Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Численный анализ уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области с входящим углом

А. В. Рукавишников

Институт прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск, Россия)

Аннотация. В работе рассмотрена система нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме с неоднородными граничными условиями Дирихле. Область, в которой изучается система уравнений, представляет собой ограниченный невыпуклый многоугольник с входящим углом на границе. Исследована задача в кососимметричной, а не в общеизвестной конвективной форме, вследствие того, что при приближённом решении последней часто нарушается баланс кинетической энергии в турбулентных течениях. В результате дискретизации по времени и линеаризации исходной системы уравнений на каждом временном слое получена задача типа Озеена. Определено понятие R_ν-обобщённого решения в множествах весовых пространств Соболева и на его основе построена схема весового метода конечных элементов (МКЭ). Введено понятие приближённого R_ν-обобщённого решения. Произведены сравнительные численные анализы погрешностей решений в кососимметричной и конвективной формах, а также весового и классического методов конечных элементов рассматриваемой задачи, выявившие преимущество предложенного в работе подхода.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, кососимметричная форма, весовой метод конечных элементов, входящий угол

Для цитирования: Рукавишников А. В. Численный анализ уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области с входящим углом // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 2. С. 62–82. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82

Об авторах:
Рукавишников Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (680038, Россия, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 60), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7585-4559, 78321a@mail.ru

© *А. В. Рукавишников*

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Original article

MSC2020 65N30, 65Z05, 35Q30

Numerical analysis of the Navier-Stokes equations in skew-symmetric form in a domain with an incoming corner

A. V. Rukavishnikov

Institute of Applied Mathematics FEB RAS (Khabarovsk, Russian Federation)

Abstract. In the paper a system of non-stationary incompressible Navier-Stokes equations in skew-symmetric form with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions is considered. The domain is a bounded non-convex polygon with an incoming corner at the boundary. The problem is described in skew-symmetric form, rather than in the well-known convective form, due to the fact that an approximate solution of the latter one often disrupts the kinetic energy balance in turbulent flows. By discretizing the initial system of equations in time and linearizing it, an Oseen-type problem is obtained at each time layer. A concept of an R_ν-generalized solution in sets of S.L. Sobolev weighted spaces is defined. A scheme of weighted finite element method is constructed based on this concept. A definition of an approximate R_ν-generalized solution is introduced. A comparative numerical analysis of the errors in solutions in skew-symmetric and convective forms is conducted, as well as in the weighted and classical finite element methods of the problem under consideration. In both comparisons, the advantage of the approach proposed is demonstrated.

Keywords: Navier-Stokes equations, skew-symmetric form, weighted FEM, incoming angle

For citation: *A. V. Rukavishnikov.* Numerical analysis of the Navier-Stokes equations in skew-symmetric form in a domain with an incoming corner. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 62–82. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.62-82

About the authors:
Alexey V. Rukavishnikov, Ph.D. (Phys. and Math.), Leading Researcher, Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Science, Far Eastern Branch) (60 Serysheva Str., Khabarovsk, 680038, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7585-4559, 78321a@mail.ru

1. Введение

Большое количество исследований посвящено численному решению нестационарных нелинейных уравнений Навье-Стокса. Исследователями рассматриваются различные формы уравнений: конвективная, вихревая, консервативная, кососимметричная и др. [1–6]. Хорошо известно, что при дискретизации уравнений Навье-Стокса закон сохранения массы справедлив лишь в слабом (интегральном) смысле. Это означает невыполнение важных законов сохранения, таких как энергии, импульса, момента импульса и др. [7–13].

В частности, с точки зрения закона сохранения энергии не подходит применение часто используемой конвективной формы уравнений Навье-Стокса [7]. В контексте вышеупомянутого факта предпочтительнее применять другие формы уравнений, удовлетворяющие этому закону [2], [14–17]. В представленной работе рассмотрим кососимметричную форму уравнений и проведём её численный анализ.

Из всего множества работ по тематике следует выделить класс задач, который рассматривается в многоугольной области Ω с входящим углом ω на границе, т.е. в случае, когда угол $\omega \in (\pi, 2\pi)$. Впервые в работе [18] описано поведение потока несжимаемой жидкости в окрестности входящего угла между двумя неподвижными стенками. Автор показал, что функция потока ψ имеет асимптотический вид

$$\psi \sim r^{1+\lambda},$$

если вершина ω находится в полюсе полярной системы координат (r, φ). При этом показатель λ – наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin\,(\lambda\omega_0) = -\lambda \sin\,\omega_0,$$

где ω_0 – величина входящего угла ω. Например, если величина угла ω равна $3\pi/2$, то показатель λ приблизительно равен 0.54448. Функция потока ψ и вектор-функция скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, компоненты которой имеют асимптотический вид

$$u_i \sim r^{\lambda},$$

регулярны, в то время как завихрённости и напряжения ведут себя асимптотически как $r^{\lambda-1}$. Это означает, что они сингулярны вблизи ω. При этом для компонент вектора скоростей u_i известно, что $u_i \notin W_2^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega)$ [19]. В силу этого не существует классического приближённого подхода, который обеспечит скорость сходимости к истинному решению, превосходящую $\mathcal{O}(h^{\lambda})$. При этом показатель λ тем меньше, чем больше раствор ω (более подробно см. [1]). Аналогичная ситуация встречается при рассмотрении двумерного потока между двумя неподвижными стенками со ступенькой [20] и в задаче сжатого потока [21].

Для того, чтобы порядок сходимости был равен единице относительно величины шага сетки h, необходимо определять не обобщённое, а R_ν-обобщённое решение. В работе [22] впервые было введено данное понятие для дифференциальных задач эллиптического типа. В [23–24] изучены дифференциальные свойства решения.

Целями настоящей работы являются:

- дискретизация по времени и линеаризация исходной системы Навье-Стокса в кососимметричной форме на основании схемы Кранка-Николсона;
- определение на каждом временном слое понятия R_ν-обобщённого решения;
- построение схемы специального метода конечных элементов [25] в качестве приближённого подхода;
- сравнительный анализ и иллюстрация превосходства предложенного метода для исходной задачи в кососимметричной форме над подходом решения задачи в конвективной форме, а также над стандартным МКЭ.

Существуют и другие подходы, которые условно можно поделить на три группы. Первая из них – разрывный метод Галёркина (DG-метод) [26]. Метод позволяет использовать геометрическое сгущение сетки в окрестности рассматриваемой особенности [27–30]. Вторая группа основана на разделении регулярных и сингулярных составляющих решения [31–34], третья – на специальной корректировке матрицы жесткости МКЭ в окрестности ω [35–36].

Работа состоит из введения, трёх параграфов и заключения. В параграфе 2 дана постановка нестационарной системы в кососимметричной форме с неоднородными граничными условиями Дирихле, введены определения и обозначения, определено понятие R_ν-обобщённого решения задачи, полученной в результате дискретизации по времени и линеаризации исходной задачи. В параграфе 3 предложен приближённый метод её решения. В параграфе 4 произведён сравнительный численный анализ: во-первых, погрешностей решений системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной и конвективной формах; во-вторых, построенного весового и классического (основанного на определении обобщённого решения) МКЭ. В обоих сравнениях получено преимущество предложенного в работе подхода. В заключении сделаны выводы и приведены необходимые комментарии.

