

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование влияния сжимаемости потока на динамическую устойчивость упругой стенки воздуховода

Г. А. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. С. Жаркова

*Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск,
Российская Федерация)*

Аннотация. Работа посвящена математическому моделированию вентиляционных систем, состоящих из деформируемых воздуховодов, через которые подается поток воздуха. На основе построенной трехмерной математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений в частных производных, в работе исследуется динамическая устойчивость упругой стенки воздуховода, через который подается поток газа. В качестве критерия устойчивости используется критерий динамической устойчивости по Ляпунову, когда малым деформациям упругой стенки в начальный момент времени соответствуют и малые деформации в последующие моменты времени. Для исследования устойчивости в задачах аэрогидроупругости в моделях сжимаемой и несжимаемой среды построены функционалы типа Ляпунова для полученных систем дифференциальных уравнений. На основе исследования этих функционалов получены условия устойчивости. Эти условия обеспечивают положительность функционала и отрицательность его производной по времени. Для модели сжимаемой среды построена зависимость сжимающего пластины продольного усилия от скорости протекающего потока воздуха для конкретных параметров механической системы. С помощью построенного графика проведено сравнение условий устойчивости для моделей сжимаемой и несжимаемой среды. Показано, что сжимаемость среды оказывает негативное влияние на устойчивость деформируемой стенки воздуховода и приводит к уменьшению области устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, динамическая устойчивость, аэрогидроупругость, сжимаемая и несжимаемая среда, воздуховод, упругая пластина, функционалы типа Ляпунова

Для цитирования: Анкилов Г. А., Вельмисов П. А., Жаркова А. С. Исследование влияния сжимаемости потока на динамическую устойчивость упругой стенки воздуховода // *Журнал Средневожского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 488–499. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

Об авторах:

Анкилов Григорий Андреевич, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

Вельмисов Петр Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

© Анкилов Г. А., Вельмисов П. А., Жаркова А. С.



Жаркова Алина Сергеевна, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-8126-3589>, mon16blan@yandex.ru

Original article

MSC2020 74F10

Study of influence of flow compressibility on dynamic stability of elastic wall of air duct

G. A. Ankilov, P. A. Velmisov, A. S. Zharkova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. This paper examines the mathematical modeling of ventilation systems consisting of deformable air ducts through which an air flow is supplied. Using constructed three-dimensional mathematical model described by a system of partial differential equations, the paper investigates dynamic stability of the elastic wall of an air duct where some gas flows. The Lyapunov dynamic stability criterion is used to study the mechanical system's stability. To study stability in problems of aerohydroelasticity in compressible and incompressible medium models, Lyapunov-type functionals are constructed for deduced systems of differential equations. By studying these functionals stability conditions are obtained. They ensure that the functional is positive and its time derivative is negative. For a compressible medium model, the dependence between the longitudinal force compressing the plate and the air flow velocity is constructed for specific parameters of the mechanical system. Using the plot constructed, a comparison of the stability conditions for compressible and incompressible medium models is made. It is shown that the medium compressibility has negative effect on the stability of the deformable wall of the air duct and leads to decrease of the stability region.

Keywords: partial differential equations, dynamic stability, aerohydroelasticity, compressible and incompressible medium, air duct, elastic plate, Lyapunov-type functionals

For citation: G. A. Ankilov, P. A. Velmisov, A. S. Zharkova. Study of influence of flow compressibility on dynamic stability of elastic wall of air duct. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 488–499. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.488-499

About the authors:

Grigory A. Ankilov, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0006-6180-0652>, ankilov1996@mail.ru

Petr A. Velmisov, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Alina S. Zharkova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 430027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-8126-3589>, mon16blan@yandex.ru

1. Введение

При проектировании вентиляционных систем, составной частью которых являются деформируемые воздуховоды, контактирующие с потоком протекающего через них воздуха, особое значение имеет исследование устойчивости упругих стенок этих воздуховодов [1–4]. При разработке составных частей систем в виде упругих воздуховодов, необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия на них рабочих сред могут повышать амплитуду и частоту колебаний стенок воздуховодов до критических значений, приводящих к достаточно быстрому выходу системы из строя. Воздуховоды моделируются упругими каналами и трубопроводами, практическим и теоретическим вопросам проектирования которых посвящено много научных работ, в частности, отметим [5–8].

В данной работе исследуется динамическая устойчивость участка вентиляционной системы квадратного сечения, на который с помощью вентилятора подается поток воздуха. Рассматривается воздуховод, жестко закрепленный с трех сторон и с незакрепленной четвертой упругой стороной. На основе построенных математических моделей исследуется динамическая устойчивость упругой незакрепленной стенки воздуховода с учетом взаимодействия с потоком газа. Определение устойчивости деформируемых элементов соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала описывается линейной моделью. Для исследования динамической устойчивости в задачах аэрогидроупругости в модели сжимаемой и несжимаемой среды разработаны аналитические методики, основанные на построении функционалов для полученных систем дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Исследуется динамическая устойчивость участка вентиляционной системы квадратного сечения (Рис. 2.1), через который протекает поток сжимаемой или несжимаемой среды.



Рис. 2.1. Пример воздуховода квадратного сечения

Fig. 2.1. Example of square cross-section air duct

Рассматривается математическая модель движения газа со скоростью V в воздуховоде (Рис. 2.2) $J = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < h\}$ с одной упругой стенкой при $y = 0$. Остальные стенки при $y = h, z = 0, z = h$ считаются недеформируемыми.

В модели сжимаемой среды потенциал скорости возмущенного потока газа

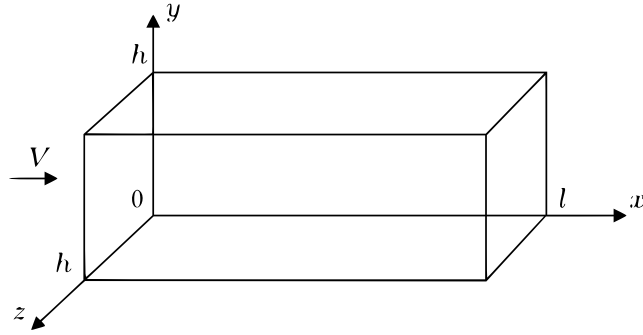


Рис. 2.2. Модель воздуховода квадратного сечения

Fig. 2.2. Square duct model

$\phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} &\phi_{tt}(x, y, z, t) + 2V\phi_{xt}(x, y, z, t) + V^2\phi_{xx}(x, y, z, t) = \\ &= a^2(\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in J, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным; коэффициент a (м/с) определяет скорость звука в невозмущенном потоке газа ($a > V$).

В отличие от модели сжимаемой среды (2.1), в модели несжимаемой среды потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\phi_{xx}(x, y, z, t) + \phi_{yy}(x, y, z, t) + \phi_{zz}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in J. \quad (2.2)$$

С учетом аэрогидродинамического воздействия запишем линейное уравнение, описывающее прогиб $w(x, z, t)$ упругой пластины:

$$\begin{aligned} &Mw_{tt}(x, z, t) + D(w_{xxxx}(x, z, t) + 2w_{xxzz}(x, z, t) + w_{zzzz}(x, z, t)) + \\ &+ \beta_2(w_{xxxxt}(x, z, t) + 2w_{xxzzt}(x, z, t) + w_{zzzzt}(x, z, t)) + N_{(x)}w_{xx}(x, z, t) + \\ &+ N_{(z)}w_{zz}(x, z, t) + \beta_1w_t(x, z, t) + \beta_0w(x, z, t) = C + \rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)), \\ &(x, z) \in T_1 = \{(x, z) \in R^2 : 0 < x < l, 0 < z < h\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ρ_p – объемная плотность пластины (кг/м³); l, h – длина и ширина пластины в недеформированном состоянии (м); h_p – толщина пластины в недеформированном состоянии (м); $M = h_p\rho_p$ – погонная масса пластины (кг/м²); E – модуль упругости материала пластины (Па); $D = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины (Па·м³); β_0 – жесткость слоя обжатия пластины (Па/м); β_1 – коэффициент демпфирования слоя обжатия пластины (Па·с/м); β_2 – коэффициент демпфирования пластины (Па·с); ν – коэффициент Пуассона (безр.); $N_{(x)}, N_{(z)}$ – сжимающие (растягивающие) пластину силы в направлении осей Ox и Oz (Па·м); C – константа; V – скорость набегающего на пластину потока газа (м/с); $t \geq 0$ – время (с).

