DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Предобуславливатель на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона

Е. А. Чекменёва[1], Т. С. Хачкова[2], В. В. Лисица[2]

[1]*Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация)*
[2]*Институт математики СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье рассматривается способ построения предобуславливателя, основанного на методах машинного обучения, для его применения к численному решению уравнения Пуассона при моделировании пористых сред. При решении задачи используется итерационный метод сопряженных градиентов. Для предобуславливания системы линейных алгебраических уравнений предлагается аппроксимировать обратный оператор Лапласа с помощью сверточной нейронной сети архитектуры U-net. Рассматриваются два альтернативных подхода к формированию обучающего набора данных для нейронной сети. Первый метод основан на использовании пар векторов и результатов применения оператора Лапласа к ним. Во втором методе пары для обучения представляют собой векторы невязок, полученные при реализации метода сопряжённых градиентов, и результаты применения оператора Лапласа к ним. При этом процесс обучения нейронной сети основан на минимизации относительной ошибки по норме L^2. Показано, что при применении каждого из представленных методов обучения нейронная сеть архитектуры U-net с пятью сверточными слоями обеспечивает недостаточную точность аппроксимации обратного оператора Лапласа для сокращения количества итераций в применяемом методе сопряжённых градиентов. Поэтому построенный модифицированный метод сопряженных градиентов стабилизируется и обладает неустранимой невязкой.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, метод сопряжённых градиентов, предобуславливатель, машинное обучение

Для цитирования: Чекменёва Е. А., Хачкова Т. С., Лисица В. В. Предобуславливатель на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 2. С. 83–98. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98

Об авторах:
Чекменёва Екатерина Антоновна, студент Новосибирского государственного университета (630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2), ORCID: https://orcid.org/0009-0003-8509-0534, e.chekmeneva@g.nsu.ru
Хачкова Татьяна Станиславовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1595-7142, hachtanya@mail.ru
Лисица Вадим Викторович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института математики СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3544-4878, v.v.lisitsa@math.nsc.ru

MSC2020 65R20

© Е. А. Чекменёва, Т. С. Хачкова, В. В. Лисица

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Original article

Machine learning-based preconditioner to solve Poisson equation

E. A. Chekmeneva[1], T. S. Khachkova[2], V. V. Lisitsa[2]

[1]*Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation)*
[2]*Sobolev Institute of Mathematics (Novosibirsk, Russian Federation)*

Abstract. In this paper, we present a method of constructing a preconditioner based on machine learning methods for use in the numerical solution of the Poisson equation in porous media modelling. The iterative conjugate gradient method is used to solve the problem. To precondition a system of linear algebraic equations, we propose to approximate the inverse Laplace operator using a convolutional neural network of the U-net architecture. We consider two alternative approaches to the formation of a training dataset for a neural network. The first method is based on the use of pairs of vectors and on the results of applying the Laplace operator to them. In the second method, the training pairs are residual vectors obtained by implementing the conjugate gradient method and results of applying the Laplace operator to them. The neural network learning process is based on minimizing the L^2-norm relative error. We show that while using each of the presented learning methods, the U-net neural network with five convolutional layers approximating the inverse Laplace operator provides insufficient accuracy to reduce the number of iterations in the conjugate gradient method. Therefore, the modified conjugate gradient method is stabilized and has an irreducible residual.

Keywords: Poisson equation, method of conjugate gradients, preconditioner, machine learning

For citation: *E. A. Chekmeneva, T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa.* Machine learning-based preconditioner to solve Poisson equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 83–98. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.83-98

About the authors:
Ekaterina A. Chekmeneva, student at Novosibirsk State University (2 Pirogova Street, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0003-8509-0534, e.chekmeneva@g.nsu.ru
Tatyana S. Khachkova, Ph.D. (Phys. and Math.), senior researcher at the Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Science (4 Koptug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1595-7142, hachtanya@mail.ru
Vadim V. Lisitsa, D.Sc. (Phys. and Math.), head of laboratory at the Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Science (4 Koptug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3544-4878, v.v.lisitsa@math.nsc.ru

1. Введение

Численное решение уравнения Пуассона в гетерогенных средах является актуальной задачей, в том числе при моделировании распределений электрического потенциала в гетерогенных материалах [1, 2], стационарных температурных полей [3], распределения частиц, определяемых диффузионными процессами. Кроме того, решение

уравнения Пуассона является важным этапом при моделировании потоков жидкости, в частности, при рассмотрении многофазных потоков в открытых каналах [4–6], а также многофазных потоков в пористых средах [7, 8].

Дискретизованное уравнение Пуассона – система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица которой является самосопряженной и положительно определённой. Такие системы эффективно решаются с использованием методов Крыловского типа, среди которых широко распространён метод сопряженных градиентов [9]. Однако скорость сходимости данного метода может снижаться с увеличением числа обусловленности матрицы при увеличении размера СЛАУ и появлении неоднородностей среды.

Поэтому для увеличения скорости сходимости применяются различные методы предобуславливания: алгебраические методы, в том числе метод Якоби, неполная LU-факторизация [9–11] и малоранговая аппроксимация матрицы или её LU-разложения [12–14]. Распространены многосеточные методы [15–17]. Также эффективны методы, основанные на построении оператора, обратного к оператору Лапласа, для упрощенных моделей [18, 19].

