

УДК 517.9

О выборе интерполяционного полинома в существенно неосциллирующих схемах

© Р. В. Жалнин¹, Е. Е. Пескова²

Аннотация. В работе предложен новый способ выбора интерполяционного полинома в существенно неосциллирующих схемах для численного решения систем уравнений газовой динамики.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ENO схема, существенно неосциллирующие схемы

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dF(U)}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ u(e + p) \end{pmatrix}, u = \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right).$$

Система замыкается уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho.$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, ε - удельная внутренняя энергия на единицу объема, p - давление, γ - показатель адиабаты.

Для построения дискретной модели область непрерывного изменения аргумента заменим дискретной сеткой, равномерной по каждому направлению.

Для аппроксимации системы уравнений (1.1) использовалась дифференциально-разностная схема [3, 4]:

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (1.2)$$

где $F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+)$ - дискретные потоки, которые вычислялись по схеме распада разрыва [1, 2].

Здесь $U_{i+1/2}^-, U_{i+1/2}^+$ - «левые» и «правые» значения вектора U на границе между i и $i + 1$ ячейками. Для их расчета будем использовать ENO алгоритм [5], изменив способ выбора шаблона.

Пусть дана равномерная сетка с шагом Δx :

$$x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2}.$$

Обозначим ячейку сетки $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ за I_i . Рассмотрим функцию $\nu(x)$, и предположим, что известны средние значения этой функции в ячейках I_i :

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \nu(\xi) d\xi, i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

¹Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева; zhrv@appmath.mrsu.ru.

²Магистрант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева.

Для каждой ячейки $I_i (i = 1, 2, \dots, N)$ построим полином $p(x)$ степени не больше $k - 1$, который бы интерполировал функцию $\nu(x)$ с порядком точности k в пределах данной ячейки, т.е.

$$p(x) = \nu(x) + O(\Delta x^k), \tag{1.4}$$

при $x \in I_i$, и выполнено условие

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(x) dx = \bar{\nu}_i. \tag{1.5}$$

Тогда, обозначив $\nu_{i+1/2}^- = p(x_{i+1/2}), \nu_{i-1/2}^+ = p(x_{i-1/2})$, получим

$$\nu_{i+1/2}^- = \nu(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k), \nu_{i-1/2}^+ = \nu(x_{i-1/2}) + O(\Delta x^k). \tag{1.6}$$

Такой полином можно получить, если рассмотреть первообразную $V(x)$ функции $\nu(x)$:

$$V(x) = \int_{-\infty}^x \nu(\xi) d\xi, \tag{1.7}$$

и построив полином $P(x)$ степени k , который будет интерполировать функцию $V(x)$ на границах ячеек сетки, положить $p(x) = P'(x)$.

Таким способом можно получить k полиномов $p_r(x), r = 0, \dots, k - 1$, каждый из которых будет соответствовать шаблону $S_r = \{x_{i-r-1/2}, \dots, x_{i-r+k+1/2}\}, r=0, \dots, k-1$.

Далее из k полиномов выберем тот, для которого описываемая им кривая имеет наименьшую длину l_r на интервале I_i :

$$l_r = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sqrt{1 + (p'_r(x))^2} \tag{1.8}$$

Значение выражения (1.8) будем вычислять методом трапеций:

$$l_k \approx \frac{\Delta x}{4} \left(\frac{\sqrt{1 + (p'(x_{i-1/2}))^2}}{2} + \sqrt{1 + (p'(x_{i-1/4}))^2} + \sqrt{1 + (p'(x_i))^2} + \sqrt{1 + (p'(x_{i+1/4}))^2} + \frac{\sqrt{1 + (p'(x_{i+1/2}))^2}}{2} \right) \tag{1.9}$$

Расчеты по данной схеме были выполнены для задачи Римана с начальными данными Сода и начальными данными Лакса.

