

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

**Численное моделирование распространения
воздушной ударной волны на подвижной
неструктурированной сетке****Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский***Всероссийский научно исследовательский институт экспериментальной
физики (ВНИИЭФ) (г. Саров, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье представлена методика расчета для задач двумерной газовой динамики на геометрически адаптивных подвижных неструктурированных сетках. Геометрическая адаптация хорошо согласуется с подходом, основанным на выделении ударных волн и контактных разрывов как особенностей решения. Смещение внутренних узлов сетки восстановлено через интерполяцию смещения граничных узлов. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определены из задачи Римана о распаде разрыва. Проведена дискретизация исходных уравнений в интегральной форме. Повышение точности расчета достигнуто за счет определения предраспадных параметров потока с использованием линейной или квадратичной реконструкций решения. В сферически-симметричных задачах применен алгоритм доворота вектора скорости предраспадных векторов потока. Методика опробована на тестовых задачах и применена для решения задачи о распространении ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда на большое расстояние. На основе расчетных результатов получены зависимости избыточного давления от пройденного волной расстояния. Проведено численное исследование структуры потока за волной для больших пройденных расстояний. Численное исследование показало, что волна принимает N-форму, что согласуется с полученными ранее результатами исследований.

Ключевые слова: газовая динамика, ударная волна, неструктурированная сетка, метод Годунова, ЛОГОС-ВОЛНА

Для цитирования: Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. Численное моделирование распространения воздушной ударной волны на подвижной неструктурированной сетке // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 96–116. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116

Об авторах:

Веселова Елена Александровна, старший научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Дерюгин Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Зеленский Дмитрий Константинович, начальник лаборатории, РФЯЦ-ВНИИЭФ (607188, Россия, Нижегородская обл., г. Саров, пр-кт Мира, д. 37), zdk@vniief.ru

© Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский



MSC2020 76L05, 65M50

Numerical modeling of air shock wave propagation on a moving unstructured mesh

E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky*Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics (RFNC-VNIIEF) (Sarov, Russian Federation)*

Abstract. The paper presents a methodology for numerical solution of two-dimensional gas dynamics problems using geometrically adaptive moving unstructured meshes. Geometric adaptation agrees well with an approach based on highlighting of shock waves and contact discontinuities as solution features. Displacement of internal mesh nodes is found via displacement of boundary nodes. Velocities of discontinuities and other their parameters are determined using Riemann's problem on a discontinuity breakup. Discretization of initial equations in an integral form is provided. Accuracy increase for the calculation is achieved by determination of pre-breakup flow parameters and by linear or quadratic reconstruction of the flow. In spherically-symmetric problems the algorithm of additional turn of pre-breakup flow velocity is applied. The method is tried out on test problems and applied to modelling of a shock wave that is induced by a spherical charge explosion and propagates over a large distance. Basing on calculation results dependencies of excessive pressure on a distance covered by the wave are obtained. Numerical investigation of the flow structure behind a wave is provided for large distances covered by this wave. Also numerical modelling demonstrated that the wave has N-form that is consequent with earlier results.

Keywords: gas dynamics, shock wave, unstructured mesh, Godunov method, LOGOS-WAVE

For citation: *E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky. Numerical modeling of air shock wave propagation on a moving unstructured mesh. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 28:1(2026), 96–116. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.96-116*

About the authors:

Elena A. Veselova, Senior Researcher, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Yuriy N. Deryugin, D. Sci. (Phys. and Math.), Chief Researcher, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Dmitry K. Zelensky, Head of the Laboratory, RFNC-VNIIEF (37 Mira Ave, Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia), zdk@vniief.ru

1. Введение

В ряде приложений возникает необходимость моделировать ударные волны на больших временах и расстояниях от места взрыва, когда на форму и скорость ударной волны могут влиять различные факторы [1–4].

В принципе, расчет распространения ударных волн возможен по любому многомерному газодинамическому коду. Однако в большинстве созданных программ расчет ударных волн проводится «сквозным» методом, который требует либо построения сеточной модели для всей области распространения волны, либо разработки специализированных алгоритмов адаптации сетки к области, где находится волна. Все это приводит к большим затратам вычислительных ресурсов.

В работах [5–6] был развит подход, основанный на выделении ударной волны в сочетании с адаптивной сеткой, подстраиваемой под ее движение. На основе такого подхода был создан ряд двумерных и трехмерных математических методик на блочных структурированных сетках. Однако использование структурированных сеток приводит к сильному ограничению на счетный шаг из-за малых размеров ячеек в области центра.

В данной работе рассматривается методика расчета двумерных задач газовой динамики на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Построение неструктурированной сетки в центральной части позволяет существенно увеличить счетный шаг и сократить время расчета. Геометрическая адаптация связана с выделением в решении основных особенностей, таких как ударные волны и контактные разрывы. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определяются из решения задачи Римана о распаде разрыва. Смещение внутренних узлов сетки определяется методом интерполяции по смещению граничных узлов.

Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме. При решении уравнений Эйлера численные конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной [7] либо квадратичной [8] реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности в численном решении применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [9]. Методика проверена на ряде тестовых и модельных задач [10–11].

Возможности методики иллюстрируются на задаче о распространении ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ) на большое расстояние. Для близких расстояний результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [12–13]. Для больших расстояний получена аппроксимационная зависимость избыточного давления от пройденного расстояния. Численно определена структура потока за волной, которая, с некоторого расстояния, принимает форму N-волны, предсказанной в работе [14].

2. Математическая модель

Рассматривается двумерное газодинамическое движение многокомпонентной сплошной среды. Исходные уравнения в виде законов сохранения имеют следующий вид [15]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial (y^\nu F_y)}{y^\nu \partial y} = \frac{\nu}{y^\nu} H, \quad (2.1)$$

где $\nu = 0$ для плоской и $\nu = 1$ для цилиндрической геометрии.

Вектора Q , F_x , F_y и H имеют следующие компоненты:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho C_\alpha \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho u E + p u \\ \rho u C_\alpha \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho u v \\ \rho v E + p v \\ \rho v C_\alpha \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) замыкаются уравнением состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon, C_\alpha), \quad (2.3)$$

где

$$\varepsilon = E - \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (2.4)$$

Здесь используются общепринятые обозначения: t – время, (x, y) – декартовые либо цилиндрические координаты, ρ – плотность, (u, v) – компоненты вектора скорости, p – давление, ε – внутренняя энергия, E – полная энергия, C_α – массовая концентрация компонента α .

Границами расчетной области являются: границы симметрии потока, «жесткий» поршень, на котором задается нормальная скорость границы, «мягкий» поршень, когда задано давление, и ударная волна, на которой ставятся соотношения Ренкина-Гюнио [15].

