УДК 517.9

Задача об устойчивости

© С. А. Дутов[1], А. В. Зубов[2], Н. В. Зубов[3]

Аннотация. В настоящей работе выводятся условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями и даются точные оценки расстояния интегральной кривой до положения равновесия, а также излагается ряд применений полученных результатов.

Ключевые слова: функция, множество, интегральная кривая, порядок, неравенство, устойчивость, пространство.

Определение 1.2. *Вещественную однозначную непрерывную функцию* $X(x_1,\ldots,x_n)$*, заданную в* E_n*, будем называть однородной порядка* μ *и обозначать* $X^{(\mu)}$*,* $\mu = p/q$*, где* p *и* q *- натуральные числа,* q *нечетное, если для любой вещественной постоянной* c *имеет место равенство* $X(cx_1,\ldots,cx_n) = c^{\mu}X(x_1,\ldots,x_n)$*; при этом величину* c^{μ} *будет считать положительной при* p *четном, а при* p *нечетном - вещественной, имеющей знак* c*.*

Определение 1.3. *Вещественную однозначную непрерывную функцию* $V(x_1,\ldots,x_n)$*, заданную в* E_n*, будем называть положительно-однородной порядка* $m>0$ *и обозначать* $V^{[m]}$*, если для любой вещественной величины* c *имеет место равенство* $V(cx_1,\ldots,cx_n) = |c|^m V(x_1,\ldots,x_n)$*; при этом величину* $|c|^m$ *считаем положительной.*

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_1,\ldots,x_n) \quad (s=1,\ldots,n). \tag{1.1}$$

Далее через

$$x = x(t, x^{(0)}) \tag{1.2}$$

будем обозначать интегральную кривую системы (1.1) такую, что $x(0,x^{(0)}) = x^{(0)}$, где x - вещественный n-мерный вектор $(x_1,\ldots,x_n)$. Ясно, что вместе с интегральной кривой (1.2) система (1.1) имеет семейство интегральных кривых, зависящее от одной произвольной вещественной постоянной c, представимое в форме

$$x = cx(c^{\mu-1}t, x^{(0)}) = x(t, cx^{(0)}).$$

Теорема 1.2. *1) При* p *четном нулевое решение системы* (1.1) *не может быть асимптотически устойчивым.*

2) Если p *нечетно и* $\mu \neq 1$*, то нулевое решение системы* (1.1) *может быть асимптотически устойчивым лишь при вещественных возмущениях.*

[1]Ассистент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

[2]Доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru.

[3]Профессор факультета ПМ-ПУ СПбГУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

3) Если $\mu = 1$, *то нулевое решение системы* (1.1) *может быть асимптотически устойчивым при любых комплексных возмущениях.*

При помощи результатов, содержащихся в работе [1], *можно показать, что интегральные кривые системы* (1.1) *удовлетворяют неравенству*

$$|x(t, x^{(0)}| < At^{-\alpha} \tag{1.3}$$

при $|x^{(0)}| = 1$, *где* A *и* α *- положительные постоянные, если только нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво и* $X_s^{\mu} \in C^{(\nu)}$, *т. е. функции* $X_s^{(\mu)}$ *непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам в* E_n *до порядка* $\nu \geq 1$ *включительно.*

Таким образом, в дальнейшем неравенство (1.3) при $X_s^{(\mu)} \in C^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$ следует считать эквивалентным асимптотической устойчивости.

Теорема 1.3. *Если интегральные кривые системы* (1.1) *удовлетворяют неравенству* (1.3), *то существуют постоянная* $m > \mu - 1$ *и две функции* $W^{[m]}$ *и* $V^{[m+1-\mu]}$, *обладающие следующими свойствами:*

1) функции $V^{[m-\mu+1]}$ *и* $-W^{[\mu]}$ *определенно-отрицательные;*

2) функция $V^{[m-\mu+1]}(x(t, x^{(0)}))$ *непрерывно дифференцируема по* t *и имеет место равенство*

$$\frac{dV^{[m-\mu+1]}}{dt} = W^{[m]}.$$

Если, кроме того, $X_s^{(\mu)} \in C^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$, *то функцию* $W^{[m]}$ *можно выбрать так, что функция* $V^{[m-\mu+1]} \in C^{(\nu)}$ *является единственным решением системы*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i^{\mu} = W^{[m]}; \ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = (m - \mu + 1)V, \tag{1.4}$$

определенным условием $V(0, \ldots, 0) = 0$.

Список литературы

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб.: Изд-во Лань, 2009, 400 с.

2. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2008. 336 с.

3. Зубов Н. В., Зубова А. Ф. Безопасность функционирования технических систем. Уч. пос. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009, 343 с.

4. Стрекопытова М. В. Исследование равновесных движений.СПб.: СПбГУ, 2007. 95 с.

5. Зубов А. В., Зубов Н. В. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.

Дата поступления 27.08.2009

The task about stability

© S. A. Dutov[4], A. V. Zubov[5], N. V. Zubov[6]

Abstract. In real work is lead out solutions of asymptotical stability zero decision of system ordinary differential equations with one family right parts and is give exact evaluations distance integer curve to situation equal weight, and so is expound row applications giving results.
Key Words: function, a number of, integer curve, order, inequality, stability, space.

References

1. Zubov V. I. The lecture on theory control. SPb.: Published "Lan", 2009, 400 p.

2. Zubov A. V., Zubov N. V., Laptinskiy V. N. Dynamics of control systems. SPb.: SPbGU, 2008. 336 p.

3. Zubov N. V., Zubova A. F. The safety of function mechanical systems. The school book. SPb.: Published SPbGU, 2009, 343 p.

4. Strecopitova M. V. The investigation of equal weight motions. SPb.: SPbGU, 2007. 95 p.

5. Zubov A. V., Zubov N. V. Dynamical safety of control systems. SPb.: Published NII Chemistry SPbGU, 2009. 172 p.

[4]Assistant of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGUб Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg

[5]Associate professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGUб Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg

[6]Professor of faculty Applied Mathematics - Process Control SPbGUб Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg