УДК 531.36

О гироскопической стабилизации нелинейных и неконсервативных систем

© А. А. Косов[1]

Аннотация. Рассматривается задача гироскопической стабилизации для механических систем, содержащих неконсервативные позиционные силы. Выявлен класс нелинейных потенциальных систем, для которого задача гиростабилизации разрешима.

Ключевые слова: механическая система, гироскопические силы, гироскопическая стабилизация.

1. Введение

Задача о гироскопической стабилизации является классической и исследовалась в целом ряде работ (см., например, [1]–[9] и указанную там библиографию). Однако, по меткому выражению В. В. Козлова [9] «Несмотря на обилие результатов в этом направлении, задача о гироскопической стабилизации не может считаться исчерпанной». В дополнение отметим только, что сравнительно мало изученными являются случаи этой задачи, когда потенциальные силы нелинейны [4], а также когда в системе присутствуют неконсервативные позиционные силы. Основная цель статьи состоит в том, чтобы на основе предложенного в [10] подхода получить условия гироскопической стабилизации для линейных систем с неконсервативными силами. Рассматриваются частные случаи неконсервативных систем, когда число степеней свободы n равно 3 или 4. На основе конструкции первого интеграла, предложенной в [5], выделен класс нелинейных потенциальных систем, для которого задача гироскопической стабилизации разрешима.

Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

2. О гироскопической стабилизации одного класса нелинейных потенциальных систем

Рассмотрим механическую систему при действии потенциальных сил и гироскопических сил, уравнения движения которой имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + G\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $q \in R^n$ и $\dot{q} \in R^n$ – соответственно векторы обобщенных координат и скоростей, которые представимы в виде $q^T = \left(q_1^T, \ldots, q_m^T\right)$, $q_k \in R^{n_k}$, $n = n_1 + \ldots + n_k + \ldots + n_m$. Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ предполагается представимой в виде $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \varphi_k\left(s_1, \ldots, s_m\right) q_k^T q_k$, где $\varphi_k\left(s_1, \ldots, s_m\right)$ непрерывно дифференцируемые, строго положительные функции аргументов $s_j = q_j^T q_j = \|q_j\|^2$, $j = \overline{1, m}$. Потенциальная энергия $\Pi\left(q\right) = \Phi\left(s_1, \ldots, s_m\right)$ – непрерывно дифференцируемая функция тех же аргументов

[1]Ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск; kosov-idstu@mail.ru.

$s_j = q_j^T q_j$, причем $\Phi(0) = 0$. Предполагается, что среди чисел $c_k = \dfrac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k}$, $k = \overline{1,m}$, имеются отрицательные, тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) при отсутствии гироскопических сил $G \equiv 0$ заведомо будет неустойчивым. Задача гироскопической стабилизации состоит в том, чтобы выбрать кососимметрическую матрицу G гироскопических сил так, чтобы положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) стало устойчивым. Будем выбирать эту матрицу блочно-диагональной $G = diag\,(G_k,\ k = \overline{1,m})$, где стоящие на диагонали блоки G_k являются кососимметрическими матрицами размера $n_k \times n_k$.

Система (2.1) является нелинейной взаимосвязанной системой, но ее линейная часть распадается на m изолированных подсистем с гироскопическими силами и потенциальными силами, имеющими одинаковые коэффициенты Пуанкаре.

Т е о р е м а 1. *Если всем неположительным коэффициентам Пуанкаре* $c_k = \dfrac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} \le 0$ *соответствуют четные размерности* n_k *векторов состояния* $q_k \in R^{n_k}$ *подсистем, то задача гироскопической стабилизации нелинейной системы* (2.1) *разрешима. При этом для положительных коэффициентов* $c_k = \dfrac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} > 0$ *гироскопические силы можно не присоединять, т.е. можно считать соответствующие матрицы* $G_k = 0$*, для нулевых* $c_k = \dfrac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} = 0$ *соответствующие матрицы могут быть взяты сколь угодно малыми невырожденными* $\det G_k \ne 0$*, для отрицательных* $c_k = \dfrac{\partial \Phi(0)}{\partial s_k} < 0$ *соответствующие гироскопические силы должны быть достаточно интенсивными, матрицы* G_k *выбираются так, чтобы было* $\lambda_{\min}(G_k^T G_k) > 8|c_k| \max\limits_{j=\overline{1,m}} \varphi_j(0)$.

