому  $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = (\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2)$ , следовательно, имеем противоречие, которое дает условие  $|\Theta(\mathcal{N})| = 1$ . Лемма доказана.

Далее под символом ( $\setminus$ ) будем понимать разность двух множеств.

**Лемма 5.2.** *Группоид  $\text{SAN}(k, P)$  порождается своим множеством простых элементов.*

**Доказательство.** Истинность этого утверждения вытекает из существования процедуры, которая за конечное число шагов позволяет представить любую сеть из группоида  $\text{SAN}(k, P)$  в виде алгебраического выражения, записанного с помощью скобок, операции  $(\odot)$  и простых элементов группоида  $\text{SAN}(k, P)$  (далее это алгебраическое выражение будем называть *разложением через простые элементы*). Опишем указанную процедуру.

**Этап 1.** Пусть  $\mathcal{N}$  – произвольная сеть из  $\text{SAN}(k, P)$ . Если  $\mathcal{N}$  – простой элемент группоида, то оставляем его без изменений. Если  $\mathcal{N}$  – сеть из множества  $\text{SAN}(k, P) \setminus \Pi(\text{SAN}(k, P))$ , то данная сеть раскладывается в произведение  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \odot \mathcal{N}_2$ , где  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  – подходящие сети (единственные в силу леммы 5.1) такие, что выполняются неравенства  $n(\mathcal{N}_1) < n(\mathcal{N})$  и  $n(\mathcal{N}_2) < n(\mathcal{N})$ .

**Этап 2.** Если обе сети  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  являются простыми элементами группоида, то фиксируем это (т. е. записываем полученное выражение). В этом случае мы получили, что сеть  $\mathcal{N}$  принадлежит  $\langle \Pi(\text{SAN}(k, P)) \rangle$ , следовательно, получим разложение этой сети через простые элементы.

**Этап 3.** Если одна или обе из сетей  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  окажутся не простыми элементами группоида  $\text{SAN}(k, P)$ , то будем раскладывать их в произведения подходящих сетей (применяем к этим сетям первый этап процедуры). Данный процесс продолжаем, пока не получим разложение сети  $\mathcal{N}$  через простые элементы.

Построенный процесс обязательно приведет к получению разложения сети  $\mathcal{N}$  через простые элементы. Каждый раз, когда мы раскладываем некоторую сеть  $\mathcal{A}$  в произведение подходящих сетей  $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}''_2$ , то число слоев в сетях  $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}''_2$  будет строго меньше, чем число слоев в сети  $\mathcal{A}$ . Поскольку для каждой сети  $\mathcal{A}$  из  $\text{SAN}(k, P)$  число слоев  $n(\mathcal{A})$  – конечное число и все сети  $\mathcal{T}$  из  $\text{SAN}(k, P)$  с условием  $n(\mathcal{T}) \leq 1$  являются простыми элементами, то за конечное число шагов можно получить разложение любой сети через простые элементы. Лемма доказана.

**Свободный группоид слов в заданном алфавите.** Будем говорить, что  $G$  – *свободный группоид слов* со свободной системой образующих  $X$ , если элементами группоида  $G$  являются слова в алфавите  $X$ , где под словом понимают любую конечную упорядоченную систему элементов из  $X$  с любыми повторениями, причем в этой системе задано распределение скобок (каждый символ считается взятым в скобки, а затем скобки расставлены так, что каждый раз перемножаются только две скобки).

В свободном группоиде слов любая пара различных слов дает пару различных элементов, а множество свободных образующих является множеством всех простых элементов данного свободного группоида. Например, если  $X = \{a, b\}$  – система свободных образующих, то слова  $a * b * a, b * b * b$  не являются элементами свободного группоида (т. к. нет корректной расстановки скобок), а слова  $(a) * (b * a), (a * b) * (a)$  являются элементами свободного группоида (кроме того, данные слова различны).

Всякий группоид  $G$ , который изоморфен свободному группоиду слов, будем называть *свободным группоидом*. Если группоид  $G$  порождается множеством всех своих простых элементов и каждый непростой элемент этого группоида можно только одним способом представить в виде произведения двух элементов этого группоида, то  $G$  – свободный группоид (в этом случае любое отображение множества простых элементов группоида  $G$  в группоид  $G$  продолжается до эндоморфизма группоида  $G$ ).

**Теорема 5.1.** *Группоид  $\text{SAN}(k, P)$  является свободным группоидом со свободной системой образующих  $\Pi(\text{SAN}(k, P))$ .*

**Доказательство.** В силу леммы 5.2 мы можем считать, что  $\Pi(\text{SAN}(k, P))$  – система образующих группоида  $\text{SAN}(k, P)$ . Лемма 5.1 показывает, что всякий элемент группоида  $\text{SAN}(k, P)$  либо простой элемент, либо единственным образом раскладывается в произведение элементов этого группоида. Следовательно, два различных слова в алфавите  $\Pi(\text{SAN}(k, P))$  являются различными элементами в группоиде  $\text{SAN}(k, P)$ . Поэтому множество  $\Pi(\text{SAN}(k, P))$  является свободной системой образующих группоида  $\text{SAN}(k, P)$ . Теорема доказана.

**Благодарности.** Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки России (Соглашение 075-02-2024-1429).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головкин В. А., Краснопрошин В. В. Нейросетевые технологии обработки данных [учеб. пособие] // Минск: Изд-во Беларус. гос. ун-та. 2017. 263 с.
2. Горбань А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
3. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики: перцептрон и теория механизмов мозга [пер. с англ.] // М.: Мир. 1965. 478 с.
4. Созыкин А. В. Обзор методов обучения глубоких нейронных сетей // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2017. Т. 6, № 3. С. 28–59. DOI: <https://doi.org/10.14529/cmse170303>
5. Литаврин А. В. Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 130–145. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-130-145>
6. Litavrin A. V. On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // Bulletin of Irkutsk State University. Series «Mathematics». 2022. Vol 39. pp. 111–126. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111>
7. Слеповичев И. И. Алгебраические свойства абстрактных нейронных сетей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: «Математика. Механика. Информатика». 2016. Т. 16, № 1. С. 96–103. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-96-103>
8. Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи математических наук. 1961. Т. 16, № 5. С. 3–62.

*Поступила 13.03.2024; доработана после рецензирования 31.04.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. V. A. Golovko, V. V. Krasnoproshin, *Neural network technologies for data processing*, Belarus. State University Publ., Minsk, 2017 (In Russ.), 263 p.
2. A. N. Gorban, “Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks”, *Siberian Journal of Computational Mathematics*, **1:1** (1998), 11–24 (In Russ.).
3. F. Rosenblatt, *Principles of neurodynamics: the perceptron and the theory of brain mechanisms*, World, Moscow, 1965 (In Russ.), 478 pp. p.
4. A. V. Sozykin, “Review of methods for training deep neural networks”, *Bulletin of the South Ural State University. Series “Computational Mathematics and Informatics”*, **6:3** (2017), 28–59 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.14529/cmse170303>
5. A. V. Litavrin, “Endomorphisms of finite commutative groupoids associated with multilayer feed-forward neural networks”, *Tr. IMM Ural Branch RAS*, **27:1** (2021), 130–145 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-130-145>
6. A. V. Litavrin, “On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*, **39** (2022), 111–126. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.111>
7. I. I. Slepovichev, “Algebraic properties of abstract neural networks”, *News of Saratov University. New Series. Series “Mathematics. Mechanics. Computer Science”*, **16:1** (2016), 96–103 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-96-103>
8. V. M. Glushkov, “Abstract theory of automata”, *Advances in Mathematical Sciences*, **16:5** (1961), 3–62 (In Russ.).

*Submitted 13.03.2024; Revised 31.04.2024; Accepted 29.05.2024*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.123-142

*Оригинальная статья*

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.853.62

## Модифицированный проекционный обобщённый двухточечный двухэтапный экстраградиентный квазиньютоновский метод решения седловых задач

В. Г. Малинов

*Независимый исследователь*

**Аннотация.** Цель работы состоит в полном исследовании нового, указанного в заголовке статьи метода, предназначенного для решения седловой задачи с выпукло-вогнутой непрерывно дифференцируемой седловой функцией, определенной на выпуклом замкнутом подмножестве конечномерного евклидова пространства и имеющей “овражные” гиперповерхности уровней. В статье приведен краткий обзор отечественных публикаций об исследовании новых проекционных градиентных методов решения седловой задачи, содержится описание и математическая постановка седловой задачи, сведения о методе решения задачи, некоторые необходимые вспомогательные неравенства, доказательство сходимости и оценок скорости сходимости метода. Так же приведены итерационные формулы еще одного перспективного метода решения седловых задач для выпукло-вогнутых дифференцируемых функций, обоснование которого может быть проведено аналогично данному для исследованного в статье метода. Новые вспомогательные неравенства, представляющие самостоятельную ценность также и для обоснования других методов исследования операций, дополняют необходимый для обоснования сходимости и оценки скорости сходимости седлового метода математический аппарат выпуклого анализа. С помощью приведённых вспомогательных неравенств и инструментария выпуклого анализа, сначала доказана сходимость седлового метода для выпукло-вогнутых гладких функций с Липшицевыми частными градиентами. При дополнительных условиях, для дважды непрерывно дифференцируемых седловых функций, доказаны и сверхлинейная, и квадратичная скорости сходимости седлового метода.

**Ключевые слова:** выпукло-вогнутая седловая функция, седловая задача, проекционный обобщённый двухточечный экстраградиентный квазиньютоновский седловой метод

**Для цитирования:** Малинов В. Г. Модифицированный проекционный обобщённый двухточечный двухэтапный экстраградиентный квазиньютоновский метод решения седловых задач // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 123–142. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.123-142>

*Об авторе:*

**Малинов Валериан Григорьевич**, канд. физ.-мат. наук, независимый исследователь, ORCID: <http://orcid.org/0009-0007-1758-9770>, [vgmalinov@mail.ru](mailto:vgmalinov@mail.ru)



MSC2020 49N4

# Modified projection generalized two-point two-stage extragradient quasinevton method for saddle point problems

V. G. Malinov

*Independent researcher*

**Abstract.** The purpose of this work is to investigate a new method mentioned in the article's name. This method is designed for solving saddle problems with convexo-concave differentiable function that is defined on a convex closed subset of some finite-dimensional euclidean space and has "ravine" level hypersurfaces. The paper contains a brief survey of native publications devoted to new projection gradient methods for solving saddle problems. A mathematical statement of a saddle problem, information about solution method, some auxiliary inequalities, and method's convergence are discussed in the article as well. Moreover, iterative formulas are exemplified for another perspective saddle method for convexo-concave differentiable saddle functions, which may be validated as well as formulas proved in this work. New auxiliary inequalities complete mathematical apparatus of convex analysis for justification of convergence and rate of convergence and have value also for justification of another methods of operations research. By using obtained inequalities, convex analysis and numerical mathematics, convergence of the saddle method for convexo-concave smooth saddle functions with Lipschitz partial gradients is proved. Under supplementary conditions, for twice continuously differentiable saddle functions, superlinear and quadratic rate of convergence of saddle method are proved, too.

**Keywords:** convexo-concave saddle function, saddle point problem, projection generalized two-point two-stage extragradient quasinevton saddle method

**For citation:** V. G. Malinov. Modified projection generalized two-point two-stage extragradient quasinevton method for saddle point problems . *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 123–142. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.123-142>

*About the author:*

**Valerian G. Malinov**, Ph.D. (Phys.-Math.), Independent researcher, ORCID: <http://orcid.org/0009-0007-1758-9770>, [vgmalinov@mail.ru](mailto:vgmalinov@mail.ru)

## 1. Введение

В интенсивно развивающемся разделе вычислительной математики востребованы как непрерывные, так и итеративные методы решения седловых и равновесных задач. Мы рассматриваем итеративные проекционные методы отыскания седловых точек (ИПМОСТ). Напомним, что по определению, для всякой функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ , с непустыми выпуклыми и замкнутыми множествами  $Q \subset E^n$  и  $U \subset E^m$ , в евклидовых пространствах  $E^n$  и  $E^m$ , точку  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U \subset E^n \times E^m$ , называют седловой точкой функции, если эта точка есть решение системы неравенств

$$\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u} \in U. \quad (1.1)$$

Седловой задачей называют задачу отыскания седловой точки. Седловым методом называют метод численного решения седловой задачи.

Известно, что к решению седловой задачи приводят экстремальные задачи математической физики, теории игр, математической экономики, оптимального управления и другие. Часто ИПМОСТ строятся на основе известных методов оптимизации (см., например, [1] – [9]). В работах [1] – [3], [7] имеются обзоры, в [8] – [11] – краткие обзоры, публикаций об исследовании методов решения седловых задач.

Простейший ИПМОСТ — это известный метод проекции градиента (МППГ) седловой, который решает для выпукло-вогнутых гладких функций  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  седловые задачи с хорошими (“неовражными”) гиперповерхностями уровней.

В связи с нуждами решения седловых задач науки и приложений, разрабатываются и обосновываются высокоскоростные методы их решения для седловых функций с “овражными” гиперповерхностями уровней. Методы переменной метрики (МППМ) для задач минимизации “овражных” функций характеризуются хорошей локальной скоростью сходимости, и при их реализации для седловых функций с овражными гиперповерхностями уровней ожидаются преимущества перед другими седловыми методами (см., например, [7], [11]) (хотя бы в случаях не самых сложных “оврагов” седловых функций).

Ввиду этого на основе идеи непрерывного “овражного” МППГ первого порядка с переменной метрикой (НМППГМ) для задач минимизации, предложенного в работе [4], построен, авторами работы [4] и их учениками, ряд методов сначала для решения задач минимизации, затем равновесных. Например, в работе [5] исследован НМППГМ второго порядка для решения “овражных” задач минимизации функции  $f(\mathbf{x})$ , отличающийся от метода первого порядка из работы [4] дифференциальным оператором второго порядка. Доказана сходимость этого метода, а также двух регуляризованных версий метода для решения неустойчивых задач минимизации. В [4], [5] использован оператор проектирования  $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))}$  в переменной метрике  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ , в гильбертовом пространстве  $H$ . Метрика определена скалярным произведением  $(\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))\mathbf{y}, \mathbf{y})$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ .

В работе [6] идея использования переменной метрики из [4] продолжена с дифференциального на итеративный метод минимизации функций с гиперповерхностями уровней “овражной структуры”, а именно, на предложенный в [6] проекционный обобщённый двухточечный двухэтапный экстраградиентный метод квазиньютоновский (ПОДЭМК) минимизации “овражных” функций  $f(\mathbf{x})$ , с оператором  $P_Q$  проектирования на выпуклое замкнутое множество  $Q$  в исходной метрике евклидова пространства  $E^n$ .

Мы исследуем в этой работе ИПМОСТ для “овражных” седловых функций  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  с операторами  $P_Q$  и  $P_U$  проектирования на выпуклые замкнутые множества  $Q$  и  $U$  в исходной метрике евклидовых пространств  $E^n$  и  $E^m$ . В работе [7] предложен и исследован ИПМОСТ для “овражной” седловой функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in Q \times U$ , построенный на основе ПОДЭМК минимизации из [6], так называемый ПОДЭМК седловой (ПОДЭМКС), доказана его сходимость и линейная скорость сходимости для выпукло-вогнутых седловых функций, без предположения о сильной выпукло-вогнутости седловой функции.

В работах [8]–[10] были исследованы другие итеративные методы решения седловых и равновесных задач; в [11] исследован непрерывный проекционный обобщённый экстраградиентный квазиньютоновский метод второго порядка для решения седловых задач; доказана его сходимость и экспоненциальная скорость сходимости для выпукло-

вогнутых функций.

Целью предлагаемой работы является исследование ПОДЭМКС модифицированного (ПОДЭМКСМ), построенного на основе ПОДЭМКС из работы [7], для решения седловой задачи (1.1) со сложными функциями  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , имеющими "овражные" гиперповерхности уровней. Для ПОДЭМКСМ доказана сходимости для выпукло-вогнутых функций с Липшицевыми частными градиентами и сверхлинейная, и квадратичная, скорости сходимости для дважды непрерывно дифференцируемых седловых функций, при дополнительных условиях.

Сформулируем математическую постановку седловой задачи. Седловые задачи для конкретных математических моделей решаются при своих требованиях (к пространствам, множествам и функциям), выражающихся в постановке задачи и влияющих на метод её решения; мы здесь предполагаем следующие:

- а) Пусть множества  $Q \subset E^n$ ,  $U \subset E^m$ ,  $Q \times U \subset E^n \times E^m$  непустые выпуклые и замкнутые;
- б) выпукло-вогнутая функция  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  с "овражными" гиперповерхностями уровней определена на множестве  $W = Q \times U \subset E^n \times E^m$  выпукла по  $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ , и вогнута по  $\mathbf{u} \in U \subset E^m$ , то есть для всех фиксированных  $\mathbf{u} \in U$  функция  $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  выпукла на  $Q \subset E^n$ , а  $\forall \mathbf{x} \in Q$  фиксированного функция  $h(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  вогнута на  $U \subset E^m$ ;
- в) множество седловых точек  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  на  $W \subset E^n \times E^m$  непусто,  $W_* = Q_* \times U_* \neq \emptyset$ ;
- г) частные градиенты функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  Липшицевы на  $Q \times U$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_x(\mathbf{x}', \mathbf{u})\| &\leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad \mathbf{u} \in U, \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in Q; \\ \|\nabla\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}')\| &\leq L^0\|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|, \quad \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $L > 0$ ,  $L^0 > 0$  – константы Липшица,  $\nabla\varphi_x$  – частный градиент,  $\nabla^2\varphi_{xx}$  – гессиан по первому аргументу,  $\nabla\varphi_u$  – частный градиент,  $\nabla^2\varphi_{uu}$  – гессиан по второму аргументу. Скаляры индексы  $xx$  и  $uu$  означают индексы для элементов матриц Гессе, соответственно,  $x_i x_j$ ,  $i \in [1 : n]$ ,  $j \in [1 : n]$ ,  $u_i u_j$ ,  $i \in [1 : m]$ ,  $j \in [1 : m]$ .

В терминах оператора проектирования седловая точка  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_*$  задачи (1.1) характеризуется равенствами [3]

$$\mathbf{x}^* = P_Q [\mathbf{x}^* - \tau \nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)], \quad \mathbf{u}^* = P_U [\mathbf{u}^* - \tau \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)], \quad \tau > 0, \quad (1.3)$$

где  $P_Q$  и  $P_U$  – операторы проектирования на множества  $Q$  и  $U$ .

## 2. Метод решения задачи

Схема решение задачи (1.1)-(1.3) ПОДЭМКСМ строится следующим образом:

пусть  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0), (\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^0), (\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1) \in E^n \times E^m$  – начальные точки такие, что

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &> \varphi(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^0), \quad \varphi(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^0) < \varphi(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1); \\ \text{I этап: } \mathbf{y}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}, \quad \mathbf{v}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}, \\ \mathbf{z}^k &= P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k), \quad \mathbf{w}^k = P_U(\mathbf{u}^k + \alpha_k \mathbf{v}^k); \\ \text{II этап: } \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q(\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)), \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U(\mathbf{w}^k + \lambda_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)), \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\alpha_k, \beta_k, \lambda_k$  – положительные параметры метода; при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in E^n$   $\mathbf{A}(\mathbf{x}): E^n \rightarrow E^n$  и  $\forall \mathbf{u} \in E^m$  фиксированном  $\mathbf{B}(\mathbf{u}): E^m \rightarrow E^m$  – положительно определённые самосопряжённые операторы, изменяющие метрику пространства.

Оператор  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E^n$  (в (2.1)  $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(\mathbf{z}^k)$ ), и оператор  $\mathbf{B}(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in E^m$  (в (2.1)  $\mathbf{B}_k = \mathbf{B}(\mathbf{w}^k)$ ) таковы, что:

$$m\|\mathbf{v}\|^2 \leq (\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq M\|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \mathbf{v}, \mathbf{x} \in Q, \tag{2.2}$$

$$p\|\mathbf{v}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq P\|\mathbf{v}\|^2, \quad 0 < p \leq P, \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \in U. \tag{2.3}$$

Обратные операторы таковы, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2/M &\leq (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{v}\|^2/m, \quad \mathbf{v}, \mathbf{x} \in Q; \\ \|\mathbf{v}\|^2/P &\leq (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{v}\|^2/p, \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \in U. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для ПОДЭМКС (2.1) характеристики (1.3) седловой точки запишутся в виде

$$\mathbf{x}^* = P_Q[\mathbf{x}^* - \beta \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla \varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)], \quad \beta > 0, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{u}^* = P_U[\mathbf{u}^* + \lambda \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u}^*) \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)], \quad \lambda > 0. \tag{2.6}$$

**З а м е ч а н и е 2.1.** Отметим, что критерии проекций по первой и второй переменным соответственно будут по евклидовой исходной метрике (см. [13], с. 189):

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{z} \in Q, \quad (\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in U, \tag{2.7}$$

а при использовании в (2.1) операторов проектирования в новой метрике критериями проекций были бы неравенства

$$(\mathbf{A}(\mathbf{z})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{x} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in Q, \quad (\mathbf{B}(\mathbf{z})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in U,$$

но здесь мы пользуемся (2.7), ибо в (2.1) операторы проектирования в исходной метрике.

### 3. Вспомогательные утверждения

Неравенства в леммах дополняют необходимый для доказательства сходимости и скорости сходимости метода математический аппарат.

**Л е м м а 3.1.** Пусть  $\forall \mathbf{u}^k \in U \subset E^m$  из (2.1) выпуклая функция  $g(\mathbf{x}) \in C^{2,1}(Q)$  удовлетворяет соотношениям

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\nabla\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k), \quad \|\nabla g(\mathbf{w}) - \nabla g(\mathbf{v})\| \leq K\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|, \quad \mathbf{w}, \mathbf{v} \in Q, \quad K = \frac{L}{m}.$$

Тогда

$$(\nabla g(\mathbf{x}^*), \mathbf{z} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \mathbf{z} \in Q, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \quad (3.1)$$

Доказательство дано для работы [7].

**Л е м м а 3.2.** Пусть  $\forall \mathbf{x}^k \in Q \subset E^n$  из (2.1) вогнутая функция  $h(\mathbf{u}) \in C^{2,1}(U)$  удовлетворяет соотношениям

$$\nabla h(\mathbf{u}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u})\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}), \quad \|\nabla h(\mathbf{u}) - \nabla h(\mathbf{v})\| \leq R\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \quad R = \frac{L^0}{2m}.$$

Тогда

$$(\nabla h(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^* - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \mathbf{w} \in U, \quad \mathbf{u}^* \in U^*. \quad (3.2)$$

Доказательство дано для работы [7].

**Л е м м а 3.3.** Для всякой тройки точек  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^n$  (или  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^m$ ) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Доказательство приведено, например, в работе [6].

#### 4. Сходимость ПОДЭМКСМ

**Т е о р е м а 4.1.** Пусть выполнены: предположения а)– г) из п. 1 о задаче (1.1) и функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ; неравенства (2.2) – (2.4); параметры константы ПОДЭМКСМ (2.1) таковы:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1/3, 0 < \beta < 2(1 - 3\alpha)m/[L(1 - \alpha)], \\ 0 < \lambda < 4p(1 - 3\alpha)/[L^0(1 - \alpha)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда процесс (2.1), (4.1) по норме пространства  $E^n \times E^m$  сходится к решению  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_*$  задачи (1.1), то есть  $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$ ,  $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}^* \in U^*$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Представим каждое уравнение из (2.1), пользуясь (2.7), в виде вариационного неравенства, тогда этот итерационный процесс запишется в форме:

$$(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha_k \mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k) \geq 0, \quad \mathbf{v} \in Q, \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k + \beta_k \mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}) \geq 0, \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^k - \alpha_k \mathbf{v}^k, \mathbf{u} - \mathbf{w}^k) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in U, \quad (4.4)$$

$$(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k - \lambda_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k), \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}) \geq 0. \quad (4.5)$$

Далее почти везде обозначим  $\alpha_k = \alpha$ ,  $\beta_k = \beta$ ,  $\lambda_k = \lambda$ .

Здесь сначала преобразуем (4.2), (4.3), пользуясь свойствами скалярного произведения, формулой (2.1) и вспомогательными неравенствами.

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и нерасширяющим свойством оператора проектирования ([13], с. 190), из (4.2) имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 &\leq \alpha(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k) \leq \alpha\|\mathbf{y}^k\|\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\| = \\ &= \alpha\|\mathbf{y}^k\|\|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{x}^k)\| \leq \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Первое слагаемое в неравенстве, следующем из (4.3) с учётом леммы 3.1,

$$(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k) \leq \beta(\nabla g(\mathbf{z}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}), \quad (4.7)$$

где  $\nabla g(\mathbf{z}^k) = [A(\mathbf{z}^k)]^{-1}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)$ ,  $\mathbf{z}^k \in Q$ ,  $\mathbf{u}^k \in U$ , преобразуем с помощью тождества

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in E^n. \quad (4.8)$$

Получим

$$-(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k) = -(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2) / 2.$$

С учётом этого преобразования из (4.7) следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\|^2 \leq 2\beta(\nabla g(\mathbf{z}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}). \quad (4.9)$$

В (4.9) преобразуем третье слагаемое, пользуясь нерастягивающим свойством оператора проектирования,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 &= \|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{x}^*)\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + 2\alpha(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k) + \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2, \end{aligned}$$

и здесь преобразуем среднее слагаемое с помощью (4.8),

$$2\alpha(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k) = \alpha(\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2),$$

тогда

$$-\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq -(1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - (\alpha + \alpha^2)\|\mathbf{y}^k\|^2.$$

Правую часть (4.9) сложим с неравенством (3.1) из леммы 3.1 при  $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{k+1}$ , умножив на  $2\beta$  и, с учётом константы Липшица  $K = \frac{L}{m}$  для градиента гладкой выпуклой функции  $g(\mathbf{x})$  из леммы 1, применим неравенство для таких функций ([12], гл. 1, с. 25)

$$2\beta(\nabla g(\mathbf{z}^k) - \nabla g(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}) \leq 2\beta\frac{K}{4}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 = \frac{L\beta}{2m}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2,$$

$\mathbf{z}, \mathbf{x}^{k+1} \in Q$ ,  $\mathbf{x}^* \in Q_*$ . Подставив эти оценки слагаемых, из (4.9) получим,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - \frac{L\beta}{2m})\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \\ &\leq (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\|^2 + (\alpha^2 + \alpha)\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В (4.10) второе слагаемое преобразуем с помощью левого неравенства (3.3), затем (4.6). Получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 &\geq (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 - \alpha^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 \geq \\ &\geq (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - (1 - \alpha)\alpha\|\mathbf{y}^k\|^2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\left(1 - \frac{L\beta}{2m}\right)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq \left(1 - \frac{L\beta}{2m}\right)(1 - \alpha) (\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{y}^k\|^2).$$

Подставив это преобразование в (4.10), получим неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \\ \leq (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \geq 1, \quad (4.11) \end{aligned}$$

где  $a_1 = (1 - \alpha)\left(1 - \frac{L\beta}{2m}\right)$ ,  $a_2 = 2\alpha - \frac{L\beta}{2m}(\alpha - \alpha^2)$ ,  $0 < \beta < \frac{2m}{L}$ .

