УДК 517.956.2

f-адаптированная фильтрация для диффеоморфизмов Морса-Смейла

© В. З. Гринес[1], Л. А. Куприна[2], О. В. Починка[3], А. Е. Шишенкова[4]

Аннотация. В работе вводится понятие и доказывается существование f-адаптированной фильтрации для диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n \geq 2$. Показывается, что для градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на многообразиях размерности 3, существование минимальной f-адаптированной фильтрации равносильно почти ручному вложению сепаратрис седловых точек.

Ключевые слова: фильтрация, диффеоморфизм Морса-Смейла, ручное вложение сепаратрис.

1. Введение

Пусть $f : M^n \to M^n$, $n \geq 2$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Представим множество Per_f периодических точек f как объединение попарно непересекающихся подмножеств $Per_f = Per_f^+ \cup Per_f^-$, где Per_f^+ (Per_f^-) — множество всех периодических точек $p \in Per_f$ таких, что $\dim W_p^u \leq 1$ $(\dim W_p^u > 1)$. Тогда множество Per_f^+ (Per_f^-) состоит из стоков Δ_f^+ (источников Δ_f^-) и седел Σ_f^+ (Σ_f^-). Положим $\mathcal{A}_f^+ = cl(W^u_{\Sigma_f^+})$ $(\mathcal{A}_f^- = cl(W^s_{\Sigma_f^-}))$ и $L_f^+ = \mathcal{A}_f^+ \setminus \Sigma_f^+$ ($L_f^- = \mathcal{A}_f^- \setminus \Sigma_f^-$).

Следуя С. Смейлу [7], введем отношение частичного порядка $\prec$ на множестве периодических точек f следующим образом:

$$p \prec q \iff W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset.$$

Последовательность различных периодических точек $p = r_0, r_1, \ldots, r_k = q$ $(k \geq 1)$ таких, что $r_0 \prec r_1 \prec \cdots \prec r_k$ называется *цепью длины* k*, соединяющей* p *и* q. Максимум длин цепей, соединяющих p и q обозначается $beh(q|p)$. Для полноты пологают $beh(q|p) = 0$, если $W_q^u \cap W_p^s = \emptyset$.

Положим $k^+ = \max\limits_{p,q \in Per_f^+} beh(q|p)$. Тогда мы можем представить множество Per_f^+ единственным образом как объединение попарно непресекающихся f-инвариантных подмножеств, $Per_f^+ = Per_{k^+}^+ \cup \cdots \cup Per_0^+$, определяемых следующими формулами:

$p \in Per_{k^+}^+ \iff$ не существует точки $q \in Per_f^+$ $(q \neq p)$ такой, что $p \prec q$,

$p \in Per_{k^+-j}^+ \iff p \notin Per_{k^+-i}^+$, $i \in \{0, \ldots, j-1\}$ и не существует точки $q \in (Per_{k^+}^+ \cup \cdots \cup Per_{k^+-j+1}^+)$ $(q \neq p)$ такой, что $p \prec q$.

На рисунке 1.1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$. Около каждой периодической точки $p \in Per_f^+$ в скобках стоит число i такое, что $p \in Per_i^+$.

[1]Профессор НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.
[2]Доцент НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.
[3]Доцент ННГУ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.
[4]Доцент НГСХА, НГСХА, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