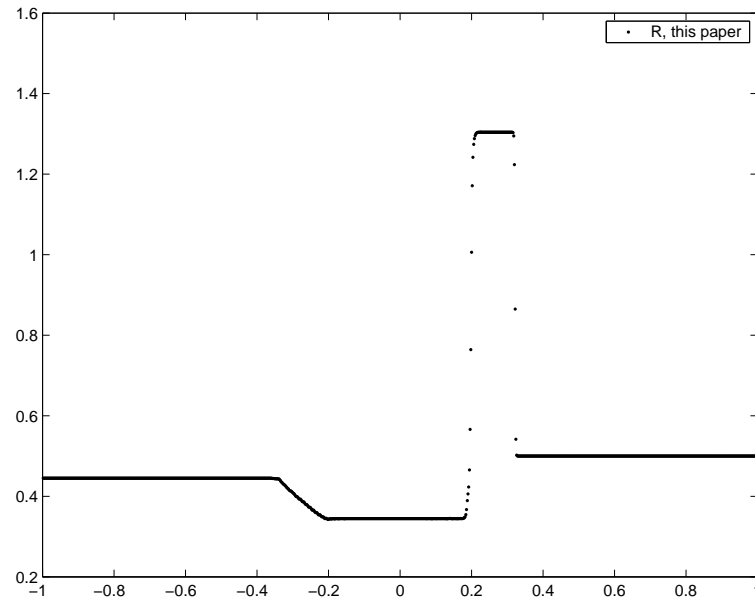
Начальные данные Сода:

$$(\rho_1, \nu_1, p_1) = (1, 0, 1), (\rho_2, \nu_2, p_2) = (0.125, 0, 0.1). \tag{1.10}$$

Начальные данные Лакса:

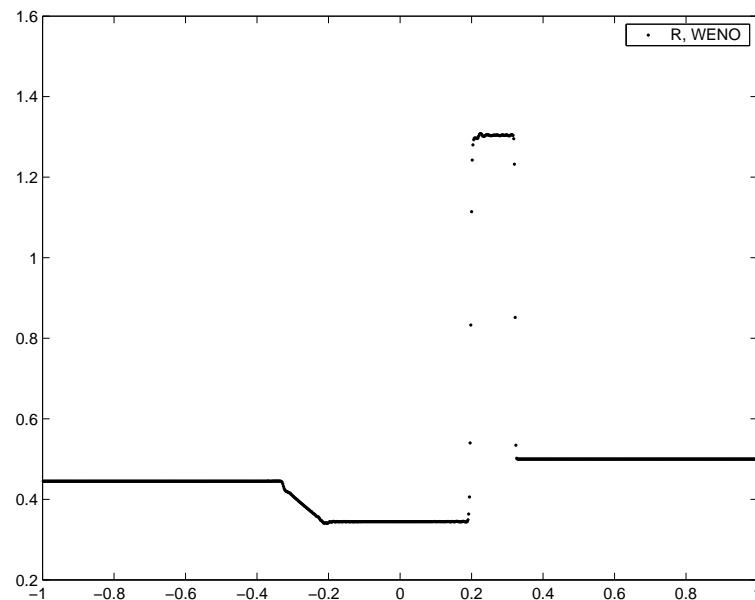
$$(\rho_1, \nu_1, p_1) = (0.445, 0.698, 3.528), (\rho_2, \nu_2, p_2) = (0.5, 0, 0.571). \tag{1.11}$$

Задача рассматривалась на отрезке $[-1, 1]$, контактный разрыв располагался в точке $x = 0$. Использовалась равномерная сетка с шагом $\Delta x = 2 \cdot 10^{-3}$ по пространственной переменной, шаг по времени был равен $\Delta t = 10^{-4}$. Расчет велся до времени $t=0.2$ для задачи с данными Сода и до времени $t = 0.13$ для задачи Лакса. Полученные результаты сравнивались с результатами расчетов, в которых «левые» и «правые» значения вектора U на границах между ячейками рассчитывались с использованием WENO алгоритма [6].



