DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона–Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина

Р. В. Жалнин, А. Д. Мулюгин, В. В. Вдовин

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Проведено сравнительное исследование эффективности методов решения линейных систем в составе безматричного метода Ньютона–Крылова (JFNK) для численного моделирования двумерных уравнений газовой динамики на основе разрывного метода Галёркина. Рассматривались классический метод минимальных невязок (MINRES) и современный метод индуцированной размерности IDR(s) с различными значениями параметра s. Исследование выполнено на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Проанализировано качество получаемых численных решений, спектральные характеристики течения, а также вычислительная производительность алгоритмов. Показано, что все варианты метода IDR(s) обеспечивают сопоставимое с MINRES качество воспроизведения вихревых структур и энергетических спектров. При этом все методы семейства IDR(s) демонстрируют существенно меньшее время выполнения одного шага по времени по сравнению с MINRES, обеспечивая ускорение от 1.5 до 2.5 раз в зависимости от размерности вспомогательного подпространства. Наилучший баланс между скоростью сходимости и вычислительными затратами показал метод IDR(4), что позволяет рекомендовать его в качестве эффективного линейного решателя в составе JFNK для нестационарных задач вычислительной гидродинамики.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, неявная схема, безматричный метод Ньютона–Крылова, метод MINRES, метод IDR(s)

Для цитирования: Жалнин Р. В., Мулюгин А. Д., Вдовин В. В. Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона–Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 2. С. 99–114. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114

Об авторах:
Жалнин Руслан Викторович, декан факультета математики и ИТ, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhalninrvrv@yandex.ru
Мулюгин Александр Дмитриевич, лаборант-исследователь кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0009-0004-2721-1390, alexandermulyugin@yandex.ru
Вдовин Владислав Владимирович, лаборант-исследователь кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-2558-4324, vdovinvv05@mail.ru

© Р. В. Жалнин, А. Д. Мулюгин, В. В. Вдовин

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Original article

MSC2020 76-10

Comparative analysis of linear solvers for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method

R. V. Zhalnin, A. D. Mulyugin, V. V. Vdovin

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. A comparative study of the efficiency of linear solvers within the Jacobian-free Newton–Krylov (JFNK) framework for the numerical simulation of two-dimensional gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method is presented. The classical MINRES method and the modern induced dimension reduction method IDR(s) with various values of parameter s are considered. The study is performed on the example of the Kelvin—Helmholtz instability problem. The accuracy of the obtained numerical solutions, spectral characteristics of the flow, and computational performance of the algorithms are analyzed. All IDR(s) variants are shown to provide a quality of vortex structure resolution and energy spectra comparable to that of MINRES. Meanwhile, all methods from the IDR(s) family require significantly less wall-clock time per time step compared to MINRES, achieving a speedup factor from 1.5 to 2.5, depending on the dimension of the auxiliary subspace. The IDR(4) method demonstrates the best balance between convergence rate and computational cost, which allows us to recommend it as an efficient linear solver within the JFNK approach for unsteady computational fluid dynamics problems.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method, Implicit Scheme, Jacobian–free Newton–Krylov Method, MINRES method, IDR(s) method

For citation: *R. V. Zhalnin, A. D. Mulyugin, V. V. Vdovin.* Comparative analysis of linear solvers
for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 99–114. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.99-114

About the authors:

Zhalnin Ruslan Viktorovich, Dean of the Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhalninrvrv@yandex.ru

Mulyugin Alexander Dmitrievich, Laboratory research assistant, Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0004-2721-1390, alexandermulyugin@yandex.ru

Vdovin Vladislav Vladimirovich, Laboratory research assistant, Faculty of Mathematics and IT, Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0002-2558-4324, vdovinvv05@mail.ru

1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) является эффективным инструментом для численного решения уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов [1–5]. Метод обеспечивает высокий порядок точности на неструктурированных сетках, обладает естественным параллелизмом и демонстрирует устойчивость при решении задач с преобладанием конвективных членов.

При решении, например, уравнений газовой динамики для малых чисел Маха [6, 7] явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными вследствие жёстких ограничений на шаг по времени, определяемых условием Куранта. Применение неявных схем [4] позволяет использовать большие шаги по времени; однако на каждом временном слое возникает необходимость решения больших систем нелинейных уравнений, которые часто оказываются плохо обусловленными [8]. Классические итерационные методы могут демонстрировать существенное снижение скорости сходимости с ростом числа степеней свободы и увеличением порядка аппроксимации, что требует применения более эффективных решателей.

Для решения систем нелинейных уравнений хорошо зарекомендовал себя безматричный метод Ньютона–Крылова (Jacobian–free Newton–Krylov method, JFNK) [9, 10]. Основная идея этого метода заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби. Ключевым компонентом JFNK является выбор итерационного метода для решения внутренней линейной системы.

В данной работе проводится сравнительный анализ двух классов линейных решателей: классического метода минимальных невязок (MINRES) [11] и современного метода индуцированной размерности IDR(s) [12, 13]. Методы сравниваются в контексте их применения внутри JFNK для решения двумерных уравнений газовой динамики на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [14, 15].

2. Система уравнений газовой динамики

Рассматривается двумерная система уравнений газовой динамики, записанная в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}(U) = 0, \tag{2.1}$$

где

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho c \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(U) = \left(\begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \\ \rho uc \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho vc \end{Bmatrix} \right),$$

ρ – плотность, u, v – компоненты вектора скорости, p – давление, E – полная энергия, c – массовая концентрация.

Уравнение состояния

$$p = \rho\varepsilon(\gamma - 1) \tag{2.2}$$

замыкает систему.

Начальные и граничные условия ставятся в соответствии с решаемой задачей.

3. Численный метод

Для дискретизации системы уравнений (2.1) будем использовать метод Галёркина с разрывными базисными функциями [1–5]. Для этого покроем расчётную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ сеткой $\Omega_h = \{C_j \mid j = \overline{1, N_h}\}$, где C_j – ячейки сетки. Введём пространство

$$V_h^p = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{C_j} \in P_p(C_j),\ j = \overline{1, N_h} \right\},$$

где $P_p(C_j)$ – пространство полиномов степени не выше p на элементе C_j.

Зададим в V_h^p базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y), \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - x_{cj}}{\Delta x_j} \right)^{\alpha_k} \left(\dfrac{y - y_{cj}}{\Delta y_j} \right)^{\beta_k}, & \text{если } (x, y) \in C_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{3.2}$$

здесь $\alpha_k + \beta_k \leq p$, $k = \overline{1, N_\varphi}$, $N_\varphi = p(p+1)/2$, (x_{cj}, y_{cj}) – центр масс ячейки C_j.

Приближенное решение ищется в виде

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \tag{3.3}$$

После подстановки в слабую форму уравнений и интегрирования по частям получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{d}{dt} U_{jk}(t) \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV = \int\limits_{C_j} \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dV - \oint\limits_{\partial C_j} (\hat{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{n}) \varphi_{jm} dS, \tag{3.4}$$

где $m = \overline{1, N_\varphi}$, $j = \overline{1, N_h}$. Здесь $\hat{\boldsymbol{F}}$ – численный поток, который определяется как приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва (например, решатели Лакса–Фридрихса–Русанова, HLLC и т. д.).

Запишем (3.4) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A \frac{dU_h}{dt} = \mathcal{L}(U_h), \tag{3.5}$$

где

$$A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_{N_h}),$$

$$U_h = (U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1N_\varphi}, \ldots, U_{N_h 1}, U_{N_h 2}, \ldots, U_{N_h N_\varphi})^T,$$

A_j – матрица, составленная из элементов $a_{mk}^j = \int\limits_{C_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dV$.

Для интегрирования (3.5) по времени будем использовать неявную схему

$$\frac{U_h - \overline{U}_h}{\tau} = A^{-1} \mathcal{L}(U_h), \tag{3.6}$$

где U_h – искомые коэффициенты разложения решения по базису на текущий момент времени; $\overline{U}_h$ – коэффициенты разложения решения по базису, соответствующие предыдущему шагу по времени.

Перепишем систему (3.6) в виде

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h, \tag{3.7}$$

где

$$\mathcal{Q}_h(U_h) = \frac{1}{\tau}U_h - A^{-1}\mathcal{L}(U_h), \qquad F_h = \frac{1}{\tau}\overline{U}_h.$$

Для решения системы (3.7) используется безматричный метод JFNK [9, 10]. Основная идея этого метода заключается в выполнении ньютоновских итераций без явного формирования матрицы Якоби.

Алгоритм состоит из внешних итераций:

$$U_h^{(\alpha+1)} = U_h^{(\alpha)} + \theta\,\Delta_h, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \quad U_h^{(0)} = \overline{U}_h, \tag{3.8}$$

где θ — параметр регуляризации, который вводится для управления сходимостью метода Ньютона [5]

Приращение Δ_h находится как решение системы линейных алгебраических уравнений вида

$$J\,\Delta_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)}), \tag{3.9}$$

где

$$J = \left.\frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial U_h}\right|_{U_h^{(\alpha)}}. \tag{3.10}$$

Ключевой особенностью JFNK является применение какого-либо крыловского метода для решения (3.9) и безматричная аппроксимация действия якобиана (3.10) на вектор:

$$Jv \approx \frac{\mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)} + \varepsilon_J v) - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)})}{\varepsilon_J}, \tag{3.11}$$

где ε_J — малое возмущение, выбираемое из соображений баланса между погрешностью аппроксимации и ошибками округления. При слишком большом ε_J возрастает погрешность аппроксимации из-за нелинейных свойств оператора $\mathcal{Q}_h$, при слишком малом — начинают доминировать ошибки округления при вычитании близких чисел. На практике ε_J для каждой задачи может быть различным и выбирается исходя из ее постановки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (3.9) в данной работе применяются метод минимальных невязок (MINRES) и метод IDR(s).

Для системы вида $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Итерационная схема MINRES имеет вид:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \tau_k \boldsymbol{r}_k, \quad \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b}, \quad \tau_k = \frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_k)}{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots \quad .$$

Метод обладает гарантированной сходимостью для симметричных (или близких к симметричным) невырожденных систем, но может медленно работать на плохо обусловленных системах, характерных для DG-дискретизаций высокого порядка.

В основе метода IDR(s) лежит следующая

Теорема 3.1 (IDR [12]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ – произвольная матрица, $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \mathbb{C}^N$ – ненулевой вектор, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{K}^N(A, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ – полное крыловское пространство. Пусть $S \subset \mathbb{C}^N$ – произвольное собственное подпространство матрицы A, не имеющее с $\mathcal{G}_0$ нетривиального инвариантного подпространства. Определим последовательность подпространств:*

$$\mathcal{G}_j = (I - \omega_j A)(\mathcal{G}_{j-1} \cap S), \quad \text{где } \omega_j \neq 0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}_{j-1} \quad \forall j > 0, \\ &\mathcal{G}_j = \{0\} \quad \text{для } j \leq N. \end{aligned}$$

Листинг 3.1. Алгоритм IDR(s) [12]

Require: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$; $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^N$; $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{N\times s}$; $TOL \in (0,1)$; $MAXIT > 0$
Ensure: $\boldsymbol{x}_n$ such that $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\| \leq TOL$

▷ *Инициализация.*

$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$;
$\boldsymbol{P} = \mathrm{orth}\left([\boldsymbol{r}_0,\ \mathrm{rand}(N, s-1)]\right)$
for $n = 0$ to $s-1$ **do** ▷ *Выполнить s шагов, чтобы построить векторы в $\mathcal{G}_0$*
  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_n$; $\omega = (\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{r}_n)/(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v})$;
  $d\boldsymbol{x}_n = \omega\boldsymbol{r}_n$; $d\boldsymbol{r}_n = -\omega\boldsymbol{v}$;
  $\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{r}_n + d\boldsymbol{r}_n$; $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + d\boldsymbol{x}_n$;
end for
$d\boldsymbol{R}_{n+1} = (d\boldsymbol{r}_n \cdots d\boldsymbol{r}_0)$; $d\boldsymbol{X}_{n+1} = (d\boldsymbol{x}_n \cdots d\boldsymbol{x}_0)$;

▷ *Построение подпространств $\mathcal{G}_j$ для $j = 1, 2, 3, \ldots$*

$n = s$
while $\|\boldsymbol{r}_n\| > TOL$ **or** $n < MAXIT$ **do** ▷ *Цикл по подпространствам $\mathcal{G}_j$*
  for $k = 0$ to s **do** ▷ *Цикл внутри подпространства $\mathcal{G}_j$*
    Найти $\boldsymbol{c}$ из $\boldsymbol{P}^T d\boldsymbol{R}_n \boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{r}_n$
    $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_n - d\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{c}$;
    if $k = 0$ **then** ▷ *Первые векторы в $\mathcal{G}_{j+1}$*
      $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$;
      $\omega = (\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{v})/(\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t})$;
      $d\boldsymbol{r}_n = -d\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{c} - \omega\boldsymbol{t}$;
      $d\boldsymbol{x}_n = -d\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{c} + \omega\boldsymbol{v}$;
    else ▷ *Последующие векторы в $\mathcal{G}_{j+1}$*
      $d\boldsymbol{x}_n = -d\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{c} + \omega\boldsymbol{v}$;
      $d\boldsymbol{r}_n = -\boldsymbol{A}d\boldsymbol{x}_n$;
    end if
    $\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{r}_n + d\boldsymbol{r}_n$;
    $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + d\boldsymbol{x}_n$;
    $n = n + 1$;
    $d\boldsymbol{R}_n = (d\boldsymbol{r}_{n-1} \cdots d\boldsymbol{r}_{n-s})$;
    $d\boldsymbol{X}_n = (d\boldsymbol{x}_{n-1} \cdots d\boldsymbol{x}_{n-s})$;
  end for
end while

На практике [13] алгоритм IDR(s) заключается в построении последовательности приближений, невязки которых вытесняются из последовательности вложенных под-

пространств, называемых подпространствами IDR. Каждое такое подпространство имеет размерность на единицу меньше предыдущего. Параметр s определяет глубину редукции и финальную размерность «рабочего» подпространства. Подробный алгоритм приведен в листинге 3.1.

4. Задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

В качестве тестовой была выбрана задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Начальные условия задавались следующим образом [14, 15]:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + 0.5\left(\tanh\left(y_1\right) - \tanh\left(y_2\right)\right), \\ p &= 10, \\ u &= \left(\tanh\left(y_1\right) - \tanh\left(y_2\right) - 1\right), \\ v &= 0.01\sin(2\pi x)\left(\exp\left(-\tilde{y}_1^2\right) - \exp\left(-\tilde{y}_2^2\right)\right), \\ c &= 0.5\left(\tanh\left(y_1\right) - \tanh\left(y_2\right) + 2\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $y_1 = \dfrac{y - 0.5}{0.05}$, $y_2 = \dfrac{y - 1.5}{0.05}$, $\tilde{y}_1 = \dfrac{y - 0.5}{0.2}$, $\tilde{y}_2 = \dfrac{y - 1.5}{0.2}$.

Расчётная область: $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$. На границе расчетной области задавались периодические граничные условия.

Предварительно были выполнены расчеты для оценки влияния значений параметра ε_J на точность и скорость сходимости метода.

Таблица 4.1. Зависимость итерационных параметров от значения ε_J
Table 4.1. Dependence of the iteration parameters on the value of ε_J

Измеряемый параметр	ε_J		
	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Среднее число итераций Ньютона	2.00	2.03	2.05
Макс. число итераций Ньютона	3	2	3
Среднее число внутренних итераций	2.92	3.03	3.13
Средняя внутренняя невязка	$4.79 \cdot 10^{-5}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$	$5.11 \cdot 10^{-5}$
Среднее время шага, с	0.110505	0.099850	0.110435

Из таблицы 4.1 видно, что при $\varepsilon_J = 10^{-5}$ достигается наименьшее среднее время выполнения для линейного решателя. При этом средняя невязка остаётся того же порядка, что и для остальных значений ε_J, то есть уменьшение параметра до 10^{-6} не даёт заметного выигрыша по точности, но приводит к увеличению времени расчёта. Поэтому в качестве оптимального компромисса между скоростью вычислений и качеством решения в расчетах использовалось значение $\varepsilon_J = 10^{-5}$.

Расчеты были выполнены на гибридной системе CPU+GPU (CPU: Intel Xeon @ 2.00 GHz, 12 ГБ RAM; GPU: NVIDIA T4 Tensor Core, 16 ГБ VRAM) с параметрами, приведенными в таблице 4.2.

На рис. 4.1 представлены шлирен-картины течения в нижней половине расчетной области в момент времени $t = 3$. Видно формирование характерных вихревых структур, что согласуется с известными результатами [14, 15].

Таблица 4.2. Основные численные параметры расчёта
Table 4.2. Main numerical calculation parameters

Параметр	**Значение**	**Описание**
ε_J	1.0×10^{-5}	Точность для якобиана
ε_{lin}	1.0×10^{-4}	Точность линейного решателя
$\varepsilon_{\text{Newton}}$	1.0×10^{-4}	Точность метода Ньютона
$N_{\text{lin}}^{\max}$	100	Максимальное число итераций линейного решателя
$N_{\text{Newton}}^{\max}$	10	Максимальное число итераций метода Ньютона
N_x	256	Число узлов сетки по направлению x
N_y	512	Число узлов сетки по направлению y
τ	1.0×10^{-4}	Шаг по времени

Вычисление шлирен-сигнала осуществлялось на основе значений распределения поля плотности по следующей формуле:

$$S = \left(\frac{|\nabla \rho|}{\rho_*} \right)^{\kappa}, \quad \rho_* = \max_{\Omega} |\nabla \rho|, \tag{4.2}$$

где κ – параметр, введенный для настройки контрастности изображения (в данном случае использовалось значение $\kappa = 0.4$).

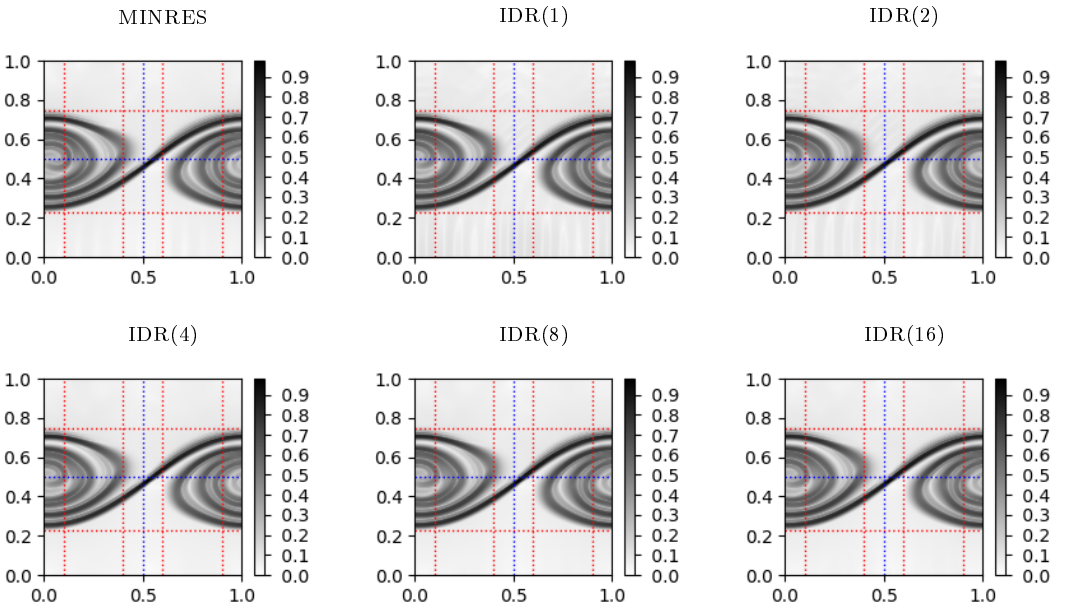

Рис. 4.1. Шлирен картина течения в области $[0,1] \times [0,1]$ на момент времени $t = 3$ с. Синие линии: $x = 0.5$ и $y = 0.5$. Красные линии: $x = 0.1$, $x = 0.4$, $x = 0.6$, $x = 0.9$, $y = 0.23$, $y = 0.75$
Fig. 4.1. Schlieren image of the flow in the domain $[0,1] \times [0,1]$ at time $t = 3$ s. Blue lines: $x = 0.5$ and $y = 0.5$. Red lines: $x = 0.1$, $x = 0.4$, $x = 0.6$, $x = 0.9$, $y = 0.23$, $y = 0.75$

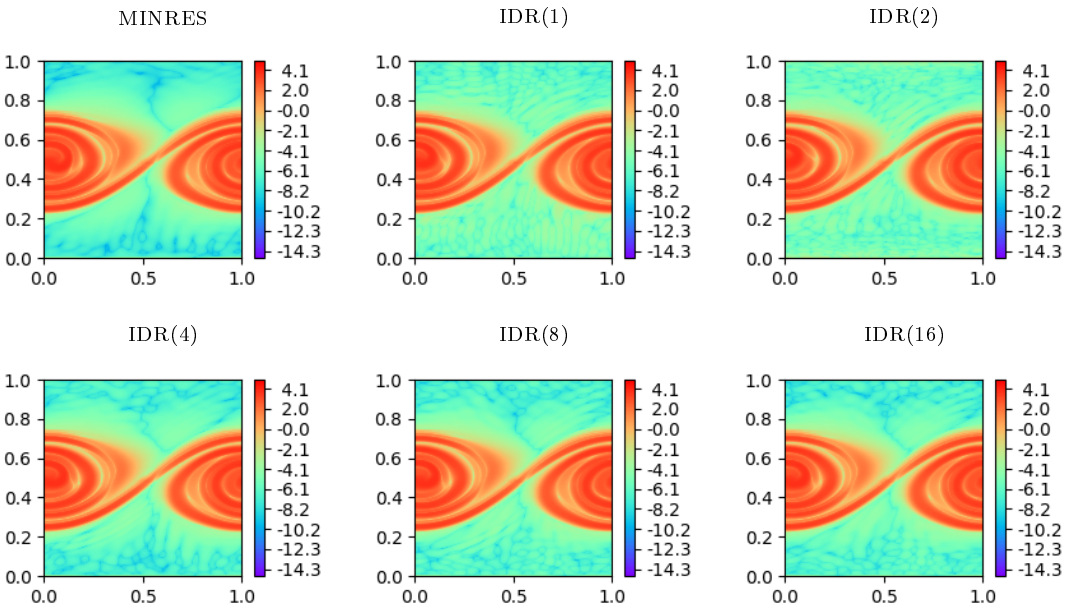

Рис. 4.2. Распределение значений ω^* в области $[0,1] \times [0,1]$ на момент времени $t = 3$ с

Fig. 4.2. Distribution of ω^* values in the domain $[0,1] \times [0,1]$ at time $t = 3$ s

Сопоставление всех полученных изображений показывает, что основные вихревые структуры воспроизводятся единообразно во всех расчётах: на каждом рисунке вихри локализованы в пределах одних и тех же границ, обозначенных красными линиями. Это свидетельствует о совпадении как положения, так и характерных размеров вихрей вне зависимости от выбранного метода. Положение центральной сдвиговой области также практически идентично во всех вариантах расчёта, что подтверждает корректность воспроизведения течения в целом. Вместе с тем, для методов MINRES, IDR(4), IDR(8) и IDR(16) шлирен-картины имеют более гладкий вид и лучше соответствуют ожидаемой физической картине решения, в то время как для методов IDR(1) и IDR(2) вблизи нижней границы расчётной области наблюдаются периодические возмущения. Таким образом, увеличение параметра s в методе IDR(s) позволяет уменьшить влияние численных артефактов.

На рис. 4.2 показано распределение значений величины ω^* для различных итерационных методов. Значения ω^* вычисляются следующим образом:

$$\omega^* = \log(|\omega| + 10^{-5}), \qquad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из рис. 4.2 видно, что при использовании методов IDR(1) и IDR(2) результаты отличаются от результатов, полученных другими методами, незначительно. При этом основная вихревая структура течения сохраняется: в левой и правой частях области наблюдаются характерные области повышенной завихренности, соответствующие развитию неустойчивости.

Анализ энергетического спектра E_k и спектра энстрофии Z_k, представленных на рис. 4.3, показывает, что графики практически совпадают во всём диапазоне волновых

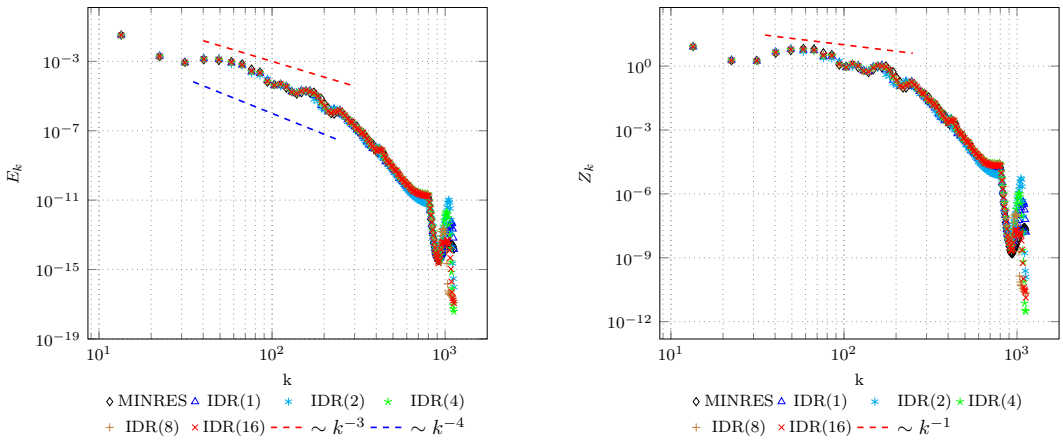

Рис. 4.3. Энергетические спектры E_k (слева) и спектры энстрофии Z_k (справа) на момент времени $t = 3$ с
Fig. 4.3. Energy spectra E_k (left) and enstrophy spectra Z_k (right) at time $t = 3$ s

чисел k, за исключением области высоких k, где заметен небольшой разброс значений. Но эти расхождения не выходят за рамки вычислительной погрешности и не играют принципиальной роли. Основная энергия сосредоточена в области малых и средних волновых чисел. Из рисунка также видно, что в инерционном интервале энергетический спектр располагается между кривыми $\sim k^{-4}$ и $\sim k^{-3}$. Такой наклон характерен для двумерной турбулентности с преобладанием энстрофийного каскада, где энергия передаётся от крупных вихрей к более мелким медленнее, чем в трёхмерном случае. При этом из графика для спектра энстрофии видно, что она практически не убывает с ростом k в инерционном интервале ($Z_k \sim k^{-1}$), что соответствует классической картине двумерной турбулентности.

Таким образом, сравнение MINRES и методов семейства IDR(s) не выявило между ними существенной разницы в распределении энергии по спектру. Это говорит о том, что переход к IDR(s) не вносит искажений в энергетический спектр и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

На рис. 4.4 приведено сравнение времени выполнения методов IDR(s) со временем работы метода MINRES. Из графика видно, что все варианты метода IDR(s) в среднем оказываются быстрее MINRES практически на всех временных шагах. Наименьшие значения нормированного времени демонстрируют методы IDR(1), IDR(2) и IDR(4): для большинства шагов их время выполнения составляет примерно 0.4–0.45 от времени MINRES, то есть ускорение составляет около 2–2.5 раз. Метод IDR(8) также устойчиво быстрее MINRES, однако его нормированное время немного выше и находится примерно на уровне 0.48–0.5. Метод IDR(16) имеет наибольшее время среди рассмотренных вариантов IDR(s): его значения в основном располагаются около 0.58–0.6, что всё равно соответствует заметному ускорению по сравнению с MINRES.

На отдельных временных шагах наблюдаются резкие локальные увеличения времени выполнения. Эти пики особенно хорошо видны на увеличенном фрагменте графика, где показаны первые шаги расчёта. В такие моменты время работы некоторых методов IDR(s) приближается к уровню MINRES или кратковременно превышает характерные для себя средние значения. Наиболее выраженные пики наблюдаются у методов с боль-

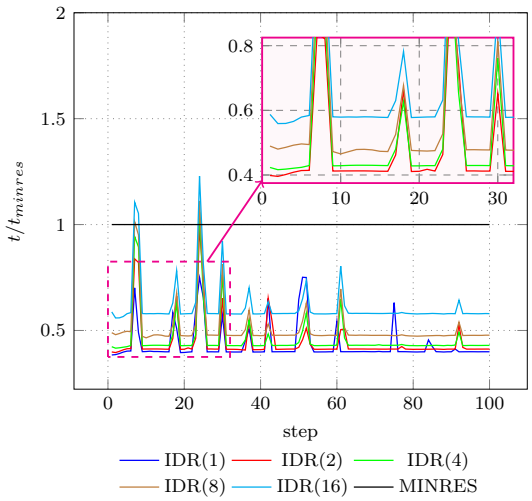

Рис. 4.4. Время вычислений (нормированное)
Fig. 4.4 Computing time (normalized)

шими значениями параметра s, в частности у IDR(16), а также у IDR(4) и IDR(8) на отдельных шагах. Это может быть связано с усложнением сходимости итерационного процесса на данных шагах или с увеличением числа внутренних операций, необходимых для построения подпространства в методе IDR(s). При этом важно отметить, что даже с учётом локальных всплесков все кривые IDR(s) в основном остаются ниже линии MINRES.