П р и м е р 1. Положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ потенциальной системы с двумя степенями свободы и потенциальной энергией $\Pi(q) = \dfrac{1}{1 + (q_1^2 + q_1^2)^2} - 1$ неустойчиво, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум. Разложение потенциальной энергии в ряд начинается с формы 4-й степени. В соответствии с теоремой 1 после присоединения гироскопических сил положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ системы

$$\ddot{q}_1 - h\dot{q}_2 - \frac{2q_1(q_1^2 + q_2^2)}{\left(1 + (q_1^2 + q_2^2)^2\right)^2} = 0 \quad , \quad \ddot{q}_2 + h\dot{q}_1 - \frac{2q_2(q_1^2 + q_2^2)}{\left(1 + (q_1^2 + q_2^2)^2\right)^2} = 0$$

устойчиво при любом $h \ne 0$.

П р и м е р 2. Потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, q_3) = q_3^2 - (q_1^2 + q_2^2)(1 + q_3^2)$ в положении равновесия $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ имеет седловую точку, поэтому равновесие неустойчиво. В соответствии с теоремой 1 после присоединения гироскопических сил с $h > 2\sqrt{2}$, это положение равновесия для системы

$$\ddot{q}_1 - h\dot{q}_2 - 2q_1\left(1 + q_3^2\right) = 0, \quad \ddot{q}_2 + h\dot{q}_1 - 2q_2\left(1 + q_3^2\right) = 0, \quad \ddot{q}_3 + 2q_3\left(1 - q_1^2 - q_2^2\right) = 0$$

становится устойчивым.

3. Гироскопическая стабилизация систем с неконсервативными силами

Рассмотрим механическую систему

$$\ddot{q} + G\dot{q} + (C + P)\,q = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $q \in R^n$ и $\dot q \in R^n$ – соответственно векторы обобщенных координат и скоростей. Постоянные квадратные матрицы $C = C^T$ потенциальных и $P = -P^T, \quad P \neq 0$ неконсервативных позиционных сил считаются заданными. Постоянная кососимметрическая квадратная матрица $G = -G^T$ гироскопических сил подлежит выбору с целью обеспечения устойчивости положения равновесия $q = \dot q = 0$ системы (3.1) по Ляпунову. Далее будут рассмотрены два частных случая задачи гироскопической стабилизации: случай системы (3.1) с тремя степенями свободы $(n = 3)$ и случай системы (3.1) с четырьмя степенями свободы $(n = 4)$ и блочной матрицей $C + P$ специального вида.

Рассмотрим случай системы с тремя степенями свободы. Пусть система (3.1) представлена в виде

$$\ddot q + h \begin{pmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 \\ g_1 & 0 & -g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \dot q + \begin{pmatrix} c_1 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & c_2 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & c_3 \end{pmatrix} q = 0. \tag{3.2}$$

Т е о р е м а 2. *Если выполнены неравенства*

$$c_1c_2c_3 + c_1p_3^2 + c_2p_2^2 + c_3p_1^2 > 0,$$

$$c_1\left(c_2 - c_3\right)^2 p_1^2p_2^2 + c_2\left(c_1 - c_3\right)^2 p_1^2p_3^2 + c_3\left(c_2 - c_1\right)^2 p_3^2p_2^2 > 0,$$
$$\left(c_2 - c_3\right)^2 p_1^2p_2^2 + \left(c_1 - c_3\right)^2 p_1^2p_3^2 + \left(c_2 - c_1\right)^2 p_3^2p_2^2 > 0,$$

то существуют такие значения g_1, g_2, g_3 *и* $h_0 > 0$, *что при* $h > h_0$ *все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми и различными, т.е. система будет устойчивой.*

Первое неравенство – *необходимое* условие стабилизации $\det(C + P) > 0$.

Второе неравенство – *необходимое* условие стабилизации при сколь угодно больших $h \to +\infty$.

Третье неравенство *необходимо* в том же смысле, как и второе, и необременительно (сумма квадратов заведомо неотрицательна).

Необходимо отметить, что задача гиростабилизации потенциальной системы с тремя степенями свободы рассмотрена в [8]. Случай системы (3.2) с присутствием неконсервативных сил по сравнению со случаем гиростабилизации потенциальной системы имеет некоторые особенности:

1) возможна стабилизация системы с нечетным числом отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре;

2) множество стабилизирующих коэффициентов $\{g_1, g_2, g_3\}$ не является трехмерным: если векторы (p_1, p_2, p_3) и (c_3p_1, c_2p_2, c_1p_3) не коллинеарны, то вектор стабилизирующих коэффициентов (g_1, g_2, g_3) определяется однозначно с точностью до постоянного множителя, если же эти векторы коллинеарны, то вектор стабилизирующих коэффициентов лежит в ортогональной к ним плоскости.

