УДК 517.956

Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие.

© А. Ю. Павлов[1]

Аннотация. Рассматривается задача об управляемости за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений для нелинейных систем ОДУ. Получены достаточные условия существования управления когда требование асимптотического равновесия у первого приближения снято.
Ключевые слова: системы ОДУ, математическая теория управления, управляемость за бесконечное время, асимптотическое равновесие.

Важную роль в математической теории управления играют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за конечное и бесконечное время.

При управляемости за конечное время произвольная фиксированная точка переводится в другую произвольную точку за определенное время T. В случае управляемости за бесконечное время фиксированная точка переводится в сколь угодно малую окрестность другой точки, причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит.

В работе [1] профессором Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости нелинейных систем вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u) + F(t) \tag{1.1}$$

за конечное и бесконечное время в определенных классах допустимых управлений K.

Данные условия получены на основе асимптотической теории интегрирования уравнений движения и метода сравнения. Причем уравнением сравнения является

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t)y + B(t)u + F(t) \tag{1.2}$$

.

Одним из условий управляемости за бесконечное время является существование асимптотического равновесия у системы первого приближения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t)y \tag{1.3}$$

.

Для системы (1.3) существование асимптотического равновесия следующее.

Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (1.3), нормированная в нуле, $Y(0) = E$, $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = Y(+\infty)$, $detY(+\infty) \neq 0$.

Тогда говорят, что система (1.3) имеет асимптотическое равновесие. Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -x + u \tag{1.4}$$

Уравнение первого приближения

[1]Доцент кафедры прикладной математики, МГУ им Н.П.Огарева, г. Саранск; appmath@svmo.ru.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y \tag{1.5}$$

не имеет асимптотического равновесия, так как общее решение уравнения:

$$y(t) = ce^{-t} \tag{1.6}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 0\,, \forall c \in R\,.$

Покажем, что уравнение (1.4) является управляемым за бесконечное время. Пусть точку x_0 по траектории уравнения (1.4) необходимо перевести за бесконечное время в точку x_1, то есть $x(t_0) = x_0\,,\ x(+\infty_0) = x_1\,.$

Частное решение уравнения (1.4), проходящее через точку $(t_0\,, x_0)$ имеет вид:

$$x(t) = e^{-t}(\int\limits_{t_0}^{t} e^s u(s) ds + x_0 e^{t_o}) \tag{1.7}$$

Найдем такое управление u ,что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_1\,.$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{t_0}^{t} e^s u(s) ds + x_0 e^{t_0}}{e^t} \tag{1.8}$$

.

Если потребовать непрерывность функции на промежутке $[t_0\,, +\infty)$, то к последнему пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t u(t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} u(t) \tag{1.9}$$

.

То есть искомым уравнением может быть любая непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = x_1$. В частности, можно положить $u(t) = x_1\,;\ u(t) = x_1 + \frac{1}{t}\,;\ u(t) = x_1 - \frac{1}{t}\,.$

Таким образом, система (1.4) является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия.

Определенный интерес представляют классы уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения не является необходимым или необходимым и достаточным условием. Найдем класс дифференциальных систем, управляемых за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений без предположения существования асимптотического равновесия системы первого приближения $\frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x\,.$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = A(t)x + f(t, x, u), \\ x(t_0) = x_0, x(+\infty) = x_1, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $x(t) \subset R^n\,, u(t) \subset R^m\,,$
$T \le t < +\infty\,,$
$A(.) : [T, +\infty) \to \mathrm{Hom}\,(R^n, R^n)$ - непрерывное отображение,
$f \in C([T, +\infty) \times R^n \times R^m \times R^n)\,.$

Необходимо перевести точку x_0 в точку x_1 по траектории уравнения (1.10) за бесконечное время.

Пусть $y = x - x_1$. Тогда $\dot{y} = \dot{x}$ (точкой обозначена производная по t), $x = y + x_1$. Система (1.10) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, y(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Обозначим $\varphi(t) = A(t)x_1$, $\tilde{f}(t, y, u) = f(t, y + x_1, u)$. Предположим, что $\|\tilde{f}(t, y, u) + \varphi(t)\| \le \psi(t)\|y\| + \eta(t, u(t))$, где $\psi \in C([t_0, +\infty), R)$, $\eta \in C([t_0, +\infty) \times R^m, R)$.

Тогда будем иметь

$$\|y(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_{l}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) dl + \|x_0 - x_1\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right) \left[\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) \exp\left[\int_{l}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds - \int_{t_0}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right] dl\right] = \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) \left[\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) \exp\left[\int_{l}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right] dl\right]$$

Последнее выражение при $t \to 0$ должно стремиться к нулю.

Рассмотрим $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_{l}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right) dl}{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right)}$.

Предположим, что выполняется следующее условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = -\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) dl = \infty,$$

а функция $u(t)$ такова, что к пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\eta(l, u(l)) \exp\left(\int_{l}^{t_0} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right)}{-\exp\left(-\int_{t_0}^{t} (\Lambda(s)+\psi(s))ds\right)(\Lambda(t)+\psi(t))} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t)+\psi(t)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если для системы (1.10) и управления $u(t)$ выполняется* $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = -\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) dl = \infty$,

и $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t)+\psi(t)} = 0$, *то любую точку $x_0 \in R^n$ можно перевести в точку $x_1 \in R^n$ за бесконечное время по траектории системы (1.10).*

Список литературы

1. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: Теория и приложения. СВМО, 2001.– 300с.

Дата поступления 11.11.2009

Controllability in infinite and asymptotic equilibrium.

© **A. Yu. Pavlov**[2]

Abstract. The problem about controllability in infinite time in a class of admissible controls for nonlinear ODE systems is considered. Sufficient conditions for existence of control, when the requirement of the asymptotic equilibrium in the first approximation withdrawn.
Key Words: ODE systems, mathematical control theory, asymptotic equilibrium.

References

1. Voskresensky E. V. Asymptotic methods: the theory and applications. SVMO, 2001.–300 p.

[2]Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian State University, Saransk; appmath@svmo.ru.