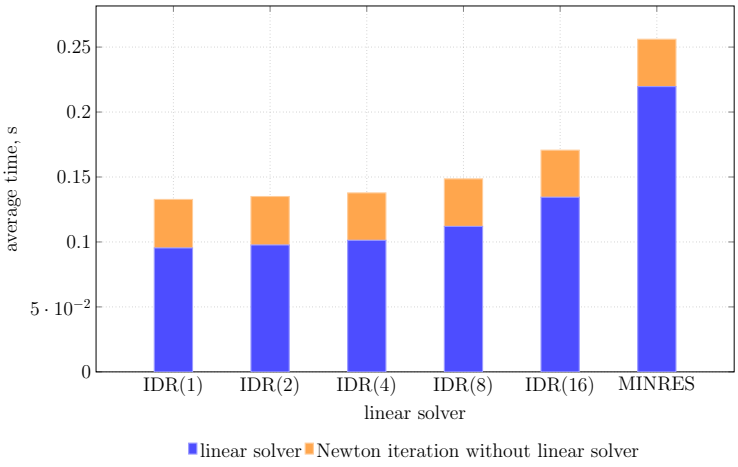

Рис. 4.5. Сравнение скорости внутренних линейных итераций IDR(s) и времени итераций Ньютона
Fig. 4.5. Comparison of the internal linear iteration speed of IDR(s) and Newton iteration time

На рис. 4.5 показано среднее время выполнения одного шага для различных линейных решателей с разделением на время работы самого линейного решателя и оставшуюся часть итерации Ньютона. Видно, что методы IDR(s) работают заметно быстрее MINRES: минимальное суммарное время наблюдается для IDR(1), IDR(2) и IDR(4), тогда как при увеличении параметра s время постепенно возрастает. Наибольшие затраты соответствуют методу MINRES, причём основная часть времени во всех случаях приходится именно на решение линейной системы. Вклад остальных операций итерации Ньютона меняется слабо, поэтому различие в общей скорости определяется главным образом эффективностью выбранного линейного решателя.

Таблица 4.3. Невязки при решении СЛАУ в момент времени 3 секунды
Table 4.3. Residuals in solving systems of linear equations at a time of 3 seconds

Итерация	IDR(1)	IDR(2)	IDR(4)	IDR(8)	IDR(16)	MINRES
1	2.167e-03	2.064e-03	2.067e-03	2.076e-03	2.076e-03	2.228e-03
2	1.113e-04	1.002e-04	9.049e-05	9.016e-05	9.016e-05	5.821e-05
3	8.399e-05	8.022e-04	-	-	-	-
4	-	3.978e-04	-	-	-	-
5	-	6.682e-05	-	-	-	-

В таблице 4.3 представлены невязки при решении СЛАУ в момент времени $t = 3$ с для методов MINRES и IDR(s). Видно, что начальное значение невязки для всех методов имеет один порядок и составляет примерно 10^{-3}. Уже после первой итерации все методы существенно уменьшают невязку до уровня порядка 10^{-4}, что говорит о достаточно быстрой начальной сходимости рассматриваемых итерационных алгоритмов.

Наиболее быстрое уменьшение невязки демонстрирует метод MINRES, который уже ко второй итерации достигает наименьшего значения среди показанных методов. Метод IDR(2) ведёт себя менее монотонно: после уменьшения невязки на второй итерации наблюдается её временный рост, после чего к пятой итерации она снова снижается до уровня порядка 10^{-4}. Таким образом, по данной таблице можно сделать вывод, что все методы обеспечивают уменьшение невязки, однако наиболее устойчивую и быструю сходимость на рассматриваемом временном шаге показывают MINRES, IDR(16), IDR(8) и IDR(4), тогда как IDR(2) требует большего числа итераций и имеет менее стабильный характер сходимости.

В результате вычислительных экспериментов получено, что IDR(4) требует в среднем 3 итерации линейного решателя для достижения требуемой точности; обеспечивает финальную невязку Ньютона гораздо меньшую, чем при использовании MINRES; общее время на один временной шаг сокращается с ~ 0.438 с (MINRES) до ~ 0.396 с (IDR(4)), что даёт ускорение в ~ 1.5 раза.

Таким образом, метод IDR(4) является предпочтительным выбором в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики. Его использование позволяет сократить общее время расчёта более чем в 1,5 раза и улучшить сходимость внешних итераций Ньютона

5. Заключение

В работе проведено сравнительное исследование эффективности классического метода минимальных невязок (MINRES) и семейства методов индуцированной размерно-

сти IDR(s) в составе безматричного метода Ньютона-Крылова. Рассмотрение выполнено в контексте численного решения двумерных уравнений газовой динамики с помощью неявной схемы для разрывного метода Галёркина на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина—Гельмгольца.

Анализ полученных численных решений, включающий сопоставление шлирен-картин течения и распределений завихренности, показал, что все рассмотренные методы воспроизводят идентичную крупномасштабную вихревую структуру. Сравнение энергетических спектров и спектров энстрофии не выявило между методами значимых различий. Это свидетельствует о том, что замена MINRES на IDR(s) не вносит искажений в физическую картину течения и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

Методы семейства IDR(s) обеспечивают устойчивое ускорение расчётов по сравнению с MINRES в 1,5–2,5 раза, причём наиболее экономичные варианты IDR(1), IDR(2) и IDR(4) затрачивают лишь 40–45% времени MINRES. Хотя при больших s наблюдается возрастание времени счёта на некоторых шагах по времени, производительность IDR(8) и IDR(16) даже в эти моменты не опускается ниже уровня MINRES. Оптимальным выбором по совокупности критериев — быстродействию, стабильности сходимости и качеству решения — является метод IDR(4).

