DOI 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.5

Синтез оптимальных линейных регуляторов с ограничением на область расположения корней

М. В. Сотникова, А. С. Томилова, Т. А. Лепихин

Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящее время синтез линейных квадратичных регуляторов (LQR-регуляторов) является одним из наиболее значимых и широко используемых на практике методов построения оптимальных стабилизирующих регуляторов. Данный метод гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы, то есть расположение корней её характеристического полинома в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. В данной работе предлагается расширение возможностей классического LQR-синтеза. Именно, рассматривается задача поиска оптимального линейного регулятора, минимизирующего квадратичный функционал качества, с дополнительным ограничением на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. В качестве такой области вводится сектор в левой полуплоскости комплексной плоскости, что позволяет влиять на показатели качества переходных процессов в замкнутой системе, например, на длительность и колебательность. Осуществлена параметризация области расположения корней с помощью векторов евклидова пространства. Показано, что поставленная задача параметрического синтеза о поиске оптимального регулятора с учетом модальных ограничений сводится к форме безусловной минимизации. Разработан вычислительный алгоритм поиска оптимального регулятора, опирающийся на решение линейного матричного уравнения Ляпунова на каждой итерации метода оптимизации, но не требующий решения нелинейного уравнения Риккати. Рассмотрен вопрос о поиске весовых матриц квадратичного функционала в задаче синтеза LQR-регулятора без ограничений, соответствующих найденному оптимальному регулятору в задаче с модальными ограничениями. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы практическим примером управления курсом морского судна.

Ключевые слова: линейный регулятор, квадратичный функционал, модальные ограничения, матричное уравнение Ляпунова, безусловная оптимизация, морское судно

Для цитирования: Сотникова М. В., Томилова А. С., Лепихин Т. А. Синтез оптимальных линейных регуляторов с ограничением на область расположения корней // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2026. Т. 28, № 2. С. 47–61. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61

Об авторах:
Сотникова Маргарита Викторовна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0726-7448, m.sotnikova@spbu.ru
Томилова Анастасия Сергеевна, аспирант кафедры компьютерных технологий и систем, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8074-754X, nt4815@gmail.com

© М. В. Сотникова, А. С. Томилова, Т. А. Лепихин

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Лепихин Тимур Андреевич, кандидат физико-математических наук, ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5218-8250, t.lepihin@spbu.ru

Original article

MSC2020 93B52

Synthesis of optimal linear controllers with constraints on the root domain

M. V. Sotnikova, A. S. Tomilova, T. A. Lepikhin

Saint-Petersburg State University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. Currently, the synthesis of LQR controllers (i.e., linear quadratic regulators) is one of the most significant and widely used method for designing optimal stabilizing controllers. This method guarantees the asymptotic stability of a closed-loop system, which means that the roots of its characteristic polynomial are placed in the open left half-plane of the complex plane. This paper proposes an extension for the capabilities of classical LQR synthesis. Namely, the considered problem is designing an optimal linear controller that minimizes a quadratic performance functional with an additional constraint on the root domain of the closed-loop system's characteristic polynomial. A sector in the left half-plane of the complex plane is introduced as such a region, which makes it possible to influence such performance indices of transient processes in a closed-loop system as the transient time and oscillation. The root domain is parameterized using Euclidean space vectors. It is shown that the parametric synthesis problem of obtaining an optimal controller, taking into account modal constraints, reduces to unconstrained minimization. A computational algorithm for obtaining the optimal controller is developed, which is based on solving a linear Lyapunov matrix equation at each iteration of the optimization method, but does not require solving the nonlinear Riccati equation. Searching for weight matrices of a quadratic functional in the synthesis of an LQR controller without constraints, corresponding to the optimal controller in a problem with modal constraints, is considered. The obtained theoretical results are illustrated with a practical example of vessel course control.

Keywords: linear controller, quadratic functional, modal constraints, Lyapunov matrix equation, unconstrained optimization, marine vessel

For citation: *M. V. Sotnikova, A. S. Tomilova, T. A. Lepikhin.* Synthesis of optimal linear controllers with constraints on the root domain. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 28:2(2026), 47–61. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202602.47-61

About the authors:
Margarita V. Sotnikova, D. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Computer Applications and Systems, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0726-7448, m.sotnikova@spbu.ru
Anastasiia S. Tomilova, Postgraduate Student, Department of Computer Applications and Systems, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8074-754X, nt4815@gmail.com
Timur A. Lepikhin, Ph.D. (Phys. and Math.), Assistant, St. Petersburg State University (7-9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5218-8250, t.lepihin@spbu.ru

1. Введение

Работа посвящена вопросам синтеза оптимальных регуляторов для линейных стационарных систем. Широко известным классическим подходом к построению оптимального управления является LQR-синтез (Linear Quadratic Regulator), основанный на решении матричного уравнения Риккати [1]. При этом для найденного оптимального регулятора гарантируется, что собственные числа матрицы замкнутой системы расположены в открытой левой полуплоскости.

На практике к качеству функционирования систем управления, как правило, предъявляется совокупность требований, в том числе они предъявляются к таким показателям как длительность, перерегулирование, колебательность переходных процессов. Стремление к выполнению этих требований в случае LQR-синтеза приводит либо к необходимости ручной настройки весовых матриц квадратичного функционала качества, либо к решению дополнительных нелинейных оптимизационных задач. Изменение весовых матриц квадратичного функционала приводит к смещению корней характеристического полинома замкнутой системы и к соответствующему изменению переходных процессов. Однако возможности ручной настройки весьма ограничены, особенно для систем с большими размерностями векторов состояния и управления, для которых она обычно сводится к вариациям диагональных элементов весовых матриц.

В связи с этим в данной работе предлагается новый метод синтеза LQR-регулятора с дополнительным ограничением на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. Указанная область представляет собой сектор в левой полуплоскости комплексной плоскости. Введение этой области позволяет влиять на такие показатели качества, как длительность и колебательность переходных процессов, сужая допустимое множество регуляторов. При этом искомый регулятор является оптимальным по отношению к заданному квадратичному функционалу качества. Таким образом, целью работы является расширение возможностей классического LQR-синтеза, при котором помимо оптимальности регулятора гарантируется также расположение корней характеристического полинома замкнутой системы не только в левой полуплоскости, но и в заданной области.

В работе приведена формализованная постановка задачи синтеза оптимального регулятора. Далее вводится область расположения корней в виде сектора в левой полуплоскости и осуществляется ее параметризация при помощи n-мерных векторов евклидова пространства. Данный подход к параметризации области расположения корней был ранее предложен в работах [1–3] и нашел практическое применение в задачах синтеза динамических регуляторов для подвижных объектов [4–6].

Проблема расположения корней характеристического полинома замкнутой системы в заданной области для LQR-регулятора ранее рассматривалась, в частности, в работах [7–11]. Область расположения корней в работах [7, 8, 11] вводится также в виде сектора, но содержит дополнительную вертикальную линию, отсекающую часть угла. В статье [9] рассматривается круговая область, а в работе [10] вводится сектор, аналогичный рассматриваемому в данной работе. В исследованиях [7, 8, 11] предложен алгоритм решения поставленной задачи, в котором на каждой итерации решается матричное уравнение Ляпунова. В этом состоит его сходство с предлагаемым в данной работе алгоритмом. Однако предлагаемый в настоящей работе подход основан на параметризации области расположения корней и принципиально отличается от предложенных ранее решений.

Работа структурирована следующим образом. Во введении описана проблематика, включая краткий литературный обзор. Во втором параграфе приведена формализованная постановка задачи. В третьем параграфе рассматривается способ параметризации области расположения корней и доказываются утверждения, обосновывающие предложенный подход и позволяющие свести поставленную задачу к безусловной оптимизации. Приводится вычислительный алгоритм поиска оптимального регулятора и исследуется вопрос о поиске весовых матриц квадратичного функционала в задаче синтеза LQR-регулятора, соответствующих оптимальному решению в задаче с модальными ограничениями. В четвертом параграфе в качестве практического приложения полученных результатов рассматривается задача управления курсом морского судна. В заключении указаны основные результаты исследования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную математическую модель объекта управления вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} \in E^n$ – вектор состояния, $u \in E^1$ – управляющий сигнал. Будем считать, что система (2.1) является полностью управляемой. Целью управления является стабилизация нулевого положения равновесия замкнутой системы.

Качество процессов управления будем характеризовать квадратичным функционалом

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} + qu^2)dt, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{R}$ – положительно определенная, симметричная весовая матрица, $q > 0$ – весовой множитель.

Обратную связь будем искать в форме линейного регулятора:

$$u = \mathbf{k}\mathbf{x}. \tag{2.3}$$

Введем дополнительное требование на область расположения корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3). В качестве такой области примем область $\mathbf{C}_\Delta$ комплексной плоскости, показанную на рис. 2.1, которая формально задается следующим образом [1, 2]:

$$\mathbf{C}_\Delta = \{s = x \pm jy \in \mathbf{C}^1 : x \le -\alpha,\ 0 \le y \le (-x-\alpha)\operatorname{tg}\beta\},$$

где $x = \mathrm{Re}(s)$, $y = \mathrm{Im}(s)$, s – произвольная точка комплексной плоскости, $\alpha > 0$ и $0 \leq \beta < \pi/2$ – заданные вещественные числа.