2. Постановка задачи. Понятие R_ν-обобщённого решения

Введем необходимые обозначения и определения:

- Ω есть невыпуклый многоугольник с границей $\partial\Omega$, который содержит входящий угол ω, $\pi < \omega < 2\pi$;
- R^2 есть евклидово двумерное пространство;
- точка пересечения координатных осей R^2 – $\mathcal{O}$, т.е. $\mathcal{O} = (0,0)$, вершина ω с ней совпадает;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – элемент из R^2, $\|\mathbf{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$ и $d\mathbf{x} = dx_1\, dx_2$ его норма и мера соответственно;
- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть заданы векторные поля $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ и скалярное поле c, тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \text{дивергенция поля } \mathbf{a};$$

$$\nabla c = \left(\frac{\partial c}{\partial x_1}, \frac{\partial c}{\partial x_2}\right)^T - \text{градиент поля } c;$$

$$\Delta c = \operatorname{div}\left(\nabla c\right) = \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} - \text{ оператор Лапласа поля } c;$$

$$\Delta \mathbf{a} = \left(\Delta a_1, \Delta a_2\right)^T = \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2}\right)^T - \text{ оператор Лапласа поля } \mathbf{a};$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{2} a_i\, b_i \quad \text{и} \quad \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, \frac{\partial b_i}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим течение ньютоновской жидкости, описанной с помощью системы нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме в области Ω. Пусть t – переменная времени, $t \in (0,T)$, $Q = \Omega \times (0,T)$ и $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times\ (0,T), T >\ 0$, тогда для заданных векторных полей $\mathbf{f} : Q \to R^2$, $\mathbf{u}_0 : \Omega \to R^2$. Требуется найти векторное поле скоростей $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{u} : Q \to R^2$ и скалярное поле давления $p : Q \to R$, такие, что выполнены соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \theta \Delta \mathbf{u} + \big(\mathbf{u} \cdot \nabla\big)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\big(\operatorname{div} \mathbf{u}\big)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{Q}, \tag{2.2}$$

начальное условие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{2.3}$$

и граничное условие:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.4}$$

где $\theta > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, а известное векторное поле $\mathbf{g}$ удовлетворяет условию $\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{g}\, d\mathbf{x} = 0\ \forall\, t \in (0,T)$.

Проведём дискретизацию по времени задачи (2.1)–(2.4). Введём обозначения: $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^n(\mathbf{x})$ для векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, n\Delta t)$ и $p^n = p^n(\mathbf{x})$ для скалярного поля $p(\mathbf{x}, n\Delta t)$, $n = \overline{0, N}$, $T = N \cdot \Delta t$, Δt – шаг дискретизации по переменной t. Пусть $\alpha := 1/\Delta t$, $z^{n+0.5} := 0.5(z^{n+1} + z^n)$ и $\mathbf{U}^n$ – подходящая аппроксимация к $\mathbf{u}$ в (2.1) в момент времени $t_n = n\Delta t$.

Следовательно, для $n = \overline{0, N-1}$ решаем последовательность линеаризованных задач. При известных $\mathbf{u}^n, \mathbf{U}^n, p^n, \mathbf{f}^n, \mathbf{f}^{n+1}$ и $\mathbf{g}^{n+1}$: найти $\mathbf{u}^{n+1}$ и p^{n+1} как решение системы уравнений:

$$\alpha \mathbf{u}^{n+1} - \theta \Delta \mathbf{u}^{n+0.5} + \big(\mathbf{U}^n \cdot \nabla\big)\mathbf{u}^{n+0.5} + \frac{1}{2}\big(\operatorname{div}\mathbf{U}^n\big)\mathbf{u}^{n+0.5} + \\ + \nabla p^{n+0.5} = \alpha \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^{n+0.5} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.7}$$

Для того чтобы ввести понятие R_ν-обобщённого решения задачи (2.5)–(2.7) необходимо определить весовые пространства и множества обобщённых функций.

Через Ω_δ обозначим область, образованную в пересечении круга радиуса δ, $0 < \delta \ll 1$, с центром в начале координат $\mathcal{O}$ и $\bar{\Omega}$. Определим в Ω функцию $\rho(\mathbf{x})$, которая совпадает с функцией расстояния от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathcal{O}$ в Ω_δ и продолжена по непрерывности в $\bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta$, т.е.

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, \ \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \\ \delta, \ \text{если } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Такую функцию $\rho(\mathbf{x})$ будем называть весовой функцией. Пусть

$$D^k z(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|k|} z(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \quad \partial x_2^{k_2}},$$

$k = (k_1, k_2)$, $|k| = k_1 + k_2$, k_i – неотрицательное целое число.

Через $W^l_{2,\gamma}(\Omega)$ ($\gamma \geq 0$) обозначим пространство функций $z(\mathbf{x})$ с ограниченной нормой

$$\|z\|_{W^l_{2,\gamma}(\Omega)} := \Big(\sum_{0\leq|k|\leq l} \|\rho^\gamma(\mathbf{x})\,|D^k z(\mathbf{x})|\,\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Если $l = 0$, то пространство $W^0_{2,\gamma}(\Omega)$ функций $z(\mathbf{x})$ будем обозначать через $L_{2,\gamma}(\Omega)$ с нормой

$$\|z\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} := \|z\|_{W^0_{2,\gamma}(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\gamma}(\Omega) = \{z \in W^1_{2,\gamma}(\Omega) : D^1 z|_{\partial\Omega} = 0\}$ с ограниченной нормой (2.8) при $l = 1$. Далее, обозначим через $W^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_1)$ пространство функций $z(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $\|z\|_{W^1_{\infty,\gamma}(\Omega,C_1)} = \max\{\operatorname{vrai}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |\rho^\gamma(\mathbf{x})\, z(\mathbf{x})|, \operatorname{vrai}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |\rho^{\gamma+1}(\mathbf{x})\, D^1 z(\mathbf{x})|\} \leq C_1$.

Пусть функция $z(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям:

$$0 < C_2 \leq \|z\|_{L_{2,\gamma}(\Omega\setminus\Omega_\delta)}, \tag{2.10}$$

$$\big|D^s z(\mathbf{x})\big| \leq C_3 \delta^{\gamma-\varepsilon} \rho^{\varepsilon-\gamma-s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_\delta, s = 0, 1, \tag{2.11}$$

константа C_3 не зависит от s, а малый параметр ε не зависит от s, δ, γ и $z(\mathbf{x})$.

Будем обозначать

- $W^1_{2,\gamma}(\Omega,\delta)(\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\gamma}(\Omega,\delta))$ – множество $z(\mathbf{x})$ из $W^1_{2,\gamma}(\Omega)(\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\gamma}(\Omega))$, удовлетворяющих (2.10) и (2.11), с ограниченной нормой (2.8) при $l = 1$;
- $L_{2,\gamma}(\Omega,\delta)$ множество функций $z(\mathbf{x})$ из пространства $L_{2,\gamma}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.10) и (2.11) при $s = 0$, с ограниченной нормой (2.9);
- $L^0_{2,\gamma}(\Omega,\delta) = \{z \in L_{2,\gamma}(\Omega,\delta) : \|\rho^\gamma z\|_{L_1(\Omega)} = 0\}$ с ограниченной нормой (2.9).

Будем говорить, что $g(\mathbf{x}) \in W^{1/2}_{2,\gamma}(\partial\Omega,\delta)$, если существует такая функция $G(\mathbf{x}) \in W^1_{2,\gamma}(\Omega,\delta)$, что $G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ на $\partial\Omega$ и $\|g\|_{W^{1/2}_{2,\gamma}(\partial\Omega)} := \inf\limits_{G|_{\partial\Omega}=g} \|G\|_{W^1_{2,\gamma}(\Omega)}$.

Далее жирным шрифтом выделены пространства и множества векторных полей $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Здесь $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)$, если компоненты $v_i \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ с ограниченной векторной нормой $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{2,\gamma}(\Omega)} = \Big(\|v_1\|^2_{L_{2,\gamma}(\Omega)} + \|v_2\|^2_{L_{2,\gamma}(\Omega)}\Big)^{1/2}$.

Определение 2.1. *Набор функций* $(\mathbf{u}^{n+1}_\nu, p^{n+1}_\nu)$ *из декартова произведения множеств* $\mathbf{W}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta) \times L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ *назовем* R_ν*-обобщенным решением задачи* (2.5), (2.6)*, если для каждого набора функций* $(\mathbf{v}, s)$ *из декартова произведения множеств* $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_{2,\nu}(\Omega,\delta) \times L^0_{2,\nu}(\Omega,\delta)$ *справедливы тождества:*

$$\int\limits_\Omega \Big[\alpha \mathbf{u}^{n+1}_\nu \cdot (\rho^{2\nu}\mathbf{v}) + \theta\nabla\mathbf{u}^{n+0.5}_\nu : \nabla(\rho^{2\nu}\mathbf{v}) + \Big((\mathbf{U}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n+0.5}_\nu\Big)\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h) + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{div}\mathbf{U}^n\Big)\times$$

$$\times\mathbf{u}^{n+0.5}_\nu \cdot (\rho^{2\nu}\mathbf{v}) - p^{n+0.5}_\nu \mathrm{div}(\rho^{2\nu}\mathbf{v})\Big]\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega \Big(\alpha\mathbf{u}^n_\nu + \mathbf{f}^{n+0.5}\Big)\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v})d\mathbf{x}, \tag{2.12}$$

$$\int\limits_\Omega \rho^{2\nu} s\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^{n+1}_\nu\, d\mathbf{x} = 0, \tag{2.13}$$

где $\mathbf{v}_\nu$ *удовлетворяет условию* (2.7) *на* $\partial\Omega$, $(\mathbf{f}^{n+0.5}, \mathbf{g}^{n+1}, \mathbf{U}^n) \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega)\times\mathbf{W}^{1/2}_{2,\kappa}(\partial\Omega,\delta)\times$ $\times\mathbf{W}^1_{\infty,\gamma}(\Omega, C_1)$, $\nu \geq \beta \geq 0$, $\nu \geq \kappa \geq 0$, $\gamma \leq 1$, $n = \overline{0, N-1}$.

Замечание 2.1. *Вариационная постановка задачи* (2.12)–(2.13) *является несимметричной.*

Замечание 2.2. *Существует единственное R_ν-обобщенное решение $(\mathbf{u}_\nu^{n+1}, p_\nu^{n+1})$ задачи* (2.5)–(2.7) *в постановке* (2.12)–(2.13) *(Теорема 1 в* [37]*).*

Замечание 2.3. *Чтобы найти приближённое решение задачи* (2.1)–(2.4)*, необходимо построить численный метод последовательного нахождения приближённых решений задач* (2.5)–(2.7) *в постановке* (2.12)–(2.13) *при* $n = \overline{0, N-1}$.

3. Построение приближённого метода решения задачи

Построим приближённый метод решения задачи (2.5)–(2.7), основанный на определении R_ν-обобщённого решения. С этой целью выполним квазиравномерную триангуляцию T^h области $\bar{\Omega}$, т.е. разобьём область $\bar{\Omega}$ на треугольники K_i, стороны которых имеют длины порядка h [38]. Величину h назовём параметром триангуляции T^h, а треугольники K_i – макроэлементами. Каждый такой макроэлемент K_i с помощью точки пересечения медиан представим как объединение трёх непересекающихся частей L_i^j, $j = 1, 2, 3$ – треугольников. Построенные треугольники будем называть конечными элементами T^h.

На триангуляции T^h определим пару конечно-элементных пространств Скотта-Вогелиуса (С-В) второго порядка [39]. Кратко опишем основные положения (более подробно они приведены в работах [40–41]). Через R_l и S_k обозначим вершины и середины сторон конечных элементов L_i^j соответственно, которые назовём узлами.

Определим два множества X_h и Y_h:

- $X_h = X_h^\Omega \cup X_h^{\partial\Omega} = \{R_l \cup S_k\}$, где подмножества $X_h^\Omega(X_h^{\partial\Omega})$ – совокупность узлов, принадлежащих $\Omega(\partial\Omega)$;
- Y_h – совокупность узлов, таких, что N_m совпадает с узлом R_l на треугольнике.

Здесь N_m и N_s, совпадающие с одним R_l, но относящиеся к соседним элементам, являются разными узлами.

Замечание 3.1. *X_h и Y_h – совокупности узлов для компонент векторного поля скоростей и скалярного поля давления соответственно.*

На триангуляции T^h определим пару пространств С-В [39]:

1. $S_h = \{v^h \in C(\bar{\Omega}) : v^h|_L \in P_2(L) \forall\, L \in T^h\}$ – для компонент векторного поля скоростей, $\varphi_k(\mathbf{x})$ есть базисные функции S_h;
2. $G_h = \{q^h \in L_2(\Omega) : q^h|_L \in P_1(L) \forall\, L \in T^h\}$ – для скалярного поля давления, $\psi_l(\mathbf{x})$ есть базисные функции G_h.

Замечание 3.2. *Функции q^h терпят разрыв в узлах, а значит и на сторонах конечных элементов L.*

Отметим, что пространство X_h для компонент векторного поля скоростей есть соответствующее пространство пары конечно-элементных пространств Тейлора-Худа (Т-Х) второго порядка [42], в то время как пространство G_h значительно больше по размерности соответствующего пространства пары Т-Х [39].

Благодаря определённой конечно-элементной паре $\mathbf{S}_h \times G_h(\mathbf{S}_h = S_h \times S_h)$ построим базисные функции специального вида [40].

Для компонент векторного поля скоростей:

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{-\nu^*}(\mathbf{x})\,\varphi_k(\mathbf{x}), \quad \varphi_k(\mathbf{x}) \in S_h, \quad \varphi_k(M_l) = \delta_{kl},$$

где θ_k – базисная функция, соответствующая узлу $M_k \in X_h$.

Для скалярного поля давления:

$$\chi_s(\mathbf{x}) = \rho^{-\mu^*}(\mathbf{x})\,\psi_s(\mathbf{x}), \quad \psi_s(\mathbf{x}) \in G_h, \quad \psi_s(N_m) = \delta_{sm},$$

где χ_s – базисная функция, соответствующая узлу $N_s \in Y_h$.

Показатели степеней весовой функции ν^* и μ^* есть вещественные числа, которые являются свободными параметрами подхода, δ_{ij} – символ Кронекера.

Определим пространство W_h для компонент векторного поля скоростей. Если $\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x}) = (u_{1,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}), u_{2,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}))$, то

$$u_{1,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim W_h} u_{1,k}^{n+1} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \quad u_{2,\nu}^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\dim W_h} u_{2,k}^{n+1} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

$$u_{1,k}^{n+1} = \rho^{\nu^*}(M_k) \cdot \tilde{u}_{1,k}^{n+1}, \quad u_{2,k}^{n+1} = \rho^{\nu^*}(M_k) \cdot \tilde{u}_{2,k}^{n+1}. \tag{3.2}$$

Определим пространство Q_h для скалярного поля давления $p_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x})$:

$$p_\nu^{n+1,h}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\dim Q_h} p_s^{n+1} \cdot \chi_s(\mathbf{x}), \tag{3.3}$$

$$p_s^{n+1} = \rho^{\mu^*}(N_s) \cdot \tilde{p}_s^{n+1}. \tag{3.4}$$

Коэффициенты $u_{1,k}^{n+1}, u_{2,k}^{n+1}$ в (3.1) и p_s^{n+1} в (3.3) являются значениями решения системы (3.5)–(3.6) (см. ниже), а коэффициенты $\tilde{u}_{1,k}^{n+1}, \tilde{u}_{2,k}^{n+1}$ в (3.2) и $\tilde{p}_s^{n+1}$ в (3.4) есть приближённые значения решения (компонент векторного поля скоростей и скалярного поля давления) задачи (2.5)–(2.7) в узлах $M_k \in X_h^\Omega$ и $N_s \in Y_h$ соответственно.

Определим подпространство $\overset{\circ}{W}_h$ в пространстве W^h:

$$\overset{\circ}{W}_h = \{v^h \in W_h : v^h(M_k) = 0, \text{ если } M_k \in X_h^{\partial\Omega}\}$$

и введём обозначения: $\mathbf{W}_h = W_h \times W_h$, $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_h = \overset{\circ}{W}_h \times \overset{\circ}{W}_h$, причём $\mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega,\delta)$, $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_h \subset \overset{\circ}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega,\delta)$ и $Q_h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega,\delta)$. Пусть $W = \dim\ \overset{\circ}{W}_h, Q = \dim\ Q_h$.

Построенный приближённый подход будем называть весовым МКЭ. Определим на его основе приближённое R_ν-обобщённое решение задачи (2.5)–(2.7).