Таким образом, метод IDR(s) является эффективной и целесообразной альтернативой традиционному MINRES в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики, решаемых с помощью DG-дискретизаций высокого порядка. Полученные результаты особенно актуальны для крупномасштабных расчетов, где сокращение времени выполнения является критически важным. В качестве рекомендованного значения параметра метода обоснован выбор $s = 4$, обеспечивающий оптимальное сочетание быстродействия и надежности на гибридных вычислительных системах с GPU.

Благодарности. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, https://rscf.ru/project/25-21-00308/.

Авторы выражают благодарность Зининой С.Х. и Нефедову М.С. за интерес к работе и ценные замечания.

Список литературы

1. Cockburn B. An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1998. Vol. 1697. P. 151–268.

2. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2016. Т. 9, № 3. С. 144–151.

3. Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Modeling the Richtmyer–Meshkov instability development using the discontinuous Galerkin method and locally adaptive meshes. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2021. Vol. 13, No. 3. P. 474–482.

4. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. Применение неявной схемы разрывного метода Галеркина к решению задач газовой динамики на графических ускорителях NVIDIA // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2022. Т. 15, № 2. С. 86–99.

5. Жалнин Р. В., Нефедов М. С., Зинина С. Х. Применение многосеточного метода с полной аппроксимацией для решения одномерных нелинейных уравнений в частных производных разрывным методом Галёркина // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 4. С. 435–450.

6. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2017. Т. 27, № 4. С. 608–617.

7. Gubaydullin I. M., Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2021. Vol. 13, No. 3. P. 437–444.

8. Persson P.-O., Peraire J. Newton-GMRES preconditioning for Discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2008. Vol. 30, No. 6. P. 2709–2733.

9. Chan T. F., Jackson K. R. Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing.* 1984. Vol. 5, No. 3. P. 533–542.

10. Knoll D. A., Keyes D. E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics.* 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357–397.

11. Paige C. C., Saunders M. A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1975. Vol. 12, No. 4. P. 617–629.

12. Sonneveld P., van Gijzen M. B. IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2008. Vol. 31, No. 2. P. 1035–1062.

13. van Gijzen M. B., Sonneveld P. Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties. *ACM Transactions on Mathematical Software.* 2009. Vol. 38, No. 1. P. 1–19.

14. Lecoanet D., McCourt M., Quataert E., Burns K. J., Vasil G. M., Oishi J. S., Brown B. P., Stone J. M., O'Leary R. M. A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2016. Vol. 455, No. 4. P. 4274–4288.

15. Tricco T. S. The Kelvin–Helmholtz instability and smoothed particle hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2019. Vol. 488, No. 4. P. 5210–5224.

Поступила 10.04.2026; доработана после рецензирования 15.05.2026;
принята к публикации 25.05.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. B. Cockburn, *Lecture Notes in Mathematics*, **1697**, Springer, 1998.
2. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, "Application of the discontinuous Galerkin method for solving parabolic problems in anisotropic media on triangular grids", *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming]*, **9**:3 (2016), 144–151.
3. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, "Modeling the Richtmyer–Meshkov instability development using the discontinuous Galerkin method and locally adaptive meshes", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13**:3 (2021), 474–482.
4. V. F. Masyagin, R. V. Zhalnin, V. F. Tishkin, "Application of an implicit scheme of the discontinuous Galerkin method to solving gas dynamics problems on NVIDIA graphics accelerators", *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming]*, **15**:2 (2022), 86–99.
5. R. V. Zhalnin, M. S. Nefedov, S. Kh. Zinina, "Application of the full approximation storage multigrid method for solving one-dimensional nonlinear partial differential equations by the discontinuous Galerkin method", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva [Middle Volga Mathematical Society Journal]*, **27**:4 (2025), 435–450.
6. R. V. Zhalnin, E. E. Peskova, O. A. Stadnichenko, V. F. Tishkin, "Modeling of multicomponent reacting gas flow using high-order accuracy algorithms", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]*, **27**:4 (2017), 608–617.
7. I. M. Gubaydullin, R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, "Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **13**:3 (2021), 437–444.
8. P.-O. Persson, J. Peraire, "Newton-GMRES preconditioning for Discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations", *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**:6 (2008), 2709–2733.
9. T. F. Chan, K. R. Jackson, "Nonlinearly preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **5**:3 (1984), 533–542.
10. D. A. Knoll, D. E. Keyes, "Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications", *Journal of Computational Physics*, **193**:2 (2004), 357–397.

11. C. C. Paige, M. A. Saunders, "Solution of sparse indefinite systems of linear equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **12**:4 (1975), 617–629.

12. P. Sonneveld, M. B. van Gijzen, "IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems", *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**:2 (2008), 1035–1062.

13. M. B. van Gijzen, P. Sonneveld, "Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties", *ACM Transactions on Mathematical Software*, **38**:1 (2009), 1–19.

14. D. Lecoanet, M. McCourt, E. Quataert, K. J. Burns, G. M. Vasil, J. S. Oishi, B. P. Brown, J. M. Stone, R. M. O'Leary, "A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **455**:4 (2016), 4274–4288.

15. T. S. Tricco, "The Kelvin–Helmholtz instability and smoothed particle hydrodynamics", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **488**:4 (2019), 5210–5224.

Submitted 10.04.2026; Revised 15.05.2026; Accepted 25.05.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.