3. Вычислительный алгоритм

Как и в работе [16], построение вычислительного алгоритма основано на конечно-объемном методе, в котором ячейки сетки являются произвольными многоугольниками. При описании дискретизации уравнений будем использовать обозначения из [16]. Рассматриваемую ячейку будем обозначать буквой P , грани ячейки – буквой f , соседнюю ячейку через грань f будем обозначать буквой E , узлы сетки – буквой k , периметр ячейки – $\partial\sigma$, площадь ячейки – σ , объем ячейки – Ω , поверхность, ограничивающую объем ячейки – $\partial\Omega$.

Определение нового положения сетки проводится по алгоритму из [16], в котором сначала разрешаются граничные условия на внешних и внутренних границах регионов методом распада разрыва [6], затем находится новое положение границ регионов, а затем по смещению границ регионов определяются смещения внутренних узлов разностной сетки. По вычисленным координатам разностной сетки определяется скорость движения узлов каждой грани. В результате на два момента времени t^n и t^{n+1} определены координаты узлов сетки.

Для построения дискретных уравнений умножим уравнения (2.1) на y^ν и проинтегрируем их по подвижной области ячейки. В результате, на основании формулы Гаусса-Остроградского и правила Лейбница, получим следующую форму уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial\Omega} (F_n - QW_n) dS = \int_{\Omega} \frac{\nu}{y^\nu} H dV, \quad (3.1)$$

где $dV = y^\nu dx dy$ – объем ячейки, $dS = y^\nu \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – площадь грани, $F_n - QW_n = n_x F_x + n_y F_y - QW_n$ – вектор конвективного потока через подвижную грань ячейки,

$\vec{n} = (n_x, n_y)$ – единичный вектор нормали к грани, W_n – нормальная скорость движения грани, которая определяется по величине заметаемого объема.

Будем аппроксимировать интегралы в (3.1) по квадратурной формуле трапеций со средней точкой. В качестве среднего значения функции в ячейке примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани примем ее значение в центре грани. Тогда получим следующие полудискретные уравнения:

$$\frac{(Q \Delta V)_P^{n+1} - (Q \Delta V)_P^n}{\tau} + \sum_f (F_n - QW_n)_f \Delta S_f = \left(\frac{\nu}{y^\nu} H \right)_P^n. \quad (3.2)$$

Для того, чтобы при движении сетки постоянное поле потока ($\rho^0, u^0, v = 0, p^0$) оставалось постоянным в осесимметричном случае (постоянное течение в осесимметричном случае возможно только по осевой координате), должно выполняться дополнительное условие:

$$\oint_{\partial\Omega} p n_y dS = \int_{\Omega} \frac{p}{y} dV, \quad (3.3)$$

которое в разностях принимает вид:

$$\sum_f (n_y \Delta S)_f = \frac{\Delta V_P^n + \Delta V_P^{n+1}}{2y_P}. \quad (3.4)$$

Откуда определяется значение y_P как координата y центра ячейки P на текущий момент времени:

$$y_P = \frac{0.5(\Delta V_P^n + \Delta V_P^{n+1})}{\sum_f (n_y \Delta S)_f}. \quad (3.5)$$

В нестационарных расчетах значение давления в центре ячейки в правой части уравнения (3.3) определяется по формуле

$$p_P = \frac{\sum_f P_f \Delta S_f}{\sum_f \Delta S_f}, \quad (3.6)$$

где P_f – давление на грани ячейки, определяемое из решения задачи о распаде разрыва.

Отметим, что при использовании такого алгоритма расчета правой части уравнения сохранения количества движения по координате y в осесимметричном случае постоянное поле на подвижной сетке при ее движении по x и y направлениям сохраняется с точностью машинного округления.

Для расчета конвективных потоков в целях повышения разрешающей способности разностной схемы проводится реконструкция решения, заключающаяся в определении предраспадных параметров потока слева и справа от грани. Левое и правое направление на грани определяется направлением нормали на этой грани.

В стандартной схеме Годунова потоки на гранях определяются из решения задачи о распаде разрыва при кусочно-постоянном распределении параметров. Относительно направления внешней нормали на грани f ячейки P кусочно-постоянную реконструкцию расчетных параметров потока $\varphi_f = (\rho, u, v, p, \varepsilon)_f$ можно записать в виде

$$\varphi_{f,L} = \varphi_P, \quad \varphi_{f,R} = \varphi_E. \quad (3.7)$$

Наряду с исходным вариантом, в котором используется кусочно-постоянная реконструкция решения, будем использовать одномерную линейную и квадратичную реконструкции.

В линейной реконструкции предполагается, что параметры в ячейке распределены в соответствии с линейным законом. Обозначим через φ примитивные переменные (ρ, u, v, p) , тогда предраспадные параметры слева $\varphi_{f,L}$ и справа $\varphi_{f,R}$ от грани f (рис. 3.1) определяются по формулам:

$$\varphi_{f,L} = \varphi_P + \frac{1}{2} \psi(r_P) (\Delta\varphi)_f, \tag{3.8}$$

$$\varphi_{f,R} = \varphi_E - \frac{1}{2} \psi(r_E) (\Delta\varphi)_f, \tag{3.9}$$

где

$$(\Delta\varphi)_f = \varphi_E - \varphi_P, \tag{3.10}$$

а функция $\psi(r)$ является ограничителем потока.

Значение переменной r определяется в центрах ячеек по формулам

$$r_P = \frac{(\Delta\varphi)_W}{(\Delta\varphi)_f}, \tag{3.11}$$

$$r_E = \frac{(\Delta\varphi)_S}{-(\Delta\varphi)_f}, \tag{3.12}$$

где

$$(\Delta\varphi)_W = 2(\Delta\varphi)_P - (\Delta\varphi)_f, \tag{3.13}$$

$$(\Delta\varphi)_S = 2(\Delta\varphi)_E + (\Delta\varphi)_f, \tag{3.14}$$

$$(\Delta\varphi)_P = ((\nabla\varphi)_P \cdot \Delta\vec{R}_{PE}), \tag{3.15}$$

$$(\Delta\varphi)_E = -((\nabla\varphi)_E \cdot \Delta\vec{R}_{PE}), \tag{3.16}$$

$$\Delta\vec{R}_{PE} = \vec{R}_E - \vec{R}_P. \tag{3.17}$$

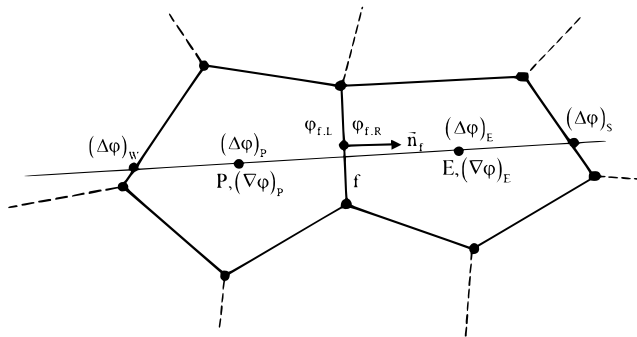


Рис. 3.1. Шаблон точек для линейной реконструкции решения

Fig. 3.1. The stencil points for linear reconstruction

Входящее в формулы (3.15) и (3.16) значение градиента примитивных параметров ($\nabla\varphi$) в ячейках сетки определяется методом Грина-Гаусса либо методом наименьших квадратов [17].

Необходимым условием невозрастания полной вариации (условие TVD) [8] для схем реконструкции первого порядка точности является ограничение функции $\psi(r)$ следующими условиями:

$$0 \leq \psi(r) \leq \min\{2r, 2\}, \quad (3.18)$$

а для схем второго порядка точности условием:

$$\psi_{\min}(r) \leq \psi(r) \leq \psi_{\max}(r), \quad (3.19)$$

где

$$\psi_{\min}(r) = \max\{0, \min(1, r)\}, \quad (3.20)$$

$$\psi_{\max}(r) = \max\{0, \min(2r, 1), \min(r, 2)\}. \quad (3.21)$$

В ряде работ были предложены различные алгоритмы определения функции ограничителя потока. В данной работе использовались новые ограничители, которые мы назвали Gibrid-1 и Gibrid-2:

$$1) \psi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r^{3/4}, & 0 < r \leq 1, \\ r^{1/4}, & 1 < r < 16, \\ 2, & 16 < r, \end{cases} \quad \text{Gibrid-1}, \quad (3.22)$$

$$2) \psi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r^{7/8}, & 0 < r \leq 1, \\ r^{1/8}, & 1 < r < 256, \\ 2, & 256 < r. \end{cases} \quad \text{Gibrid-2}. \quad (3.23)$$

Графики функций ограничителей потока Gibrid-1 и Gibrid-2 в допустимой области приведены на рис. 3.2.

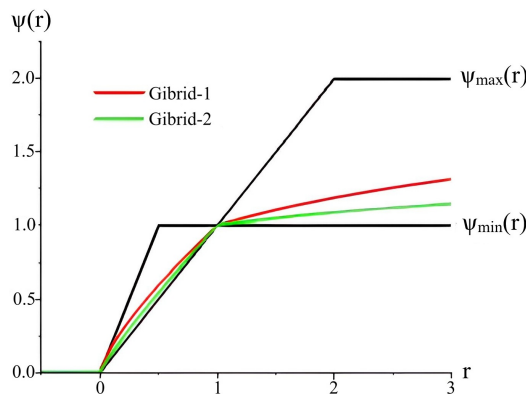


Рис. 3.2. Графики изменения функции ограничителя потока

Fig. 3.2. Flow limiter function graphs

Для одномерной квадратичной реконструкции параметров на неструктурированной сетке строится шаблон из четырех точек (рис. 3.3), которые определяются на прямой, проходящей ортогонально через центр грани. Координаты точек шаблона находятся пересечением прямой с ортогональными линиями, проведенными через центры ячеек. Значение параметров в точках шаблона определяются с использованием вычисления градиентов в центрах ячеек:

$$\varphi_{P'} = \varphi_P + ((\nabla\varphi)_P \cdot \Delta R_{PP'}). \tag{3.24}$$

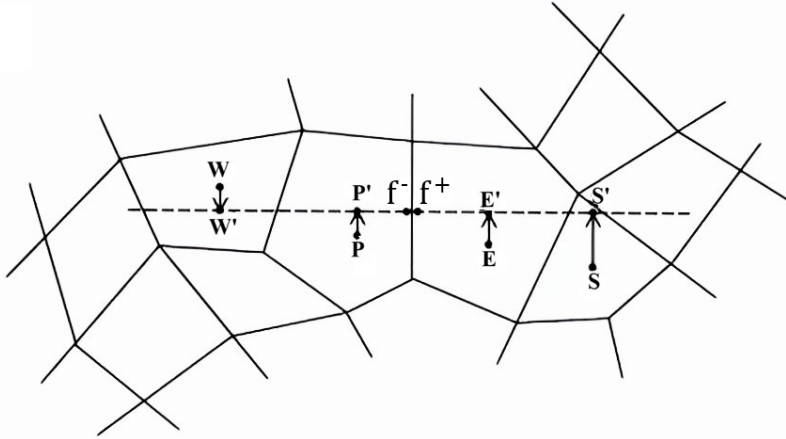


Рис. 3.3. Шаблон точек для квадратичной реконструкции решения

Fig. 3.3. The stencil points for quadratic reconstruction

В квадратичной реконструкции [8] параметры слева и справа от грани f определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_{f-} &= \varphi_{P'} + \frac{1}{6} \left[2(\Delta\varphi)_{P'}^+ + (\Delta\varphi)_{P'}^- \right], \\ \varphi_{f+} &= \varphi_{E'} - \frac{1}{6} \left[2(\Delta\varphi)_{E'}^- + (\Delta\varphi)_{E'}^+ \right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi)_{P'}^+ &= \text{minmod} \left\{ (\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), 2 \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{W'P'}|} (\varphi_{P'} - \varphi_{W'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{P'}^- &= \text{minmod} \left\{ 2(\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{W'P'}|} (\varphi_{P'} - \varphi_{W'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{E'}^- &= \text{minmod} \left\{ (\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), 2 \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{S'E'}|} (\varphi_{S'} - \varphi_{E'}) \right\}, \\ (\Delta\varphi)_{E'}^+ &= \text{minmod} \left\{ 2(\varphi_{E'} - \varphi_{P'}), \frac{|\Delta\vec{R}_{P'E'}|}{|\Delta\vec{R}_{S'E'}|} (\varphi_{S'} - \varphi_{E'}) \right\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для решения самой задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) могут использоваться различные допущения, приводящие к различным алгоритмам. В данной работе используются модификация алгоритмов из монографии [5]: звуковой (приближенный) распад разрыва и точное решение автомодельной задачи о распаде разрыва с кусочно-постоянными начальными параметрами потока.

Для расчета задачи о распаде разрыва, когда среды описываются сложными уравнениями состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon, C_\alpha), \quad (3.27)$$

созданные алгоритмы, в которых это уравнение состояния аппроксимируется двучленным уравнением состояния, требуют еще и обращенного уравнения состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$, что для табличных уравнений состояния является весьма проблематичным. В модифицированном алгоритме при решении задачи о распаде разрыва не требуется обращенного уравнения состояния.

В этом алгоритме внутренняя энергия на ударной волне определяется по соотношению на ударной волне

$$E = \varepsilon + \frac{1}{2}(P + p) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.28)$$

а на волне разрежения по двучленному уравнению состояния

$$E = \left(\frac{P + \gamma p_0}{R} - z_0 \right) \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (3.29)$$

где γ , p_0 и z_0 – параметры двучленного уравнения состояния [6].

Такой способ определения внутренней энергии за волной разрежения хорошо отражает постоянство энтропии, что было проверено на ряде тестовых расчетов.

При расчете осесимметричных задач возникает один счетный феномен, который проявляется в нарушении симметрии сферически симметричных течений. Одним из факторов, приводящих к нарушению симметрии, является ошибка в определении направления вектора скорости в предраспадных параметрах. В данной работе для уменьшения возникающей счетной ошибки в расчете осесимметричных задач используется алгоритм «доворота» вектора скорости.

Для этого вектор скорости в ячейках сетки представляется в виде

$$U = (u, w) = (U \cos \psi, U \sin \psi) = (U, \psi), \quad (3.30)$$

где U – вектор скорости, а ψ – угол между вектором скорости и осью x . Значение угла вектора скорости на грани определяется по формуле

$$\psi_f = \psi_P + (\nabla \psi)_P \cdot \Delta R_{Pf}, \quad (3.31)$$

где градиент $(\nabla \psi)_P$ в ячейках сетки определяется методом Грина-Гаусса. Модуль вектора скорости на грани определяется по используемому в расчете алгоритму реконструкции определение предраспадных параметров потока.

Для применения параллельных вычислений проводится декомпозиция расчетной модели на заданное число процессоров. При этом на каждом процессоре формируется массив координат узлов внешних и внутренних границ всех регионов расчетной сетки. Затем для каждого фрагмента сетки формируются обменные слои ячеек. В процессе вычислений в конце каждого расчётного этапа выполняется обмен данными между процессорами. Межпроцессорное взаимодействие осуществляется с помощью асинхронных

функций библиотеки MPI – MPI_Irecv, MPI_Isend. По завершению расчётного шага выполняются коллективные операции при вычислении невязок решения, расчёта интегральных величин и определения нового значения расчётного шага по времени.

Расчетная методика проверена на ряде тестовых и модельных задач, принятых для тестирования двумерных методик [10–11]. В частности, была решена задача о сферически-симметричном движении газа, возникающем в результате взрыва в однородном веществе без противодействия [10]. Постановка задачи принята следующей.

В шаре радиусом $R_1^0 = 0.1$ (область 1) задана начальная внутренняя энергия единицы массы $\varepsilon_1^0 = 10^7$. Этот шар находится в бесконечном пространстве среды, имеющей начальную энергию $\varepsilon_2^0 = 0$, в расчетах задаваемым сферическим слоем $0.1 \leq R_2^0 \leq 0.2$ (область 2). Начальная плотность в областях 1 и 2 $\rho^0 = 1$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 1.4$. Закон движения фронта ударной волны $R(t)$ описывается соотношением [18]:

$$R(t) = \alpha \left(\frac{E_B}{\rho^0} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad (3.32)$$

где $E_B = \frac{4}{3} \pi (R_1^0)^3 \rho^0 \varepsilon_1^0 = 4.189 \cdot 10^4$ – энергия взрыва, α – константа, равная 1.0328 для случая $\gamma = 1.4$.

Расчеты для этой задачи были проведены на различном числе точек по радиусу. В области 1 по радиусу задавалось 10, 20 и 40 точек, в области 2: 100, 200 и 400 точек. По углу в обеих областях задавалось 30 точек. Ударная волна выделялась с $R = 0.2$. Расчет проводился до момента времени, когда ударная волна выходит на радиус $2000 R_1^0$. На рис. 3.4 приведены $R(t)$ -диаграммы движения фронта ударной волны, полученные в расчетах на разных сетках в сравнении с точным решением (3.32). Видно, что кривые практически совпадают.

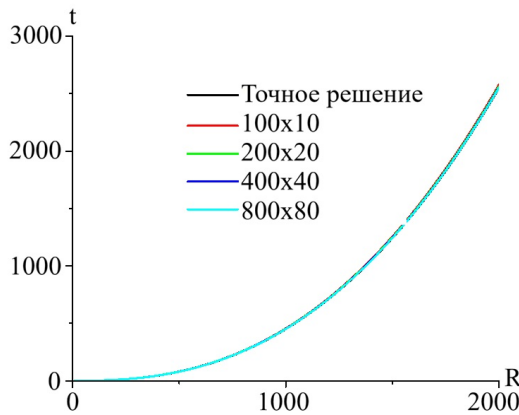


Рис. 3.4. $R(t)$ -диаграммы движения фронта ударной волны

Fig. 3.4. $R(t)$ -diagram of the shock front motion

На рис. 3.5 показаны изменения относительной погрешности

$$\delta = \left| \frac{R_{\text{уб}} - R(t)}{R(t)} \right| \quad (3.33)$$

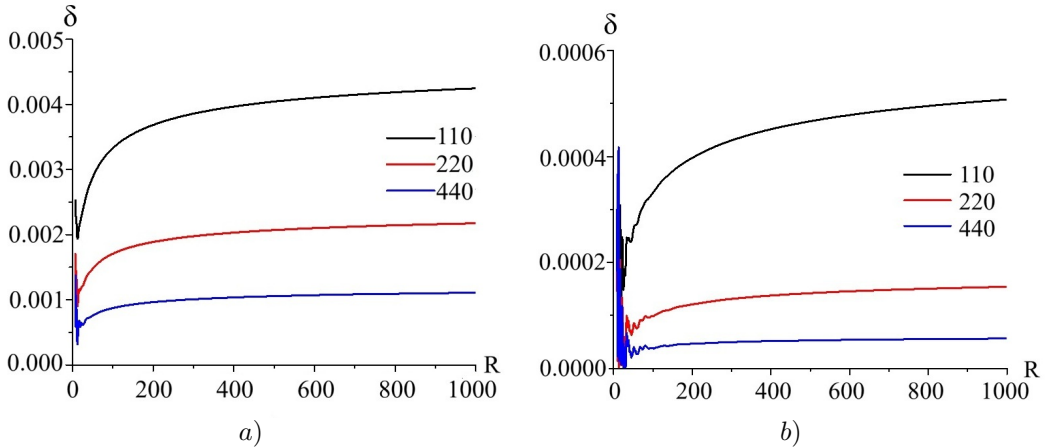


Рис. 3.5. Зависимости относительной погрешности определения координаты ударной волны от числа точек по радиальной координате: а) базовая схема Годунова, б) схема с линейной реконструкцией

Fig. 3.5. Dependences of the relative error in determining the coordinates of a shock wave on the number of points along the radial coordinate: а) basic Godunov scheme, б) scheme with linear reconstruction

определения положения ударной волны ($R_{УВ}$) на разных сетках без реконструкции (рис. 3.5а) и с использованием линейной реконструкции (рис. 3.5б). Оценка порядка сходимости (β) численного решения по формуле

$$\beta = \frac{1}{\ln 2} \frac{\ln \varepsilon_h}{\ln \varepsilon_{h/2}}, \quad (3.34)$$

для базовой схемы дает значение $\beta_B \approx 1$, а для схемы с линейной реконструкцией $\beta_R \approx 1.5$.

В то же время отношение погрешностей базовой схемы ($\varepsilon_B = M_B h^{\beta_B}$) к погрешности схемы с реконструкцией ($\varepsilon_R = M_R h^{\beta_R}$) в большей степени определяется отношением M_B/M_R , которое говорит о разрешающей способности разностной схемы. На этой задаче $M_B/M_R \approx 10$, т.е. расчеты с реконструкцией на порядок точнее, чем расчеты без реконструкции. Расчеты для этой задачи были проведены с использованием различных ограничителей. Наилучшие результаты были получены с предложенным ограничителем Gibrid-2. Результаты расчетов с квадратичной реконструкцией показали такую же погрешность, что и результаты расчетов с линейной реконструкцией.

4. Результаты расчетов распространения воздушной ударной волны

Рассматривается задача о распространении на значительные расстояния от эпицентра взрыва воздушной ударной волны, образующейся при взрыве горючих или взрывчатых веществ. Из опытов известно [12–13], что действие взрыва компактного заряда ВВ

произвольной формы на расстояниях, превышающих его характерные размеры, эквивалентно действию взрыва сферического заряда той же массы. Из теории подобия и размерности [18] следует, что при взрыве на границе области возмущенного движения газа на расстояниях, превышающих характерные размеры области выделения энергии, параметры на волне и структура потока за волной зависят только от параметров невозмущенного воздуха и энергии, выделившейся при взрыве. Все зависимые размерные параметры зависят только от трех безразмерных величин:

$$\gamma, \quad \lambda = \frac{\rho_1^{1/5} x}{E_{\text{ВВ}}^{1/5} t^{2/5}}, \quad \tau = \frac{p_1^{5/6} t}{E_{\text{ВВ}}^{1/3} \rho_1^{1/2}}, \quad (4.1)$$

где γ – показатель адиабаты, ρ_1 и p_1 – плотность и давление невозмущенного воздуха, а $E_{\text{ВВ}}$ – энергия взрыва.

Основным параметром ударной волны, определяющим ее воздействие на различные объекты, является избыточное давление Δp , которое зависит от определяющих параметров

$$\Delta p = \Psi(E_{\text{ВВ}}, \gamma, p_1, \rho_1, t, x_W), \quad (4.2)$$

где x_W – координата волны.

Для определения зависимости (4.2) для различных энергий взрыва при фиксированных параметрах невозмущенного воздуха достаточно провести один прецизионный расчет при взрыве произвольного ВВ с заданной энергией взрыва и получить две табличные зависимости:

$$\lambda = \lambda(\tau), \quad (4.3)$$

и

$$\Delta p = \Delta p(\lambda). \quad (4.4)$$

Отметим, что первая зависимость (4.3) является $R(t)$ -диаграммой ударной волны в безразмерных переменных, а вторая зависимость – изменением избыточного давления (амплитуды) на ударной волне в зависимости от безразмерного положения ударной волны.

По заданному избыточному давлению интерполяцией по таблице $\Delta p(\lambda)$ определяется безразмерная координата λ . Затем по таблице $\lambda = \lambda(\tau)$ определяется параметр τ . Для заданного расстояния x , на котором должен реализовываться заданный перепад давления, энергия взрыва и время прихода волны определяются из системы уравнений (4.1).

Поскольку для сферической ударной волны избыточное давление не зависит от формы и свойства ВВ, а определяется только энергией взрыва и параметрами воздуха, то в качестве взрывчатого вещества был взят тротил (ГНТ), поскольку энергия взрыва измеряется в тротиловом эквиваленте [19]. При взрыве 1 грамма тротила выделяется 1000 термохимических калорий или 4184 джоуля энергии.

Расчеты проводились в двухобластной постановке: область ВВ и область воздуха. В расчетах выделялась контактная граница и ударная волна. В области ВВ строилась неструктурированная сетка. В области воздуха строилась «лучевая» структурированная сетка с 30 точками по углу и 1000 точками по радиусу. Для описания термодинамических свойств тротила использовалось уравнение состояния Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) [12]. Невозмущенные параметры воздуха полагались следующими:

$$\rho_1 = 0.001225 \text{ г/см}^3, \quad p_1 = 1.01325 \text{ бар.}$$

На рис. 4.1 приведены расчетные зависимости $\lambda = \lambda(\tau)$. На рис. 4.2 – расчетная зависимость изменения избыточного давления на волне $\Delta p/p_1 = \Psi(\lambda)$. Эти зависимости были рассчитаны для значений энергии взрыва, приведенных на рисунках. Как видно из графиков, эти кривые полностью совпадают.

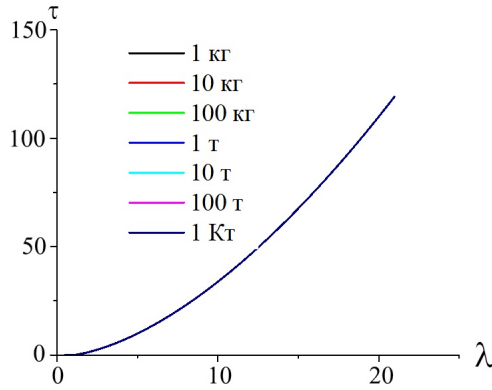


Рис. 4.1. $R(t)$ -диаграммы ударной волны для различных мощностей взрыва в безразмерных переменных $\lambda = \lambda(\tau)$

Fig. 4.1. $R(t)$ -diagram of the shock wave for various explosion energies in dimensionless variables $\lambda = \lambda(\tau)$

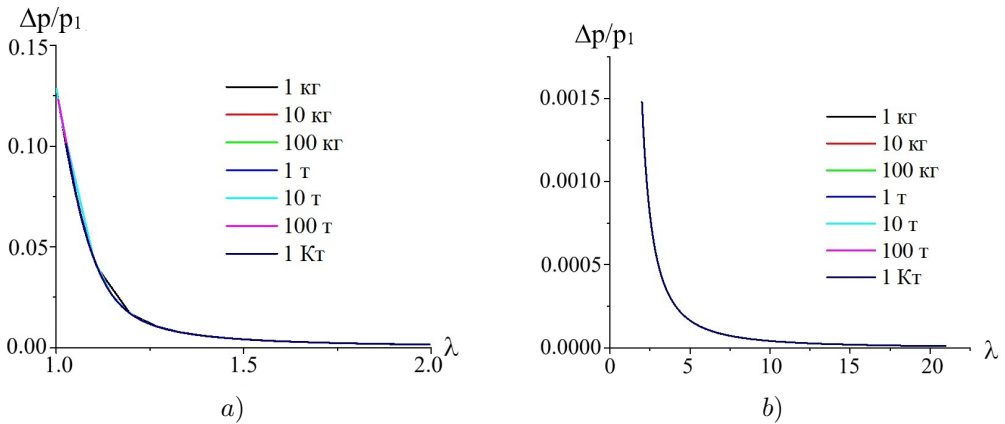


Рис. 4.2. Изменение избыточного давления на волне в зависимости от безразмерного параметра $\lambda = \lambda(\tau)$

Fig. 4.2. Overpressure variation on the wave depending on the dimensionless parameter $\lambda = \lambda(\tau)$

Для определения избыточного давления при взрыве заряда с заданной энергией вместо табличных зависимостей можно воспользоваться следующими аппроксимаци-

онными формулами:

$$\lambda(\tau) = \sum_{j=1}^7 C_j \tau^{1+\frac{1}{4}(j-1)}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda) = 10^4 \cdot \sum_{j=1}^7 C_j \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+\frac{1}{4}(j-1)}, \tag{4.6}$$

которые с погрешностью менее одного процента воспроизводят табличные зависимости. Значение констант аппроксимационных формул приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Константы аппроксимационных формул
Table 4.1. Constants of approximation formulas

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\lambda(\tau)$	1.6555	-0.68564	0.1251	-0.012425	$6.9912 \cdot 10^{-4}$	$-2.0997 \cdot 10^{-5}$	$2.6213 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda), \lambda < 50$	12.248	-123.75	498.74	-1024	1134.6	-642.41	144.26
$\frac{\Delta p}{p_1}(\lambda), \lambda > 50$	0.42468	-8.6729	74.543	-332.05	804.68	-1008.8	525.48

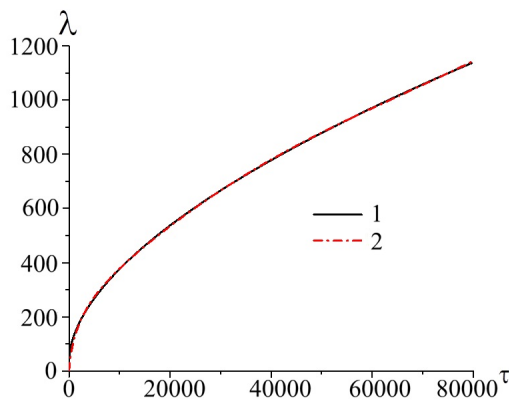


Рис. 4.3. Зависимость безразмерного положения ударной волны от безразмерного времени: 1 – расчетное значение, 2 – значение по аппроксимационной формуле (4.5)

Fig. 4.3. Dependence of dimensionless shock position on dimensionless time: 1 – computed value, 2 – value, approximated by (4.5)

Сравнение расчетных и аппроксимационных зависимостей приводится на рис. 4.3-4.4. На рис. 4.3 показаны зависимости безразмерного положения ударной волны от безразмерного времени $\lambda = \lambda(\tau)$, а на рис. 4.4 приведены зависимости безразмерного значения избыточного давления от безразмерного положения ударной волны $\Delta p/p_1 = \Psi(\lambda)$.

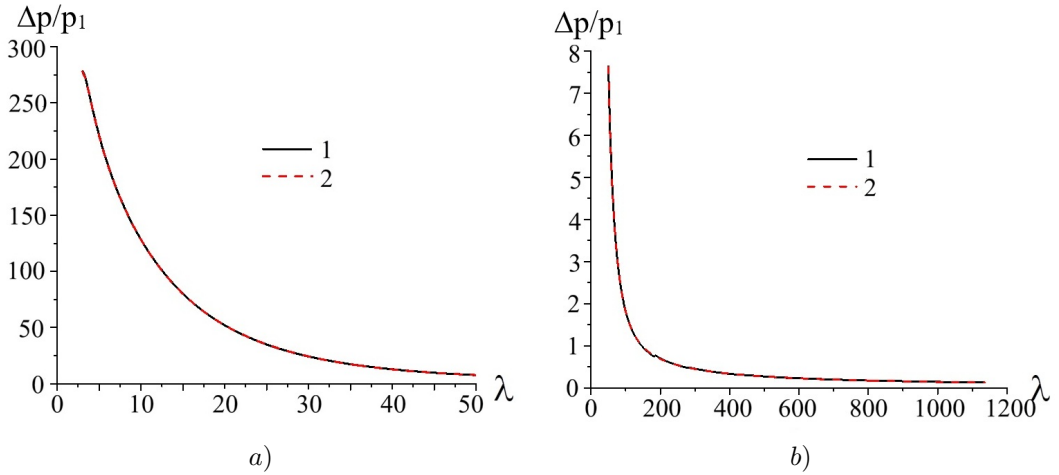


Рис. 4.4. Зависимость избыточного давления от безразмерного положения ударной волны, 1 – расчетное значение, 2 – значение по аппроксимационной формуле: а) изменение избыточного давления в интервале $5 < \lambda < 50$, б) изменение избыточного давления в интервале $50 < \lambda < 1200$

Fig. 4.4. Dependence of overpressure on the dimensionless position of the shock wave, 1 – the calculated value, 2 – the value according to the approximation formula: а) change in excess pressure in the range $5 < \lambda < 50$, б) change in excess pressure in the range $50 < \lambda < 1200$

Интересно отметить, что расчетные структуры потока на расстояниях $R_{УВ}/R_{ВВ} < 100$ полностью воспроизводят структуры потока за волной, исследованные экспериментально и расчетно в целом ряде работ, обобщение которых дано в монографиях [12–13]. В данной работе с использованием алгоритма выделения ударной волны и подвижных сеток была численно определена структура потока для $100 < R_{УВ}/R_{ВВ} < 10000$. Начиная с расстояния $R_{УВ}/R_{ВВ} \geq 200$ происходит отрыв волновой структуры от эпицентра взрыва, где образуется зона неподвижного газа с атмосферным давлением. Отошедшая волновая структура приобретает форму уединенной N-волны, предсказанной в работе [14]. На рис. 4.5 показано распределение давления и модуля вектора скорости на момент времени, в который $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$. Избыточное давление на этот момент времени составляет 160 Па, т.е. на расстояния $R_{УВ}/R_{ВВ} > 5000$ ударная волна вырождается в звуковую волну. Профили волны имеют подобное распределение для различных мощностей взрыва, а длительность звукового удара определяется только массой заряда.

Для описания распространения N-волны был проведен расчет взрыва сферического заряда массой 1 кг в воздухе. На момент времени, когда ударная волна прошла расстояние 36.7 м, были записаны профили расчетных параметров. На рис. 4.6 показаны расчетные кривые распределений давления и модуля вектора скорости по радиальной координате на этот момент времени.

С использованием полученных данных был проведен расчет распространения N-волны до расстояния 350 м. Расчет проводился в цилиндрических координатах на подвижной сетке. В этой задаче верхняя и нижняя границы являются границами удар-

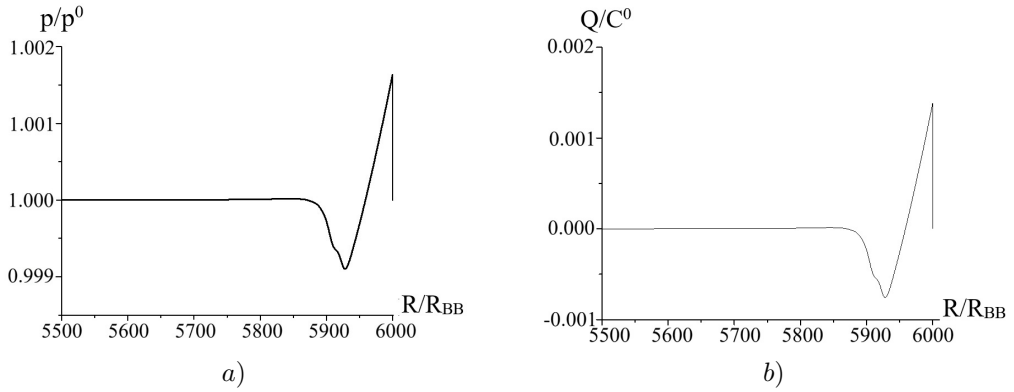


Рис. 4.5. Распределение параметров на момент времени $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$:
а) давление, б) модуль скорости

Fig. 4.5. Distribution of parameters at the time $R_{УВ}/R_{ВВ} = 6000$:
а) pressure, б) velocity module

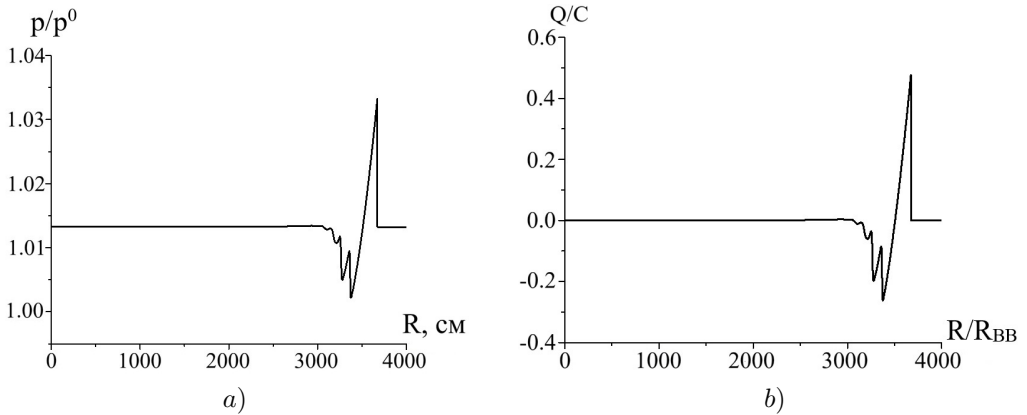


Рис. 4.6. Распределение параметров на момент времени $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$:
а) давление, б) модуль скорости

Fig. 4.6. Distribution of parameters at the moment of time $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$:
а) pressure, б) velocity module

ной волны. Боковые границы являются осями симметрии. Расчетная сетка содержит 180×400 точек. На рис. 4.7 показана расчетная геометрия и поле давления на начальный момент времени. На рис. 4.8 показана расчетная геометрия и поле давления на момент времени, когда ударная волна достигла 300 м. На рис. 4.9 показаны профили давлений на последовательные моменты времени, когда ударная волна выходит на заданные радиусы. На этом рисунке в качестве нулевой координаты взято значение радиуса, где избыточное давление обращается в ноль. Из анализа результатов следует, что фаза отрицательного избыточного давления имеет практически постоянный размер и постоянную длительность. С течением времени ее минимальное значение асимптотиче-

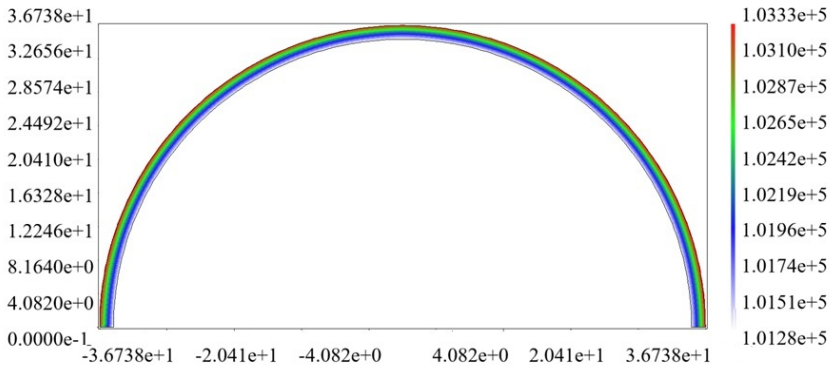


Рис. 4.7. Геометрия области и распределение давления на начальный момент времени: $R_{УВ} = 36.7$ м, $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$

Fig. 4.7. Domain geometry and pressure distribution at the initial moment of time: $R_{УВ} = 36.7$ м, $R_{УВ}/R_{ВВ} = 700$

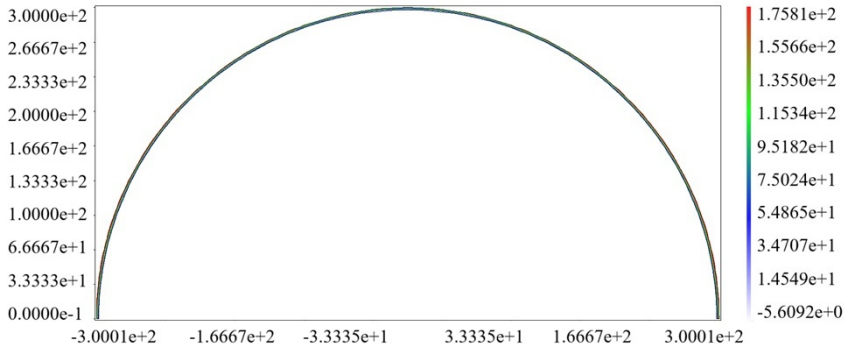


Рис. 4.8. Геометрия области и распределение давления на момент времени, когда $R_{УВ} = 300$ м

Fig. 4.8. Domain geometry and pressure distribution at the time when $R_{УВ} = 300$ m

ски стремится к нулю. Фаза положительного избыточного давления увеличивается с течением времени пропорционально $(R_{УВ}/R_{УВ}^0)^{1/3}$, а максимальное избыточное давление асимптотически стремится к нулю, что хорошо описывается зависимостями (4.5)–(4.6).

5. Заключение

В работе создана двумерная параллельная методика расчета уравнений газовой динамики на подвижной неструктурированной сетке. Методика предназначена для расчета распространения ударной волны в различных средах. С использованием методики проведены расчеты распространения воздушной ударной волны от мгновенного взрыва сферического заряда ВВ на большие расстояния. Для близких расстояний результаты

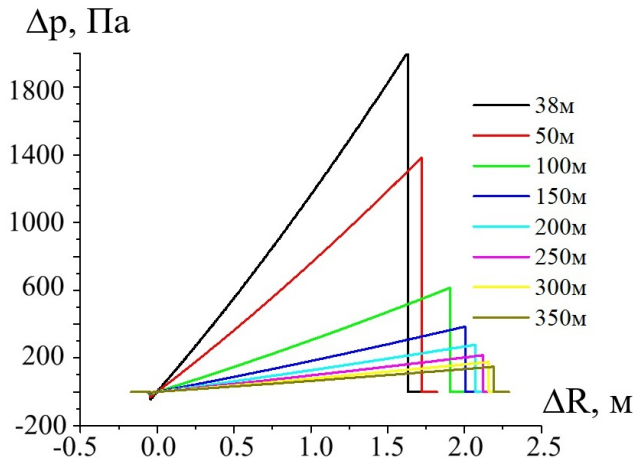


Рис. 4.9. Профили давления на последовательные моменты времени

Fig. 4.9. Pressure profiles at successive time moments

расчетов хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными, представленными в [12–13]. Для больших расстояний получена аппроксимационная зависимость избыточного давления от пройденного расстояния. Численно определена структура потока за волной, которая после прохождения некоторого расстояния принимает форму N-волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бруд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ. Подземные взрывы (Сб. «Механика», № 3). М.: Мир, 1975. 164 с.
2. Зайдель Р. М. Влияние начальной разноплотности на движение ударной волны // *Изв. АН СССР, МЖГ*. 1968. № 4. С. 152–162.
3. Vishiac E. T. The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks. *Astrophysical Journal*. 1983. Vol. 274, No. 1. P. 152–167.
4. Ктиторов В. М. // *ВАНТ. Сер. ТуПФ*. 1984. № 2(2). С. 28.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // *ЖВМиМФ*. Т. 1, № 6. С. 1020–1050.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ*. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.

8. Hirsch Ch. Numerical computation of internal & external flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Wiley, 1988. 515 p.
9. Матяш С. В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации // *Ученые записки ЦАГИ*. 2005. Т. 36, № 3–4. С. 42–50.
10. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требование к тестам. Тесты 1–7 // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 2. 1991. С. 3–9.
11. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 2. Требование к тестам. Тесты 8–13 // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 2. 1992. С. 3–13.
12. Физика взрыва. Т. 1 / Под ред. Л. П. Орленко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 824 с.
13. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 855 с.
14. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 504–512.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
16. Веселова Е. А., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. Методика «ЛОГОС-ВОЛНА» расчета двумерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности на подвижных неструктурированных сетках // *ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. Вып. 4. 2021. С. 50–66.
17. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. 3rd rev. ed. Springer, 2002. 596 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99693-6
18. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 438 с.
19. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.

*Поступила 25.12.2025; доработана после рецензирования 06.02.2026;
принята к публикации 25.02.2026*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. H. L. Brode, *Computer calculations of explosions. Underground explosions*, Mir, Moscow, 1975 (In Russ.), 164 p.

2. R. M. Zaidel', "Influence of initial density difference on shock wave motion", *Izv. AN SSSR, MZhG*, 1968, no. 4, 152–162 (In Russ.).
3. E. T. Vishiac, "The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks", *Astrophysical Journal*, **274**:1 (1983), 152–167.
4. V. M. Ktitorov, *VANT, Ser. TiPF*, 1984, no. 2, 28 (In Russ.).
5. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, G. P. Prokopov, "Difference scheme for two-dimensional unsteady gas dynamics problems and calculation of flow with a detached shock wave", *ZhVMiMF*, **1**:6, 1020–1050 (In Russ.).
6. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, A. N. Kraiko, G. P. Prokopov, *Numerical solution of multidimensional gas dynamics problems*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 400 p.
7. V. P. Kolgan, "Application of the principle of minimum derivative values to the construction of finite-difference schemes for calculating discontinuous solutions of gas dynamics", *Uchenye zapiski TsAGI*, **3**:6 (1972), 68–77 (In Russ.).
8. Ch. Hirsch, *Numerical computation of internal & external flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, 1988.
9. S. V. Matyash, "A new method for using the principle of minimum increments in second-order approximation numerical schemes", *Uchenye zapiski TsAGI*, **36**:3–4 (2005), 42–50 (In Russ.).
10. Yu. A. Bondarenko, B. L. Voronin, V. I. Delov et al., "Description of a test system for two-dimensional gas-dynamic techniques and programs. Pt. 1. Requirements for tests. Tests 1–7", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 1991, no. 2, 3–9 (In Russ.).
11. Yu. A. Bondarenko, B. L. Voronin, V. I. Delov et al., "Description of a test system for two-dimensional gas-dynamic techniques and programs. Pt. 2. Requirements for tests. Tests 8–13", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 1992, no. 2, 3–13 (In Russ.).
12. *Physics of Explosion. Vol. 1*, ed. L. P. Orlenko, FIZMATLIT, Moscow, 2002 (In Russ.), 824 p.
13. K. P. Stanyukovich, *Unsteady Motion of Continuous Media*, Nauka, Moscow, 1971 (In Russ.), 855 p.
14. L. D. Landau, "On shock waves at large distances from their place of origin", *Collected Works. Vol. 1*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.).
15. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Hydrodynamics*, Nauka, Moscow, 1988 (In Russ.), 733 p.
16. E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, "'LOGOS-VOLNA' technique for calculating two-dimensional gas dynamics problems with heat conduction on moving unstructured meshes", *VANT. Ser. Mat. Model. Fiz. Protsessov*, 2021, no. 4, 50–66 (In Russ.).
17. J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, 3rd rev. ed., Springer, 2002, 596 p.

18. L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Nauka, Moscow, 1981 (In Russ.), 438 p.
19. Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russ.), 688 p.

Submitted 25.12.2025; Revised 06.02.2026; Accepted 25.02.2026

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.