Из условий непротекания газа через стенки воздуховода получим граничные условия

$$\phi_y(x, h, z, t) = 0, \quad (x, z) \in T_1; \quad (2.4)$$

$$\phi_y(x, 0, z, t) = w_t(x, z, t) + Vw_x(x, z, t), \quad (x, z) \in T_1; \quad (2.5)$$

$$\phi_z(x, y, 0, t) = 0, \quad \phi_z(x, y, h, t) = 0, \quad (x, y) \in T_2 = \{(x, y) \in R^2: 0 < x < l, 0 < y < h\}, \quad (2.6)$$

где $w(x, z, t)$ описывает деформацию пластины.

Пусть на входе и выходе из воздуховода задан закон изменения потенциала скорости газа, тогда граничные условия примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = \phi_1(y, z, t), \quad \phi(l, y, z, t) = \phi_2(y, z, t), \quad (2.7)$$

$$(y, z) \in T_3 = \{(y, z) \in R^2: 0 < y < h, 0 < z < h\}.$$

В линейных задачах исследования устойчивости по начальным данным без ограничения общности можно считать $C = 0$ в уравнении (2.3) и $\phi_1 = \phi_2 = 0$ в условиях (2.7). Тогда условия (2.7) примут вид

$$\phi(0, y, z, t) = 0, \quad \phi(l, y, z, t) = 0, \quad (y, z) \in T_3. \quad (2.8)$$

В случае жесткого закрепления краев пластины $x = 0, x = l, z = 0, z = h$ граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} w(0, z, t) = 0, \quad w_x(0, z, t) = 0, \quad w(l, z, t) = 0, \quad w_x(l, z, t) = 0; \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w_z(x, 0, t) = 0, \quad w(x, h, t) = 0, \quad w_z(x, h, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Производя обобщение результатов, полученных в [9, 10] для плоских моделей, построен функционал для трехмерной модели (2.1), (2.3)-(2.9):

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \iiint_J (\phi_t^2 + (a^2 - V^2) \phi_x^2 + a^2 \phi_y^2 + a^2 \phi_z^2) dx dy dz + \\ + 2a^2 V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$+ \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} (Mw_t^2 + Dw_{xx}^2 + 2Dw_{xz}^2 + Dw_{zz}^2 - N_{(x)}w_x^2 - N_{(z)}w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz.$$

Дифференцируя Φ по t и подставляя (2.1), (2.3) в равенство (3.1), получим

$$\begin{aligned} \Phi_t(t) = 2 \iiint_J (\phi_t (-2V\phi_{xt} - V^2\phi_{xx} + a^2(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})) + \\ + (a^2 - V^2)\phi_x\phi_{xt} + a^2\phi_y\phi_{yt} + a^2\phi_z\phi_{zt}) dx dy dz + \\ + 2a^2 V \iint_{T_1} (\phi_t(x, 0, z, t)w_x(x, z, t) + \phi(x, 0, z, t)w_{xt}(x, z, t)) dx dz + \\ + \frac{2a^2}{\rho} \iint_{T_1} (w_t(\rho(\phi_t(x, 0, z, t) + V\phi_x(x, 0, z, t)) - D(w_{xxxx} + 2w_{xxzz} + \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$+w_{zzzz}) - \beta_2 (w_{xxxxt} + 2w_{xxzzt} + w_{zzzzt}) - N_{(x)}w_{xx} - N_{(z)}w_{zz} - \beta_1 w_t - \beta_0 w) + \\ + Dw_{xx}w_{xxt} + 2Dw_{xz}w_{xzt} + Dw_{zz}w_{zzt} - N_{(x)}w_xw_{xt} - N_{(z)}w_zw_{zt} + \beta_0 ww_t) dx dz.$$

