

DOI 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977

Задачи о наихудших воздействиях на многомассовую упругую систему

П. П. Ткаченко, Д. В. Баландин, Т. В. Рябикова

Научно-технологический университет «Сириус» (федеральная территория «Сириус», Российская Федерация)

Аннотация. В данной работе предложен аналитический подход к синтезу наихудших внешних воздействий для линейных динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование проводится для трёх классических функциональных пространств (L_2 , L_∞ , L_1) на фиксированном временном интервале, что соответствует задачам поиска воздействия с ограниченной энергией, ограниченной амплитудой и ограниченным импульсом. В качестве объекта анализа выбраны линейные упругие механические системы, что позволяет наглядно интерпретировать результаты. Для количественной оценки получаемых решений вводится специальный унифицированный показатель – отношение целевого выхода системы (например, максимального отклонения) к L_p -норме воздействия (нормированный отклик системы). В представленной работе получены явные аналитические выражения для наихудших воздействий и соответствующих им значений показателей. Показана взаимосвязь между показателями, полученными для различных классов воздействий. Приведены результаты численного моделирования для систем с одной и несколькими степенями свободы, представляющие собой цепочки материальных точек, соединённых упругими и диссипативными элементами между собой и подвижным основанием.

Ключевые слова: многомассовая упругая система, максимальная деформация, наихудшее воздействие, линейная система ОДУ, показатели колебательной активности, L_p -норма

Для цитирования: Ткаченко П. П., Баландин Д. В., Рябикова Т. В. Задачи о наихудших воздействиях на многомассовую упругую систему // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 4. С. 451–470. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

Об авторах:

Ткаченко Полина Павловна, младший научный сотрудник направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5132-234X>, P Tkachen@gmail.com

Баландин Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dbalandin@yandex.ru

Рябикова Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., специалист-исследователь направления «Математическая робототехника», Научно-технологический университет «Сириус» (354340, Россия, Федеральная территория «Сириус», Олимпийский проспект, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0302-2064>, tanya.dovid@gmail.com



MSC2020 70Q05

The problems of the worst-case disturbances acting on multi-mass elastic system

P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova

Sirius University of Science and Technology (Sirius, Russian Federation)

Abstract. An analytical framework for synthesizing worst-case external disturbances for linear dynamical systems described by ordinary differential equations is presented in the paper. The study is conducted for three classical functional spaces L_2, L_∞, L_1 over a fixed time interval, which corresponds to identifying disturbances with bounded energy, bounded amplitude, and bounded impulse, respectively. Linear elastic mechanical systems are chosen as a illustrative object of analysis, thus providing an intuitive interpretation of the results. A unified performance metric is introduced for quantitative assessment of solutions. This metrics is the ratio of a system's target output (e.g., maximum deviation) to the L_p -norm of the disturbance (i.e. the normalized system response). Explicit analytical expressions for the worst-case disturbances and their corresponding performance indices are derived. The interrelations between the indices obtained for different disturbance classes are examined. Numerical simulation results are provided for single- and multiple-degree-of-freedom systems, represented as chains of point masses interconnected by elastic and damping elements, and connected to a movable base.

Keywords: multi-mass elastic system, maximal deformation, worst-case disturbance, linear ODE system, indicators of oscillatory activity, L_p -norm

For citation: P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova. The problems of the worst-case disturbances acting on multi-mass elastic system. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:4(2025), 451–470. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.451-470

About the authors:

Polina P. Tkachenko, Research Assistant at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5132-234X>, P Tkachen@gmail.com

Dmitry V. Balandin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dbalandin@yandex.ru

Tatiana V. Ryabikova, PhD. Sci. (Phys.-Math.), Research Assistant at the Department of «Mathematical robotics and artificial intelligence», Sirius University of Science and Technology (1 Olympic Ave., Sirius Federal Territory 354340, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0302-2064>, tanya.dovid@gmail.com

1. Введение

В теории управления задача определения наихудших воздействий занимает важное место при проектировании механических систем для определения пределов надежности. Под наихудшим воздействием (worst-case disturbance) будем понимать внешнее возмущение или силу, которая приводит к наиболее негативному или нежелательному результату, такому как максимальное смещение, отказ или значительное отклонение от желаемого состояния. Другая сфера применения связана с синтезом оптимального управления в критических условиях. Информация о наихудшем воздействии используется для проектирования контроллеров, позволяющих поддерживать требуемый режим работы. Математически можно сформулировать задачу, как поиск наихудшего воздействия из заданного класса на динамическую систему, позволяющего получить некоторые предельное значение (экстремум функционала), описывающее свойства системы. Типичными примерами таких функционалов служат максимальные деформации упругих элементов или максимальные напряжения/усилия, возникающие в механических системах; максимальные электрические напряжения или максимальные величины протекающих токов в электрических системах.

Исторически данное направление восходит к классической работе Б.В. Булгакова «задача о накоплении возмущений в линейной системе» 1946 года, посвященной проблеме накопления возмущений [1]. В последующем происходило активное развитие этих идей, задача усложнялась и модифицировалась о чем свидетельствуют публикации (см. например, [2, 3]). Со временем задача поиска наихудшего воздействия получила новое развитие в теории H_∞ -управления [4]. Характерная особенность задач H_∞ -управления – внешние возмущения, принадлежащие классу L_2 , т.е. классу интегрируемых с квадратом функций. Задача состоит в синтезе управления по полному состоянию системы или по измеряемому выходу, цель которого наилучшим (в смысле заданного показателя) образом парировать наиболее опасное (наихудшее) из класса допустимых внешнее возмущение [5]. В работе [6] синтез управления в задаче парирования наихудшего внешнего возмущения предлагается проводить с учетом неизвестных начальных условий системы. Задача с неопределенными начальными условиями получила дальнейшее развитие для управляемых систем на конечном интервале времени для систем с переменными параметрами [7–9] и бесконечном интервале времени для систем с постоянными параметрами [10]. В последней работе основной результат формулируется в терминах линейных матричных неравенств, тогда как в предшествующих указанных работах формулировка результата дается в терминах решений дифференциального матричного уравнения Риккати.