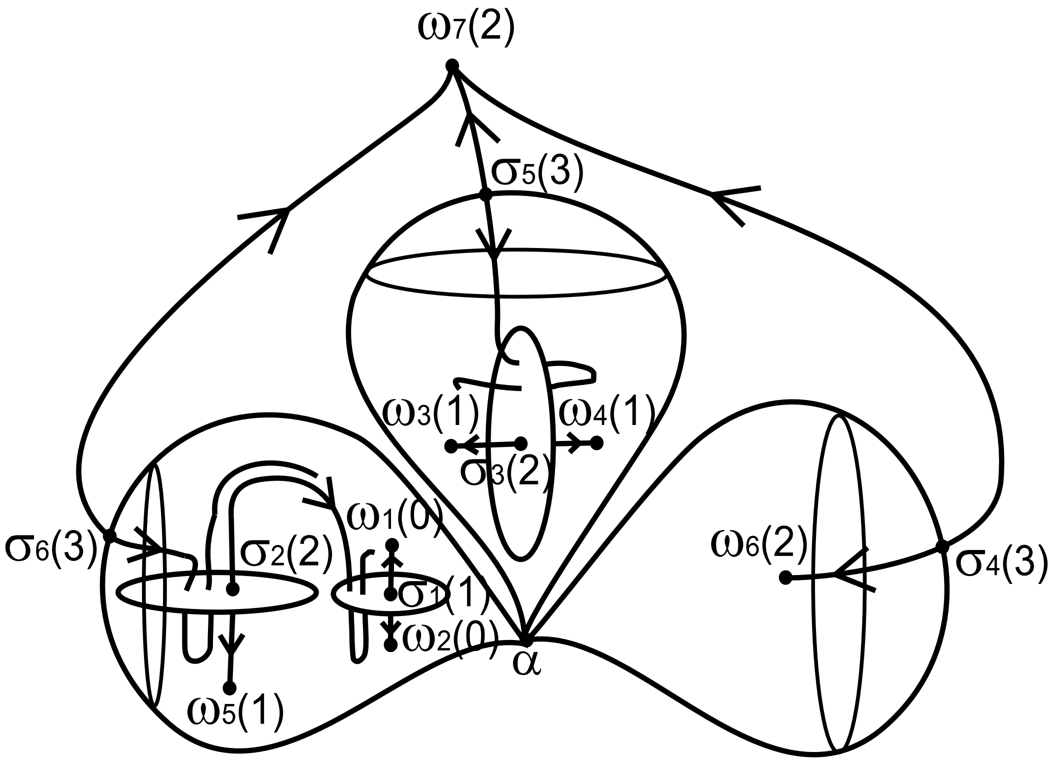


Рисунок **1.1**

Положим $A^+_{k^+} = Per^+_f$ и $A^+_{k^+-j} = Per^+_f \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{j-1} Per^+_{k^+-i}$ for $j \in \{1,\ldots,k^+\}$. Для $i \in \{0,\ldots,k^+\}$ обозначим через Δ^+_i, Σ^+_i ($\Delta^+_{A^+_i}$, $\Sigma^+_{A^+_i}$) множество всех стоков, седел, соответственно, из множества Per^+_i (A^+_i). Положим $\mathcal{A}^+_i = cl(W^u_{A^+_i})$, обозначим через m^+_i число компонент связности множества $\mathcal{A}^+_i$ и положим $g^+_i = m^+_i + |\Sigma^+_{A^+_i}| - |\Delta^+_{A^+_i}|$[5].

Определение 1.1. *Последовательность $P^+_0,\ldots,P^+_{k^+}$ подмножеств многообразия M^n назовем f-адаптированной фильтрацией для f, если:*

1) P^+_i является объединением m^+_i попарно непересекающихся n-шаров с 1-ручками и $W^s_\sigma \cap P^+_i$ состоит в точности из одного $(n-1)$-мерного замкнутого диска для каждой седловой точки $\sigma \in \Sigma^+_i$;

2) $\mathcal{A}^+_i \subset f(P^+_i) \subset int\ P^+_i \subset W^s_{A^+_i}$ и $P_i \subset int\ P_{i+1}$.

Пусть $P^+_0,\ldots,P^+_{k^+}$ — f-адаптированная фильтрация для f. По построению множество Δ^+_i либо пусто, либо состоит из изолированных в $\mathcal{A}^+_i$ точек для $i \in \{0,\ldots,k^+\}$. Для любого множества P^+_i, $i \in \{0,\ldots,k^+\}$ f-адаптированной фильтрации положим $S^+_i = \partial P^+_i$, $\hat{P}^+_i = P^+_i \cap W^s_{\Delta^+_i}$, $\tilde{P}^+_i = P^+_i \setminus \hat{P}^+_i$ и $D^+_i = W^s_{\Sigma^+_i} \cap \tilde{P}^+_i$. Для некоторой трубчатой окрестности $V(D^+_i) \subset \tilde{P}^+_i$ множества D^+_i положим $Q^+_i = \tilde{P}^+_i \setminus int\ V(D^+_i)$ и $N^+_i = Q^+_i \setminus int\ P^+_{i-1}$. Заметим, что по построению множества D_0, Q_0, N_0 являются пустыми.

