DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.554.31

Фундаментальные представления ортогональной алгебры Ли и новые простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

А. В. Кондратьева, М. И. Кузнецов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Россия)

Аннотация. В работе для векторного пространства V размерности n над совершенным полем K характеристика два с заданной невырожденной ортогональной формой рассматривается действие ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ на внешних степенях пространства V. Внешняя алгебра отождествляется с алгеброй срезанных многочленов от n неизвестных, а внешние степени как модули над $\mathfrak{o}(V)$ – с однородными подпространствами неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n)$ относительно скобки Пуассона, соответствующей ортонормированному базису пространства переменных. Доказывается, что все внешние степени стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ неприводимы и попарно неэквивалентны. Относительно подалгебры $so(V)$, $n = 2l + 1$ или $n = 2l$, существует l попарно неэквивалентных фундаментальных представлений в пространствах $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l$. Все они допускают невырожденную инвариантную ортогональную форму и неприводимы при $n = 2l + 1$. При $n = 2l$ представления $so(V)$ на $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l - 1$ неприводимы, а пространство $\Lambda^l V$ имеет единственное нетривиальное собственное инвариантное подпространство M, которое является максимальным изотропным подпространством относительно инвариантной формы. Найдены две исключительные простые подалгебры Ли $P_1(6)$, $P_2(6)$ в $P(6)$, размерности $2^5 - 1$ и $2^6 - 1$, соответственно, содержащие подмодуль M, которые существуют только в случае 6 неизвестных.

Ключевые слова: совершенное поле характеристики два, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, фундаментальные представления

Для цитирования: Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фундаментальные представления ортогональной алгебры Ли и новые простые подалгебры неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 25–33. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33

Об авторах:

Кондратьева Алиса Витальевна, ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru

Кузнецов Михаил Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

Original article

MSC2020 17B50, 17B70

Fundamental representations of orthogonal Lie algebra and new simple subalgebras of nonalternating Hamiltonian Lie algebras

A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov

National Research Lobachevsky State University (Nizhny Novgorod, Russia)

Abstract. In the paper the action of the orthogonal Lie algebra $\mathfrak{o}(V)$ on the exterior powers of a space V is considered for n-dimensional vector space V over a perfect field K of characteristic two with a given nondegenerate orthogonal. The exterior algebra is identified with the algebra of truncated polynomials in n variables. The exterior powers of V taken as modules over $\mathfrak{o}(V)$ are identified with homogeneous subspaces of non-alternating Hamiltonian Lie algebra $P(n)$ with respect to the Poisson bracket corresponding to an orthonormal basis of the space V of variables. It is proved that the exterior powers of the standard representation for Lie algebra $\mathfrak{o}(V)$ are irreducible and pairwise nonequivalent. With respect to subalgebra $so(V)$, $n = 2l+1$ or $n = 2l$, there exist l pairwise nonequivalent fundamental representations in the spaces $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l$. All of them admit a nondegenerate invariant orthogonal form, being irreducible when $n = 2l + 1$. When $n = 2l$ the representations of $so(V)$ in $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, l-1$ are irreducible and the space $\Lambda^l V$ possesses the only non-trivial proper invariant subspace M, which is a maximal isotropic subspace with respect to an invariant form. Two exceptional simple Lie subalgebras $P_1(6)$, $P_2(6)$ of $P(n)$, of dimension $2^5 - 1$ and $2^6 - 1$, correspondingly, containing the submodule M, and exising only in the case of 6 variables, are found.

Keywords: perfect field of characteristic two, non-altenating Hamiltonian Lie algebras, fundamental representations

For citation: *A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov.* Fundamental representations of orthogonal Lie algebra and new simple subalgebras of nonalternating Hamiltonian Lie algebras. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 25–33. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.25-33

About the authors:

Alisa V. Kondrateva, Assistant at the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7722-870X, alisakondr@mail.ru

Michael I. Kuznetsov, D. Sc. in Phys. and Math., Professor of the Departments of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9231-301X, kuznets-1349@yandex.ru

1. Введение

Цель работы – описать строение внешних степеней стандартного представления ортогональной алгебры Ли над совершенным полем характеристики $p = 2$.

Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем K характеристики p, $\langle,\rangle$ – невырожденная симметрическая неальтернирующая билинейная форма на V, которую будем называть *ортогональной*. Ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}(V)$ состоит из всех линейных операторов A на V таких, что $\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle = 0$ для любых $x, y \in V$.

Случаи $p \neq 2$ и $p = 2$ существенно отличаются. Если $p \neq 2$, то $\mathfrak{o}(V)$ изоморфна алгебре Шевалле типа B_l, при $n = 2l + 1$, или D_l, при $n = 2l$, $\dim \mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ([1]), первое продолжение Картана $(V, \mathfrak{o}(V))^{(1)} = 0$ (см. [2]), не существует транзитивных алгебр Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $L_{-1} = V$, $L_0 \subset \mathfrak{o}(V)$, $L_1 \neq 0$.

Для $p = 2$ алгебра Ли $\mathfrak{o}(V)$ не изоморфна алгебре Шевалле типа B_l или D_l, $\dim \mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, первое продолжение Картана $(V, \mathfrak{o}(V))^{(1)} \neq 0$ и существует бесконечное множество простых неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $L_{-1} = V$, $L_0 \subset \mathfrak{o}(V)$, $L_1 \neq 0$. Строение алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ над совершенным полем K описано в [3]. Определение и свойства неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли приведены в [3–6]. Некоторые свойства L_0-модулей L_k рассматривались в [7].

В дальнейшем предполагается, что K – совершенное поле характеристики $p = 2$. Для наших целей удобно рассматривать модель пары $(V, \mathfrak{o}(V))$ как неположительную часть неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n) = L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$, где $P(n)$ – пространство многочленов $O(n)$ в разделенных степенях от переменных $x_1, \ldots, x_n$ без свободного члена со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g.$$

Конечномерные подалгебры Ли $P(n, \overline{m})$ относительно этой скобки Пуассона рассматривались в [6]. В алгебре Ли $P(n)$ $L_{-1} = V = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ – ортонормированный базис относительно формы $\langle x, y\rangle = \{x, y\}$, $x, y \in V$. Здесь $\{x, y\} \in K$. С помощью присоединенного представления $l \mapsto ad\, l\big|_{L_{-1}}$ отождествим L_0 и $\mathfrak{o}(V)$. Таким образом, $\mathfrak{o}(V) = \langle x_i x_j, x_i^{(2)},\ i, j = 1, \ldots, n\rangle$. Нам понадобятся следующие результаты о строении $\mathfrak{o}(V)$, приведенные в [3]:

- Производная алгебра $\mathfrak{o}(V)^{(1)} = \mathfrak{o}(V)' = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, n\rangle$;
- $T = \langle x_i^{(2)},\ i = 1, \ldots, n\rangle$ – максимальный тор алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$;
- $T_1 = \langle x_i^{(2)} + x_{i+1}^{(2)},\ i = 1, \ldots, n-1\rangle$ – максимальный тор p-замыкания алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)'$ в $gl(V)$,
$$\mathfrak{o}(V) \cap sl(V) = so(V) = \mathfrak{o}(V)' + T_1.$$

Так как $x_i^2 = 0$, алгебра разделенных степеней $O(n, \overline{1})$ совпадает с $T(V)$. Поэтому однородную компоненту L'_{r-2} алгебры $P(n, \overline{1})$ мы будем рассматривать как $\Lambda^r V$ для $r = 1, 2, \ldots, n$. При этом действие $\mathfrak{o}(V)$ на $\Lambda^r V$ соответствует присоединенному представлению подалгебры Ли L_0 на L'_{r-2}.

В работе внешние степени стандартного представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(V)$ называются фундаментальными по аналогии с фундаментальными представлениями алгебры Ли $sl(V)$.

Фундаментальные представления рассматриваются в параграфе 2. Доказывается, что фундаментальные представления алгебры $\mathfrak{o}(V)$ неприводимы. Если n нечетно, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль для всех r. Если $n = 2l$, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль при $r \neq l$, $T^l V$ содержит единственный ненулевой собственный подмодуль M, $\dim M = \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{l}$.

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли над полями малой характеристики $p = 2, 3$ представляет интерес построение исключительных простых алгебр Ли, которые не встречаются при большей характеристике основного поля. Описание исключительных простых алгебр Ли над полем характеристики 3 приведено в [8]. В случае, когда $p = 2$, исключительные простые алгебры Ли построены в работах [6], [9–15]. Отметим, что проблема изоморфизма между построенными алгебрами представляется очень сложной. Для алгебр Ли небольшой размерности в работах [12–15] с помощью компьютера найдены простые алгебры Ли над $\mathbb{Z}_2$ и установлено, что некоторые известные алгебры Ли изоморфны. Но уже для 15-мерных алгебр Ли полный список простых алгебр Ли неизвестен, а построение списка в случай размерности 31 при использовании существующих методов превышает возможности компьютера (см. [15]). В настоящей работе построены две исключительные простые алгебры Ли $P_1(6)$, $P_2(6)$ размерности 31 и 63, соответственно, как подалгебры неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(6)$, которые не имеют аналогов при другом количестве переменных.

2. Фундаментальные модули над $so(V)$

Для подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset N = \{1, \ldots, n\}$ положим $X_I = x_{i_1} \ldots x_{i_r} \in \Lambda^r V$, $I' = N \backslash I$. Обозначим через I_{st} подмножество в N, полученное заменой элемента $s \in I$ на $t \notin I$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно

Лемма 2.1. *Пусть $x_s x_t \in \mathfrak{o}(V)'$, $I \subset N$, $|I| = r$. Тогда*

1. $\{x_s x_t, X_I\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \{s,t\} \subset I \text{ или } \{s,t\} \subset I', \\ X_{I_{st}}, & \text{если } \{s,t\} \cap I = s. \end{cases}$

2. $(I_{st})' = (I')_{ts}$.

Применяя индукцию по числу различных индексов в I, J, $|I| = |J|$, из леммы 2.1 получаем

Следствие 2.1. *Для любых подмножеств $I, J \subset N$ таких, что $|I| = |J|$ существует последовательность элементов $x_{s_1} x_{t_1}, \ldots, x_{s_k} x_{t_k} \in \mathfrak{o}(V)'$ такая, что*

$$\{x_{s_k} x_{t_k}, \ldots \{x_{s_1} x_{t_1}, X_I\} \ldots\} = X_J,$$
$$\{x_{s_k} x_{t_k}, \ldots \{x_{s_1} x_{t_1}, X_{I'}\} \ldots\} = X_{J'}.$$

Теорема 2.1. *Пусть K – совершенное поле характеристики два, V – n-мерное векторное пространство над K, $\langle , \rangle$ – невырожденная симметрическая неальтернирующая билинейная форма на V, $\mathfrak{o}(V)$ – соответствующая ортогональная алгебра Ли. Тогда*

1. *$\Lambda^r V$ – неприводимый $\mathfrak{o}(V)$-модуль для $r = 1, \ldots, n-1$.*
2. *Если $n = 2l$, то при $r \neq l$, $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль. При $r = l$, $\Lambda^l V$ содержит единственный нетривиальный $so(V)$-подмодуль M, $\dim M = \frac{1}{2}\binom{n}{l}$.*
3. *Если $n = 2l+1$, то $\Lambda^r V$ – неприводимый $so(V)$-модуль для $r = 1, \ldots, n-1$.*
4. *С точностью до изоморфизма, фундаментальными модулями над $so(V)$ являются модули $\Lambda^r V$, $r = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. На $\Lambda^r V$ существует инвариантная относительно $so(V)$ ортогональная форма.*

Доказательство. 1. Элементы $X_I = x_{i_1} \ldots x_{i_r}$ являются весовыми векторами веса $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$. Веса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ линейно независимы на торе $T = \langle x_i^{(2)},\ i = 1, \ldots, n\rangle = \langle E_{ii},\ i = 1, \ldots, n\rangle \subset gl(n)$, где E_{ij} – стандартные матричные единицы. Следовательно, все весовые пространства $\mathfrak{o}(V)$-модуля $\Lambda^r V$ одномерны. Из следствия 2.1 получаем, что любой нетривиальный $\mathfrak{o}(V)$-подмодуль в $\Lambda^r V$ совпадает с $\Lambda^r V$.

2-3. Ограничения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ на $T_1 \subset so(V)$, где $T = \langle x_i^{(2)} + x_j^{(2)},\ i < j\rangle$ удовлетворяют единственному соотношению $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 0$. Поэтому два веса $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$ и $\varepsilon_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_r}$ равны на T_1 тогда и только тогда, когда $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r} + \varepsilon_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_r} = 0$. Отсюда получаем, что $n = 2r$, $I \cup J = N$, $I \cap J = \varnothing$. Таким образом, когда $n = 2l+1$ или $n = 2l$, $r \neq l$, все весовые пространства относительно T_1 в $\Lambda^r V$ одномерны, что, также как в п.1, влечет неприводимость $\Lambda^r V$ как $so(V)$-модуля.

Пусть $n = 2l$, $r = l$. Тогда весовые пространства $so(V)$-модуля $\Lambda^l V$ двумерны и имеют базис $X_I, X_{I'}$. Пусть M – $so(V)$-подмодуль в $\Lambda^l V$. Если M содержит двумерное весовое подпространство, то из следствия 2.1 получаем, что M содержит все весовые подпространства $\Lambda^l V$, то есть $M = \Lambda^l V$. Если M содержит вектор $X_I + aX_{I'}$, $a \in K$, то, применяя следствие 2.1, получаем, что $X_{I'} + aX_I \in M$. Значит, при $a \neq 1$, $X_I, X_{I'} \in M$. Как было показано, в этом случае $M = \Lambda^l V$. Так как M – прямая сумма одномерных весовых подпространств относительно T_1, $a = 1$ и $M \subset \langle X_I + X_{I'},\ I \subset N\rangle$. Из следствия 2.1 заключаем, что $\langle X_I + X_{I'},\ I \subset N\rangle$ – неприводимый $so(V)$-модуль. Таким образом, $M = \langle X_I + X_{I'},\ I \subset N\rangle$, $\dim M = \frac{1}{2}\binom{n}{l}$.

4. Из леммы 2.1 следует, что линейное отображение $\varphi\colon \Lambda^r V \to \Lambda^{n-r} V$ такое, что $\varphi(X_I) = X_{I'}$, является изоморфизмом $so(V)$-модулей. Пусть $\Phi\colon \Lambda^r V \times \Lambda^{n-r} V \to K$ – инвариантное спаривание, которое определяется умножением в $\Lambda(V)$. Для $u \in \Lambda^r V$, $v \in \Lambda^{n-r} V$

$$u \wedge v = \Phi(u, v) x_1 \ldots x_n.$$

Комбинируя φ с Φ, получаем инвариантную билинейную форму $\langle u, v\rangle$ на $\Lambda^r V$,

$$\langle u, v\rangle = \Phi(u, \varphi(v)).$$

Так как для $X_I, X_J \in \Lambda^r V$

$$\langle X_I, X_J\rangle = \Phi(X_I, X_{J'}) = \delta_{I,J} = \langle X_J, X_I\rangle,$$

$\langle u, v\rangle$ – симметрическая форма и $\{X_I,\ |I| = r\}$ – ортонормированный базис $\Lambda^r V$. Доказательство завершено.

Замечание 2.1. *1. Так как $so(V)$ – p-замыкание $\mathfrak{o}(V)'$, неприводимый $\mathfrak{o}(V)'$-модуль в $\Lambda^r V$ является неприводимым $so(V)$-модулем. Следовательно, во всех утверждениях теоремы 2.1 можно заменить $so(V)$ на $\mathfrak{o}(V)'$.*

2. В случае нечетного n все фундаментальные представления $so(V)$ неприводимы. При $n = 2l$ представление на $\Lambda^l V$ содержит инвариантное подпространство M, которое является максимальным изотропным подпространством относительно формы $\langle u, v\rangle$ из доказательства утверждения 4 теоремы 2.1. В классической теории фундаментальные представления по определению неприводимы, поэтому при $n = 2l$ к фундаментальным модулям над $so(V)$ следовало бы отнести модуль M вместо $\Lambda^l V$.

3. Новые простые подалгебры Ли неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

Для исследования простых конечномерных 1-градуированных алгебр Ли представляет интерес описание однородных конечномерных простых подалгебр Ли $G = G_{-1} + G_0 + G_1 + \ldots$ неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $P(n) = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ таких, что $G_{-1} = L_{-1}$, $L_0' \subseteq G_0 \subseteq L_0$, $G_1 \subset L_1$. Для этого нужна информация о структуре L_0'-подмодулей пространства L_1. Мы ограничиваемся здесь построением двух исключительных простых подалгебр, существование которых следует из теоремы 2.1. Согласно этой теореме только при $n = 6$ пространство L_1 содержит подмодуль $M = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3\rangle$. Обозначим через $P_1(6)$ подалгебру алгебры Ли $P(6)$, порожденную локальной частью $G_{-1} + G_0 + G_1$, где

$$G_{-1} = \langle x_1, \ldots, x_6\rangle,$$
$$G_0 = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, 6\rangle,$$
$$G_1 = M = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3\rangle.$$

Легко проверить, что $[G_1, G_1] = 0$, следовательно,

$$P_1(6) = G_{-1} + G_0 + G_1$$

является простой алгеброй Ли, $\dim P_1(6) = 6 + 15 + 10 = 2^5 - 1$.

Пространство $L_1 \subset P(n)$ содержит $\mathfrak{o}(V)'$-подмодуль $\widetilde{V} = \langle z x_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle$, где $z = x_1^{(2)} + \ldots + x_n^{(2)}$, $ad\, z\big|_{L_k} = k \cdot id$. Легко проверить, что подалгебра $G = G_{-1} + G_0 + G_1$ такая, что $G_{-1} = L_{-1}$, $G_0 = L_0' + \langle z\rangle$, $G_1 = \widetilde{V}$, изоморфна простой алгебре Ли $\mathfrak{o}(n+2)'$ при $n > 2$. Действительно, выберем базис $\{y_1, \ldots, y_{n+2}\}$ пространства V так, чтобы форма $\omega = (dx_1)^{(2)} + \ldots + (dx_{n+2})^{(2)}$ имела вид

$$\omega = (dy_1)^{(2)} + \ldots + (dy_n)^{(2)} + dy_{n+1} dy_{n+2}.$$

Алгебра Ли $P(n+2)$ относительно переменных $\{y_1, \ldots, y_{n+2}\}$ задается скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g + \partial_{n+1} f \partial_{n+2} g + \partial_{n+2} f \partial_{n+1} g.$$

Рассмотрим градуировку Γ типа $(0, \ldots, 0, -1, 1)$ в $P(n+2)$ относительно переменных $\{y_i\}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{o}(n+2)' = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \ldots, n+2\rangle = \langle y_i y_j,\ i, j = 1, \ldots, n+2\rangle$ содержится в $P(n+2)$. Относительно градуировки Γ $\mathfrak{o}(n+2)'$ изоморфна подалгебре $G = G_{-1} + G_0 + G_1 \subset P(n)$, где $G_1 = \widetilde{V} = \langle z x_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle$.

