

DOI 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

## Численное и теоретическое исследование интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором

А. Н. Тында, Д. Р. Вечкасов

*ФГБОУ ВО Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию уравнений Вольтерра с интегральным оператором, содержащим след искомого решения в виде его значений в некоторых точках множества. К уравнениям с нагрузками сводится ряд классических краевых задач эллиптического, гиперболического, параболического, а также смешанного типа. В частности, краевая задача Гурса для уравнения гиперболического типа эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Вопросы численного решения нагруженных функциональных уравнений в интегральной форме в литературе недостаточно изучены. В рамках данной работы установлены условия существования и единственности решений интегральных уравнений с локальными нагрузками. Построен коллокационный численный метод, основанный на аппроксимации решения полиномиальными сплайнами переменного порядка. Порядки многочленов, из которых составлен сплайн, определяются адаптивно и согласуются с максимальным шагом на каждом участке сетки узлов, которая, в свою очередь, строится с учетом распределения неизвестных нагрузок. В процессе дискретизации для определения коэффициентов системы уравнений интегралы аппроксимируются квадратурными суммами Гаусса и формируется общая система линейных алгебраических уравнений относительно всех неизвестных параметров сплайна. Доказана сходимость такой аппроксимации, приведен ряд численных результатов, подтверждающих эффективность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения Вольтерра, нагруженный оператор, существование решения, аппроксимация сплайнами, сходимость, оценка погрешности

**Для цитирования:** Тында А. Н., Вечкасов Д. Р. Численное и теоретическое исследование интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2026. Т. 28, № 1. С. 67–78. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

*Об авторах:*

**Тында Александр Николаевич**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)

**Вечкасов Данила Романович**, магистрант кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8349-9173>, [vechkasov.danila@yandex.ru](mailto:vechkasov.danila@yandex.ru)

MSC2020 65R20

© А. Н. Тында, Д. Р. Вечкасов



# Numerical and theoretical study of Volterra integral equations with a locally loaded operator

A. N. Tynda, D. R. Vechkasov

*Penza State University (Penza, Russian Federation)*

**Abstract.** The paper is devoted to the study of Volterra equations with an integral operator containing the trace of the unknown solution in the form of its values at certain points of the set. A number of classical boundary value problems of elliptic, hyperbolic, parabolic, and mixed types are reduced to equations with loads. In particular, the Goursat boundary value problem for a hyperbolic type equation is equivalent to a loaded Volterra integral equation of the second kind. The issues of numerical solution of loaded functional equations in integral form have not been sufficiently studied in the literature. Within the framework of this work, the conditions for the existence and uniqueness of solutions to integral equations with local loads are established. A collocation-type numerical method is constructed based on the approximation of the solution by polynomial splines of variable order. The orders of the polynomials that make up the spline are determined adaptively and are consistent with the maximum step in each section of the node grid, which is constructed taking into account the distribution of unknown loads. In the process of discretization, in order to determine the coefficients of the system of equations, the integrals are approximated by Gauss quadrature sums and a general system of linear algebraic equations is formed with respect to all unknown parameters of the spline. The convergence of such an approximation is proved, a number of numerical results are given, confirming the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** Volterra integral equations, loaded operator, existence of a solution, spline approximation, convergence, error estimate

**For citation:** A. N. Tynda, D. R. Vechkasov. Numerical and theoretical study of Volterra integral equations with a locally loaded operator. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 28:1(2026), 67–78. DOI: 10.15507/2079-6900.28.202601.67-78

*About the authors:*

**Aleksandr N. Tynda**, Ph. D. (Phys. and Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6023-9847>, [tyndaan@mail.ru](mailto:tyndaan@mail.ru)

**Danila R. Vechkasov**, Master's student of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, 440026, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8349-9173>, [vechkasov.danila@yandex.ru](mailto:vechkasov.danila@yandex.ru)

## 1. Введение и постановка задачи

Функциональные уравнения различных типов с нагрузками операторов систематизированы в монографии А.М. Нахушева [1]. В ней поставлен широкий спектр задач, а также показано, как к уравнениям с нагрузками сводится ряд классических краевых задач всех типов (эллиптических, гиперболических, параболических, а также смешанного типа), дана обширная библиография. Однако для уравнений с нагруженными интегральными операторами в литературе практически отсутствует какая-либо

информация о численных подходах к их решению, вероятно, ввиду их сложности. Это обстоятельство мотивировало постановку задачи в данной работе.

Рассмотрим, следуя книге [1], интегральное уравнение следующего вида

$$a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) = \lambda \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad t \in \Omega = [t_0, T], \quad (1.1)$$

где  $K(t, s)$  – ядро интегрального оператора,  $t_j, j = \overline{1, m-1}$  – заданные фиксированные точки сегмента  $[t_0, T]$ , причем  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ ;  $\lambda$  – постоянный параметр;  $f(t), a_j(t) \in C_{[t_0, T]}, j = \overline{0, m-1}$ .

Уравнение (1.1) можно записать в операторном виде

$$Vx(t) = f(t),$$

где оператор  $V$ , определенный следующим образом

$$Vx(t) \equiv a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) - \lambda \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds,$$

является локально нагруженным оператором, так как содержит след искомого решения в виде его значений  $x(t_j), j = \overline{1, m-1}$ , в некоторых точках множества  $\Omega$ .

Численный метод решения уравнений вида (1.1), основанный на аппроксимации решения кусочно-линейной функцией предложен в [2]. В работе [3] проводится теоретическое исследование уравнений с нагрузками в виде функционалов. В работе [4] исследуется интегральное уравнение Гаммерштейна с нагрузками, имеющее тривиальное решение при любом значении параметра, входящего в уравнение. Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты уравнения и те значения параметра (точки бифуркации), в окрестности которых уравнение имеет нетривиальные вещественные решения, исследована асимптотика таких ветвей решений.

Численному исследованию интегральных динамических моделей, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра и Фредгольма с разрывными ядрами, посвящены работы [5] и [6], интегральными уравнениями Вольтерра с задержками – работа [7]. В работе [8] исследована нелокальная задача для нагруженного уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа с интегральным оператором в двусвязной области. В работе [9] одномерная краевая задача для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной сведена к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, содержащим функцию типа Райта.

В данной работе предлагается сплайн-коллокационный метод: решение аппроксимируется полиномиальными сплайнами переменного порядка, который определяется на каждом участке сетки узлов с учетом распределения неизвестных нагрузок.

## 2. Существование и единственность решения

Для исследования разрешимости уравнения (1.1) перепишем его в виде

$$b(t)x(t) + \sum_{k=0}^m a_k(t)x(t_k) - \lambda \int_A^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad (2.1)$$

где  $t \in \Omega = [A, B]$ ,  $f(t)$ ,  $b(t)$  и  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_m(t) \in C(\Omega)$ ,  $\lambda$  – свободный параметр,  $A < t_0 < t_1 < \dots < t_m < B$ .

Предполагая, что  $b(t) \neq 0$  на всем сегменте  $\Omega$ , разделим обе части уравнения (2.1) на  $b(t)$ . Получим следующую задачу:

$$\tilde{V}x = \tilde{f} - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)x(t_k), \quad (2.2)$$

где  $\tilde{V}x = x(t) - \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)x(s)ds$ ;  $\tilde{a}_k(t) = \frac{a_k(t)}{b(t)}$ ,  $k = \overline{0, m}$ ;  $\tilde{K}(t, s) = \frac{K(t, s)}{b(t)}$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in \Omega$ .

Пусть существуют функции  $\tilde{x}_{\tilde{f}}(t), \tilde{x}_0(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t)$ , такие, что

$$\tilde{V}\tilde{x}_{\tilde{f}} = \tilde{f}, \quad \tilde{V}\tilde{x}_0 = -\tilde{a}_0(t), \quad \tilde{V}\tilde{x}_1 = -\tilde{a}_1(t), \quad \dots, \quad \tilde{V}\tilde{x}_m = -\tilde{a}_m(t).$$

Тогда решением уравнения (2.2), а, значит, и (2.1) является функция

$$x(t) = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t) + \sum_{k=0}^m x(t_k)\tilde{x}_k(t). \quad (2.3)$$

Обозначим  $x_k = x(t_k)$ ,  $k = \overline{0, m}$ ,  $\tilde{x}_j(t_i) = \tilde{x}_j^i$ .

Определить  $x_k$  можно из системы

$$\begin{cases} x_0 = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_0) + x_0\tilde{x}_0^0 + x_1\tilde{x}_1^0 + \dots + x_m\tilde{x}_m^0, \\ x_1 = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_1) + x_0\tilde{x}_0^1 + x_1\tilde{x}_1^1 + \dots + x_m\tilde{x}_m^1, \\ \dots \\ x_m = \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_m) + x_0\tilde{x}_0^m + x_1\tilde{x}_1^m + \dots + x_m\tilde{x}_m^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

В матричной форме система (2.4) имеет следующий вид:

$$QX = -\tilde{X}_f,$$

где  $X = (x_0, x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $\tilde{X}_f = (\tilde{x}_{\tilde{f}}(t_0), \dots, \tilde{x}_{\tilde{f}}(t_m))^T$ ,  $q_{ij}$  – компоненты матрицы  $Q$ :

$$q_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_i^i - 1, & i = j \\ \tilde{x}_i^j, & i \neq j. \end{cases}$$

Получив все  $x_k$ , можно однозначно определить функцию  $x(t)$  из (2.3).

Решение уравнения (2.2) существует и единственно при выполнении следующих условий:

1. Функции  $b(t)$ ,  $a_0(t)$ ,  $a_1(t)$ ,  $\dots$ ,  $a_m(t)$ ,  $f(t)$  непрерывны на  $\Omega$ .
2. Функция  $K(t, s)$  непрерывна в области  $S = \{A \leq t \leq B, A \leq s \leq B\}$ .
3. Система (2.4) имеет единственное решение при условии  $\det Q \neq 0$ .

### 3. Аппроксимация полиномиальными сплайнами

Пусть на сегменте  $\Omega$  задана сетка  $v$  из множества точек  $v_i, i = \overline{0, N}$ , включающая в себя точки  $t_0, t_1, \dots, t_m$ .

Построим на этой сетке сплайн из  $l+1$  многочленов Лагранжа  $L_0(t), L_1(t), \dots, L_l(t)$ , каждый из которых производит интерполяцию по  $n_0, n_1, \dots, n_l$  точкам сетки  $v$ . Наборы узлов интерполяции обозначим через  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_l$ , соответственно

$$\Psi_0 = \{\psi_0^0, \psi_1^0, \dots, \psi_{n_0-1}^0\}, \quad \Psi_1 = \{\psi_0^1, \psi_1^1, \dots, \psi_{n_1-1}^1\}, \quad \dots, \quad \Psi_l = \{\psi_0^l, \psi_1^l, \dots, \psi_{n_l-1}^l\}.$$

При этом узлы выбираются таким образом, чтобы сплайн, составленный из интерполяционных полиномов, был непрерывным.

$$\psi_0^k = \psi_{n_{k-1}-1}^{k-1}, \quad k = \overline{1, l}.$$

Многочлены Лагранжа имеют вид

$$L_0(t) = \sum_{k=0}^{n_0-1} x(\psi_k^0)l_k^0(t), \quad L_1(t) = \sum_{k=0}^{n_1-1} x(\psi_k^1)l_k^1(t), \quad \dots, \quad L_l(t) = \sum_{k=0}^{n_l-1} x(\psi_k^l)l_k^l(t),$$

где

$$l_j^i(t) = \frac{(t - \psi_0^i)(t - \psi_1^i) \dots (t - \psi_{j-1}^i)(t - \psi_{j+1}^i) \dots (t - \psi_{n_i}^i)}{(\psi_j^i - \psi_0^i)(\psi_j^i - \psi_1^i) \dots (\psi_j^i - \psi_{j-1}^i)(\psi_j^i - \psi_{j+1}^i) \dots (\psi_j^i - \psi_{n_i}^i)}.$$

Пусть  $r = \{r_0, r_1, \dots, r_{l+1}\}$  – индексы точек сетки  $v_i, i = \overline{0, N}$ , которые используются в качестве последнего узла для многочлена  $L_{k-1}(t)$  и начального узла для  $L_k(t)$ , за исключением многочлена  $L_0(t)$ , который не имеет предшествующего, и многочлена  $L_l(t)$ , который не имеет последующего. В индексы  $r$  включим 0 и  $N$ .