Определение 1.2. *f-адаптированная фильтрация $P^+_0,\ldots,P^+_{k^+}$ для f называется минимальной, если:*

[5]Здесь и везде далее $|A|$ — мощность множества A.

1) род $g(P_i^+)$ равен[6] *g_i^+ для каждого $i\in\{0,\dots,k^+\}$;*

2) для каждого $i\in\{1,\dots,k^+\}$ существует трубчатая окрестность $V(D_i^+)$ множества D_i^+ такая, что N_i^+ диффеоморфно $S_{i-1}^+\times[0,1]$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f:M^n\to M^n$, $n\geq 2$ существует f-адаптированная фильтрация.*

Т е о р е м а 1.2. *Градиентно-подобный диффеоморфизм $f:M^3\to M^3$ обладает минимальной фильтрацией тогда и только тогда, когда множество L_f^+ состоит из одной точки или почти ручно вложено в M^3.*

2. Существование f-адаптированной фильтрации

Чтобы доказать, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла $f:M^n\to M^n$ обладает f-адаптированной фильтрацией мы будем использовать следующую лемму.

Л е м м а 2.1. *Пусть $\mathcal{O}_p$ — изолированная гиперболическая периодическая орбита диффеоморфизма $f:M^n\to M^n$ такая, что $\dim W_p^u=q$. Тогда существует окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ орбиты $\mathcal{O}_p$ и функция Морса $\varphi_{\mathcal{O}_p}:U_{\mathcal{O}_p}\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

1) $\varphi_{\mathcal{O}_p}(f(x))<\varphi_{\mathcal{O}_p}(x)$ для любого $x\in(f^{-1}(U_{\mathcal{O}_p})\setminus\mathcal{O}_p)$ и $\varphi_{\mathcal{O}_p}(f(x))=\varphi_{\mathcal{O}_p}(x)$ для $x\in\mathcal{O}_p$;

2) $Cr_{\varphi_{\mathcal{O}_p}}=\mathcal{O}_p$ и каждая критическая точка имеет индекс q;

3) $(W_r^u\cap U_{\mathcal{O}_p})\subset Ox_1\dots x_q$ и $(W_r^s\cap U_{\mathcal{O}_p})\subset Ox_{q+1}\dots x_n$ для координат Морса $x_1,\dots,x_n$ в окрестности точки $r\in\mathcal{O}_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{O}_p$ — гиперболическое множество, то для каждой точки $r\in\mathcal{O}_p$ касательное пространство T_rM^n раскладывается в прямую сумму подпространств $T_rM^n=T_rW_r^u\oplus T_rW_r^s$ таких, что $D_rf(T_rW_r^u)=T_{f(r)}W_{f(r)}^u$ и $D_rf(T_rW_r^s)=T_{f(r)}W_{f(r)}^s$. Более того, существует метрика Ляпунова $\|\cdot\|$ на M^n и константа $0<\lambda<1$ такие, что $\|Df^{-1}(v^u)\|\leq\lambda\|v^u\|$, $\|Df(v^s)\|\leq\lambda\|v^s\|$ для каждого $v^u\in E^u$ и $v^s\in E^s$, где $E^u=\bigcup\limits_{r\in\mathcal{O}_p}T_rW_r^u$ и $E^s=\bigcup\limits_{r\in\mathcal{O}_p}T_rW_r^s$.

Определим отображение $\varphi:E^u\oplus E^s\to\mathbb{R}$ формулой $\varphi(v^u,v^s)=-\|v^u\|^2+\|v^s\|^2$. Проверим, что $\varphi(Df(v^u,v^s))<\varphi(v^u,v^s)$ для любого ненулевого $v^u\in E^u$ и $v^s\in E^s$. Действительно, $\varphi(Df(v^u,v^s))-\varphi(v^u,v^s)=-\|Df(v^u)\|^2+\|Df(v^s)\|^2+\|v^u\|^2-\|v^s\|^2\leq -\frac{1}{\lambda^2}\|v^u\|^2+\lambda^2\|v^s\|^2+\|v^u\|^2-\|v^s\|^2\leq-(\frac{1}{\lambda^2}-1)\|v^u\|^2-(1-\lambda^2)\|v^s\|^2<0$ для любого ненулевого $v^u\in E^u$ и $v^s\in E^s$.

