DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.54

Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции

Д. Л. Ступин

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (г. Тверь, Россия)

Аннотация. Найдены точные оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B ограниченных не обращающихся в ноль в единичном круге функций f. Получено два типа оценок: при «больших» значениях $|f(0)|$ и при «малых» значениях $|f(0)|$. Первый тип оценок является асимптотическим в том смысле, что чем больше $|f(0)|$, тем для большего количества начальных коэффициентов он применим. Второй тип оценок является асимптотическим в том смысле, что чем меньше $|f(0)|$, тем для большего количества начальных коэффициентов он применим. Оба типа оценок получены при помощи методов теории подчинённых функций и теоремы Каратеодори-Тёплица для класса Каратеодори. Это стало возможным благодаря найденной связи между коэффициентами выпуклых однолистных функций (класс S^0) и коэффициентами мажорирующих функций изучаемых подклассов класса B. Указаны границы применимости метода в зависимости от $|f(0)|$ и от номера коэффициента. Дано приложение полученных результатов к теории многочленов Лаггера. Полученные результаты сравниваются с известными ранее. Методы, изложенные здесь могут быть применены на произвольных классах подчинённых функций.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, ограниченные функции, выпуклые функции, подчинённые функции, класс Каратердори, оценки тейлоровских коэффициентов, многочлены Лагерра

Для цитирования: Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 81–96. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96

Об авторе:

Ступин Денис Леонидович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (170100, Россия, г. Тверь, ул. Желябова, 33), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, dstupin@mail.ru

Original article

MSC2020 30C50

The Krzyz conjecture and convex univalent functions

D. L. Stupin

Tver State University (Tver, Russia)

Abstract. We obtained the sharp estimates of the moduli of the initial Taylor coefficients for functions f of the class B of bounded nonvanishing functions in the unit circle. Two types of estimates are obtained: one for "large" values of $|f(0)|$ and another one for "small" values of $|f(0)|$. The first type of estimates is asymptotic in the sense that it applies to an increasing number of initial coefficients as $|f(0)|$ increases. Similarly, the second type of estimates is asymptotic in the sense that it applies to an increasing number of initial coefficients as $|f(0)|$ decreases. Both types of estimates are deduced using methods of subordinate function theory and the Caratheodory-Toeplitz theorem for the Caratheodory class. This became possible due to the relation we found between the coefficients of convex univalent functions (class S^0) and the coefficients of the majorizing functions in the studied subclasses of the class B. The bounds for the applicability of the method are provided depending on $|f(0)|$ and on the coefficient number. The obtained results are applied to the theory of Laguerre polynomials. These results are compared with the previously known ones. The methods outlined here can be applied to arbitrary classes of subordinate functions.

Keywords: the Krzyz conjecture, bounded nonvanishing functions, convex functions, subordinate functions, Caratheodory class, Taylor coefficient estimates, Laguerre polynomials

For citation: *D. L. Stupin.* The Krzyz conjecture and convex univalent functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 81–96. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.81-96

About the authors:

Denis L. Stupin, Ph. D. in Phys. and Math., Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, Tver State University (33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, dstupin@mail.ru

1. Введение

1.1. Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Классом B будем называть множество голоморфных в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж, располагая точными оценками первых двух коэффициентов на классе B, высказал гипотезу [1] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant \frac{2}{e}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi}F^*(e^{i\varphi}z^n, 1)$, где

$$F^*(z,t) = e^{-t\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1.1}$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана только для первых пяти тейлоровских коэффициентов включительно. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [2]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [3]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [4]. Автор данной статьи в работе [5] стр. 81 при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.00116077$, а в работе [6] стр. 114 оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e$ численным методом.

Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после добавления к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций.

1.2. Цель работы и актуальность

Цель данной статьи состоит в том, чтобы установить связь между начальными тейлоровскими коэффициентами функций $F^*(z,t)$ и начальными тейлоровскими коэффициентами выпуклых однолистных функций. Как показано далее, эта связь может быть установлена нетривиальным образом при достаточно больших и достаточно малых значениях параметра t.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая, в свою очередь, тесно связана с теорией подчинённых функций [7] и теорией пространств Харди [2]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n представляет собой задачу на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n - 3$ действительных переменных [8]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Класс B посредством известного класса Каратеодори связан с классами однолистных функций, в частности, с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно, проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также существуют параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

Упомянем, что лемма 2.2, теорема 2.1 и теорема 2.2 были опубликованы ранее в виде препринта на русском языке [9], в виде препринта на английском языке [10], а также теоремы 2.1 и 2.2 были упомянуты в трудах конференции [11]. В настоящее время через интернет доступен только препринт на английском, поэтому упомянутые результаты приводятся здесь как для полноты изложения, так и в целях обеспечения их доступности в рецензируемом издании.

1.3. Вспомогательные соображения

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). Следовательно, можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [7], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{1.2}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad z \in \Delta, \qquad \omega(0) = 0.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ формула (1.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Из геометрических соображений ясно [7], что каждую функцию из класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\,h(z)}, \qquad h \in C, \tag{1.3}$$

где класс C состоит из голоморфных в круге Δ функций h с нормировкой $h(0) = 1$ и $\operatorname{Re} h(z) > 0$, при $z \in \Delta$.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы возможно будем для полноты указывать, что $t \geqslant 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t.

Класс функций c, регулярных и однолистных в круге Δ, с нормировкой $c(0) = 0$, $c'(0) = 1$, отображающих Δ на выпуклую область, обозначается S^0.

Отметим, что при $t > 0$ формула (1.3) задаёт биекцию B_t и C, а биекцию S^0 и C задаёт формула

$$h(z) = 1 + \frac{zc''(z)}{c'(z)}, \qquad c \in S^0, \quad h \in C. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что

$$\{c\}_0 = 0, \qquad \{c\}_1 = 1, \qquad \{c\}_n = \frac{1}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n-1} k\{c\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{1.5}$$

Добавим, что формулы (1.4) и (1.5) хорошо известны [12] стр. 89.

Продифференцировав (1.3) выведем, что

$$\{f\}_0 = e^{-t}, \qquad \{f\}_n = -\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

По всей видимости, впервые формула (1.6) появилась в статье [13]. Интересно, что если взять $t = 1/(n-1)$, то (1.6) можно записать следующим образом:

$$\{f\}_n = \frac{1}{(n-1)n}\sum_{k=1}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k} - \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства в точности повторяет выражение (1.5) для $\{c\}_n$ при $n > 1$. Второе слагаемое имеет вид очень близкий к формуле, аналогичной (1.5), но для класса звёздных функций [12] стр. 88.:

$$\{s\}_0 = 0, \qquad \{s\}_1 = 1, \qquad \{s\}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\{s\}_k\{h\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Класс функций s, регулярных и однолистных в круге Δ, с нормировкой $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$, отображающих Δ на звёздную относительно 0 область, обозначается S^*. В целях полноты изложения отметим, что биекцию S^* и C задаёт формула

$$h(z) = \frac{zs'(z)}{s(z)}, \qquad s \in S^*, \quad h \in C.$$

1.4. Подчинённые функции

Остановимся на представлениях вида (1.2). Пусть функции F и f голоморфны в Δ. Функция f называется подчинённой в Δ для функции F, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Факт подчинения обозначается символом «$\prec$», который используется следующим образом: $f(z) \prec F(z)$, $z \in \Delta$. Функцию F будем называть мажорантой для f в Δ.

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [14], однако термин был введён Д. И. Литлвудом [15] и В. Рогозинским [7], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [2], [16]).

В случае проблемы Кшижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F^*\}_k(t)$ функции $F^*(z,t)$.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций f, подчинённых функции F. Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leqslant |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leqslant \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [7] и равенство достигается только на вращениях функций $F(z)$ и $F(z^2)$ в плоскости переменной z.

