

УДК 519.8

Моделирование процесса страхования методом Монте-Карло

© С. И. Спивак¹, С. И. Лукашкин²

Аннотация. В статье рассматривается метод имитационного моделирования (метод Монте-Карло) процесса страхования в критических ситуациях. Практическое применение данного метода приведено с использованием реальных данных.

Ключевые слова: Имитационное моделирование, актуарная математика, вероятность разорения.

1. Введение

Основа успешного функционирования любой финансовой структуры - контроль баланса входящих и исходящих потоков денежных средств. В статье анализируются параметры поступления премий, выплат и возвратов по ОСАГО. В качестве примера рассматриваются данные о деятельности регионального филиала одной из российских страховых компаний за 2004 г. Принимается предположение о том, что распределение требований о выплате находится в некотором классе распределений. Тогда возникает задача оценки параметров, от которых зависят распределения, лежащие в упомянутом семействе. Эти оценки проводятся с помощью данных о требованиях страховых выплат и подходящих методов (например, метода моментов или метода максимального правдоподобия).

2. Модель изменения капитала страховой компании

Экономический смысл страхования состоит в том, что бы с одной стороны страховая компания получила прибыль, а с другой стороны клиент этой компании за сравнительно небольшую плату снял с себя часть рисков, тем самым, обеспечив себе более устойчивое положение. Изменение капитала страховой компании в момент времени t описывается следующей формулой [1], [2]:

$$U(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{M_t} p_i - \sum_{j=1}^{N_t} y_j \tag{2.1}$$

где u_0 - начальный капитал, M_t - количество принятых премий к моменту t , p_i - величина i -той премии, N_t - количество выплат к моменту t , y_j - величина j -той выплаты.

Часто в практике страхования ОСАГО, например, при продаже автомобиля, риски связанные со страхованием гражданской ответственности отпадают. В том случае, если срок действия полиса страхования не истек, страхователь имеет право обратиться в страховую компанию, с требованием вернуть ему неиспользованную часть уплаченной страховой премии пропорционально оставшемуся сроку действия договора. Это называется возвратом.

¹Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет; S.Spivak@bashnet.ru.

²Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет; sergeylu@mail.ru.

Таким образом, соотношение (2.1) можно уточнить, добавив еще один исходящий поток возвратов. Тогда изменение капитала страховой компании в момент времени t запишется следующим образом:

$$U(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{M_t} p_i - \sum_{j=1}^{N_t} y_j - \sum_{k=1}^{L_t} v_k \quad (2.2)$$

где u_0 , M_t , p_i , N_t , y_j - из формулы (2.1), L_t - количество возвратов к моменту t , v_k - величина k -того возврата.

3. Структура процессов поступления премий, выплат и возвратов

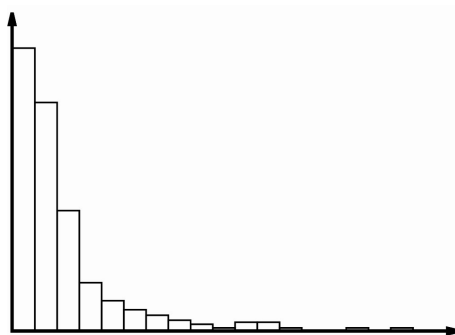
Как правило, величина премии не является постоянной величиной для всех контрактов, а меняется от различных параметров. Это касается выплат и возвратов страховых премий. Для имитационного моделирования определим функции распределения входящих и исходящих потоков.

3.1. Выплаты

Для предварительной оценки распределения, лежащего в основе данных о страховых выплатах, используем гистограмму, в которой данные разбиты на равные промежутки, и статистические характеристики этой выборки приведены в Таблице 1.

Количество значений	502
Среднее	15 577,99
Медиана	8 844,06
Мода	28 500,00
Стандартное отклонение	17 645,91
Дисперсия выборки	311 378 138,60
Асимметричность	2,37
Минимум	313,04
Максимум	114 000,00
Коэффициент вариации	1,13

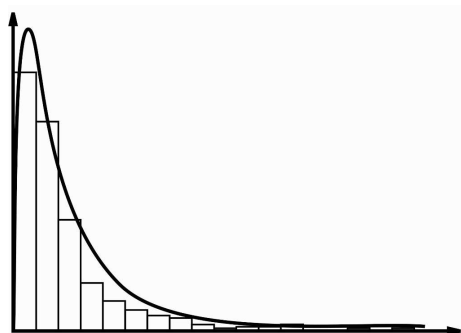
Таблица 1.



Р и с у н о к 3.1

Данные о выплатах

Мы видим, что распределение асимметрично и смещено влево. Так же известно (например [3]), что для экспоненциального распределения коэффициент вариации равен $cv = 1$, а асимметрия $v = 2$. У нашего распределения $cv = 1,13$ и $v = 2,37$. Будем проверять гипотезу о логнормальном распределении, так как оно также удовлетворяет данным характеристикам. Построим график плотности логнормального распределения поверх гистограммы.



Р и с у н о к 3.2

Функция плотности логнормального распределения

Плотность логнормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x\sigma}} \exp -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}. \tag{3.1}$$

Оценка максимального правдоподобия для параметров логнормального распределения

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i}{n}, \quad \tilde{\sigma} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\ln x - \mu)^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Получаем $\mu = 9,1446$ и $\sigma = 1,0229$. Для того, чтобы критерий был несмещенным, при разбиении на интервалы будем использовать равновероятностный подход. Разобьем на 20 равновероятностных интервалов и применим критерий χ^2 .

i	Интервал	N_i	np_i	$\frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$
1	[0,00; 1740,76)	17	25,1	3,86
2	[1740,76; 2524,25)	20	25,1	1,30
3	[2524,25; 3243,58)	28	25,1	0,30
4	[3243,58; 3958,84)	34	25,1	2,33
5	[3958,84; 4696,93)	31	25,1	1,12
6	[4696,93; 5476,33)	22	25,1	0,44
7	[5476,33; 6313,56)	29	25,1	0,52
8	[6313,56; 7226,07)	27	25,1	0,13
9	[7226,07; 8234,28)	31	25,1	1,12
10	[8234,28; 9363,74)	27	25,1	0,13
11	[9363,74; 10648,12)	29	25,1	0,52
12	[10648,12; 12133,78)	23	25,1	0,19
13	[12133,78; 13887,50)	20	25,1	1,30
14	[13887,50; 16010,65)	23	25,1	0,19
15	[16010,65; 18667,43)	29	25,1	0,52
16	[18667,43; 22147,82)	18	25,1	2,80
17	[22147,82; 27031,76)	16	25,1	5,18
18	[27031,76; 34734,86)	22	25,1	0,44
19	[34734,86; 50368,48)	23	25,1	0,19
20	[50368,48; ∞)	33	25,1	1,89
				$\chi^2 = 24,49$

Таблица 2.

Так как $\chi_{18;0,90}^2 = 25,98$ [4], то есть χ^2 не превышает это значение, мы принимаем гипотезу о логнормальном распределении на уровне $\alpha = 0,10$.

3.2. Премии и возвраты

Аналогичным способом проверяются гипотезы о том, что премии имеют гамма-распределение

$$d(x) \quad (3.3)$$

с параметрами $a = 2,44$ и $b = 653,09$, где $\Gamma(a) = \int_{-t}^{t^{a-1}} dt$. А возвраты распределены по закону Гумбеля

$$g(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b} - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (3.4)$$

с параметрами $a = 709,05$ и $b = 456,16$.

3.3. Интенсивность премий, выплат и возвратов

На следующем этапе необходимо проанализировать время наступления выплат, возвратов и поступления премий. Анализируя данные о времени, мы получим характеристики интенсивности соответствующих процессов. Ниже приведена таблица в которой содержится средняя и максимальная интенсивность для премий, выплат и возвратов.

Интенсивность	Премии	Выплаты	Возвраты
λ	86,37	1,78	0,07
λ_{max}	1640	11	3

Таблица 3.

4. Генерирование нестационарного пуассоновского процесса

Стохастический процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ считается пуассоновским, если характеризуется следующими свойствами:

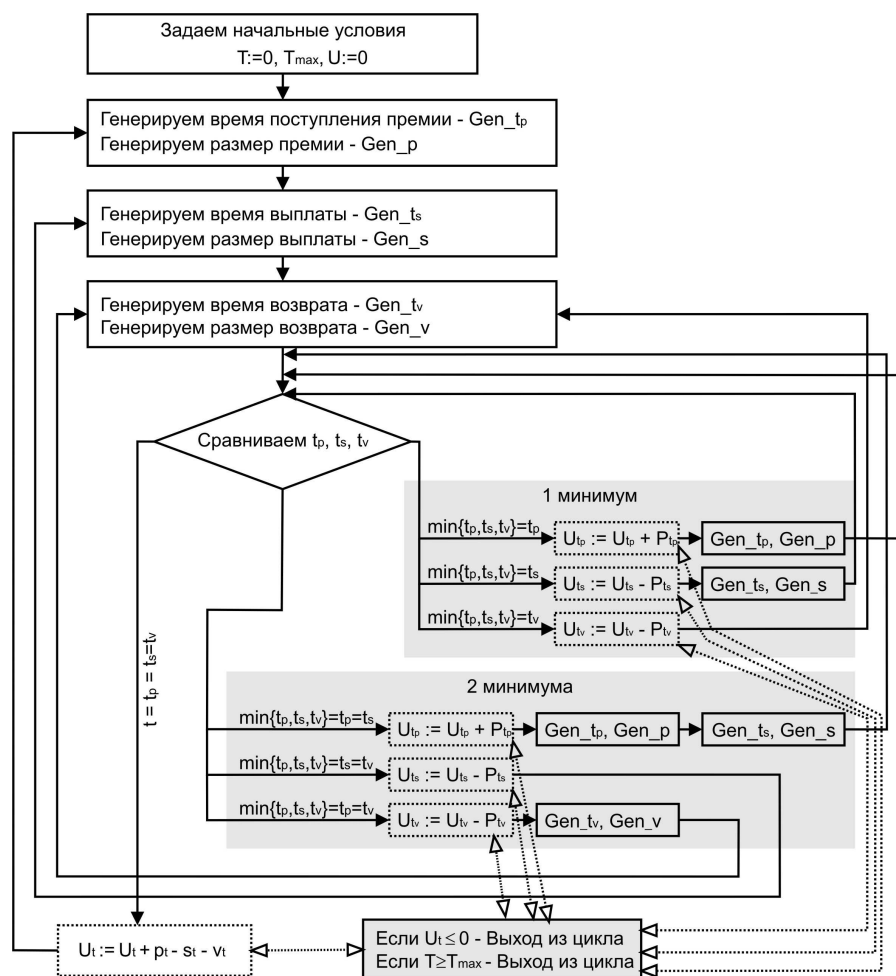
1. Требования поступают по одному в каждый момент времени.
2. $N(t + s) - N(t)$ - число поступлений требований в интервале времени $(t, t + s]$ не зависит от $\{N(u), 0 \leq u \leq t\}$
3. Распределение $N(t + s) - N(t)$ не зависит от t для всех $t, s \geq 0$.

Если выполняются пункты 1 и 2 пуассоновского процесса, а λ зависит от времени, то такой процесс называется нестационарным пуассоновский процессом. Для генерации нестационарного процесса Пуассона воспользуемся методом прореживания. Пусть интенсивность нестационарного процесса Пуассона $\lambda(t)$ не превышает некоторого значения $\lambda_{max} = \max\{\lambda(t)\}$. Мы будем генерировать стационарный пуассоновский процесс для λ_{max} , а затем "прореживаем" количество t_i , отбрасывая каждое значение t_i с вероятностью $1 - \frac{\lambda(t_i)}{\lambda_{max}}$. Тогда алгоритм генерации будет выглядеть следующим образом [3]:

1. Определяем $t_i = t_{i-1}$.
2. Генерируем U_1 и U_2 как независимые и одинаково распределенные величины с распределением $U(0, 1)$ независимо от предыдущих случайных величин.
3. Заменяем t на $t - (\frac{1}{\lambda_{max}}) \ln U_1$.
4. Если $U_2 \leq \frac{\lambda t}{\lambda_{max}}$, тогда $t_i = t$. В противном случае возвращаемся к шагу 2.