Развитие методов машинного и глубокого обучения привело к появлению нового направления в построении предобуславливателей [20–24]. Как правило, общий принцип разработки предобуславливателей на основе машинного обучения заключается в ускорении неполной LU-факторизации, разложения Холецкого или непосредственном приближении обратного оператора Лапласа. В настоящей работе исследуется применимость архитектуры U-net для аппроксимации обратного оператора Лапласа с последующим использованием в качестве предобуславливателя. В параграфе 2 приводится постановка математической задачи. Принципы работы предобуславливателя на основе машинного обучения обсуждаются в параграфе 3. Численные эксперименты представлены в параграфе 4.

2. Постановка задачи

2.1. Математическая постановка

Рассматривается уравнение Пуассона в области $\Omega = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$:

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y) \nabla \psi(x, y)) = f(x, y). \tag{2.1}$$

Предполагается, что коэффициент $\sigma(x, y)$ строго положителен и ограничен. В данной статье рассматриваются смешанные граничные условия. Условия Дирихле заданы при $x = X_1$ и $x = X_2$, условия Неймана заданы при $y = Y_1$ и $y = Y_2$:

$$\begin{array}{ll} \psi(X_1, y) = \psi^1, & \psi(X_2, y) = \psi^2, \\ \nabla\psi \cdot \vec{n}(x, Y_1) = 0, & \nabla\psi \cdot \vec{n}(x, Y_2) = 0. \end{array} \tag{2.2}$$

В этих обозначениях $f(\vec{x})$ – это правая часть, ψ^1 и ψ^2 – граничные условия.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать консервативные конечно-разностные схемы с гармоническим усреднением коэффициента σ при использовании на гранях ячеек, как описано в [1], [18, 19], [25].

Дискретизированная задача может быть представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$A\vec{\psi} = \vec{g}, \tag{2.3}$$

где матрица A является самосопряженной положительно определенной размерности $N_xN_y \times N_xN_y$, $\vec{\psi}$ – векторное представление неизвестных, $\vec{g}$ – вектор, содержащий дискретизированные правые части и граничные условия, N_x и N_y – количество точек сетки в каждом пространственном направлении.

2.2. Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием

Матрица A системы (2.3) симметрична и положительно определена, следовательно, для её решения применим метод сопряженных градиентов. Однако скорость сходимости данного метода существенно зависит от числа обусловленности матрицы [9]. Число обусловленности системы может быть большим, более того, оно возрастает с увеличением размера задачи и контрастности среды, коэффициента σ [19]. Для уменьшения числа обусловленности и ускорения скорости сходимости используется предобуславливание. Тогда модифицированная задача принимает вид

$$B^{-1/2}AB^{-1/2}B^{1/2}\vec{\psi} = B^{-1/2}\vec{g}.$$

Здесь оператор B – предобуславливатель. Новая матрица $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ также симметрична и положительно определена. Легко показать, что предобусловленный метод сопряженных градиентов представим в виде:

1. $\vec{r}_0 = \vec{g} - A\vec{\psi}_0$, $\vec{p}_0 = B^{-1}\vec{r}_0$, $\vec{q}_0 = \vec{p}_0$;
   do until converge
2. $\alpha_j = \dfrac{(\vec{q}_j, \vec{r}_j)}{(A\vec{p}_j, \vec{p}_j)}$;
3. $\vec{\psi}_{j+1} = \vec{\psi}_j + \alpha_j\vec{p}_j$;
4. $\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j - \alpha_j A\vec{p}_j$, $\vec{q}_{j+1} = B^{-1}\vec{r}_{j+1}$;
5. $\beta_j = \dfrac{(\vec{q}_{j+1}, \vec{r}_{j+1})}{(\vec{q}_j, \vec{r}_j)}$;
6. $\vec{p}_{j+1} = \vec{q}_{j+1} + \beta_j\vec{p}_j$.

В данных обозначениях $\vec{\psi}$ – вектор решения, $\vec{g}$ – исходная правая часть, $\vec{r}$ – вектор невязки, а $\vec{q}$ и $\vec{p}$ – вспомогательные векторы.

Наиболее трудозатратной частью алгоритма является вычисление действия предобуславливателя на невязку $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$. Существует несколько различных способов построения B и вычисления действия $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$. Наиболее универсальный подход основан на алгебраических принципах. Например, предобуславливатель Якоби требует обращения главной диагонали исходной матрицы. Предобуславливатели, основанные на неполном LU-разложении и разложении Холецкого, улучшают сходимость, но требуют хранения коэффициентов, что приводит к высоким требованиям к памяти. Эффективным подходом к решению уравнения Пуассона является использование многосеточных методов как напрямую, так и в качестве предобуславливателя [9], [15]. Однако эффективность многосеточных методов сильно зависит от контраста, коэффициента уравнения σ. С другой стороны, если $B = A$, то итерационный процесс сходился бы за одну итерацию. Однако обращение матрицы B эквивалентно решению исходной задачи. Поэтому был предложен набор подходов, где матрица $B \approx A$, но при этом её относительно

легко обращать. В частности, может быть рассмотрен оператор, соответствующий однородной модели $\sigma = const$, обращаемый с использованием псевдоспектрального метода [18], [26], или с помощью спектрального одномерного матричного разложения. Такой подход значительно улучшает сходимость метода сопряжённых градиентов для уравнения Пуассона, но его эффективность снижается с увеличением контрастности коэффициентов уравнения. Кроме того, использование псевдоспектрального и спектрального подходов требует трудозатратных вычислений на каждой итерации. Чтобы ускорить вычисление действия предобуславливателя, т.е. $B^{-1}\vec{r}_{j+1}$ для любой матрицы B, в настоящей работе использованы методы машинного обучения.

