УДК 519.622

К наилучшей параметризации

© Е. Б. Кузнецов[1]

Аннотация. Численное решение системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих несколько параметров, изучается с позиции метода продолжения решения по параметру. Рассматривается задача параметрического приближения кривых и поверхностей.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений с параметрами, наилучшие параметры, наилучшая параметризация кривых, поверхностей.

1. Введение

Многие математические модели описываются или могут быть сведены к исследованию систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений вида

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

содержащих неизвестные переменные $x_1, \ldots, x_n$ и непрерывно изменяющиеся параметры $p_1, p_2, \ldots, p_m$, принадлежащие некоторому множеству $P : \{p_l^0 \leq p_l \leq p_l^*,\ l = 1, 2, \ldots, m\}$.

Уравнения типа (1.1) получаются, например, при решении методом конечных элементов нелинейных статических задач механики деформируемого твердого тела, а также при параметрическом приближении кривых и поверхностей.

Пусть решение системы уравнений (1.1) известно при некоторых значениях параметров, т.е.

$$x_i = x_{i0} \quad \text{при} \quad p_l = p_{l0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Требуется найти решение системы (1.1) при других значениях параметров из множества P.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Подпространство, задаваемое в пространстве* $\mathbb{R}^{n+m}$: $\{x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m\}$ *системой уравнений (1.1) при различных значениях параметров* $p_1, \ldots, p_m$, *принадлежащих некоторому множеству* $P \subset \mathbb{R}^m$, *назовем подпространством множества решений системы уравнений (1.1).*

Одним из наиболее естественных и эффективных методов исследования поставленной задачи является метод продолжения решения по параметру [1].

Заметим, что продолжение решения по параметрам задачи $p_1, \ldots, p_m$ не всегда может оказаться удачным. В [1] это обстоятельство поясняется при решении однопараметрической системы уравнений.

Основной целью данной работы является обобщение результатов работы [1], в которой рассматривается однопараметрический случай, на многопараметрический, т.е. на случай системы нелинейных уравнений (1.1).

[1]Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (государственный технический университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

2. Многомерная параметризация

Включим параметры системы (1.1) в число неизвестных, т.е. введем обозначения $x_{n+1} = p_1, \ldots, x_{n+m} = p_m$. Тогда система уравнений (1.1) примет вид

$$F_i(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Пусть неизвестные $x_1, \ldots, x_{n+m}$ являются дифференцируемыми функциями некоторых m параметров $\mu_1, \ldots, \mu_m$, т.е. $x_j = x_j(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $(j = 1, 2, \ldots, n+m)$, дифференциалы которых могут быть представлены в виде

$$d\mu_l = \sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{lj} dx_j, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Здесь вектор $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \ldots, \alpha_{l(n+m)})^T$, $(l = 1, 2, \ldots, m)$ задает направление, в котором выбирается параметр μ_l. Придавая компонентам вектора α_l различные значения, можно задать в пространстве $\mathbb{R}^{n+m} : \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}\}$ любое направление. Так, если вектор α_l взять в виде $\alpha_l = (1, 0, \ldots, 0)^T$, то параметр μ_l будет вычисляться в направлении изменения переменной x_1.

Для того чтобы все выбираемые направления были равноправными, векторы α_l должны быть одинаковой длины. Пусть они будут единичными.

Очевидно, что система векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ должна быть линейно независимой. В противном случае из m параметров $p_1, \ldots, p_m$ можно образовать линейную комбинацию и число параметров в системе (1.1) может быть уменьшено.

Уравнения продолжения решения получим, если наряду с равенствами (2.2) запишем дифференциалы уравнений системы (2.1). Тогда получаем систему уравнений продолжения решения вида

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{m(n+m)} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n(n+m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \\ dx_{m+1} \\ \vdots \\ dx_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mu_1 \\ \vdots \\ d\mu_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь введены следующие обозначения $F_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n+m$.

Для того чтобы осуществить процесс продолжения решения, систему (2.3) следует разрешить относительно дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$, следовательно, матрица этой системы должна быть невырожденной. Поэтому векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ не должны принадлежать подпространству $L^n \subset \mathbb{R}^n$, образованному строками матрицы Якоби системы (2.1), т.е. последними n строками матрицы системы (2.3). Пусть эти векторы принадлежат подпространсту $B^m \subset \mathbb{R}^m$. В силу линейной независимости векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, они образуют в подпространстве $\mathbb{R}^m$ базис.

Введем еще одно понятие.

Определение 2.1. *Подпространство в $\mathbb{R}^m$, образованное векторами, ортогональными строкам матрицы Якоби системы уравнений (2.1), т.е. последним n строкам матрицы системы (2.3), назовем касательным подпространством.*

Очевидно, что процесс разрешения системы уравнений (2.3) относительно дифференциалов будет тем эффективнее, чем матрица системы будет лучше обусловленной.

В качестве меры обусловленности D системы линейных уравнений примем величину определителя $det\ A$ матрицы A этой системы, деленную на произведение квадратичных норм его строк. Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n меру обусловленности можно представить в виде

$$D = \frac{det\ A}{l_1 l_2 \ldots l_n},$$

где $l_i = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В силу неравенства Адамара для определителей $|D| \in [0, 1]$ и большему значению $|D|$ соответствует лучшая обусловленность системы уравнений.

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы система линейных уравнений продолжения решения (2.3) была наилучшим образом обусловленной, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке гладкого подпространства множества решений системы нелинейных уравнений (2.1), параметры продолжения решения $\mu_1, \ldots, \mu_m$ являлись бы длинами дуг, вычисляемых вдоль m векторов ортонормированного базиса касательного подпространства.*

3. Численные расчеты

В прикладных исследованиях кривая обычно задается не системой, а набором точек

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для решения задачи параметрической интерполяции требуется построить систему функций

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t),$$

определяющих гладкую кривую в пространстве $\mathbb{R}^3$, которые при некоторых выбранных значениях параметра t_i, $i = 1, \ldots, n$ принимают наперед заданные значения x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. удовлетворяют условиям

$$X(t_i) = x_i, \quad Y(t_i) = y_i, \quad Z(t_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Однако проблема выбора параметра является неоднозначной. Выбор параметра имеет решающее влияние на форму приближающей кривой. При неудачном выборе параметра на кривой могут появляться осцилляции, а в некоторых случаях даже петли. Поэтому можно поставить вопрос о выборе наилучшего параметра. Если эту задачу изучать с позиции метода продолжения решения по параметру, то наилучшим параметром будет длину дуги λ, вычисляемая вдоль интерполируемой кривой.

Так как интерполируемая кривая заранее неизвестна, то часто используемая на практике хордовая параметризация, при которой в качестве параметра выбирается длина ломаной, соединяющей узловые точки, является близкой к наилучшей.

Пример 1. Рассмотрим интерполяцию лемнискаты Бернулли, задаваемой в декартовых координатах (x, y) уравнением

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0. \tag{3.1}$$

Оценки близости множеств точек полученных параметрических кривых к множеству точек исходной кривой, заданной уравнением (3.1), рассчитывались в методе Хаусдорфа. Под хаусдорфовым расстоянием между двумя точечными ограниченными множествами E и F понимается величина

$$r(E,F) = \max[\max_{P\in E}\min_{Q\in F}\rho(P,Q), \max_{P\in F}\min_{Q\in E}\rho(P,Q)]. \tag{3.2}$$

Приблизим кривую (3.1) параметрическими кубическими сплайнами. Интерполяция проводилась по семи узловым точкам, причем последняя точка совпадала с первой.

При использовании наилучшей параметризации ошибка приближения составила величину $r = 10^{-5}$. При использовании хордовой параметризации r =0.0358, при использовании целочисленной параметризации $(t_i, i = 0, 1, \ldots, n)$ — r =0.1516, при использовании центростремительной параметризации — r =0.1084.

Пример 2. Рассмотрим интерполяцию однополосного гиперболоида, задаваемого уравнением

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

параметрическими бикубическими сплайнами.

Ошибки интерполяции вычислялись в метрике Хаусдорфа (3.2).

При использовании естественной параметризации линий сетки ошибка приближения составила r =0.08, при использовании хордовой параметризации — r =0.11, при использовании целочисленной параметризации — r =0.22, при использовании центростремительной параметризации — r =0.19.

Список литературы

1. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 стр.

Дата поступления 08.04.2008

To the best parametrization

© **E. B. Kuznetsov**[2]

Abstract. In the work numerical solution of the system of nonlinear algebraic or transcendental equations with parameters is investigated using the method solution continuation with respect to parameter. The problem of parametric interpolation of curves and surfaces is considered.
Key Words: system of nonlinear equations with parameters, the best parameters, the best parametrization of curves, surfaces.

References

1. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 228 p.

[2]Professor of Differential Equation Chair, Moscow Aviation Institute (State Technical University), Moscow; kuznetsov@mai.ru.