5. Численный эксперимент

Важно моделировать процесс риска во времени, потому что компания может разориться в какой-то определенный момент времени, но потом вновь увеличить количество премий. Таким образом, расчет вероятности разорения с помощью агрегированных за необходимый период данных будет некорректным. Пусть время между поступлениями требований представляет собой нестационарный пуассоновский процесс. Теперь предполагая, что начальный капитал, посчитаем вероятность разорения, используя полученные в результате анализа данные. Разорившимся будем считать процесс, в котором капитал ≤ 0 . Будем моделировать три нестационарных пуассоновских процесса, один будет моделировать промежутки времени между поступлениями премий, другой - между выплатами, третий - между возвратами. Премии в эти промежутки времени будут генерироваться согласно гамма-распределению, убытки - по логнормальному закону, а возвраты - по закону Гумбеля. Будем моделировать процессы поступления премий, выплат и возвратов во времени. Тогда алгоритм генерирования процессов будет выглядеть следующим образом:



Р и с у н о к 5.1

Алгоритм процесса оценки вероятности разорения с учетом возвратов

Реализовав 20 000 таких процессов, посчитаем количество разорившихся процессов. Ниже приведены итоги численного эксперимента.

Количество процессов	Количество разорившихся процессов	Вероятность разорения
20000	1061	0,05305

6. Заключение

Достаточно низкая вероятность разорения подтверждает тот факт, что в 2004 году закон об ОСАГО еще не был до конца «понят» гражданами. Водители еще не пользовались всеми правами по урегулированию убытков и возвратов не использованной части премий. По данным доклада ФССН с 2004 по 2006 год [5] отмечено, что выплаты росли быстрее премий, то есть коэффициент выплат (отношение выплат к премиям) постоянно увеличивался. Это обусловлено и бумом автокредитования, и большим количеством ДТП, что связано, как с появлением большого количества неопытных водителей, так и регистрацией мелких ДТП, до этого «решавшихся на месте». Эту модель можно уточнить, добавив другие исходящие и входящие потоки: ежеквартальные налоговые отчисления, резервирование, инвестирование в ценные бумаги, размещение средств на депозитах в банках, РВД

и т.п. Моделирование большого количества процессов потребует больших вычислительных мощностей и использование алгоритмов параллельного программирования. В современных условиях экономической нестабильности задача о разорении страховой компании становится еще более актуальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спивак С.И., Климин А.С., Оценивание вероятности разорения страховой компании методом Монте-Карло // Обозрение прикладной и промышленной математики, Том 8, выпуск 2, 2001г., с. 802-803
2. Спивак С.И., Климин А.С., Моделирование процесса риска страховой компании в случае переменной скорости поступления премий между исками // Обозрение прикладной и промышленной математики, Том 8, выпуск 1, 2001г., с. 333-334
3. Аверилл М. Лоу, В. Дэвид Кельтон Имитационное моделирование. Классика CS 3-е изд. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа ВНУ, 2004. - 847 с.
4. Ивченко Г.И., Медведев И.Ю., Чистяков А.В. Задачи с решениями по математической статистике, М.: Дрофа, 2007. - 318 с.
5. Доклад о ходе реализации закона "Об обязательном страховании гражданской ответственности владельцев транспортных средств": 2003 - 2006 гг. М.: ФССН, 2007. - 59 с.

Дата поступления 08.09.2009

Monte Carlo simulation modeling of insurance process

© S. I. Spivak³, S. I. Lukashkin⁴

Abstract. In the paper considering simulation method (Monte Carlo) of insurance process in extremal situation. The practice use of this method adduced using the real data.

Key Words: Simulation, actuary mathematics, ruin probability.

REFERENCES

1. Spivak, S.I., Klimin, A.S., Estimating a probability of ruin Monte Carlo method use.// Applied and industry mathematics review, 8 (2), 2001,p. 802-803
2. Spivak, S.I., Klimin, A.S., Modeling risk processes in insurance company with variable intensity premiums between claims // Applied and industry mathematics review, 8 (1), 2001, p. 333-334
3. Averill M. Law, W. David Kelton, Simulation modeling and analysis. BHV, 2004.
4. Ivchenko, G.I., Medvedev, I.Yu., Chistyakov, A.V., Book of mathematical statistic problems with solutions, Drofa, 2007.
5. The report of achievement the low "About motor third-party liability insurance": 2003 - 2006. FSSN, 2007.

³Professor, Head of the Chair of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; S.Spivak@bashnet.ru

⁴Post graduate student of the Chair of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; sergeylu@mail.ru