3. Предобуславливатель на основе машинного обучения

Основное предположение предлагаемого подхода заключается в том, что необходимо решить уравнение Пуассона для фиксированной модели $\sigma(x, y)$ для множества различных правых частей. В этом случае разумно обучить нейронную сеть, которая приближала бы действие оператора B^{-1}, а затем многократно применять ее в качестве предобуславливателя для решения системы. В данной работе предлагается способ построения предобуславливателя для аппроксимации обратного оператора, вместо уменьшения числа обусловленности матрицы или её нормы напрямую, как описано в работе [20]. Итак, необходимо построить отображение

$$\mathcal{F}[\vec{r}] = \vec{q}_F \approx B^{-1}\vec{r}.$$

В данном исследовании используется нейронная сеть архитектуры U-net [27], которая представляет собой сверточную нейросеть, широко используемую для обработки изображений, обработки сейсмических данных [28–30]. Архитектура U-net с пятью сверточными слоями показана на рис. 3.1. Для обучения такой нейронной сети рассматривается серия изображений $U_1, ..., U_m$ размером 128×128 пикселей. Изображения могут быть представлены в виде векторов $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m$ длиной 128^2. Далее вычислялось действие оператора Лапласа на набор данных для получения второй серии векторов $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m$, таких, что $\vec{v}_k = A\vec{u}_k$, их аналогично можно представить в виде изображений $V_1, ..., V_m$. Далее сеть U-net была обучена отображать множество $V_1, ..., V_m$ на множество $U_1, ..., U_m$. Таким образом, нейросеть обучена обращать матрицу A. Используемая функция потерь имеет вид:

$$Loss = \sum_{k=1}^{m} \left[\lambda_{rel} \frac{\|\vec{u}_k - \mathcal{F}[\vec{u}_k]\|_2^2}{\|\vec{u}_k\|_2^2} + \lambda_{pos} \max\{0, -(\vec{u}_k, \mathcal{F}[\vec{u}_k])\} \right],$$

где λ_{rel} и λ_{pos} – веса, а $(\cdot, \cdot)$ – обозначение стандартного скалярного произведения векторов. Второй член используется для обеспечения положительной определённости отображения $\mathcal{F}[\vec{u}_k]$, важнейшего свойства предобуславливателя метода сопряженных градиентов.

В работе рассматриваются альтернативные подходы к формированию обучающего набора, каждый из которых обладает достоинствами и ограничениями. Первый подход предполагает обучение с использованием 768 пар изображений в качестве обучающего набора данных и 256 пар в качестве набора данных для валидации. В качестве выходных данных предлагается использовать результаты применения действия оператора Лапласа к входным изображениям с целью обучения нейросети восстановлению

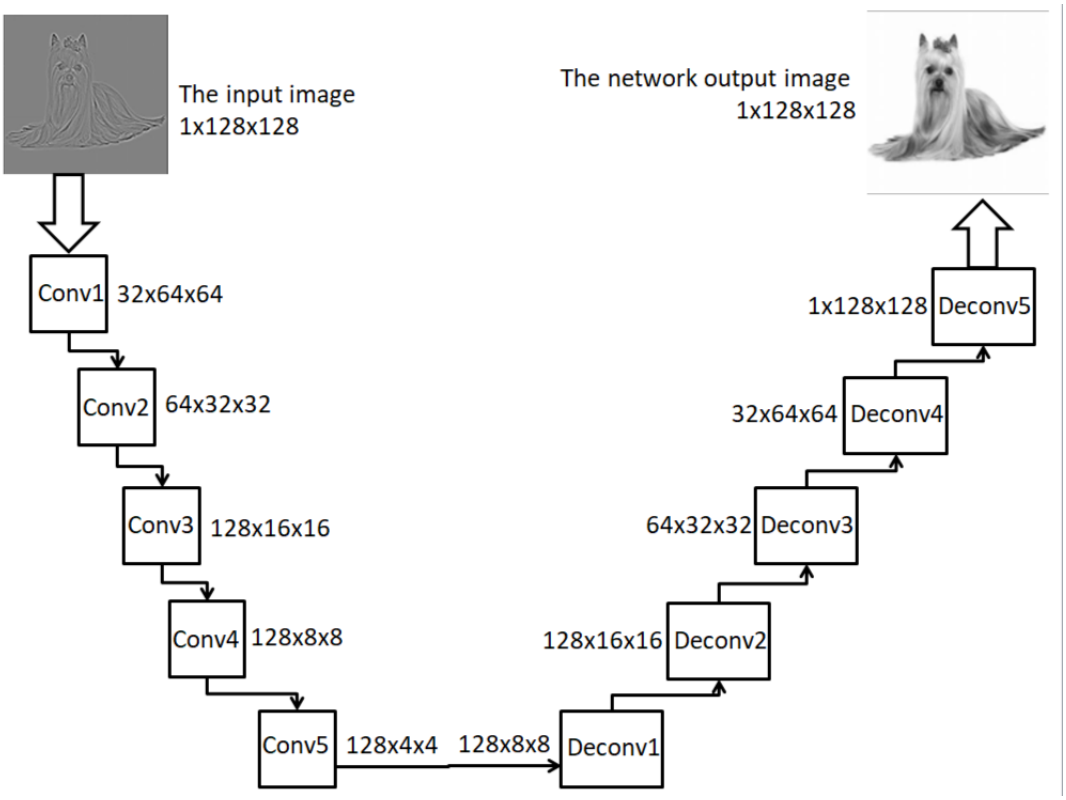

Рис. 3.1. Архитектура нейронной сети U-net

Fig. 3.1. U-net neural network architecture

изображений. Пример исходного изображения, результат действия оператора Лапласа и восстановленное изображение представлены на рис. 3.2. Использование таких изображений упрощает визуальную интерпретацию результатов работы нейросети U-net. Однако такой подход может быть неэффективным при предобуславливании в методе сопряженных градиентов, где необходимо применять предобуславливающий оператор к вектору невязки.