Следующее утверждение [7] выражает одну из основных идей принципа подчинения:

Утверждение 1.1. *Если функции f и F голоморфны в Δ и найдётся $\omega \in \Omega_0$ такая, что $f(z) = F(\omega(z))$ в Δ, то есть $f(z) \prec F(z)$ в Δ, то $\{f\}_0 = \{F\}_0$ и*

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n}\{F\}_j\{\omega^j\}_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Имеет место следующее простое, но важное для дальнейшего утверждение [7]:

Лемма 1.1. *Если функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{f\}_n z^n$, регулярная в Δ, подчинена функции $F \in S^0$, то справедливы точные оценки $|\{f\}_n| \leqslant |\{F\}_1| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Равенство достигается только на функциях $F(e^{i\varphi}z^n)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

1.5. Критерий Каратеодори–Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат [17], [18]:

Теорема 1.1 (Каратеодори, Тёплиц). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_1, \ldots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. *Многочлен*

$$p_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \{h\}_k z^k$$

можно продолжить до функции $h(z) = p_n(z) + o(z^n) \in C$ *тогда и только тогда, когда определители*

$$M_k = \begin{vmatrix} 2 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}}_1 & 2 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}}_{k-1} & \overline{\{h\}}_{k-2} & \cdots & 2 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}}_k & \overline{\{h\}}_{k-1} & \cdots & \overline{\{h\}}_1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера m, *начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и*

$$h(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \qquad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0, \quad 0 \leqslant \varphi_1 < \ldots < \varphi_m < 2\pi.$$

2. Случай малых t

2.1. Связь с выпуклыми однолистными функциями

Введём обозначение

$$F(z,t) = \frac{F^*(z,t) - \{F^*\}_0(t)}{\{F^*\}_1(t)} = z + \{F\}_2(t) z^2 + \ldots \tag{2.1}$$

Теперь естественно напрашивается вопрос: существуют ли выпуклые однолистные функции $f \in S^0$, имеющие несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих с начальными коэффициентами функции $F(z,t)$?

Лемма 2.1. *Имеет место следующее соотношение*

$$h(z,t) = 1 + \frac{zF''(z,t)}{F'(z,t)} = 1 + 2\frac{z}{1-z} - 2t\frac{z}{(1-z)^2} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2(1 - jt) z^j. \tag{2.2}$$

Между функциями $F(z,t)$ и выпуклыми однолистными функциями есть связь. Функция $F(z,t)$ существенно нелинейная и имеет достаточно сложно устроенные коэффициенты. Тем не менее, при подстановке её в формулу (1.4) нелинейность «раскручивается» и мы получаем формулу (2.2), из которой видно, что $\{h\}_j = 2(1 - jt)$ является линейным по t. Заметим, что при логарифмировании $F(z,t)$ (см. (1.3)) нелинейность также «раскручивается», но другим способом. Например, если $g(z,t) = \ln F(z,t)$, то $\{h\}_j = -2t$.

По поводу формулы (2.2) заметим ещё, что мёбиусово преобразование $z/(1-z)$ является экстремальным во многих задачах для класса S^0, а функция Кёбе $z/(1-z)^2$, является экстремальной во многих задачах для класса всех однолистных отображений S, для его подкласса звёздных отображений S^* и для других подклассов однолистных функций.

Лемма 2.2 ([10]). *Если* $\{h\}_j = 2(1-jt)$, $j \in \mathbb{N}$, *то* $M_n = 2^{2n}t^n(2-nt)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Минор $M_n/2^{n+1}$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ 1-t & 1 & 1-t & \dots & 1-(n-2)t & 1-(n-1)t \\ 1-2t & 1-t & 1 & \dots & 1-(n-3)t & 1-(n-2)t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & 1-(n-3)t & \dots & 1 & 1-t \\ 1-nt & 1-(n-1)t & 1-(n-2)t & \dots & 1-t & 1 \end{vmatrix}.$$

Отняв от каждой строки, за исключением первой, предыдущую получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1-2t & \dots & 1-(n-1)t & 1-nt \\ -t & t & t & \dots & t & t \\ -t & -t & t & \dots & t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t & -t & -t & \dots & t & t \\ -t & -t & -t & \dots & -t & t \end{vmatrix}.$$

К каждому столбцу, кроме последнего, прибавим последний столбец

$$\begin{vmatrix} 2-nt & 1-(n+1)t & 1-(n+2)t & \dots & 1-(2n-1)t & 1-nt \\ 0 & 2t & 2t & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 2t & \dots & 2t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2t & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} = 2^{n-1}t^n(2-nt).$$

Доказательство завершено.

