DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63: 539.3: 616.314

Численное моделирование напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава на основе адаптивной конечно-элементной триангуляции

Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Целью исследования является расчет распределения напряжений в височно-нижнечелюстном суставе (ВНЧС) и в его элементах при различных функциональных состояниях (окклюзиях). Для расчетов использован метод конечных элементов (МКЭ). Предложен оригинальный алгоритм адаптивной триангуляции сложной трехмерной области, позволяющий строить неструктурированные тетраэдральные сетки с управляемой плотностью в зонах предполагаемой концентрации напряжений. Эффективность вычислительной процедуры достигнута за счет реализации специального алгоритма перенумерации узлов, минимизирующего ширину ленты глобальной матрицы жесткости, и использования компактной ленточной схемы хранения с применением разложения Холецкого. На созданной модели, учитывающей анатомические особенности и различные физико-механические свойства тканей, проведены расчеты для трех ключевых фаз жевательного цикла: центральной, передней и боковой окклюзии. Установлены количественные закономерности распределения полей главных напряжений. Полученные данные коррелируют с клиническими наблюдениями о высокой частоте патологий диска и дисфункций ВНЧС. Разработанный вычислительный комплекс может быть использован в прикладных целях для планирования ортопедических и хирургических вмешательств.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, триангуляция Делоне, адаптивная сетка, биомеханика, височно-нижнечелюстной сустав, жевательный цикл, окклюзия

Для цитирования: Морозкин Н. Д., Колонских Д. М. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния височно-нижнечелюстного сустава на основе адаптивной конечно-элементной триангуляции // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 2. С. 130–144. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144

Об авторах:
Морозкин Николай Данилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-5051-7094, morozkinnd@mail.ru
Колонских Денис Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-5450-7677, deniskolonskikh@gmail.com

© Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Original article

MSC2020 65N30, 74L15

Numerical simulation of the stress-strain state of the temporomandibular joint based on adaptive finite-element triangulation

N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. The aim of this study is to compute the stress distribution in the temporomandibular joint (TMJ) and its components under various functional occlusal states. Finite element method (FEM) is employed for the computations. An original adaptive triangulation algorithm for a complex three-dimensional domain is proposed, which enables the generation of unstructured tetrahedral meshes with controllable element density in regions of expected stress concentration. The computational efficiency is achieved through a specialized node renumbering algorithm that minimizes the bandwidth of the global stiffness matrix, combined with a compact storage scheme using Cholesky decomposition. Using a model that incorporates anatomical features and different physical and mechanical properties of tissues, simulations are performed for three key phases of the masticatory cycle: central, anterior, and lateral occlusion. Quantitative patterns of principal stress distribution are established. The results obtained correlate with clinical observations regarding high incidence of disc pathologies and TMJ dysfunctions. The computational framework developed in the paper can be applied for practical purposes, including planning of orthopedic and surgical interventions.

Keywords: stress-strain state, finite element method, Delaunay triangulation, adaptive mesh, biomechanics, temporomandibular joint, masticatory cycle, occlusion

For citation: *N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh.* Numerical simulation of the stress-strain state of the temporomandibular joint based on adaptive finite-element triangulation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 130–144. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.130-144

About the authors:

Nikolay D. Morozkin, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-5051-7094, morozkinnd@mail.ru

Denis M. Kolonskikh, Ph. D. (Phys. and Math.), Associate Professor at the Department of Mathematical and Computer Modeling, Ufa University of Science and Technology (32 Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-5450-7677, deniskolonskikh@gmail.com

1. Введение

Исследование биомеханических процессов, происходящих в зубочелюстной системе, представляет собой междисциплинарную задачу, находящуюся на стыке медицины,

биологии и механики сплошных сред. Центральным элементом этой системы является височно-нижнечелюстной сустав (ВНЧС) – один из наиболее сложных и нагружаемых суставов организма человека [1, 2]. Его дисфункции, связанные с нарушением координированной работы мышц, суставных элементов и зубных рядов, относятся к числу распространенных патологий, влияющих на качество жизни [3]. Традиционные методы диагностики, такие как клинический осмотр, рентгенография и магнитно-резонансная томография (МРТ), позволяют оценить морфологическое состояние структур, но не дают прямой информации о распределении внутренних механических напряжений [4]. Именно напряжения являются причиной развития дегенеративных изменений, болевых синдромов и функциональных ограничений [5].

Математическое моделирование открывает возможности для количественного анализа напряженно-деформированного состояния биологических тканей [6]. Первые попытки расчета напряжений в ВНЧС с помощью МКЭ были предприняты еще в конце XX века, но вычислительные мощности того времени накладывали существенные ограничения на точность моделей [7]. Современные исследования позволяют учитывать сложную геометрию костных структур, однако создание адекватной трехмерной модели ВНЧС требует преодоления нескольких принципиальных трудностей [8, 9].

