Приложение разностных схем к исследованию нестационарного теплообмена газоразрядных ламп

© И. Н. Кудашкин[1], Г. А. Курносов[2]

Аннотация. В статье даётся численный метод решения дифференциального уравнения в частных производных, описывающего распределение температуры по цилиндрическому электроду газоразрядных ламп в нестационарном режиме их функционирования.

Ключевые слова: разностные схемы, газоразрядные лампы.

Рассмотрим одномерную математическую модель металлического проводника электрического тока (имеющего форму стержня конечных размеров), длина которого намного больше его диаметра. Поместим начало системы отсчёта в центр рабочего торца и направим абсциссу вдоль оси симметрии к противоположному концу стержня. В общем виде уравнение теплообмена проводника электрического тока с окружающей средой имеет вид [1]

$$C_\rho F\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x}(\lambda F\frac{\delta T}{\delta x}) + q_{dj}F - q_w F\frac{\delta S}{\delta x}, \quad (1)$$

где C - удельная теплоёмкость, ρ - плотность, λ - коэффициент теплопроводимости и F - площадь поперечного сечения материала стержня, t - время; q_{dj} - тепло, получаемое элементом стержня за счет нагревания его электрическим током; q_w - поток энергии, уходящий с боковой поверхности стержня вследствие конвективного и лучистого теплообмена; S - площадь охлаждаемой боковой поверхности.

Уравнение (1) отражает баланс энергии элемента проводника длиной dx и площадью поперечного сечения S, находящегося на расстоянии x от начала системы отсчёта. Левая часть отображает изменение внутренней энергии, в правой части первое слагаемое учитывает нагревание вследствие теплопроводимости материала, второе - за счёт выделения джоулева тепла при прохождении электрического тока, третье - охлаждение конвективными потерями во внутриламповой газовой среде и лучистым теплообменом.

В газоразрядных источниках света высокого и сверхвысокого давления чаще всего применяются электроды цилиндрической формы. Пусть электрод имеет радиус r, тогда площадь его поперечного сечения $F = \pi r^2$, площадь боковой поверхности $S = 2\pi r x$. Подставляя эти формулы в (1), получим

$$C_\rho F\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta x}(\lambda\frac{\delta T}{\delta x}) + q_{dj} - q_w\frac{2q_w}{r}, \quad (2)$$

Пусть в последнем уравнении коэффициент теплопроводимости материала λ постоянен, джоулева энергия q_{dj} и тепловые потери электрода q_w вычисляются по известным формулам $q_{dj} = j^2 \cdot R(t)$ и $q_w = q_{conv} + q_{rad}$. Здесь j - плотность электрического тока, $R(T)$ - электрическое сопротивление электрода, q_{conv} - конвективные потери энергии, q_{rad} - энергия лучистого излучения. При передаче тепла теплопроводностью от стержня через окружающий его газ, величина теплового потока в пограничном слое около твёрдого тела подчиняется закону Ньютона

$$q_{conv} = \alpha_k(T - T_g),$$

[1]Доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский госуниверситет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск.
[2]Доцент кафедры алгебры и геометрии, Мордовский госуниверситет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск.

где α_k - коэффициент теплоотдачи, T - температура стержня, T_g - температура окружающего его газа на внешней поверхности пограничного слоя.

Тогда с учётом этих допущений имеем

$$C_\rho F\frac{\delta T}{\delta t}=\lambda\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}-j^2R(T)-\frac{2UT^v(T^4-T_g^4)+\alpha(T-T_g)}{r}. \tag{3}$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ распределение температуры по стержню подчиняется начальному условию

$$T(0,x)=\varphi(x). \tag{4}$$

Предположим также, что в рабочий торец $(x=0)$ поступает мощность $Q=Q(t)$, изменяющаяся во времени, а с противоположного тыльного конца происходит отвод тепла излучением и конвекцией. Тогда на концах стержня справедливы граничные условия

$$\frac{\delta T}{\delta x}|_{x=0}=-\frac{Q(t)}{\lambda\pi r^2}=q_1(t), \tag{5}$$

$$\frac{\delta T}{\delta x}|_{x=l}=-q_w(T)=q_2(T). \tag{6}$$

Требуется найти решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям (4) - (6).