Теорема 2.1 ([10]). *Для любого* $t > 0$ *и* $n \leqslant 2/t + 1$, $n \in \mathbb{N}$, *полином*

$$p_n(z,t) = z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$. *При* $t = 2/(n-1)$, $n > 1$, *продолжение единственно.*

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы обращаться с функцией F как с выпуклой функцией и, подставив ее в формулу (1.4), получить функцию h с тем, чтобы изучить возможность продолжения отрезков ряда Тейлора функции h до функций класса C. Для этого воспользуемся критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) продолжаемости полинома до функции класса C.

Отрезку ряда Тейлора функции F длины n, то есть многочлену p_n по формуле (1.4) соответствует отрезок ряда Тейлора функции h длины $n-1$. Согласно лемме 2.1 имеем $\{h\}_j = 2(1-jt)$, а по лемме 2.2 имеем $M_{j-1} = 2^{2(j-1)}t^{j-1}(2-(j-1)t)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Очевидно, что $M_1, \ldots, M_{n-1}$ неотрицательны тогда и только тогда, когда $t \leqslant 2/(n-1)$, при $n > 1$, и $t > 2$, при $n = 1$, или $n \leqslant 2/t + 1$.

Из теоремы 1.1 следует, что продолжение единственно когда $t = 2/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

2.2. Основной результат для малых t

Пользуясь теоремой 2.1, формулой (1.7) и связанным с ней методом, леммой 1.1, с учётом нормировки (2.1), получаем следующий явный результат:

Т е о р е м а 2.2 ([10]). *Для любого $t > 0$, произвольного номера $N \leqslant 2/t + 1$ и каждой $f^* \in B_t$, справедливы точные оценки*

$$|\{f^*\}_n| \leqslant |\{F^*\}_1(t)| = \frac{2t}{e^t}, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Равенства в этих оценках достигаются только на функциях $F^*(e^{i\varphi}z^n, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, где функция F^* определена формулой (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\omega \in \Omega_0$, $t > 0$ и $N \leqslant 2/t + 1$, $N \in \mathbb{N}$. Возьмём натуральный номер n, не превосходящий числа N. Используя формулу (1.7), запишем n-й коэффициент функции

$$f(z) = F(\omega(z), t),$$

где F определена в формулой (2.1), в виде

$$\{f\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{F\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Теперь применим теорему 2.1 к n-му отрезку тейлоровского разложения функции $F(z, t)$, который мы обозначили через $p_n(z, t)$. Пусть $S(z)$ — продолжение полинома $p_n(z, t)$ до функции класса S^0. Тогда, используя формулу (1.7), n-й коэффициент функции

$$s(z) = S(\omega(z), t)$$

можно записать в виде

$$\{s\}_n = \sum_{j=1}^{n} \{S\}_j \{\omega^j\}_n.$$

Откуда, согласно лемме 1.1 получаем, что

$$|\{s\}_n| \leqslant 1.$$

Но $\{S\}_j = \{F\}_j$, где $j = 1, \ldots, n$, следовательно $\{f\}_n = \{s\}_n$, откуда

$$|\{f\}_n| \leqslant 1.$$

Используя нормировку (2.1), мы получаем оценки (2.3). Точность оценок (2.3) и вид экстремальных функций вытекает из леммы 1.1.
Доказательство завершено.

Из теоремы 2.2 следует, что чем меньшее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство в неравенстве (2.3), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi}z^n, t)$.

Этот результат интересен при $t \leqslant 2$. Так, например, при $t > 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \leqslant 2$ — два коэффициента, при $t \leqslant 1$ — три коэффициента, а при $t \leqslant 1/2$ — пять, и так далее.

Теорему 2.2 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кшижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например, можно утверждать, что гипотеза Кшижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t\in[0,\,1/2]} B_t$.

2.3. Приложение к теории многочленов Лагерра

Как уже упоминалось во введении, функции $F^*(z, t)$ тесно связаны с многочленами Лагерра [19]. Из соотношений для $F^*(z, t)$ можно выводить свойства этих многочленов.

Обобщённые многочлены Лагерра $L_n^{\alpha}(t)$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, определим, следуя [19], как последовательность тейлоровских коэффициентов производящей функции $(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-t\frac{z}{1-z}}$, то есть формулой

$$e^{-t\frac{z}{1-z}} = (1-z)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(t) z^n.$$

Ясно, что

$$e^t\{F^*\}_n(t) = L_n^{-1}(2t), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.4}$$

Согласно формуле (2.2) — $\{h\}_j = 2(1 - jt)$, $j \in \mathbb{N}$, а согласно формуле (1.5) —

$$\{h\}_{n-1} = (n-1)n\{f\}_n - \sum_{k=2}^{n-1} k\{f\}_k\{h\}_{n-k}, \qquad n \geqslant 3.$$

Имея ввиду формулы (2.4), (2.1) и подставив сюда

$$\{f\}_j = \{F\}_j(t) = L_j^{-1}(2t), \qquad j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

получаем

$$(n-1)nL_n^{-1}(2t) - \sum_{k=2}^{n-1} k(1-(n-k)t)L_k^{-1}(2t) = 2(1-(n-1)t), \qquad n \geqslant 3.$$

3. Случай больших t

При достаточно больших значениях параметра t начальные коэффициенты функции $F^*(-z, t)$ положительны и имеют тенденцию к возрастанию. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.

Нормируем функцию $F^*(-z,t)$ так, чтобы n-ый коэффициент в её тейлоровском разложении стал равен 1. Введём обозначение

$$F(z,t) = \frac{F^*(-z,t)}{|\{F^*\}_n(t)|}.$$

Существуют выпуклые однолистные функции $f \in S^0$, имеющие несколько начальных тейлоровских коэффициентов, совпадающих со всеми первыми n коэффициентами функции $F(z,t)$, взятыми в обратном порядке. Имеет место следующее утверждение:

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Многочлен*

$$p_n(z,t) = z + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_{n-k+1}(t) z^k$$

может быть дополнен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n) \in S^0$ для любого $t \geqslant t_2(n)$, где $t_2(n)$ есть наибольший положительный корень уравнения $M_{n-1}(t) = 0$, а M_{n-1} это минор из теоремы 1.1, составленный из коэффициентов функции h, полученной по формуле (1.4) *из функции f. При $t = t_2(n)$ продолжение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ имеем $p_1(z,t) = z$. Очевидно, что $p_1 \in S^0$. Более того, очевидно, что существует бесконечное множество продолжений многочлена p_1 до функций класса S^0 так как все функции класса S^0 имеют вид $f(z) = z + \ldots$

Пусть номер $n > 1$. Согласно [16], тейлоровские коэффициенты a_k функции $F^*(-z,t)$ заданы формулой

$$a_k = (-1)^k e^{-t} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-2)^j C_{k-1}^{j-1}}{j!} t^j, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

стало быть,

$$a_k \sim \frac{2^k}{k!} t^k e^{-t}, \qquad t \to \infty, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и

$$p_n(z,t) \sim z + \frac{\alpha_2}{t} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-1}} z^n, \qquad t \to \infty,$$

где α_j, $j = 2, \ldots, n-1$, — некоторые константы, не зависящие от t. Поскольку

$$z + \frac{\alpha_2}{t} z^2 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-1}} z^n \sim z, \qquad t \to \infty,$$

то

$$p_n(z,t) \sim z, \qquad t \to \infty,$$

и, следовательно, $p_n(z,t)$ может быть продолжен до функции $f(z) = p_n(z,t) + o(z^n)$ класса S^0.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Имеет место [20] стр. 11

Т е о р е м а 3.2 (Маркс, Штрохеккер)**.** *Если $h(z) = 2g(z)/z - 1$ и $g \in S^0$, то $h \in C$.*

Имеет место [7]

Т е о р е м а 3.3 (Рогозинский)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, f, F *голоморфны в* Δ *и* $f(z) \prec F(z)$ *в* Δ. *Если* $\{F\}_n > 0$ *и найдётся функция* h *такая, что* $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$, *где*

$$h(z) = \frac{1}{2}\{F\}_n + \{F\}_{n-1}z + \ldots + \{F\}_1 z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \{h\}_k z^k,$$