Отождествим малую окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ орбиты $\mathcal{O}_p$ с окрестностью нулевого сечения $E^u\oplus E^s$ посредством диффеоморфизма, который переводит локальное неустойчивое (устойчивое) многообразие в E^u (E^s). Тогда для каждого $v=(v^u,v^s)\in U_{\mathcal{O}_p}$ мы имеем $f(v^u,v^s)=Df(v^u,v^s)+o(v)$. Следовательно $\varphi(f(v^u,v^s))<\varphi(v^u,v^s)$ для ненулевого $(v^u,v^s)\in U_{\mathcal{O}_p}$, если окрестность $U_{\mathcal{O}_p}$ выбрана достаточно малой. Таким образом, $\varphi_{\mathcal{O}_p}=\varphi$ — искомая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

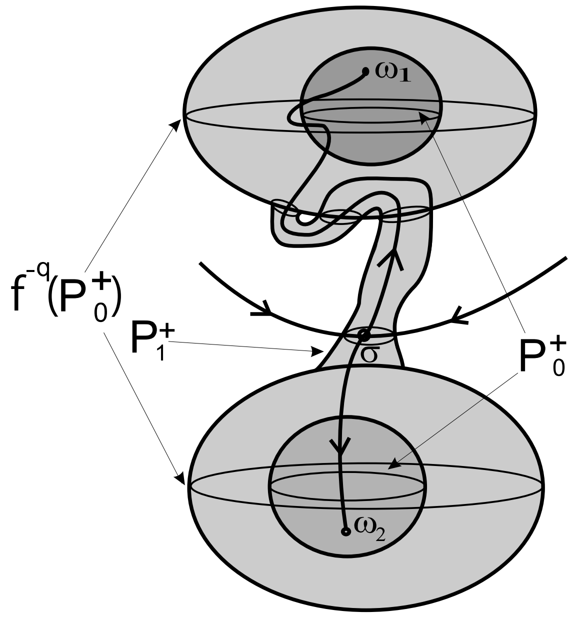
[6]Пусть P — объединение попарно непересекающихся 3-шаров с 1-ручками $P_0,\dots,P_m$ родов $g_0,\dots,g_m$. Число $g(P)=g_0+\dots+g_m$ мы называем *родом* P.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$, $n \geq 2$ существует f-адаптированная фильтрация.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму индукцией по $i = 0, \ldots, k^+$.

Пусть $i = 0$. По построению множество A_0^+ состоит из гиперболических стоков. В силу леммы 2.1., существует окрестность $U_{A_0^+} \subset W^s_{Per_0^+}$ множества A_0^+ и функция $\varphi_{A_0^+} : U_{A_0^+} \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_{A_0^+}(A_0^+) = 0$ и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ множество $P_0^+ = \varphi^{-1}_{A_0^+}([0, \varepsilon_0])$ является объединением m_0^+ n-шаров и $\mathcal{A}_0^+ \subset f(P_0^+) \subset int\ P_0^+ \subset W^s_{A_i^0}$.

Пусть по предположению индукции мы построили множество P_i^+ со свойствами 1) и 2) из определения 1.1. Построим множество P_{i+1}^+.



Р и с у н о к **2.1**

Если $\Delta_{i+1}^+ = \emptyset$, то $\hat{P}_{i+1}^+ = \emptyset$. Если $\Delta_{i+1}^+ \neq \emptyset$, то Δ_{i+1}^+ состоит из гиперболических стоков и, подобно случаю $i = 0$, существует объединение $|\Delta_{i+1}^+|$ n-шаров таких, что $\Delta_{i+1}^+ \subset f(P_{i+1}^+) \subset int\ P_{i+1}^+ \subset W^s_{\Delta_{i+1}^+}$.