Одной из основных проблем является необходимость учета сложной, невыпуклой и многосвязной геометрии костных структур и суставного диска; задание анизотропных и нелинейных свойств биологических тканей; корректное моделирование контактного взаимодействия между суставной головкой, диском и суставной впадиной [10]; определение реальных направлений и величин мышечных усилий для различных функциональных состояний; решение возникающих в результате дискретизации систем уравнений высокой размерности [11].

В работе предлагается подход к автоматизированному построению качественных конечно-элементных сеток для областей сложной геометрии и приведен эффективный способ численного решения трехмерной задачи линейной упругости. Контактное взаимодействие моделируется заданием условий жесткого закрепления в соответствующих фазах движения нижней челюсти, а также верхней поверхности суставного диска. Выполнены вычислительные эксперименты и проведен сравнительный анализ распределения напряжений в элементах ВНЧС при основных типах окклюзии, составляющих жевательный цикл. Отметим, что результаты расчетов настоящей работы коррелируют с результатами работы [12], где рассматривался частный случай расчета напряжений в ВНЧС в случае латеральной окклюзии.

2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается трехмерная область Ω с границей Γ, представляющая собой тело нижней челюсти с зубными рядами, суставными и венечными отростками, а также суставными дисками. Предполагается, что область состоит из нескольких подобластей с различными упругими свойствами: кортикальная кость, дентин зубов и фиброзный хрящ суставного диска. Материал каждой подобласти считается линейно-упругим, изотропным и однородным.

Напряженно-деформированное состояние описывается системой дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор напряжений второго ранга.

Уравнения (2.1) дополняются граничными условиями:

a) в области приложения мышечных сил к границе области Γ_F:

$$\begin{cases} F_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ F_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z, \\ F_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z. \end{cases} \tag{2.2}$$

b) на границе области жесткого закрепления Γ_S:

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \tag{2.3}$$

где u_x, u_y, u_z – перемещения по направлениям x, y, z; Γ_F – граница области приложения сил; $F = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила, действующая на границу области Γ_F; $n_x = \cos(x, n)$, $n_y = \cos(y, n)$, $n_z = \cos(z, n)$ – направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ_F [14]. Направления сил и области их приложения в ВНЧС приведены на рис. 2.1.

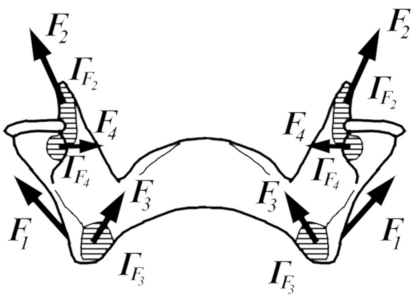


Рис. 2.1. Направления векторов мышечных усилий и области их приложения (вид сзади)

Fig. 2.1. The directions of the vectors of muscle effort and the areas of their application (back view)

Условные обозначения мышечных сил: F_1 – жевательная мышца (m. masseter), F_2 – височная мышца (m. temporalis), F_3 – медиальная крыловидная мышца (m. pterygoideus medialis), F_4 – латеральная крыловидная мышца (m. pterygoideus lateralis). Поверхности приложения мышечных усилий на рис. 2.1 имеют соответствующие обозначения Γ_{F_1}–Γ_{F_4}.

Соотношения, описывающие связь между деформациями и перемещениями, записываются в виде

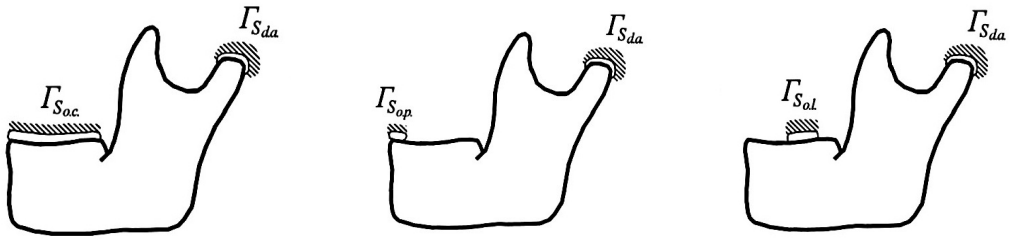
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{2.4}$$

а связь между деформациями и напряжениями для изотропного материала задается следующими уравнениями (обобщенный закон Гука) [14]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})), \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \end{cases} \tag{2.5}$$

где ε_x, ε_y, ε_z – компоненты вектора линейной деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Для имитации смыкания челюсти в зависимости от функционального положения зубных рядов в различных окклюзиях добавлен упругий пищевой комок, верхняя часть которого жестко закреплена. Граница Γ_S жесткого закрепления модели показана на рис. 2.2.



a) b) c)

Рис. 2.2. Схема жесткого закрепления модели нижней челюсти при:
a) центральной, b) передней, c) боковой окклюзиях
Fig. 2.2. Scheme of rigid fixation of the mandible model under:
a) central, b) anterior, c) lateral occlusion

При центральной окклюзии (рис. 2.2a) область закрепления располагается симметрично в зоне контакта фронтальных и боковых групп зубов. В передней окклюзии (рис. 2.2b) закрепление также задается симметрично, но со смещением в область режущих краев фронтальных зубов при одновременном разобщении боковых зубных рядов. При боковой окклюзии (рис. 2.2c) задача становится асимметричной: на рабочей стороне пищевой комок располагается в области контакта премоляров и моляров, тогда как на балансирующей стороне контакт отсутствует. Во всех трех вариантах задачи верхняя поверхность суставного диска ВНЧС упирается в височную кость и также неподвижна (на рис. 2.2 граница $\Gamma_{S_{da}}$). Как видно из рис. 2.2, граница области жесткого закрепления Γ_S различна при разных видах окклюзии.

3. Численное решение задачи

3.1. Алгоритм построения адаптивной конечно-элементной сетки

Основной проблемой при моделировании сложных биологических объектов является генерация объемной сетки. Алгоритм построения адаптивной конечно-элементной структуры реализует многоэтапную процедуру [15]. Процесс начинается с задания геометрии объекта, которая аппроксимируется набором треугольных граней и преобразуется в трехмерный растровый (воксельный) шаблон. На основе этого шаблона определяется характеристическая функция $W(x, y, z)$. Каждому вокселю сопоставляется значение весовой функции $W \in [0, 255]$: $W = 0$ соответствует внешней среде, $W = 255$ – внутренним точкам вдали от границ. Значение W возрастает при приближении к границе области, а также в зонах интереса, заданных пользователем (например, в ВНЧС и суставном диске). Такое распределение значений характеристической функции обеспечивает последующее сгущение сетки в областях предполагаемого высокого градиента решения.

Следующим этапом является генерация характеристического множества опорных точек. Начальное множество точек формируется стохастически. Используется метод Неймана-Монте-Карло: точки распределяются случайно в ограничивающем пространстве с вероятностью пропорциональной значению функции $W(x, y, z)$. Далее точки взаимодействуют по закону отталкивания, причем сила взаимодействия обратно пропорциональна W. Это приводит к равномерному распределению точек внутри однородных областей и сгущению вблизи границ и особых зон. Точки, покинувшие область ($W = 0$), возвращаются на границу по нормали и помечаются как граничные.

На полученном таким образом множестве точек строится объемная триангуляция, удовлетворяющая строгому критерию Делоне [16] (условию пустоты описанной сферы). Построение имеет инкрементальный характер, начиная с первого тетраэдра и последовательно присоединяя новые элементы к «активным» граням. После построения производится очистка сетки от элементов, геометрические центры которых лежат вне исходной области (такие элементы могут возникать на вогнутых участках). Завершающим шагом является контроль качества сетки с помощью метрики $q = k \cdot r_{in}/l_{max}$, где r_{in} – радиус вписанной сферы, l_{max} – длина наибольшего ребра, k – нормирующий коэффициент ($k = 6\sqrt{2}$ для правильного тетраэдра, чтобы $q_{max} = 1$).

Для построенной модели нижней челюсти среднее значение q составило 0.61, а 68 % элементов имеют $q > 0.5$, что свидетельствует о приемлемом качестве сетки для обеспечения сходимости МКЭ.

3.2. Реализация метода конечных элементов и решение СЛАУ

Реализация метода конечных элементов для поставленной трехмерной задачи линейной упругости связана с решением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокой размерности [17]. Глобальная матрица жесткости K размерностью $3N \times 3N$ (где N – число узлов), получаемая после дискретизации области, является симметричной, положительно определенной и обладает свойством ярко выраженной разреженности. Непосредственная работа с такой матрицей в стандартном формате хранения неэффективна из-за чрезмерных требований к оперативной памяти.

Для преодоления этой проблемы применена стратегия оптимизации, направленная на минимизацию вычислительных затрат. На первом этапе выполняется перенумерация узлов конечно-элементной сетки с целью уменьшения ширины профиля матрицы K.

Для этого использован алгоритм, основанный на построении структур уровней графа модели (разновидность алгоритма Катхилла–Макки), который группирует близлежащие в топологическом смысле узлы, обеспечивая концентрацию ненулевых элементов вблизи главной диагонали.

Благодаря такой перенумерации матрица K приобретает четко выраженный ленточный вид, что позволяет перейти к компактной схеме хранения. Используется диагональный (ленточный) формат, при котором хранятся только ненулевые элементы нижнего треугольника в пределах заданной полуширины ленты. Это сокращает объем используемой памяти в десятки раз. Для решения полученной СЛАУ $KU = F$ выбран метод Холецкого, адаптированный для работы с ленточными матрицами. Метод заключается в разложении $K = L \cdot L^T$, где L – нижняя треугольная матрица, с последующим прямым и обратным ходом. Указанный набор методов (генерация объемной конечно-элементной модели, оптимизация нумерации, ленточное хранение матриц и разложение Холецкого) реализован в виде комплекса программ для персональных вычислительных систем, что позволило проводить расчеты в автоматизированном режиме.

4. Результаты моделирования

Исходные данные для расчёта напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти и ВНЧС в различных окклюзиях приведены в таблицах 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1. Физико-механические характеристики материалов
Table 4.1. Physico-mechanical characteristics of materials

Область модели	**Модуль Юнга, E (МПа)**	**Коэффициент Пуассона, ν**	**Примечание**
Кортикальная кость	$1.37 \cdot 10^4$	0.28	Тело челюсти, отростки
Дентин зуба	$1.567 \cdot 10^4$	0.30	Зубные ряды
Суставной диск	$4.38 \cdot 10^3$	0.46	Фиброзный хрящ

На основе реальной анатомической геометрии построена конечно-элементная модель, состоящая из 18656 тетраэдральных элементов. Расчеты проведены для трех вариантов окклюзии.

4.1. Центральная окклюзия

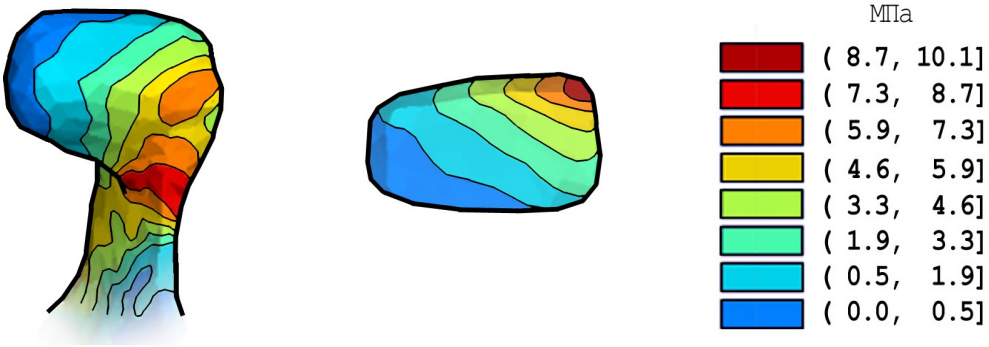
Поле главных напряжений симметрично, поэтому на рисунке представлены расчеты для ВНЧС левой стороны (рис. 4.1a).

Максимальные растягивающие напряжения ($\sigma_{max} = 10.06$ МПа) зафиксированы в области основания суставного отростка. Это совпадает с типичной локализацией переломов нижней челюсти при травме, когда происходит мощное рефлекторное смыкание челюстей. Второй участок концентрации ($\sigma_{max} = 8.7$ МПа) обнаружен в передненаружном отделе суставного диска (рис. 4.1b). Важно отметить, что напряжения в диске в 1.2–1.5 раза превышают напряжения в непосредственно прилегающих участках суставной головки. Это прямое количественное подтверждение амортизирующей

Таблица 4.2. Граничные условия для различных окклюзий
Table 4.2. Boundary conditions for various types of occlusion

Тип окклюзии	**Жесткое закрепление,** Γ_S	**Нагрузка,** Γ_F	**Величина усилий,** H
Центральная	Суставные диски, окклюзионные поверхности всех зубов	Все жевательные мышцы	$F_{mass} = 375$, $F_{temp} = 400$, $F_{pt.med} = 200$, $F_{pt.lat} = 30$
Передняя	Передний отдел суставных дисков, режущие края фронтальных зубов	Все жевательные мышцы	Снижены пропорционально $\sim 40\%$ от центральной
Боковая	Рабочая сторона (левая): внутренне-передняя часть диска. Балансирующая сторона (правая): внешне-задняя часть диска. Контакт пищевого комка* на рабочей стороне	Все жевательные мышцы. Сила на балансирующей стороне $\sim 70\%$ от рабочей	$F_{mass.w} = 258$, $F_{mass.b} = 181$ (индекс w – рабочая, b – балансирующая)

* Пищевой комок моделировался как упругое тело с $E = 1.0$ МПа, $\nu = 0.45$.



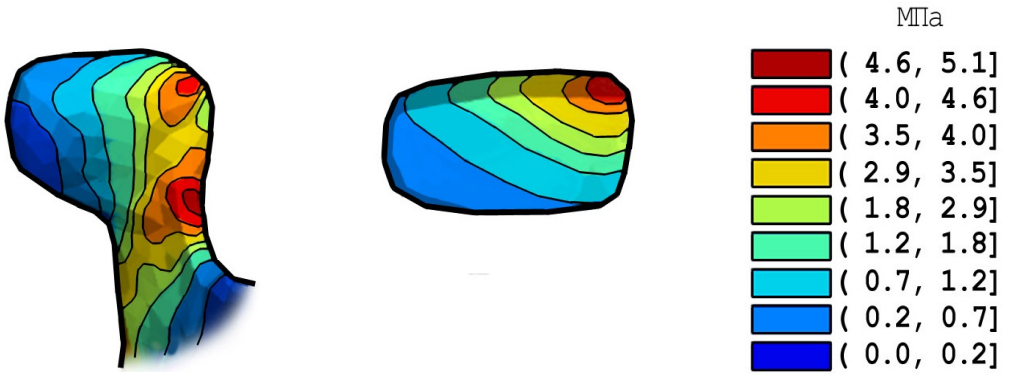
a) b)

Рис. 4.1. Распределение поля напряжений ВНЧС в центральной окклюзии:
a) ВНЧС, b) суставной диск
Fig. 4.1. Stress field distribution in the TMJ under central occlusion:
a) TMJ, b) articular disc

функции диска: более мягкая фиброзно-хрящевая ткань принимает на себя и перераспределяет нагрузку, защищая костные структуры и суставную впадину височной кости [18].

4.2. Передняя окклюзия

Качественная картина распределения напряжений в ВНЧС сохраняется – концентрация в передне-наружном отделе диска (рис. 4.2). Однако абсолютные значения снижаются (максимум в кости ~ 5.18 МПа, в диске ~ 4.07 МПа) из-за меньшего общего мышечного усилия, необходимого для откусывания пищи.



a) b)

Рис. 4.2. Распределение поля напряжений ВНЧС в передней окклюзии:
a) ВНЧС, b) суставной диск
Fig. 4.2. Stress field distribution in the TMJ under anterior occlusion:
a) TMJ, b) articular disc

Основная нагрузка переносится на фронтальные зубы и передние пучки височных мышц. Полученный результат подтверждает, что передняя окклюзия, несмотря на смещение суставных головок вперед, является менее нагруженной для собственно суставных элементов, но создает существенную нагрузку на пародонт передних зубов.

4.3. Боковая окклюзия

Данный сценарий наиболее интересен и клинически значим. Наблюдается выраженная асимметрия напряженно-деформированного состояния (рис. 4.3).

На рабочей стороне (левой) максимум напряжений в суставной головке составляет 5.33 МПа. Напряжения в диске достигают 6.45 МПа. На балансирующей стороне (правой) картина иная. Выявлены две четкие зоны концентрации: на передней поверхности шейки суставного отростка (7.81 МПа) и в центрально-медиальной части суставного диска (10.78 МПа – абсолютный максимум для всех расчетов).

Таким образом, на балансирующей стороне напряжения в костной ткани на 47% выше, а в суставном диске – на 70%, чем на рабочей стороне, несмотря на то, что жевательное усилие приложено к рабочей стороне. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат имеет четкое биомеханическое объяснение. При боковом смещении челюсти балансирующая суставная головка совершает движение вниз, вперед и внутрь, натягивая капсулу сустава и связки. Суставной диск на этой стороне подвергается значительным сдвиговым и растягивающим деформациям. Полученные количественные данные полностью согласуются с клинической статистикой [5], указывающей на большую частоту диагностирования щелчков, болезненности и деструктивных изменений именно

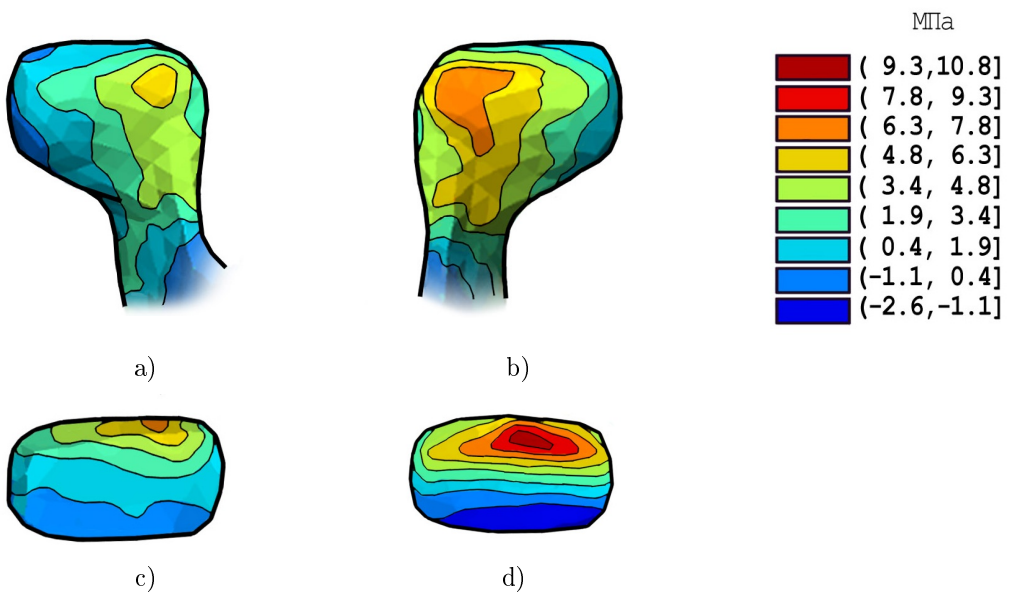


Рис. 4.3. Распределение поля напряжений ВНЧС в боковой окклюзии:
a) рабочая сторона, ВНЧС; c) рабочая сторона, суставной диск;
b) балансирующая сторона, ВНЧС; d) балансирующая сторона, суставной диск
Fig. 4.3. Stress field distribution in the TMJ under lateral occlusion:
a) working side, TMJ; b) working side, articular disc; c) balancing side, TMJ;
d) balancing side, articular disc

на балансирующей стороне у пациентов с односторонним жеванием или нарушенной окклюзией.

4.4. Сравнительный анализ

Сводные данные по максимальным главным напряжениям представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Максимальные растягивающие напряжения (σ_{max}) в элементах ВНЧС при различных окклюзиях
Table 4.3. Maximum tensile stresses (σ_{max}) in TMJ elements under various occlusions

Область / Окклюзия	**Тело челюсти (основание отростка) (МПа)**	**Суставной диск (передне-наружный отдел) (МПа)**
Центральная	10.06	8.70
Передняя	5.18	4.07
Боковая. Рабочая сторона	5.42	6.33
Боковая. Балансирующая сторона	7.81	10.78

Анализ показывает, что наиболее высокие нагрузки в костной ткани возникают при центральной окклюзии, а в мягком суставном диске – при боковой окклюзии на балансирующей стороне. Это указывает на разные патогенетические механизмы: перегрузка кости может вести к стресс-переломам и артрозам, а хроническая перегрузка диска – к его перфорации, дислокации и развитию болевой дисфункции [19].

5. Заключение

1. Разработан и программно реализован алгоритм адаптивной триангуляции сложных трехмерных областей, позволяющий строить неструктурированные тетраэдральные сетки с управляемой плотностью. Алгоритм основан на генерации характеристического множества точек и построении триангуляции Делоне.

2. Создан эффективный вычислительный комплекс для решения трехмерных задач линейной упругости МКЭ. Удалось существенно снизить требования к оперативной памяти и времени расчета за счет применения алгоритмов перенумерации узлов и компактного ленточного хранения матриц.

3. На основе построенной модели проведен комплексный анализ напряженно-деформированного состояния нижней челюсти и ВНЧС. Установлены и количественно оценены зоны концентрации напряжений для трех основных фаз жевательного цикла.

4. Получено важное для клинической практики подтверждение: максимальная асимметричная нагрузка на суставной диск возникает на балансирующей стороне при боковой окклюзии. Это объясняет высокую частоту соответствующих патологий и подчеркивает важность восстановления симметричной окклюзии и двустороннего жевания.

5. Показано, что суставной диск выполняет роль основного амортизатора, принимая на себя напряжения, возникающие в костной ткани.

Созданный инструментарий и полученные результаты могут быть использованы для обоснования методов лечения и планирования зубного протезирования.

Благодарности. Авторы выражают благодарность сотрудникам отделения челюстно-лицевой хирургии ГКБ № 21 г. Уфы за консультативную помощь и обсуждение клинических аспектов работы.

Список литературы

1. Дударь О. И., Бобина Д. И., Пешин С. Е. Сравнение способов теоретического определения усилий в жевательных мышцах и реакции в височно-нижнечелюстном суставе // *Master's Journal.* 2018. № 1. С. 172–185.

2. Шахалиева Л. Р., Сорокина Н. Д., Польма Л. В. Междисциплинарные аспекты в изучении дисфункции ВНЧС // *Ортодонтия.* 2024. № 1(105). С. 2–9.

3. Сиволапов К. А., Яцук А. В. Характеристика качества жизни пациентов при лечении мышечной дисфункции ВНЧС // *Вестник новых медицинских технологий. Электронное издание.* 2024. Т. 18, № 1. С. 17–22.

4. Кварацхелия А. Г., Семынин К. Е., Савченко Н. А. Значение знаний строения височно-нижнечелюстного сустава в зубочелюстной патологии // Одонтологические морфологические чтения : Сборник научных трудов, посвященный 120-летию со дня рождения профессора Н. И. Одонтологова и 100-летию ВГМУ им. Н. Н. Бурденко (Воронеж, 15 декабря 2017 г.). Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2018. С. 113–115.

5. Шаров А. М., Орешака О. В. Распространенность нозологических форм заболеваний ВНЧС и особенности их клинических проявлений у пациентов // *Medicus.* 2024. № 1(55). С. 16–19.

6. Трунин Д. А., Ревякин А. В., Постников М. А. Исследование напряженно-деформированного состояния математической модели челюстных костей методом конечных элементов // *Аспирантский вестник Поволжья.* 2019. № 1–2. С. 131 – 139.

7. Лазарев С. А. Клиническое значение изучения напряжений в височно-нижнечелюстном суставе при различных окклюзиях методом конечных элементов : специальность 14.01.14 "Стоматология": автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата медицинских наук / Лазарев Сергей Анатольевич. Казань, 1998. – 20 с.

8. Чадова М., Галло Л. М. Подходит ли OpenSim для анализа жевательной системы? // *Российский журнал биомеханики.* 2013. Т. 17, № 3. С. 64–81.

9. Wang Y., Daraqel B., Wang Ya Biomechanical effects of different mandibular movements and torque compensations during mandibular advancement with clear aligners: a finite element analysis. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology.* 2024. Vol. 12.

10. Мишутин Е. А. Результаты функциональных методов исследования состояния ВНЧС у пациентов с внутренними нарушениями ВНЧС и пациентов группы сравнения // Актуальные проблемы стоматологии детского возраста и ортодонтии : Сборник научных статей XV региональной научно-практической конференции с международным участием по детской стоматологии. (Хабаровск, 10 октября 2025 г.). Хабаровск: ЗАО "Издательство "Антар 2025. С. 127–133.

11. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в анализе напряженного состояния упругих тел // *Информационные технологии и математическое моделирование в экономике, технике, экологии, образовании, педагогике и торговле.* 2016. № 9. С. 51–68.

12. Морозкин Н. Д., Колонских Д. М. Математическое моделирование напряженного состояния ВНЧС в латеральной окклюзии // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVII Международной научной конференции. (Саранск, 29-31 июля 2025 г.). С. 180–184.

13. Елисеев В. В. Механика деформируемого твердого тела. Санкт-Петербург : Издательство СПбГПУ, 2003. 201 с.

14. Андреев В. К. Математические модели механики сплошных сред. Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2015. 240 с.

15. Морозкин Н. Д., Чудинов В.В., Попков В. С., Колонских Д. М. Адаптивная триангуляция трехмерных областей со сложной геометрией // Вестник Башкирского университета. 2005. Т. 10, № 4. С. 3–7.

16. Тырин Д. А. Триангуляция делоне // Наука молодых : Сборник материалов Межрегиональной молодежной научной конференции, посвященной памяти Н. А. Фролова. (Сыктывкар, 23–24 мая 2024 г.) Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2024. С. 24–28.

17. Труфанова Е. В., Коженов В. Ю., Кулиничев А. С., Хохлов М. Н. Применение метода подконструкций для решения задач больших размерностей МКЭ // Актуальные проблемы науки и техники. 2023 : Материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. (Ростов-на-Дону, 15–17 марта 2023 г.) / Ответственный редактор Н. А. Шевченко. Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2023. С. 896–897.

18. Клюшников О. В., Подкорытов Ю. М., Никитин О. Н. Изменение в височно-нижнечелюстном суставе при функциональной патологии зубочелюстной системы // Актуальные проблемы и перспективы развития стоматологии в условиях Севера : Сборник статей Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, посвященной 55-летию профессиональной деятельности доцента кафедры терапевтической, хирургической, ортопедической стоматологии и стоматологии детского возраста ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова"Михайловой Розалии Ивановны. (Якутск, 21 ноября 2025 г.). Якутск: Издательский дом СВФУ, 2025. С. 140–144.

19. Шахалиева Л. Р., Сорокина Н. Д., Польма Л. В. Нейрофизиологические показатели и оценка болевого синдрома в диагностике начальных форм дисфункции ВНЧС // Физико-химическая биология МАТЕРИАЛЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ ИНТЕРНЕТ – КОНФЕРЕНЦИИ, (Ставрополь, 30 марта 2023 г.). Ставрополь: Ставропольский государственный медицинский университет, 2023. С. 88–91.

Поступила 22.04.2026; доработана после рецензирования 20.05.2026;
принята к публикации 25.05.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. O. I. Dudar, D. I. Bobina, S. E. Peshin, “Comparison of methods for theoretical determination of forces in masticatory muscles and reactions in the temporomandibular joint”, *Master’s Journal*, 2018, no. 1, 172–185 (In Russ.).

2. L. R. Shakhalieva, N. D. Sorokina, L. V. Polma, “Interdisciplinary aspects in the study of temporomandibular joint dysfunction”, *Orthodontics*, 2024, no. 1(105), 2–9 (In Russ.).

3. K. A. Sivolapov, A. V. Yatsuk, "Quality of life characteristics of patients during treatment of muscular temporomandibular joint dysfunction", *Bulletin of New Medical Technologies. Electronic Edition*, **18**:1 (2024), 17–22 (In Russ.).

4. A. G. Kvaratskheliya, K. E. Semynin, N. A. Savchenko, "The importance of knowledge of the temporomandibular joint structure in dentoalveolar pathology" (December 15, 2017), *Odnoralov Morphological Readings: Collection of Scientific Papers Dedicated to the 120th Anniversary of the Birth of Professor N. I. Odnoralov and the 100th Anniversary of Voronezh State Medical University named after N. N. Burdenko*, 2018, 113–115 (In Russ.).

5. A. M. Sharov, O. V. Oreshaka, "Prevalence of nosological forms of temporomandibular joint diseases and features of their clinical manifestations in patients", *Medicus*, 2024, no. 1(55), 16–19 (In Russ.).

6. D. A. Trunin, A. V. Revyakin, M. A. Postnikov, "Finite element study of the stress-strain state of a mathematical model of jaw bones", *Postgraduate Bulletin of the Volga Region*, 2019, no. 1–2, 131–139 (In Russ.).

7. S. A. Lazarev, "Clinical significance of studying stresses in the temporomandibular joint under various occlusions using the finite element method: specialty 14.01.14 "Dentistry": abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Medical Sciences", *Lazarev Sergey Anatolevich*, 1998 (In Russ.), 20 p.

8. M. Chadova, L. M. Gallo, "Is OpenSim suitable for analyzing the masticatory system?", *Russian Journal of Biomechanics*, **17**:3 (2013), 64–81 (In Russ.).

9. Y. Wang, B. Daraqel, Ya. Wang, "Biomechanical effects of different mandibular movements and torque compensations during mandibular advancement with clear aligners: a finite element analysis", *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, **12** (2024).

10. E. A. Mishutin, "Results of functional methods for studying the state of the temporomandibular joint in patients with internal temporomandibular joint disorders and in a comparison group", *Current Issues in Pediatric Dentistry and Orthodontics: Collection of Scientific Articles of the XV Regional Scientific-Practical Conference with International Participation on Pediatric Dentistry, (October 10, 2025)*, ZAO Publishing House «Antar», Khabarovsk, 2025, 127–133 (In Russ.).

11. A. D. Matveev, "Multigrid finite element method in the analysis of the stress state of elastic bodies", *Information Technologies and Mathematical Modeling in Economics, Engineering, Ecology, Education, Pedagogy and Trade*, 2016, no. 9, 51–68 (In Russ.).

12. N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh, "Mathematical modeling of the stress state of the temporomandibular joint in lateral occlusion" (July 29–31, 2025), *Differential Equations and Their Applications in Mathematical Modeling: Proceedings of the XVII International Scientific Conference*, 2025, 180–184 (In Russ.).

13. V. V. Eliseev, *Mechanics of a Deformable Solid Body*, Publishing House of SPbSPU, St. Petersburg, 2003 (In Russ.), 201 p.

14. V. K. Andreev, *Mathematical Models of Continuum Mechanics*, Publishing House «Lan», St. Petersburg, 2015 (In Russ.), 240 p.

15. N. D. Morozkin, V. V. Chudinov, V. S. Popkov, D. M. Kolonskikh, "Adaptive triangulation of three-dimensional domains with complex geometry", *Bulletin of Bashkir University*, **10**:4 (2005), 3–7 (In Russ.).

16. D. A. Tyrin, "Delaunay triangulation", *Young Science: Proceedings of the Interregional Youth Scientific Conference Dedicated to the Memory of N. A. Frolov* (May 23–24, 2024), Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 2024, 24–28 (In Russ.).

17. E. V. Trufanova, V. Yu. Kozhenov, A. S. Kulinichev, M. N. Khokhlov, "Application of the substructure method for solving large-scale finite element problems", *Current Problems of Science and Technology. 2023: Proceedings of the All-Russian (National) Scientific-Practical Conference / Executive Editor N. A. Shevchenko* (March 15–17, 2023), Don State Technical University, Rostov-on-Don, 2023, 896–897 (In Russ.).

18. O. V. Klyushnikov, Yu. M. Podkorytov, O. N. Nikitin, "Changes in the temporomandibular joint in functional pathology of the dentoalveolar system", *Current Problems and Prospects for the Development of Dentistry in the North: Collection of Articles of the All-Russian Scientific-Practical Conference with International Participation Dedicated to the 55th Anniversary of the Professional Activity of Associate Professor Mikhailova Rozaliya Ivanovna* (November 21, 2025), NEFU Publishing House, Yakutsk, 2025, 140–144 (In Russ.).

19. L. R. Shakhalieva, N. D. Sorokina, L. V. Polma, "Neurophysiological indicators and pain syndrome assessment in the diagnosis of initial forms of temporomandibular joint dysfunction", *Physicochemical Biology: Proceedings of the XI International Scientific Internet Conference* (March 30, 2023), Stavropol State Medical University, Stavropol, 2023, 88–91 (In Russ.).

Submitted 22.04.2026; Revised 20.05.2026; Accepted 25.05.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.