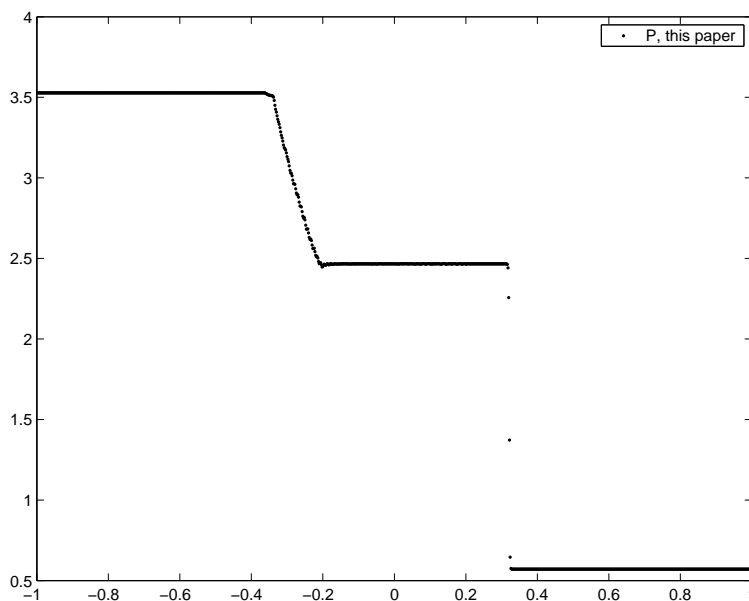
Р и с у н о к 1.1

Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): плотность

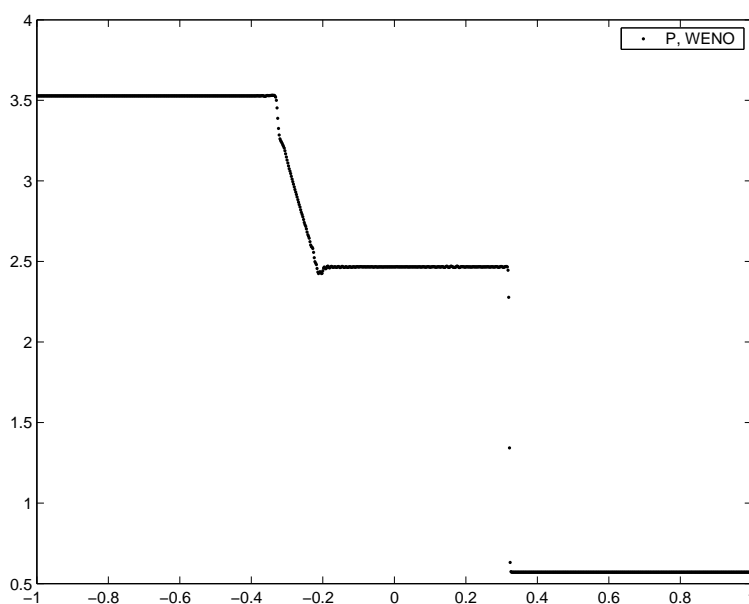


Р и с у н о к 1.2

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): плотность

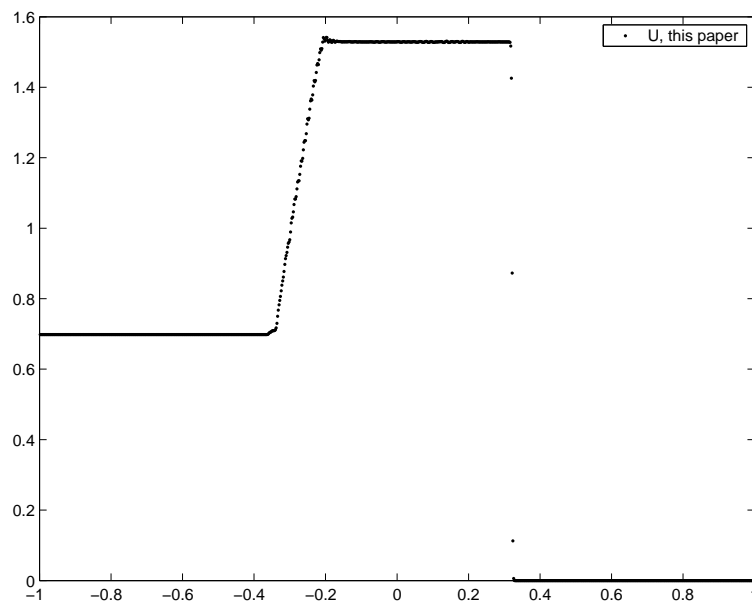


Р и с у н о к 1.3