Теперь рассмотрим неравенства (4.4) и (4.5). Представим неравенство (4.5) в форме

$$(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) \leq \lambda (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*), \quad (4.12)$$

где по лемме 3.2  $\nabla h(\mathbf{w}^k) = \mathbf{B}_k^{-1}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)$  и, поскольку

$$(\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) = -(\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^k) \smile (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k - \mathbf{u}^{k+1}),$$

для преобразования получим неравенство

$$(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) + \lambda (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^k) + \lambda (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k - \mathbf{u}^{k+1}) \leq 0. \quad (4.13)$$

С помощью нерасширяющего свойства оператора проектирования ([13], с. 190) и неравенства Коши-Буняковского, из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^k\|^2 &\leq \alpha(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k - \mathbf{u}^k) \leq \alpha\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^k\| \leq \\ &\leq \alpha\|\mathbf{v}^k\|\|P_U(\mathbf{w}^k) - P_U(\mathbf{u}^k)\| \leq \\ &\leq \alpha\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{u}^k + \alpha\mathbf{v}^k - \mathbf{u}^k\| = \alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Первое слагаемое из (4.13) преобразуем с помощью тождества (4.8),

$$-(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k) = -(\|\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^k\|^2 - \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2) / 2.$$

Ко второму и третьему слагаемым из (4.13) применим соответственно неравенства (см. [14], гл. 2, с.44; и [13], гл. 2, с. 93)

$$\begin{aligned} (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^k) &\geq h(\mathbf{u}^*) - h(\mathbf{w}^k), \\ (\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k \smile \mathbf{u}^{k+1}) &\geq h(\mathbf{w}^k) - h(\mathbf{u}^{k+1}) - \frac{R}{2}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 \end{aligned}$$

здесь число  $R = L^0/(2p)$  определено в лемме 3.2.

Приведем подобные, учитывая условие вогнутости  $h(\mathbf{u}^*) - h(\mathbf{u}^{k+1}) \geq 0$  и лемму 3.2, правая часть (4.12) с учётом (4.13) преобразуется к виду

$$\lambda(\nabla h(\mathbf{w}^k), \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) \leq \lambda \frac{R}{2} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 = \frac{L^0 \lambda}{4p} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2.$$

Тогда из (4.12) и, следовательно, (4.13), следует,

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + \left(1 - \frac{L^0 \lambda}{4p}\right) \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 - \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\|^2 \leq 0. \quad (4.15)$$

Преобразуем здесь второе слагаемое с помощью левого неравенства (3.3) при  $\varepsilon = \alpha$ , учтём оценку (4.14),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 &\geq (1 - \alpha) \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + (1 - \alpha^{-1}) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{w}^k\|^2 \geq \\ &\geq (1 - \alpha) \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + (1 - \alpha^{-1}) \alpha^2 \|\mathbf{v}^k\|^2, \\ b \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 &\geq (1 - \alpha) b \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 - (1 - \alpha) \alpha b \|\mathbf{v}^k\|^2, \end{aligned}$$

$b = 1 - \frac{L^0 \lambda}{4p}$ , а третье слагаемое преобразуем с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования и (4.8),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\|^2 &\leq \|P_U(\mathbf{u}^k + \alpha \mathbf{v}^k) - P_U(\mathbf{u}^*)\|^2 \leq \|\mathbf{u}^k + \alpha \mathbf{v}^k - \mathbf{u}^*\|^2 = \\ &= \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + 2\alpha(\mathbf{v}^k, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*) + \alpha^2 \|\mathbf{v}^k\|^2 \leq \\ &\leq (1 + \alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + (\alpha^2 + \alpha) \|\mathbf{v}^k\|^2 - \alpha \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2, \\ -\|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\|^2 &\geq -(1 + \alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 - (\alpha^2 + \alpha) \|\mathbf{v}^k\|^2 + \alpha \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2, \end{aligned}$$

где использована получаемая с помощью (4.8) оценка

$$2\alpha(\mathbf{v}^k, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*) = -2\alpha(\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*) = \alpha \|\mathbf{v}^k\|^2 - \alpha \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 + \alpha \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2.$$

С учётом этих преобразований из (4.15) получим,

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + a_3 \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + \alpha \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \leq (1 + \alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + a_4 \|\mathbf{v}^k\|^2, \quad k \geq 1, \quad (4.16)$$

где  $a_3 = 1 - \alpha - \frac{L^0(1-\alpha)\lambda}{4p}$ ,  $a_4 = 2\alpha - \frac{L^0\lambda}{4p}(\alpha - \alpha^2)$ ,  $0 < \lambda < \frac{4p}{L^0}$ .

Сложив неравенства (4.11) и (4.16), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + a_1 \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ + a_3 \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + \alpha(\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2) \leq \\ \leq (1 + \alpha)(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2) + a_2 \|\mathbf{y}^k\|^2 + a_4 \|\mathbf{v}^k\|^2, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Просуммируем (4.17) от  $k = 1$  до  $k = m$ ,  $m \geq 1$ , тогда

$$\begin{aligned} \alpha(\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2) + \|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ + a_1 \|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + a_3 \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m\|^2 + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} ((a_1 - a_2) \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - a_4) \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2) \leq \\ \leq a_2 \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|^2 + a_4 \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0\|^2 + \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ + \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*\|^2 + \alpha(\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^*\|^2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $a_1 - a_2 = 1 - 3\alpha - \frac{L(1-\alpha)^2\beta}{2m} > 0$ ,  $a_3 - a_4 = 1 - 3\alpha - \frac{L^0\lambda}{4p}(1-\alpha)^2 > 0$ ,  $0 < \alpha < 1/3$ ,  $0 < \beta < \frac{2m(1-3\alpha)}{L(1-\alpha)^2}$ ,  $0 < \lambda < \frac{4p(1-3\alpha)}{L^0(1-\alpha)^2}$ .

К первым двум, пятому и шестому слагаемым правой части (4.18) применим правое неравенство (3.3) при  $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} a_2\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|^2 &\leq 2a_2(\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2), \\ a_4\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0\|^2 &\leq 2a_4(\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2), \\ \alpha(\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^*\|^2) &\leq \\ &\leq 2\alpha(\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m+1}\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2). \end{aligned}$$

Тогда из (4.18) следует,

$$\begin{aligned} (1 - 2\alpha) (\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2) + \\ + (a_1 - 2\alpha)\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m\|^2 + (a_3 - 2\alpha)\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m\|^2 + \\ + \sum_{k=1}^{k=m-1} ((a_1 - a_2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - a_4)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2) \leq \\ \leq a_5\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_6\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2 + a_7\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_8\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*\|^2, \quad (4.19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_5 = 2a_2 - \alpha = 3\alpha - \frac{L(\alpha - \alpha^2)\beta}{m} > 0, \\ a_6 = 2a_4 - \alpha = 3\alpha - \frac{L^0(\alpha - \alpha^2)\lambda}{2p} > 0, \\ 1 - 2\alpha > 0, \quad a_7 = 1 + 2a_2, \quad a_8 = 1 + 2a_4, \end{aligned}$$

и, с учётом неравенств

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1/3, \\ 0 < a_1 - 2\alpha < a_1 - a_2, \quad 0 < a_3 - 2\alpha < a_3 - a_4, \\ 0 < \beta < 2m(1 - 3\alpha)/[L(1 - \alpha)], \\ 0 < \lambda < 4p(1 - 3\alpha)/[L^0(1 - \alpha)], \end{aligned}$$

неравенство (4.19) упростится

$$\begin{aligned} (1 - 2\alpha) (\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2) + \\ + \sum_{k=1}^{k=m} ((a_1 - 2\alpha)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - 2\alpha)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2) \leq \\ \leq a_5\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_6\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2 + a_7\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_8\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*\|^2. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Из (4.20) при  $m \rightarrow \infty$  следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} ((a_1 - 2\alpha)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - 2\alpha)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2).$$

Тогда (4.20) эквивалентно неравенству

$$(1 - 2\alpha) (\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2) \leq \\ \leq a_5 \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_6 \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2 + a_7 \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\|^2 + a_8 \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*\|^2.$$

Следовательно, из (4.20) следует:  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0$ ,  $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ; последовательность  $\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\}$  невозрастающая и ограничена и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность  $\{\mathbf{x}^{k_i}, \mathbf{u}^{k_i}\} \rightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ ,  $k_i \rightarrow \infty$  и  $\|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^*\| \rightarrow 0$ ,  $k_i \rightarrow \infty$ ,

$$\|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i-1}\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i-1}\| \rightarrow 0, k_i \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Тогда при  $k \rightarrow \infty$  из второго и четвёртого уравнений (2.1) следуют равенства (2.5), (2.6), эквивалентные характеристике (1.3) седловой точки в терминах оператора проектирования; следовательно,  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  — седловая точка функции  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , то есть решение задачи (1.1).

Положим  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^c$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^c$ , выберем  $\forall \varepsilon > 0$  и числа  $k_{i_0} = r$  и  $r \geq m - 1$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i-1}\|^2 \leq \varepsilon / (4a_2 - 2\alpha), \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i-1}\|^2 \leq \varepsilon / (4a_3 - 2\alpha), \\ \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^c\|^2 \leq \varepsilon / (4 + 4\alpha), \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^c\|^2 \leq \varepsilon / (4 + 4\alpha). \quad (4.22)$$

Просуммируем (4.17) от  $k = m$  до  $k = N$  при  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^c$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^c$ ,  $N > r \geq m - 1$ :

$$\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^c\|^2 + a_1 \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^N\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^c\|^2 + a_3 \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^N\|^2 + \\ + \alpha (\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^c\|^2) + \\ + \sum_{k=m}^{k=N-1} ((a_1 - a_2) \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - a_4) \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2) \leq \\ \leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^c\|^2 + \alpha (\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^c\|^2) + \\ + a_2 \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + a_4 \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2. \quad (4.23)$$

Третье, четвёртое слагаемые в правой части (4.23) оценим с помощью правого неравенства (3.3) при  $\varepsilon = 1$ :

$$\alpha \|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^c\|^2 \leq 2\alpha (\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^c\|^2), \\ \alpha \|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^c\|^2 \leq 2\alpha (\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^c\|^2),$$

пятое и шестое слагаемые в левой части (4.23) оценим с помощью левого неравенства (3.3) при  $\varepsilon = 1/2$ :

$$\alpha \|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^c\|^2 \geq \alpha (\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^m\|^2 / 2 - \alpha \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^c\|^2), \\ \alpha \|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^c\|^2 \geq \alpha (\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^m\|^2 / 2 - \alpha \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^c\|^2).$$

С учётом их, и неравенств  $0 < a_1 - 2\alpha < a_1 - a_2$ ,  $1 - 2\alpha > 0$ ,  $0 < a_3 - 2\alpha < a_3 - a_4$ ,

верных при условиях (4.1), и подбора подобных, из (4.23) следует

$$\begin{aligned} & (1 - 2\alpha) (\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^c\|^2) + \\ & + \sum_{k=m}^{k=N} ((a_1 - 2\alpha)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (a_3 - 2\alpha)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2) \leq \\ & \leq (1 + \alpha)(\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^c\|^2) + (a_2 - \alpha/2)\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + \\ & + (a_4 - \alpha/2)\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (4.22), (4.23) и рассуждений и выкладок после (4.20), получим:

$$\begin{aligned} & (1 - 2\alpha) (\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^c\|^2) \leq \\ & \leq (1 + \alpha)(\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^c\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^c\|^2) + \\ & + (a_2 - \alpha/2)\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + (a_4 - \alpha/2)\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и предыдущих рассуждений после (4.20), следует, что вся последовательность  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$  сходится к седловой точке задачи (1.1),  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \rightarrow (\mathbf{x}^c, \mathbf{u}^c) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U^*$ ,  $k \rightarrow \infty$ , ибо пространства  $E^n$  и  $E^m$  полные, неравенства (4.23) выполняются для седловой точки  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U^*$  и последовательность  $\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\}$  монотонна и ограничена.

Из сходимости по норме для аргумента, как известно из функционального анализа, следует сходимость по функционалу; прямое доказательство этого факта имеется, например, в работе [7].

Доказательство завершено.

**С л е д с т в и е 4.1.** *Поскольку по теореме 4.1 (расстояние до точки минимума монотонно убывает) последовательность  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$  сходится монотонно, то имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \dots \leq \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2, \\ & \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 \leq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 \leq \dots \leq \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2, \\ & \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+2}\|^2 \geq \dots, \\ & \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^k\|^2 \geq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}\|^2 \geq \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+2}\|^2 \geq \dots. \end{aligned}$$

## 5. Оценка сверхлинейной скорости сходимости ПОДЭМКСМ

Сначала получим вспомогательное неравенство, пользуясь неравенством (3.3).

**Л е м м а 5.1.** *Если последовательность  $\{\mathbf{x}^k\} \rightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$  построена методом класса ПОДМ или другим методом минимизации, то для приращения  $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ , ( $k \geq 1$ ) аргумента функции  $f(\mathbf{x})$  имеет место формула*

$$\|\mathbf{y}^k\| \leq \left( \frac{1 - (1 - \varepsilon^{-1})(1 - \varepsilon_1^{-1})}{1 - \varepsilon + (1 - \varepsilon^{-1})(1 - \varepsilon_1^{-1})} \right)^{1/2} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|, \quad (5.1)$$

$$0 < \varepsilon < 1, \varepsilon_1 > 1.$$

**Доказательство.** Из левого неравенства (3.3) при  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^k$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{x}^{k-1}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$ , следует неравенство  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2$ ,  $\varepsilon > 0$ . Отсюда имеем  $\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \frac{1-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon}\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2$ ,  $\varepsilon \neq 1$ . Применяя еще раз левое неравенство (3.3) при  $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k-1}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ , получим  $\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \geq (1 - \varepsilon_1)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 - \varepsilon_1^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ . Подставим его в правую часть предыдущего неравенства и выберем подходящие интервалы параметров:

$$\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \frac{(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1)}{1-\varepsilon}\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \frac{(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1^{-1})}{1-\varepsilon}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2,$$

$$0 < \varepsilon < 1, \varepsilon_1 > 1.$$

Приведём подобные и получим неравенство

$$\left(1 + \frac{(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1)}{1-\varepsilon}\right)\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1^{-1})}{1-\varepsilon}\right)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2,$$

или

$$\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \frac{1-(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1^{-1})}{1-\varepsilon+(1-\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon_1)}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2,$$

$$0 < \varepsilon < 1, \varepsilon_1 > 1. \tag{5.2}$$

Для (5.2) выбраны интервалы значений параметров  $\varepsilon, \varepsilon_1$  так, чтобы иметь положительный коэффициент в правой части (5.1); из (5.2) следует неравенство (5.1).

**Доказательство завершено.**

**Замечание 5.1.** Теоретически в (5.1) годны все значения параметров  $\varepsilon, \varepsilon_1$  из указанных интервалов, но в практике применения разумно брать их не слишком большими или не слишком малыми (то есть не слишком близкими к границам допустимого для эpsilon интервала).

Например, при 1)  $\varepsilon = \frac{3}{4}, \varepsilon_1 = 2$  (или  $\varepsilon = \frac{2}{3}, \varepsilon_1 = \frac{3}{2}$ ), 2)  $\varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = \frac{3}{2}$ , а также 3)  $\varepsilon = \frac{2}{3}, \varepsilon_1 = 3$ , из (5.1) имеем соответственно:

$$\begin{aligned} 1) \|\mathbf{y}^k\| &\leq \sqrt{2}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|; \\ 2) \|\mathbf{y}^k\| &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|; \\ 3) \|\mathbf{y}^k\| &\leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Оценку сверхлинейной скорости сходимости метода (2.1), (4.1) для выпукло вогнутой функции можно получить, если дополнить условия теоремы 5.1 предположением, что функция  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in C^{2,1}(Q \times U)$ , и заметить, что в силу теоремы 1 и следствия:  $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0$ ,  $\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0$ , и  $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0$ ,  $\|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\| \rightarrow 0$ , при  $\|\mathbf{y}^k\| \rightarrow 0$ ,  $\|\mathbf{v}^k\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Тогда, ввиду непрерывности частных гессианов по переменным  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ , при  $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| &\rightarrow 0, \\ \|\nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^*)\| &\rightarrow 0, \\ \|\nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{x}^k, \mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^*)\| &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Предположим, что  $\forall \mathbf{x} \in Q_*$ , как и в (5.4)  $\forall \mathbf{u}^k \in U$ , при  $k \rightarrow \infty$  имеем

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\| \rightarrow 0, \quad \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k)\| \rightarrow 0, \quad (5.6)$$

$\forall \mathbf{u} \in U^*$ ; как и в (5.5)  $\forall \mathbf{x}^k \in Q$ , при  $k \rightarrow \infty$  имеем

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \mathbf{B}(\mathbf{u}^*)\| \rightarrow 0, \quad \|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \mathbf{u})\| \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

**Т е о р е м а 5.1.** Пусть выполнены все условия теоремы 4.1, леммы 5.1 и, кроме того:

1) функция  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in C^{2,1}(Q \times U)$ ;

2) для последовательности  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \rightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_* = Q_* \times U^*$ , вырабатываемой ПОДЭМКСМ (2.1)-(2.4), (4.1), существует номер  $N > 1$  такой, что  $\beta_k = 1$ ,  $\lambda_k = 1$  при  $k \geq N$ ;

3) выполнены соотношения (5.4), (5.5) и (5.6), (5.7).

Тогда последовательность  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ , определяемая ПОДЭМКСМ (2.1), (4.1), со сверхлинейной скоростью сходится к решению задачи (1.1) при  $k \rightarrow \infty$  и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| &\leq q_{1k} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| + q_{2k} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|, \\ q_{1k} &= \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| (1 + \sqrt{2}\alpha)/m \rightarrow 0, \\ q_{2k} &= \|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\| (1 + \sqrt{2}\alpha)/p \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $\xi^k = \mathbf{z}^k - \theta(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*)$ ,  $k \geq 1$ ,  $\eta^k = \mathbf{w}^k - \theta(\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*)$ ,  $\theta \in [0; 1]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Результаты и выкладки теоремы 4.1 здесь справедливы. Запишем неравенство (4.3) в форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}) + (\mathbf{z}^k - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}) &\leq \beta (\mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}), \\ \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}\|^2 &\leq (\mathbf{z}^k - \mathbf{v}, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}) + \beta (\mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}), \end{aligned}$$

$k \geq 1$ ,  $\mathbf{v} \in Q$ . Положим здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* \in Q_*$  и сложим с неравенством  $(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla \varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}) \leq 0$ , полученным из (3.1):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*) + \\ &+ \beta (\mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla \varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь в правой части с учётом (5.6) вынесем  $\mathbf{A}_k^{-1}$ , а во втором скалярном произведении воспользуемся формулой Лагранжа. Получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \mathbf{A}_k^{-1} [ \mathbf{A}(\mathbf{z}^k) (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*) + \\ &+ \beta_k (\nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k) (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}) ] = \\ &= \mathbf{A}_k^{-1} [ \mathbf{A}_k - \beta \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k) ] (\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}), \quad (5.9) \end{aligned}$$

где

$$k \geq 1, \quad \xi^k = \mathbf{z}^k - \theta(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*), \quad \theta \in [0; 1].$$

Пользуемся условиями теоремы, неравенством Коши-Буняковского, и учтём, что  $\beta_k = 1$  при  $k \geq N$ ; тогда из (5.9) получим

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \frac{1}{m} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\| \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|,$$

или

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1}{m} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|. \quad (5.10)$$

Последний сомножитель в правой части (5.10) оценим с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования и (5.1) в варианте первого соотношения (5.3),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\| &= \|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{x}^*)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| + \alpha \|\mathbf{y}^k\| \leq (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

После подстановки оценки (5.11) из (5.10) следует

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1}{m} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|. \quad (5.12)$$

Из (5.12) следует оценка

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq q_{1k} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|, \quad (5.13)$$

где  $q_{1k} = \frac{1+\sqrt{2}\alpha}{m} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , ибо ввиду (5.4) и (5.6) при  $k \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| \rightarrow 0+. \quad (5.14)$$

Теперь преобразуем неравенство (4.5).

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}^k, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}) - \lambda (\mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k), \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}) \geq 0, \\ &\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{u} - \mathbf{w}^k, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}) - \lambda (\mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k), \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}). \end{aligned}$$

Положим здесь  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in U^*$  и сложим с неравенством  $\lambda (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u}^*) \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^*), \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}) \geq 0$ , полученным из (3.2):

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) + \\ &+ \lambda (\mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{u}^*) \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^*), \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

С учётом (5.7), в правой части этого неравенства вынесем  $\mathbf{B}_k^{-1}$  и применим во второй скобке формулу Лагранжа, затем вынесем скалярное произведение и применим неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}\|^2 &\leq \\ &\leq \mathbf{B}_k^{-1} [\mathbf{B}_k(\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) - \lambda_k (\nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)(\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*), \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)] \leq \\ &\leq \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*) (\mathbf{B}_k - \lambda_k \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)) \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\| \cdot \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \cdot \|\mathbf{B}_k - \lambda_k \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\|, \end{aligned}$$

$$k \geq 1, \quad \eta^k = \mathbf{w}^k - \theta(\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*), \quad \theta \in [0; 1].$$

Отсюда следует,

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq \frac{1}{p} \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\| \cdot \|\mathbf{B}_k - \lambda \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\|. \quad (5.15)$$

Сомножитель в правой части (5.15) оценим с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования и (5.1) в варианте первого из неравенств (5.3),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\| &= \|P_U(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}^k) - P_U(\mathbf{u}^*)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| + \alpha \|\mathbf{v}^k\| \leq (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Подставим оценку (5.16) в (5.15) и учтём, что  $\lambda_k = 1$  при  $k \geq N$ ; тогда из (5.15) получим

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq \frac{1}{p} (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| \|\mathbf{B}_k - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\|. \quad (5.17)$$

Из (5.17) следует оценка

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq q_{2k} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|, \quad q_{2k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

где  $q_{2k} = \frac{1 + \sqrt{2}\alpha}{p} \|\mathbf{B}_k - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , ибо ввиду (5.5) и (5.7) при  $k \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{B}_k - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \eta^k)\| \leq \|\mathbf{B}_k - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^*)\| \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

Сложив неравенства (5.13) и (5.18), получим доказываемую оценку

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq q_{1k} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| + q_{2k} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|, \quad q_{1k} \rightarrow 0, \quad q_{2k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство завершено.

**З а м е ч а н и е 5.2.** Заметим следующее.

1) Если принять  $q_k = \max\{q_{1k}; q_{2k}\}$ ,  $q_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то вместо (5.8) можно записать

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| &\leq q_k (\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|), \\ q_k &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2) Если вместо (5.13) и (5.18) сложим квадраты неравенств (5.13) и (5.18), то придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 \leq q_{1k}^2 \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + q_{2k}^2 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2,$$

затем, при  $q_k^2 = \max\{q_{1k}^2; q_{2k}^2\}$ , получим вместо (5.8)

$$\rho^2(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}) \leq q_k^2 \rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k), \quad q_k \rightarrow 0+, \quad k \rightarrow \infty,$$

где обозначено  $\rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$ .

## 6. Оценка квадратичной скорости сходимости ПОДЭМКСМ

При дополнительном условии относительно операторов  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$  получим оценку квадратичной сходимости ПОДЭМКСМ (2.1). Воспользуемся обобщением неравенства из работы [15]. Предположим, что константы  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  и число  $N$  таковы, что  $\forall k \geq N$  имеют место неравенства

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| \leq c_1 \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|, \quad \forall \mathbf{u}^k \in E^m, \quad (6.1)$$

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^*)\| \leq c_2 \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\|, \quad \forall \mathbf{x}^k \in E^n. \quad (6.2)$$

**Т е о р е м а 6.1.** Пусть выполнены все условия теорем 4.1 и 5.1, неравенства (6.1), (6.2). Тогда последовательность  $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$  ПОДЭМКСМ (2.1)–(2.4), (4.1) с квадратичной скоростью сходится к решению  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\} \in W_*$  задачи (1.1), причем

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq c\rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k), \quad k \geq N, \quad (6.3)$$

где  $c = (1 + \sqrt{2}\alpha)^2 c_3$ ,  $c_3 = \max\{c_1/m; c_2/p\}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что при условиях теоремы 6.1 все выкладки теорем 4.1, и 5.1, а также неравенства (5.11), (5.12) и (5.16), (5.17) справедливы. Здесь сначала воспользуемся в (5.12) неравенствами из (5.11), (5.14) и (6.1),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\xi^k, \mathbf{u}^k)\| &\leq \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| \leq \\ &\leq c_1 \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\| \leq c_1(1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|. \end{aligned}$$

Подставив эту оценку в (5.12), получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| &\leq \frac{1}{m} \|\mathbf{A}(\mathbf{z}^k) - \nabla^2 \varphi_{xx}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k)\| (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \\ &\leq c_1 \frac{1}{m} (1 + \sqrt{2}\alpha)^2 \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad k \geq N. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Воспользуемся неравенствами из (5.16), (5.19) и (6.2),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \xi^k)\| &\leq \|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^*)\| \leq \\ &\leq c_2 \|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\| \leq c_2(1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|, \end{aligned}$$

и воспользуемся полученной оценкой в (5.17), тогда из (5.17) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| &\leq \frac{1}{p} (1 + \sqrt{2}\alpha) \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\| \|\mathbf{B}(\mathbf{w}^k) - \nabla^2 \varphi_{uu}(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^*)\| \leq \\ &\leq c_2 \frac{1}{p} (1 + \sqrt{2}\alpha)^2 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2, \quad k \geq N. \end{aligned}$$

Сложив это неравенство с (6.4), получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| &\leq \\ &\leq (1 + \sqrt{2}\alpha)^2 (c_1 \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/m + c_2 \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2/p), \quad k \geq N. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь примем  $c_3 = \max\{c_1/m; c_2/p\}$ ;  $c = (1 + \sqrt{2}\alpha)^2 c_3$ . Тогда из (6.5) следует (6.3).  
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

**З а м е ч а н и е 6.1.** *Можно доказать аналоги теорем 4.1 – 6.1 для обоснования модификации ПОДЭМКСМ (2.1), часто успешной для численных реализаций:*

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q [\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k / (\|\mathbf{y}^k\|)], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q [\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{A}_k^{-1} \nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) / (\|\nabla \varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)\|)], \\ \mathbf{w}^k &= P_U [\mathbf{u}^k + \alpha_k \mathbf{v}^k / (\|\mathbf{v}^k\|)], \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U [\mathbf{w}^k + \lambda_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k) / (\|\nabla \varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\|)], \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

где используются те же обозначения, что и в (2.1).

## 7. Заключение

В данной статье доказаны: сходимость ПОДЭМКСМ (2.1) для решения седловых задач с выпукло-вогнутыми седловыми функциями с Липшицевыми частными градиентами и сверхлинейная, и квадратичная, скорости сходимости метода в случае дважды непрерывно дифференцируемых, а следовательно, сильно выпукло-вогнутых седловых функций при соответствующих дополнительных условиях. ПОДЭМКСМ (2.1) обладает преимуществами, присущими двум классам методов решения седловых и равновесных задач: обобщённым двухточечным экстраградиентным и квазиньютоновским. Такие методы представляют значительный научный и прикладной интерес. Методы с квадратичной скоростью сходимости для решения седловых задач являются большой редкостью, они ценны для науки и приложений, поэтому их разработка и исследование актуальны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В.Ф., Певный А.Б. Численные методы разыскания седловых точек // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т.12. № 5. С. 1099–1127.
2. Корпелевич Г.М. Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа // Экономика и математические методы. 1983. Т. 19. Вып. 4. С. 694–703.
3. Антипин А.С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002. 131 с.
4. Антипин А.С., Васильев Ф.П. О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Известия вузов. Математика. 1995. № 12 (403). С. 3–9.
5. Амочкина Т.В. Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37, № 10. С. 1174–1182.
6. Малинов В.Г. О проекционном квазиньютоновском обобщённом двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата // Журнал Средневожского математического общества. 2010. Том 12, № 4. С. 37–48.

7. Малинов В.Г. Проекционный обобщенный двухточечный экстраградиентный квазиньютоновский метод решения седловых и других задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 2. С. 221–233.
8. Malinov V.G. On the Extragradient projection method for saddle-point problems // VI Moscow International Conference on Operation Research (ORM2010). Moscow, October 19-23, 2010. Proceedings. pp. 207 – 209.
9. Малинов В.Г. Версии двух проекционных двухшаговых методов для решения седловых и других задач // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013). Москва, 15-19 октября 2013 г. Труды. Том II. Москва: ВЦ РАН, 2013. С. 25 – 27.
10. Малинов В.Г. О версиях двух проекционных обобщённых двухшаговых экстраградиентных методов для равновесных и других задач // Прикладная математика и механика. Сборник научных трудов. Ульяновск. УлГТУ, 2014. С. 161 – 178.
11. Малинов В.Г. Непрерывный проекционный обобщенный экстраградиентный квазиньютоновский метод второго порядка для решения седловых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 5. С. 777–789.
12. Антипин А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. М.: ВНИИ системных исследований, 1979. 74 с.
13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
14. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975. 272 с.
15. Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L. Convergence of quasi-Newton matrices generated by the symmetric rank one update // Mathematical Programming. 1991. Vol. 50, no. 2. pp. 177–195.

*Поступила 14.11.2023; доработана после рецензирования 12.04.2024; принята к публикации 29.05.2024*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. V. F. Demyanov, A. B. Pevnyi, “[Numerical methods of searching of saddle points]”, *[Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **12**:5 (1972), 1099–1127 (In Russ. ).
2. G. M. Corpelevich, “[Extrapolated gradient methods and their connection with modified Lagrange functions]”, *Economic and Mathematical Methods*, **19**:4 (1983.), 694–703. (In Russ. ).

3. A. S. Antipin, [*Gradient and Extragradient approach in bilinear and Equilibrium programming*], Publishers CC RAS, M., 2002 (In Russ. ), 131 p.
4. A. S. Antipin, F. P. Vasil'ev, “[On continuous method of minimization in variable metric spaces]”, *Russian Mathematics*, **39**:12 (1995), 1–6 (In Russ. ).
5. T. V. Amochkina, “[Continuous second order gradient projection variable metric method]”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **37**:10 (1997), 11374 – 1142. .
6. V. G. Malinov, “On projection quasinewton generalized two-step minimization method and on optimization of the trajectory of aero craft”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **12**:4 (2010), 37– 48 .
7. V. G. Malinov, “[Projection generalized two-point extragradient quasinewton method for saddle-point and other problems]”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **60**:2 (2020), 221–233. (In Russ ).
8. V. G. Malinov, *VI Moscow International Conference on Operation Research (ORM2010). Moscow. October, 19-23, 2010. Proceedings.*, MAKS PRESS, Moscow, 2010 (In Russ ).
9. V. G. Malinov, *VII Moscow International Conference on Operation Research (ORM2013). Moscow, 15-19 October 2013. Proceedings. Vol. 2.*, CC RAS, Moscow, 2013 (In Russ ).
10. V. G. Malinov, [*Applied Mathematics and Mechanics*]., UIGTU, Ulyanovsk, 2014 (In Russ ).
11. V. G. Malinov, “[Continuous projection generalized extragradient quasinewton second order method for saddle-point problems]”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **62**:5 (2022), 777–789 (In Russ. ).
12. A. S. Antipin, [*Methods of nonlinear programming, based on direct and dual modifications Lagrange function*], VNII systems research Publ., Moscow, 1979 (In Russ. ), 74 p.
13. F. P. Vasil'ev, [*Numerical methods solution of Extremal problems*], Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ. ), 552 p.
14. V. G. Karmanov, *Mathematical Programming*, Nauka Publ., M., 1975 (In Russ. ), 272 p.
15. A. R. Conn, N. I. M. Gould, Ph. L. Toint, “Convergence of quasi-Newton matrices generated by the symmetric rank one update”, *Mathematical Programming*, **50**:2 (1991), 177–195 .

*Submitted 14.11.2023; Revised 12.04.2024; Accepted 29.05.2024*

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.143-156

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

## Применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для моделирования двумерных задач о развитии гидродинамической неустойчивости

Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, А. И. Кулягин<sup>2</sup>, М. С. Нефедов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация),*

<sup>2</sup> *ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В данной статье исследуется применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности для моделирования двумерных задач развития гидродинамических неустойчивостей. Рассматривается эффективность использования алгоритмов для улучшения точности и достоверности результатов моделирования в этой области. Описывается разработанный численный алгоритм для решения задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Для построения численного алгоритма используется WENO-схема пятого порядка точности. С помощью разработанного алгоритма проведено численное решение ряда задач. В статье приведены результаты расчетов: течения на момент времени 4046 мкс, изменение ширины области с элегазом, численные шпирен-картины на момент времени 877 мкс, изменение ширины области с тяжелым газом. Эти результаты получены различными методами на сетках различной размерности; проведено их сравнения с экспериментальными данными. Показано, что схемы с реконструкцией WENO 5-го порядка точности демонстрируют результаты, более близкие к натурным экспериментам.

**Ключевые слова:** WENO, газовая динамика, адаптивные сетки, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова

**Для цитирования:** Жалнин Р. В., Кулягин А. И., Нефедов М. С. Применение вычислительных алгоритмов повышенного порядка точности к моделированию двумерных задач о развитии гидродинамических неустойчивостей // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 143–156. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.143-156>

*Об авторах:*

**Жалнин Руслан Викторович**, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

**Кулягин Андрей Иванович**, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3158-6221>, [andreycoolyagin@gmail.com](mailto:andreycoolyagin@gmail.com)

© Р. В. Жалнин, А. И. Кулягин, М. С. Нефедов



**Нефедов Михаил Сергеевич**, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, [snef7@yandex.ru](mailto:snef7@yandex.ru)

*Original article*

MSC2020 76-10

## Application of computational algorithms with higher order of accuracy to the modeling of two-dimensional problems on development of hydrodynamic instability

R. V. Zhalnin<sup>1</sup>, A. I. Kulyagin<sup>2</sup>, M. S. Nefedov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)*

<sup>2</sup> *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** This article examines application of computational algorithms with an increased order of accuracy for modeling two-dimensional problems of development of hydrodynamic instabilities. The efficiency of using algorithms to improve the accuracy and reliability of modeling in this area is considered. More specifically, the paper describes a numerical algorithm for solving the problem of development of Richtmayer-Meshkov instability. To construct the algorithm, the authors use the WENO scheme of the fifth order of accuracy. Several problems are solved numerically using the developed method. The article models such processes as flows at a time of 4046 microseconds, a change in the width of the region filled with sulfur hexafluoride, numerical schlieren patterns at a time of 877 microseconds, a change in the width of the region filled with heavy gas. The results are obtained by various methods on grids of different dimensions and compared with experimental data. It is shown that schemes with WENO reconstruction of the 5th order of accuracy demonstrate results closer to full-scale experiments.

**Keywords:** WENO, gas dynamics, adaptive grids, Richtmayer-Meshkov instability

**For citation:** R. V. Zhalnin, A. I. Kulyagin, M. S. Nefedov. Application of computational algorithms with higher order of accuracy to the modeling of two-dimensional problems on development of hydrodynamic instability. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 143–156. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.143-156>

*About the authors:*

**Ruslan V. Zhalnin**, Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher at the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS (15 Akademik Lavryentyev Av., Novosibirsk 630090, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

**Andrey I. Kulyagin**, Ph.D. (Phys.-Math.), Lecturer at the Department of Applied Mathematics, Differential equations and theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3158-6221>, [andreycoolyagin@gmail.com](mailto:andreycoolyagin@gmail.com)

**Michael S. Nefedov**, Ph.D. (Phys.-Math.), Lecturer at the Department of Applied Mathematics, Differential equations and theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7347-2191>, [snef7@yandex.ru](mailto:snef7@yandex.ru)

## 1. Введение

Неустойчивость Рихтмайера-Мешкова (далее – НРМ) возникает при прохождении ударной волны через разделительную границу между жидкостями разной плотности. Она инициализирована накоплением завихренности на границе раздела из-за сдвига градиентов давления и плотности на границе ударной волны и материала.

На данный момент прямое численное моделирование турбулентного перемешивания, возникающего при развитии неустойчивостей, остается слишком затратным с вычислительной точки зрения. Тем не менее, предыдущие исследования включали в себя множество точных вычислений и использование LES-моделей для изучения процесса развития турбулентного перемешивания при неустойчивостях.

Исследования, посвященные численному моделированию развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова на основе уравнений Эйлера, не учитывали влияние газового взаимопроникновения (например, работы [1–2]). Кроме того, было отмечено, что замена ступенчатого профиля плотности на контактном разрыве непрерывным распределением в слое конечной ширины может снизить скорость роста возмущений на начальной стадии развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Этот факт подтвержден в исследованиях, проведенных в работах [3–4]. Также, в работе [5] было указано на необходимость использования моделей многокомпонентных смесей для описания разрушения контактной границы и образования области смеси.

Современные стандарты качества математического моделирования гидродинамических неустойчивостей требуют проведения расчетов на подробных сетках (до нескольких миллионов ячеек и более) с использованием высокоточных схем. Такие схемы, как правило, основанные на методах высокого порядка аппроксимации, активно разрабатываются и исследуются в настоящее время [6].

Актуальные и эффективные схемы для решения задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова включают в себя различные методы численного моделирования и анализа таких процессов. Некоторые из них включают в себя: метод конечных элементов [7], метод конечных разностей [8–9], метод сглаженных частиц [10] и т.д.

Эти методы могут быть комбинированы и адаптированы в зависимости от конкретной задачи и требований исследования неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Важно учитывать особенности конкретного физического процесса и подходить к выбору метода решения задачи индивидуально.

В данной работе исследовались две задачи о набегании ударной волны на область из более тяжелого газа с использованием схем второго и пятого порядка точности.

## 2. Математическая модель

Будем рассматривать двумерную систему уравнений двухкомпонентной газовой динамики, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \\ \rho Y \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \\ \rho u Y \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \\ \rho v Y \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{v} = (u, v)$  – вектор скорости,  $p$  – давление и  $E = \rho(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2})$  – полная энергия,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия идеального газа.

Система (2.1) замыкается уравнением состояния  $p/\rho = RT/M, R/M = C_p - C_v$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $C_p, C_v$  – удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно,  $M$  – молекулярная масса смеси.  $C_p$  и  $M$  вычисляются следующим образом:

$$C_p = Y C_{p1} + (1 - Y) C_{p2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{Y}{M_1} + \frac{1 - Y}{M_2}, \quad (2.3)$$

где  $Y$  – концентрация,  $M_i, C_{pi}$  – молекулярная масса и теплоемкость  $i$ -й компоненты смеси соответственно ( $i = 1, 2$ ).

При рассмотрении конкретной модели также необходимо задать начальные и граничные условия, для полного описания решаемой задачи.

### 3. Вычислительный алгоритм

Построим дискретную модель для расчетной области прямоугольной формы  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Для этого область  $\Omega$  заменим ортогональной сеткой, равномерной по каждому направлению:

$$\omega_{\Delta} = \omega_{\Delta_x} \times \omega_{\Delta_y},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta_x} &= \{\Delta_i, i = 1, \dots, N_x, \Delta_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], |\Delta_i| = h_x, h_x N_x = L_x\}, \\ \omega_{\Delta_y} &= \{\Delta_j, j = 1, \dots, N_y, \Delta_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], |\Delta_j| = h_y, h_y N_y = L_y\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для аппроксимации системы (2.1) используем нелинейную консервативную дифференциально-разностную схему повышенного порядка точности:

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{F_{i+1/2j} - F_{i-1/2j}}{h_x} + \frac{G_{ij+1/2} - G_{ij-1/2}}{h_y} = 0, \quad (3.2)$$

где  $U_{ij} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} U dx dy$  – соотнесенные к центру ячейки усредненные значения консервативных газодинамических переменных,  $F_{i+1/2j}, G_{ij+1/2}$  – дискретные потоки

на соответствующих границах между ячейками, являющиеся функциями двух переменных

$$F_{i+1/2j} = \hat{F}(U_{i+1/2j}^L, U_{i+1/2j}^R), \quad (3.3)$$

$$G_{i+1/2j} = \hat{G}(U_{ij+1/2}^L, U_{ij+1/2}^R), \quad (3.4)$$

для которых выполнено условие согласования:

$$\hat{F}(U_{ij}, U_{ij}) = F(U_{ij}), \quad (3.5)$$

$$\hat{G}(U_{ij}, U_{ij}) = G(U_{ij}). \quad (3.6)$$

Здесь  $U_{i+1/2j}^L, U_{i+1/2j}^R$  – «левые» и «правые» значения вектора  $U$  на грани между  $i$  и  $i + 1$  ячейками, для которой вычисляется поток  $F_{i+1/2j}$ ,  $m = 1, 2, 3$ ;  $U_{ij+1/2}^L, U_{ij+1/2}^R$  – «левые» и «правые» значения вектора  $U$  на грани между  $j$  и  $j + 1$  ячейками. Для того, чтобы вычислить значения вектора  $U$  на указанных гранях между ячейками введем новый вектор переменных  $Q = Q(U)$ . Проведем его интерполяцию на грань между ячейками и затем пересчитаем искомое значение вектора  $U = U(Q)$  на данной грани. В расчетах полагалось  $Q = (\rho, p, u, v, Y)$ , дискретные потоки вычислялись по схемам Лакса-Фридрикса (LF) [11] и Хартена-Лакса-ван Лира с учетом контактного разрыва (HLLC) [12].

Для интерполяции значений  $Q$  на грани между ячейками использовались схема TVD с лимитером *minmod* [9] (далее – TVD2) и схема WENO5 [13].

Дискретизация по времени проводилась с использованием TVD-схемы Рунге-Кутты 3-го порядка [13]. А именно, для уравнения вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_h(U), \quad (3.7)$$

где  $L_h(U)$  – пространственный разностный оператор из (3.2), используем:

$$U^* = U^n + \Delta t \cdot L_h(U^n), \quad (3.8)$$

$$U^{**} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^* + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L_h(U^*), \quad (3.9)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot L_h(U^{**}). \quad (3.10)$$

## 4. Постановка задач

**Задача 1.** Рассматривается задача о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова при прохождении ударной волны через прямоугольную неоднородность из тяжелого газа. Начально-краевые условия взяты согласно эксперименту [14] и расчетам, описанным в работе [15], в которой используется схема КАБАРЕ.

Расчетная область – прямоугольная  $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.45] \times [0, 0.2]$ , изображена на Рис. 4.1. В начальный момент времени в примыкающей к стенке прямоугольной подобласти  $[0.1, 0.25] \times [0, 0.1]$  (подобласть II на Рис. 4.1) находится покоящийся тяжелый газ – фторид серы VI ( $SF_6$ , элегаз), в остальной части находится покоящийся воздух (подобласть I на Рис. 4.1), оба газа находятся в статическом равновесии. На левой грани задается условие входа ударной волны, на остальных гранях – адиабатические стенки с проскальзыванием. Параметры сред, принятые для вычислительного эксперимента, указаны в таблице 4.1.

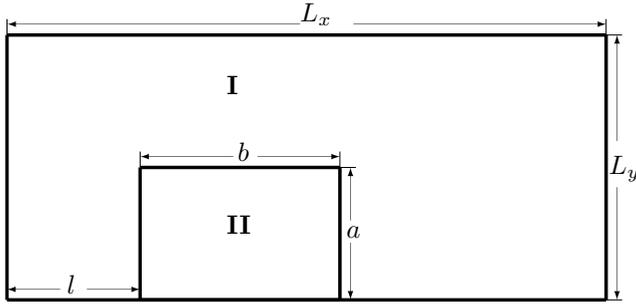


Рис. 4.1. Схема расчетной области для задачи 1

Fig 4.1. Scheme of the computational domain for problem 1

Таблица 4.1. Данные для численного эксперимента для задачи 1

Table 4.1. Data for numerical experiment for problem 1

	Ударная волна	Воздух (I)	$SF_6$ (II)
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1.6672	1.53	5.805
$\mathbf{v}$ , м/с	(133.273, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$p$ , Па	163256.0	96856.0	96856.0
$C_p$ , Дж/(кг·К)	1008.0		660.08
$C_v$ , Дж/(кг·К)	720.0		613.46

**Задача 2.** Была принята следующая постановка задачи в соответствии с экспериментом, описанным в работе [16]. Расчетная область – прямоугольная  $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.2] \times [0, 0.14]$  (Рис. 4.2).

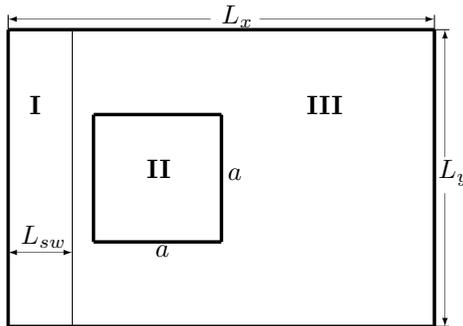


Рис. 4.2. Схема расчетной области для задачи 2

Fig 4.2. Scheme of the computational domain for problem 2

В начальный момент времени в квадратной подобласти II со стороной  $a = 0.0566$  находится покоящийся тяжелый газ – фторид серы VI ( $SF_6$ , элегаз) в остальной части находится азот (подобласти I и III на Рис. 4.2). Фронт ударной волны, движущейся вправо с числом Маха 1.17, находится на расстоянии  $L_{sw} = 0.02$  от левой границы.

Область с тяжелым газом располагается перед фронтом ударной волны на расстоянии, соответствующем достижению ударной волной контактной границы за 4 мкс и по центру относительно оси  $Oy$ . Давление полагалось равным 101 325 Па, а температура – равной 298 К. На левой грани задается условие втекания газа с параметрами за фронтом ударной волны, на остальных гранях – условия свободного вытекания. Параметры газов приведены в таблице 4.2.

**Таблица 4.2.** Данные для численного эксперимента для задачи 2

**Table 4.2.** Data for numerical experiment for problem 2

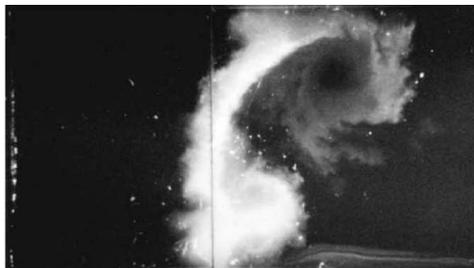
	Азот ( $N_2$ )	Фторид серы VI ( $SF_6$ )
$M$	0.02801	0.14606
$C_p$ , Дж/(кг·К)	1040	665.1376

## 5. Результаты расчетов

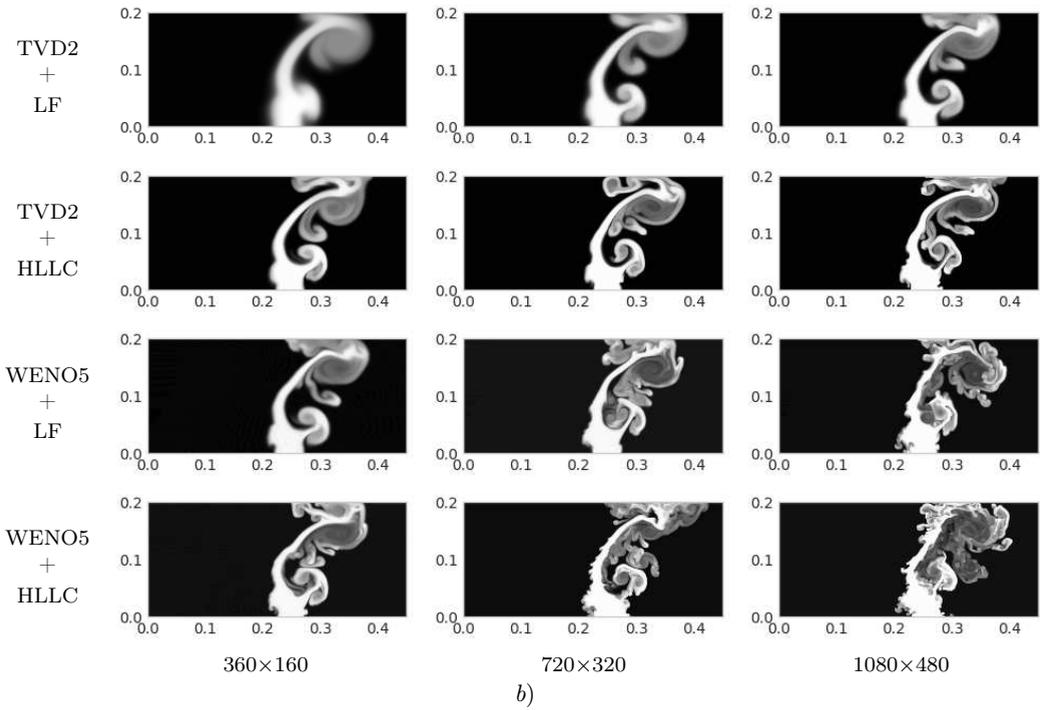
### 5.1. Задача 1

На Рис. 5.1 показаны результаты расчетов различными методами на сетках размерности  $360 \times 160$ ,  $720 \times 320$  и  $1080 \times 480$ . Видно, что использование солвера HLLC для вычисления дискретных потоков позволяет воспроизвести корректную картину течения даже на грубой сетке, а использование реконструкции WENO5 позволяет смоделировать достаточно подробную структуру течения.

В работе [14] приводятся результаты измерения положения границ области с элегазом в различные моменты времени. На основе этих данных было вычислено значение ширины зоны с элегазом в эксперименте и выполнено сравнение с результатами расчетов в данной работе. На Рис. 5.2 приводится сравнение изменения ширины зоны с элегазом для различных методов на последовательности измельчающихся сеток. Видно, что до момента ( $\approx 1.5$  мс) прохождения вторичной ударной волны, отраженной от правой границы, все методы демонстрируют приемлемое совпадение изменения ширины наблюдаемой зоны с элегазом. Далее во всех расчетах значение ширины занижено, за исключением результатов, полученных с использованием реконструкции WENO5, которые попадают в доверительный интервал экспериментальных данных.

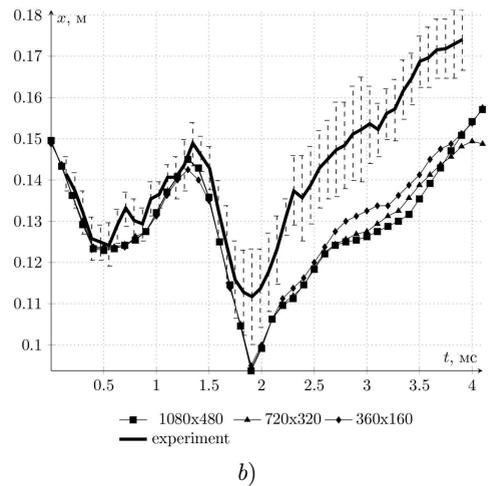
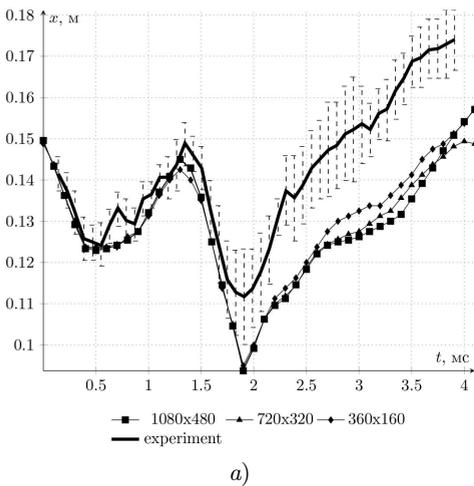


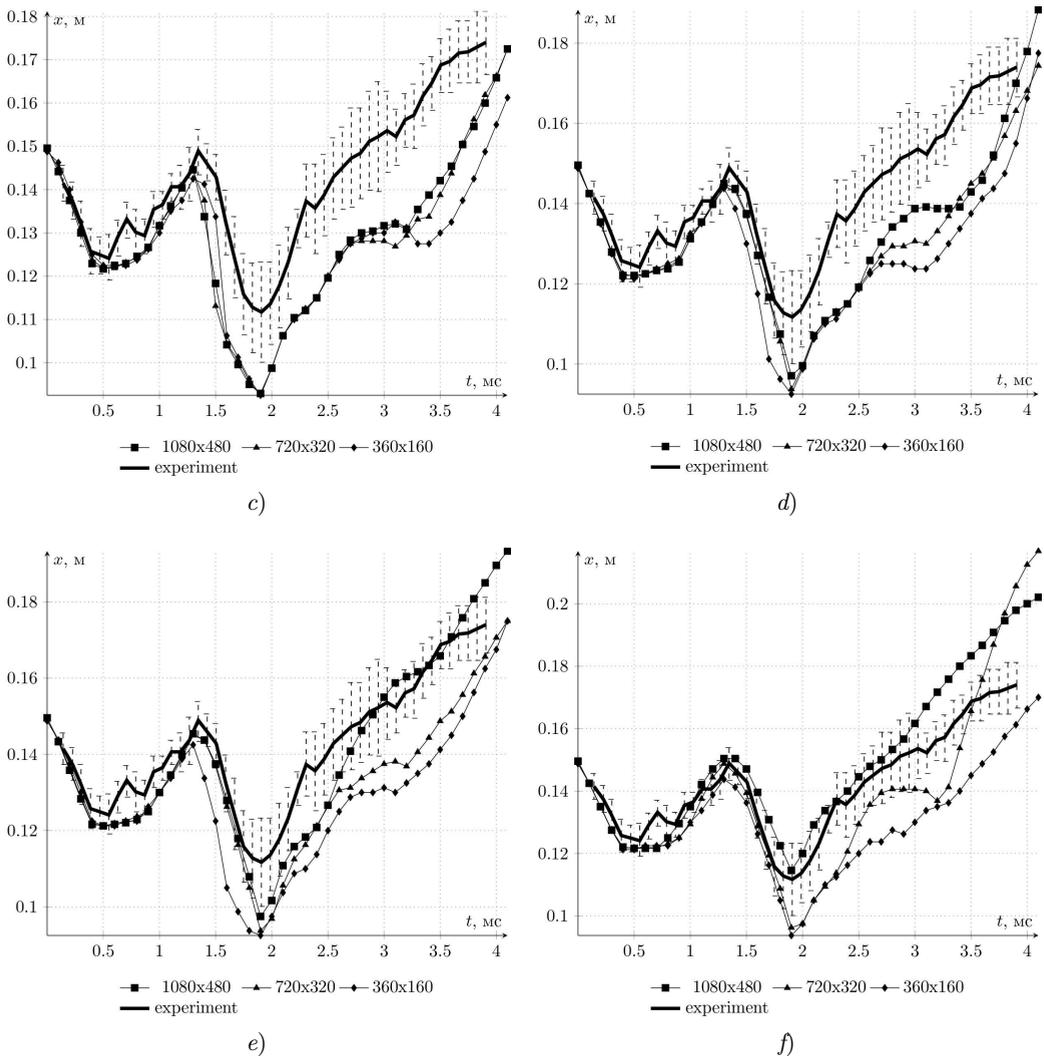
a)



**Рис. 5.1.** Задача 1 – картина течения на момент времени 4 046 мкс:  
 а) эксперимент [14]; б) результаты расчетов (концентрация)

**Fig 5.1.** Problem 1 – flow pattern at time 4 046  $\mu$ s: а) experiment [14];  
 б) calculation results (concentration)



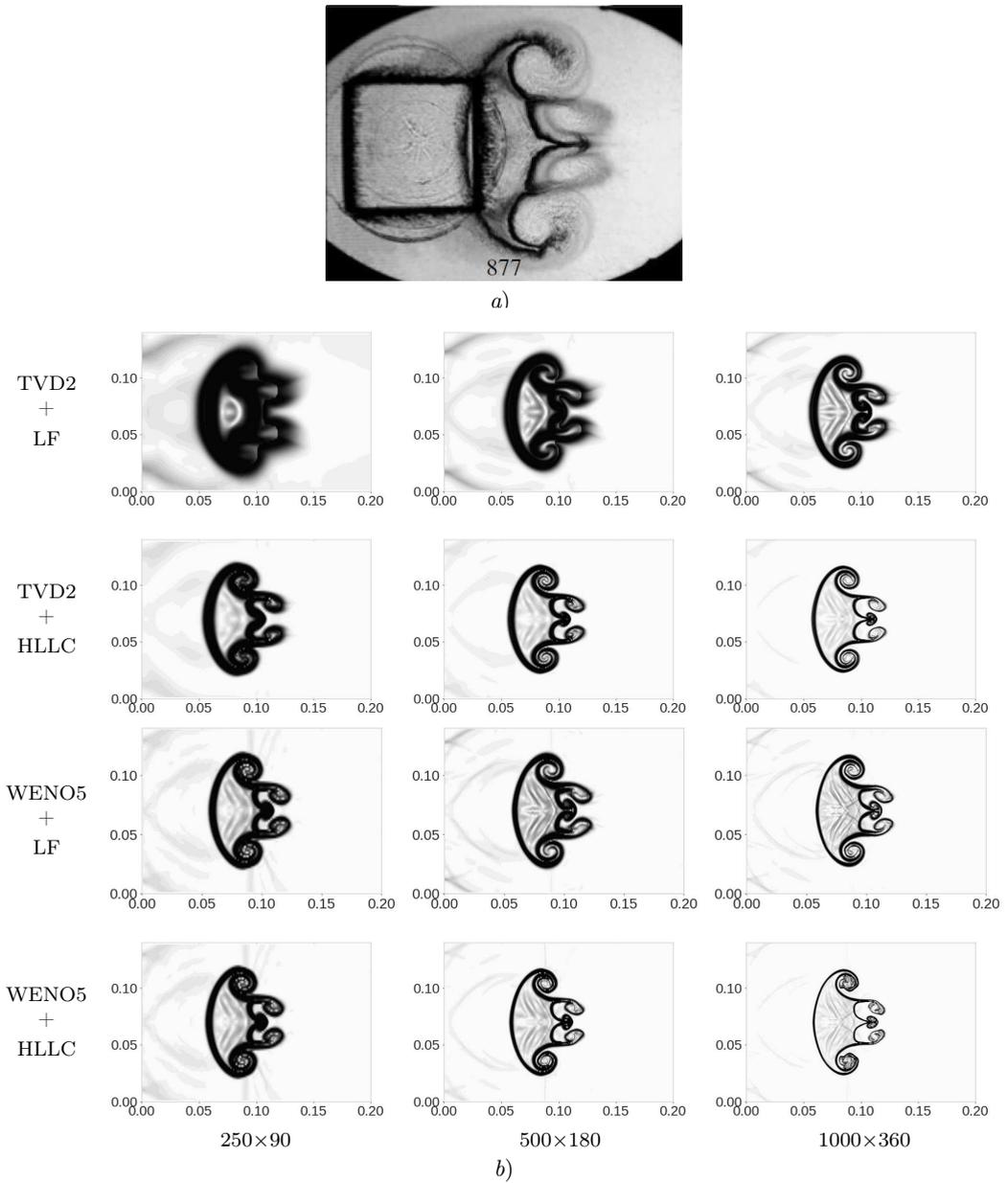


**Рис. 5.2.** Задача 1 – изменение ширины области с элегазом: а) схема первого порядка точности, поток LF; б) схема первого порядка точности, поток HLLC; в) реконструкция TVD2, поток LF; д) реконструкция TVD2, поток HLLC; е) реконструкция WENO5, поток LF; ф) реконструкция WENO5, поток HLLC

**Fig 5.2.** Task 1 – changing the width of the area with SF6 gas: а) first-order accuracy circuit, LF flux; б) first order accuracy circuit, HLLC flux; в) reconstruction of TVD2, LF flux; д) TVD2 reconstruction, HLLC flux; е) WENO5 reconstruction, LF flux; ф) WENO5 reconstruction, HLLC flux

## 5.2. Задача 2

На Рис. 5.3 показаны численные шпирен-картины по истечении 887 мкс с момента достижения ударной волной левой границы области II.



**Рис. 5.3.** Задача 2 – численные шlieren-картины на момент времени 877 мкс:

a) эксперимент [16]; b) результаты расчетов

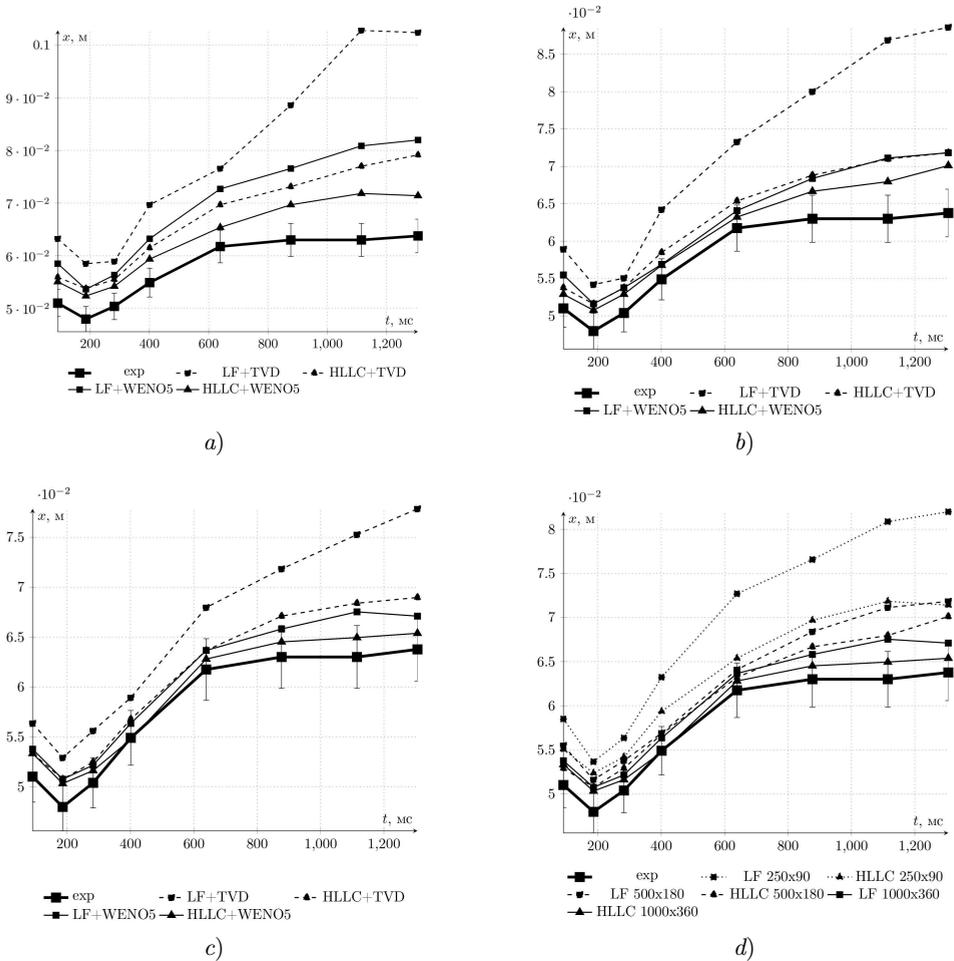
**Fig 5.3.** Problem 2 – numerical schlieren pictures at time 877  $\mu$ s:

a) experiment [16]; b) calculation results

Легко заметить, что с повышением порядка точности схемы увеличивается детализация картины течения. Схема на основе WENO позволяет разрешить более «тонкие»

детали развития вихревых структур на границе раздела двух газов. Картины течения, полученные с помощью WENO-схем, имеют более закрученные вихревые структуры, чем в эксперименте [16] (Рис. 5.3а). Это можно объяснить тем, что в модели не учитывается вязкость, которая увеличивала бы диссипацию вихревых структур.

На Рис. 5.4 представлена динамика изменения ширины области с тяжелым газом в сравнении с экспериментом.



**Рис. 5.4.** Изменение ширины области с тяжелым газом: а) сетка  $250 \times 90$ ; б) сетка  $500 \times 180$ ; в) сетка  $1000 \times 360$ ; д) схема WENO5 с потоками LF и HLLC на сгущающихся сетках

**Fig 5.4.** Dynamics of the width of the region with heavy gas: а) grid  $250 \times 90$ ; б) grid  $500 \times 180$ ; в) grid  $1000 \times 360$ ; д) WENO5 scheme with LF and HLLC fluxes on condensed grids

Видно, что наиболее близко к эксперименту изменение ширины области с элегазом воспроизводит схема с дискретным потоком HLLC и реконструкцией WENO 5-го порядка точности.

## 6. Заключение

В работе решены две задачи о развитии гидродинамической неустойчивости при набегании ударной волны на область с более плотным газом. Получены картины течения и проанализирована динамика изменения области с плотным газом. Расчеты проведены с использованием вычислительных алгоритмов на основе интегро-интерполяционного метода первого порядка точности и с реконструкцией решения на границах ячеек по схеме TVD второго порядка точности и по схеме WENO пятого порядка точности. Для вычисления дискретных потоков на границах ячеек использовались потоки Лакса-Фридрихса и HLLC. Что наиболее близкие к эксперименту результаты демонстрирует схема с реконструкцией WENO и дискретными потоками HLLC.

**Благодарности.** Постановка расчетных задач, обработка и интерпретация результатов выполнена Жалниным Р. В. за счет средств РФФ (проект № 23-11-00142).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М. Последовательный переход к турбулентности в неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 5. С. 581–583.
2. Youngs D. L. Numerical simulation of mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities // Laser and Particle Beams. 1994. Vol. 12, № 4. P. 725–750. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263034600008557>
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. P. 428–436.
4. Chakraborty B. B. Rayleigh-Taylor instability of heavy fluid // Phys. Fluids. 1975. Vol. 18, № 8. P. 1066–1067.
5. Куропатенко В. Ф. Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 2. С. 128–155.
6. Stoyanovskaya O. P., Lisitsa V. V., Anoshin S. A., Savvateeva T. A., Markelova T. V. Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 438. 115495. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495>
7. Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Пескова Е. Е., Тишкин В. Ф. Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием разрывного метода Галеркина на локально-адаптивных сетках // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 34–46. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2020-10-03>
8. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 5. С. 95–120.
9. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.

10. Grigoryev V. V., Zhalnin R. V. Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a gas at rest with experiment in the problem of the development of the Richtmyer–Meshkov instability // Параллельные вычислительные технологии – XVIII Всерос. конф. с междунар. участием. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2024. С. 17–30.
11. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. Vol. 7. P. 159–193. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112>
12. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. Vol. 4. P. 25–34. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01414629>
13. Shu C. W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report. No. 97–65. 1997. 79 p.
14. Bates K. R., Nikiforakis N., Holder D. Richtmyer–Meshkov Instability Induced by the Interaction of a Shock Wave with a Rectangular Block of SF6 // Physics of Fluids. 2007. Vol. 19. 036101.
15. Данилин А. В., Соловьев А. В. Использование алгоритма «КАБАРЕ» для моделирования турбулентного перемешивания на примере неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Матем. моделирование. 2018. Т. 30, № 8. С. 3–16. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048219020054>
16. Luo X., Wang M., Si T., Zhai Zh. On the interaction of a planar shock with an SF6 polygon // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 773. P. 366–394. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.257>

*Поступила 12.02.2024; доработана после рецензирования 15.04.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. O. M. Belotserkovsky, V. V. Demchenko, A. M. Oparin, “Sequential transition to turbulence in the Richtmyer-Meshkov instability”, *Dokl. RAS*, **334**:5 (1994), 581–583 (In Russ.).
2. D. L. Youngs, “Numerical simulation of mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities”, *Laser and Particle Beams*, **12**:4 (1994), 725–750. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0263034600008557>
3. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*, Oxford: Clarendon Press, 1961.
4. B. B. Chakraborty, “Rayleigh-Taylor instability of heavy fluid”, *Phys. Fluids.*, **18**:8 (1975), 1066–1067.

5. V. F. Kuropatenko, “Unsteady flows of multicomponent media”, *Mat. modeling*, **1:2** (1989), 128–155 (In Russ.).
6. O. P. Stoyanovskaya, V. V. Lisitsa, S. A. Anoshin, T. A. Savvateeva, T. V. Markelova, “Dispersion Analysis of SPH as a Way to Understand Its Order of Approximation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **438** (2024), 115495. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115495>
7. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, “Modeling the Richtmyer–Meshkov Instability Development Using the Discontinuous Galerkin Method and Locally Adaptive Meshes”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13:3** (2021), 474–482. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048221030194>
8. K. V. Vyaznikov, V. F. Tishkin, A. P. Favorsky, “Construction of monotone difference schemes of increased approximation order for systems of hyperbolic equations”, *Mathematical modeling*, **1** (1989), 95–120 (In Russ.).
9. V. F. Tishkin, V. V. Nikishin, I. V. Popov, A. P. Favorsky, “Difference schemes of three-dimensional gas dynamics for the problem of the development of Richtmyer–Meshkov instability”, *Mathematical modeling*, **7:5** (1995), 15–25 (In Russ.).
10. V. V. Grigoryev, R. V. Zhalnin, “Comparison of methods for modeling the interaction of a shock wave and a gas at rest with experiment in the problem of the development of the Richtmyer–Meshkov instability”, *Parallel Computing Technologies – XVIII All-Russian Conference with International participation.*, **14** (2024), 17–30.
11. P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7** (1954), 159–193. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112>
12. E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares, “Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver”, *Shock Waves*, **4** (194), 25–34. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01414629>
13. C. W. Shu, “Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws”, *ICASE Report*, 1997, no. 97–65, 79.
14. K. R. Bates, N. Nikiforakis, D. Holder, “Richtmyer–Meshkov Instability Induced by the Interaction of a Shock Wave with a Rectangular Block of SF<sub>6</sub>”, *Physics of Fluids*, **19** (2007), 036101.
15. A. V. Danilin, A. V. Solovjev, “Simulation of Turbulent Mixing by the CABARET Algorithm for the Case of a Richtmyer–Meshkov Instability”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **30:8** (2019), 247–255. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048219020054>
16. X. Luo, M. Wang, T. Si, Zh. Zhai, “On the interaction of a planar shock with an SF<sub>6</sub> polygon”, *J. Fluid Mech*, **773** (2015), 366–394. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.257>

*Submitted 12.02.2024; Revised 15.04.2024; Accepted 29.05.2024*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.157-174

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:539.3

**Континуальная модель перидинамики для задач хрупкого разрушения****Ю. Н. Дерюгин, Д. А. Шишканов***ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», (г. Саранск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В статье проводится исследование нелокального метода перидинамики, который позволяет моделировать хрупкое разрушение твердого тела без использования пространственных производных. Основное уравнение движения частицы с заданным объемом записывается в интегральном виде. В статье рассматривается модель, сочетающая в себе ключевые особенности механики сплошной среды и нелокального метода. Для задания сил межчастичного взаимодействия использовалась зависимость тензора напряжений Коши от тензора градиента скорости деформаций. Такая формулировка корректно описывает поведение материала при разрушении и позволяет избавиться от ограничений, свойственных простым моделям на основе связи и на основе обычного состояния. В качестве критерия разрушения используется максимальное значение напряжения при растяжении, которое задает процесс зарождения и эволюцию повреждений. Для тестирования реализованной модели использовались задачи в двумерной постановке. На примере упругой задачи об одноосном растяжении тонкого стержня показана сходимости численного решения при уменьшении горизонта взаимодействия и увеличении числа частиц. Вторая задача демонстрирует возможности реализованной модели описывать зарождение и эволюцию трещины при одноосной нагрузке на пластину с начальным горизонтальным дефектом.

**Ключевые слова:** перидинамика, нелокальное взаимодействие, горизонт взаимодействия, связь, критерий разрушения, тензор градиента деформаций

**Для цитирования:** Дерюгин Ю. Н., Шишканов Д. А. Континуальная модель перидинамики для задач хрупкого разрушения // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 157–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.157-174>

*Об авторах:*

**Дерюгин Юрий Николаевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Шишканов Дмитрий Алексеевич**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

© Ю. Н. Дерюгин, Д. А. Шишканов



MSC2020 74B05 74R10

# Continuum Model of Peridynamics for Brittle Fracture Problems

Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** The article investigates the nonlocal method of peridynamics, which makes it possible to simulate the brittle fracture of a solid body without using spatial derivatives. The basic motion equation of a particle with a given volume is written in integral form. A model combining the key features of continuum mechanics and of the nonlocal method is considered. To determine the forces of pair interaction, the dependence of the Cauchy stress tensor on the rate-of-strain tensor was used. This formulation correctly describes the behavior of the material during damage and allows to get rid of the limitations inherent to simple bond-based model and ordinary state-based model. The maximum value of the tensile stress is used as a criterion of fracture, which describes the process of nucleation and evolution of damage. To test the implemented model, tasks in a two-dimensional formulation were used. Using the example of the elastic problem about uniaxial tension of a thin rod, the convergence of the numerical solution is shown with a decrease of interaction horizon and an increase of particles number. The second task demonstrates the capabilities of the implemented model to describe the nucleation and evolution of a crack under uniaxial load on a plate with an initial horizontal defect.

**Keywords:** peridynamic, nonlocal interactions, interaction horizon, bond, fracture criterion, strain gradient tensor

**For citation:** Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov. Continuum Model of Peridynamics for Brittle Fracture Problems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 157–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.157-174>

*About the authors:*

**Yuriy N. Deryugin**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, [dyn1947@yandex.ru](mailto:dyn1947@yandex.ru)

**Dmitry A. Shishkanov**, Postgraduate Student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3063-4798>, [dima.shishkanov.96@mail.ru](mailto:dima.shishkanov.96@mail.ru)

## 1. Введение

Статья является продолжением исследования метода перидинамики [1–2] – альтернативного подхода для решения задач механики твердых тел. Формулировка перидинамики построена на использовании интегральных уравнений, избегая пространственных производных [3]. Область континуума задается в виде системы взаимодействующих между собой частиц с заданным объемом. Взаимодействие частиц осуществляется посредством связи в пределах замкнутого горизонта – масштаба длины  $\delta$ .

*Yu. N. Deryugin, D. A. Shishkanov. Continuum model of peridynamics for brittle fracture problems*

Non-ordinary state-based (NOSB) модель перидинамики [4] является обобщением подходов, рассмотренных в [1]. Она использует формулировку классической теории и перидинамики, которая позволяет избавиться от ограничений, свойственных моделям bond-based (BB) и ordinary state-based (OSB) [1–2]. Зависимость вектора силы частицы от тензоров деформаций и напряжений позволяет задавать любое направление действия силы, что гораздо более реалистично для моделирования континуума.

В нелокальной теории точность вычисления тензоров зависит от расстояния между частицами  $\Delta x$  и горизонта взаимодействия  $\delta$ . Согласно теории сходимости [5], уравнения перидинамики превращаются в уравнения механики сплошной среды (МСС) при уменьшении  $\delta$ . Предельные численные решения этих уравнений также будут совпадать при увеличении числа частиц дискретной модели и измельчении сетки в МСС. В задачах разрушения для получения корректного результата моделирования при минимально возможных вычислительных затратах рекомендуется использовать  $\delta \approx 3\Delta x$  [6].

Исследование, проведенное в данной работе, заключается в реализации и тестировании NOSB модели перидинамики на примере двумерных задач упругости и разрушения. В качестве критерия разрушения используется максимальное значение напряжения при растяжении [7].

## 2. Метод перидинамики

Теория перидинамики была введена Силингом [3] как способ решения задач механики твердого тела без использования пространственных производных, основываясь на интегральных уравнениях. Твердое тело представляется в виде системы взаимодействующих между собой частиц с заданными массой —  $m_i$ , плотностью —  $\rho_i$ , начальными координатами —  $\vec{r}_i^0(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ . Каждая дискретная частица  $\vec{r}_i$  взаимодействует с другими частицами  $\vec{r}_k$  на конечном расстоянии  $\vec{\xi}_i = \vec{r}_k - \vec{r}_i$  посредством связи в пределах замкнутого горизонта —  $\delta$ . Движение деформируемой среды описывается векторами относительных смещений  $\vec{\eta}_i = \vec{u}_k - \vec{u}_i$  и векторами относительных положений  $\vec{Y}_i = \vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i$ .

Уравнение движения частицы  $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  задается в виде

$$\rho_i \ddot{\vec{u}}(\vec{r}_i, t) = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k - \vec{u}_i, \vec{r}_k - \vec{r}_i) dV_{\vec{r}_k} + \vec{b}(\vec{r}_i, t), \quad (2.1)$$

где  $\vec{b}$  — граничные условия.

Выделяют две основные формулировки перидинамики — на основе связи (bond-based) [3, 8] и на основе состояний (state-based) [4, 9]. Модель на основе состояний в свою очередь подразделяется на ordinary state-based (OSB) и NOSB. NOSB модель обобщает рассмотренные ранее PMB и LPS модели [1, 2]. Более подробно теория перидинамики представлена в [10, 11].

## 3. NOSB модель

Рассматриваемая модель основана на вычислении вектора силы каждой частицы в связи [7, 12, 13]. Описание модели начинается с задания энергии деформирования, как и в МСС. Для упругих деформаций:

$$W_i = \frac{\lambda_i}{2} \sum_k E_{kk}^i E_{kk}^i + G_i \sum_{m,l} E_{ml} E_{ml}, \quad (3.1)$$

где  $\lambda_i = K_i - \frac{2}{3}G_i$  — коэффициенты Ламэ;  $K_i$  — объемный модуль упругости;  $G_i$  — модуль сдвига;  $E_i$  — упругий тензор деформаций Грина:

$$E_i = \frac{1}{2} (F_i^T F_i - I), \quad (3.2)$$

где  $F_i^T F_i$  — упругий тензор деформаций Коши-Грина;  $I$  — единичная матрица;  $F_i$  — тензор градиента деформаций:

$$F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i + \vec{\eta}_i) \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (3.3)$$

где  $\omega(|\vec{\xi}_i|)$  — функция влияния в виде кубического сплайна 3.5;  $K_i$  — шаровой тензор деформаций:

$$K_i = \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) (\vec{\xi}_i \otimes \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}, \quad (3.4)$$

$$\omega(|\vec{\xi}_i|) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3, & d \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3, & \frac{1}{2} < d \leq 1, \\ 0, & d > 1, \end{cases} \quad d = \frac{|\vec{\xi}_i|}{\delta}, \quad (3.5)$$

Тензор напряжений для системы координат начального состояния (второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа) определяется по закону Гука 3.6. Симметричный тензор напряжений в деформированном состоянии (тензор напряжений Коши) записывается в виде 3.7.

$$S_i = \frac{\partial W_i}{\partial E_i} = \lambda_i \text{Tr}(E_i) g_{kl} + 2G_i E_i, \quad (3.6)$$

где  $g_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$  — дельта-функция,

$$\sigma_i = F_i \left( \frac{1}{\det(F_i)} S_i \right) F_i^T. \quad (3.7)$$

Вычисление  $\sigma_i$  относительно начальной конфигурации (3.2), (3.6), (3.7) используется для описания малых упругих деформаций [13]. Преобразование напряжения из начальной конфигурации в деформируемую конфигурацию некорректно описывает поведение материала при хрупком разрушении. В данной работе для описания кинематики частицы используется тензор градиента скорости деформаций [14]. Тензор напряжений Коши записывается в виде (3.11).

Тензор градиента скорости деформаций задается в виде:

$$L_i = \dot{F}_i F_i^{-1}, \quad (3.8)$$

где  $\dot{F}_i$  — производная тензора градиента деформаций по времени:

$$\dot{F}_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \dot{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}. \quad (3.9)$$

Симметричная часть тензора градиента скорости описывает скорость тензора деформаций:

$$d_i = \frac{1}{2} (L_i + L_i^T). \quad (3.10)$$

Тензор напряжений Коши обновляется на каждом временном шаге:

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \Delta\sigma_i, \quad (3.11)$$

где  $\Delta\sigma_i$  — тензор приращения напряжений 3.12.

Тензор приращения напряжений  $\Delta\sigma_i$  (3.12) получается в зависимости от тензора приращения деформаций  $\Delta E_i$  (3.13).

$$\Delta\sigma_i = \lambda_i Tr(\Delta E_i) g_{kl} + 2G_i \Delta E_i \quad (3.12)$$

$$\Delta E_i = d_i \cdot \Delta t \quad (3.13)$$

Подставляя (3.8) и (3.10) в (3.13), получаем (3.14) — зависимость  $\Delta E_i$  от тензора приращения градиента деформаций  $\Delta F_i$  (3.15).

$$\Delta E_i = \frac{1}{2} (\Delta F_i F_i^{-1} + F_i^{-T} \Delta F_i^T), \quad (3.14)$$

$$\Delta F_i = \left( \int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \omega(|\vec{\xi}_i|) \Delta \vec{Y}_i \otimes \vec{\xi}_i dV_{\vec{r}_k} \right) \cdot K_i^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $\Delta \vec{Y}_i = \Delta \vec{u}_k - \Delta \vec{u}_i$  — приращение относительного положения частицы  $i$ ,  $\Delta \vec{u}_i = \Delta \vec{u}_i^{n+1} - \Delta \vec{u}_i^n$  — приращение смещения частицы  $i$ .

Вектор силы  $\vec{T}_i$  для каждой частицы в связи задается в виде:

$$\vec{T}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i, \quad (3.16)$$

где  $P_i$  — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа:

$$\vec{P}_i = J \sigma_i F_i^{-T}, \quad J = \det(F_i). \quad (3.17)$$

Тогда сила парного взаимодействия в связи  $\vec{f}_i$  для (2.1) вычисляется как

$$\vec{f}_i = \omega(|\vec{\xi}_i|) P_i K_i^{-1} \vec{\xi}_i - \omega(|\vec{\xi}_k|) P_k K_k^{-1} \vec{\xi}_k, \quad (3.18)$$

где  $i$  и  $k$  — индексы данной частицы  $\vec{r}_i$  и частицы  $\vec{r}_k$  из множества соседей  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  соответственно.

### 4. Объемы дискретных частиц

При численном интегрировании, уравнения движения (2.1) аппроксимируются дискретными объемами частиц в области  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ :

$$\rho_i \vec{u}_i^n = \sum_{k \in \mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \vec{f}_i(\vec{u}_k^n - \vec{u}_i^n, \vec{r}_k^0 - \vec{r}_i^0) \Delta V_k + \vec{b}_i^n \tag{4.1}$$

В (4.1) суммирование идет по частицам, представленным на рисунке 4.1a. В МСС область интегрирования сплошная, как показано на рисунке 4.1b. Для улучшения аппроксимации в данной работе используется корректировка объемов частиц, описанная в справочниках по перидинамике [10, 11]:

$$\Delta V_k = k(\vec{\xi}_i) \cdot \Delta x^3, \tag{4.2}$$

где  $k(\vec{\xi}_i)$  — линейная корректирующая функция:

$$k(\vec{\xi}_i) = \begin{cases} \frac{\delta + \frac{\Delta x}{2} - |\vec{\xi}_i|}{\Delta x}, & \delta - \frac{\Delta x}{2} \leq |\vec{\xi}_i| \leq \delta, \\ 1, & |\vec{\xi}_i| \leq \delta - \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & |\vec{\xi}_i| > \delta, \end{cases} \tag{4.3}$$

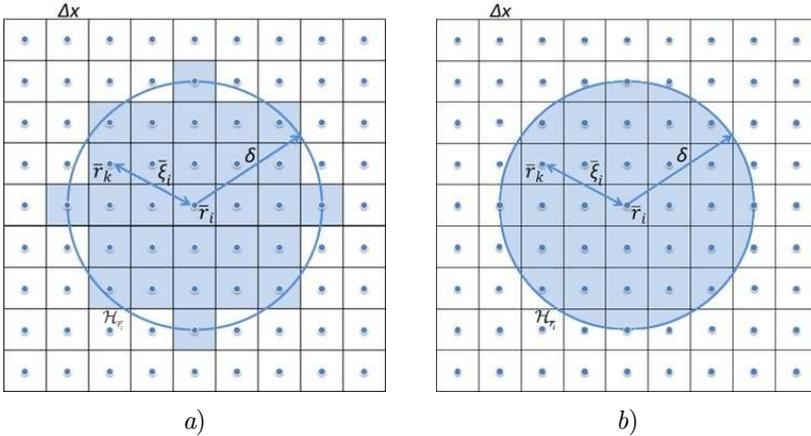


Рис. 4.1. Объемы дискретных частиц в  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ : a) — перидинамика; b) — МСС

Fig 4.1. Discret particles volumes in  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ : a) — peridynamics; b) — continuum mechanics

### 5. Повреждение и критерий разрушения

Локальное повреждение (5.1) задается в зависимости от числа разорванных связей каждой частицы в пределах ее горизонта взаимодействия и принимает значения в диапазоне  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , где 0 означает, что материал целый, а 1 означает заверченный

разрыв связей частицы со всеми частицами, с которыми она изначально взаимодействовала [7]:

$$\phi_i = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} \mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) dV_{\vec{r}_k}}{\int_{\mathcal{H}_{\vec{r}_i}} dV_{\vec{r}_k}}, \quad (5.1)$$

где  $\mu$  — скалярная функция положения материальной точки, которая принимает значения 1 или 0, определяется формулой

$$\mu(\vec{r}_i, t, \vec{\xi}_i) = \begin{cases} 1, & \sigma_{ij}^I < f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t \\ 0, & \sigma_{ij}^I \geq f_t \quad \forall 0 \leq t' \leq t, \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $f_t$  — критическое значение напряжения связи, пока предполагается константой;  $\sigma_{ij}^I$  — максимальное главное напряжение (5.4), полученное из тензора:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j), \quad (5.3)$$

где  $j$  — индекс частицы из  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$ .

$$\sigma_{ij}^I = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{11} + \sigma_{ij}^{22}) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ij}^{11} - \sigma_{ij}^{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{ij}^{12})^2}, \quad (5.4)$$

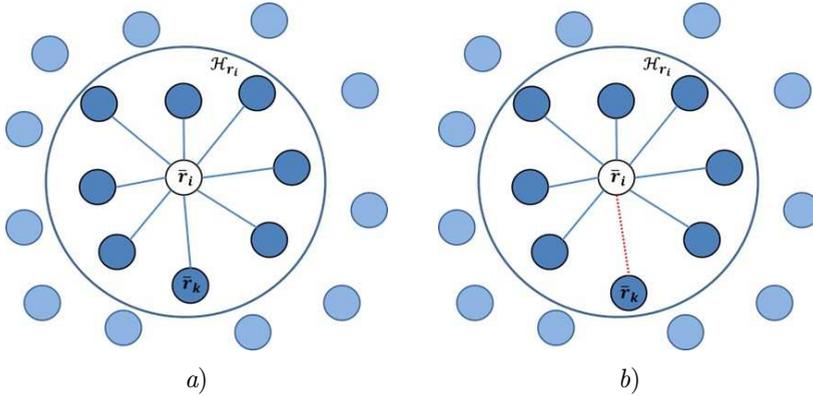
где  $\sigma_{ij}^{11}, \sigma_{ij}^{22}, \sigma_{ij}^{12}$  — компоненты тензора  $\sigma_{ij}$ .

Частица  $\vec{r}_i$  внутри  $\mathcal{H}_{\vec{r}_i}$  взаимодействует со всеми своими соседями  $\vec{r}_k$  до момента разрыва связи, как показано на рисунке 5.1a. Вектор сил двух взаимодействующих частиц в связи вычисляется в зависимости от градиента деформаций, который является функцией относительных смещений. При достижении максимальным главным напряжением  $\sigma_{ij}^I$  критического значения напряжения  $f_t$ , взаимодействие прекращается, как показано на рисунке 5.1b. После этого тензор градиента деформаций вычисляется без учета разорванной связи.

## 6. Тестовые расчеты

Перидинамика относится к числу нелокальных методов с масштабом длины  $\delta$ . Точность вычисления тензоров зависит от способа дискретизации области континуума и от выбора горизонта взаимодействия. Согласно теории сходимости [5], уравнения перидинамики превращаются в уравнения МСС при уменьшении  $\delta$ , а также при увеличении числа частиц дискретной модели и измельчении сетки в МСС. В задачах разрушения для получения корректного результата моделирования при минимально возможных вычислительных затратах рекомендуется использовать  $\delta \approx 3\Delta x$  [6].

Для тестирования нелокального метода использовались простая задача на исследование упругих свойств материала и задача разрушения хрупкого материала.



**Рис. 5.1.** Схема взаимодействующих частиц: а) — нет разорванных связей; б) — есть разорванная связь

**Fig 5.1.** Scheme of interacting particles: а) — there are no broken bonds; б) — there is a broken bond

## 7. Одноосное растяжение тонкого стержня в 2D-постановке

Тонкий стержень подвергается растяжению с левого конца при фиксированном правом. Начальная постановка задачи и аналитическое решение взяты из [13]. Используются безразмерные величины.

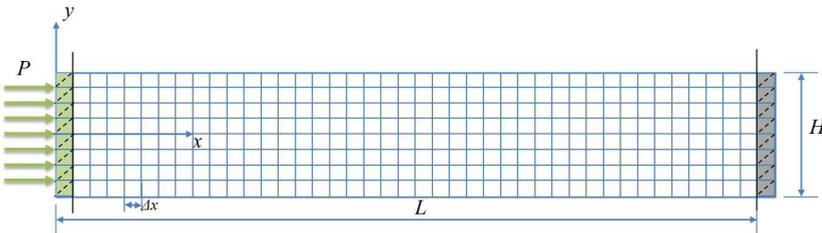
Геометрия задачи:  $0 < x < L$ ,  $-\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2}$ ,  $L = 100$ ,  $H = 10$ .

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 100$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ , плотность  $\rho = 1$ .

Граничные условия

$$w_x(x = 0, t) = 0.0001, w_x(x = L, t) = 0. \quad (7.1)$$

применяются для одного слоя частиц с каждого конца стержня как показано на рисунке 7.1. К левому концу прикладывается постоянное давление  $P = -1$ .



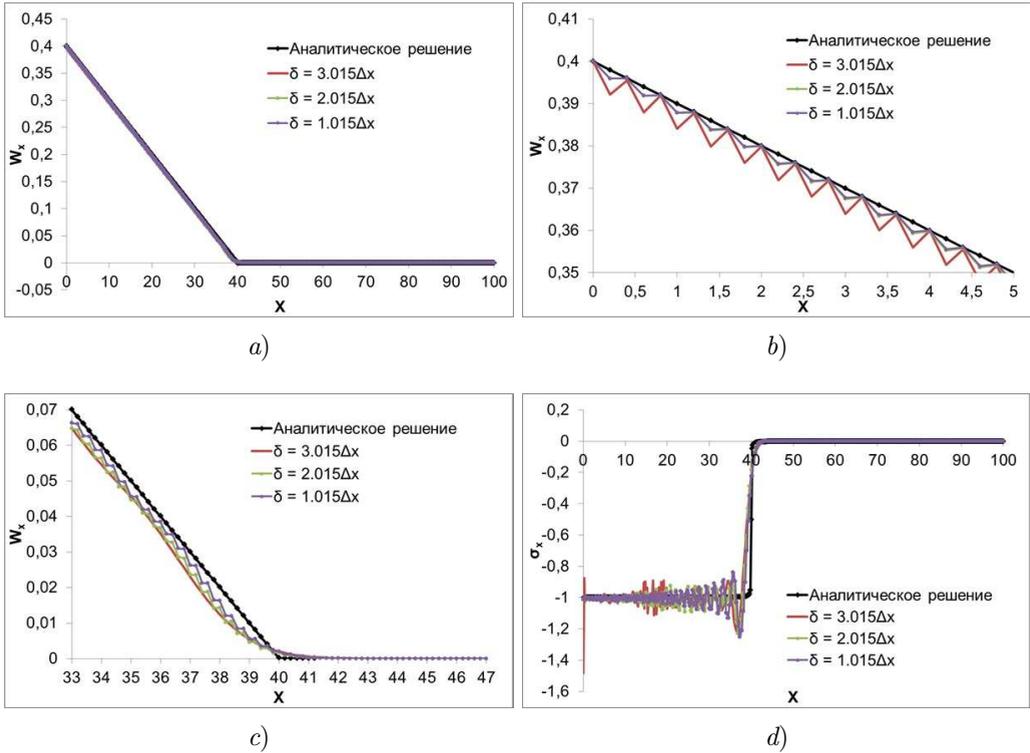
**Рис. 7.1.** Геометрия задачи и граничные условия  
**Fig 7.1.** Problem geometry and boundary conditions

Данная задача рассматривается при условии плоского напряжения. Результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением из [13].

В расчетах исследуется сходимость реализованной модели для различных значений числа частиц и горизонта взаимодействия. Используются графики смещения и напря-

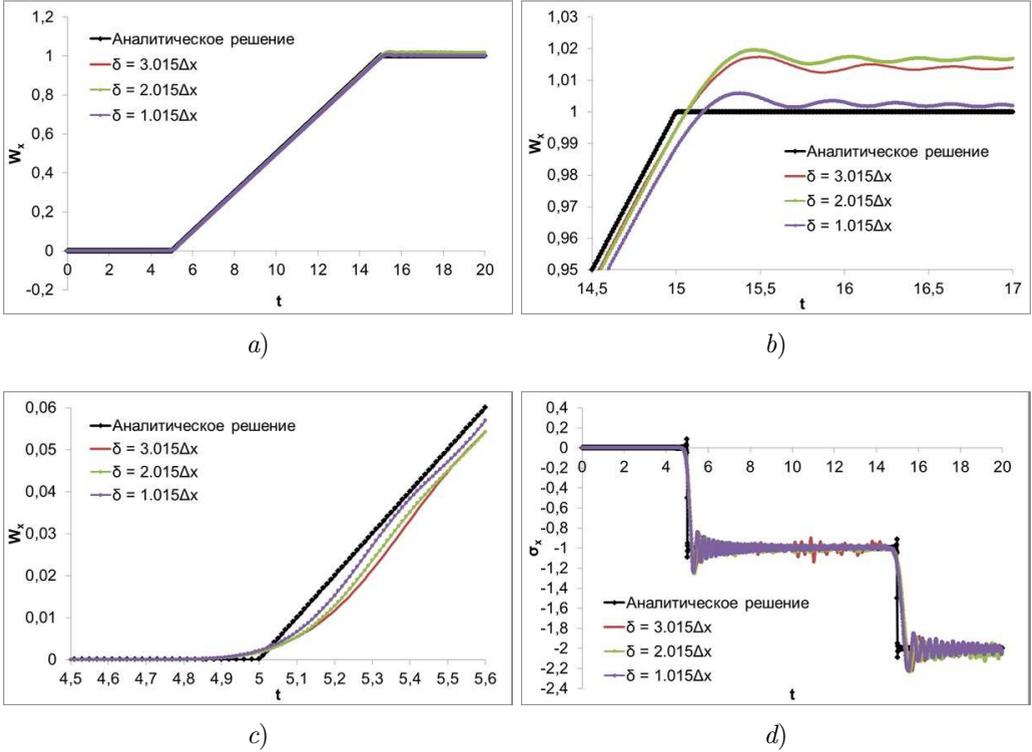
жения вдоль оси  $Ox$  на начальный момент времени (рис. 7.2, 7.5), смещения и напряжения частицы в сечении  $x = L/2$  на всем временном интервале (рис. 7.3, 7.6), а также диаграммы среднеквадратичного отклонения смещения от аналитического решения (рис. 7.4, 7.7).

В первой части расчетов варьируется горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015 \Delta x$ ,  $\delta = 2.015 \Delta x$ ,  $\delta = 1.015 \Delta x$  при фиксированном числе частиц  $N = 25551$  ( $\Delta x = 0.2$ ). Сходимость достигается при уменьшении горизонта взаимодействия (Рис. 7.5 – 7.7).

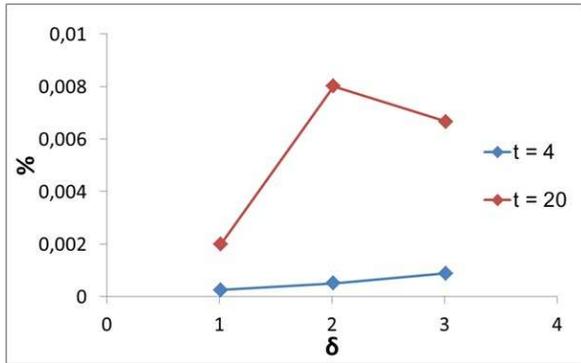


**Рис. 7.2.** Смещение (a, b, c) и напряжение (d) вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t = 4$  для различных  $\delta$ .

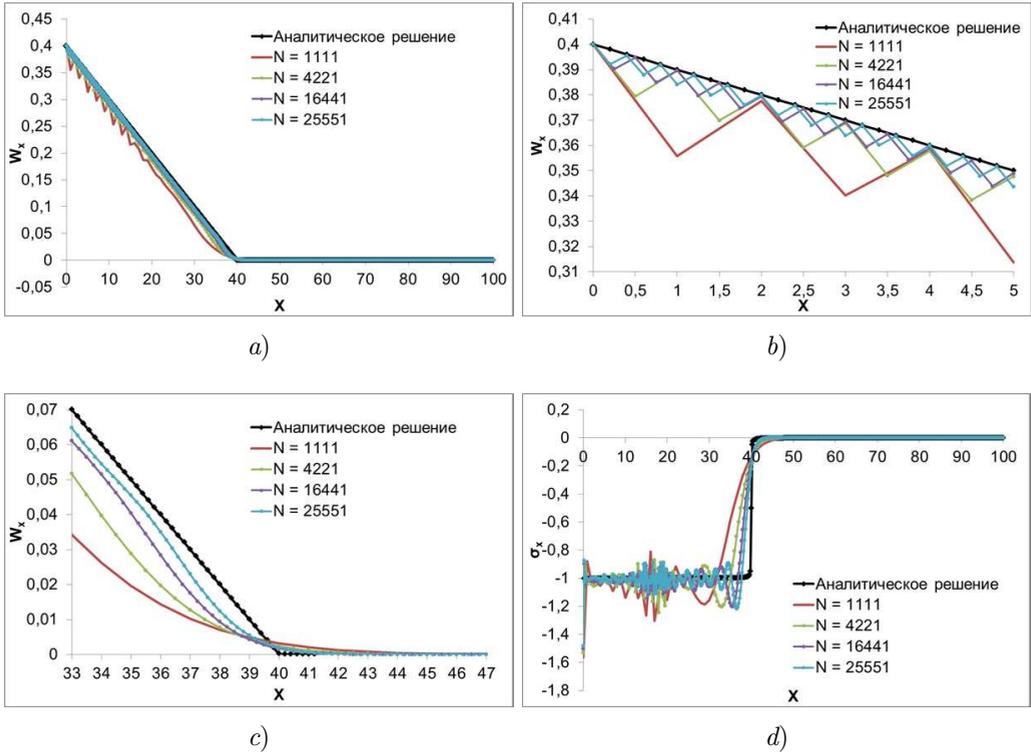
**Fig 7.2** Displacement (a, b, c) and stress (d) along the  $Ox$  axis at time  $t = 4$  for different  $\delta$



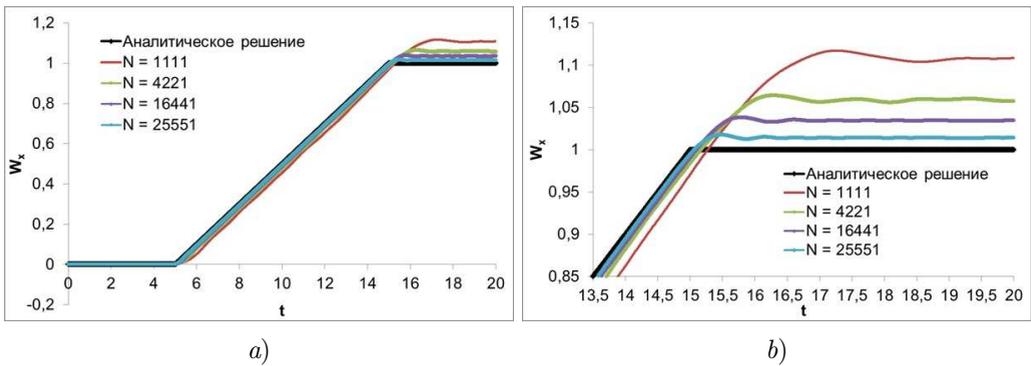
**Рис. 7.3.** Зависимость смещения (a, b, c) и напряжения (d) частицы в сечении  $x = L/2$  от времени для различных  $\delta$   
**Fig 7.3.** The dependence of the displacement (a, b, c) and stress (d) of the particle in the cross section  $x = L/2$  on time for different  $\delta$

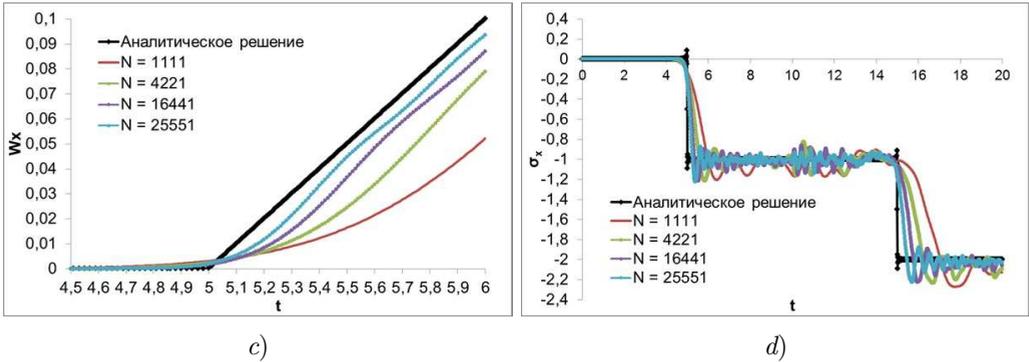


**Рис. 7.4.** График среднеквадратичного отклонения смещения частиц от эталона на времена для различных  $\delta$ :  
 1 —  $\delta = 1.015\Delta x$ , 2 —  $\delta = 2.015\Delta x$ , 3 —  $\delta = 3.015\Delta x$   
**Fig 7.4.** Mean-square deviation graph of particle diaplacement from analytical solution for times for different  $\delta$ :  
 1 —  $\delta = 1.015\Delta x$ , 2 —  $\delta = 2.015\Delta x$ , 3 —  $\delta = 3.015\Delta x$



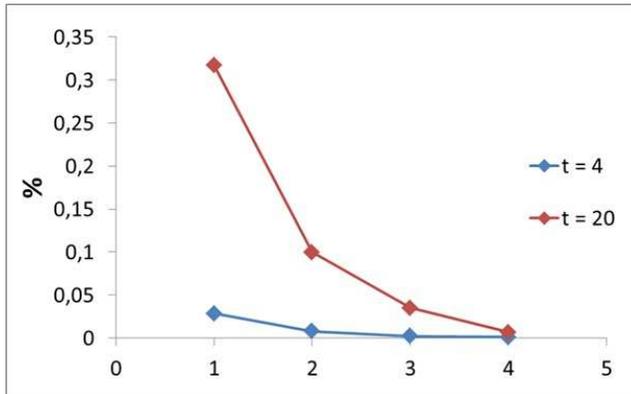
**Рис. 7.5.** Смещение (*a, b, c*) и напряжение (*d*) вдоль оси  $Ox$  в момент времени  $t = 4$  для различного числа частиц  
**Fig 7.5.** Displacement (*a, b, c*) and stress (*d*) along the  $Ox$  axis at time  $t = 4$  for different particles number





**Рис. 7.6.** Зависимость смещения ( $a, b, c$ ) и напряжения ( $d$ ) частицы в сечении  $x = L/2$  от времени для различного числа частиц.

**Fig 7.6** The dependence of the displacement ( $a, b, c$ ) and stress ( $d$ ) of the particle in the cross section  $x = L/2$  on time for different particles number



**Рис. 7.7.** График среднеквадратичного отклонения смещения частиц от эталона на времена для различного числа частиц:

1 -  $N = 1111$ , 2 -  $N = 4223$ , 3 -  $N = 16441$ , 4 -  $N = 25551$

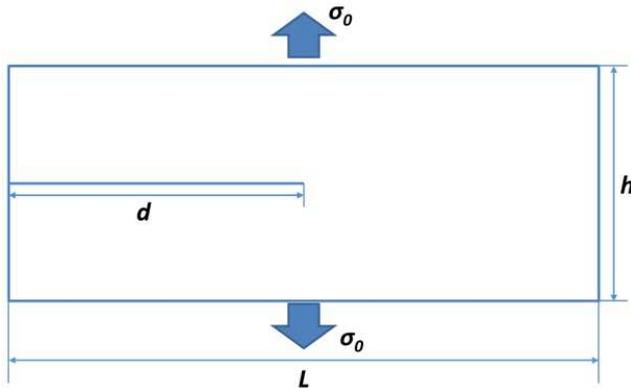
**Fig 7.7.** Mean-square deviation graph of particle displacement from analytical solution for times for different particles number:

1 -  $N = 1111$ , 2 -  $N = 4223$ , 3 -  $N = 16441$ , 4 -  $N = 25551$

Во второй части расчетов варьируется число частиц  $N = 1111$  ( $\Delta x = 1$ ),  $N = 4221$  ( $\Delta x = 0.5$ ),  $N = 16441$  ( $\Delta x = 0.25$ ),  $N = 25551$  ( $\Delta x = 0.2$ ) при фиксированном значении  $\delta = 3.015\Delta x$ . Сходимость наблюдается при увеличении числа частиц.

## 8. Разрушение пластины с горизонтальной трещиной при одноосной нагрузке

Прямоугольная пластина с горизонтальным дефектом подвергается постоянной симметричной нагрузке как показано на рисунке 8.1. В качестве хрупкого материала используется стекло. Постановка задачи взята из [7].



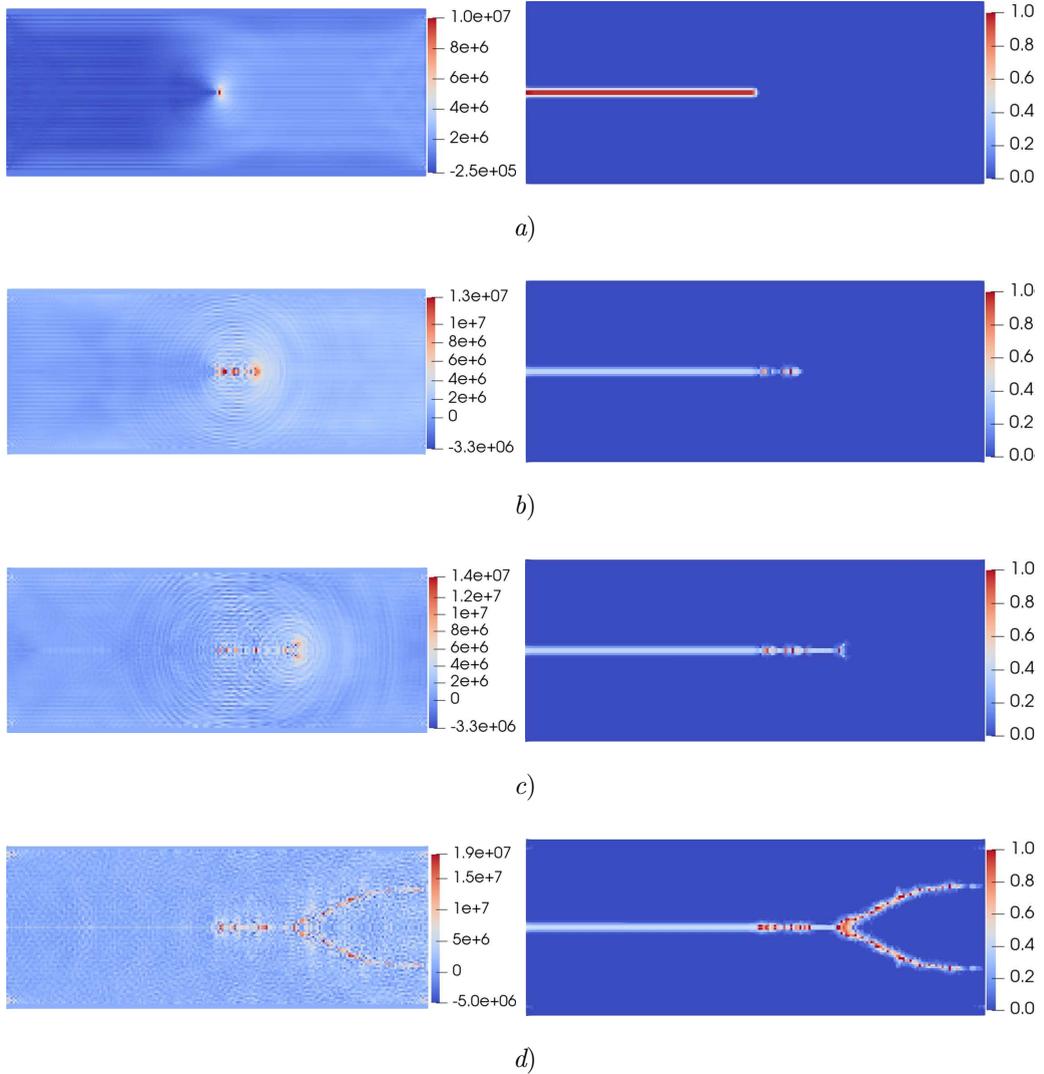
**Рис. 8.1.** Геометрия и условия нагрузки для прямоугольной пластины  
**Fig 8.1.** Geometry and load conditions for a rectangular plate

Геометрия задачи:  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ ,  $-\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2}$ ,  $L = 0.1$  м,  $h = 0.04$  м,  $d = 0.05$  м.

Свойства материала: модуль Юнга  $E = 65$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , плотность  $\rho = 2235$  кг/м<sup>3</sup>.

В качестве критерия разрушения используется критическое значение напряжения при растяжении  $f_t = 10$  МПа. Дефект задается как локальное повреждение по формуле (5.1) с заданным числом разорванных связей. Начальное значение прикладываемой нагрузки  $\sigma_0 = 1$  МПа, горизонт взаимодействия  $\delta = 3.015\Delta x$ , шаг сетки  $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$  м, число частиц  $N = 16000$ , счетный шаг  $\Delta t = 0.01$  мкс, конец счета при  $t = 60$  мкс.

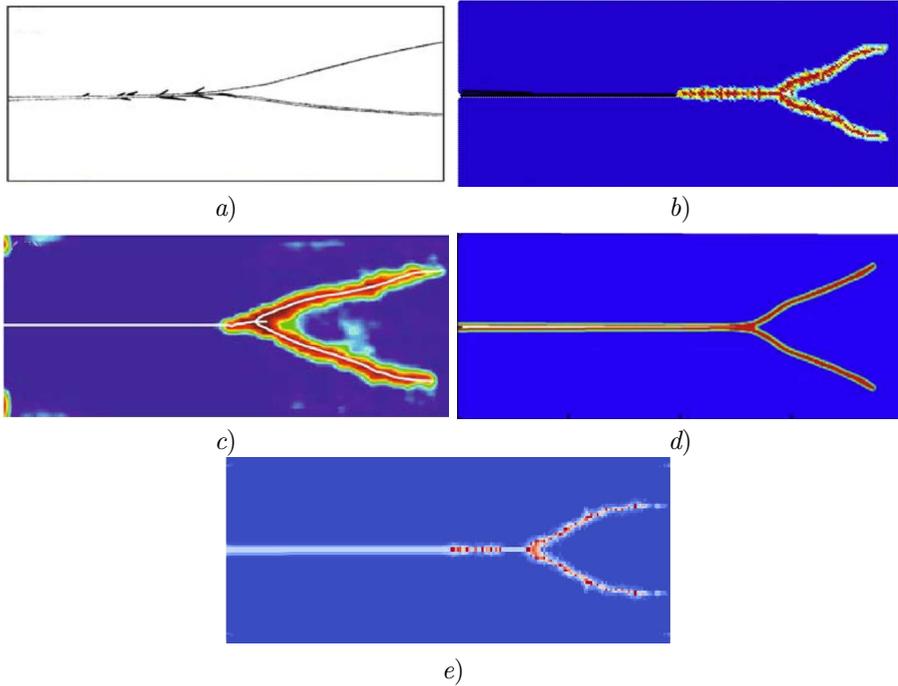
Результаты расчета представлены в виде растровых картин разрушения и напряжения пластины, полученные в ParaView 5.9.0. На Рис. 8.2a видно, что предельное значение напряжения достигается в центре пластины в области начального дефекта на момент времени 7.6 мкс, где происходит зарождение трещины, то есть первый разрыв связей под нагрузкой в области концентрации максимальных главных напряжений. При дальнейшей нагрузке повреждение развивается горизонтально вдоль прямой линии (Рис. 8.2b) до момента начала ветвления (Рис. 8.2c). Образовавшиеся ветви трещины распространяются симметрично относительно оси  $Ox$  до конца счета задачи (Рис. 8.2d). Качественное сравнение результата разрушения представлено на рисунке 8.3. Наблюдается адекватное поведение эволюции разрушения с сохранением симметрии ветвления. На рисунке 8.4 показана скорость образования трещины в сравнении с данными из открытых источников. Видно, что начало зарождения разрушения совпадает с результатом, полученным по методу конечных элементов [16], однако дальнейшее распространение трещины протекает медленнее. С этим связано и разное конечное время счета задачи (60 мкс по NOSB модели и 45 мкс по методу конечных элементов).



**Рис. 8.2.** Растровые картины максимального главного напряжения (первый столбец, Па) и повреждения (второй столбец) на времена:

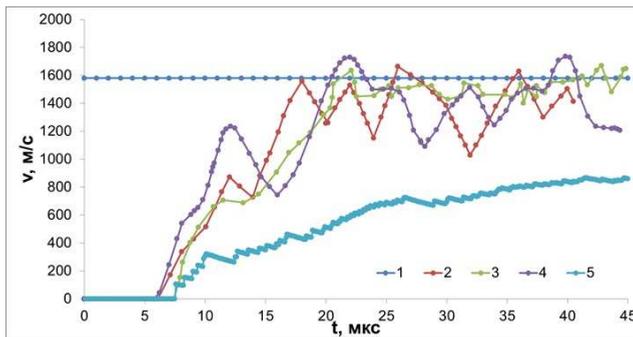
a)  $t = 7.6 \mu\text{с}$ ; b)  $t = 20 \mu\text{с}$ ; c)  $t = 29 \mu\text{с}$ ; d)  $t = 60 \mu\text{с}$

**Fig 8.2.** Raster pictures of the maximum main stress (first column, Pa) and damage (second column) at times: a)  $t = 7.6 \mu\text{s}$ ; b)  $t = 20 \mu\text{s}$ ; c)  $t = 29 \mu\text{s}$ ; d)  $t = 60 \mu\text{s}$



**Рис. 8.3.** Сравнение картины ветвления трещины на конечный момент времени: *a)* — эксперимент [15]; *b)* — численная модель из [7]; *c)* — метод конечных элементов XFEM из [16]; *d)* — bond-based модель из [17]; *e)* — NOSB модель

**Fig 8.3.** Comparison of the crack branching pattern at a finite point in time: *a)* — experiment [15]; *b)* — numerical model in [7]; *c)* — XFEM finite element method in [16]; *d)* — bond-based model in [17]; *e)* — NOSB model



**Рис. 8.4.** Скорость эволюции трещины: 1 — эксперимент [15]; 2 — численная модель из [7]; 3 — метод конечных элементов XFEM [16]; 4 — bond-based модель из [17]; 5 — NOSB модель

**Fig 8.4.** The rate of crack evolution: 1 — experiment [15]; 2 — numerical model in [7]; 3 — XFEM finite element method in [16]; 4 — bond-based model из [17]; 5 — NOSB model

## 9. Заключение

В результате проделанной работы реализована и протестирована NOSB модель перидинамики. Показаны сходимость численного решения упругой задачи к аналитике и возможность реализованной модели описывать хрупкое разрушение с применением критерия максимального напряжения при растяжении. Использование большого горизонта взаимодействия  $\delta \approx 3\Delta x$  для задачи с дефектом с одной стороны позволяет адекватно моделировать процесс разрушения, с другой стороны вносит погрешность численного интегрирования при вычислении тензора градиента деформаций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шишканов Д. А., Ветчинников М. В., Дерюгин Ю. Н. Метод перидинамики для решения задач разрушения твердых тел // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 4. С. 452–468. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
2. Дерюгин Ю. Н., Ветчинников М. В., Шишканов Д. А. Исследование различных функций влияния в перидинамике // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 342–360. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>
3. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 34. pp. 1-34. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)
4. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E. Peridynamic states and constitutive modeling. Lincoln: University of Nebraska, 2007. 34 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9125-1>
5. Silling S. A., Lehoucq R. B. Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory // Sandia National Laboratories. 2007. 25 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
6. Silling S. A., Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics // Computers and Structures. 2005. 9 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
7. Zhou X., Wang Y., Qian Q. Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. Vol. 23. pp. 277-299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.08.009>
8. Liu W. Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics. Michigan: Michigan State University, 2012. 193 p. 1-193. <https://doi.org/doi:10.25335/ezc6-p195>
9. Silling S. A. Linearized theory of peridynamic states // Sandia National Laboratories. 2010. Vol. 27. pp. 85-111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9234-0>

10. Bobaru F., Geubelle P.H., Foster J.T., Silling S.A. Handbook of Peridynamic Modeling. Abingdon: CRC Press by Taylor & Francis Group, 2017. Vol. 568. pp. 25-27. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>
11. Erdogan M., Erkan O. Peridynamic Theory and Its Applications. New York: Springer, 2014. 284 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>
12. Tupek M, Rimoli J, Radovitzky R. An approach for incorporating classical continuum damage models in state-based peridynamics. // *Comput. Methods Appl. Mech. Energ* 2013. Vol. 7. pp. 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.04.012>
13. Gu X., Zhang Q., Yu Y. An effective way to control numerical instability of a nonordinary state-based peridynamic elastic model // *Department of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 8. pp. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1750876>
14. Kan X., Yan J., Li S., Zhang A. On differences and comparisons of peridynamic differential operators and nonlocal differential operators // *Computational Mechanics* 2021. 19 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02072-8>
15. Ravi-Chandar K., Knauss W. G. An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects. // *Int. J. Fract.* 1984. Vol. 26. pp. 65-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01152313>
16. Song J., Wang H., Belytschko T. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture // *Computational Mechanics* 2006. Vol. 12. pp. 239-250. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0210-x>
17. Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. // *Eng. Fract. Mech.* 2011. Vol. 78. pp. 1156-1168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.020>

*Поступила 15.02.2024; доработана после рецензирования 27.03.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. D. A. Shishkanov, M. V. Vetchinnikov, Yu. N. Deryugin, “Peridynamics method for problems solve of solids destruction”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:4 (2022), 1–17 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202204.452-468>
2. Yu. N. Deryugin, M. V. Vetchinnikov, D. A. Shishkanov, “Investigation of different influence functions in peridynamics”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:4 (2023), 1–19 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.342-360>
3. S. A. Silling, “Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 34 p. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0)

4. S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, “Peridynamic states and constitutive modeling”, 2007, 34 p.
5. S. A. Silling, R. B. Lehoucq, “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory”, *Sandia National Laboratories*, 2007, 25 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-008-9163-3>
6. S. A. Silling, E. Askari, “A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics”, *Computers & Structures*, 2005, 9 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.11.026>
7. X. Zhou, Y. Wang, Q. Qian, “Numerical simulation of crack curving and branching in brittle materials under dynamic loads using the extended non-ordinary state-based peridynamics”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **23** (2016), 277–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.08.009>
8. W. Liu, *Discretized bond-based peridynamics for solid mechanics*, Michigan State University, Michigan, 2012 DOI: <https://doi.org/doi:10.25335/ezc6-p195>, 193 p.
9. S. A. Silling, “Linearized theory of peridynamic states”, *Sandia National Laboratories*, **27** (2010), 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9234-0>
10. F. Bobaru, P.H. Geubelle, J.T. Foster, S. A. Silling, *Handbook of Peridynamic Modeling*, **568**, CRC Press by Taylor & Francis Group, LLC, 2017 DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315373331>.
11. E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, Springer, New York, 2014 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8465-3>, 284 p.
12. M. Tupek, J. Rimoli, R. Radovitzky, “An approach for incorporating classical continuum damage models in state-based peridynamics”, *Comput. Methods Appl. Mech. Energ.*, **7** (2013), 20–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.04.012>
13. X. Gu, Q. Zhang, Y. Yu, “An effective way to control numerical instability of a nonordinary state-based peridynamic elastic model”, *Department of Engineering Mechanics*, 2017, 8 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1750876>
14. X. Kan, J. Yan, S. Li, A. Zhang, “On differences and comparisons of peridynamic differential operators and nonlocal differential operators”, *Computational Mechanics*, 2021, 19 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02072-8>
15. K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, “An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects”, *International Journal of Fracture*, **26** (1984), 65–80. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01152313>
16. J. Song, H. Wang, T. Belytschko, “A comparative study on finite element methods for dynamic fracture”, *Computational Mechanics*, **12** (2006), 239–250. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0210-x>
17. Y.D. Ha, F. Bobaru, “Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics”, *Eng. Fract. Mech.*, **78** (2011), 1156–1168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.020>

DOI 10.15507/2079-6900.26.202402.175-194

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-72:004.942:532.529:544.77

## Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (г. Сургут, Российская Федерация)

**Аннотация.** На основе гидродинамического механизма, учитывающего взаимодействие всех частиц, проведено численное моделирование формирования динамической структуры в результате коллективной динамики вращающихся частиц в вязкой жидкости. Считается, что частицы обладают магнитным моментом и приводятся во вращение внешним переменным однородным магнитным полем. Представлены результаты численного моделирования коллективной динамики для трех исходных структур, которые могут быть образованы дипольными частицами за счет взаимодействия между собой в отсутствии внешнего магнитного поля. Такие равновесные структуры представляют собой прямолинейную цепочку, замкнутую цепочку и периодическую структуру в виде плоской системы цепочек частиц. Вращение частиц приводит окружающую их жидкость в движение, течение которой создает гидродинамические силы и моменты, перемещающие частицы. Коллективная динамика системы вращающихся частиц приводит к формированию из первоначальной структуры новой динамической, имеющей свои характерные особенности для каждого рассмотренного случая. Проводится качественное сравнение результатов динамики системы частиц, приходящих в движение за счет действия или внешнего момента, или внешней силы. Предложенный гидродинамический механизм формирования динамической структуры в результате коллективной динамики системы вращающихся частиц может быть использован для управления структурообразованием в системе жидкость-частицы.

**Ключевые слова:** коллективная динамика, динамическая структура, численное моделирование, вязкая жидкость, гидродинамическое взаимодействие, вращающиеся частицы.

**Для цитирования:** Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 175–194. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.175-194>

Об авторах:

**Мартынов Сергей Иванович**, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru),

**Ткач Леонилла Юрьевна**, научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, [leonilla7777@mail.ru](mailto:leonilla7777@mail.ru)

© С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач



MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

# Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles

S. I. Martynov, L. Yu. Tkach

*Surgut State University (Surgut, Russian Federation)*

**Abstract.** Based on the hydrodynamic mechanism, which takes into account the interaction of all particles, a numerical simulation of the formation of a dynamical structure in a viscous fluid was carried out. This structure is a result of the collective dynamics of rotating particles in the fluid. It is supposed that the particles have a magnetic moment and are driven into rotation by an external variable uniform magnetic field. The results of numerical modeling of collective dynamics are presented for three initial structures that can be formed by interacting dipole particles in the absence of an external magnetic field. Such equilibrium structures are a straight chain, a closed chain, and a periodic structure in the form of a flat system of particle chains. The rotation of particles sets the surrounding fluid in motion, whose flow creates hydrodynamic forces and moments that move the particles. The collective dynamics of a system of rotating particles leads to the formation of a new dynamical structure from the original one, and this new structure has its own characteristic features for each case considered. A qualitative comparison of the results of the dynamics for a particles' system set in motion due to the action of an external moment or an external force is carried out. The proposed hydrodynamic mechanism for the formation of a dynamical structure as a result of the collective dynamics of a rotating particles' system can be used to control structure formation in a liquid-particle system.

**Keywords:** collective dynamics, dynamical structure, numerical modeling, viscous fluid, hydrodynamic interaction, rotating particles

**For citation:** S. I. Martynov, L. Yu. Tkach . Hydrodynamic mechanism for dynamical structure formation of a system of rotating particles. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:2(2024), 175–194. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202402.175-194>

*About the author:*

**Sergey I. Martynov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina A., Surgut 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District – Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru),

**Leonilla Yu. Tkach**, Researcher, Surgut State University (1 Lenina A., Surgut 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District – Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, [leonilla7777@mail.ru](mailto:leonilla7777@mail.ru)

## 1. Введение

Результаты, представленные в международных публикациях за последнее десятилетие, свидетельствуют об обширных и интенсивно проводимых исследованиях неравновесных систем с активными частицами. Неравновесное состояние может быть вызвано воздействием внешних полей (электрических, магнитных, акустических, световых), химических реакций или гидродинамических течений. Такие системы демонстрируют возможность динамической самосборки, как результат коллективного поведения активных

частиц в условиях неравновесного состояния [1–2], вызванного действием указанных выше причин. Активно проводятся эксперименты по формированию и управлению коллективным поведением систем активных частиц во внешних полях как в объеме жидкости (трехмерные структуры) [3–5], так и на поверхности раздела жидкость-газ (двухмерные структуры) [6–8]. Воздействие внешним полем вызывает интерес также в связи с возможностью сборки многообразных структур из синтетических частиц, имеющих анизотропные свойства поверхности [9]. Все эти исследования проводятся для конкретных практических задач, связанных с целевой доставкой груза, параллельной сборкой, очисткой жидкости и других задач, как в лабораторных, так и в естественных условиях. При этом в публикациях отмечаются и такие проблемы с практическим применением систем, как недостаточная их грузоподъемность и управляемость в реальных условиях их использования. Поскольку внешние поля непосредственно воздействуют на частицы, приводя их в определенное движение, то для решения указанных выше задач необходимо понимание механизмов, формирующих коллективную динамику, как результат динамики составляющих ее индивидуальных частиц. В то же время коллективная динамика определяет, какие динамические структуры могут быть сформированы в системе. Коллективное поведение системы большого числа частиц определяется их взаимодействием между собой с силами, непосредственно действующими между частицами, и взаимодействием через жидкость, в которой происходит их движение. Для понимания механизмов, отвечающих за преобразование динамики отдельных частиц в коллективную динамику системы, необходимо корректно учитывать все взаимодействия между частицами. Актуален и в настоящее время обзор моделей и подходов, используемых для описания динамики систем активных частиц, приведен в работе [10]. В частности, указывается, что гидродинамическое взаимодействие если и учитывается, то в сильно упрощенном виде. А именно в виде силы вязкого трения, действующей на отдельную частицу, или в приближении среднего поля. Этот вывод подтверждается и более поздними работами по моделированию динамики системы активных частиц [11–15]. Между тем трудно переоценить роль таких взаимодействий. В работе [16] подчеркивается ведущая роль именно гидродинамических взаимодействий в самосборке, эмергентности, транспорте и смешении коллоидных суспензий с внешним приводом. Следует понимать, что и межчастичное взаимодействие в теоретических моделях учитывается в приближении парных взаимодействий, что для большого числа взаимодействующих частиц дает некорректный результат [17]. Поэтому разработка новых теоретических моделей и подходов, на основе которых моделируется коллективная динамика системы активных частиц с учетом их взаимодействия, является актуальной задачей.

Динамика системы определяется внутренним взаимодействием частиц и действием и сил и моментов со стороны внешнего поля. Для дипольных частиц внешнее магнитное или электрическое поле может создавать силу и момент силы, приводящие их в поступательное и вращательное движение. Двигаясь в жидкости, частицы искажают распределение скорости и давление вокруг себя, что приводит к появлению действующих на них гидродинамических сил и моментов со стороны жидкости. Гидродинамическое взаимодействие совместно с межчастичным взаимодействием и формирует коллективную динамику системы. Учитывать гидродинамическое взаимодействие большого числа частиц позволяет метод, разработанный в работе [18] и проверенный на различных задачах [19–20]. В частности, этим методом в работе [19] проведено численного моделирование коллективной динамики облака случайно расположенных частиц в результате действия на каждую частицу постоянной внешней силы. Было найдено, что скорость частиц в центральной части облака больше, чем на его крае. Это приводит к тому, что

происходит постоянная циркуляция частиц из центра облака в ее переднюю часть, где происходит их торможение и смещение на край, а затем в хвостовую часть. Частицы, находящиеся в хвостовой части облака, отстают от центральных частиц, что приводит к постепенному распаду облака на отдельные группы частиц, в которых происходит такая же динамика. В конечном итоге распад завершается образованием следа облака в виде отдельных частиц. Отличие динамики системы активных частиц при действии на них внешнего момента можно оценить на примере моделей агрегатов, перемещающихся в жидкости за счет гидродинамической силы, создаваемой окружающей жидкостью за счет вращения частиц [17]. На этом примере уже видно отличие коллективной динамики системы вращающихся частиц от случая, когда движение частиц вызвано действием силы со стороны внешнего поля. В настоящей работе оценивается роль механизма гидродинамического взаимодействия вращающихся частиц в коллективной динамике системы и формировании динамической структуры. Цель проводимого исследования – проверка гипотезы, что при вращательном движении частиц механизм гидродинамического взаимодействия приводит к формированию динамической структуры, как результат коллективной динамики системы. Для проверки гипотезы используется математическая модель, состоящая из уравнений движения жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса с соответствующими граничными условиями на поверхности частиц, квазистатических уравнений поступательного и вращательного движения для каждой из частиц, входящих в систему. В качестве исходного состояния системы частиц выбирались структуры, образующиеся в результате действия диполь-дипольного взаимодействия в отсутствие внешнего поля.

## 2. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается система из  $N$  твердых сферических частиц радиуса  $a$ , помещенных в несжимаемую жидкость вязкости  $\eta$  и обладающих магнитным моментом  $\mathbf{m}$ . Приложенное внешнее однородное переменное магнитное поле приводит их во вращательное движение. Движение частиц приводит к возникновению течения вязкой жидкости и формированию гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы.

Динамика рассматриваемой системы определяется уравнениями движения жидкости и каждой частицы, входящей в систему. В уравнениях движения частиц необходимо учитывать внутренние силы, внешние силы и силы гидродинамического взаимодействия, а также моменты сил, действующих на частицы. Такой подход уже применялся ранее в работах авторов и дает хорошее согласие с экспериментальными результатами [20]. Система уравнений динамики частиц записывается в виде:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}_k^{(h)}$  – силы;  $\mathbf{T}_k^{(h)}$  – моменты сил со стороны жидкости;  $\mathbf{F}_k^{(e)}$ ,  $\mathbf{T}_k^{(e)}$  – силы и моменты сил со стороны внешнего поля;  $\mathbf{F}_k^{(i)}$ ,  $\mathbf{T}_k^{(i)}$  – силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на частицу с номером  $k$  со стороны других частиц. Эта система уравнений динамики системы частиц, для которых силы инерции не учитываются. Легко получаемые оценки показывают, что в случае малых чисел Рейнольдса силы инерции малы по сравнению вязким трением, что позволяет использовать систему (2.1) для описания динамики системы частиц. В случае воздействия на частицы переменного поля имеется интервал частот, для которых силы инерции можно не учитывать (случай малых частот), и интервал частот, при которых силы инерции учи-

тывать необходимо (быстропеременные поля) даже в случае малых чисел Рейнольдса. Детально постановка задачи и метод решения задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в случае воздействия на них быстропеременного поля приведен в работе [21]. В настоящей работе рассматривается случай малых частот изменения поля. Учет внутренних сил взаимодействия проводится на основе парных взаимодействий. Для большого числа частиц такой подход приводит к проблеме сходимости, аналогичной случаю парного гидродинамического взаимодействия и подробно проанализированной в [17].

Для нахождения гидродинамических сил  $\mathbf{F}_k^{(h)}$  и моментов  $\mathbf{T}_k^{(h)}$ , действующих на частицы, решается система уравнений гидродинамики. В случае малых чисел Рейнольдса система уравнений для скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  жидкости имеет вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

На поверхности частицы с номером  $k$  должны выполняться условия:

$$u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a^k.$$

Здесь, введены следующие обозначения:  $\mathbf{V}^k$  – вектор абсолютной линейной скорости;  $\Omega_{ij}^k$  – тензор угловой скорости;  $\mathbf{X}^k$  – вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером  $k$  и радиусом  $a^k$ .

Далеко от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь  $p_0$  – невозмущенное давление в жидкости.

Алгоритм расчета динамики частиц следующий. Имеется некоторое начальное расположение частиц в жидкости. Это расположение определяется внутренними силами из условия минимальности энергии взаимодействия между частицами. Течение жидкости и движение частиц рассматривается относительно неподвижной системы координат. Задаются силы и моменты силы, действующих на частицы и приводящих их в движение с поступательной и угловой скоростью. Движение частиц вызывает течение окружающей их жидкости. Находится распределение скорости и давления жидкости, вызванное движением частиц с соответствующими линейными и угловыми скоростями, и вычисляются гидродинамические силы и моменты, действующие на частицы. В силу линейности уравнений и граничных условий для течения жидкости, гидродинамические силы и моменты линейно зависят от скоростей частиц. Из уравнений динамики находятся поступательная и угловая скорости частиц относительно жидкости для данной конфигурации их расположения. Задается малый промежуток времени, за который происходит малое перемещение и угол поворота частиц и формирование новой конфигурации их положения относительно друг друга. Для новой конфигурации частиц происходит перерасчет скорости и давления в жидкости и, соответственно, гидродинамических сил и моментов. Далее определяются новые значения поступательной и угловой скорости частиц, а также последующая новая конфигурация их относительного положения. Указанные вычисления повторяются многократно с целью получения динамической картины относительного расположения частиц через каждый выбранный

промежуток времени. На каждом шаге происходит контроль точности проведенных вычислений. Все расчеты и визуализация динамики системы проводились с использованием зарегистрированного программного комплекса «Turtle» (свидетельство о регистрации от 15.01.2016 No. 2016610634), предназначенного для моделирования течения вязкой жидкости с большим числом взаимодействующих частиц.

### 3. Принятые допущения

Предполагается, что в отсутствии внешнего поля в результате действия сил диполь-дипольного взаимодействия частицы образуют некоторую структуру. Такими образованиями могут быть одномерные структуры в виде цепочки частиц, двумерные структуры в виде правильных многоугольников, в вершинах которых находятся частицы, двумерные периодические, трехмерные капельные структуры.

При изучении равновесных структур, образующихся из дипольных частиц, используется выражение для энергии парного взаимодействия частиц. Например для частиц с номерами  $k$  и  $l$ , обладающих разными магнитными дипольными моментами  $\mathbf{m}_k$ ,  $\mathbf{m}_l$ , это выражение имеет вид [22]:

$$U_{kl} = \frac{\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_l}{r_{kl}^3} - \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \cdot \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{r}_{kl}).$$

Здесь вектор  $\mathbf{r}_{kl}$  соединяет центры частиц с номерами  $k$  и  $l$ .

Для динамических структур, образующихся из дипольных частиц, необходимо учитывать силы и моменты, действующие между частицами. Между частицами с номерами  $k$  и  $l$ , действуют силы, равные по величине и противоположные по направлению. Так, выражение для силы, действующий на частицу с номером  $k$  со стороны частицы  $l$ , имеет вид:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} = \frac{3}{r_{kl}^5} [(\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_l + (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{m}_k + (\mathbf{m}_k \mathbf{m}_l) \mathbf{r}_{kl}] - \frac{15}{r^7} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{r}_{kl}. \quad (3.1)$$

Выражения для моментов сил, действующих на частицы, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^{(i)} &= \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_k \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_l \times \mathbf{m}_k), \\ \mathbf{T}_l^{(i)} &= \frac{3}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \mathbf{r}_{kl}) (\mathbf{m}_l \times \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{r_{kl}^5} (\mathbf{m}_k \times \mathbf{m}_l). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь необходимо отметить следующее. Сумма вращательных моментов пары взаимодействующих частиц не равна нулю. Это может вызвать вопрос о корректности приведенных выражений, так как это, на первый взгляд, противоречит классическому принципу механики, согласно которому сумма моментов внутренних сил должна быть равна нулю. Однако противоречия указанному принципу нет, если учесть, что силы взаимодействия пары частиц не лежат на одной прямой, а образуют пару сил, имеющих момент, который тоже внутренний. Это означает, что нулю должна быть равна сумма не двух, а трех слагаемых: вращательных моментов и момента пары сил. Легко проверить, что это выполняется. Таким образом, динамика дипольных частицы в

результате действия внутренних сил и моментов представляется следующим образом. Частицы вращаются каждая вокруг своей оси, а обе – вокруг общей оси так, чтобы энергия их взаимодействия стала минимальна, что соответствует расположению их дипольных моментов вдоль вектора, соединяющие центры частиц. При этом частицы сближаются до минимального расстояния между их центрами. В случае если энергия взаимодействия частиц отличается от минимального значения, то это означает, что над системой была совершена работа по перемещению их относительно друг друга, так чтобы изменить ориентацию магнитных моментов частиц и расстояние между ними. Все это соответствует известным принципам механики. Хотя выражения для сил и моментов при диполь-дипольном взаимодействии частиц известны давно и их можно найти в задачнике для студентов [23], это до сих пор приводит к указанному выше недопониманию. Это при том, что спустя десятилетия это послужило причиной публикации статьи в научном журнале [24], в которой обосновываются приведенные выше аналитические выражения для вращательных моментов взаимодействующих дипольных частиц. Эти выражения в настоящей работе используются для определения средних значений сил и вращательных моментов, действующих между парой взаимодействующих дипольных частиц.

Помимо внутренних моментов, со стороны внешнего магнитного поля на частицы с номерами  $k$  и  $l$  действуют соответствующие моменты:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k^{(e)} &= (\mathbf{m}_k \times \mathbf{H}), \\ \mathbf{T}_l^{(e)} &= (\mathbf{m}_l \times \mathbf{H}).\end{aligned}$$

Таким образом, получим, что суммарные магнитные моменты равны

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k &= \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)}, \\ \mathbf{T}_l &= \mathbf{T}_l^{(i)} + \mathbf{T}_l^{(e)}.\end{aligned}$$

Предполагается, что магнитные моменты частиц ориентированы в одном направлении и однородное внешнее переменное магнитное поле с вектором напряженности  $\mathbf{H} = \{0; -H \cos(\Omega t); H \sin(\Omega t)\}$  создает одинаковый момент силы, вращающий частицы в одном направлении. При этом силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на выбранную частицу со стороны других, считаются равными нулю. Такое предположение упрощает задачу изучения влияния только гидродинамического взаимодействия частиц на формирования коллективной динамики системы. Обоснованием этого предположения может служить тот факт, что средние значения приведенных выше сил (3.1) и моментов (3.2) парного диполь-дипольного взаимодействия за период вращения частиц равны нулю. Еще одним фактором, позволяющим принять такое предположение служит величина напряженности внешнего магнитного поля, которую можно взять такую большую, что величина момента диполь-дипольного взаимодействия частиц будет много меньше момента, создаваемым внешним полем. Фактически принятые допущения означают, что при моделировании учитываются только силы трения со стороны жидкости и внешний момент (3.3), одинаковый для всех частиц с равными магнитными моментами. Вообще говоря, величина внешнего момента равна

$$T_k^{(e)} = m_k H \sin((\Omega - \omega_k)t + \alpha).$$

и такое предположение подразумевает, что угол между вектором напряженности внешнего поля и магнитным моментом частицы не меняется и всегда остается равным  $\alpha$

(угол запаздывания поворота вектора магнитного момента частицы относительно поворота вектора напряженности внешнего магнитного поля). В начальный момент времени считается, что угол  $\alpha$  равен нулю (магнитные моменты частиц ориентированы вдоль вектора напряженности магнитного поля), а затем после начала вращения внешнего магнитного поля из-за гидродинамического сопротивления образуется острый угол между вектором магнитного момента частицы и вектором напряженности внешнего магнитного поля. Для того чтобы внешний момент был постоянен необходимо, чтобы вращение частиц происходило с угловой скоростью  $\omega_k$  равной скорости вращения внешнего поля  $\Omega$ . Однако гидродинамическое взаимодействие приводит к тому, что угловая скорость вращения частиц зависит от места частицы в общей конфигурации системы. Это приводит к тому, что угловая скорость частицы может быть как больше, так и меньше скорости вращения магнитного поля. Однако при этом, как следует из выражения для величины внешнего момента, угол между вектором напряженности внешнего поля и магнитным моментом частицы уменьшается или увеличивается по сравнению с углом  $\alpha$ , что, соответственно, приводит к уменьшению или увеличению момента, действующего на частицу. В свою очередь, уменьшение внешнего момента приводит к уменьшению угловой скорости частицы, а увеличение внешнего момента наоборот, к увеличению угловой скорости частицы. Таким образом, вращение частицы подстраивается под вращение внешнего поля. Фактически условие постоянства внешнего момента, действующего на частицы, является приближенным, средним. При этом, для того чтобы использовать такое приближение, отклонения от этого среднего должно быть мало. Как будет показано ниже, результаты моделирования дают хорошее согласие с принятым выше допущением.

Приведенные выше рассуждения в полном объеме касаются и частиц с электрическим дипольным моментом с той только разницей, что вращающееся электрическое поле приводит их во вращение, противоположное тому, что имеют частицы с магнитным дипольным моментом.

#### 4. Параметры моделирования

При компьютерном моделировании вместо реальных параметров задачи используются модельные: размер частицы  $\hat{a}$ , вязкость несущей жидкости  $\hat{\eta}$ , величина внешнего момента силы  $\hat{T}$ , действующего на частицы с магнитным моментом  $\hat{m}$ , и ее направление, а также промежуток времени  $\hat{t}$ . Модельные и реальные параметры связаны определенными соотношениями, полученными из условий подобия и приведенными в работах [20, 17].

Вращательный модельный момент  $\hat{T} = |\mathbf{m} \times \mathbf{H}|$  прикладывается к частицам во всех рассмотренных случаях модельных структур. Его величина берется равной  $1 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2$ . Считается, что величина вращательного момента  $\hat{T}$  остается постоянной и максимальной. Для этого необходимо, чтобы угол между векторами  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{H}$  остается неизменным. Это возможно, когда угловая скорость частиц и частота вращения вектора  $\mathbf{H}$  одинаковые  $\omega = \Omega$ . Уравнения вращения модельной и реальной частицы в структуре имеют следующий вид:

$$8K\pi\eta a^3\omega = T, \quad 8K\pi\hat{\eta}\hat{a}^3\hat{\omega} = \hat{T}.$$

Здесь коэффициент  $K$  характеризует геометрию структуры и не зависит от размеров частиц в структуре, но зависит от того, в каком месте находится частица в данной

структуре. Каждая частица в системе имеет свою скорость вращения. Считая, что частицы сделаны из одного материала с намагниченностью насыщения  $M_s$ , их магнитный момент определяется, как  $m = M_s 4\pi a^3/3$ . Подставляя выражение для магнитного момента частицы в эти уравнения, получим

$$8K\pi\eta a^3\omega = \frac{4\pi a^3}{3}M_s H, \quad 8K\pi\hat{\eta}\hat{a}^3\hat{\omega} = \frac{4\pi\hat{a}^3}{3}M_s \hat{H}.$$

Эти уравнения дают соотношения между реальными и модельными параметрами при вращении частиц

$$\frac{\eta\omega}{\hat{\eta}\hat{\omega}} = \frac{H}{\hat{H}}.$$

Другое соотношение следует из равенства чисел Рейнольдса модельного и реального течений жидкости при вращении частиц

$$\frac{\rho\omega a^2}{\eta} = \frac{\rho\hat{\omega}\hat{a}^2}{\hat{\eta}}.$$

Из последних двух равенств следует соотношение между реальным и модельным значением напряженности магнитного поля

$$H = \frac{\eta^2\hat{a}^2}{\hat{\eta}^2 a^2}\hat{H}.$$

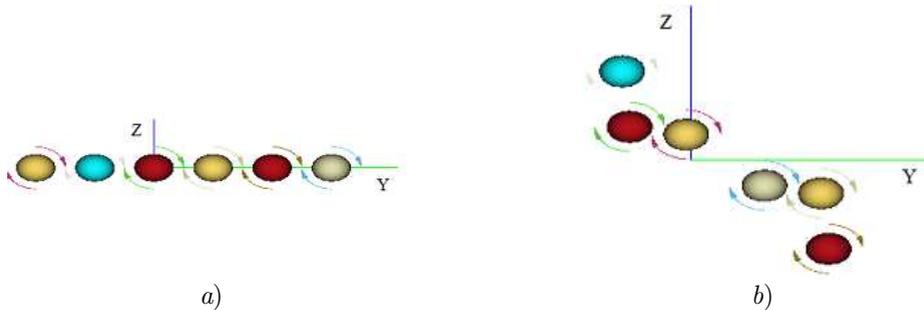
Приняв намагниченность насыщения  $M_s$  для ферромагнетиков равным 450 Г, для модельной частицы размером  $\hat{a} = 1$  см получаем модельное значение напряженности магнитного поля, равное  $\hat{H} = 5.31 \cdot 10^{-4}$  Э. При моделировании вязкость жидкости считалась равной  $\hat{\eta} = 1$  г/(см · с). Для частиц размером  $a = 10^{-4}$  см и жидкости фактической вязкости  $\eta = 10^{-2}$  г/(см · с) получим, что реальная величина напряженности магнитного поля должна быть  $H = 5.31$  Э. Увеличения величины напряженности магнитного поля приводит к увеличению момента, прикладываемого к частицам. Это ведет к увеличению скорости вращения частиц и более выраженной коллективной динамики рассматриваемых систем. Это проявляется также на промежутке времени, за который происходит характерное изменение в динамике системы. Так, модельному промежутку времени  $\hat{t} = 1$  с при принятых значениях размера частиц и вязкости жидкости соответствует реальный  $t = 3 \cdot 10^{-6}$  с. Поэтому полученные за достаточно большие модельные промежутки времени изменения в системах, моделируемых как результат коллективной динамики частиц, входящих в нее, для реальных систем происходит намного быстрее. Модельная и реальная частота изменения магнитного поля соответственно равны  $\hat{\Omega} = 3.6 \cdot 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>,  $\Omega = 3.6 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>.

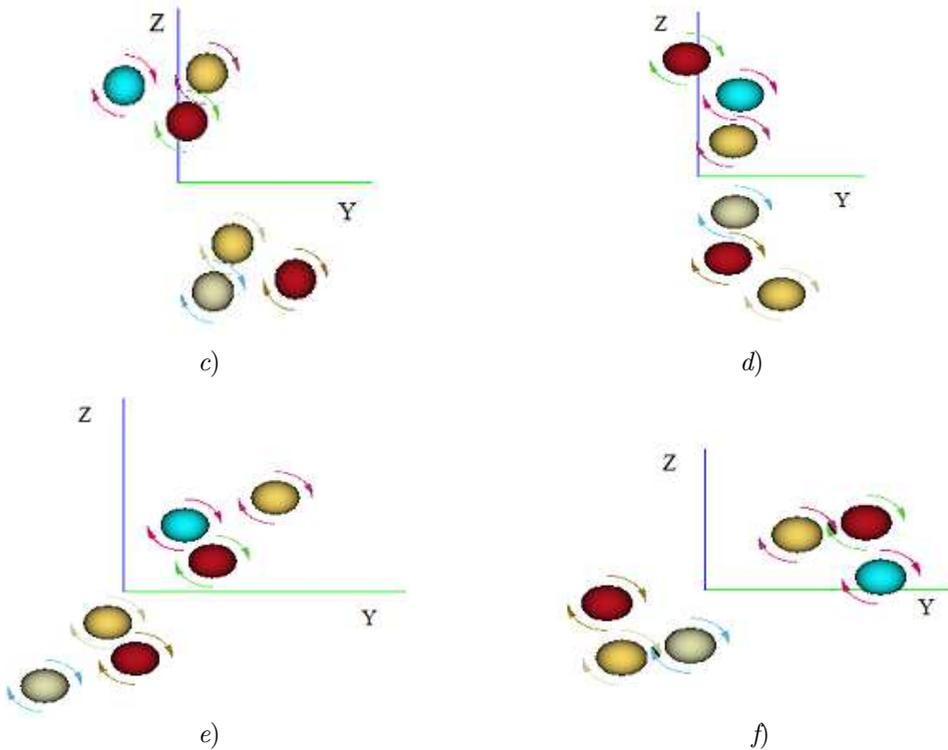
Для частиц с электрическим дипольным моментом  $\mathbf{p}$  полагаем  $p = qa$ , где  $q$  электрический заряд. Проводя аналогичные магнитным частицам анализ модельных и реальных параметров, получаем, что следующие модельные и реальные параметры. Для напряженности электрического поля и величины заряда:  $\hat{q}\hat{E} = 1$  г·см/с<sup>2</sup>,  $qE = 10^4$  г·м/с<sup>2</sup>; для модельной и реальной частоты изменения электрического поля  $\hat{\Omega} = 3.6 \cdot 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>,  $\Omega = 3.6 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>. Указанная выше связь между модельными и соответствующими им реальными параметрами используется для всех рассматриваемых в настоящей работе расчетах коллективной динамики структур из гибридных частиц с магнитным и электрическим дипольными моментами.

## 5. Формирование динамической структуры в результате коллективной динамики вращающихся частиц

Одно из возможных образований, формирующееся в результате диполь-дипольного взаимодействия магнитных частиц, представляет собой структуру в виде цепочки частиц [25]. Для моделирования коллективной динамики такой структуры рассмотрены три цепочки из 6, 8 и 15 частиц соответственно. Частицы в цепочках имеют модельный радиус  $\hat{a} = 1$  см, их центры располагаются на оси  $OY$  на расстоянии  $3\hat{a}$  друг от друга. Считается, что вращательный модельный момент  $\hat{M} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$ , направленный вдоль оси  $OX$ , прикладывается к каждой частице во всех рассмотренных случаях модельных структур. Действие момента приводит во вращение частицы, что формирует течение окружающей их вязкой жидкости. В результате гидродинамического взаимодействия частиц создается сила, перемещающая частицы. Первоначальная структура частиц меняется и формируется новая, как результат их коллективной динамики.

На Рис. 5.1 представлено последовательное формирование новой структуры в результате коллективной динамики 6 частиц, первоначально расположенных в виде горизонтальной цепочки. Как видно из приведенной динамики, первоначальная структуры распадается на две группы симметрично расположенных частиц. Каждая группа состоит из трех частиц, образующих вершины треугольника, вращающегося с некоторой угловой скоростью вокруг оси, параллельной оси вращения частиц, и при этом обе группы совместно совершают вращательное движение вокруг оси симметрии структуры. Численные расчеты подтверждают, что формирующаяся структура остается симметричной. Например, найдено, что координаты центра тяжести системы не изменяются, что при отсутствии внешней силы соответствует наличию симметрии системы.

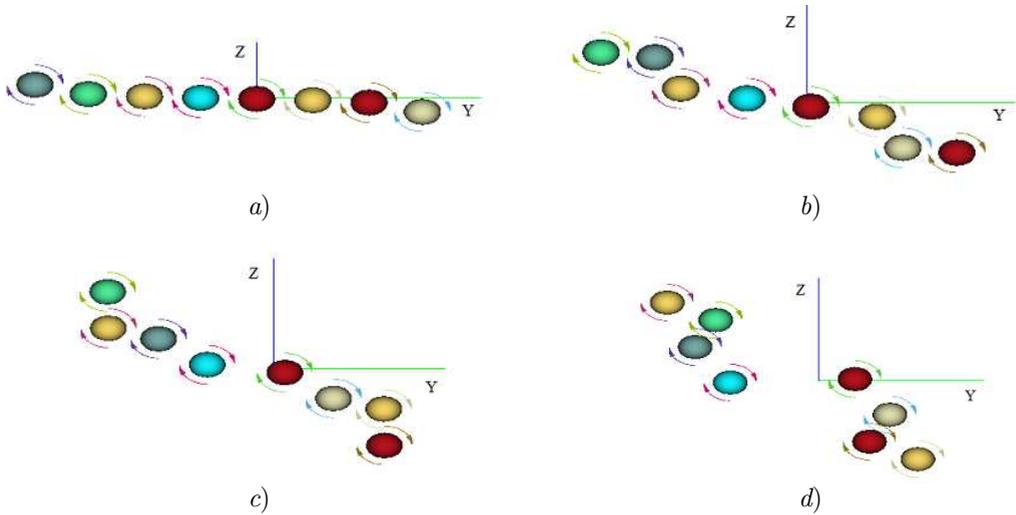




**Рис. 5.1.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 6 вращающихся частиц: *a*) начальная конфигурация цепочки ( $\hat{t} = 0$  с); *b*) разделение цепочки на две группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1400$  с); *c*), *d*), *e*), *f*) динамика образованной структуры из двух групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 2900, 3700, 5300, 6500$  с)

**Fig 5.1.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 6 rotating particles: *a*) initial configuration of the chain ( $\hat{t} = 0$  s); *b*) division of the chain into two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1400$  s); *c*), *d*), *e*), *f*) dynamics of the formed structure of two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 2900, 3700, 5300, 6500$  s)

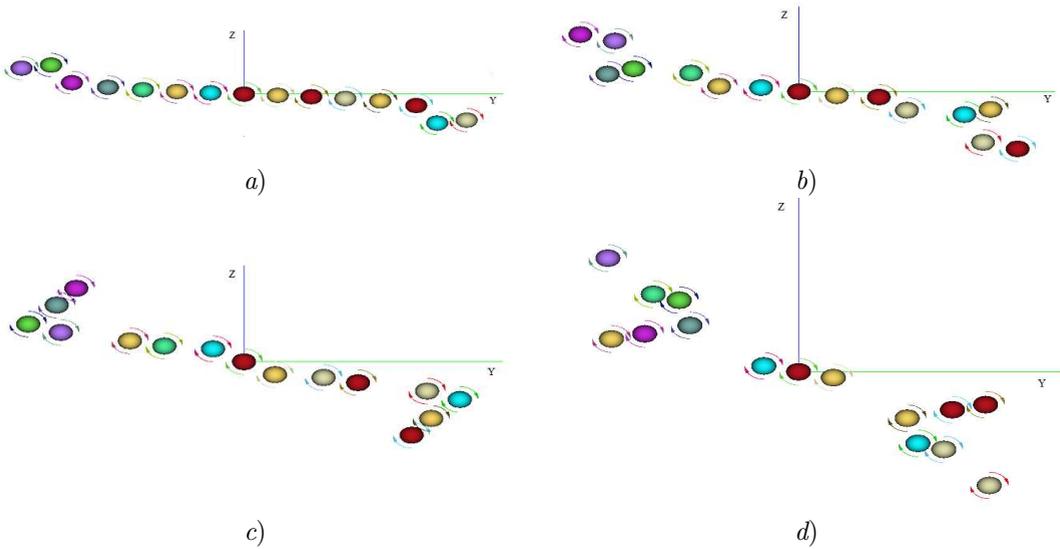
Изменение числа частиц в цепочке меняет формирующуюся структуру. Так для цепочки из 8 частиц, коллективная динамика которой приведена на Рис. 5.2, формируется структура из двух групп по 4 частицы в каждой, которые так же совместно вращаются вокруг оси симметрии. Но уже для цепочки из 15 частиц, формирующаяся структура более сложная. На Рис. 5.3 показана последовательность формирования структуры в результате коллективной динамики такой цепочки. Как видно из приведенной динамики цепочка разбивается на пять групп: две группы по четыре частицы в каждой, две группы по две частицы и одна центральная из трех частиц. Каждая группа вращается вокруг собственной оси, а все вместе вращаются вокруг оси симметрии. Если во всех рассмотренных случаях частицы в цепочке расположены вдоль оси  $OX$ , т. е. перпендикулярно вектору напряженности приложенного магнитного поля и вдоль вектора действующего момента, то их вращение не меняет первоначальную структуру.



**Рис. 5.2.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 8 вращающихся частиц: *a)* фаза деформации цепочки ( $\hat{t} = 150$  с); *b)* разделение цепочки на две группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 750$  с); *c), d)* динамика образованной структуры из двух групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1350, 1650$  с)

**Fig 5.2.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 8 rotating particles: *a)* chain deformation phase ( $\hat{t} = 150$  s); *b)* division of the chain into two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 750$  s); *c), d)* dynamics of the formed structure of two groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1350, 1650$  s).

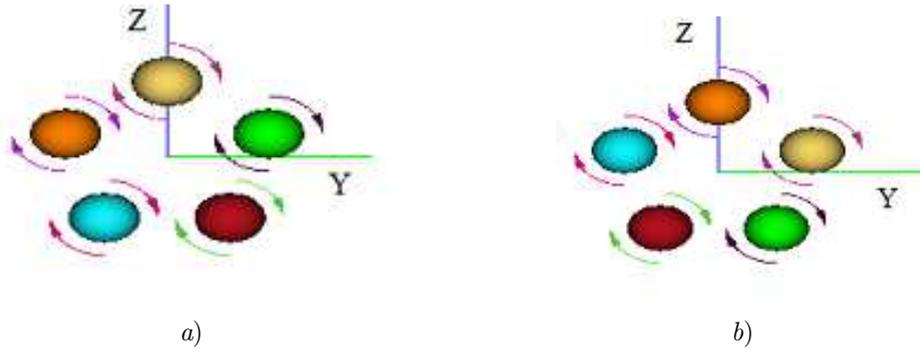
Другой структурой дипольных частиц, образующейся в результате межчастичного взаимодействия, является правильный многоугольник, в вершинах которого располагаются частицы и суммарный момент которого равен нулю. В настоящей работе моделируется динамика системы из пяти твердых сферических частиц, образующих двухмерную структуру, близкую к правильному пятиугольнику и лежащую в плоскости  $YOZ$  на окружности радиуса  $3\hat{a}$ . Векторы магнитных моментов частиц также лежат в этой плоскости. Приложенное внешнее магнитное поле, лежащее в плоскости диполей, приводит их во вращательное движение.



**Рис. 5.3.** Последовательное формирование структуры в результате коллективной динамики цепочки из 15 вращающихся частиц: *a)* начало формирования структуры ( $\hat{t} = 600$  с); *b)* разделение цепочки на три группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 1500$  с); *c)* начало формирования пяти групп вращающихся частиц ( $\hat{t} = 2280$  с); *d)* сформированные группы вращающихся частиц ( $\hat{t} = 4780$  с)

**Fig 5.3.** Sequential formation of a structure as a result of the collective dynamics of a chain of 15 rotating particles: *a)* beginning of structure formation ( $\hat{t} = 600$  s); *b)* division of the chain into three groups of rotating particles ( $\hat{t} = 1500$  s); *c)* beginning of formation of five groups of rotating particles ( $\hat{t} = 2280$  s); *d)* formed groups of rotating particles ( $\hat{t} = 4780$  s)

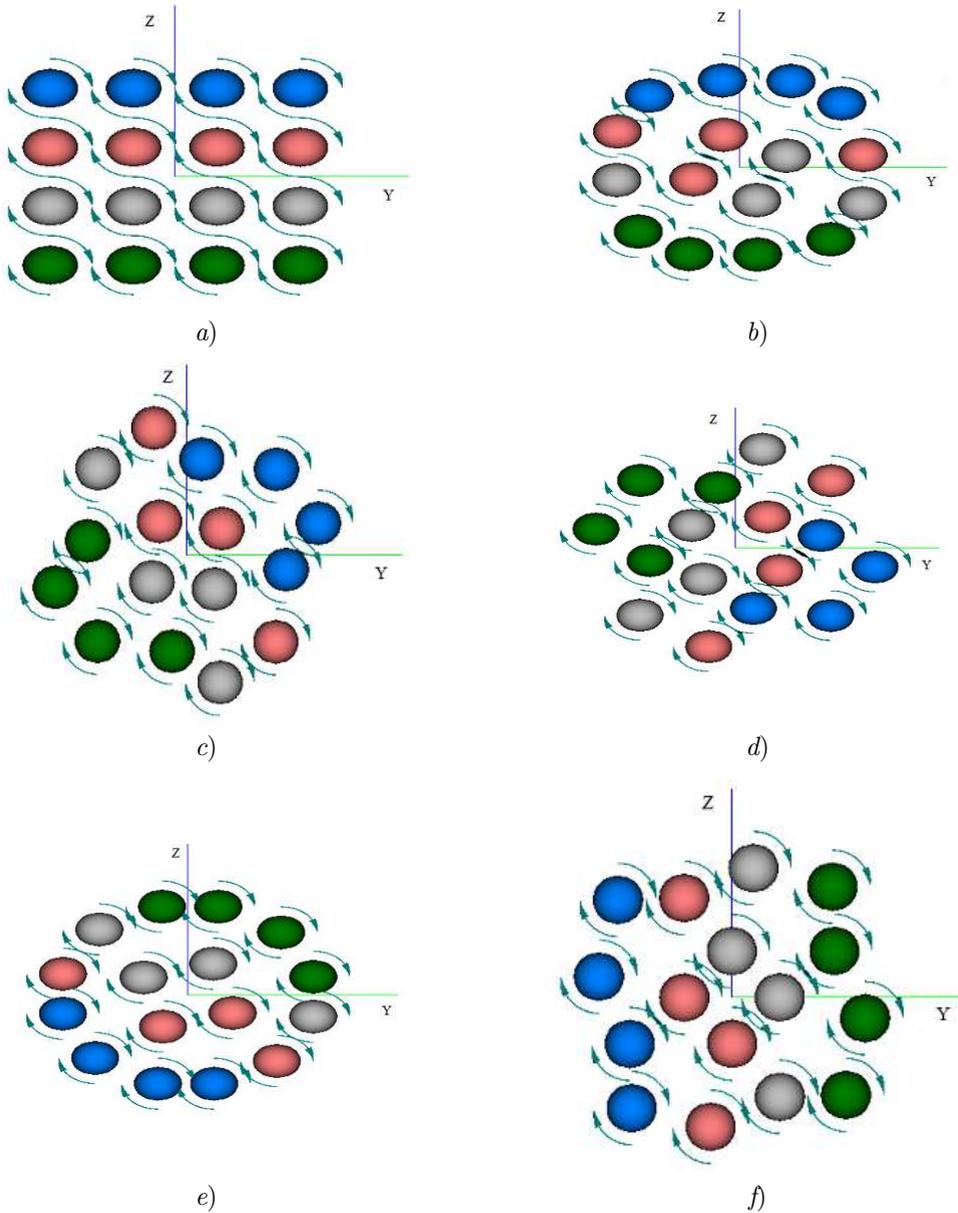
Ниже на Рис. 5.4 приведена динамика такой структуры в результате гидродинамического взаимодействия частиц. Результаты моделирования показывают, что такая структура не трансформируется в другую, а остается неизменной и вращение частиц приводит к вращению всей структуры вокруг оси симметрии  $OX$ . Из рассмотренной двумерной системы частиц в виде пятиугольников можно собрать пространственную структуру, последовательно располагая их с определенным шагом вдоль оси симметрии  $OX$ . Коллективная динамика такой пространственной структуры в рассматриваемом внешнем магнитном поле аналогична динамики одиночной системы: структура не трансформируется и все ее составляющие вращаются вокруг оси симметрии с одинаковой угловой скоростью. Если расположить одиночную структуру в плоскости, параллельной оси  $OX$  так, чтобы она была симметричной относительно этой оси, то действие вектора момента, направленного тоже вдоль оси  $OX$ , приводит к вращению всей системы вокруг оси симметрии без ее трансформации.



**Рис. 5.4.** Коллективная динамика кольца из пяти вращающихся частиц: *a)* начальная структура ( $\hat{t} = 0$  с); *b)* сохранение структуры в результате динамики вращающихся частиц ( $\hat{t} = 650$  с)

**Fig 5.4.** Collective dynamics of a ring of five rotating particles: *a)* initial structure ( $\hat{t} = 0$  s); *b)* preservation of structure as a result of the dynamics of rotating particles ( $\hat{t} = 650$  s)

Еще одна структура, образование которой также возможно в результате диполь-дипольного взаимодействия, представляет собой систему периодически расположенных частиц. Моделировалась коллективная динамика периодической структуры из 16 частиц, расположенных в плоскости  $YOZ$  с шагом  $3\hat{a}$  по каждой из осей, с магнитными моментами, лежащими в той же плоскости. Такую структуру можно рассматривать, как четыре параллельно расположенных цепочки. В случае, если вектор внешнего магнитного поля перпендикулярен плоскости структуры, то получаем рассмотренный выше случай для одной цепочки: динамика и трансформация всех четырех цепочек будут подобны одной. На Рис. 5.5 представлен результат моделирования коллективной динамики периодической структуры, когда вектор напряженности внешнего магнитного поля лежит в той же плоскости, что и сама структура. Как видно из приведенных на Рис. 5.5 слайдах, происходит сложная трансформация первоначальной структуры с перемешиванием частиц и образованием повторяющихся конфигураций. При этом так же, как и для всех выше рассмотренных структур, происходит вращение всей системы вокруг оси симметрии. Пространственную периодическую структуру можно рассматривать, как набор последовательно расположенных вдоль оси  $OX$  с определенным шагом двумерной периодической системы. При этом вектор напряженности внешнего магнитного поля для одних слоев структуры будет направлен перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, а для других слоев структуры будет параллелен им. Коллективная динамика такой пространственной структуры должна иметь характерные особенности коллективной динамики цепочечной и двумерной структур, приведенные выше.



**Рис. 5.5.** Характерные фазы динамической структуры из 16 вращающихся частиц: *a)* начальная структура ( $\hat{t} = 0$  с); *b), e)* повторяющиеся фазы динамической структуры ( $\hat{t} = 2450, 3780$  с); *c), d), f)* фазы перестройки динамической структуры ( $\hat{t} = 2800, 3150, 4200$  с)

**Fig 5.5.** Characteristic phases of the dynamic structure of 16 rotating particles: *a)* initial structure ( $\hat{t} = 0$  s); *b), e)* repeating phases of the dynamic structure ( $\hat{t} = 2450, 3780$  s); *c), d), f)* phases of dynamic structure restructuring ( $\hat{t} = 2800, 3150, 4200$  s)

Во всех рассмотренных случаях коллективная динамика вращающихся частиц существенно отличается от динамики поступательно перемещающихся частиц [19]. Так, для системы в виде цепочки частиц при любой ее ориентации относительно вектора приложенной внешней силы, коллективная динамика приводит к ее разрушению на отдельные частицы. Еще одно отличие можно продемонстрировать на примере системы из пяти частиц, расположенных в вершинах пятиугольника. Если помимо приложенного момента добавить и действие внешней силы с модельным значением  $F^{(e)} = 1 \text{ г}/(\text{см}\cdot\text{с})$ , действующей на каждую частицу вдоль оси  $OY$ , то результаты численного моделирования показывают распад такой системы в результате гидродинамического взаимодействия. Однако увеличением величины приложенного момента можно стабилизировать структуру так, чтобы она, вращаясь вокруг некоторой оси, поступательно перемещалась, не разрушаясь. Такая динамика качественно согласуется с экспериментами по динамике подобных структур на межфазной поверхности жидкость-газ [6].

Что касается допущения о постоянстве приложенного к частицам момента со стороны внешнего поля, то, как указывалось выше, оно может быть использовано при условии малого отклонения угловых скоростей частиц от некоторой средней величины (угловой скорости вращения поля). Проведенные вычисления подтвердили этот результат: во всех рассмотренных случаях отклонение угловых скоростей от среднего значения не превышали нескольких процентов.

## 6. Заключение

Проведено численное моделирование коллективной динамики дипольных частиц, вращающихся в вязкой жидкости. Вращение дипольных частиц генерируется внешним переменным полем. В качестве исходной системы принято равновесное состояние, в котором она находится в отсутствие внешнего поля. В этом случае частицы могут объединяться в структуры в результате дипольного взаимодействия между частицами. Рассмотрены три такие структуры: прямолинейная цепочка, замкнутая цепочка и плоская периодическая система частиц. В качестве основного механизма, отвечающего за коллективную динамику системы вращающихся частиц, принят механизм гидродинамического взаимодействия. Результаты численного моделирования коллективной динамики рассмотренных систем вращающихся частиц показывают формирование характерной динамической структуры для каждого из трех возможных их первоначальных равновесных состояний. Полученные результаты подтверждают гипотезу, что вращение частиц формирует динамическую структуру за счет гидродинамического механизма. Коллективная динамика системы вращающихся частиц, вызванная действием приложенного момента, качественно отличается от динамики, вызванной действием внешней силы. В первом случае формируемая динамическая структура группирует частицы, а во втором, наоборот, рассеивает их по объему. Такое различие в коллективной динамике в этих двух случаях внешнего воздействия связано с отличиями в генерируемой этими воздействиями гидродинамики окружающей жидкости. Полученные результаты могут быть использованы для управления образованием структур в системе жидкость-частицы во внешнем переменном однородном поле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arigaa K., Nishikawa M., Mori T., Takey J., Shrestha L.K., Hill J.P. Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics // Science and Technology of Advanced Materials. 2019. Vol. 20. No. 1. P. 51-95. DOI: <https://doi.org/10.1080/14686996.2018.1553108>
2. Shields C. W., Velev D. The Evolution of Active Particles: Toward Externally Powered Self-Propelling and Self-Reconfiguring Particle Systems // Chem. 2017. Vol. 3, Issue 4. P. 539-559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chempr.2017.09.006>
3. Robertson B., Stark H., Kapral R. Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors // CHAOS. 2018. No. 28. 045109. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5018297>
4. Aubret A., Youssef M., Sacanna S., Palacci J. Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 1114-1118. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0227-4>
5. Wang W., Duan W., Ahmed S., Sen A., Mallouk T.E. From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors // Acc. Chem. Res. 2015. No. 48. P.1938-1946. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.accounts.5b00025>
6. Wang Q., Yang L., Wang B., Yu Y., Yu J., Zhang L. Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly // ACS Appl. Mater. Interfaces. 2019. Vol. 11. No. 1. P. 1630-1637. DOI: <https://doi.org/10.1021/acsami.8b17402>
7. Kokot G., Kolmakov G. V., Aranson I. S., Snezhko A. Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers // Scientific Reports. 2017. Vol. 7. 14726. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-15193-z>
8. Snezhko A. Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces // Current Opinion in Colloid and Interface Science. 2016. No. 21. P. 65-75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2015.11.010>
9. Liljeström V., Chen C., Dommersnes P., Fossum J.O., Gröschel A.H. Active structuring of colloids through field-driven self-assembly // Current Opinion in Colloid and Interface Science. 2019. Vol. 40. P. 25-41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.008>
10. Арансон И.С. АКТИВНЫЕ КОЛЛОИДЫ // Успехи физических наук. 2013. Т. 183. No 1. С. 87-102. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201301f.0087>
11. Manikas K., Vogiatzis G.G., Hütter M., Anderson P.D. Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field // Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design. 2021. Vol. 4. P. 77-97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41939-021-00091-9>
12. Koessel F.R., Jabbari-Farouji S. Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field // New J. Phys. 2020. Vol. 22. 103007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abb64d>

13. Ma Z., Yang M., Ni R. Dynamic Assembly of Active Colloids: Theory and Simulation // *Adv. Theory Simul.* 2020. Vol. 3. 2000021. DOI: <https://doi.org/10.1002/adts.202000021>
14. Telezki V., Klumpp S. Simulations of structure formation by confined dipolar active particles // *Soft Matter.* 2020. Vol. 16. 10537. DOI: <https://doi.org/10.1039/d0sm00926a>
15. Miyamoto T., Imai M., Uchida N. Hydrodynamic synchronization and collective dynamics of colloidal particles driven along a circular path // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, No. 3. 032607. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032607>
16. Driscoll M., Delmotte B. Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations // *Current Opinion in Colloid and Interface Science.* 2019. Vol. 40. P. 42-57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.002>
17. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. О механизме перемещения агрегатов частиц в вязкой жидкости в переменном однородном внешнем поле // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019. Т. 5. № 3. С. 505-515. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
18. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Известия РАН. Механика жидкости и газа,* 1998. № 2. С. 112-119.
19. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. № 1. С. 152-164.
20. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015. Т. 55. № 2. С. 109-118. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
21. Коновалова Н. И., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в быстропеременном потоке вязкой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 12. С. 2247-2259.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 620 с.
23. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. *Сборник задача по электродинамике.* М.: Наука, 1970. 488 с.
24. Landecker P. B., Villani D. D., Yung K. W. An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles // *Magnetic and Electrical Separation.* 1998. Vol. 10. P. 29-33. DOI: <https://doi.org/10.1155/1999/97902>
25. Шутый А. М. Равновесные значения и динамика суммарного магнитного момента систем магнитных диполей // *ЖЭТФ.* 2010. Т. 137, вып. 2. С. 277-286.

*Поступила 24.02.2024; доработана после рецензирования 07.05.2024;  
принята к публикации 29.05.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. K. Arigaa, M. Nishikawa, T. Mori, et al., “Self-assembly as a key player for materials nanoarchitectonics”, *Science and Technology of Advanced Materials*, **20**:1 (2019), 51–95. DOI: <https://doi.org/10.1080/14686996.2018.1553108>
2. C. W. Shields, D. Velez, “The evolution of active particles: toward externally powered self-propelling and self-reconfiguring particle systems”, *Chem.*, 2017, no. 4, 539–559. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chempr.2017.09.006>
3. B. Robertson, H. Stark, R. Kapral, “Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors”, *CHAOS*, 2018, no.28, 045109. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5018297>
4. A. Aubret, M. Youssef, S. Sacanna, J. Palacci, “Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears”, *Nature Physics*, **14** (2018), 1114–1118. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0227-4>
5. W. Wang, W. Duan, S. Ahmed, A. Sen, T. E. Mallouk, “From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors”, *Acc. Chem. Res.*, **48** (2015), 1938–1946. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.accounts.5b00025>
6. Q. Wang, L. Yang, B. Wang, Y. Yu, J. Yu, L. Zhang, “Collective behavior of reconfigurable magnetic droplets via dynamic self-assembly”, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, **11**:1 (2019), 1630–1637. DOI: <https://doi.org/10.1021/acsami.8b17402>
7. G. Kokot, G. V. Kolmakov, I. S. Aranson, A. Snezhko, “Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers”, *Scientific Reports*, **7** (2017), 14726. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-15193-z>
8. A. Snezhko, “Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 2016, no. 21, 65–75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2015.11.010>
9. V. Liljeström, C. Chen, P. Dommersnes, J. O. Fossum, A. H. Gröschel, “Active structuring of colloids through field-driven self-assembly”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **40** (2019.), 25–41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.008>
10. I. S. Aranson, “Active colloids”, *Physics-Uspokhi*, **183**:1 (2013.), 87–10 (In Russ). DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201301f.0087>
11. K. Manikas, G. G. Vogiatzis, M. Hütter, P. D. Anderson, “Structure formation in suspensions under uniform electric or magnetic field”, *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, **4** (2021), 77–97. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41939-021-00091-9>
12. F. R. Koessel, S. Jabbari-Farouji, “Emergent pattern formation of active magnetic suspensions in an external field”, *New J. Phys.*, **22** (2020), 103007. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abb64d>

13. Z. Ma, M. Yang, R. Ni, “Dynamic Assembly of Active Colloids: Theory and Simulation”, *Adv. Theory Simul*, **3** (2020), 2000021. DOI: <https://doi.org/10.1002/adts.202000021>
14. V. Telezki, S. Klumpp, “Simulations of structure formation by confined dipolar active particles”, *Soft Matter.*, **16** (2020), 10537. DOI: <https://doi.org/10.1039/d0sm00926a>
15. T. Miyamoto, M. Imai, N. Uchida, “Hydrodynamic synchronization and collective dynamics of colloidal particles driven along a circular path”, *Phys. Rev. E*, **100**:3 (2019), 032607. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032607>
16. M. Driscoll, B. Delmotte, “Leveraging collective effects in externally driven colloidal suspensions: experiments and simulations”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **40** (2019), 42–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.10.002>
17. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Mechanism of moving particle aggregates in a viscous fluid subjected to a varying uniform external field”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:3 (2019), 475–483 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
18. S. I. Martynov, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1998, no. 2, 112–119 (In Russ.).
19. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “The influence of hydrodynamic interaction on the rate of sedimentation of a large number of particles in a viscous fluid”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 2004, no. 1, 152–164 (In Russ.).
20. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Simulation of Particle Aggregate Dynamics in a Viscous Fluid”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:2 (2015), 282–290. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
21. N. I. Konovalova, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Rapidly Varying Viscous Flow”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:12 (2012), 1672–1690. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
22. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Electrodynamics of continuous media*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 620 p.
23. V. V. Batygin, I. N. Toptygin, *Collection of problems on electrodynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 488 p.
24. P. B. Landecker, D. D. Villani, K. W. Yung, “An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles”, *Magnetic and Electrical Separation*, **10** (1998), 29–33. DOI: <https://doi.org/10.1155/1999/97902>
25. A. M. Shutyy, “Equilibrium values and dynamics of the total magnetic moment of systems of magnetic dipoles”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **137**:2 (2010), 277–286 (In Russ.).

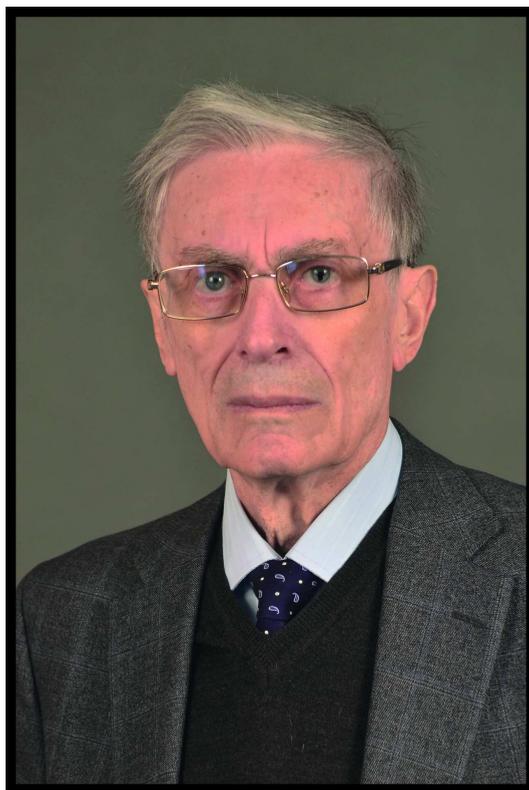
*Submitted 24.02.2024; Revised 07.05.2024; Accepted 29.05.2024*

*The authors has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

### ПАМЯТИ ИЛЬИ ВЛАДИМИРОВИЧА БОЙКОВА



Илья Владимирович Бойков  
(19.03.1941 - 02.05.2024)

2 мая 2024 года ушел из жизни член редколлегии нашего журнала Илья Владимирович Бойков – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета, которой он руководил с 1974 по 2022 г. И. В. Бойков – почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный профессор ПГУ.

Ученым создана научная школа «Аналитические и численные методы решения задач математической физики», которая широко известна в мире. Под его руководством защищено 17 диссертаций; он является автором более 500 научных работ, 11 монографий, 11 учебных пособий, обладателем 4 авторских свидетельств, 7 свидетельств о регистрации программ и 2 патентов.

*Памяти Ильи Владимировича Бойкова*

И. В. Бойкова связывали долгие годы сотрудничества с Мордовским государственным университетом и Средне-Волжским математическим обществом. Он возглавлял пензенское отделение Средне-Волжского математического общества; являлся активным участником научных конференций и школ-семинаров по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, проводимых МГУ им. Н. П. Огарёва совместно со Средне-Волжским математическим обществом и ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Несколько аспирантов И. В. Бойкова прошли защиту в диссертационном совете Мордовского государственного университета; также он неоднократно выступал в качестве официального оппонента диссертационных работ аспирантов Мордовского государственного университета.

Коллеги, ученики и друзья знали Илью Владимировича как доброго, порядочного, интеллигентного и эрудированного человека, преданно служившего своему делу.

Российская наука и все его коллеги понесли невосполнимую утрату. Светлая память об Илье Владимировиче навсегда пребудет в наших сердцах.

*Редколлегия*

*Коллектив МГУ им. Н. П. Огарева*

*Средне-Волжское математическое общество*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе $\text{LaTeX}$

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета  $\text{MiKTeX}$ , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: `{УДК}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}` `{Название статьи на английском языке}` `{Автор(ы) на английском языке}`

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: `{MSC 2020}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}`

*Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: `'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'`. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк `'Доказательство.'` и `'Доказательство закончено.'` соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`**

## Статьи в журналах на русском языке

**В разделе `thebibliography`:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paref О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Выш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}
```

---

---

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package**

**Journal articles in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

**Journal articles in English:**

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oligier
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`  
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`  
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`  
`\jour Ogarev-online`  
`\vol 20`  
`\yr 2016`  
`\lang In Russ.`  
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

**Articles in collections in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`  
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`  
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`  
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`  
`\publaddr Ulyanovsk`  
`\publ UIGTU Publ.`  
`\yr 2014`  
`\issue 10`  
`\pages 4–13`  
`\lang In Russ.`

**Books (monographs and collections) in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`  
`\by Yu. N. Bibikov`  
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`  
`\publaddr Moscow`  
`\publ Visshay shkola Publ.`  
`\yr 1991`  
`\totalpages 303`  
`\lang In Russ.`

**Conference proceedings in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`  
`\by V. G. Malinov`  
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`  
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ FRC CSC RAS Publ.`  
`\publaddr Moscow`

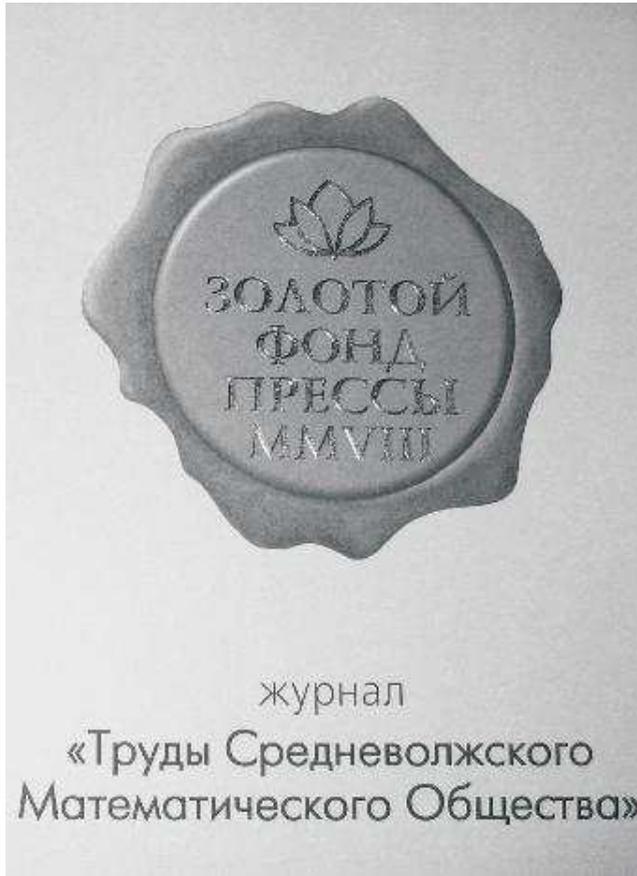
## Алфавитный указатель авторов

Дерюгин Ю. Н.	157
Жалнин Р. В.	143
Кулягин А. И.	143
Литаврин А. В.	111
Мартынов С. И.	175
Моисееenkova Т. В.	111
Малинов В. Г.	123
Нефедов М. С.	143
Шишканов Д. А.	157
Ткач Л. Ю.	175

## Author Index

Yu. N. Deryugin	157
A. I. Kulyagin	143
A. V. Litavrin	111
S. I. Martynov	175
T. V. Moiseenkova	111
V. G. Malinov	123
M. S. Nefedov	143
D. A. Shishkanov	157
L. Yu. Tkach	175
R. V. Zhalnin	143

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 20.06.2024. Дата выхода в свет 30.06.2024. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 10,85 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 339.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Национальный  
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 20.06.2024. Date of publishing 30.06.2024. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 10,85.

Number of copies 100. Order no. 339.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia