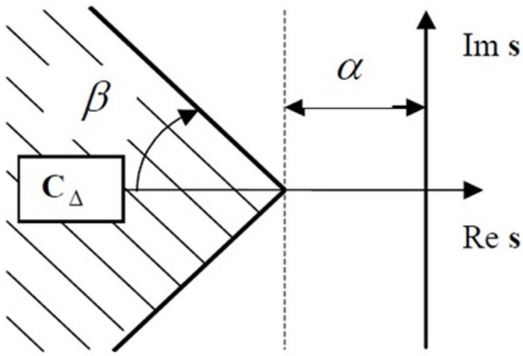

Рис. 2.1. Область $\mathbf{C}_\Delta$

Fig. 2.1. Region $\mathbf{C}_\Delta$

Введение области $\mathbf{C}_\Delta$ позволяет регулировать такие показатели качества переходного процесса, как длительность и колебательность. При этом параметр α формирует ограничения на вещественную часть собственных чисел и влияет на длительность процессов в замкнутом контуре, а параметр β задает ограничения на мнимую часть собственных чисел и влияет на колебательность.

Поставим задачу поиска оптимального регулятора вида (2.3), доставляющего минимум квадратичному функционалу (2.2) на движениях объекта управления (2.1) и обеспечивающего расположение корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3) внутри области $\mathbf{C}_\Delta$.

Формализовано данную задачу можно записать в следующем виде:

$$J(\mathbf{k}) \longrightarrow \min_{\mathbf{k} \in \mathbf{\Omega}_K}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{\Omega}_K = \{\mathbf{k} : \Delta(s_i, \mathbf{k}) = 0, s_i \in \mathbf{C}_\Delta, i = \overline{1,n}\}$ – допустимое множество регуляторов, $\Delta(s, \mathbf{k}) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{bk})$ – характеристический полином замкнутой системы (2.1), (2.3), s_i – корни характеристического полинома.

Важно отметить, что применение классического подхода к решению задачи минимизации интегрального квадратичного функционала (2.2) на основе матричного уравнения Риккати гарантирует лишь расположение корней характеристического полинома в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, но при этом не позволяет выполнить заданное ограничение на область расположения корней.

В связи с этим в данной работе предлагается иной подход, основанный на параметризации области $\mathbf{C}_\Delta$, который позволяет свести исходную существенно нелинейную задачу параметрического синтеза (2.4) к форме задачи на безусловный экстремум.

3. Метод синтеза оптимального регулятора

Рассмотрим сначала вопрос о параметризации области $\mathbf{C}_\Delta$. Приведем здесь утверждение, которое позволяет параметризовать данную область с помощью вектора ев-

клидового пространства $\gamma \in E^n$ [1, 2].

Теорема 3.1. *Для любого вектора $\gamma \in E^n$ все корни полинома*

$$\Delta^*(s,\gamma) = \begin{cases} \widetilde{\Delta}^*(s,\gamma), & \text{если } n \text{ – четное;} \\ (s + a_{d+1}(\gamma,\alpha))\widetilde{\Delta}^*(s,\gamma), & \text{если } n \text{ – нечетное,} \end{cases} \tag{3.1}$$

принадлежат области $\mathbf{C}_\Delta$, и обратно, если все корни некоторого полинома $\Delta(s)$ принадлежат этой области, то можно указать такой вектор $\gamma \in E^n$, что справедливо тождество $\Delta(s) \equiv \Delta^*(s,\gamma)$, причем

$$\widetilde{\Delta}^*(s,\gamma) = \prod (s^2 + a_i^1(\gamma,\alpha)s + a_i^0(\gamma,\alpha)), \quad d = \left[\frac{n}{2}\right], \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} a_i^1(\gamma,\alpha) = 2\alpha + 2\gamma_{i1}^2, \\ a_i^0(\gamma,\alpha) = \alpha^2 + 2\gamma_{i1}^2\alpha + f(\gamma_{i2})\frac{\gamma_{i1}^4}{\cos^2(\beta)}, \quad i = \overline{1,d}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$a_{d+1}(\gamma,\alpha) = \gamma_{d0}^2 + \alpha, \ \gamma = \{\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{d1},\ \gamma_{d2},\ \gamma_{d0}\}. \tag{3.4}$$

При этом функция $f(\cdot) : (-\infty, +\infty) \longrightarrow (0,1)$ удовлетворяет условию существования обратной функции во всей области задания.

Таким образом, при любом выборе вектора $\gamma \in E^n$ корни полинома $\Delta^*(s,\gamma)$ расположены внутри области $\mathbf{C}_\Delta$, и наоборот, каждому фиксированному распределению корней в области $\mathbf{C}_\Delta$ соответствует единственный вектор $\gamma \in E^n$ [1], т.е. существует взаимно однозначное соответствие между расположением корней характеристического полинома замкнутой системы (2.1), (2.3) внутри области $\mathbf{C}_\Delta$ и значениями вектора $\gamma \in E^n$.

Пользуясь этой теоремой, установим взаимосвязь между векторами $\mathbf{k} \in \mathbf{\Omega}_K$ регулятора (2.3) и соответствующими векторами $\gamma \in E^n$. Для этого запишем уравнения замкнутой системы (2.1), (2.3) в изображениях по Лапласу:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{G}(s)}{A(s)}u + \frac{\mathbf{G}_0(s)}{A(s)}, \ u = \mathbf{k}\mathbf{x}. \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{G}(s) = (G_1(s),\ G_2(s),\ \ldots,\ G_n(s))^T$ – вектор-столбец, в состав которого входят полиномиальные компоненты

$$G_i(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_i = g_1^i s_{n-1} + \ldots + g_{n-1}^i + g_n^i, \ i = \overline{1,n},$$

где

матрицы $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_i$ получены из характеристической матрицы $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ заменой i-ых столбцов на вектор $\mathbf{b}$;

$A(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ – характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$;

$\mathbf{G}_0(s) = A(s)(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$ – полиномиальный вектор-столбец, определяемый заданными начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ по вектору состояния.

Приведем уравнения замкнутой системы (3.5) к одному уравнению относительно скалярного управления:

$$u = \mathbf{k}\left(\frac{\mathbf{G}(s)}{A(s)}u + \frac{\mathbf{G}_0(s)}{A(s)}\right) \text{ или } (A(s) - \mathbf{k}\mathbf{G}(s))u = \mathbf{k}\mathbf{G}_0(s).$$

Отсюда следует, что характеристический полином замкнутой системы (2.1), (2.3) равен

$$\Delta(s, \mathbf{k}) = A(s) - \mathbf{k}\mathbf{G}(s). \tag{3.6}$$

Пусть s_i $(i = \overline{1, n})$ – корни характеристического полинома (3.6), которые расположены в области $\mathbf{C}_\Delta$. В соответствии с теоремой 3.1 такому набору корней взаимно однозначно соответствуют вектор $\gamma \in E^n$ и полином

$$\Delta^*(s, \gamma) = \prod_{i=1}^{m}(s - s_i) \equiv s^n + \chi_1 s^{n-1} + \ldots + \chi_{n-1}s + \chi_n,$$

равный характеристическому полиному (3.6). Здесь коэффициенты $\chi_i = \chi_i(\gamma)$, $i = \overline{1, n}$ вычисляются с использованием формул (3.1)–(3.4).

Введем обозначения: $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \in E^n$ – вектор-столбец коэффициентов полинома $A(s)$; $\chi = (\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_n) \in E^n$ – вектор-столбец коэффициентов полинома $\Delta^*(s, \gamma)$;

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \ldots \\ \mathbf{g}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^n \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^n \end{pmatrix},$$

где Γ – матрица с вектор-строками $\mathbf{g}^j = (g_j^1,\ g_j^2,\ \ldots,\ g_j^n) \in E^n$, состоящими из коэффициентов полиномов $G_i(s)$ при одинаковых степенях j переменной s.

Найдем вектор $\mathbf{k}$ регулятора (2.3), обеспечивающий выполнение тождества

$$\Delta(s, \mathbf{k}) \equiv \Delta^*(s, \gamma).$$

С учетом формулы (3.6), получаем

$$\mathbf{k}\mathbf{G}(s) \equiv A(s) - \Delta^*(s, \gamma). \tag{3.7}$$

В результате, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получим линейную систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T = \mathbf{a} - \chi(\gamma). \tag{3.8}$$

Если объект (2.1) является вполне управляемым по Калману, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ является неособой. Следовательно, решение алгебраической системы (3.8) можно записать в виде:

$$\mathbf{k}^T(\gamma) = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{a} - \chi) = \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1\chi(\gamma), \tag{3.9}$$

где $\mathbf{l}_0 = \mathbf{\Gamma}^{-1}a$, $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{\Gamma}^{-1}$.

Выражение (3.9) устанавливает искомую связь между вектором $\mathbf{k}$ линейного регулятора (2.3) и произвольными векторами $\gamma \in E^n$ евклидова пространства.

Введем вспомогательные обозначения:

$$\overline{\mathbf{A}}(\gamma) = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}(\gamma), \quad \overline{\mathbf{R}}(\gamma) = \mathbf{R} + q\mathbf{k}^T(\gamma)\mathbf{k}(\gamma).$$

Докажем следующее утверждение, которое позволяет вычислить значение квадратичного функционала (2.2) для произвольного вектора $\gamma \in E^n$.

Теорема 3.2. *Для любого $\gamma \in E^n$ значение квадратичного функционала* (2.2) *вычисляется по формуле*

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{x}_0, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{P}$ *– решение матричного уравнения Ляпунова*

$$\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} = -\overline{\mathbf{R}}.$$

Доказательство. Пусть вектор $\gamma \in E^n$. Построим соответствующий ему линейный регулятор $\mathbf{k}(\gamma)$ по формуле (3.9) и запишем уравнения замкнутой системы (2.1), (2.3):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}(\gamma)\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}(\gamma))\mathbf{x} = \overline{\mathbf{A}}(\gamma)\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{3.11}$$