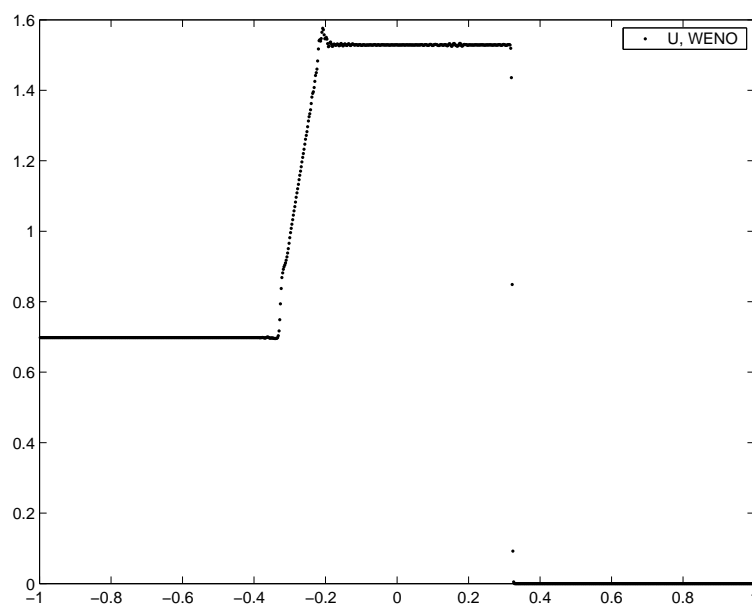
Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): давление

Р и с у н о к 1.4

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): давление

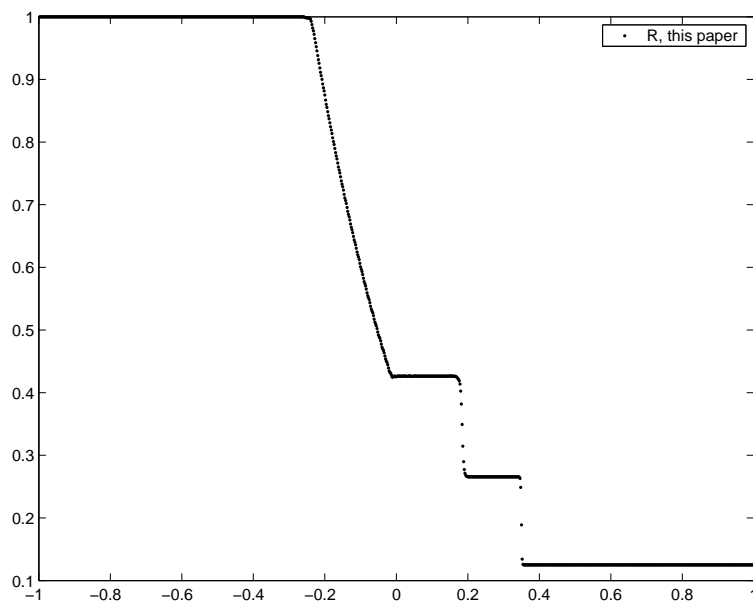


Р и с у н о к 1.5

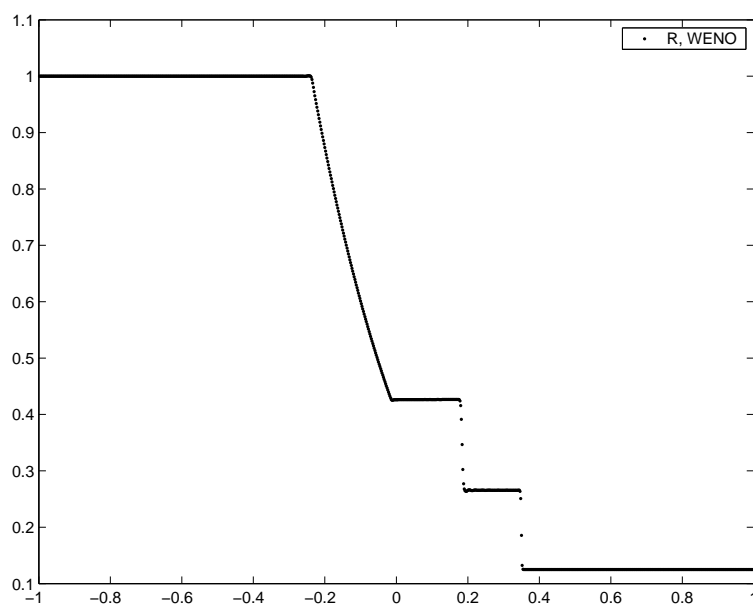
Задача Лакса (схема из статьи, $t=0.13$): скорость

Р и с у н о к 1.6

Задача Лакса (WENO схема, $t=0.13$): скорость

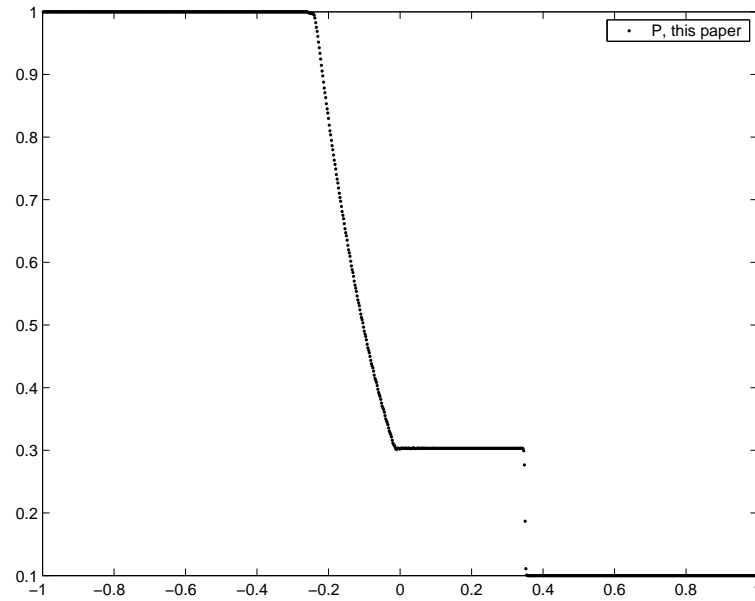


Р и с у н о к 1.7

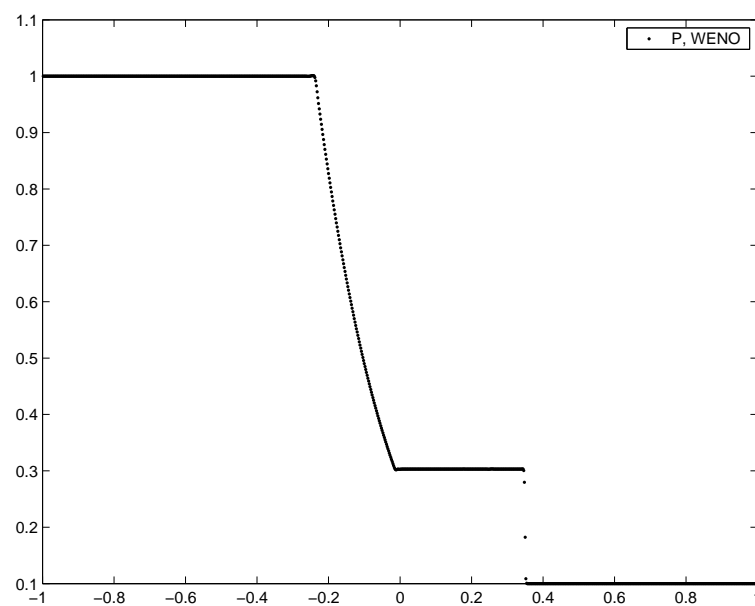
Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): плотность

Р и с у н о к 1.8

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): плотность

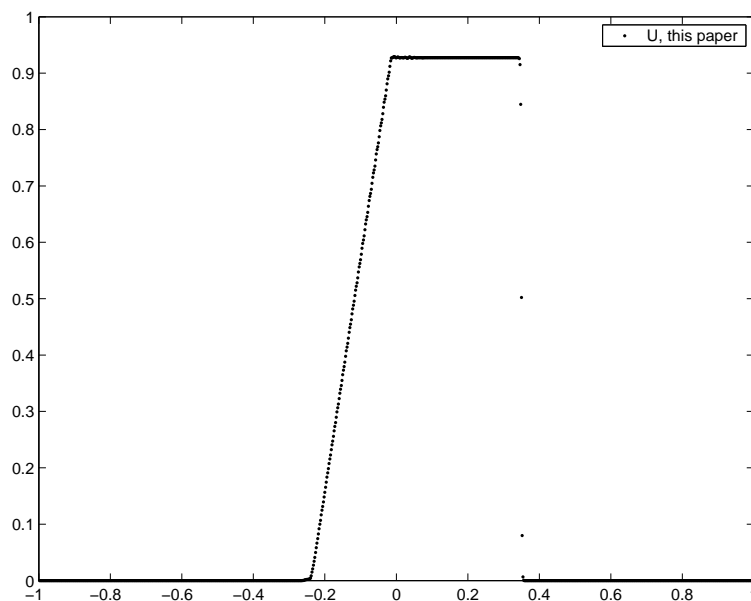


Р и с у н о к 1.9

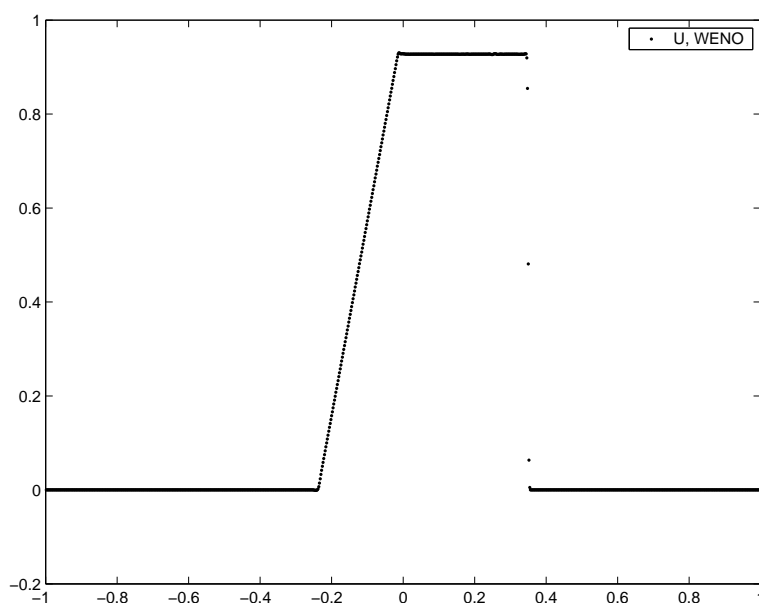
Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): давление

Р и с у н о к 1.10

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): давление



Р и с у н о к 1.11

Задача Сода (схема из статьи, $t=0.2$): скорость

Р и с у н о к 1.12

Задача Сода (WENO схема, $t=0.2$): скорость

Таким образом, из графиков плотности, давления и скорости для решений модельных задач видно, что предложенный способ выбора интерполяционного полинома дает меньшие осцилляции на разрывах решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб., 1959, 47, вып. 3, 271-306.

2. Годунов С.К., Забродин М.Я., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., Наука, 1976
3. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа// Издательство "Наука". Главная редакция Физико-математической литературы, "Математическое моделирование", 1989, Т.1, № 5, - С. 95-120.
4. Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П., Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмаера-Мешкова, Математическое моделирование, 1995, т. 7, № 5, с. 15 – 25.
5. A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. III, Journal of computational physics, 71, p. 231 – 303 (1987).
6. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of computational physics, 126 (1996). P. 202-228.

About choosing interpolation polinom in essentially non-oscillatory schemes.

© R. V. Zhalnin³, E. E. Peskova⁴

Abstract. In this paper proposed new choosing method of interpolation polinom in essentially non-oscillatory schemes for solving gas dynamic equations.

Key Words: gas dynamic equations, ENO schemes, essentially non-oscillatory schemes

REFERENCES

1. Godunov S. K., Difference method of numerical calculation of discontinuous decisions of the equations of hydrodynamics // Math. col., 1959, 47, No. 3, 271-306.
2. Godunov S. K., Zabrodin M. Ya., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. The numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics, M., Nauka, 1976
3. Vyazikov K. V., Tishkin V. F., Favorskiy A. P. Construction monotonous difference schemes of the high order of approximation for hyperbolic systems. // Nauka, «Mathematical modeling», 1989, V.1, № 5, - P. 95-120.
4. Tishkin V. F., Nikishin V. V., Popov I. V., Favorskiy A. P., Difference schemes of three-dimensional gas dynamics for a problem about evolution of Richtmayer-Meshkov instability, Mathematical modelling, 1995. V. 7, № 5, p. 15 – 25.
5. A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. III, Journal of computational physics, 71, p. 231 – 303 (1987).
6. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, Journal of computational physics, 126 (1996). P. 202-228.

³Senior Lecturer of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@appmath.mrsu.ru.

⁴Magister of applied mathematics chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk.