УДК 517.925

Существование периодических режимов в математических моделях нелинейных электрических цепей

© Т. Л. Львова[1]

Аннотация. В статье получены необходимые условия существования периодического режима работы математической модели нелинейной электрической цепи.
Ключевые слова: математическая модель нелинейной электрической цепи, периодический режим работы электрической цепи, система нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Строго говоря, все электрические цепи нелинейны. Но во многих практических случаях эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею пренебрегают. Это дает возможность развить теорию линейных электрических цепей, и применять ее для расчета электротехничских устройств.

Однако существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, обладают рядом свойств, которые отсутствуют у линейных цепей. Эти свойства позволяют создавать основанные на них автоматические системы управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, устройства передачи информации, стабилизаторы напряжения или тока, генераторы и т. д.

Теоретические исследования процессов в нелинейных электрических цепях оказываются много сложнее исследования процесов в линейных цепях. Математическая модель нелинейной цепи описывается нелинейными дифференциальными уравнениями

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \tag{1.1}$$

которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа. Заметим, что только в исключительных случаях решение уравнения (1.1) можно найти в замкнутой форме.

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы: состояние равновесия; периодическое движение при отсутствии в системе источников ЭДС (тока) – автоколебания; периодическое движение с частотой источника периодической ЭДС (тока) – вынужденные колебания; резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках; квазипериодические процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов режимов [1].

2. Постановка задачи

Для расчета режима математической модели электрической цепи, содержащей нелинейные и линейные элементы, разделим ее на линейную и нелинейную части. В этом

[1]Ассистент кафедры высшей математики, Рязанский государственный радиотехнический университет, г. Рязань; lvovatl@yandex.ru.

случае, получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + \varphi(t) + f(t, x, \lambda), \tag{2.1}$$

где A – $n \times n$ постоянная матрица, x – n-мерный вектор переменных состояния, $\varphi(t)$ – n-мерный вектор воздействий, $f(t, x, \lambda)$ – n-мерная вектор-функция, определяемая нелинейными элементами электрической цепи, λ – l-мерный вектор, характеризующий особенности цепи, неучтенные при составлении модели (2.1). Коэффициенты матрицы A определяются топологией линейной части электрической цепи.

Ставится задача получить условия существования периодического решения системы (2.1), другими словами, найти условия при которых в математической модели нелинейной электрической цепи существует периодический режим изменения тока и напряжения.

3. Основной результат

Рассмотрим систему уравнений (2.1). Полагаем, что выполнены следующие условия:

1) вектор-функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна для $t \in (-\infty; +\infty)$, ω-периодическая;

2) вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n \times \Lambda(\delta_0)$, где $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in \mathbb{E}_l : |\lambda| \le \delta_0\}$, $f(t, x, 0) \equiv 0$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{f(t,x,\lambda)}{|\lambda|} = 0$ равномерно относительно переменных t, x на любом замкнутом, ограниченном множестве, принадлежащем $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n$;

3) система (2.1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра [2] на любом замкнутом, ограниченном множестве $(-\infty; +\infty) \times \mathbb{E}_n \times \Lambda(\delta_0)$.

Пусть вектор-функция $x(t, c)$, где $c \in G(\mu_0) = \{c \in \mathbb{E}_n : |c| \le \mu_0\}$, является ω-периодическим решением системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$.

Выполним замену переменных $y = x - x(t, c)$, тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\dot{y} = Ay + f(t, y + x(t, c), \lambda). \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение множества
$D(\delta_0) = \{(t, y, c, \lambda) : t \in [0; \omega], y \in \mathbb{E}_n, |y| \le \delta_0, c \in G(\mu_0), \lambda \in \Lambda(\delta_0)\}$,
$W(\delta_0) = \{\alpha \in \mathbb{E}_n, |\alpha| \le \delta_0\}$,
где $\mu_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ некоторые фиксированные числа.

Непосредственно подстановкой можно убедиться, что при $\lambda = 0$, $y \equiv 0$ будет решением (3.1). Тогда на основании теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра получаем, что существуют числа $\mu \in (0; \mu_0]$, $\delta \in (0; \delta_0]$, при которых для любых $\alpha \in W(\delta)$, $c \in G(\mu)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$, система уравнений (3.1) имеет единственное решение $y(t, \alpha, c, \lambda)$, определенное на сегменте $[0; \omega]$, непрерывное на множестве $[0; \omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ и удовлетворяющее неравенству $|y(t, \alpha, c, \lambda)| \le \delta_0$.

Определение 3.1. *Решение $t \to y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ системы (3.1) будем называть ω-периодическим, если существуют векторы $\alpha \in W(\delta_0)$, $c \in G(\mu_0)$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ при которых выполняется равенство*

$$y(0, \alpha, c, \lambda) = y(\omega, \alpha, c, \lambda) = \alpha.$$

Предположим, что вектор-функцию $f(t, y + x(t, c), \lambda)$ можно представить в виде

$$f(t, y + x(t, c), \lambda) = f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y + P_k(t, x(t, c), \lambda, y) + o(|y|^k),$$

где $D(t, x(t, c), \lambda)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $f(t, x, \lambda)$ при $x = x(t, c)$, непрерывное по переменным t, c, λ на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0)$; $P_k(t, x(t, c), \lambda, y)$ – вектор-форма k-го порядка относительно переменной y, $k > 1$; $\lim\limits_{y \to 0} \frac{o(|y|^k)}{|y|^k} = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} D(t, x(t, c), \lambda) = 0$, равномерно относительно t, c на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0)$. Вектор-форму $P_k(t, x(t, c), \lambda, y)$ всегда можно представить равенством $P_k(t, x(t, c), \lambda, y) = Q(t, x(t, c), \lambda, y) \cdot y$, где $Q(t, x(t, c), \lambda, y)$ матрица, непрерывная по переменным t, c, λ, y на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0) \times D(\delta_0)$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} Q(t, x(t, c), \lambda, y) = 0$ равномерно относительно t, c, λ на множестве $[0; \omega] \times G(\mu_0) \times \Lambda(\delta_0)$.

Система уравнений (3.1) примет вид

$$\dot{y} = Ay + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y + P_k(t, x(t, c), \lambda, y) + o(|y|^k). \tag{3.2}$$

Одновременно с (3.2) рассмотрим систему

$$\dot{z} = Az + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) +$$
$$+ P_k\Big(t, x(t, c), \lambda, y(t, \alpha, c, \lambda)\Big) + o(|y(t, \alpha, c, \lambda)|^k). \tag{3.3}$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Решение $t \to y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ системы (3.2) является решением системы (3.3). И наоборот, решение системы (3.3) $t \to z(t)$, $z(0) = \alpha$ является решением системы (3.2), и для любого $t \in [0; \omega]$ справедливо равенство $z(t) = y(t, \alpha, c, \lambda)$.*

Система уравнений (3.3) это линейная неоднородная система. Пусть $X(t)$, $X(0) = E$ фундаментальная матрица системы $\dot{z} = Az$, тогда на основании теоремы (3.1.) будет

$$y(t, \alpha, c, \lambda) = X(t) \cdot \alpha + X(t) \cdot \int\limits_0^t X^{-1}(\xi) \cdot \Big[f(\xi, x(\xi, c), \lambda) + D(\xi, x(\xi, c), \lambda) \cdot y(\xi, \alpha, c, \lambda) +$$
$$+ P_k(\xi, x(\xi, c), \lambda, y(\xi, \alpha, c, \lambda)) + o(|y(\xi, \alpha, c, \lambda)|^k) \Big] d\xi.$$

Т е о р е м а 3.2. *Решение системы (3.2) $t \to y(t, \alpha, c, \lambda)$, $y(0, \alpha, c, \lambda) = \alpha$ можно представить в виде*

$$y(t, \alpha, c, \lambda) = X(t) \cdot \alpha + o(|\gamma|), \tag{3.4}$$

где $\gamma = (\alpha, \lambda)$ – вектор и $|\gamma| = \max\{|\alpha|, |\lambda|\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Покажем, что величина $\frac{y(t, \alpha, c, \lambda)}{|\gamma|}$ ограничена на множестве $[0; \omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ при $\gamma \neq 0$.

Так как, вектор-функция $t \to y(t, \alpha, c, \lambda)$ решение (3.2), то для любого $t \in [0; \omega]$ будет выполнено равенство

$$\dot{y}(t, \alpha, c, \lambda) = A \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) + f(t, x(t, c), \lambda) + D(t, x(t, c), \lambda) \cdot y(t, \alpha, c, \lambda) +$$

$$+P_k\Big(t, x(t,c), \lambda, y(t,\alpha,c,\lambda)\Big) + o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k).$$

Откуда получим

$$|y(t,\alpha,c,\lambda)| \leq |\alpha| + \int\limits_0^t \Big|f(\xi, x(\xi,c),\lambda)\Big| d\xi + \int\limits_0^t \Big\| A + D(\xi, x(\xi,c),\lambda) +$$

$$+Q\Big(\xi, x(\xi,c),\lambda, y(\xi,\alpha,c,\lambda)\Big) + \frac{o(|y(\xi,\alpha,c,\lambda)|^k)}{|y(\xi,\alpha,c,\lambda)|}\Big\| \cdot |y(\xi,\alpha,c,\lambda)| d\xi.$$

Пусть $M = \sup\limits_{[0;\omega]\times G(\mu)\times\Lambda(\delta)} \Big\| A + D(t,x(t,c),\lambda) + Q\Big(t, x(t,c),\lambda, y(t,\alpha,c,\lambda)\Big) + \frac{o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k)}{|y(t,\alpha,c,\lambda)|}\Big\|$.

Тогда $|y(t,\alpha,c,\lambda)| \leq |\alpha| + \int\limits_0^t |f(\xi,x(\xi,c),\lambda)| d\xi + \int\limits_0^t M \cdot |y(\xi,\alpha,c,\lambda)| d\xi$. По лемме Гронуолла-Беллмана, для любого $t \in [0;\omega]$, и любых векторов $\alpha \in W(\delta)$, $c \in G(\mu)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ имеем $|y(t,\alpha,c,\lambda)| \leq \Big(|\alpha| + \int\limits_0^\omega |f(t,x(t,c),\lambda)| dt\Big) \cdot \exp(M\omega)$. Следовательно, $\lim\limits_{\gamma\to 0} y(t,\alpha,c,\lambda) = 0$ равномерно по $t \in [0;\omega]$ и $c \in G(\mu)$, а так же

$$\frac{|y(t,\alpha,c,\lambda)|}{|\gamma|} \leq \frac{\Big(|\alpha| + \int\limits_0^\omega |f(t,x(t,c),\lambda)| dt\Big) \cdot \exp(M\omega)}{|\gamma|} =$$

$$= \Big(\frac{|\alpha|}{|\gamma|} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot \int\limits_0^\omega |f(t,x(t,c),\lambda)| dt \cdot \frac{|\lambda|}{|\gamma|}\Big) \cdot \exp(M\omega)$$

То есть, величина $\frac{y(t,\alpha,c,\lambda)}{|\gamma|}$ ограничена на множестве $[0;\omega] \times W(\delta) \times G(\mu) \times \Lambda(\delta)$ при $\gamma \neq 0$.

2) Убедимся, что

$$X(t) \cdot \int\limits_0^t X^{-1}(\xi) \cdot \Big[f(\xi, x(\xi,c),\lambda) + D(\xi, x(\xi,c),\lambda) \cdot y(\xi,\alpha,c,\lambda) +$$

$$+P_k(\xi, x(\xi,c),\lambda, y(\xi,\alpha,c,\lambda)) + o(|y(\xi,\alpha,c,\lambda)|^k)\Big] d\xi = o(|\gamma|),$$

а это значит,

$$\lim_{\gamma\to 0}\Big(\frac{1}{|\gamma|} \cdot X(t) \cdot \int\limits_0^t X^{-1}(\xi) \cdot \Big[f(\xi, x(\xi,c),\lambda) + D(\xi, x(\xi,c),\lambda) \cdot y(\xi,\alpha,c,\lambda) +$$

$$+P_k(\xi, x(\xi,c),\lambda, y(\xi,\alpha,c,\lambda)) + o(|y(\xi,\alpha,c,\lambda)|^k)\Big] d\xi\Big) = 0$$

равномерно относительно $t \in [0;\omega]$ и $c \in G(\mu)$.

Действительно, $\lim\limits_{\gamma\to 0} \frac{f(t,x(t,c),\lambda)}{|\gamma|} = \lim\limits_{\gamma\to 0} \frac{f(t,x(t,c),\lambda)}{|\lambda|} \cdot \frac{|\lambda|}{|\gamma|} = 0$ равномерно относительно $t \in [0;\omega]$ и $c \in G(\mu)$, $\lim\limits_{\gamma\to 0} \frac{D(t,x(t,c),\lambda) \cdot y(t,\alpha,c,\lambda)}{|\gamma|} = \lim\limits_{\gamma\to 0}\Big(D(t,x(t,c),\lambda) \cdot \frac{y(t,\alpha,c,\lambda)}{|\gamma|}\Big) = 0$ равномерно относительно $t \in [0;\omega]$ и $c \in G(\mu)$, а так же

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{P_k(t, x(t,c),\lambda, y(t,\alpha,c,\lambda))}{|\gamma|} = \lim_{\gamma\to 0}\Big(Q(t,x(t,c),\lambda, y(t,\alpha,C,\lambda)) \cdot \frac{y(t,\alpha,c,\lambda)}{|\gamma|}\Big) = 0$$

и $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k)}{|\gamma|}=\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k)}{|y(t,\alpha,c,\lambda)|}\cdot\frac{|y(t,\alpha,c,\lambda)|}{|\gamma|}=0$ равномерно относительно $t\in[0;\omega]$ и $c\in G(\mu)$.

Итак получим, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta_1\in(0;\delta_0]$, такое что, для любого вектора γ, $|\gamma|<\delta_1$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{|\gamma|}\cdot\Big[f(t,x(t,c),\lambda)+D(t,x(t,c),\lambda)\cdot y(t,\alpha,c,\lambda)+P_k(t,x(t,c),\lambda,y(t,\alpha,c,\lambda))+\right.$$

$$\left.+o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k)\Big]\right|<\varepsilon$$

при любых $t\in[0;\omega]$ и $c\in G(\mu)$. Что и требовалось доказать.
Доказательство закончено.

На основании определения (3.1.) имеем, решение $t\to y(t,\alpha,c,\lambda)$ будет ω-периодическим тогда и только тогда, когда существуют векторы $\alpha^*\in W(\delta)$, $c^*\in G(\mu)$, $\lambda^*\in\Lambda(\delta)$ удовлетворяющие равенству

$$[X(\omega)-E]\cdot\alpha+X(\omega)\cdot\int\limits_0^\omega X^{-1}(t)\cdot\Big[f(t,x(t,c),\lambda)+D(t,x(t,c),\lambda)\cdot y(t,\alpha,c,\lambda)+$$

$$+P_k(t,x(t,c),\lambda,y(t,\alpha,c,\lambda))+o(|y(t,\alpha,c,\lambda)|^k)\Big]dt=0. \tag{3.5}$$

Согластно (3.4), систему уравнений (3.5) можно представить в виде

$$[X(\omega)-E]\cdot\alpha+F_p(\gamma,c)+o(|\gamma|^p)=0, \tag{3.6}$$

где $p>1$, $F_p(\gamma,c)$ – вектор-форма порядка p, относительно γ. Так как $X(t)$ – фундаментальная матрица и решение $x(t,c)$ – ω-периодическое, то $\det[X(\omega)-E]=0$.