Определение 3.1. *Пару* $(\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}, p_\nu^{n+1,h}) \in \mathbf{W}_h \times Q_h$ *назовем приближённым по весовому методу конечных элементов* R_ν*-обобщённым решением задачи* (2.5)–(2.6), $\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}$ *удовлетворяет условию* (2.7) *в узлах* $X_h^{\partial\Omega}$, *если для всех пар* $(\mathbf{v}^h, s^h) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_h \times Q_h$ *справедливы интегральные тождества:*

$$\int_\Omega \Big[\alpha \mathbf{u}_\nu^{n+1,h} \cdot (\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h) + \theta \nabla \mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h} : \nabla(\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h) + \Big(\big(\mathbf{U}^n \cdot \nabla\big)\mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h}\Big) \cdot (\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\operatorname{div}\mathbf{U}^n\Big)\mathbf{u}_\nu^{n+0.5,h}\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h)-p_\nu^{n+0.5,h}\operatorname{div}(\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h)\Big]\,d\mathbf{x}=$$

$$=\int\limits_\Omega\Big(\alpha\mathbf{u}_\nu^{n,h}+\mathbf{f}^{n+0.5}\Big)\cdot(\rho^{2\nu}\mathbf{v}^h)\,d\mathbf{x},\quad(3.5)$$

$$\int\limits_\Omega\rho^{2\nu}s^h\operatorname{div}\mathbf{u}_\nu^{n+1,h}\,d\mathbf{x}=0,\quad n=\overline{0,N-1}.\quad(3.6)$$

Систему (3.5)–(3.6) представим в следующем виде:

$$A_n\mathbf{w}^{n+1}+B\mathbf{q}^{n+1}=\mathbf{F}_n,\quad(3.7)$$

$$C^T\mathbf{w}^{n+1}=\mathbf{0},\quad(3.8)$$

$\mathbf{w}^{n+1}=(u_{1,1}^{n+1},\dots,u_{1,W}^{n+1},\,u_{2,1}^{n+1},\dots,u_{2,W}^{n+1})^T$, $\mathbf{q}^{n+1}=(p_1^{n+1},\dots,p_Q^{n+1})^T$ и $\mathbf{F}_n$ – вектор, составленный из величин правой части (3.5) при $v_i^h:=\theta_k$, $k=\overline{1,W}$, $i=1,2$.

Для отыскания решения задачи (3.5)–(3.6), как решения системы линейных алгебраических уравнений (3.7)–(3.8), применим сходящуюся итерационную процедуру с переобуславливанием её матрицы [43]:

1. Выберем какие-либо векторы $\mathbf{w}_0^{n+1},\mathbf{q}_0^{n+1}$ в качестве начального приближения для решения (3.7)–(3.8).

2. Определим последовательность итераций $k=0,1,2,\dots$, пока не будет выполнено условие окончания итерационной процедуры:
   a) $\mathbf{w}_{k+1}^{n+1}:=\mathbf{w}_k^{n+1}+\hat{A}_n^{-1}\big(\mathbf{F}_n-A_n\mathbf{w}_k^{n+1}-B\mathbf{q}_k^{n+1}\big)$,
   b) $\mathbf{q}_{k+1}^{n+1}=\mathbf{q}_k^{n+1}+\hat{S}_n^{-1}C^T\mathbf{w}_{k+1}^{n+1}$,
   c) если момент остановки не выполнен, то $k:=k+1$ и переходим к пункту 2a.

Здесь $\hat{A}_n(\hat{S}_n)$ есть переобуславливающая матрица для $A_n(C^TA_n^{-1}B)$.

Для построения переобуславливателя $\hat{A}_n$ в пункте 2a [44] используем неполное LU разложение матрицы A_n– $ILU(0)$ [9], т.е. $\hat{A}_n=\hat{L}_n\cdot\hat{U}_n$, где $\hat{L}_n$ и $\hat{U}_n$ есть нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно. В пункте 2a решаем задачу $A_n\mathbf{s}=\mathbf{z}$ с левым переобуславливанием $\hat{A}_n$, используя обобщённый метод минимальных невязок – GMRES(m)-метод [9]. Пусть $\mathbf{r}_*=\hat{A}_n^{-1}\big(\mathbf{z}-A_n\mathbf{s}\big)$, тогда процедура Арнольди порождает ортогональный базис в подпространстве Крылова размерности m с минимальной невязкой: $\operatorname{Span}\{\mathbf{r}_*,(\hat{A}_n^{-1}A_n)^1\mathbf{r}_*,\dots,(\hat{A}_n^{-1}A_n)^{m-1}\mathbf{r}_*\}$, $m=5$.

Теперь построим $\hat{S}_n$. Для этой цели определим матрицу $\tilde{S}$ следующим образом: пусть M_p^{ν,μ^*} есть так называемая весовая матрица масс пространства давления [46], так, что на каждом $L\in T^h$: $\big(M_p^{\nu,\mu^*}\big)_{i,j}=\int\limits_L\rho^{2(\nu-\mu^*)}\psi_i(\mathbf{x})\cdot\psi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, $i,j=\overline{1,Q}$. Определим диагональную матрицу $\bar{S}$: $\bar{S}=\bar{M}_p^{\nu,\mu^*}$, $\big(\bar{M}_p^{\nu,\mu^*}\big)_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{Q}\big(M_p^{\nu,\mu^*}\big)_{ik}$, $i=\overline{1,Q}$, которая является эффективным переобуславливателем для $\tilde{S}=M_p^{\nu,\mu^*}$. Таким образом, для того, чтобы найти вектор $\boldsymbol{\kappa}:=\hat{S}_n^{-1}\boldsymbol{\omega}$ в пункте 2b необходимо организовать следующую внутреннюю итерационную процедуру:

(1) $\mathbf{d}_0=\mathbf{0}$;
(2) $\mathbf{d}_{l+1}=\mathbf{d}_l+\bar{S}^{-1}\big(\boldsymbol{\omega}-\tilde{S}\mathbf{d}_l\big)(l=0,\dots,L_*-1)$;
(3) $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{d}_{L_*}$,

используя перезапускающийся обобщённый метод минимальных невязок:

$$\mathrm{Span}\{\bar{\mathbf{r}}, \big(\bar{S}^{-1}\tilde{S}\big)^1\bar{\mathbf{r}}, \big(\bar{S}^{-1}\tilde{S}\big)^2\bar{\mathbf{r}}\}, \text{ где } \bar{\mathbf{r}} = \bar{S}^{-1}\big(\boldsymbol{\omega} - \tilde{S}\mathbf{d}_l\big).$$

4. Результаты численных экспериментов. Сравнительный анализ

Представим результаты численных экспериментов по нахождению приближенного решения системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной форме (2.1)–(2.4) как последовательности отыскания приближённых решений задачи (2.5)–(2.7) с помощью весового метода конечных элементов в вариационной постановке (3.5)–(3.6).

Проведём сравнительный анализ как с результатами приближённого решения системы уравнений Навье-Стокса в конвективной форме [41], т.е. когда отсутствует четвёртое слагаемое в левой части уравнения (2.1), так и с результатами численного решения задачи (2.1)–(2.4), когда в вариационной постановке (3.5)–(3.6) имеем $\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta \equiv 1$ – классический МКЭ (конечно-элементная пара пространств Скотта–Вогелиуса $\mathbf{S}_h \times G_h$ 2-го порядка). Покажем преимущества предложенного в настоящей статье подхода в обоих случаях, представленных на рис. 4.1–4.4 и в таблицах 4.1–4.2.

Таблица 4.1. Относительные погрешности $E(\mathbf{u}_G)$ классического МКЭ ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta = 1$) в различные моменты времени

Table 4.1. Relative errors $E(\mathbf{u}_G)$ of the classical FEM ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta = 1$) at various time points

$\mathrm{t}_n =$	Δ t	$0.5T$	T
$h = 0.025$	$4.72 \cdot 10^{-2}$	$4.80 \cdot 10^{-2}$	$4.79 \cdot 10^{-2}$
$h = 0.0125$	$3.27 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$
$\mathrm{Val}_1(\mathbf{u}_G)$	1.444	1.451	1.454
$h = 0.00625$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$2.27 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$
$\mathrm{Val}_2(\mathbf{u}_G)$	1.453	1.456	1.458

Таблица 4.2. Относительные погрешности $E(\mathbf{u}_\nu)$ и $E(\mathbf{v}_\nu)$ весового МКЭ ($\nu = 1.8$, $\nu^* = \mu^* = 0.275$, $\delta = 0.03$) для кососимметричной и конвективной (см. таблицу 1 в [41]) форм соответственно в различные моменты времени

Table 4.2. Relative errors of $E(\mathbf{u}_\nu)$ and $E(\mathbf{v}_\nu)$ of the weighted FEM ($\nu = 1.8$, $\nu^* = \mu^* = 0.275$, $\delta = 0.03$) for skew-symmetric and convective (see Table 1 in [41]) forms respectively, at different points in time

	кососимметричная форма			**конвективная форма**		
$t_n =$	Δt	$0.5T$	T	Δt	$0.5T$	T
$h = 0.025$	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-2}$	$3.29 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$
$h = 0.0125$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$
$\mathrm{Val}_1(\cdot)$	1.994	1.993	2.004	1.990	1.991	2.000
$h = 0.00625$	$7.70 \cdot 10^{-3}$	$7.79 \cdot 10^{-3}$	$7.69 \cdot 10^{-3}$	$8.27 \cdot 10^{-3}$	$8.40 \cdot 10^{-3}$	$8.25 \cdot 10^{-3}$
$\mathrm{Val}_2(\cdot)$	1.997	1.998	2.006	1.999	1.988	2.014

В качестве многоугольной области Ω с входящим углом ω на границе рассмотрим L-образную область следующего вида:

$$\Omega = (-1,1)\times(-1,1)\setminus\{(x_1,x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 0\}.$$

В качестве решения $(\mathbf{u}, p)$ в полярных координатах (r,φ) возьмём функции [41]:

$$u_j(r,\varphi,t) = e^{-t} r^{\lambda} \varpi_j(\varphi), \quad p(r,\varphi,t) = e^{-t} r^{\lambda-1} \varpi_3(\varphi), \quad j = 1,2.$$

Показатель λ в степени решения является наименьшим положительным корнем уравнения $\sin\left(\frac{3\pi\lambda}{2}\right) = \lambda$, который приблизительно равен 0.54448, и

$$\begin{pmatrix} \varpi_1(\varphi) \\ \varpi_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)\Theta(\varphi) & \Theta'_{\varphi}(\varphi) \\ \Theta'_{\varphi}(\varphi) & -(\lambda+1)\Theta(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\varpi_3(\varphi) = \frac{1}{\lambda-1}\Big((\lambda+1)^2\,\Theta'_{\varphi}(\varphi) + \Theta'''_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi)\Big),$$

$$\Theta(\varphi) = \cos\left(\frac{3\pi\lambda}{2}\right)\left(\frac{\sin((\lambda+1)\varphi)}{\lambda+1} - \frac{\sin((\lambda-1)\varphi)}{\lambda-1}\right) + \cos((\lambda-1)\varphi) - \cos((\lambda+1)\varphi).$$

Вследствие того, что λ меньше единицы, $u_i \notin W_2^2(\Omega)$ и $p \notin W_2^1(\Omega)$. В численных экспериментах полагаем: $\Delta t = 0.01$, $T = 0.5$, $\theta = 1$, $\lambda = 0.5445$, а шаг разбиения по каждому из пространственных измерений имеет порядок $h_i = 2^{1-i}s$, $s = 0.025$. Следовательно, число отрезков разбиения по каждому из декартовых координатных направлений $N_i = 80\cdot 2^{i-1}$, $i = 1,2,3$.

Замечание 4.1. *Обозначим через $\mathbf{u}_G$, $\mathbf{u}_\nu$ и $\mathbf{v}_\nu$ в определённый момент времени: обобщённое ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$, $\delta \equiv 0$), R_ν-обобщённое в кососимметричной и конвективной формах соответственно решения. Аналогично обозначим их приближённые решения: $\mathbf{u}_G^{h_i}$ и $\mathbf{u}_\nu^{h_i}$, $\mathbf{v}_\nu^{h_i}$ в определённый момент времени по классическому и весовому МКЭ соответственно.*

Замечание 4.2. *На самом деле точные решения $\mathbf{u}_\nu$ и $\mathbf{v}_\nu$ системы уравнений Навье-Стокса в кососимметричной и конвективной формах соответственно в каждый момент времени совпадают, а их приближённые решения $\mathbf{u}_\nu^h$ и $\mathbf{v}_\nu^h$ являются разными.*

Полагаем, что в (3.5)–(3.6):

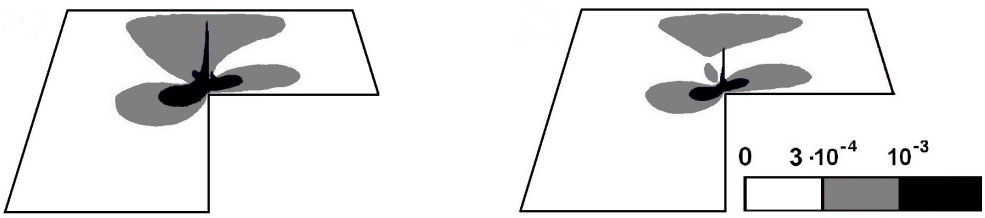
$$\mathbf{U}^n := \frac{3}{2}\mathbf{u}_G^{n,h} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_G^{n-1,h} \text{ и } \mathbf{U}^n := \frac{3}{2}\mathbf{u}_\nu^{n,h} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_\nu^{n-1,h}, \quad \mathbf{U}^n := \frac{3}{2}\mathbf{v}_\nu^{n,h} - \frac{1}{2}\mathbf{v}_\nu^{n-1,h}$$

для классического и весового МКЭ соответственно, $n = \overline{0, N-1}$. Причём $\mathbf{u}_G^{-1,h} := \mathbf{u}_G^{0,h}$, $\mathbf{u}_\nu^{-1,h} := \mathbf{u}_\nu^{0,h}$ и $\mathbf{v}_\nu^{-1,h} := \mathbf{v}_\nu^{0,h}$.

Введём обозначения необходимых нам относительных погрешностей:

$$E_i(\mathbf{u}_G) = \frac{\|\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_G^{h_i}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{u}_G\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega_{h_i})}}, \quad E_i(\mathbf{u}_\nu) = \frac{\|\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu^{h_i}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{u}_\nu\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}},$$

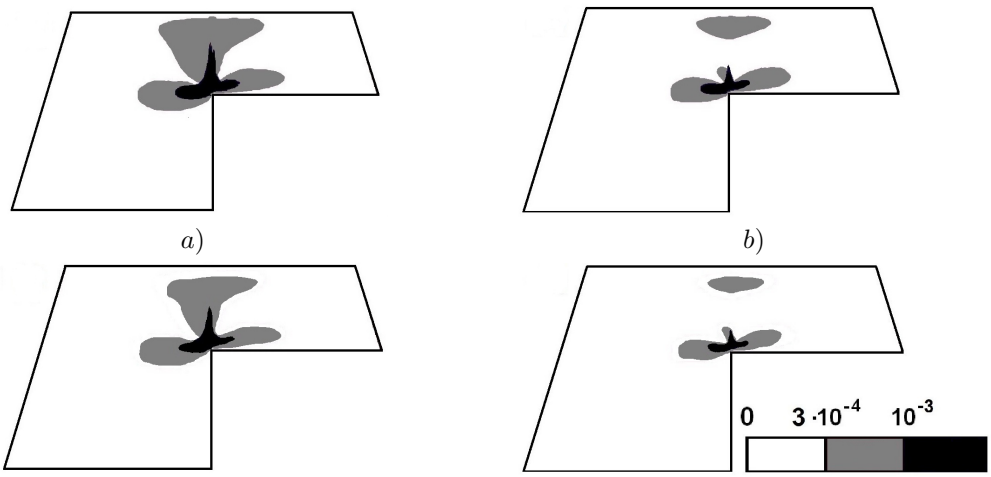
$$E_i(\mathbf{v}_\nu) = \frac{\|\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_\nu^{h_i}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}{\|\mathbf{v}_\nu\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_{h_i})}}, \quad i = 1,2, \quad Val_j(\cdot) = \frac{E_j(\cdot)}{E_{j+1}(\cdot)}, \quad j = 1,2$$



a) *b)*

Рис. 4.1. Погрешности классического МКЭ при $t = \Delta t$: a) $N = 80$, b) $N = 160$