П р и м е р 3. Система

$$\ddot q + h \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot q + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} q = 0$$

сохраняет устойчивость только в конечном диапазоне $0.86 < h_{\min} < 0.87 \leq h \leq 1.29 < h_{\max} < 1.30$.

Первое и третье неравенства из условий теоремы 2 здесь выполнены: $1 > 0$, $5 > 0$. Второе неравенство обращается в равенство $0 = 0$.

Рассмотрим систему с блочной матрицей позиционных сил

$$\ddot{q} + hG\dot{q} + \begin{pmatrix} c_1 & -p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & -p_2 \\ 0 & 0 & p_2 & c_2 \end{pmatrix} q = 0. \qquad (3.3)$$

Здесь c_1, c_2, p_1, p_2 – некоторые числа, отличные от нуля, причем c_1 и c_2 одного знака, так что $c_1c_2 > 0$.

Отметим, что при отсутствии гироскопических сил (т.е. $G = 0$) система (3.3) распадается на две независимые подсистемы с двумя степенями свободы. Эти подсистемы неустойчивы и не могут быть стабилизированы гироскопическими силами каждая по отдельности. Возможность стабилизации на основе гироскопической связи подсистем устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а 3. *Если коэффициенты Пуанкаре одного знака, т.е.* $c_1c_2 > 0$, *то можно указать кососимметрическую матрицу* G *и число* $h_0 > 0$ *такие, что при всех* $h > h_0$ *все корни характеристического уравнения системы (3.3) будут чисто мнимыми и различными, т.е. система будет устойчивой.*

Работа выполнена при поддержке Программы № 15 ОЭММПУ РАН, совместного проекта № 45 СО РАН и ДВО РАН и РФФИ (проект № 08-08-92208_а_ГФЕН).

Список литературы

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.

2. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974.

3. Лахаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 1. – С. 53–58.

4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980.

5. Антончик В.С. К вопросу гироскопической стабилизации // Исследования по прикладной математике. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та. – 1982. – С. 5–7.

6. Карапетян А.В. К вопросу о гироскопической стабилизации // Teorijska i primenjena mehanika. – 1994. – V. 20. – P. 89–93.

7. Булатович Р.М. Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 3. – С. 385–389.

8. Козлов В.В. О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 3. – С. 390–397.

9. Козлов В.В. Ограничения квадратичных форм на лагранжевы плоскости, квадратные матричные уравнения и гироскопическая стабилизация // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. – Т. 39, вып. 4. – С. 32–47.

10. Косов А.А. О гироскопической стабилизации неконсервативных систем // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. IX, № 3 (27). – С. 80–89.

Дата поступления 03.08.2009

Gyroscopic stabilization of nonlinear and non-conservative systems

© **A. A. Kosov**[2]

Abstract. Problem of gyroscopic stabilization for mechanical systems with non-conservative positional forces is considered. Class of nonlinear potential systems is revealed, for which problem gyrostabilization is solvable.
Key Words: mechanical system, gyroscopic forces, gyroscopic stabilization.

References

1. Chetaev N.G. The stability of motion. – N.Y.: Pergamon Press, 1961.

2. Merkin D.R. Gyroscopic Systems. – Moscow: Nauka, 1974.

3. Lakhadanov V.M. On stabilization of potential systems // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1975. – V. 39, № 1. – P. 45–50.

4. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. – New York-Heldelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1977.

5. Antonchik V.S. On problem of gyroscopic stabilization // Investigations on applied mathematics. – Saransk: MSU, 1982. – – P. 5–7.

6. Krapetyan A.V. To the problem of gyroscopic stabilization // Teorijska i primenjena mehanika. – 1994. – V. 20. – P. 89–93.

7. Bulatovich R. On stability of linear potential gyroscopic systems in the cases of maximum potential energy // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1997. – V. 61, № 3. P. 385–389.

8. Kozlov V.V. Stabilization of the unstable equilibria of charges by intense magnetic fields // J. of Applied. Mathematics and Mechanics. – 1997. – V. 61, № 3. – P. 377–384.

9. Kozlov V.V. Restrictions of quadratic forms to Lagrangian planes, quadratic matrix equations, and gyroscopic stabilization // Funct. Anal. Appl. – 2005. – V. 39, № 4. – P. 271–283.

10. Kosov A.A. On the gyroscopic stabilization of the nonconservative systems // J. of Applied and Industrial Mathematics. – 2008. – V. 2, № 4. – P. 513–521.

[2]Principal researcher, Institute of System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk; kosov-idstu@mail.ru.