Согласно теореме о трансверсальности (см. [3], теорема 2.1) мы можем предположить, что S_i^+ трансверсально пересекает множество $W^u_{\Sigma_{i+1}^+}$; обозначим через n_i число точек пересечения. Положим $M_i = W^s_{A_i^+} \setminus \mathcal{A}_i^+$, $\hat{M}_i = M_i/f$ и обозначим через $p : M_i \to \hat{M}_i$ естественную проекцию. Так как $\hat{M}_i$ получается из кобордизма $P_i^+ \setminus int\ f(P_i^+)$ склеиванием его границ в силу f, то $p(W^u_{\Sigma_{i+1}^+})$ является объединением узлов, которые трансверсально пересекаю $p(S_i^+)$ в n_i точках. Выберем трубчатую окрестность $\hat{T} \subset \hat{M}^i$ узлов $p(W^u_{\Sigma_{i+1}^+})$ так, что $\hat{T} \cap p(S_i^+)$ состоит из n_i 2-дисков. Положим $T = p^{-1}(\hat{T})$.

Согласно лемме 2.1., существует окрестность $U_{\Sigma_{i+1}^+} \subset (T \cup W^s_{\Sigma_{i+1}^+})$ множества Σ_{i+1}^+ и энергетическая функция $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+} : U_{\Sigma_{i+1}^+} \to \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+}(\Sigma_{i+1}^+) = 0$. Для малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента связности множества $V := \varphi^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2, x_3) \in U_{\Sigma_{i+1}^+} \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах. В силу λ-леммы (см. [5], λ-лемма), существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-q}(S_i^+)$ трансверсально пересекает V и $f(V)$ по n_i 2-дискам; более того, так как $\varphi_{\Sigma_{i+1}^+}$ — функция Ляпунова для f на $U_{\Sigma_{i+1}^+}$, то $(f(V) \setminus int\ f^{-q}(P_i^+)) \subset int\ V$ (см. рисунок 2.1). Следовательно, $\tilde{P}_{i+1}^+ = f^{-q}(P_i^+) \cup V$ —

объединение 3-шаров с 1-ручками, которое получается из 3-шаров с 1-ручками $f^{-q}(P_i^+)$ приклеиванием 1-ручек $V \setminus int\ f^{-q}(P_i^+)$; более того, $f(\tilde{P}_{i+1}^+) \subset int\ \tilde{P}_{i+1}^+$, действительно, это верно для точек $x \in f^{-q}(P_i^+)$, так как $f^{-q}(P_i^+)$ — f-сжимаемо и верно для точек $x \in V \setminus f^{-q}(P_i^+)$, так как $(f(V) \setminus int\ f^{-q}(P_i^+)) \subset int\ V$. Положим $P_{i+1} = \hat{P}_{i+1}^+ \cup \tilde{P}_{i+1}^+$. По построению P_{i+1} — f-сжимаемо. Его сглаживание удовлетворяет свойствам 1) и 2) из определения 1.1.
Доказательство закончено.

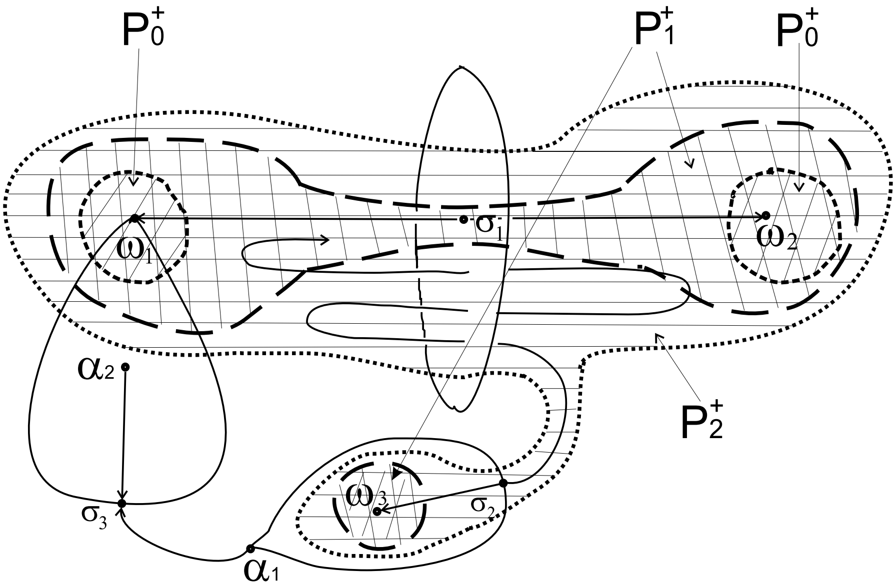


Рисунок **2.2**

3. Свойства f-адаптированной фильтрации

Предложение 3.1. *Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ — последовательность компактных связных подмножеств нормального пространства X. Тогда $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ — непустое связное компактное подмножество X.*

Доказательство. Компактность множества A следует из того, что пересечение замкнутых ограниченных множеств замкнуто и ограничено. Покажем, что A непусто. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} \subset A_1$ такую, что $x_i \in A_i$. Так как A_1 компактно, то не уменьшая общности можно считать, что существует точка $x \in A_1$ являющаяся пределом последовательности $\{x_k\}$ (в противном случае можно рассмотреть сходящуюся подпоследовательность). Нетрудно видеть, что $x \in A_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$, так как все члены последовательности $\{x_k\}$, начиная с i-ого принадлежат A_i. Откуда $x \in A$.

Покажем, что A связно. Предположим противное, $A = B \cup C$, где B и C — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существуют открытые непресекающиеся окрестности U_B и U_C множеств B и C. В силу вложенности существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $A_{k_0} \subset (U_B \cup U_C)$. Так как A_{k_0} связно, то A_{k_0} принадлежит либо U_B либо U_C. Положим для определенности $A_{k_0} \subset U_B$, тогда $A_{k_0} \cap U_C = \emptyset$. Получили противоречие с тем, что $C \subset A_{k_0}$.
Доказательство закончено.

Лемма 3.1.

1) Для любой f-адаптированной фильтрации $P_0^+,\dots,P_{k^+}^+$, множество $P_{k^+}^+$ является связным.

2) Множество $\mathcal{A}_f^+$ является связным аттрактором[7] *размерности ≤ 1.*

Доказательство. По построению $P_{k^+}^+$ является захватывающей окрестностью для $\mathcal{A}_f^+$ и, следовательно, $\mathcal{A}_f^+$ является аттрактором. Поскольку $\mathcal{A}_f^+$ состоит из конечного числа гладких подмногообразий размерностей ≤ 1 (см. [7], предложение 2.3), то топологическая размерность аттрактора $\mathcal{A}_f^+$ также ≤ 1. Для доказательства связности аттрактора $\mathcal{A}_f^+$ достаточно показать, что множество $P_{k^+}^+$ связно. Тогда аттрактор $\mathcal{A}_f^+$ будет связным как пересечение компактных связных вложенных множеств (см. предложение 3.1.).

Предположим противное, то есть предположим, что множество $P_{k^+}^+$ не связно. Тогда мы можем представить $P_{k^+}^+$ как объединение попарно непересекающихся замкнутых подмножеств X_1 и X_2. Не уменьшая общности будем считать, что $f(X_j)\subset int\ X_j,\ j=1,2$ (в противном случае можно провести рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f). Положим $\tilde X_j=\bigcup\limits_{n\leq 0} f^n(int\ X_j)$. По построению $\tilde X_1$ и $\tilde X_2$ не пустые открытые попарно непересекающиеся множества такие, что $\tilde X_1\cup\tilde X_2=W^s_{Per_f^+}=M^n\setminus\mathcal{A}_f^-$. Таким образом, множество $M^n\setminus\mathcal{A}_f^-$ не связно. Получили противоречие с тем, что множество $\mathcal{A}_f^-$, имеющее топологическую размерность $\leq (n-2)$, делит многообразие M^n (см. теорему о разбивающих множествах, [4], глава 4, следствие 1 теоремы IV).
Доказательство закончено.

Заметим, что множество $\mathcal{A}_f^-$ является репеллером диффеоморфизма f, поскольку имеет захватывающую окрестность $M^n\setminus P_{k^+}^+$. Кроме того, применяя рассуждения выше для $\mathcal{A}_f^-$, можно доказать, что для $n\geq 3$ репеллер $\mathcal{A}_f^-$ является связным.

4. Связь f-адаптированной фильтрации с вложением сепаратрис

Пусть $f: M^3\to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, ω — сток f и L_ω — объединение всех неустойчивых одномерных сепаратрис, содержащих ω в своих замыканиях.