Статья посвящена нахождению наихудших воздействий, действующих на линейную динамическую систему на фиксированном временном интервале для трёх классических функциональных пространств (L_2 , L_∞ , L_1). Актуальность исследования обусловлена задачами анализа робастности и оценкой предельных возможностей систем управления и механических конструкций. Для удобства интерпретации рассматривается механическая система. В качестве величины, характеризующей отклик линейной системы на внешнее воздействие, используется максимальное по времени значение абсолютной величины линейной комбинации фазовых переменных системы (в интерпретации линейной механической системы используется максимальная деформация одного из упругих элементов).

Статья включает в себя пять разделов. Во втором разделе приводится постановка задачи о наихудших воздействиях. В третьем разделе приводятся подробные решения и

явные формулы для наихудших воздействий и показателей для классов L_2 , L_∞ и L_1 , а также подход к вычислению $J_T^{(2)}$ как решение задачи полуопределенного программирования. Четвертый раздел посвящен примерам механических систем с одной и многими степенями свободы, описываемыми однородными цепочками упругосвязанных материальных точек. В последнем разделе приводятся краткие результаты исследования.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим механическую конструкцию, состоящую из материальных точек, связанных линейными упругими и демпфирующими элементами и описываемую системой линейных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Bv, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (2.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор, компоненты которого определяют координаты материальных точек; $v \in \mathbb{R}^1$ – возмущения, действующие на конструкцию; симметрические положительно определенные $n \times n$ – матрицы M , C , K определяют массы материальных точек, коэффициенты демпфирующих и упругих линейных элементов соответственно; B – $n \times 1$ – матрица, характеризующая материальные точки конструкции, на которые действуют возмущения. Будем предполагать, что возмущения, действующие на конструкцию, есть скалярные функции $v = v(t)$, принадлежащие классу функций $L_p[0, T]$.

В качестве изучаемой характеристики примем деформацию одного из упругих элементов рассматриваемой конструкции, которую выразим в виде

$$z(t) = l^\top q(t),$$

где l^\top – заданная $1 \times n$ – матрица. Для анализа переходных процессов введем показатель, характеризующий максимальную деформацию на классе возмущений L_p

$$J_T^{(p)} = \sup_{v \neq 0} \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_p}, \quad (2.2)$$

где

$$\|v\|_p = \left\{ \int_0^T |v(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad p = 1, 2;$$

$$\|v\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|, \quad p = \infty.$$

Кратко поясним смысл введенного показателя. В числителе обсуждаемой характеристики фигурирует максимальная величина деформации выбранного упругого элемента для заданного возмущения, а в знаменателе – L_p -норма действующего возмущения. Ясно, что рассматриваемое отношение

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_p}$$

зависит от заданного возмущения. Если теперь найти максимальное (на классе всех возможных возмущений) значение этого отношения, то получаемый таким образом показатель будет характеризовать рассматриваемую механическую конструкцию по отношению ко всему классу возмущений. Заметим также, что нижний индекс T показателя

$J_T^{(p)}$ определяет рассматриваемый временной интервал, а верхний индекс указывает на класс возмущений. При изменении величины T будет изменяться и показатель (2.2).

В данной статье изучается вопрос о вычислении показателя (2.2) и возмущения $v_*(t)$, при котором этот показатель достигается. В теории управления возмущение из заданного класса, обеспечивающее максимальное значение показателя системы, часто называется «наихудшим» воздействием (возмущением).

3. Решение задачи о наихудшем возмущении

Дальнейшее исследование будет сфокусировано на анализе трех фундаментальных классов возмущений, соответствующих значениям параметра $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Выбор этих случаев продиктован их ключевым значением в прикладной механике. Случай $p = 1$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченным импульсом, что важно для оценки кратковременных ударных воздействий. Случай $p = 2$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченной энергией, что является стандартным предположением при анализе устойчивости и долговременного поведения систем. Случай $p = \infty$ интерпретируется как класс возмущений с ограниченной амплитудой, что моделирует ситуации, когда физические ограничения накладывают верхний предел на мгновенное значение внешней силы.

Прежде чем изучить каждый из указанных случаев, представим решение системы (2.1) в подходящей форме. Обозначим $\Psi(t)$ $n \times n$ -матрицу, являющуюся решением системы матричных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\Psi} + C\dot{\Psi} + K\Psi = 0 \quad (3.1)$$

с начальными условиями $\Psi(0) = 0$ и $\dot{\Psi}(0) = M^{-1}$. В качестве столбцов матрицы $\Psi(t)$ берутся линейно независимые решения уравнения (3.1) при всех $t > 0$. Тогда решение системы (2.1) при $v(t) \neq 0$ и начальных условиях $q(0) = 0$ и $\dot{q}(0) = 0$ представляется в следующей форме

$$q(t) = \int_0^t \Psi(t - \tau) B v(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

3.1. Возмущения с ограниченной энергией

Исследование задачи о наихудшем возмущении начнем со случая $p = 2$. Имеем

$$|z(t)| = \left| l^\top \int_0^t \Psi(t - \tau) B v(\tau) d\tau \right|. \quad (3.3)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|z(t)| \leq \left\{ \int_0^t |l^\top \Psi(t - \tau) B|^2 d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t |v(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

откуда с учетом замены $t - \tau = \theta$ следует, что

$$\frac{|z(t)|}{\left\{ \int_0^t |v(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}} \leq \left\{ \int_0^t |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^t |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta,$$

как функция верхнего предела является монотонно возрастающей функцией. Таким образом, имеем, что максимум функции достигается в конечный момент времени

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_2} \leq \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Следовательно, получена верхняя оценка для изучаемого показателя $J_T^{(2)}$. Остается выяснить, существует ли возмущение $v_*(t)$, для которого полученная оценка достигается. В качестве искомого наихудшего возмущения рассмотрим возмущение

$$v_*^{(2)}(t) = l^\top \Psi(T-t)B.$$

Окончательно с учетом (3.3) получаем

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_*\|_2} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Итак, для заданного значения T решение поставленной задачи имеет следующий вид

$$v_*^{(2)}(t) = l^\top \Psi(T-t)B, \quad J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}. \quad (3.4)$$

3.2. Альтернативный способ вычисления показателя $J_T^{(2)}$

Как следует из формул (3.4), для вычисления показателя $J_T^{(2)}$ следует найти матрицу $\Psi(t)$, а затем вычислить определенный интеграл, под знаком которого фигурирует найденная матрица $\Psi(t)$. Представим альтернативный способ получения решения поставленной задачи с использованием результатов работ [11], [12]. Запишем систему (2.1) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 v, & x(0) &= 0, \\ z(t) &= l^\top x(t), \end{aligned}$$

где $x \in R^{2n}$ – вектор, определяющий состояние системы,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [11] изучаемый показатель $J_T^{(2)}$ назван максимальным уклонением выхода линейной системы. Сформулирована и доказана теорема [11], на основе которой предлагается способ вычисления этого показателя. Применительно к рассматриваемой задаче имеем

$$J_T^{(2)} = (l^\top Y(T)l)^{1/2},$$

где симметрическая положительно определенная матрица $Y(t)$ есть решение дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Y} = AY + YA^\top + B_1 B_1^\top, \quad Y(0) = 0.$$

В работе [11] показано, что показатель $J_T^{(2)}$ является неубывающей функцией T , и при неограниченном увеличении T показатель $J_T^{(2)}$ стремится к величине

$$J_\infty^{(2)} = (l^\top Y_* l)^{1/2}, \quad (3.5)$$

где матрица Y_* есть решение матричного уравнения Ляпунова

$$AY + YA^\top + B_1 B_1^\top = 0.$$

3.3. Возмущения с ограниченным размахом колебаний

Рассмотрим случай $p = \infty$. Из соотношения (3.3) следует что

$$|z(t)| \leq \max_{\tau \in [0, t]} |v(\tau)| \int_0^t |l^\top \Psi(t - \tau) B| d\tau,$$

тогда

$$\frac{|z(t)|}{\max_{\tau \in [0, t]} |v(\tau)|} \leq \int_0^t |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta.$$

Поскольку

$$\max_{t \in [0, T]} |v(t)| = \|v\|_\infty,$$

то

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_\infty} \leq \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta.$$

Следовательно, наихудшим возмущением в этом случае является

$$v_*^{(\infty)}(t) = \text{sign}[l^\top \Psi(T - t) B], \quad (3.6)$$

при этом

$$J_T^{(\infty)} = \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta. \quad (3.7)$$

3.4. Возмущения с ограниченным импульсом

Наконец рассмотрим случай $p = 1$. Из соотношения (3.3) следует

$$|z(t)| \leq \max_{\tau \in [0, t]} |l^\top \Psi(t - \tau) B| \int_0^t |v(\tau)| d\tau.$$

Тогда,

$$\frac{|z(t)|}{\int_0^t |v(\tau)| d\tau} \leq \max_{\tau \in [0, t]} |l^\top \Psi(t - \tau) B|.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_1} \leq \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

Нетрудно проверить, что полученная оценка достигается при возмущении

$$v_*^{(1)}(t) = \delta(t), \quad (3.8)$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, соответствующее значение показателя

$$J_T^{(1)} = \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

3.5. Взаимосвязь между показателями

Установим простые соотношения между вычисленными выше показателями. Заметим вначале, что

$$J_T^{(\infty)} = \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta \leq \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T d\theta \right\}^{1/2} = J_T^{(2)} T^{1/2}.$$

Далее получим

$$J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta \right\}^{1/2} \leq \left\{ \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|^2 T \right\}^{1/2} = J_T^{(1)} T^{1/2}.$$

Окончательно имеем

$$J_T^{(\infty)} \leq J_T^{(2)} T^{1/2} \leq J_T^{(1)} T,$$

или в развернутой форме

$$\frac{\int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B| d\theta}{T} \leq \left\{ \frac{\int_0^T |l^\top \Psi(\theta) B|^2 d\theta}{T} \right\}^{1/2} \leq \max_{t \in [0, T]} |l^\top \Psi(t) B|.$$

4. Механическая система со многими степенями свободы

В качестве базового примера рассмотрим простейшую модель – механическая система со многими степенями свободы, представляющий собой одномерную однородную цепочку материальных точек, последовательно соединенных между собой упругими и демпфирующими элементами. Цепочка материальных точек связана с подвижным основанием, совершающим прямолинейное движение относительно инерциальной системы отсчета (см. рис 4.1)

Динамика цепочки описывается системой дифференциальных уравнений

$$M\ddot{q} + C_0\dot{q} + K_0q = -B_0\ddot{q}_0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (4.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор, определяющий координаты материальных точек относительно основания, q_0 – координата основания относительно инерциальной системы отсчета;

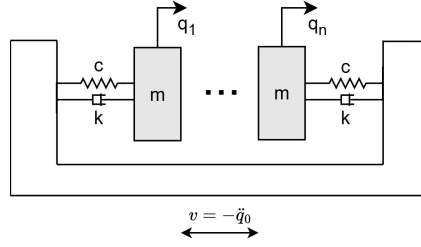


Рис. 4.1. Система с \$n\$ степенями свободы

Fig. 4.1. Mechanical system with \$n\$ degrees of freedom

\$M = mI\$, \$C_0 = cK\$, \$K_0 = kK\$ и \$B_0 = mB\$, где

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

положительные параметры \$m\$, \$c\$, \$k\$ определяют массу каждой материальной точки, \$c\$ – коэффициент демпфирования, а \$k\$ – коэффициент жесткости демпфирующих и упругих элементов соответственно.

Приведем теперь решение задач о наилучших воздействиях для указанной системы в случае оценки деформации упругого элемента, связывающего крайнюю точку цепочки с основанием, т.е. полагая, что

$$z = l^\top q, \quad \text{где } l^\top = (1, 0, 0 \cdots, 0).$$

Выполним преобразование системы (4.1). Введем безразмерные переменные:

$$q(t) = \tilde{L}\tilde{q}(\tilde{t}), \quad t = \tilde{T}\tilde{t},$$

где \$\tilde{L}, \tilde{T}\$ – коэффициенты масштабирования. Система (4.1) примет вид:

$$m \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}^2} \frac{d^2 \tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + c \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}} K \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + k \tilde{L} K \tilde{q} = -mB \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}^2} \frac{d^2 \tilde{q}_0}{d\tilde{t}^2}.$$

Полагая \$\tilde{L} = 1\$ и \$\tilde{T} = \sqrt{m/k}\$, преобразуем последнюю систему к виду:

$$\frac{d^2 \tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + \beta K \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + K \tilde{q} = Bv, \quad (4.2)$$

где \$\beta = c/\sqrt{mk}\$, \$v = -d^2 \tilde{q}_0 / d\tilde{t}^2\$. В дальнейшем волнистую черту будем опускать. Тогда рассматриваемая система в безразмерных переменных будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \beta K \dot{q} + Kq &= Bv, \\ z &= l^\top q, \\ q(0) &= 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь вектор координат \$q\$ и целевой выход \$z\$ описаны в безразмерных величинах.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как практически найти показатели $J_T^{(1)}$, $J_T^{(2)}$ и $J_T^{(\infty)}$. Из приведенных выше формул для указанных показателей следует, что требуется найти $n \times n$ -матрицу $\Psi(t)$, являющуюся решением системы (3.1)

$$\ddot{\Psi} + \beta K \dot{\Psi} + K \Psi = 0, \quad \Psi(0) = 0, \quad \dot{\Psi}(0) = I. \quad (4.4)$$

Представим матрицу Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

где ψ_i – вектор-столбец с компонентами $(\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, \dots, \psi_i^{(n)})$. Для вычисления показателей требуется знание функции $\gamma(t) = l^\top \Psi(t) B$. С учетом заданных для рассматриваемой системы вектор-строки l^\top и вектор-столбца B получаем

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i^{(1)}(t). \quad (4.5)$$

Тогда, имеем

$$J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T \gamma^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2}, \quad J_T^{(\infty)} = \int_0^T |\gamma(\theta)| d\theta, \quad J_T^{(1)} = \max_{t \in [0, T]} |\gamma(t)|.$$

Соответствующие наихудшие возмущения выглядят следующим образом

$$v_*^{(2)}(t) = \gamma(T - t), \quad v_*^{(\infty)}(t) = \text{sign}[\gamma(T - t)], \quad v_*^{(1)}(t) = \delta(t).$$

Вообще говоря, матрица $\Psi(t)$ может быть построена путем численного решения системы дифференциальных уравнений (4.4), однако учет некоторой специфики системы ($K = K^\top$) позволяет построить решение иным способом. Заметим, что система (4.4) может быть представлена в виде

$$\ddot{\Phi} + \beta \Lambda \dot{\Phi} + \Lambda \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \dot{\Phi}(0) = I, \quad (4.6)$$

где Λ и $\Phi(t)$ – диагональные матрицы такие, что

$$S^\top K S = \Lambda, \quad S^\top \Psi(t) S = \Phi(t). \quad (4.7)$$

Диагональные элементы матрицы Λ являются собственными числами матрицы K , а нормированные собственные векторы матрицы K составляют столбцы ортогональной матрицы S . Введем обозначения Λ следующим образом

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2). \quad (4.8)$$

Элементы ω_i^2 упорядочены от наименьшего к наибольшему и представляют собой квадраты частот собственных колебаний недемпфированной ($\beta = 0$) механической системы. Диагональные элементы $\phi_i(t)$ матрицы $\Phi(t)$ есть решения дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{\phi}_i + \beta \omega_i^2 \dot{\phi}_i + \omega_i^2 \phi_i = 0, \quad \phi_i(0) = 0, \quad \dot{\phi}_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Таким образом, для нахождения показателей и соответствующих наихудших возмущений требуется найти $\phi_i(t)$, решив уравнения (4.9), затем найти матрицу $\Psi(t) = S\Phi(t)S^T$ и определить функцию $\gamma(t)$ (4.5). Введем обозначение

$$\eta_i = \frac{\beta\omega_i}{2},$$

тогда система (4.9) переписывается в виде

$$\ddot{\phi}_i + 2\eta_i\omega_i\dot{\phi}_i + \omega_i^2\phi_i = 0, \quad \phi_i(0) = 0, \quad \dot{\phi}_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение представляется в аналитической форме

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\omega_i\sqrt{1-\eta_i^2}}e^{-\eta_i\omega_i t} \sin[\omega_i\sqrt{1-\eta_i^2}t] \quad \text{при } \eta_i \leq 1,$$

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\lambda_{2i} - \lambda_{1i}}[-e^{\lambda_{1i}t} + e^{\lambda_{2i}t}] \quad \text{при } \eta_i > 1,$$

где

$$\lambda_{1i} = -\omega_i[\eta_i + \sqrt{\eta_i^2 - 1}], \quad \lambda_{2i} = -\omega_i[\eta_i - \sqrt{\eta_i^2 - 1}].$$

4.1. Система с одной степенью свободы

В качестве примера рассмотрим простейшую систему с одной степенью свободы (см. рис. 4.2).

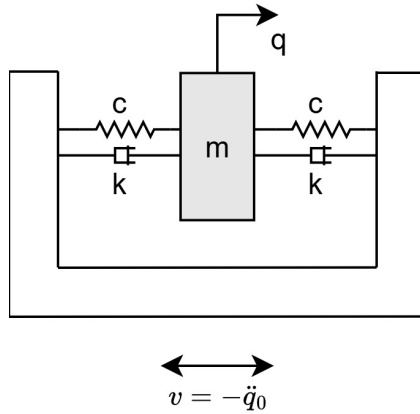


Рис. 4.2. Система с одной степенью свободы

Fig. 4.2. Single-Degree-of-Freedom (SDOF) system

Динамика объекта описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{q} + 2c\dot{q} + 2kq = -m\ddot{q}_0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (4.10)$$

где $q \in \mathbb{R}^1$ – смещение объекта относительно основания, q_0 – смещение основания относительно инерциальной системы отсчета, m – масса объекта, c и k – коэффициенты

демпфирующего и упругого элементов. Заменой переменных и параметров (4.10) сводится к уравнению

$$\ddot{q} + 2\eta\dot{q} + 2q = v, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (4.11)$$

Решение последнего уравнения при $\eta \in [0, \sqrt{2})$, согласно (3.2), имеет вид

$$q(t) = \int_0^t \psi(t-\tau)v(\tau)d\tau, \quad \psi(t) = \mu^{-1}e^{-\eta t} \sin(\mu t), \quad (4.12)$$

где

$$\mu = (2 - \eta^2)^{1/2}.$$

Для системы (4.11) можем получить аналитические решения для трех классов возмущений Пусть $p = 2$. Формулы (3.4) будут иметь:

$$\begin{aligned} J_T^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{\mu} \int_0^T e^{-2\eta\theta} \sin^2(\mu\theta) d\theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta T}}{\mu\eta} + \frac{e^{-2\eta T} (2\eta \cos(2\mu T) - 2\mu \sin(2\mu T)) - 2\eta}{2\mu\eta^2 + \mu^2}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$v_*^{(2)} = \frac{e^{-\eta(T-t)}}{\mu} \sin(\mu(T-t)). \quad (4.14)$$

Рассмотрим случай при $p = \infty$. Формула (3.6) будет иметь вид:

$$J_T^\infty = \frac{1}{\mu} \int_0^T e^{-\eta\theta} |\sin(\mu\theta)| d\theta. \quad (4.15)$$

Для вычисления интеграла с учетом периодичности и знака функции $\sin(\mu\theta)$ интервал разбивается на отрезки $\Delta_k = \left[\frac{(k-1)\pi}{\mu}, \frac{k\pi}{\mu} \right]$, $k = (\overline{1, n})$. Тогда:

$$J_T^{(\infty)} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[F\left(\frac{k\pi}{\mu}\right) - F\left(\frac{(k-1)\pi}{\mu}\right) \right] + (-1)^n \left[F(T) - F\left(\frac{n\pi}{\mu}\right) \right] \right), \quad (4.16)$$

где

$$F(\theta) = \frac{-\mu e^{-2\eta\theta} \cos(\mu\theta) - 2\eta e^{-2\eta\theta} \sin(\mu\theta)}{4\eta^2 + \mu^2}.$$

Согласно (3.7) наихудшее возмущение примет вид:

$$v_T^\infty = \text{sign}(\sin(\mu(T-t))). \quad (4.17)$$

Рассмотрим случай $p = 1$. Согласно формуле (3.8):

$$J_T^{(1)} = \max \left| \frac{e^{-\eta t}}{\mu} \sin(\mu t) \right|.$$

Решение задачи на максимум дает значение отклонение в виде:

$$J_T^{(1)} = \frac{e^{-\eta t_{\max}}}{\mu} \sin(\mu t_{\max}), \quad \text{где} \quad t_{\max} = \frac{1}{\mu} \left(\arctan \frac{\mu}{\eta} \right).$$

Результаты моделирования значения показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ и возмущений от времени для $p = 2, p = \infty$ и параметров $\eta = 0.05, T = [0, 20\pi]$ приведены на рисунках 4.3, 4.4. Для сравнения рассматриваем гармонические возмущения $v_0(t) = \sin(\tilde{\omega}t)$, где $\tilde{\omega} = \sqrt{2}$ – частота собственных колебаний. Анализ отклика системы на синусоидальное воздействие:

$$I_T^{(2)} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_0\|_2}, \quad I_T^{(\infty)} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v_0\|_\infty},$$

позволяет выявить резонансные частоты, что важно для практического применения.

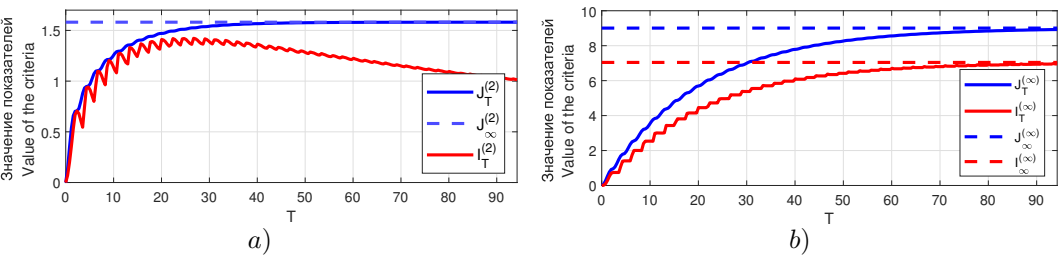


Рис. 4.3. Зависимость показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с одной степенью свободы:

a) ограниченная энергия, b) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.3. Performance indices $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ versus parameter T for SDOF system:
a) bounded energy, b) bounded range of oscillations

Графики на рисунке 4.3 а) показывают, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, отвечающие наихудшему и гармоническому воздействиям соответственно, имеют близкие значения (некоторые значения представлены в таблице 4.1). При увеличении параметра T значения показателей расходятся, при этом, показатель $J_T^{(2)}$ стремится к значению показателя $J_\infty^{(2)}$, определяемому формулой (3.5), а значение показателя $I_T^{(2)}$ стремится к нулю.

Графики на рисунке 4.3 б) напротив демонстрируют, что значения наихудшего возмущения и гармонического начинают отличаться уже при малых значениях T .

Таблица 4.1. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.1. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1358	0.0703	0.07
π	0.7977	0.6118	0.19
3π	1.2208	1.1911	0.03
5π	1.4046	1.3691	0.04

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.4.

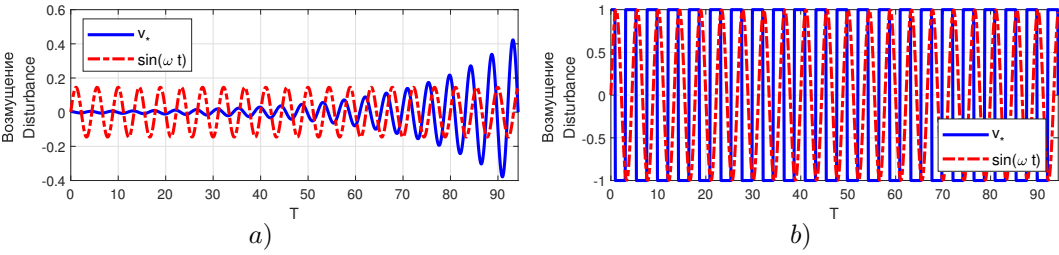


Рис. 4.4. Наихудшее и гармоническое возмущения для системы с одной степенью свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.4. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for SDOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

4.2. Система с двумя степенями свободы

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы рис. 4.5. Динамика такого объекта будет описываться системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2c\dot{q}_1 - c\dot{q}_2 + 2kq_1 - kq_2 = -m\ddot{q}_0, \\ m\ddot{q}_2 - c\dot{q}_1 + 2c\dot{q}_2 - kq_1 + 2kq_2 = -m\ddot{q}_0, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0. \end{cases}$$

с целевым выходом:

$$z = q_1,$$

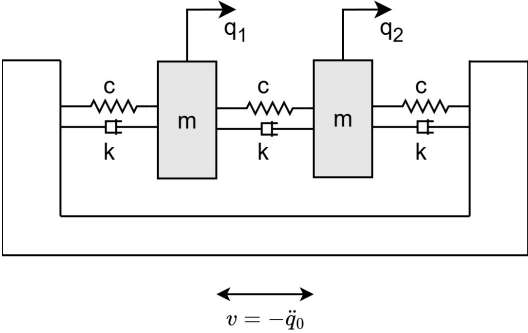


Рис. 4.5. Система с двумя степенями свободы

Fig. 4.5. 2-Degree-of-Freedom (2-DOF) system

Выполнив замену переменных и параметров, придем к задаче, которая может быть представлена в матричной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \beta K \dot{q} + Kq &= Bv, \\ z &= l^\top q, \quad l^\top = (1 \ 0), \quad B^\top = (1 \ 1). \end{aligned}$$

Для приведенного примера матрица K будет иметь вид:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (4.6)–(4.8) представим систему в виде:

$$\ddot{q} + \beta \Lambda \dot{q} + \Lambda q = \tilde{B}v, \\ z = \tilde{l}^\top q,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tilde{B} = S^{-1}B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{l}^\top = l^\top S = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}).$$

В результате произведение $\tilde{l}^\top \Psi \tilde{B} = \psi_1$, где ψ_1 определяется формулой (4.12) с параметром $\mu = \sqrt{1 - \eta^2}, \eta = \beta/2$. Таким образом, для максимальных отклонений и наихудших возмущений мы получим формулы аналогичные (4.13) – (4.17).

На рисунках 4.6, 4.7 приведены результаты моделирования значения показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ и возмущений от времени с параметрами $\beta = 0.1, T = [0, 20\pi], \omega = 1$.

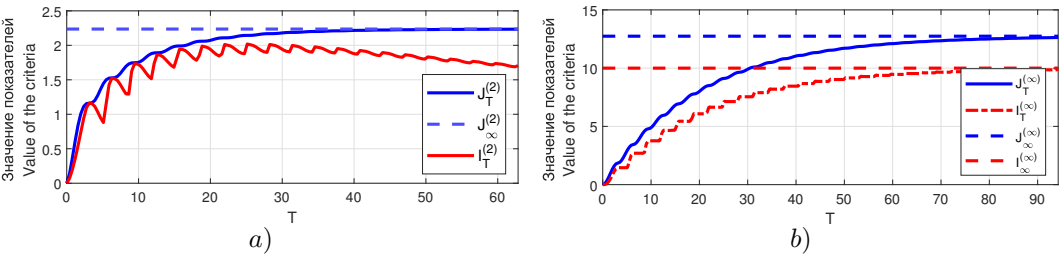


Рис. 4.6. Зависимость показателей $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с двумя степенями свободы:
а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.6. Performance indices $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$ versus parameter T for 2-DOF system:
а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

Графики на рисунке 4.6 а) показывают, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, отвечающие наихудшему и гармоническому воздействиям соответственно, имеют близкие значения (некоторые значения представлены в таблице 4.2), причем таких значений оказывается больше, чем для случая с одной массой. При увеличении параметра T значения показателей расходятся, однако делают это медленнее, чем для случая с одной массой. Показатель $J_T^{(2)}$ также стремится к значению показателя $J_\infty^{(2)}$, определяемому формулой (3.5), а значение показателя $I_T^{(2)}$ стремится к нулю.

Графики на рисунке 4.6 б) демонстрируют такую же тенденцию. Значения наихудшего возмущения и гармонического начинают отличаться уже при малых значениях T .

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.7.

Таблица 4.2. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.2. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1379	0.0703	0.07
π	1.1616	1.1612	$4 \cdot 10^{-4}$
3π	1.7476	1.7328	0.01
5π	1.9906	1.9428	0.05

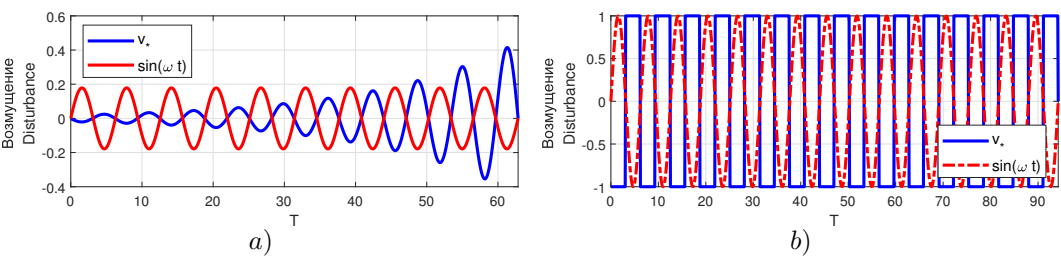


Рис. 4.7. Наихудшее и гармоническое возмущения для системы с двумя степенями свободы:
а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.7. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for 2-DOF system:
а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

4.3. Система с n степенями свободы

Для системы с n степенями свободы опустим математические выкладки и приведем сразу результаты моделирования. На рисунках 4.8, 4.9 приведены графики описывающие значения показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ (рис.4.8) и возмущений (рис.4.9) с течением времени. Параметры моделирования: $n = 10, \beta = 0.1, T = [0, 20\pi], \omega = 0.2846$

Графики на рисунке 4.8 а) демонстрируют, что для некоторых значений параметра T показатели $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$, соответствующие наихудшему и гармоническому возмущениям, имеют близкие значения на всем рассматриваемом интервале (некоторые значения представлены в таблице 4.3).

Графики на рисунке 4.8 б) демонстрируют такую же тенденцию, при этом расхождение между графиками более значительное.

Соответствующие возмущения представлены на Рис. 4.9.

5. Заключение

В данной статье предложен подход для решения задач о наихудших воздействиях на механические конструкции, описываемые системами линейных дифференциальных уравнений второго порядка. При помощи неравенства Коши-Буняковского полу-

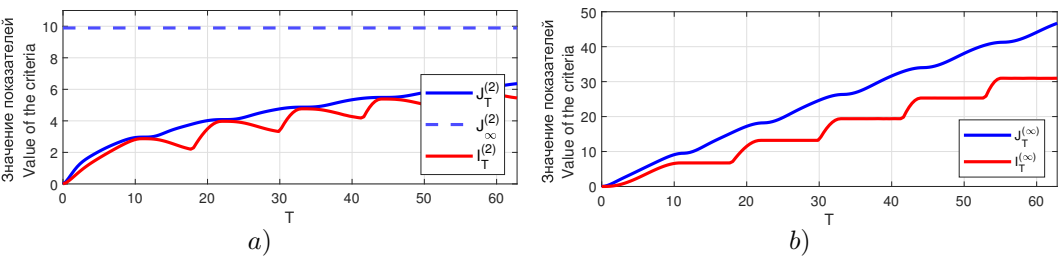


Рис. 4.8. Зависимость показателей $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ от параметра T для системы с 10-ю степенями свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.8. Performance indices $J_T^{(p)}$, $I_T^{(p)}$ versus parameter T for 10-DOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

Таблица 4.3. Нормированная разность $J_T^{(2)}$ и $I_T^{(2)}$
Table 4.3. Normalized difference between $J_T^{(2)}$ and $I_T^{(2)}$

Время Time	$J_T^{(2)}$	$I_T^{(2)}$	$\frac{ J_T^{(2)} - I_T^{(2)} }{J_T^{(2)}} \cdot 100\%$
0.125	0.1379	0.0699	0.07
3π	2.8932	2.7267	0.17
4π	3.0105	2.8438	0.17
7π	4.0809	3.9731	0.11

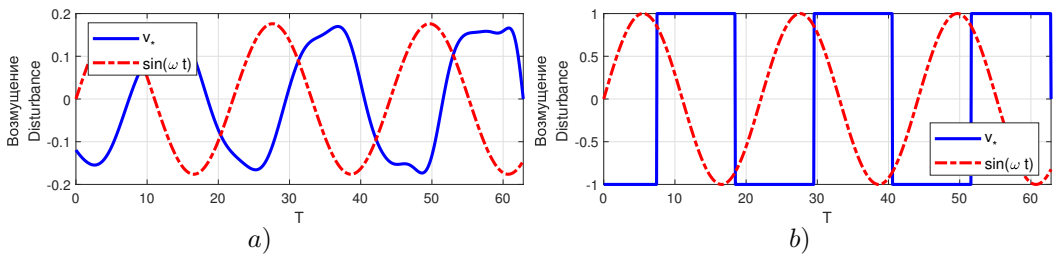


Рис. 4.9. Наихудшее и гармоническое возмущение для системы с 10-ю степенями свободы:

а) ограниченная энергия, б) ограниченный размах колебаний,

Fig. 4.9. Worst-case disturbance and harmonic disturbance for 10-DOF system:

а) bounded energy, б) bounded range of oscillations

чены верхние оценки показателей $J_T^{(p)}$, а также аналитические формулы, позволяющие определить вид наихудшего воздействия и соответствующие показатели максимальной деформации заданного упругого элемента для трех функциональных пространств: L_2 , L_∞ , L_1 . Для показателя $J_T^{(2)}$ представлен альтернативный способ вычисления, основанный на решении дифференциального матричного уравнения Ляпунова. Выведены

неравенства, устанавливающие взаимосвязь между показателями, отвечающими наилучшим воздействиям из этих трех функциональных пространств. Для возмущений из пространства L_2 представлено выражение для показателя на бесконечном интервале времени через решение алгебраического матричного уравнения Ляпунова.

В последнем разделе статьи представлены результаты численного моделирования для механических систем с одной и несколькими степенями свободы. Для сравнения рассматривался отклик системы на наиболее часто используемое гармоническое возмущение, вызывающее резонансные явления. Для системы с несколькими степенями свободы рассматривалось гармоническое возмущение на наименьшей частоте собственных колебаний.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект №24-11-20023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // *Доклады академии наук СССР*. 1946. Т. 51, № 5. С. 339–342.
2. Александров В. В. К задаче Булгакова о накоплении возмущений // *Доклады академии наук СССР. Сер. Кибернетика и теория регулирования*. 1969. Т. 186. № 3. С. 526–528.
3. Жермоленко В. Н. О максимальном отклонении линейной системы // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 7. С. 3–14. DOI: 10.1134/S0005117912070016
4. Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1981. Vol. 26, no. 2. P. 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603
5. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989. Vol. 34, no. 8. P. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
6. Khargonekar P. P., Nagpal K. M., Poolla K. R. H_∞ -Control with Transients. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 1991. Vol. 29, no. 6. P. 1373–1393. DOI: 10.1137/0329070
7. Lu W. W., Balas G. J., Lee E. B. A Variational Approach to H_∞ Control with Transients. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. Vol. 44. P. 1875–1879.
8. Foo Y. K. H_∞ Control with Initial Conditions. *IEEE Trans. Circuits and Systems*. 2006. Vol. 53, no. 9. P. 867–871. DOI: 10.1109/TCSII.2006.881807
9. Iannelli A., Seiler P., Marcos A. Worst-Case Disturbances for Time-Varying Systems with Application to Flexible Aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 1261–1271. DOI: 10.2514/1.G004023
10. Balandin D. V., Kogan M. M. LMI-based H_∞ -optimal control with transients. *International Journal of Control*. 2010. Vol. 83, no. 8. P. 1664–1673. DOI: 10.1080/00207179.2010.487222

11. Баландин Д. В., Бирюков Р. С., Коган М. М. Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // *Автоматика и телемеханика*. 2019. № 10. С. 37–61. DOI: 10.1134/S0005231019100027
12. Balandin D. V., Kogan M. M. Multi-objective Generalized H_2 -Control. *Automatica*. 2019. Vol. 99, no. 8. P. 317–322. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.006

*Поступила 12.09.2025; доработана после рецензирования 22.10.2025;
принята к публикации 26.11.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. B. V. Bulgakov, “On the accumulation of disturbances in linear oscillatory systems with constant parameters”, *DAN SSSR*, **51**:5 (1946), 339–342 (In Russ.).
2. V. V. Aleksandrov, “[K zadache Bulgakova o nakoplenii vozmushchenii]”, *Dokl. AN SSSR. Ser. Kibernetika i teoriya regulirovaniya*, **186**:3 (1969), 526–528 (In Russ.).
3. V. N. Zhernolenko, “On the maximum deviation of a linear system”, *Autom Remote Control*, **73**:7 (2012), 1117–1125. DOI: 10.1134/S0005117912070016
4. G. Zames, “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**:2 (1981), 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603
5. J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, “State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**:8 (1989), 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
6. P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal, K. R. Poolla, “ H_∞ -Control with Transients”, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**:6 (1991), 1373–1393. DOI: 10.1137/0329070
7. W. W. Lu, G. J. Balas, E. B. Lee, “A Variational Approach to H_∞ Control with Transients”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44** (1999), 1875–1879.
8. Y. K. Foo, “ H_∞ Control with Initial Conditions”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **53**:9 (2006), 867–871. DOI: 10.1109/TCSII.2006.881807
9. A. Iannelli, P. Seiler, A. Marcos, “Worst-Case Disturbances for Time-Varying Systems with Application to Flexible Aircraft”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **42**:6 (2019), 1261–1271. DOI: 10.2514/1.G004023
10. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “LMI-based H_∞ -optimal control with transients”, *International Journal of Control*, **83**:8 (2010), 1664–1673. DOI: 10.1080/00207179.2010.487222
11. D. V. Balandin, R. S. Biryukov, M. M. Kogan, “Optimal control of maximum deviations of outputs of a linear nonstationary system on a finite time interval”, *Autom Remote Control*, **80**:10 (2019), 1783–1802. DOI: 10.1134/S0005117919100023

12. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “Multi-objective Generalized H_2 -Control”, *Automatica*, **99**:8 (2019), 317–322. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.006

Submitted 12.09.2025; Revised 22.10.2025; Accepted 26.11.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.