Идея второго подхода следует из специфики применения нейронной сети в качестве предобуславливателя в итерационном методе. Поскольку входными данными для сети в методе сопряжённых градиентов с предобуславливанием являются невязки, возникающие на каждой итерации, обоснованным является использование таких промежуточных невязок в качестве обучающих образцов, т.е. использовались изображения из набора, описанного выше, на них вычислялось действие оператора Лапласа для получения правых частей. Далее производился запуск итераций метода сопряжённых градиентов без предобуславливания. В результате была получена серия векторов $\vec{p}_j$ и $A\vec{p}_j$, которые были использованы для обучения нейронной сети. Примеры исходных и восстановленных векторов приведены на рис. 3.3.

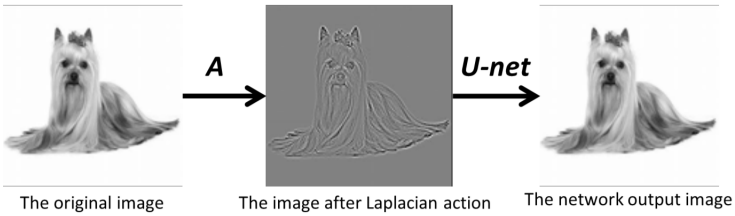

Рис. 3.2. Пример применения нейросети U-net к изображению. Слева – исходное изображение, в центре – действие оператора Лапласа, справа – изображение, полученное на выходе

Fig. 3.2. An example of applying a U-net neural network to an image. The source image is on the left, the Laplace operator effect is in the middle, the output image is on the right

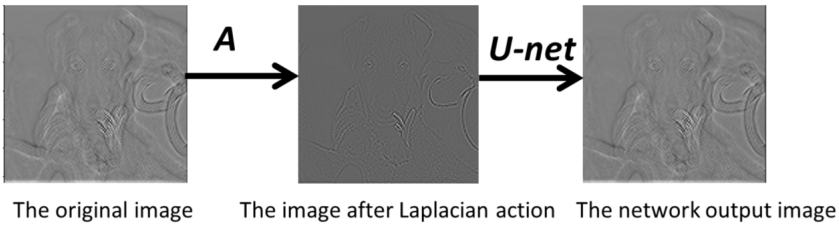

Рис. 3.3. Пример применения нейросети U-net к вектору $\vec{p}_j$, возникающему при итерациях метода сопряжённых градиентов. Слева – исходное изображение, в центре – действие оператора Лапласа, справа – изображение, полученное на выходе

Fig. 3.3. An example of applying the U-net neural network to the vector $\vec{p}_j$ that occurs during iterations of the conjugate gradient method. The source image is on the left, the Laplace operator effect is in the middle, the output image is on the right

4. Численные эксперименты

В рамках численных экспериментов рассматривались неоднородные модели среды, где $\sigma = \sigma(x, y)$ – биномиальное распределение, определяемое как усеченное гауссово распределение с длиной корреляции, равной 10 узлам сетки, и общей пористостью, изменяющейся в пределах $\{30\%, 35\%, 40\%, 45\%, 50\%\}$. Примеры моделей с различными пористостями приведены на рис. 4.4. Предполагается, что проводимость материала, заполняющего поры σ_1 (цветная точка на рис. 4.4), так же, как и проводимость σ_2 (черная) варьировалась в пределах заданных значений $\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$. Эти модели близки к реальным образцам горных пород, где проводимость жидкости, заполняющей поры, намного выше, чем у изолирующей фракции. Более того, геометрия порового пространства песчаников хорошо предсказывается двухточечной статистикой, поэтому может быть аппроксимирована усеченным гауссовым распределением.

Для изучения влияния неоднородности модели на сходимость метода сопряженных

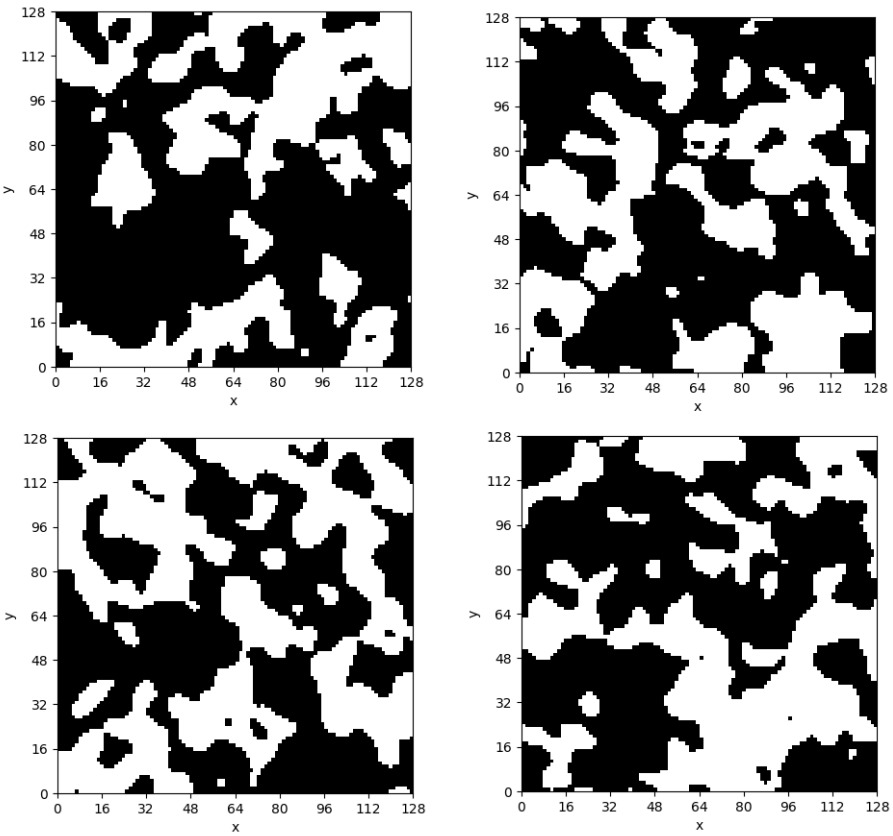

Рис. 4.4. Примеры моделей среды с пористостью: сверху слева – 35%, сверху справа – 40%, снизу слева – 45%, снизу справа – 50%

Fig. 4.4. Examples of media models with porosity of 35% is top left, 40% is top right, 45% is bottom left, 50% is bottom right

градиентов с предобуславливанием, были рассмотрены 10 реализаций статистической модели для каждого фиксированного контраста пористости и электропроводности. Всего было рассмотрено 200 различных моделей. Для каждой модели была обучена нейронная сеть U-net, что может не являться оптимальным решением, однако ожидается, что оно обеспечит максимально возможную точность. Фактически, нейросеть была обучена строить обратный оператор Лапласа без каких-либо дополнительных приближений.

На каждой из 200 моделей среды решались с помощью метода сопряжённых градиентов системы уравнений для нескольких различных правых частей. В качестве точного решения использовались изображения из нашей коллекции. Для получения правых частей применялся неоднородный оператор Лапласа, затем использовался метод сопряжённых градиентов с предобуславливанием для восстановления исходного решения. К сожалению, разработанный алгоритм не сходился к точному решению. Таким образом, было рассмотрено поведение невязок в методе сопряжённых градиентов с предобуславливанием на основе машинного обучения на различных моделях среды. На рис. 4.5-4.8 представлены зависимости величин невязок от номера итераций для 10 реализаций

модели с фиксированной пористостью, равной 45%, но с различными контрастами проводимости.

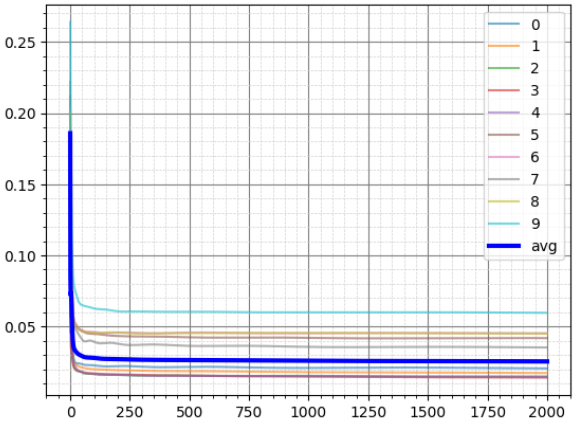

Рис. 4.5. Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости $\sigma_1/\sigma_2 = 10^1$. Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

Fig. 4.5. Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast $\sigma_1/\sigma_2 = 10^1$. The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments

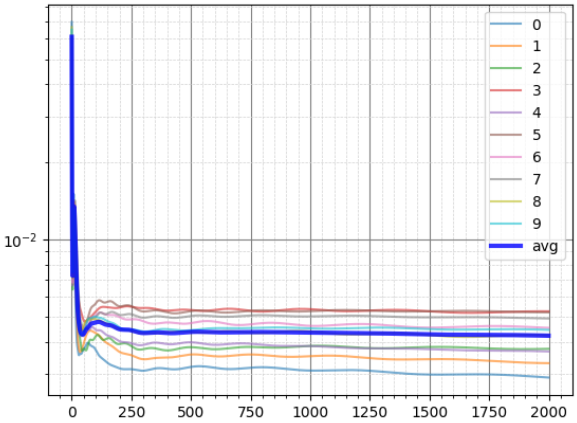

Рис. 4.6. Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости $\sigma_1/\sigma_2 = 10^2$. Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

Fig. 4.6. Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast $\sigma_1/\sigma_2 = 10^2$. The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values for over experiments

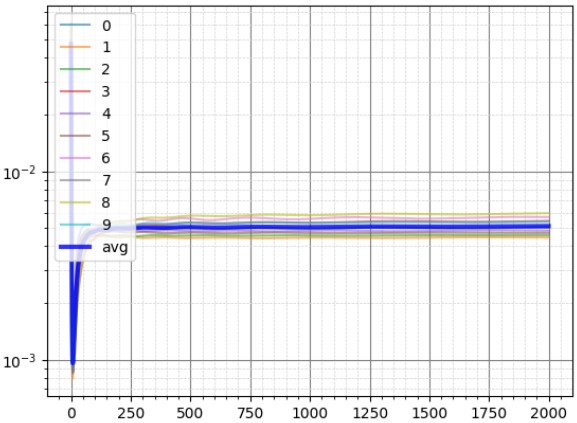

Рис. 4.7. Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости $\sigma_1/\sigma_2 = 10^3$. Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

Fig. 4.7. Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast $\sigma_1/\sigma_2 = 10^3$. The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments

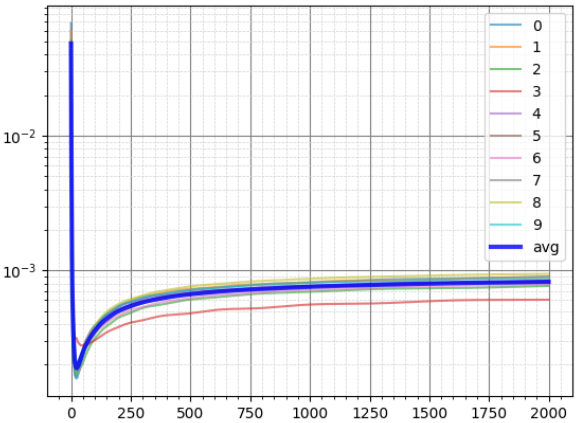

Рис. 4.8. Зависимость значения невязки от числа итераций для модели с контрастом проводимости $\sigma_1/\sigma_2 = 10^4$. Полупрозрачные линии соответствуют экспериментам для различных моделей, жирная линия показывает усреднённые значения по всем экспериментам

Fig. 4.8. Dependence of the residual value on the number of iterations for a model with conduction contrast $\sigma_1/\sigma_2 = 10^4$. The translucent lines correspond to experiments for different models, the bold line shows the average values over all experiments

Согласно представленным рисункам величина невязки быстро снижается на пер-

вых итерациях, а затем достигает асимптотического значения, далекого от нуля. Эти значения не зависят от пористости модели, но чувствительны к контрасту проводимости. Чтобы оценить эту зависимость, была произведена оценка неустранимой невязки для всех экспериментов, и вычислено ее среднее значение по всем моделям среды и реализациям. Также было оценено среднее значение функции потерь нейросети U-net по статистическим моделям и реализациям. Кроме того, значения функции потерь при обучении U-net и неустранимой невязки приведены в таблице 4.1. Можно видеть, что функция потерь достигает примерно одного и того же значения – около 30% для всех контрастов проводимости. Однако неустранимый остаточный эффект уменьшается с увеличением контраста.

Таблица 4.1. Погрешность действия нейросети в пространстве L^2 и значение неустранимой невязки для различных контрастов проводимости

Table 4.1. The error of the neural network in the L^2 space and the value of the irremovable residual for different conductivity contrasts

σ_1/σ_2	**Погрешность в L^2**	**Неустранимая невязка**
10^4	0.28	$9.48 \cdot 10^{-4}$
10^3	0.24	$5.22 \cdot 10^{-3}$
10^2	0.28	$4.57 \cdot 10^{-3}$
10^1	0.34	$1.76 \cdot 10^{-2}$

5. Заключение

В данной работе представлен подход к построению предобуславливателя на основе машинного обучения для решения уравнения Пуассона методом сопряженных градиентов. Предложен предобуславливатель для аппроксимации обратного оператора Лапласа для пространственно изменяющихся коэффициентов модели пористой среды. Была использована нейронная сеть архитектуры U-Net для аппроксимации действия обратного оператора Лапласа с прямой минимизацией относительной ошибки (не невязки). Удалось достичь точности аппроксимации на основе машинного обучения, которая составила всего 30%. Такой точности оказалось недостаточно для обеспечения сходимости метода сопряженных градиентов. Разработанный «предобусловленный» алгоритм не сходится к решению, но стабилизируется, обладая неустранимой невязкой порядка 10^{-3}. В данном исследовании также был проигнорирован тот факт, что предобуславливатель в методе сопряжённых градиентов должен быть линейным самосопряженным и положительно определенным оператором. Таким образом, возможным способом улучшения качества предобуславливания на основе машинного обучения является включение этих условий для ограничения функции потерь при обучении нейронной сети.

Благодарности. Постановка задачи выполнена В. Лисицей, разработка и реализация предобуславливателя выполнена Е. Чекменёвой при финансовой поддержке РНФ в рамках гранта N 22-11-00004-П. Численные эксперименты выполнены Т. Хачковой в рамках гос. задания ИМ СО РАН FWNF-2026-0025.

Список литературы

1. Хачкова Т. С., Лисица В. В., Решетова Г. В., Чеверда В. А. Численная оценка удельного электрического сопротивления горных пород по их цифровым изображениям с использованием графических со-процессоров. // *Вычислительные методы и программирование.* 2020. Т. 21, вып. 3. С. 306–318. DOI:10.26089/NumMet.v21r326

2. Zhan X., Schwartz L. M., Toksöz M. N., Smith W. C., Morgan F. D. Pore-scale modeling of electrical and fluid transport in berea sandstone. *Geophysics.* 2010. Vol. 75, no. 5. P. F135–F142. DOI:10.1190/1.3463704

3. Dorn C., Schneider M. Lippmann-schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2019. Vol. 118, no. 11. P. 631–653. DOI:10.1002/nme.6030

4. Kim J. Phase-field models for multi-component fluid flows. *Communications in Computational Physics.* 2012. Vol. 12, no. 3. P. 613–661. DOI:10.4208/cicp.301110.040811a

5. Blunt M. J., Bijeljic B., Dong H., Gharbi O., Iglauer S., Mostaghimi P., Paluszny A., Pentland C. Pore-scale imaging and modelling. *Advances in Water Resources.* 2013. Vol. 51. P. 197–216. DOI:10.1016/j.advwatres.2012.03.003

6. Li M., Foroughi S., Zhao J., Bijeljic B., and Blunt M. J. Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers. *Journal of Power Sources.* 2023. Vol. 584. 233539. DOI:10.1016/j.jpowsour.2023.233539

7. Lee S., Wheeler M. F. Enriched Galerkin methods for two-phase flow in porous media with capillary pressure. *Journal of Computational Physics.* 2018. Vol. 367. P. 65–86. DOI:10.1016/j.jcp.2018.03.031

8. Redondo C., Rubio G., Valero E. On the efficiency of the impes method for two phase flow problems in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering.* 2018. Vol. 164. P. 427–436. DOI:10.1016/j.petrol.2018.01.066

9. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2003. DOI:10.1137/1.9780898718003.ch4

10. Haber E , Ascher U. M., Aruliah D. A., and Oldenburg D. W. Fast simulation of 3d electromagnetic problems using potentials. *Journal of Computational Physics.* 2000. Vol. 163, no. 1. P. 150–171. DOI:10.1006/JCPH.2000.6545

11. Lee B., Min C. Optimal preconditioners on solving the poisson equation with neumann boundary conditions. *Journal of Computational Physics.* 2021. Vol. 433. 110189.

12. Xia J. A robust inner–outer hierarchically semi-separable preconditioner. *Numerical Linear Algebra with Applications.* 2012. Vol. 19, no. 6. P. 992–1016. DOI:10.1002/nla.1850

13. Соловьев С. А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // *Вычислительные методы и программирование.* 2014. Т. 15, вып. 3. С. 441–460.

14. Воронин К. В., Соловьев С. А. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоран говой аппроксимации в качестве предобусловливателя // *Вычислительные методы и программирование.* 2015. Т. 16, вып. 2. С. 268–280.

15. Stuben K. A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2001. Vol. 128. P. 281–309. DOI:10.1016/S0377-0427(00)00516-1

16. Evstigneev N. M., Ryabkov O. I., Gerke K. M. Stationary stokes solver for single-phase flow in porous media: A blastingly fast solution based on algebraic multigrid method using gpu. *Advances in Water Resources.* 2023. Vol. 171. 104340. DOI:10.1016/j.advwatres.2022.104340

17. Ye Z., Hu X., Pan W. A multigrid preconditioner for spatially adaptive high-order meshless method on fluid–solid interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2022. Vol. 400, no. 3. 115506. DOI:10.1016/j.cma.2022.115506

18. Манаев А. А., Лисица В. В. Спектральный предобуславливатель для решения уравнения Пуассона. *Вычислительные методы и программирование.* 2025. Т. 26, № 2. С. 111–128. DOI: 10.26089/NumMet.v26r208

19. Манаев А. А., Хачкова Т. С. , Лисица В. В. Численный алгоритм оценки параметра пористости образцов горных пород. *Вычислительные методы и программирование.* 2025. Т. 26, № 4. С. 479–501. DOI:10.26089/NumMet.v26r432

20. Li Y., Chen P. Y., Du T., Matusik W. Learning preconditioners for conjugate gradient PDE solvers. *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning* (Honolulu, Hawaii, USA, 2023). PMLR, 2023. P. 19425–19439. DOI:10.48550/arXiv.2305.16432

21. Li M., Wang H., Jimack P. K. Generative modeling of sparse approximate inverse preconditioners. In Lecture Notes in Computer Science, volume 14834 of Computational Science– ICCS 2024. Switzerland:Springer Nature, 2024. P. 378–392. DOI:10.48550/arXiv.2405.11007

22. Azulay Y., Treister E. Multigrid-augmented deep learning preconditioners for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2023. Vol. 45, no. 3. P. S127–S151.

23. Li K., Khan S. M., Mehmani Y. Machine learning for preconditioning elliptic equations in porous microstructures: A path to error control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2024. Vol. 427, no. 2. 117056. DOI:10.1016/j.cma.2024.117056

24. Sakharov D. I., Tsgoev C. A., Mullyadzhanov R. I. A hybrid method for solving the two-dimensional poisson equation: Combining u-net and conjugate gradient method. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2025. Vol. 46, no. 8. P. 3777–3790. DOI: 10.1134/S1995080225610124

25. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

26. Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. 3d numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver. *Geophysics.* 2018. Vol. 83, no. 6. P. T333–T344. DOI:10.1190/geo2017-0710.1

27. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. In Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI), volume 9351 of LNCS. 2015. P. 234–241. Springer, 2015.

28. Gadylshin K., Vishnevsky D., Gadylshina K., Lisitsa V. Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling. *Geophysics.* 2022. Vol. 87, no. 3. P. T237–T249. DOI:10.1190/geo2021-0242.1

29. Gadylshin K., Lisitsa V., Vishnevsky D., Gadylshina K. Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network. *Computers and Geosciences.* 2023. Vol. 180. 105438. DOI:10.1016/j.cageo.2023.105438

30. Gondyul E., Lisitsa V., Gadylshin K., Vishnevsky D. Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction. *Computers and Geosciences.* 2025. Vol. 196. 105806. DOI:10.1016/j.cageo.2024.105806

Поступила 25.04.2026; доработана после рецензирования 15.05.2026;
принята к публикации 25.05.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, V. A. Tcheverda, "Numerical Estimation of Electrical Resistivity in DigitalRocks Using GPUs", *Numerical methods and programming*, **21**:3 (2020), 306–318 (In Russ.). DOI: 10.26089/NumMet.v21r326

2. X. Zhan, L. M. Schwartz, M. N. Toksöz, W. C. Smith, F. D. Morgan, "Pore-scale modeling of electrical and fluid transport in berea sandstone.", *Geophysics*, **75**:5 (2010), F135–F142.. DOI: 10.1190/1.3463704

3. C. Dorn, M. Schneider, "Lippmann-schwinger solvers for the explicit jump discretization for thermal computational homogenization problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **118**:11 (2019), 631–653. DOI: 10.1002/nme.6030

4. J. Kim, "Phase-field models for multi-component fluid flows", *Communications in Computational Physics*, **12**:3 (2012), 613–661. DOI: 10.4208/cicp.301110.040811a

5. M. J. Blunt, B. Bijeljic, H. Dong, O. Gharbi, S. Iglauer, P. Mostaghimi, A. Paluszny, C. Pentland, "Pore-scale imaging and modelling", *Advances in Water Resources*, **51** (2013), 197–216. DOI: 10.1016/j.advwatres.2012.03.003

6. M. Li, S. Foroughi, J. Zhao, B. Bijeljic, M. J. Blunt, "Image-based pore-scale modelling of the effect of wettability on breakthrough capillary pressure in gas diffusion layers", *Journal of Power Sources*, **584** (2023). DOI: 10.1016/j.jpowsour.2023.233539

7. S. Lee, M. F. Wheeler, "Enriched galerkin methods for two-phase flow in porous media with capillary pressure", *Journal of Computational Physics*, **367** (2018), 65–86. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.03.031

8. C. Redondo, G. Rubio, E. Valero, "On the efficiency of the impes method for two phase flow problems in porous media", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **164** (2018), 427–436. DOI: 10.1016/j.petrol.2018.01.066

9. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.*, SIAM, 2003 DOI: 10.1137/1.9780898718003.ch4.

10. E. Haber, U. M. Ascher, D. A. Aruliah, D. W. Oldenburg, "Fast simulation of 3d electromagnetic problems using potentials", *Journal of Computational Physics*, **163**:1 (2000), 150–171. DOI: 10.1006/JCPH.2000.6545

11. B. Lee, C. Min, "Optimal preconditioners on solving the poisson equation with neumann boundary conditions jour Journal of Computational Physics", **433** (2021).

12. J. Xia, "A robust inner–outer hierarchically semi-separable preconditioner", *Numerical Linear Algebra with Applications*, **19**:6 (2012), 992–1016. DOI: 10.1002/nla.1850

13. S. A. Solovyev, "Application of the Low-Rank Approximation Technique in theGauss EliminationMethod for Sparse Linear Systems", *Numerical Methods and Programming*, **15** (2014), 441–460 (In Russ.).

14. K. V. Voronin, S. A. Solovyev, "Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned LowRank Approximation Technique", *Numerical Methods and Programming*, **16** (2015), 268–280 (In Russ.).

15. K. Stuben, "A review of algebraic multigrid", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **128** (2001), 281–309. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00516-1

16. N. M. Evstigneev, O. I. Ryabkov, K. M. Gerke, "Stationary stokes solver for single-phase flow in porous media: A blastingly fast solution based on algebraic multigrid method using gpu", *Advances in Water Resources*, **171** (2023). DOI: 10.1016/j.advwatres.2022.104340

17. Z. Ye, X. Hu, W. Pan, "A multigrid preconditioner for spatially adaptive high-order meshless method on fluid–solid interaction problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **400**:3 (2022). DOI: 10.1016/j.cma.2022.115506

18. A. A. Manaev, V. V. Lisitsa, "Spectral preconditioner for solving the Poisson equation", *Numerical methods and programming*, **26**:2 (2025), 111–128. DOI: 10.26089/NumMet.v26r208

19. A. A. Manaev, T. S. Khachkova, V. V. Lisitsa, "Numerical algorithm for estimating the formation factor of digital rocks", *Numerical methods and programming*, **26**:4 (2025), 479–501. DOI: 10.26089/NumMet.v26r432

20. Y. Li, P. Y. Chen, T. Du, W. Matusik, "Learning preconditioners for conjugate gradient PDE solvers.", *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning.* Vol. 202 of Proceedings of Machine Learning Research (23–29 Jul 2023), PMLR, 19425–19439.

21. M. Li, H. Wang, P. K. Jimack, "Generative modeling of sparse approximate inverse preconditioners", *In Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 14834 of Computational Science– ICCS 2024, Springer Nature, Switzerland, 2024, 378–392 DOI: 10.48550/arXiv.2405.11007.

22. Y. Azulay, E, Treister, "Multigrid-augmented deep learning preconditioners for the helmholtz equation", *SIAM Journal on Scientific Computing*, **45**:3 (2023), S127–S151.

23. K. Li, S. M. Khan, Y. Mehmani, "Machine learning for preconditioning elliptic equations in porous microstructures: A path to error control", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **427**:2 (2024). DOI: 10.1016/j.cma.2024.117056

24. D. I. Sakharov, C. A. Tsgoev, R. I. Mullyadzhanov, "A hybrid method for solving the two-dimensional poisson equation: Combining u-net and conjugate gradient method", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46**:8 (2025), 3777–3790. DOI: 10.1134/S1995080225610124

25. A. A. Samarsky, *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 616 p.

26. M. Belonosov, V. Kostin, D. Neklyudov, V. Tcheverda, "3d numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver", *Geophysics*, **83**:6 (2018), T333–T344. DOI: 10.1190/geo2017-0710.1

27. O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox., "U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation.", *In Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*. Vol. 9351 of LNCS, Springer, 2015, 234–241.

28. K. Gadylshin, D. Vishnevsky, K. Gadylshina, V. Lisitsa, "Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling", *Geophysics*, **87**:3 (2022), T237–T249. DOI: 10.1190/geo2021-0242.1

29. K. Gadylshin, V. Lisitsa, D. Vishnevsky, K. Gadylshina, "Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network", *Computers and Geosciences*, **180** (2023). DOI: 10.1016/j.cageo.2023.105438

30. E. Gondyul, V. Lisitsa, K. Gadylshin, D. Vishnevsky, "Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction", *Computers and Geosciences*, **196** (2025). DOI: 10.1016/j.cageo.2024.105806

Submitted 25.04.2026; Revised 15.05.2026; Accepted 25.05.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.