Fig. 4.1. Errors of classical FEM at $t = \Delta t$: a) $N = 80$, b) $N = 160$



a) *b)*

c) *d)*

Рис. 4.2. Погрешности весового МКЭ ($\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275$, $\delta = 0.03$) при $t = \Delta t$: a) $N = 80$, b) $N = 160$ – конвективная форма задачи; c) $N = 80$, d) $N = 160$ – кососимметричная форма задачи

Fig. 4.2. Errors of weighted FEM ($\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275$, $\delta = 0.03$) at $t = \Delta t$: a) $N = 80$, b) $N = 160$ – convective form of the problem; c) $N = 80$, d) $N = 160$ – skew-symmetric form of the problem

в рассматриваемый момент времени. В таблицах 4.1–4.2 и на рис. 4.1–4.5 приведены результаты численных испытаний. Экспериментально установлено, что оптимальные значения, с точки зрения наименьшей погрешности, достигаются в случае когда μ^* и ν^* равны между собой и принимают неотрицательное значение. На рис. 4.5 отображены области подходящих параметров весового МКЭ для конвективной (см. [41]) и кососимметричной форм уравнений Навье-Стокса. Исследование проведено, как и в [41], для следующих диапазонов свободных параметров метода: $\nu \in (0; 2], \mu^* = \nu^* \in [0, 1 - \lambda]$. Шаг изменения по ν^* равен 0.005, а по переменной ν – 0.025. Точка с координатами (ν, ν^*) попадает в область подходящих параметров численного решения задачи (2.1)–(2.4), если погрешность отличается от оптимального значения не более чем на 5% в

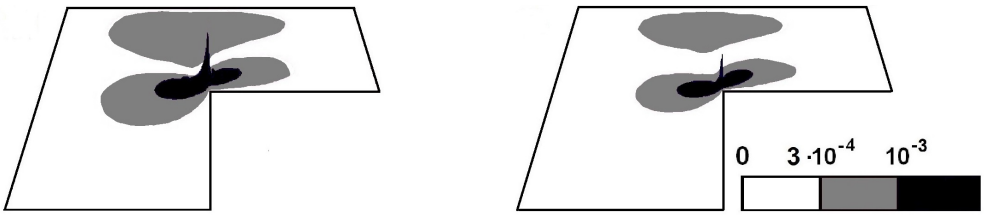


Рис. 4.3. Погрешности классического МКЭ при $t = T$: a) $N = 80$, b) $N = 160$

Fig. 4.3. Errors of classical FEM at $t = T$: a) $N = 80$, b) $N = 160$

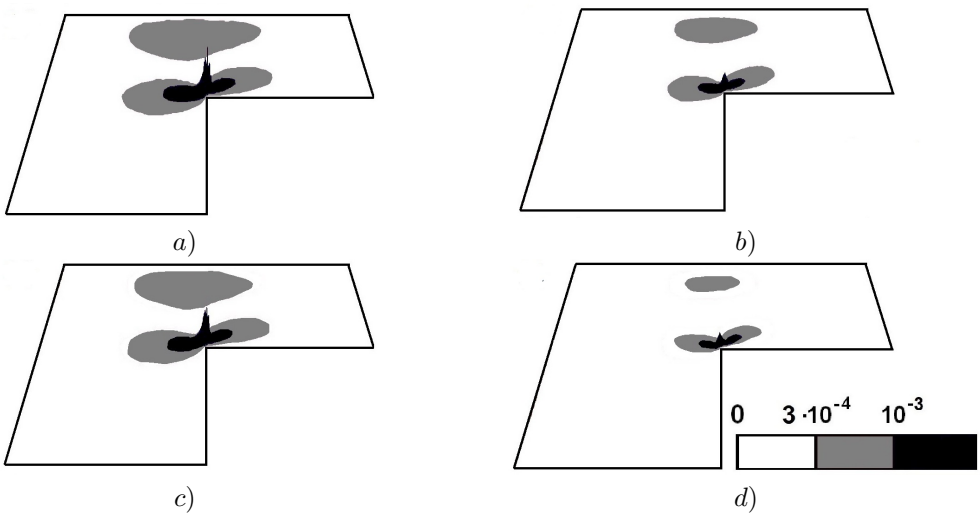


Рис. 4.4. Погрешности весового МКЭ ($\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$) при $t = T$: a) $N = 80$, b) $N = 160$ – конвективная форма задачи; c) $N = 80$, d) $N = 160$ – кососимметричная форма задачи

Fig. 4.4. Errors of weighted FEM ($\nu = 1.8, \nu^* = \mu^* = 0.275, \delta = 0.03$) at $t = T$: a) $N = 80$, b) $N = 160$ – convective form of the problem; c) $N = 80$, d) $N = 160$ – skew-symmetric form of the problem

каждый момент t_n для всех h_i, $i = 1, 2, 3$. Диапазон изменения $\delta \in [0.0225, 0.0375]$.

Замечание 4.3. *В таблице 4.2 величины $E_i(\mathbf{v}_\nu)$ для приближённого решения в конвективной форме при $\nu^* = \mu^* = 0.275$ являются оптимальными, в то время как для кососимметричной формы это не так. Даже в этом случае величины погрешности $E_i(\mathbf{u}_\nu)$ приближённого решения системы* (2.1)–(2.4) *меньше, а оптимальные их значения достигаются при $\nu^* = \mu^*$, близких к величине* 0.325.

Замечание 4.4. *Величины $Val_j(\mathbf{u}_G)$ и $Val_j(\mathbf{u}_\nu)$ ($Val_j(\mathbf{v}_\nu)$) показывают, что порядки сходимости приближённого решения к точному решению задачи равны $\mathcal{O}(h^{0.54})$ и $\mathcal{O}(h^1)$ для классического и весового МКЭ соответственно.*

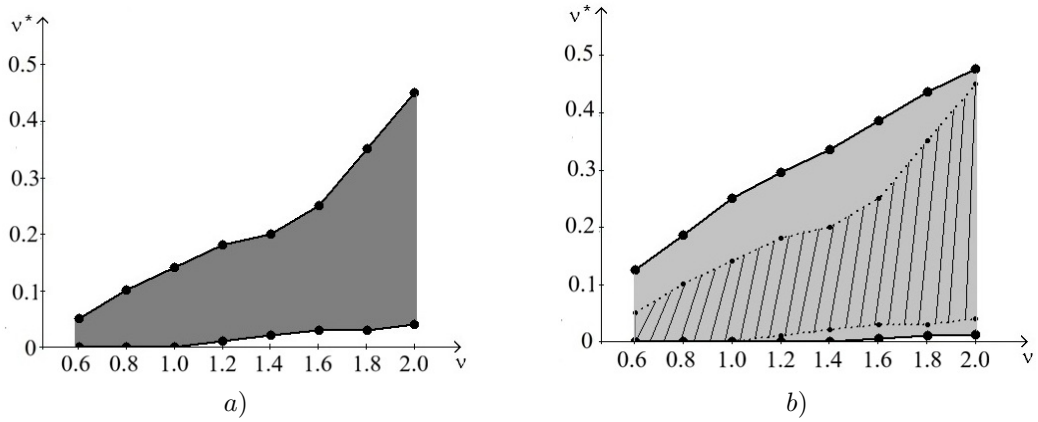


Рис. 4.5. Области подходящих параметров весового МКЭ в переменных (ν, ν^*): a) конвективная (рис. 3 в [41]), b) кососимметричная форма задачи

Fig. 4.5. Regions of suitable parameters of the weighted FEM in variables (ν, ν^*): a) convective (Fig. 3 in [41]), b) skew-symmetric form of the problem

На рис. 4.1 и 4.3 показана абсолютная погрешность классического МКЭ в моменты времени $t : \Delta t$ и T, а на рис. 4.2 и 4.4 – весового МКЭ для конвективной [41] и кососимметричной форм уравнений Навье-Стокса в разные моменты времени.