то

$$|\{f\}_n| \leqslant \{F\}_n.$$

Равенство достигается только если $f(z) = F(\eta z)$, $|\eta| = 1$, *или если*

$$\{F\}_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{i(n-k)\theta_j}, \qquad k = 2, \ldots, n, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \{F\}_n, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

Сформулируем основной результат для случая больших t:

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Для любого* $t \geqslant t_2(n)$ *и каждой* $f \in B_t$, *справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_k| \leqslant |\{F^*\}_k(t)|, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Экстремалями в этих оценках являются только функции $F^*(e^{i\varphi}z, t)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, *где функция* F^* *определена формулой* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный номер n. Так как $f \in B_t$, то $f(z) \prec F^*(-z, t)$, $z \in \Delta$, следовательно $f(z)/|\{F^*\}_n(t)| \prec F(z, t)$, $z \in \Delta$. Согласно теореме 3.1, многочлен $p_n(z, t)$ (из теоремы 3.1) может быть дополнен до функции $g \in S^0$, где $g(z) = p_n(z, t) + o(z^n)$. Пусть $h(z) = 2g(z)/z - 1$. Так как $h \in C$ по теореме 3.2, то мы можем применить теорему 3.3 к функции $|\{F^*\}_n(t)|/2 \cdot h$, откуда сразу получим, что $|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_n(t)|$. Проведя эти рассуждения для всех номеров k не превосходящих n мы получим все неравенства (3.5).

Случаи достижения равенств в неравенствах (3.5) получаются из теоремы 3.3 с учётом того факта, что на B_t нет выпуклой структуры.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В отличии от случая малых значений параметра t, выражение для $t_2(n)$ достаточно сложное. Приведём несколько первых значений $t_1(n)$ и $t_2(n)$:

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 1, && t_2(3) = 4.575885\ldots,\\
&t_1(4) = 2/3, && t_2(4) = 6.880020\ldots,\\
&t_1(5) = 1/2, && t_2(5) = 9.005605\ldots,\\
&t_1(6) = 2/5, && t_2(6) = 11.03609\ldots.
\end{aligned}$$

Из теоремы 3.4 следует, что чем большее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t. При этом, наши оценки будут точными в том смысле, что равенство в неравенстве (3.5), достигается на функциях $F^*(e^{i\varphi}z, t)$.

Этот результат интересен при $t \geqslant 2$. Так, например, при $t < 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \geqslant 2$ — два коэффициента, при $t \geqslant t_2(3)$ — три коэффициента, а при $t \geqslant t_2(4)$ — четыре, и так далее.

Теорему 3.4 можно понимать как доказательство справедливости гипотезы Кшижа для начальных коэффициентов на классах B_t. Например, можно утверждать, что гипотеза Кшижа доказана для первых пяти тейлоровских коэффициентов на множестве функций $\bigcup\limits_{t \geqslant t_2(5)} B_t$.

4. Асимптотические оценки коэффициентов

Пользуясь теорией подчинения [7] и критерием Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) Р. Перец сформулировал [16] две теоремы, содержащие асимптотические оценки $|\{f\}_n|$ для достаточно больших и для достаточно малых неотрицательных значений t.

Теорема 4.1 (Перец). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_1(n) > 0$ такое, что для любой $f \in B_t$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_1(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F^*(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 4.2 (Перец). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_2(n) \geqslant 0$ такое, что для $f \in B_t$ при $t \geqslant t_2(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leqslant |\{F^*\}_n(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F^*(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 2.2 даёт явные границы $0 \leqslant t \leqslant 2/(n-1)$. В доказательстве теоремы 4.1 содержатся асимптотические границы $0 \leqslant t \leqslant 2/n$. Таким образом, границы из теоремы 2.2 асимптотически лучше границ из теоремы 4.1 Необходимо отметить, что указанные в теореме 2.2 границы для t не наилучшие. Мы воспользовались тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z,t)$ можно продолжить до выпуклой однолистной функции, что дало простую закономерность, связывающую n и t.