Заметим, что матрица $\overline{\mathbf{A}}(\gamma)$ является гурвицевой и ее собственные числа принадлежат области $\mathbf{C}_\triangle$. В соответствии с формулой Коши, решение системы уравнений (3.11) задается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\overline{\mathbf{A}}(\gamma)t}\mathbf{x}_0. \tag{3.12}$$

Далее, подставив в функционал (2.2) выражение для закона управления (2.3), получим:

$$J(\gamma) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} + qu^2)dt = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} + qu^Tu)dt =$$
$$= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} + q\mathbf{x}^T\mathbf{k}^T(\gamma)\mathbf{k}(\gamma)\mathbf{x})dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(\mathbf{R} + q\mathbf{k}^T(\gamma)\mathbf{k}(\gamma))\mathbf{x}dt =$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{x}^T\overline{\mathbf{R}}(\gamma)\mathbf{x}dt. \tag{3.13}$$

Отметим, что весовая матрица $\overline{\mathbf{R}}$ является симметричной и положительно определенной. Подставляя решение (3.12) в функционал (3.13), получим

$$J(\gamma) = \int_0^\infty \mathbf{x}_0^T e^{\overline{\mathbf{A}}^T(\gamma)t}\overline{\mathbf{R}}(\gamma)e^{\overline{\mathbf{A}}(\gamma)t}\mathbf{x}_0 dt = \mathbf{x}_0^T\left(\int_0^\infty e^{\overline{\mathbf{A}}^T(\gamma)t}\overline{\mathbf{R}}(\gamma)e^{\overline{\mathbf{A}}(\gamma)t}dt\right)\mathbf{x}_0. \tag{3.14}$$

Поскольку матрица $\overline{\mathbf{A}}(\gamma)$ является гурвицевой, то несобственный интеграл в выражении (3.14) сходится. Обозначим его значение матрицей

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\overline{\mathbf{A}}^T(\gamma)t}\overline{\mathbf{R}}(\gamma)e^{\overline{\mathbf{A}}(\gamma)t}dt. \tag{3.15}$$

Нетрудно заметить, что выражение (3.15) задает решение матричного уравнения Ляпунова [12]

$$\mathbf{P}\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} = -\overline{\mathbf{R}}. \tag{3.16}$$

Таким образом, подставляя матрицу $\mathbf{P}$ в функционал (3.14), получаем искомую формулу для вычисления значения функционала:

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{x}_0.$$

Доказательство завершено.

Подводя итог изложенным рассуждениям, можно сделать вывод, что на основе теорем 3.1 и 3.2 исходная нелинейная задача параметрического синтеза (2.4) может быть сведена к эквивалентной задаче безусловной оптимизации следующего вида

$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{x}_0 \longrightarrow \min_{\gamma \in E^n}. \tag{3.17}$$

Для численного решения данной задачи может быть применен любой градиентный метод безусловной оптимизации.

Обозначим вектором γ^* решение оптимизационной задачи (3.17). Тогда соответствующий ему вектор оптимального линейного регулятора (2.3) вычисляется по формуле (3.9) и равен $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}(\gamma^*)$.

Найдем весовую матрицу $\widetilde{\mathbf{R}}$ и весовой множитель $\widetilde{q}$ квадратичного функционала вида (2.2), соответствующие найденному оптимальному регулятору. Заметим, что для искомых величин $\widetilde{\mathbf{R}}$ и $\widetilde{q}$ должны выполняться следующие равенства, вытекающие из алгебраического уравнения Риккати и известного выражения для оптимального LQR-регулятора:

$$\begin{gathered} \overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}(\gamma^*) + \mathbf{P}(\gamma^*)\overline{\mathbf{A}} - \frac{1}{q}\mathbf{P}(\gamma^*)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}(\gamma^*) + \widetilde{\mathbf{R}} = 0, \\ \mathbf{k}^* = \frac{1}{q}\mathbf{b}^T\mathbf{P}(\gamma^*). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Рассматривая (3.18) как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\widetilde{\mathbf{R}}$ и $\widetilde{q}$, находим ее решение:

$$\begin{gathered} \widetilde{q} = \frac{|\mathbf{b}^T\mathbf{P}(\gamma^*)|}{|\mathbf{k}^*|}, \\ \widetilde{\mathbf{R}} = -\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}(\gamma^*) - \mathbf{P}(\gamma^*)\overline{\mathbf{A}} + \frac{1}{q}\mathbf{P}(\gamma^*)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P}(\gamma^*). \end{gathered} \tag{3.19}$$

В качестве результата сформулируем вычислительный алгоритм нахождения оптимального линейного регулятора в поставленной задаче.

1. Сформировать вектор $\mathbf{a}$ коэффициентов полинома $A(s)$ и матрицу $\mathbf{\Gamma}$.
2. Вычислить вспомогательные матрицу $\mathbf{l}_1$ и вектор $\mathbf{l}_0$ по формулам
$$\mathbf{l}_1 = -\mathbf{\Gamma}^{-1}, \quad \mathbf{l}_0 = \mathbf{\Gamma}^{-1}a.$$
3. Задать произвольную начальную точку $\gamma = \gamma_0 \in E^n$.
4. Построить полином $\Delta^*(s,\gamma)$ по формулам (3.1)–(3.4) и выделить вектор его коэффициентов $\chi(\gamma)$.
5. Вычислить вектор $\mathbf{k}(\gamma)$ регулятора (2.3) в соответствии с формулой (3.9).

6. Вычислить матрицы $\overline{\mathbf{A}}(\gamma)$ и $\overline{\mathbf{R}}(\gamma)$.

7. Решить матричное уравнение Ляпунова (3.16) и найти матрицу $\mathbf{P}$.

8. Вычислить значение квадратичного функционала
$$J(\gamma) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(\gamma)\mathbf{x}_0.$$

9. С помощью любого допустимого численного метода решения задачи (3.17) на безусловный экстремум задать новую точку γ и, повторяя пункты 4–8, минимизировать функцию $J(\gamma)$.

10. По нахождении точки
$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma \in E^n} J(\gamma)$$
определить вектор $\mathbf{k}(\gamma^*)$ регулятора (2.3), который будет принят в качестве решения поставленной задачи (2.4).

4. Пример управления морским судном

В качестве объекта управления примем морское судно, движущееся в горизонтальной плоскости. Целью управления является разворот судна по курсу на 10 градусов.

Линейная математическая модель динамики судна задается следующей системой дифференциальных уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= a_{11}V_z + a_{12}\omega_y + b_1\delta, \\ \dot{\omega}_y &= a_{21}V_z + a_{22}\omega_y + b_2\delta, \\ \dot{\varphi} &= \omega_y, \\ \dot{\delta} &= u. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь V_z – боковая скорость судна, ω_y – угловая скорость по курсу, φ – угол курса, δ – угол перекладки вертикального руля, u – управляющий сигнал, определяющий скорость перекладки руля. Для скорости хода $V = 10$ м/с коэффициенты модели (4.1) равны:

$$a_{11} = -0.083769, \quad a_{12} = 16.23, \quad b_1 = -0.17038,$$
$$a_{21} = 0.002582, \quad a_{22} = -0.52989, \quad b_2 = -0.024459.$$

Зададим функционал, характеризующий качество процессов управления в следующем виде

$$J = \int_0^\infty \left(0.01V_z^2 + 0.01\omega_y^2 + 10(\varphi - \varphi_z)^2 + 0.01\delta^2 + u^2\right) dt. \tag{4.2}$$

Выполним синтез LQR-регулятора для модели (4.1) по отношению к функционалу (4.2). В результате получим следующее значение вектора $\mathbf{k}$ оптимального регулятора

$$\mathbf{k}_{LQR} = (0.0715,\ 6.8349,\ 3.1623,\ -0.6072),$$

при этом собственные числа для замкнутой им системы равны

$$s_1 = -0.6472, \quad s_2 = -0.0861,$$
$$s_3 = -0.2438 + 0.2859i, \quad s_4 = -0.2438 - 0.2859i.$$

Графики переходных процессов по углам курса и перекладки вертикального руля показаны на рис. 4.1. На рис. 4.2 показано расположение корней характеристического полинома замкнутой LQR-регулятором системы.

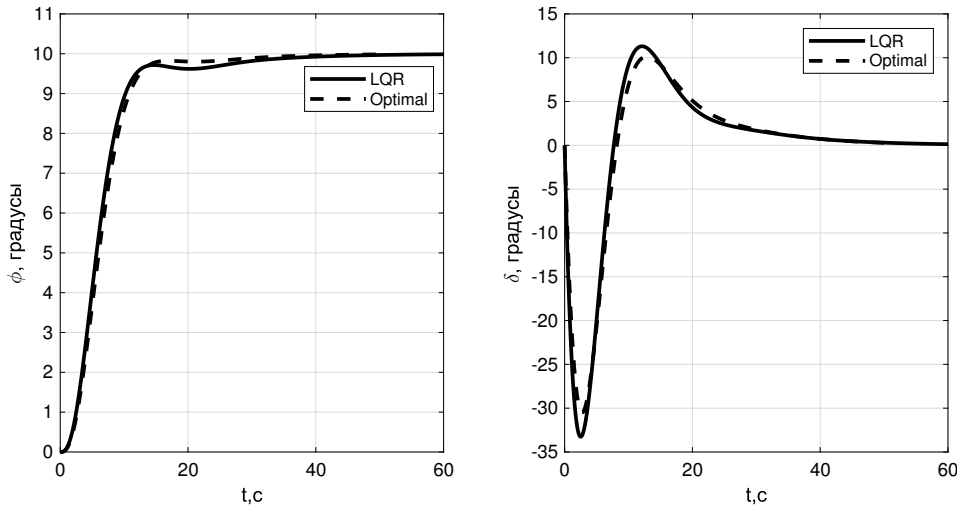

Рис. 4.1. Изменение углов курса и перекладки руля

Fig. 4.1. Transient processes for heading and rudder angles

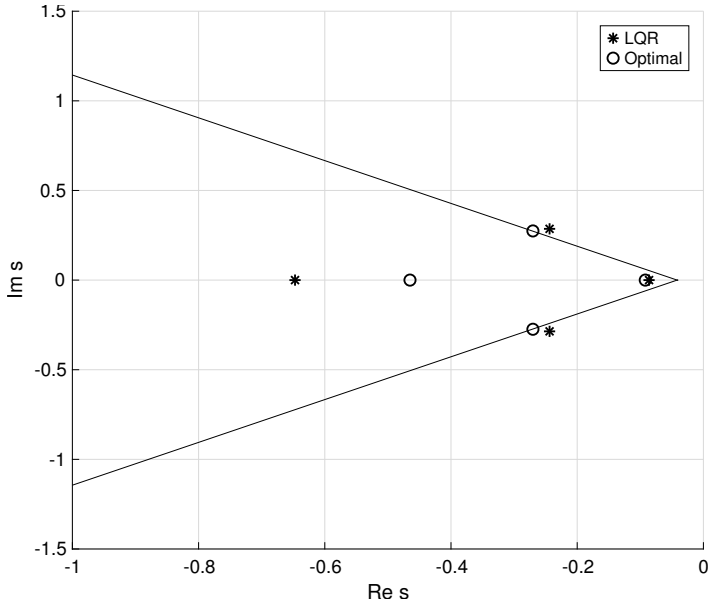

Рис. 4.2. Расположение корней характеристического полинома замкнутой системы

Fig. 4.2. Eigenvalues location of a closed-loop system

Введем область C_Δ, определяя её параметрами $\beta = 50°$ и $\alpha = 0.04$. Из рис. 4.2 видно, что два корня, построенные для LQR-регулятора, находятся вне заданной области C_Δ, обозначенной на рисунке двумя лучами.

Выполним теперь все шаги алгоритма поиска оптимального регулятора, обеспечивающего попадание корней характеристического полинома замкнутой системы в заданную область C_Δ. В результате получим следующий вектор оптимального регулятора

$$\mathbf{k}_{opt} = (0.0476,\ 7.5504,\ 2.5405,\ -0.4816). \tag{4.3}$$

Соответствующие графики переходных процессов представлены на рис. 4.1. При этом собственные числа матрицы замкнутой системы (4.1), (4.3) равны

$$s_1 = -0.0921, \quad s_2 = -0.4626,$$
$$s_3 = -0.2703 + 0.2744i, \quad s_4 = -0.2703 - 0.2744i.$$

Их расположение на комплексной плоскости показано на рис. 4.2, откуда видно, что все собственные числа принадлежат области C_Δ, причем два из них расположены на её границе.

Отметим, что длительность переходного процесса, оцениваемая попаданием в двухпроцентную окрестность заданного значения угла курса, составляет 15 с для оптимального регулятора и 30 с – для LQR-регулятора. При этом энергетические затраты приводов руля для оптимального регулятора ниже, чем для LQR-регулятора.

Найдем весовой множитель и весовую матрицу квадратичного функционала, соответствующие найденному оптимальному регулятору, в соответствии с формулой (3.19). В результате получим

$$\tilde{q} = 0.9372, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0.0111 & 0.0128 & 0.0355 & -0.007 \\ 0.0128 & 3.6874 & 0.9297 & -0.1737 \\ 0.0355 & 0.9297 & 11.1919 & -0.2333 \\ -0.007 & -0.1737 & -0.2333 & 0.0557 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что приведенные весовые матрицы практически невозможно подобрать в случае ручной настройки весовых коэффициентов. Таким образом, полученные в примере результаты свидетельствуют о возможности улучшения качества переходных процессов при использовании LQR-синтеза в случае задания дополнительных модальных ограничений.

5. Заключение

В работе рассмотрена задача синтеза оптимального линейного регулятора для квадратичного функционала с учетом дополнительных модальных ограничений. Доказаны утверждения, обосновывающие возможность сведения поставленной задачи к безусловной оптимизации. Разработан вычислительный алгоритм, позволяющий выполнить синтез оптимального регулятора для произвольной линейной стационарной системы со скалярным управлением. Приведен практический пример управления курсом морского судна.

Предложенный подход расширяет возможности классического LQR-синтеза, позволяя вводить дополнительное ограничение на область расположения корней и тем самым влиять на такие показатели качества, как длительность и колебательность переходных процессов в замкнутой системе.

Список литературы

1. Веремей Е. И. Численные методы среднеквадратичного синтеза при наличии модальных ограничений // *АН УССР. Автоматика.* 1990. № 2. С. 22–27.

2. Коровкин М. В. Методы и алгоритмы оптимизации систем управления движением судов в нестационарных режимах : специальность 05.13.01 : диссертация ... кандидата физ.-мат. наук. 2002. 153 с.