5. Заключение

Рассмотрена система уравнений (2.1)–(2.4) в кососимметричной форме. Построен весовой МКЭ для приближённого решения задачи. Экспериментально определены области выбора подходящих параметров подхода в переменных (ν, ν^*). На основании анализа численных экспериментов сделаны выводы:

- порядок точности весового МКЭ равен $\mathcal{O}(h)$, что гораздо выше чем у классического МКЭ $\mathcal{O}(h^{0.54})$;
- область выбора подходящих параметров при использовании кососимметричной формы системы (2.1)–(2.4) существенно шире, чем при использовании конвективной формы системы;
- малому изменению свободных параметров (ν, ν^*) соответствует малое изменение погрешности.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00). Результаты получены с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Дальневосточный вычислительный ресурс» ИАПУ ДВО РАН (https://cc.dvo.ru).

Список литературы

1. Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1986. 374 p.
2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса: пер. с англ. М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Turek S. Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects.In: Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering, vol. 6, Berlin-Heidelberg: Springer, 1999. 358 p. DOI: 10.1007/978-3-642-58393-3
4. Lukaszewicz G., Kalita P. Navier–Stokes equations. An introduction with applications. In: Advanced in Mechanical and Mathematics. Berlin: Springer, 2016. 390 p. DOI:10.1007/978-3-319-27760-8
5. Salvi R. The Navier–Stokes equations: Theory and numerical methods. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2018. 308 p.
6. Hieber M., Robinson J. C., Shibata Y. Mathematical analysis of the Navier–Stokes equations. In: Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 2020. 464 p. DOI: 10.1007/978-3-030-36226-3
7. Charnyi S., Heister T., Olshanskii M. A., Rebholz L. G. On conservation laws of Navier–Stokes Galerkin discretizations. *Journal of Computational Physics.* 2017. Vol. 337, no. 2. P. 289–308. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.02.039
8. Li X., Rui H. A modified convective formulation in Navier–Stokes simulations. *Journal of Scientific Computing.* 2023. Vol. 96. 69. DOI: 10.1007/s10915-023-02286-3
9. Palha A., Gerritsma M. A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (MEEVC) mimetic spectral element discretization for the 2D incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics.* 2017. Vol. 328. P. 200–220. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.10.009
10. Coppola G., Capuano F., De Luca L. Discrete energy-conservation properties in the numerical simulations of the Navier–Stokes equations *Applied Mechanics Reviews.* 2019. Vol. 71, no. 1. 010803. DOI: 10.1115/1.4042820
11. Ingimarson S. An energy, momentum, and angular momentum conserving scheme for a regularization model of incompressible flow. *Journal of Numerical Mathematics.* 2022. Vol. 30, no. 1. DOI:10.1515/jnma-2020-0080
12. Zhang Y., Dong H., Wang K. Mass, momentum and energy identical-relation-preserving scheme for the Navier–Stokes equations with variable density. *Computers & Mathematics with Applications.* 2023. Vol. 137. P. 73–92. DOI:10.1016/j.camwa.2023.02.004
13. Van Gastelen T., Edeling W., Sanderse B. Energy-conserving neural network for turbulence closure modeling. *Journal of Computational Physics.* 2024. Vol. 508. 113003. DOI:10.1016/j.jcp.2024.113003

14. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2023. Vol. 429. 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218

15. Nordström J. A skew-symmetric energy stable almost dissipation free formulation of the compressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics.* 2024. Vol. 512. 113145. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113145

16. Petrova L. I. Role of skew-symmetric differential forms in mathematical physics and field theory. *Trends Journal of Sciences Research.* 2022. Vol. 1, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.31586/ujpr.2022.345

17. Petrova L. I. Hidden unique possibilities of mathematical physics equations (The formalism of skew-symmetric forms). *Comput. Math. Model.* 2023. Vol. 33. P. 121–135.

18. Moffatt H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *Journal of Fluid Mechanics.* 1964. Vol. 18, no. 1. P.1–18. DOI: 10.1017/S0022112064000015

19. Dauge M. Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 1989. Vol. 20. P. 74–97.

20. Almaly B., Durst F., Pereira J., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics.* 1983. Vol. 127. P. 473–496. DOI: 10.1017/S0022112083002839

21. Boger D. V., Rama Murthy A. V. Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction. *Rheologica Acta.* 1972. Vol. 11. P. 61–69. DOI: 10.1007/BF01992871

22. Рукавишников В. А. О дифференциальных свойствах R_ν-обобщённого решения задачи Дирихле // *Доклады АН СССР.* 1990. Т. 309, № 6. С. 1318–1320.

23. Рукавишников В. А. О существовании и единственности R_ν-обобщённого решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // *Доклады академии наук.* 2014. Т. 458, № 3. С. 261–263. DOI: 10.7868/S0869565214270061

24. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. *Mathematics.* 2022. Vol. 10, no. 6. 889. DOI: 10.3390/math10060889

25. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. *Comput. Math. Appl.* 2023. Vol. 151. P. 408–417.

26. Cockburn B., Kanschat G., Schötzau D., Schwab C. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. Vol. 40, no. 1. P. 319–343.

27. Hou Y., Han Y., Wen J. An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations. *Computers & Mathematics with Applications.* 2021. Vol. 93, no. 1. P. 58–65. DOI: 10.1016/j.camwa.2021.03.031

28. Kim H. H., Chung E., Lee C. S. A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.* 2013. Vol.51, no. 6. P. 3327–3350.

29. Schötzau D., Wihler T. Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons. *Numer. Math.* 2003. Vol. 96. P. 339–361.

30. Zhang F., Cheng J., Liu T. A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics.* 2020. Vol. 418. 109580.

31. Jang D. K., Pyo J. H. Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *J. Korean Soc. Ind. App. Math.* 2019. Vol. 23, no. 2. P. 115–138.

32. Pyo J. H., Jang D. K. An optimal finite element method with Uzawa iteration for Stokes equations including corner singularity. *Journal of Mathematics.* 2021. Vol. 2021. 5592982. DOI: 10.1155/2021/5592982

33. Choi H. J., Kweon J. R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 292, no. 3. P. 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006

34. Anjam Y. N. Singularities and regularity of stationary Stokes and Navier–Stokes equations on polygonal domains and their treatments. *AIMS Mathematics.* 2020. Vol. 5, no. 1. P. 440–466. DOI: 10.3934/math.2020030.

35. John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U. Energy-corrected finite element methods for the Stokes system // IMA J. Numer. Anal. 2017. Vol. 37. P. 687–729.

36. John L., Swierczynski P., Wohlmuth B. Energy corrected FEM for optimal Dirichlet boundary control problems. *Numer. Math.* 2018. Vol. 139. P. 913–938. DOI: 10.1007/s00211-018-0952-8

37. Рукавишников А. В. О Существовании и единственности R_ν-обобщённого решения задачи Озеена в кососимметричной форме в весовых множествах // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.* 2025. Т. 53. С. 102–117. DOI: 10.26516/1997-7670.2025.53.102

38. Ciarlet P. The finite element methods for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland, 1978. 529 p.

39. Scott L. R., Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials. *Math. Model. Numer. Anal.* 1985. Vol. 19. P. 111–143.

40. Рукавишников В. А., Рукавишников А. В. Метод численного решения одной стационарной задачи гидродинамики в конвективной форме в L-образной области // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2020. Т. 12, № 6. С. 1291–1306. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1291-1306

41. Рукавишников А. В. Определение тела подходящих параметров численного метода решения уравнений Навье-Стокса в невыпуклой области // *Информатика и системы управления.* 2025. № 1(83). С. 15–25. DOI: 10.22250/18142400_2025_83_1_15

42. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer, 2013. 685 p.

43. Bramble J. H., Pasciak J. E., Vassilev A. T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 1997. Vol. 34. P. 1072–1092.

44. Рукавишников А. В. Стабилизационный численный метод решения задачи типа Озеена с особенностью // *Вычислительные технологии.* 2018. Т. 23, № 2. С. 102–116. DOI: 10.22250/18142400_2025_83_1_15

45. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. 547 p.

46. Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *J. Comput. Appl. Math.* 2018. Vol. 341. P. 144–156.

Поступила 29.01.2026; доработана после рецензирования 07.05.2026; принята к публикации 25.05.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. Girault, P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986, 374 p.

2. R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979, 519 p.

3. S. Turek, *Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999 DOI: 10.1007/978-3-642-58393-3, 358 p.

4. G. Lukaszewicz, P. Kalita, *Navier–Stokes equations. An introduction with applications. In: Advanced in Mechanical and Mathematics*, Springer, Berlin, 2016 DOI: 10.1007/978-3-319-27760-8, 390 p.

5. R. Salvi, *The Navier–Stokes equations: Theory and numerical methods. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 2018, 308 p.

6. M. Hieber, J. C. Robinson, Y. Shibata, *Mathematical analysis of the Navier–Stokes equations. In: Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 2020 DOI: 10.1007/978-3-030-36226-3, 464 p.

7. S. Charnyi, T. Heister, M. A. Olshanskii, L. G. Rebholz, "On conservation laws of Navier–Stokes Galerkin discretizations", *J. Comput. Phys.*, **337**:2 (2017), 289-308. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.02.039

8. X. Li, H. Rui, "A modified convective formulation in Navier–Stokes simulations", *J. Sci. Comput.*, **96** (2023), 69. DOI: 10.1007/s10915-023-02286-3

9. A. Palha, M. Gerritsma, "A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (MEEVC) mimetic spectral element discretization for the 2D incompressible Navier–Stokes equations", *J. Comput. Phys.*, **328** (2017), 200–220. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.10.009

10. G. Coppola, F. Capuano, L. De Luca, "Discrete energy-conservation properties in the numerical simulations of the Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **71** (2019), 010803. DOI: 10.1115/1.4042820

11. S. Ingimarson, "An energy, momentum, and angular momentum conserving scheme for a regularization model of incompressible flow", *Journal of Numerical Mathematics*, **30**:1 (2022). DOI: 10.1515/jnma-2020-0080

12. Y. Zhang, H. Dong, K. Wang, "Mass, momentum and energy identical-relation-preserving scheme for the Navier–Stokes equations with variable density", *Computers & Mathematics with Applications Appl.*, **137** (2023), 73–92. DOI: 10.1016/j.camwa.2023.02.004

13. T. Van Gastelen, W. Edeling, B. Sanderse, "Energy-conserving neural network for turbulence closure modeling", *Journal of Computational Physics*, **508** (2024), 113003. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113003

14. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, "Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **429** (2023), 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218

15. J. Nordström, "A skew-symmetric energy stable almost dissipation free formulation of the compressible Navier–Stokes equations", *Journal of Computational Physics*, **512** (2024), 113145. DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113145

16. L. I. Petrova, "Role of skew-symmetric differential forms in mathematical physics and field theory", *Trends Journal of Sciences Research*, **1**:2 (2022), 32–47. DOI: 10.31586/ujpr.2022.345

17. L. I. Petrova, "Hidden unique possibilities of mathematical physics equations (The formalism of skew-symmetric forms)", *Comput. Math. Model.*, **33** (2023), 121–135.

18. H. K. Moffatt, "Viscous and resistive eddies near a sharp corner", *Journal of Fluid Mechanics*, **18**:1 (1964), 1–18. DOI: 10.1017/S0022112064000015

19. M. Dauge, "Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **20** (1989), 74–97.

20. B. Almaly, F. Durst, J. Pereira, B. Schoenung, "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow", *Journal of Fluid Mechanics*, **127** (1983), 473–496. DOI: 10.1017/S0022112083002839

21. D. V. Boger, A. V. Rama Murthy, "Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction", *Rheologica Acta*, **11** (1972), 61–69. DOI: 10.1007/BF01992871

22. V. A. Rukavishnikov, "Differential properties of an R_ν-generalized solution of the Dirichlet problem", *Soviet Math. Dokl.*, **40** (1990), 653–655.

23. V. A. Rukavishnikov, "On the existence and uniqueness of an R_ν-generalized solution of a boundary value problem with uncoordinated degeneration of the input data", *Dokl. Math.*, **90** (2014), 562–564.

24. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, "On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation", *Mathematics*, **10**:6 (2022), 889. DOI: 10.3390/math10060889

25. V. A. Rukavishnikov, E. I. Rukavishnikova, "Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity", *Comput. Math. Appl.*, **151** (2023), 408–417.

26. B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, C. Schwab, "Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system", *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**:1 (2002), 319–343.

27. Y. Hou, Y. Han, J. Wen, "An equal-order hybridized discontinuous Galerkin method with a small pressure penalty parameter for the Stokes equations", *Computers & Mathematics with Applications*, **93**:1 (2021), 58–65. DOI: 10.1016/j.camwa.2021.03.031

28. H. H. Kim, E. Chung, C. S. Lee, "A staggered discontinuous Galerkin method for the Stokes system", *SIAM J. Numer. Anal.*, **51**:6 (2013), 3327–3350.

29. D. Schötzau, T. Wihler, "Exponential convergence of mixed hp-DGFEM for Stokes flow in polygons", *Numer. Math.*, **96** (2003), 339–361.

30. F. Zhang, J. Cheng, T. Liu, "A reconstructed discontinuous Galerkin method for incompressible flows on arbitrary grids", *Journal of Computational Physics*, **418** (2020), 109580.

31. D. K. Jang, J. H. Pyo, "Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities", *J. Korean Soc. Ind. App. Math.*, **23** (2019), 115–138.

32. J. H. Pyo, D.K̇. Jang, "An optimal finite element method with Uzawa iteration for Stokes equations including corner singularity", *J. Math.*, **2021** (2021), 5592982. DOI: 10.1155/2021/5592982

33. H. J. Choi, J. R. Kweon, "A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **292** (2016), 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006

34. Y. N. Anjam, "Singularities and regularity of stationary Stokes and Navier–Stokes equations on polygonal domains and their treatments", *AIMS Mathematics*, **5**:1 (2020), 440–466. DOI: 10.3934/math.2020030

35. L. John, P. Pustejovska, B. Wohlmuth, U. Rude, "Energy-corrected finite element methods for the Stokes system", *IMA J. Numer. Anal.*, **37** (2017), 687–729.

36. L. John, P. Swierczynski, B. Wohlmuth, "Energy corrected FEM for optimal Dirichlet boundary control problems", *Numer. Math.*, **139** (2018), 913–938. DOI: 10.1007/s00211-018-0952-8

37. A. V. Rukavishnikov, "On existence and uniqueness of the R_ν-generalized solution of Oseen problem in skew-symmetric form in weighted sets", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **53** (2025), 102–117 (In Russ.). DOI: 10.26516/1997-7670.2025.53.102

38. P. Ciarlet, *The finite element methods for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978, 529 p.

39. L. R. Scott, M. Vogelius, "Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials", *Math. Model. Numer. Anal.*, **19** (1985), 111–143.

40. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, "The method of numerical solution of the one stationary hydrodynamics problem in convective form in L-shaped domain", *Computer Research and Modeling*, **12**:6 (2020), 1291–1306 (In Russ.). DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1291-1306

41. A. V. Rukavishnikov, "Determination of the body of suitable parameters of the numerical method for solving the Navier – Stokes equations in a non-convex domain", *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **1(83)** (2025), 15–25 (In Russ.). DOI: 10.22250/18142400_2025_83_1_15

42. D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed finite element methods and applications*, Springer, Berlin, 2013, 685 p.

43. J. H. Bramble, J. E. Pasciak, A. T. Vassilev, "Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, **34** (1997), 1072–1092.

44. A. V. Rukavishnikov, "Stabilized numerical methods for solving the Oseen type problem with a singularity", *Computational Technologies*, **23**:2 (2018), 102–116 (In Russ.). DOI: 10.22250/18142400_2025_83_1_15

45. Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Minneapolis, 2003, 547 p.

46. V. A. Rukavishnikov, A. V. Rukavishnikov, "Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity", *J. Comput. Appl. Math.*, **341** (2018), 144–156.

Submitted 29.01.2026; Revised 07.05.2026; Accepted 25.05.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.