Согласно (2.4)–(2.9) получим

$$\iiint_J \phi_t \phi_{xt} dx dy dz = 0, \quad \iiint_J \phi_t \phi_{xx} dx dy dz = - \iiint_J \phi_{xt} \phi_x dx dy dz, \\ \iiint_J \phi_t \phi_{yy} dx dy dz = - \iint_{T_1} \phi_t(x, 0, z, t) (w_t(x, z, t) + V w_x(x, z, t)) dx dz - \\ - \iiint_J \phi_{yt} \phi_y dx dy dz, \quad \iiint_J \phi_t \phi_{zz} dx dy dz = - \iiint_J \phi_{zt} \phi_z dx dy dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{xxxx} dx dz = \iint_{T_1} w_{xxt} w_{xx} dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xxxx} dx dz = \iint_{T_1} w_{xzt} w_{xz} dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{zzzz} dx dz = \iint_{T_1} w_{zzt} w_{zz} dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xx} dx dz = - \iint_{T_1} w_{xt} w_x dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{zz} dx dz = - \iint_{T_1} w_{zt} w_z dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{xxxxt} dx dz = \iint_{T_1} w_{xxt}^2 dx dz, \\ \iint_{T_1} w_t w_{xxzzt} dx dz = \iint_{T_1} w_{xzt}^2 dx dz, \quad \iint_{T_1} w_t w_{zzzzt} dx dz = \iint_{T_1} w_{zzt}^2 dx dz.$$

Подставляя эти равенства в (3.2), получим

$$\Phi_t(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \iint_{T_1} (\beta_2 (w_{xxt}^2(x, z, t) + 2w_{xzt}^2(x, z, t) + w_{zzt}^2(x, z, t)) + \beta_1 w_t^2(x, z, t)) dx dy. \quad (3.3)$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (3.4)$$

тогда равенство (3.3) примет вид $\Phi_t(t) \leq 0$. Интегрируя от 0 до t , окончательно получим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.5)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (2.9). Воспользуемся неравенствами Релея:

$$\iint_{T_1} w_{xx}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{4\pi^2}{l^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \\ \geq \frac{\pi^2}{l^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{zz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{4\pi^2}{h^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz,$$

$$\begin{aligned} \iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz &\geq \frac{\pi^2}{h^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xx}^2(x, z, t) dx dz \geq \\ &\geq \frac{\mu_1^4}{l^4} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz, \quad \iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{\pi^4}{l^2 h^2} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz, \\ \iint_{T_1} w_{zz}^2(x, z, t) dx dz &\geq \frac{\mu_1^4}{h^4} \iint_{T_1} w^2(x, z, t) dx dz, \end{aligned}$$

где μ_1 – наименьший положительный корень уравнения $\cos \mu \cdot ch \mu = 1$, который примерно равен $\mu_1 \approx 4.73$.

Согласно этим неравенствам справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\iint_{T_1} (w_{xx}^2(x, z, t) + 2w_{xz}^2(x, z, t) + w_{zz}^2(x, z, t)) dx dz \geq \\ &\geq \frac{\pi^2 (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} \iint_{T_1} w_x^2(x, z, t) dx dz + \frac{\pi^2 (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} \iint_{T_1} w_z^2(x, z, t) dx dz. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\iint_{T_1} w_{xz}^2(x, z, t) dx dz \geq \frac{w^2(x, z, t)}{lh}. \tag{3.7}$$

Выведем условия неотрицательности самого функционала $\Phi(t) \geq 0$. Для этого, используя неравенства Релея [11] и Коши-Буняковского, оценим функционал снизу

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iiint_J \left(\phi_t^2(x, y, z, t) + \frac{\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \right. \\ &- \frac{4a^2}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2a^2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \frac{2a^2 V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \\ &+ \frac{a^2}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пусть выполняются условия

$$N_{(x)} < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}, \quad N_{(z)} \leq \frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2}. \tag{3.9}$$

Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (3.8) примет вид:

$$\begin{aligned} &2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - \\ &- V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2) > 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Согласно (3.5), (3.8) доказана теорема.

Теорема 3.1. *Решение $w(x, z, t)$ задачи (2.1), (2.3)–(2.9) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $\phi_t(x, y, z, t)$, $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\phi_t(x, y, z, 0)$, $\phi_x(x, y, z, 0)$, $\phi_y(x, y, z, 0)$, $\phi_z(x, y, z, 0)$, $\phi(x, 0, z, 0)$, $w_t(x, y, 0)$, $w_{xx}(x, y, 0)$, $w_{xz}(x, y, 0)$, $w_{zz}(x, y, 0)$, $w_x(x, y, 0)$, $w_z(x, y, 0)$, $w(x, y, 0)$ при выполнении условий (3.4), (3.9), (3.10).*

4. Исследование устойчивости для несжимаемой среды

Аналогично (3.1) построен функционал для задачи (2.2)–(2.9)

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iiint_J (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dx dy dz + 2V \iint_{T_1} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) dx dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} (M w_t^2 + D w_{xx}^2 + 2D w_{xz}^2 + D w_{zz}^2 - N_{(x)} w_x^2 - N_{(z)} w_z^2 + \beta_0 w^2) dx dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть выполняются условия (3.4), тогда получим также неравенство (3.5). Оценка функционала (4.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iiint_J \left(\frac{\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2}{4h^2 l^2} \phi^2(x, y, z, t) - \frac{4}{h^2} \phi(x, y, z, t) \phi(x, 0, z, t) + \frac{2}{h^2} \phi^2(x, 0, z, t) + \right. \\ & + \frac{2V}{h} \phi(x, 0, z, t) w_x(x, z, t) + \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - N_{(x)} \right) w_x^2(x, z, t) \Big) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{\rho} \iint_{T_1} \left(\frac{\pi^2 D (4l^2 + h^2)}{h^2 l^2} - N_{(z)} \right) w_z^2(x, z, t) dx dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть выполняются условия (3.9). Тогда условие неотрицательности квадратичной формы относительно $\phi(x, y, z, t)$, $\phi(x, 0, z, t)$, $w_x(x, z, t)$ в (4.2) примет вид:

$$2\pi^2 (4h^2 + l^2) (\pi^2 D (4h^2 + l^2) - h^2 l^2 N_{(x)}) - V^2 h^3 l^2 \rho (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2) > 0, \quad (4.3)$$

а, следовательно, доказана теорема.

Теорема 4.1. *Решение $w(x, z, t)$ задачи (2.2)–(2.9) устойчиво, а решение $\phi(x, y, z, t)$ и частные производные $w_x(x, z, t)$, $w_z(x, z, t)$ устойчивы в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\phi_x(x, y, z, 0)$, $\phi_y(x, y, z, 0)$, $\phi_z(x, y, z, 0)$, $\phi(x, 0, z, 0)$, $w_t(x, y, 0)$, $w_{xx}(x, y, 0)$, $w_{xz}(x, y, 0)$, $w_{zz}(x, y, 0)$, $w_x(x, y, 0)$, $w_z(x, y, 0)$, $w(x, y, 0)$ при выполнении условий (3.4), (3.9), (4.3).*

5. Сравнение условий устойчивости для моделей сжимаемой и несжимаемой среды.

Для конкретных значений параметров механической системы произведено сравнение условий (3.10) и (4.3) и численно найдена разность между левыми частями

этих неравенств. Рабочая среда – воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_p = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 331$, $l = 5$, $h = 0,1$, $h_p = 0,005$, $\nu = 0,31$, $M = h_p \rho_p = 42,4$, $D = \frac{E h_p^3}{12(1 - \nu^2)} = 806,7$. Размерность величин указана в описании параметров задачи (2.1)–(2.9).

Согласно условиям (3.9) получим

$$N_{(x)} < 797445, \quad N_{(z)} \leq 3,185 \cdot 10^6. \quad (5.1)$$

Запишем условие (3.10) в виде

$$N_{(x)}(V) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{V^2 \rho h (\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2) + 8a^2 l^2)}{2\pi^2 (4h^2 (a^2 - V^2) + l^2 a^2)}. \quad (5.2)$$

На рисунках 5.1, 5.2 изображены области устойчивости (серая область) на плоскости «усилие $N_{(x)}$ – скорость потока V » для неравенства (5.2).

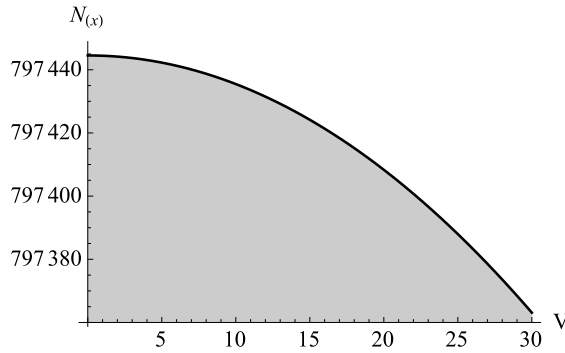


Рис. 5.1. Область устойчивости на плоскости $(N_{(x)}, V)$ при $V \in [0, 30]$

Fig. 5.1. Stability region on the plane $(N_{(x)}, V)$ at $V \in [0, 30]$

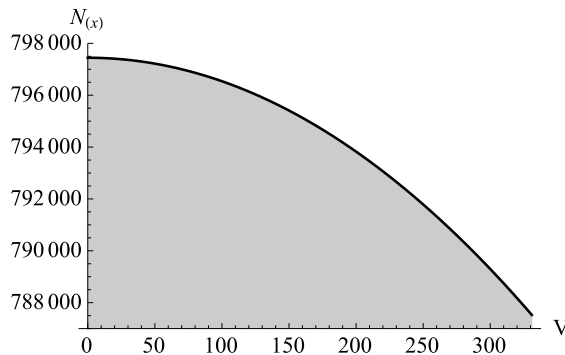


Рис. 5.2. Область устойчивости на плоскости $(N_{(x)}, V)$ при $V \in [0, a]$

Fig. 5.2. Stability region on the plane $(N_{(x)}, V)$ at $V \in [0, a]$

На Рис. 5.1 скорость потока $V \in [0, 30]$, на Рис. 5.2 – $V \in [0, a]$, где a – скорость звука. На Рис. 5.1 видим, что при отсутствии потока газа должно выполняться условие $N_{(x)}(0) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2}$ (отсутствуют усилия способные смять воздуховод), на Рис. 5.2 при стремлении скорости потока газа к скорости звука должно выполняться условие

$$N_{(x)}(a) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{a^2 \rho h (\pi^2 + 8)}{2\pi^2}.$$

Возьмем точку в области устойчивости $N_{(x)} = 5 \cdot 10^5$, $N_{(z)} = 3 \cdot 10^5$, $V = 5$ (определяем по неравенствам (5.1) и по области на рис. 5.1).

Запишем условие (4.3) в виде

$$N_{(x)}(V) < \frac{\pi^2 D (4h^2 + l^2)}{l^2 h^2} - \frac{V^2 \rho h (\pi^2 (4h^2 + l^2) + 8l^2)}{2\pi^2 (4h^2 + l^2)}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.3 представлена разность между правыми частями условий устойчивости (5.3) для несжимаемой и (5.2) для сжимаемой среды, обозначенной функцией $R(V)$.

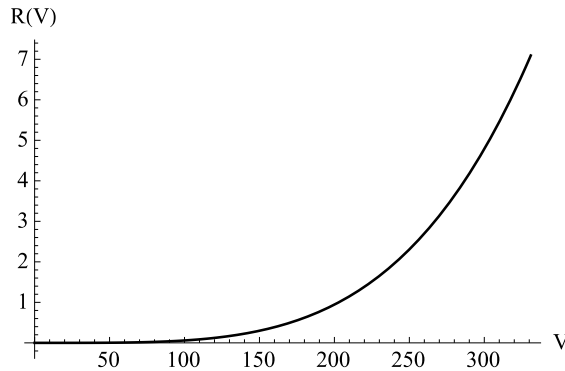


Рис. 5.3. Разность между правыми частями неравенств (5.3) и (5.2)

Fig. 5.3. Difference between the right-hand sides of inequalities (5.3) and (5.2)

Как видно из рис. 5.3 для выбранных значений параметров механической системы сжимаемость среды оказывает негативное влияние на устойчивость деформируемой стенки воздуховода (происходит уменьшение области устойчивости).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shi Y., Li X. A study on variation laws of infiltration rate with mechanical ventilation rate in a room. *Building and Environment*. 2018. Vol. 143. P. 269–279. DOI: 10.1016/j.buildenv.2018.07.021
2. Liu Y., Dang R., Yang B., Liu P. Energy-efficient control strategy for air conditioning and mechanical ventilation system based on occupant distribution -A case study on stratum ventilation. *Journal of Building Engineering*. 2025. Vol. 100. 111709. DOI: 10.1016/j.jobee.2024.111709

3. Rashid F. L. Optimising phase change materials for ventilated building components in sustainable building design: A comprehensive review *Energy Build.* 2025. Vol. 343. 115947. DOI: 10.1016/j.enbuild.2025.115947
4. Василенко А. И. Оптимизация воздуховодов прямоугольного поперечного сечения // *Инженерный вестник Дона.* 2022. Т. 89, № 5. С. 740-747.
5. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density. *Journal of Sound and Vibration.* 2020. Vol. 473. 115202. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115202
6. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2020. Vol. 118. 103290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290
7. Kondratov D. V., Kondratova T. S., Popov V. S., Popova M. V. Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation. *Lecture Notes in Mechanical Engineering.* 2023. P. 261–270. DOI: 10.1007/978-3-031-38126-3_27
8. Mogilevich L. I., Popova E. V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2023. Т. 31, № 3. С. 365–376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.
10. Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 259, № 2. P. 296–308. DOI: 10.1007/s10958-021-05618-6
11. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

*Поступила 02.08.2025; доработана после рецензирования 15.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Y. Shi, X. Li, “A study on variation laws of infiltration rate with mechanical ventilation rate in a room”, *Building and Environment*, **143** (2018), 269-279. DOI: 10.1016/j.buildenv.2018.07.021
2. Y. Liu, R. Dang, B. Yang, P. Liu, “Energy-efficient control strategy for air conditioning and mechanical ventilation system based on occupant distribution -A case study on stratum ventilation”, *Journal of Building Engineering*, **100** (2025), 111709. DOI: 10.1016/j.jobee.2024.111709

3. F. L. Rashid, “Optimising phase change materials for ventilated building components in sustainable building design: A comprehensive review”, *Energy Build.*, **343** (2025), 115947. DOI: 10.1016/j.enbuild.2025.115947
4. A. I. Vasilenko, “Optimization of air ducts with rectangular cross-section”, *Engineering Bulletin of Don*, **89**:5 (2022), 740-747 (In Russ.).
5. D. B. Giacobbi, C. Semler, M. P. Paidoussis, “Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density”, *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115202
6. A. R. Abdelbaki, M. P. Paidoussis, A. K. Misra, “A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow”, *International Journal of Non-Linear Mechanics.*, **118** (2020), 103290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290
7. D. V. Kondratov, T. S. Kondratova, V. S. Popov, M. V. Popova, “Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation”, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2023, 261-270. DOI: 10.1007/978-3-031-38126-3_27
8. L. I. Mogilevich, E. V. Popova, “Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity”, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **31**:3 (2023), 365-376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Lyapunov functionals in some problems of aerohydroelasticity*, UISTU, Ulyanovsk, 2019 (In Russ.), 201 p.
10. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova, “On the stability of solutions of certain classes of initial-boundary-value problems in aerohydroelasticity”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:2 (2021), 296-308. DOI: 10.1007/s10958-021-05618-6
11. L. Collatz, *Eigenvalue problems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

Submitted 02.08.2025; Revised 15.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.