Среди индексов  $r$  обязательно должны быть такие, что

$$r_0 = 0, \quad t_k = v_i, \quad k = \overline{0, m}, \quad i \in r, \quad r_{l+1} = N.$$

Множество индексов  $r$  включают в себя такие индексы  $r_i$ , в которых точки  $v_{r_i}$  совпадают с точками нагрузки  $t_0, t_1, \dots, t_m$ .

В результате будет получен непрерывный сплайн  $S_{v_xr}(t)$ , составленный из многочленов Лагранжа  $L_0(t), L_1(t), \dots, L_l(t)$ , построенных с использованием наборов  $v, x, r$ :

$$S_{v_xr}(t) = S[v, x, r],$$

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_N\}, \quad x = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \quad r = \{r_0, r_1, \dots, r_{l+1}\}.$$

Введем также множество индексов  $q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, q \subset r$ , таких что

$$v_{q_k} = t_k, \quad k = \overline{0, m}.$$

Переобозначим точки внутри отрезка  $[A, B]$ :

$$\varphi = \{A, t_0, t_1, \dots, t_m, B\} = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+2}\}, \\ \varphi_0 = A, \quad \varphi_k = t_{k-1}, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad \varphi_{m+2} = B.$$

Пусть также

$$\Delta_k = [\varphi_k, \varphi_{k+1}], \quad |\Delta_k| = \varphi_{k+1} - \varphi_k, \quad k = \overline{0, m+1}.$$

Отдельно рассмотрим случай, когда на каждом сегменте  $\Delta_k$  задана равномерная сетка с длиной шага  $h_k$ . Число узлов на сегменте составляет

$$n_k = \left[ \frac{|\Delta_k|}{h_k} \right] + 1.$$

В данном случае узлы сетки  $v_i$  и точки  $\psi_i^k, q_i$  можно определить следующим образом

$$v_{i+j} = \varphi_i + jh_i, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n_i - 1},$$

$$q_0 = n_0 - 1, \quad q_i = i + 1 + \sum_{k=1}^{i+1} (n_k - 2), \quad i = \overline{1, m}.$$

В зависимости от выбора индексов  $r$  можно задать различные виды сплайнов из многочленов Лагранжа. В данном случае ограничимся лишь случаем, когда на каждом из сегментов  $\Delta_k$  задан сплайн из многочленов Лагранжа по  $P_k$  точкам с расстоянием между узлами меньше, чем наперед заданное  $h$ .

Число узлов  $n_k$  на каждом сегменте для данного типа сетки можно определить следующим образом

$$\alpha_k = \left[ \frac{|\Delta_k| + h(1 - P_k)}{h(P_k - 1)} \right] + 2, \quad n_k = P_k + (P_k - 1)(\alpha_k - 1).$$

Здесь  $\alpha_k$  определяет число многочленов Лагранжа степени  $P_k - 1$  на сегменте  $\Delta_k$ . Число  $l$  определяется как общее число многочленов Лагранжа на множестве  $\Omega$

$$l = \sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k.$$

Индексы  $r_k$  можно определить следующим образом

$$r_0 = 0, \quad r_{j+k} = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i(P_i - 1) + k(P_j - 1), \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{1, \alpha_j + 1},$$

где  $j$  удовлетворяет условию  $\alpha_j \leq r_{j+k} \leq \alpha_{j+1}$ .

После того как была построена сетка узлов, можно применить метод коллокаций для решения уравнения (2.1). Подставим некоторую точку  $v_i$  в уравнение (2.1). Получим

$$b(v_i)x(v_i) + \sum_{k=0}^m a_k(v_i)x(t_k) - \lambda \int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds = f(v_i).$$

Введем функцию от индексов  $p, q, k, i$  и  $j$ :

$$I(p, q, k, i, j) = \int_{v_p}^{v_q} K(v_k, s)l_j^i(s)ds.$$

Пусть также

$$x(v_k) = x_k, \quad k = \overline{0, N}.$$

Тогда

$$\int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds = x_0\nu + \sum_{k=0}^{u-1} \sum_{j=r_k+1}^{r_{k+1}-1} x_j I(r_k, r_{k+1}, i, k, j - r_k) +$$

$$+ \sum_{j=r_u+1}^{r_{u+1}} x_j I(r_u, i, i, u, j - r_u) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{u-1} (x_{r_k} (I(r_{k-1}, r_k, i, k - 1, r_k - r_{k-1}) + I(r_k, r_{k+1}, i, k, 0))) +$$

$$+ x_{r_u} (I(r_{u-1}, r_u, i, u - 1, r_u - r_{u-1}) + I(r_u, i, i, u, 0)), \quad (3.1)$$

где  $r_u \leq i \leq r_{u+1}$ .

Величина  $\nu$  определяется как

$$\nu = \begin{cases} I(0, i, i, 0, 0), & u = 0 \\ I(0, r_1, i, 0, 0), & u \neq 0. \end{cases}$$

Интеграл представляется в таком виде, чтобы каждый из  $x_j, j = \overline{0, r_{u+1}}$  присутствовал в сумме лишь один раз. Это необходимо для формирования системы линейных алгебраических уравнений

$$QX = F, \quad (3.2)$$

$$X = \{x_i\}, F = \{f(v_i)\}, \quad i = \overline{0, N}.$$

Для упрощения выкладок матрицу  $Q$  составим построчно, представив каждую строку в виде вектора  $Q_i$

$$Q_i = M_i + H_i - \lambda D_i, \quad i = \overline{0, N},$$

где

$$(M_i)_j = \begin{cases} b(v_i), & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad j = \overline{0, N},$$

$$(H_i)_j = \begin{cases} a_k(v_i), & j = q_k \\ 0, & j \neq q_k \end{cases}, \quad j = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Вектор  $D_i$  содержит в себе коэффициенты, полученные в результате аппроксимации функции, являющейся результатом вычисления интеграла  $\int_A^{v_i} K(v_i, s)x(s)ds$ .

Компоненты вектора  $D_i$  можно получить следующим образом

$$(D_i)_j = \begin{cases} I(0, i, i, 0, 0), & j = 0, \quad u = 0, \\ I(0, r_1, i, 0, 0), & j = 0, \quad u \neq 0, \\ I(r_k, r_{k+1}, i, k, j - r_k), & k = \overline{0, u-1}, \quad j = \overline{r_k+1, r_{k+1}-1}, \\ I(r_{k-1}, r_k, i, k-1, r_k - r_{k-1}) + I(r_k, r_{k+1}, i, k, 0), & k = \overline{1, u-1}, \quad j = r_k, \\ I(r_u, i, i, u, j - r_u), & j = \overline{r_u+1, r_{u+1}}, \\ I(r_{u-1}, r_u, i, u-1, r_u - r_{u-1}) + I(r_u, i, i, u, 0), & j = r_u, \quad u \neq 0, \\ 0, & j > r_{u+1}. \end{cases}$$

#### 4. Сходимость метода

Будем рассматривать некоторый сегмент  $\Delta_h^P$ , на котором искомая функция приближается многочленом Лагранжа  $L_h^P(t)$  по  $P$  точкам с расстоянием  $h$  между ними

$$L_h^P(t) = \sum_{i=0}^{P-1} x_i l_i(t).$$

Уравнение (2.2) представим в операторном виде

$$x = Hx + \tilde{f}, \quad Hx = \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)x(s)ds - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)x(t_k). \quad (4.1)$$

Пусть существует последовательность множеств непрерывных функций  $C_{h_1}^P, C_{h_2}^P, \dots$ , определенных на  $\Delta_{h_1}^P, \Delta_{h_2}^P, \dots$  соответственно. На каждом из множеств  $C_{h_1}^P, C_{h_2}^P, \dots$  определим проекторы  $P_{h_1}^P, P_{h_2}^P, \dots$  на множество интерполяционных многочленов Лагранжа  $L_{h_i}^P$ . Определим на каждом из множеств  $\Delta_{h_i}^P$  множество многочленов  $E_{h_i}^P$  степени  $P - 1$ , построенных по  $P$  точкам с расстоянием  $h_i$  между ними.

Каждый проектор  $P_{h_i}^P$  отображает любой многочлен  $x_{h_i}^P \in E_{h_i}^P$  в себя

$$P_{h_i}^P x_{h_i}^P = x_{h_i}^P, \quad \forall x_{h_i}^P \in E_{h_i}^P.$$

Применим проектор к уравнению (4.1)

$$\begin{aligned} P_{h_i}^P x_{h_i}^P &= P_{h_i}^P H x_{h_i}^P + \tilde{f}, \\ x_{h_i}^P &= P_{h_i}^P H x_{h_i}^P + \tilde{f}. \end{aligned}$$

Пусть

$$P^{(n)} = I - P_{h_i}^P.$$

Пусть также последовательность  $h_i$  такова, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = 0$ .

Тогда, в случае если оператор  $I - H$  является непрерывно обратимым, а также при выполнении условий

$$\begin{cases} \|P_P^{(i)} H\|_{\Delta_{h_i}^P} \rightarrow 0 \\ \|P_P^{(i)} f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \rightarrow 0 \end{cases} \quad i \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

будет выполняться

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|L_{h_i}^P(t) - X_{h_i}^P(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0, \quad (4.3)$$

где  $X_{h_i}^P(t)$  – точное решение на множестве  $\Delta_{h_i}^P$ .

Непрерывную обратимость оператора  $I - H$  можно установить по предыдущему пункту. Рассмотрим условия (4.2). Первое из них:

$$\|P_P^{(i)} H\|_{\Delta_{h_i}^P} = \sup_{t \in \Delta_k} \left\{ \frac{\|P_P^{(i)} H y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}}{\|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}} \right\}, \quad y \in C_{h_i}^P, \quad \|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \neq 0,$$

$$P_P^{(i)}Hy = P_P^{(i)}(Hy),$$

$$Hy = \lambda \int_A^t \tilde{K}(t, s)y(s)ds - \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k(t)y(t_k) = F(t).$$

В результате применения оператора  $H$  к функции  $y$  получили некоторую непрерывную на множестве  $\Delta_{h_i}^P$  функцию  $F(t)$ . Применим к ней оператор  $P_P^{(i)}$ :

$$P_P^{(i)}(Hy) = P_P^{(i)}F = F - P_{h_i}^P.$$

Рассмотрим  $P_{h_i}^P F$ . Пусть  $s_0, s_1, \dots, s_{P-1}$  – точки, по которым строится многочлен Лагранжа. Тогда

$$P_{h_i}^P F = L_F(t), \quad L_F(t) = \sum_{k=0}^{P-1} F(s_k)l_k(t).$$

Найдем погрешность интерполяции

$$\|F(t) - L_F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \leq \frac{\|F^{(P)}(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}}{P!} (P-1)^P h_i^P.$$

Предполагая, что норма  $\|F^{(P)}(t)\|_{\Delta_{h_i}^P}$  ограничена на  $\Delta_{h_i}^P$ , получим

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \|F(t) - L_F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} (P_{h_i}^P F) = F.$$

Значит

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(P_P^{(i)}Hy)(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \|F(t) - P_{h_i}^P F(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Первое условие доказано, при условии  $\|y(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} \neq 0$ .

Аналогичным образом можно доказать второе условие (4.2):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|P_P^{(i)}f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \|f - P_{h_i}^P f(t)\|_{\Delta_{h_i}^P} = 0.$$

Таким образом, доказаны условия (4.2), из которых следует сходимость предложенного метода.

## 5. Результаты численных расчетов

Для иллюстрации сходимости предложенного метода при различных значениях параметров рассмотрим уравнение (1.1) со следующим набором параметров

$$t \in [0, 1]; \quad m = 3; \quad t_1 = \frac{3}{10}; \quad t_2 = \frac{1}{2};$$

$$a_0(t) = t^2 + 1; \quad a_1(t) = 1 - t^3; \quad a_2(t) = t - 2; \quad K(t, s) = t - 2s^2; \quad (5.1)$$

$$f(t) = (t^2 + 1) \cos t + (1 - t^3) \cos \frac{3}{10} + (t - 2) \cos \frac{1}{2} - \lambda \left( (4 + t - 2t^2) \sin t - 4t \cos t \right).$$

Точным решением уравнения (1.1) с параметрами (5.1) является функция  $x(t) = \cos(t)$ .

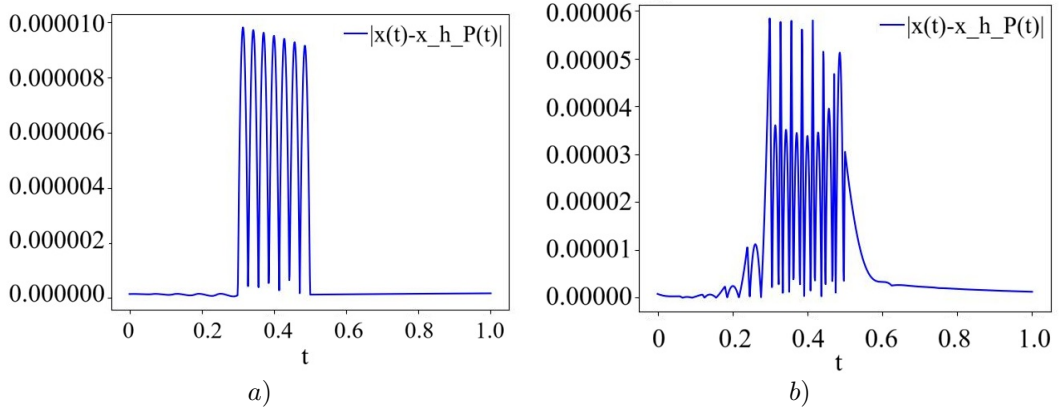
Результаты расчетов при различных  $\lambda$  приведены в табл. 5.1-5.4 и на рис. 5.1.

**Таблица 5.1.** Погрешность при  $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1/4$ **Table 5.1.** The error for  $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1/4$ 

$h$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
$\varepsilon$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-4}$	$9.80 \cdot 10^{-6}$	$2.85 \cdot 10^{-5}$	$7.12 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-6}$

**Таблица 5.2.** Погрешность при  $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1000$ **Table 5.2.** The error for  $P_0 = 3, P_1 = 2, P_2 = 5, \lambda = 1000$ 

$h$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
$\varepsilon$	$7.74 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$4.42 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$

**Рис. 5.1.** а) Погрешность при  $h = 1/32, \lambda = 1/4$ ,  
б) погрешность при  $h = 1/32, \lambda = 1000$ **Fig. 5.2.** а) The error for  $h = 1/32, \lambda = 1/4$ ,  
б) the error for  $h = 1/32, \lambda = 1000$ **Таблица 5.3.** Погрешность аппроксимации сплайнами порядка 3 при  $\lambda = 1/4$ **Table 5.3.** Approximation error by splines of order 3 with  $\lambda = 1/4$ 

$h$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
$\varepsilon$	$9.73 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-5}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$2.55 \cdot 10^{-8}$	$3.19 \cdot 10^{-9}$

**Таблица 5.4.** Погрешность аппроксимации сплайнами порядка 5 при  $\lambda = 1/4$ **Table 5.4.** Approximation error by splines of order 5 with  $\lambda = 1/4$ 

$h$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
$\varepsilon$	$6.48 \cdot 10^{-7}$	$2.24 \cdot 10^{-8}$	$7.31 \cdot 10^{-10}$	$2.32 \cdot 10^{-11}$	$7.32 \cdot 10^{-13}$	$2.29 \cdot 10^{-14}$

Представленные результаты позволяют судить о сходимости предложенного метода независимо от параметра  $\lambda$  и эффективности его применения при достаточной гладкости входных данных. При этом основной вклад в качество аппроксимации вносит шаг  $h$ , а максимальный порядок полиномов в составе сплайна достаточно брать не выше пятого. Результаты приведенных расчетов коррелируют с оценками качества аппроксимации гладких функций полиномиальными сплайнами, эмпирическая оценка погрешности имеет вид  $O(h^m)$ , где  $m$  – максимальный порядок полиномов, из которых составлен сплайн. Распределение погрешности, приведенное на рис. 5.1, свидетельствует о значительном влиянии на ее величину того участка  $\Omega$ , на котором сконцентрированы точки нагрузки.

В дальнейшем авторы предполагают рассмотреть нелинейные уравнения такого типа с ядрами, удовлетворяющими условию Липшица по третьей переменной, а также другие виды нагрузок.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00743, <https://rscf.ru/project/25-21-00743/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Byankin V., Tynda A., Sidorov D., Dreglea A. Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations. *Computation*. 2025. Vol. 13, № 5. DOI: 10.3390/computation13050121
3. Sidorov N. A., Sidorov D. N. Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions. *Diff. Equat.* 2021. Vol. 57. P. 1640–1651. DOI: 10.1134/S00122661211120107
4. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. 2023. Т. 43. С. 78–90. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.78
5. Tynda A., Noeiaghdam S., Sidorov D. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind. *Bull. Irkutsk. State Univ. Ser. Math.* 2022. Vol. 39. P. 62–79. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.62
6. Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 1. С. 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24
7. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577
8. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2016. Т. 20, № 2. С. 220–240. DOI: 10.14498/vsgtu1485

9. Космакова М. Т., Хамзеева А. Н. О разрешимости интегрального уравнения, связанного с дробно-нагруженной задачей теплопроводности // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*. 2024. Т. 233, №3. С. 27–36. DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-27-36

*Поступила 01.12.2025; доработана после рецензирования 11.02.2026;  
принята к публикации 25.02.2026*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. A. M. Nahushev, *Loaded equations and their application*, Nauka, Moscow, 2012 (In Russ.), 232 p.
2. V. Byankin, A. Tynda, D. Sidorov, A. Dreglea, “Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations”, *Computation*, **13**:5 (2025). DOI: 10.48550/arXiv.2503.21452
3. N. A. Sidorov, D. N. Sidorov, “Nonlinear Volterra Equations with Loads and Bifurcation Parameters: Existence Theorems and Construction of Solutions.”, *Diff Equat.*, **57** (2021), 1640–1651.
4. N. A. Sidorov, L. R. D. Dreglea Sidorov, “On the Solution of Hammerstein Integral Equations with Loads and Bifurcation Parameters.”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.*, **43** (2023), 78–90. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.78
5. A. Tynda, S. Noeiaghdam, D. Sidorov, “Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind”, *Bull. Irkutsk. State Univ. Ser. Math.*, **39** (2022), 62–79. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.39.62
6. O. V. Germider, V. N. Popov, “On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels.”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.*, **27**:1 (2025), 11–24 (In Russ.).
7. A. N. Tynda, “Methods of numerical analysis for some integral dynamical systems with delay arguments”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.*, **25**:1 (2023), 565–577 (In Russ.).
8. O. H. Abdullayev, “A non-local problem for a loaded mixed-type equation with an integral operator”, *Bulletin of Samara state technical university. Phys.-math. sciences*, **20**:2 (2016), 220–240 (In Russ.).
9. M. T. Kosmakova, A. N. Khamzeyeva, “On the solvability of an integral equation associated with the fractional loaded heat conduction problem”, *Itoqi nauki i tehniki. Sovremennaya matematika i prilozheniya. Tematicheskie obzory.*, **233**:3 (2024), 27–36 (In Russ.).

*Submitted 01.12.2025; Revised 11.02.2026; Accepted 25.02.2026*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.*