Упростим задачу и будет искать решение при $C=C(T)=const.$ Введем обозначения $a^2=\frac{\lambda}{C\rho}$, $f(x,t,T)=\frac{j^2\cdot R(T)-\frac{2q_w}{r}}{C\rho}$, тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{\delta T}{\delta t}=a^2\frac{\delta^2 T}{\delta x^2}+f(t,x,T). \tag{7}$$

Решение задачи (7), (4) - (6) будем искать методом сеток. Учитывая то обстоятельство, что теплофизические характеристики материала электрода λ, C определяются приближённо, остановимся на классической явной схеме. Обычно в теоретических исследованиях предпочтение отдаётся неявным схемам, так как в них отсутствуют ограничения на длины шагов. Однако явные схемы при обязательности ограничений обладают тем достоинством, что позволяют проводить компьютерные расчёты в интерактивном режиме.

В области

$$0\le x\le l, \tag{8}$$

$$0\le t\le \bar{t} \tag{9}$$

введём сетку

$$x_m=mh,\ m=0,1,2,...,M,\ h=\frac{l}{M}, \tag{10}$$

$$t_n=n\tau,\ n=0,1,2,...,N,\ \tau=\frac{\bar{t}}{N}. \tag{11}$$

С помощью четырёхточечного шаблона

$$[n\tau,(m-1)h];\ [n\tau,mh];\ [n\tau,(m+1)h];[(n+1)\tau,mh]$$

заменим непрерывную задачу (7), (4)-(6) дискретной. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\tau}=a^2\frac{T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}}{h^2}+f_{m,n}, \tag{12}$$

где $f_{m,n} = f(n\tau, mh, T_m)$.

Начальное условие (4) заменится сеточным

$$T_{m,0} = \varphi(mh), \tag{13}$$

а граничные условия (5) и (6) запишутся в виде

$$\frac{T_{-1,n} - T_{1,n}}{2h} - q_1(n,\tau) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{T_{M+1,n} - T_{M-1,n}}{2h} - q_2(T_{M,n}) = 0. \tag{15}$$

Перепишем сеточное уравнение (12) в удобном для вычисления значений температуры в узлах $(n+1)$-го слоя по известным значениям на n-м слое

$$T_{m,n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + (1 - \frac{2a^2\tau}{h^2})T_{m,n} + \tau \cdot f_{m,n}. \tag{16}$$

Значения температуры на нулевом слое определяются соотношением (13).

В матричной форме последняя формула (16) запишется как

$$\begin{cases} T^{(n+1)} = AT^{(n)} + \tau \cdot f^{(n)}, \\ T^{(0)} = \varphi,\ n = 0, 1, 2, ..., N-1, \end{cases} \tag{17}$$

где $T^{(n)} = \{T_{1,n}, T_{2,n}, ..., T_{M-1,n}\}$ - вычислительный вектор столбец; $\varphi = \{\varphi(h), \varphi(2h), ..., \varphi((M-1)h)\}$ - вектор-столбец начальных значений; $T^{(n+1)} = \{T_{1,n+1}, T_{2,n+1}, ..., T_{M-1,n+1}\}$ - искомый вектор столбец; A - квадратная трёхдиагональная матрица порядка $M-1$

$$A = \begin{pmatrix} 1-2X & X & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ X & 1-2X & X & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 1-2X & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X & 1-2X \end{pmatrix}.$$

где $X = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}$.

Основной проблемой применения применения метода сеток является выявление условий устойчивости разностной схемы. В работе [2] установлено, что если в (7) функции $a^2, f(t,x,T)$ ограничены и равномерно непрерывны по всем аргументам и, кроме того, для $f(t,x,T)$ выполнено условие Липшица

$$|f(t,x,T_1) - f(t,x,T_2)| \leq L \cdot |T_1 - T_2|,$$

где L положительное число, а правая часть (4) интегрируема, то если представить (16) в виде

$$T_{m,n+1} = \sum_{\xi=-1}^{1} C_\xi(t,x,0) U_{m+\xi,n} + \tau \cdot f_{m,n}, \tag{18}$$

причём коэффициенты C_ξ удовлетворяют условию

$$|\sum_{\xi=-1}^{1} C_\xi(t,x,0) \cdot \exp(i\xi\beta)| \leq \exp(-\mu\beta^2), \tag{19}$$

где $|\beta| \le \pi$ и постоянная $\mu > 0$, схема (16) является устойчивой [2].