Пусть матрица $R=X(\omega)-E$, $rangR=r$, $0\le r<n$. Выполним замену переменных $\alpha=H\beta$, вектор β – фундаментальная система решений уравнения $R\cdot\alpha=0$, его размерность $(n-r)$.

Система (3.6) примет вид

$$F_p(v,c)+o(|v|^p)=0, \tag{3.7}$$

где $v=(\beta,\lambda)$.

Обозначим $v=\rho\cdot e$, $\rho>0$, вектор $e=(e_\beta,e_\lambda)$, тогда уравнение (3.7) может быть записано так

$$F_p(e,c)+O(\rho,|e|)=0,$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho,|e|)=0$ равномерно относительно e, $|e|\le\Delta$ и $c\in G(\mu)$, $\Delta>1$ – некоторое число.

Теорема 3.3. *Если для любых векторов e, $|e|=1$ и $c\in G(\mu)$, $F_p(e,c)\neq 0$, то существует окрестность точки $v=0$, в которой нет решения уравнения (3.7) отличного от нуля.*

Доказательство. По условиию $F_p(e,c)\neq 0$ при любых e, $|e|=1$ и $c\in G(\mu)$, множество $\{e:|e|=1\}\times G(\mu)$ замкнуто и ограничено, а функция $F_p(e,c)$ непрерывна на этом множестве. Тогда по теореме Вейрштрасса, существует число $m>0$, такое что $|F_p(e,c)|\ge m$ для любых e и c, принадлежащих множеству $\{e:|e|=1\}\times G(\mu)$.

Так как $v = (\beta, \lambda) = \rho{\cdot}e$, а $|e| = 1$, то $|v| = \rho$. Из $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho, 1) = 0$ следует, существование числа $\delta \in (0; \delta_0]$, такого что, для любых $\rho \in (0; \delta)$ и $c \in G(\mu)$ выполняется неравенство $|O(\rho, 1)| < \frac{m}{2}$. Получим $|F_p(e, c) + O(\rho, 1)| \geq |F_p(e, c)| - |O(\rho, 1)| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0$. Таким образом, для любых e, $|e| = 1$, $c \in G(\mu)$ и $\rho \in (0; \delta)$ будет $F_p(e, c) + O(\rho, 1) \neq 0$. А это значит, что система (3.7) не имеет ненулевого решения в окрестности точки $v = 0$, определенной соотношением $\{v : v = \rho{\cdot}e, \rho \in (0, \delta), |e| = 1\}$ при любом $c \in G(\mu)$.
Доказательство закончено.

Из теоремы (3.3.) следует, что необходимым условием существования ненулевого ω-периодического решения уравнения (3.1) является наличие векторов e^*, $|e^*| = 1$ и $c^* \in G(\mu)$, при которых $F_p(e^*, c^*) = 0$.

Если таких векторов нет, то решением системы (3.7) будет вектор $v = 0$, а это значит, система уравнений (3.1) имеет только нулевое решение $y \equiv 0$. Следовательно, режим работы электрической цепи, математическая модель которой задана уравнением (2.1), будет опредляться линейной частью цепи. Так как вектор-функция $x(t, c)$ – ω-периодическая, то и режим работы будет периодическим.

Список литературы

1. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. – М.: Высш. шк., 1977. – 343 с.

2. Коддингтон Э.А. и Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.

Дата поступления 01.07.2009

The existence of periodic modes in mathematical models of nonlinear electric circuits

© T. L. Lvova[2]

Abstract. The article received the necessary conditions for the existence of a periodic mode of the mathematical model of nonlinear electrical circuit.
Key Words: mathematic model of nonlinear electric circuit, periodic mode of electric circuit, nonlinear differential equation systems.

References

1. Bessonov L.A. The nonlinear electric circuits. – M.: Higher sch., 1977. – 343 p.
2. Coddington E.A. and Levinson N. Theory ordinary differential equations. M.:IL, 1958. – 474 p.

[2]Assistant of higher mathematics Chair, Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan; lvovatl@yandex.ru.