Заметим, что из теоремы 2.2 сразу следует теорема 4.1. Однако, Перец доказал свою теорему намного раньше. Он пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F^*(z,t)$ можно продолжить до функции класса Каратеодори. Используя этот подход при $t = 2$ мы по-прежнему сможем оценить только два коэффициента на классе B_t, зато при $t = 1$ этот метод позволяет оценить уже шесть коэффициентов.

Д. В. Прохоров и С. В. Романова методами оптимального управления получили аналогичные, но менее явные результаты [21], [22]. В частности, в статье [22] получены точные оценки для малых t, гарантирующие локальный максимум модуля n-го коэффициента.

В формулировках Переца не упоминаются границы для n и t, однако для фиксированного n эти границы можно получить используя критерий Каратеодори-Тёплица (теорема 1.1) в виде наименьшего положительного корня некоторого многочлена от t

для случая малых t и в виде наибольшего положительного корня некоторого многочлена от t для случая больших t.

$$\begin{aligned}
&t_1(1) = +\infty, && t_2(1) = 0,\\
&t_1(2) = 2, && t_2(2) = 2,\\
&t_1(3) = 3/2, && t_2(3) = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2},\\
&t_1(4) = 3 - \sqrt{3}, && t_2(4) = 6,\\
&t_1(5) = 1.129457\ldots, && t_2(5) = 7.899361\ldots,\\
&t_1(6) = 1.037289\ldots, && t_2(6) = 9.785796\ldots.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что для $n = 1$ и $n = 2$ проблема Кшижа, при помощи изучаемого в этой статье подхода, решена нами полностью. Однако, проблема Кшижа, уже при $n \geqslant 3$, в рамках предложенного здесь подхода, решена нами только частично. С другой стороны, интервалы, на которых задача не решена конечны.

Заметим, что эти границы также как и границы теоремы 2.2 не наилучшие. Подробнее об этом смотрите в работе [6].

Вообще, любые методы оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B следует считать асимптотическими, если они не точны на B_t при всех $t > 0$.

5. Заключение

В настоящей статье найдена связь коэффициентов мажорирующих функций классов B_t с коэффициентами функций класса S^0. При помощи этой связи найдены точные оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов при малых и больших значениях параметра t на классах B_t.

При малых t оценки являются асимптотическими в том смысле, что чем меньше t, тем больше начальных коэффициентов можно оценить. При больших t оценки являются асимптотическими в том смысле, что чем больше t, тем больше начальных коэффициентов можно оценить.

Эти результаты получены при помощи методов теории подчинённых функций и теоремы Каратеодори-Тёплица, дающей решение проблемы коэффициентов на классе Каратеодори. Указаны границы применимости метода в зависимости от t и от номера коэффициента. Дано приложение полученных результатов к теории многочленов Лаггера. Проведено сравнение полученных результатов с известными ранее асимптотическими оценками.

Методы, изложенные здесь не являются специфичными для классов B_t и могут быть применены на произвольных классах подчинённых функций.

Список литературы

1. Krzyz J. G. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 20. P. 314.

2. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Journal d'Analyse Mathematique. 1977. Vol. 31. P. 169–190. DOI: 10.1007/BF02813302

3. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. Vol. 48. P. 169–192.

4. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // Compl. Var. Theory and Appl. 2003 Vol. 48, Issue 9. P. 753–766. DOI: 10.1080/0278107031000152616

5. Ступин Д. Л. Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. №. 2. С. 71–84.

6. Ступин Д. Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 145. С. 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120

7. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions // Proc. London Math. Soc. 1945. Vol. 48, Issue 1. P. 48–82. DOI: 10.1112/plms/s2-48.1.48

8. Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 143. С. 277–297. DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

9. Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кжижа // Применение функционального анализа в теории приближений. 2010. № 32. С. 52–60.

10. Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. Electronic archive / Cornell University Library. 2011. DOI: 10.48550/arXiv.1104.3984

11. Ступин Д. Л. Асимптотические оценки коэффициентов в проблеме Кжижа // Комплексный анализ и приложения: Материалы VI Петрозаводской международной конференции. Петрозаводск. 2012. С. 69–74.

12. Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Томск: Издательство Томского университета. 1976. 156 с.

13. Гальперин И. М. Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций // УМН. 1965. Т. 20. Вып. 1(121). С. 197–202.

14. Lindelöf E. Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. Vol. 35. Issue 7. P. 1–35.

15. Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.

16. Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // Compl. Var. 1992. Vol. 17. Issue 3-4. P. 213–222. DOI: 10.1080/17476939208814514

17. Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. Vol. 32. P. 193–217. DOI: 10.1007/BF03014795

18. Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. № 33. С. 45–74.

19. Lewandowski Z., Szynal J. An upper bound for the Laguerre polynomials // J. Comp. Appl. Math. 1998. Vol. 99. P. 529–533. DOI: 10.1016/S0377-0427(98)00181-2

20. Schober G. Univalent Functions – Selected Topics, Springer-Verlag. 1975.

21. Романова С. В. Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения // Известия вузов. Математика. 2002. № 11. С. 83–85.

22. Прохоров Д. В., Романова С. В. Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей // Известия РАН, Серия математическая. 2006. Т. 70, № 4. С. 209–224. DOI: 10.4213/im564

Поступила 10.03.2024; доработана после рецензирования 20.01.2025; принята к публикации 26.02.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Ann. Polon. Math.*, **70** (1968), 314.

2. J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J.d’Analyse Mathematique*, **31** (1977), 169–190. DOI: 10.1007/BF02813302.

3. W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A*, **48** (1994), 169–192.

4. N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48** (2003), 48–82. DOI: 10.1080/0278107031000152616.

5. D. L. Stupin, “One method of estimating moduli of Taylor coefficients of subordinate functions”, *Voronezh State University Reports. Physics. Mathematics*, 2024, no. 2, 71–84.

6. D. L. Stupin, “A new method of estimation of modules of initial Taylor coefficients on the class of bounded nonvanishing functions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120 (In Russ.).

7. W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82. DOI: 10.1112/plms/s2-48.1.48.

8. D. L. Stupin, “The coefficient problem for bounded functions and its applications”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297. DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297 (In Russ.).

9. D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, 2010, 52–60.

10. D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, *Cornell University Library*, 2011. DOI: 10.48550/arXiv.1104.3984.

11. D. L. Stupin, *Kompleksnyy analiz i prilozheniya: Proceedings of the VI Petrozavodsk International Conference*, Petrozavodsk, 2012.

12. I. A. Aleksandrov, *Conformal Mappings of Simply Connected and Multiply Connected Domains*, Tomsk University Press, Tomsk, 1976, 156 p.

13. I. M. Galperin, “Some Estimates for Functions Bounded in the Unit Disk”, *Russian Mathematical Surveys*, **20**:1(121) (1965), 197–202.

14. E. Lindelöf, “Mémorie sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques properiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.

15. J. E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford university press, 1947, 251 p.

16. R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3-4 (1992), 213–222. DOI: https://doi.org/10.1080/17476939208814514.

17. C. Carathéodory, “Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion”, *Rendiconti Circ. Mat.*, **32** (1911), 193–217. DOI: 10.1007/BF03014795.

18. D. L. Stupin, “Coefficient problem for functions mapping a circle into a generalized circle and the Caratheodory-Fejer problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, 2012, 45–74 (In Russ.).

19. Z. Lewandowski, J. Szynal, “An upper bound for the Laguerre polynomials”, *J. Comp. Appl. Math.*, **99** (1998), 529–533. DOI: 10.1016/S0377-0427(98)00181-2.

20. G. Schober, *Univalent Functions — Selected Topics*, Springer-Verlag, 1975.

21. S. V. Romanova, “Asymptotic estimates of linear functionals for bounded functions that do not take a zero value”, *Izvestiya vuzov. Math.*, 2002, no. 11, 83–85 (In Russ.).

22. D. V. Prokhorov, S. V. Romanova, “Local extremal problems for bounded analytic functions without zeros”, *Izvestiya RAN, Seriya matematicheskaya*, **70**:4 (2006), 209–224. DOI: 10.4213/im564 (In Russ.).

Submitted 10.03.2024; Revised 20.01.2025; Accepted 26.02.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.