С учётом введенного ранее обозначения $X = a^2 \frac{\tau}{h^2}$ имеем $C_{-1} = = C_1 = X,\ C_0 = 1-2X$ и левая часть (19) принимает вид

$$|\sum_{\xi=-1}^{1} C_\xi(t,x,0)\cdot\exp(i\xi\beta)| = |X\cdot[\exp(-i\beta)+\exp(i\beta)] + 1 - 2X| =$$

$$= |1 - 4X\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}|. \tag{20}$$

На основании (20) для выполнения неравенства (19) необходимо, чтобы $|1-4X{\cdot}\sin^2\frac{\beta}{2}| \le 1$ при $|\beta| \le \pi$, но тогда из последнего следует, что $X \le \frac{1}{2}$.

Обратно, если выполняется неравенство (19), то из разложения в ряды

$$1 - 4X\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - 4X\frac{\beta^2}{4} + ...,$$

$$\exp(\mu\beta^2) = 1 + \mu\beta^2 + ...$$

вытекает, что $\mu \le X \le \frac{1}{2}$. Равномерная непрерывность и ограниченность функций $a^2,\ f$ следует непосредственно из их представления.

Таким образом, условие устойчивости схемы (16) будет иметь место в том случае, если между шагами сетки по времени τ и по длине электрода h будет выполняться неравенство

$$\tau \le \frac{h^2}{2a^2}. \tag{21}$$

Решение сеточной задачи (12) - (15) проводится в следующей последовательности [3].

1. Произвольным образом задается шаг сетки вдоль электрода h и по формуле (21) вычисляется максимальное значение шага по времени τ.

2. В соответствии с начальным условием (13) находится распределение температуры по электроду в нулевом слое $(n = 0)$

$$T_{m,0} = \varphi(mh);\ m = 0, 1, 2, ..., M.$$

3. Допустим, что решение сеточной краевой задачи (12) - (15) вычислено на слоях сетки с номерами $0, 1, 2, ..., m$.

4. Для слоя с номером $(m+1)$ значения температуры в узлах рассчитываются по соотношению (16)

$$T_{m,n+1} = C_{-1}T_{m-1,n} + C_0T_{m,n} + C_1T_{m+1,n} + \tau\cdot f_{m,n},$$

$$m = 0, 1, 2, ..., M-1;\ n = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

В частности, при $m = 0$ имеем

$$T_{0,n+1} = C_{-1}T_{-1,n} + C_0T_{0,n} + C_1T_{1,n} + \tau\cdot f_{0,n}.$$

Значение $T_{-1,n}$ в левом фиктивном узле находится из граничного условия (14)

$$T_{-1,n} = T_{1,n} + 2h\cdot q_1(n\tau),$$

а при $m = M$ из (15) получим значение температуры в правом фиктивном узле

$$T_{M+1,n} = T_{M-1,n} + 2h \cdot q_2(T_{M,n}).$$

Данный алгоритм решения задачи распределения температуры по цилиндрическому электроду при известных градиентах температуры на его концах относительно легко реализуется в программном обеспечении для персональных компьютеров на языках программирования высокого уровня.

Известным недостатком изложенного метода является наличие ограничения (21) на выбор шагов сетки, поэтому для подбора подходящих значений h и τ необходимо провести ряд вычислительных экспериментов с компьютерной программой.

Список литературы

1. Тёмкин А.Т. Обратные методы теплопроводимости. М.: Энергия, 1973. 326 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука, 1977. 656 с.
3. Кудашкин И.Н. Исследование математических моделей температурного режима электродов и их применение в системе автоматизированного проектирования источников света: Автореф. дис. канд. техн. наук. Л., 1989. 19 с.

The application of difference schemes to research of non-steady heat transfer of discharge lamps

© I. N. Kudashkin[3], G. A. Kurnosov[4]

Abstract. This paper gives a numerical method of solution of partial differential equation, which described the temperature along the cylindrical electrode of discharge lamps in non-steady condition their functioning.
Key Words: difference schemes, discharge lamps

References

1. Tjomkin A.T. The reverse methods of a heat conductions. M.: Energija, 1973. 326 p.
2. Samarsky A.A. The theory of difference schemes. M.: Nauka, 1977. 656 p.
3. Kudashkin I.N. The research of mathematical models of temperature condition of electrodes and there application in computer-aided design system of light sources: Synopsis of diss. thesis ... for a candidate of technical sciences. L., 1989. 19 p.

[3]Associate professor of algebra and geometry chair, Mordovian State University by N. P. Ogarev, Saransk.
[4]Associate professor of algebra and geometry chair, Mordovian State University by N. P. Ogarev, Saransk.