3. Modal Parametric Optimization of Control Laws with Special Structure / E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, V. V. Eremeev, M. V. Korovkin. *Proceedings of 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014).* (Gyeonggi-do, Korea). P. 1278–1283. DOI:10.1109/ICCAS.2014.6987753

4. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10.* 2011. Вып. 1. С. 116–133.

5. Томилова А. С. Оптимизация робастных свойств системы управления при ограничениях на качество переходного процесса // *Навигация и управление движением: Материалы XXI конференции молодых ученых с международным участием.* Под общей редакцией В. Г. Пешехонова. 2019. С. 37–39.

6. Веремей Е. И., Еремеев В. В. Задачи SISO H-оптимизации с учетом структурных и модальных ограничений // *Системы управления и информационные технологии.* 2013. Т. 54, № 4. С. 8–15.

7. Shieh L. S., Dib H. M., Ganesan S. Linear quadratic regulators with eigenvalue placement in a specified region. *Automatica.* 1988. Vol. 24, no. 6. P. 819–823. DOI:10.1016/0005-1098(88)90058-1

8. Kawasaki N., Shimemura E. Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region. *Automatica.* 1983. Vol. 19, no. 5. P. 557–560. DOI:10.1016/0005-1098(83)90011-0

9. Haddad W. M., Bernstein D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1992. Vol. 37, no. 1. P. 54–69. DOI:10.1109/9.109638.

10. Yuan L., Achenie L. E. K., Jiang W. Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region. *International Journal of Control.* 1996. Vol. 64, no. 6. P. 1151–1164. DOI:10.1080/00207179608921679

11. Kawasaki N., Shimemura E. Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator. *International Journal of Control.* 1988. Vol. 48, no. 1. P. 225–240. DOI:10.1080/00207178808906171

12. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: учеб. пособие. Санкт-Петербург: издательство Лань, 2013. 448 с.

13. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов: монография / Е. И. Веремей, В. М. Корчанов, М. В. Коровкин, С. В. Погожев. Санкт-Петербург: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 370 с.

Поступила 10.03.2026; доработана после рецензирования 10.05.2026;
принята к публикации 25.05.2026

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. E. I. Veremey, "Numerical methods of root-mean-square synthesis in the presence of modal constraints", *AN USSR, Avtomatika*, **2** (1990), 22–27 (In Russ.).

2. M. V.Korovkin, *Methods and algorithms for optimizing ship traffic control systems in non-stationary modes. PhD thesis*, 2002 (In Russ.), 153 p.

3. E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, V. V. Eremeev, M. V. Korovkin, "Modal Parametric Optimization of Control Laws with Special Structure", *Proceedings of 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*, 2014, 1278–1283. DOI: 10.1109/ICCAS.2014.6987753

4. E. I. Veremey, M. V. Sotnikova, "Plasma Stabilization Based on Prediction with Stable Linear Approximation", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, **10**:1 (2011), 116–133 (In Russ.).

5. A. S. Tomilova, "Optimization of Robust Properties of a Control System with Constraints on the Quality of the Transient Process", *Navigation and Motion Control: Proceedings of the XXI Conference of Young Scientists with International Participation, General editor V.G. Peshekhonov*, 2019, 37–39 (In Russ.).

6. E. I. Veremey, V. V. Eremeev, "SISO H-Optimization Problems Taking into Account Structural and Modal Constraints", *Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii*, **54**:4 (2013), 8–15 (In Russ.).

7. L. S. Shieh, H. M. Dib, S. Ganesan, "Linear quadratic regulators with eigenvalue placement in a specified region", *Automatica*, **24**:6 (1988), 819–823. DOI: 10.1016/0005-1098(88)90058-1

8. N. Kawasaki, E. Shimemura, "Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region", *Automatica*, **19**:5 (1983), 557–560. DOI: 10.1016/0005-1098(83)90011-0

9. W. M. Haddad, D. S. Bernstein, "Controller design with regional pole constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**:1 (1992), 54-69. DOI: 10.1109/9.109638

10. L. Yuan, L. E. K. Achenie, W. Jiang, "Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region", *International Journal of Control*, **64**:6 (1996), 1151–1164. DOI: 10.1080/00207179608921679

11. N. Kawasaki, E. Shimemura, "Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator", *International Journal of Control*, **48**:1 (1988), 225-240. DOI: 10.1080/00207178808906171

12. E. I. Veremey, *Linear systems with feedback: a textbook*, Lan, St. Petersburg, 2013 (In Russ.), 448 p.

13. E. I. Veremey, V. M. Korchanov, M. V. Korovkin, S. V. Pogozhev, *Computer Modeling of Motion Control Systems for Marine Mobile Objects: A Monograph*, St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University, 2002 (In Russ.), 370 p.

Submitted 10.03.2026; Revised 10.05.2026; Accepted 25.05.2026

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.