Определение 4.1. *Пучок сепаратрис L_ω называется ручным, если существует гомеоморфизм $\psi: W^s_\omega\to\mathbb{R}$ такой, что $\psi(\omega)=O$ и $\psi(\ell\cup\omega)$ — луч с началом в точке O для каждой сепаратрисы $\ell\subset L_\omega$. Мы назовем множество L_f^+ градиентно-подобного диффеоморфизма f ручным в M^3, если таковыми являются L_ω для каждого стока ω.*

Определение 4.2. *Пучок сепаратрис L_ω называется почти ручным, если существует гладкий 3-шар $B_\omega\subset W^s_\omega$ такой, что $\omega\in int\ B_\omega$ и $\ell\cap\partial B_\omega$ состоит в точности из одной точки для каждой сепаратрисы $\ell\subset L_\omega$. Мы назовем множество L_f^+ градиентно-подобного диффеоморфизма f почти ручным в M^3, если таковыми являются L_ω для каждого стока ω.*

Если пучок L_ω состоит в точности из одной сепаратрисы ℓ, то понятия ручности и почти ручности совпадают (см. [2], теорема 6). В случае большего числа сепаратрис

[7] Компактное подмножество A компактного метрического пространства X называется *аттрактором* дискретной динамической системы f на X, если оно имеет компактную окрестность $N\neq X$ такую, что $f(N)\subset int\ N$ и $A=\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} f^k(N)$. Окрестность N называется *захватывающей. Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

из ручности следует почти ручность, однако, обратное следствие неверно. На рисунке 4.1 изображен фазовый портрет градиентно-подобного диффеоморфизма на $\mathbb{S}^3$ с почти ручным, но не ручным пучком сепаратрис (доказательство этого факта можно найти в работе [1]).

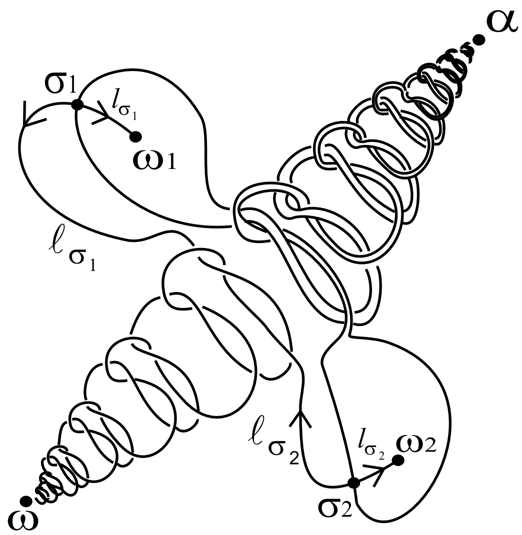


Рисунок **4.1**

Теорема 1.2. *Градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ обладает минимальной фильтрацией тогда и только тогда, когда множество L_f^+ состоит из одной точки или почти ручно вложено в M^3.*

Доказательство. Пусть $f : M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Так как f не содержит гетероклинических точек, то возможны два случая: 1) $k^+ = 0$ и 2) $k^+ = 1$. В случае 1), L_f^+ состоит из одной точки. В случае 2), L_f^+ является одномерным клеточным комплексом, состоящим из $|\Delta_f^+|$ нульмерных клеток (стоков) и из $|\Sigma_f^+|$ одномерных клеток (неустойчивых многообразий седловых точек из Σ_f^+). В случае 1) критерий очевиден. Докажем его в случае 2).

Необходимость. Из определения минимальной фильтрации следует, что $P_{k^+}^+$ — 3-шар с $g_{k^+}^+$ 1-ручками. Выберем трубчатую окрестность $V(D_{k^+}^+)$ 2-дисков $D_{k^+}^+ = P_{k^+}^+ \cap W_{\Sigma_f^+}^s$ такую, что $\ell \cap \partial V(D_{k^+}^+)$ состоит в точности из одной точки для каждой сепаратрисы $\ell \subset L_f^+$ и $f(B^+) \subset intB^+$ для $B^+ = P^+ \setminus int\ V(D_{k^+}^+)$. Тогда B^+ является объединением $|\Delta_f^+|$ попарно непересекающихся 3-шаров с 1-ручками рода $g(B^+) = 0$ и $P_{k^+}^+$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса с $|\Delta_f^+|$ нульмерными и $|\Sigma_f^+| + g(B^+)$ одномерными клетками. Тогда по формуле эйлеровой характеристики для клеточного комплекса получаем, что $1 - g_{k^+}^+ = |\Delta_f^+| - |\Sigma_f^+| - g(B^+)$. Откуда $g(B^+) = 0$. Таким образом, B^+ является объединением 3-шаров, удовлетворяющих условиям определения 4.2. и, следовательно, множество L_f^+ почти ручно вложено.

Достаточность. Следует из построения f-адаптированной фильтрации (см. теорему 1.1.) с учетом почти ручности множества L_f^+.

Доказательство закончено.

На рисунке 4.2 представлена f-адаптированная фильтрация для примера, построенного Пикстоном в [6]. В силу дикости сепаратрисы ℓ_2, изображенный диффеоморфизм f не обладает минимальной фильтрацией. Так P_1^+ является заполненным тором, а не 3-шаром.

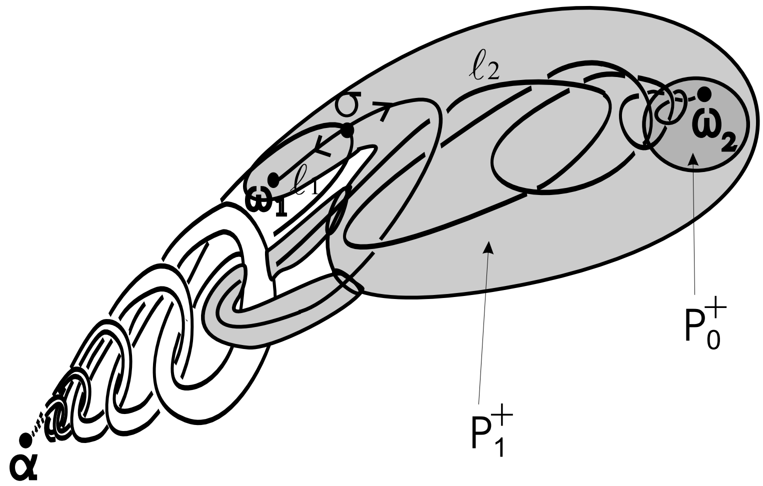


Рисунок **4.2**

Благодарности. Первый и третий авторы поддержаны грантом РФФИ номер 08-01-00547.

Список литературы

1. H. Debrunner, R. Fox. A mildly wild imbedding of an n-frame. Duke Math. Journal. 1960. V. 27, 425-429.

2. Harrold O.G., Griffith H.C., Posey E.E. A characterization of tame curves in three-space. Trans. AMS. 1955. V. 79, 12-34.

3. Хирш М. Дифференциальная топология. Москва. 1979. 281 с.

4. Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton University Press. Princewton, NJ. 1984.

5. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969. V. 8, № 4, 385-404.

6. Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, № 2, 167-172.

7. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 1, 113-185.

f-adapted filtration for Morse-Smale diffeomorphisms

© **V. Z. Grines**[8], **L. A. Kuprina**[9], **O. V. Pochinka**[10], **A. E. Shishenkova**[11]

Abstract. We introduce the concept and prove existing of f-adapted filtration for Morse-Smale diffeomorphisms on manifold of diomension $n \geq 2$. It is shown that for gradient-like diffeomorphisms given on 3-manifolds, existing of minimal filtration is equivalent to almost tame embedding of separatrices of saddle periodic points.

Key Words: filtration, Morse-Smale diffeomorphism, tame embedding of separatrices.

References

1. H. Debrunner, R. Fox. A mildly wild imbedding of an n-frame. Duke Math. Journal. 1960. V. 27, 425-429.
2. Harrold O.G., Griffith H.C., Posey E.E. A characterization of tame curves in three-space. Trans. AMS. 1955. V. 79, 12-34.
3. Hirsch, Differential topology. Graduated texts in mathematics. V 33, Springer-Verlag 1976.
4. Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton University Press. Princewton, NJ. 1984.
5. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969. V. 8, № 4, 385-404.
6. Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology. 1977. V. 16, № 2, 167-172.
7. Smale S. Differential dynamic system. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 1967, 747-817.

[8]Professor, head of chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.

[9]Associate professor of NGSHA, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[10]Associate professor of NNGU, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.

[11]Associate professor of NGSHA, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.