Пусть $n = 6$. В этом случае можно построить подалгебру $P_2(6)$, порожденную локальной частью $G_{-1} + G_0 + G_1$, где

$$G_{-1} = \langle x_1, \dots, x_6 \rangle,$$
$$G_0 = \langle x_i x_j,\ i, j = 1, \dots, 6 \rangle + \langle z \rangle,$$
$$G_1 = M + \widetilde{V} = \langle X_J + X_{J'},\ |J| = 3 \rangle + \langle z x_i,\ i = 1, \dots, 6 \rangle.$$

Учитывая, что $\{M, M\} = \{\widetilde{V}, \widetilde{V}\} = 0$, последовательно находим, что

$$G_2 = \langle X_I + z X_{I'},\ |I| = 4 \rangle,$$
$$G_3 = zM = \langle z(X_J + X_{J'}),\ |J| = 3 \rangle,$$
$$G_4 = 0.$$

Здесь $I \subset N = \{1, \dots, 6\}$, $I' = N \backslash I$.

Докажем, что $G = P_2(6)$ – простая алгебра Ли. Пусть Q – ненулевой однородный идеал алгебры Ли G. В силу транзитивности $Q_{-1} \neq 0$. Так как G_{-1} – неприводимый G_0-модуль, $Q_{-1} = G_{-1}$. Отсюда получаем, $G_{-1} + G_0 + G_1 \subset Q$, следовательно, $Q = G$, $\dim P_2(6) = 6 + 16 + 16 + 15 + 10 = 2^6 - 1$.

Алгебры Ли $P_1(6)$ и $P_2(6)$ не имеют аналогов при $n \neq 6$.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект FSWR-2023-0034, и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII, VIII. М.: Мир. 1978. 342 с.

2. Гийемин В., Штернберг Ш. Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии // Математика. 1966. Т. 10 Вып.4. С. 3–31.

3. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Russian Math. (Изв. вузов. Матем.). 2024. №. 9. С. 100–105. DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-100-105

4. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2 // Russian Math. (Изв. вузов. Матем.). 2023. №. 6. С. 95–100.

5. Kondrateva A. V. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras of characteristic two in three variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. P. 2841-2853. DOI: 10.1134/S1995080221120209

6. Lin L. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic two // Communications in Algebra. 1993. Vol. 21(2). P. 399–411.

7. Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. К теореме вложения фильтрованных деформаций градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли // Журнал СВМО. 2024. Т. 26, № 4. С. 392–403. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403

8. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory. Berlin: de Gruyter Expositions in Math. 2004. 540 p. DOI: 10.1515/9783110197945

9. Brown G. Families of simple Lie algebras of characteristic two // Comm. Algebra, 1995. Vol. 23. P. 941–954. DOI: 10.1080/00927879508825259

10. Kaplansky I. Some simple Lie algebras of characteristic 2 // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1982. Vol. 993. P. 127–129. DOI: 10.1007/BFb0093357

11. Skryabin S. M. Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics // J. Algebra. 1998. Vol. 200(2). P. 650–700.

12. Vaughan-Lee M. Simple Lie algebras of low dimension over GF(2) // London Math. Soc. J. Comput. Math. 2006. Vol. 9, P. 174–192. DOI: 10.1112/S1461157000001248

13. Eick B. Some new simple Lie algebras in characteristic 2 // J. Symbolic Comput. 2010. Vol. 45(9), P. 943–951. DOI: 10.1007/BFb0093357

14. Eick B., Moede T. Computing subalgebras and $\mathbb{Z}_2$-gradings of simple Lie algebras over finite fields // Commun. Math. 2022. Vol. 30(2). P. 37–50. DOI: 10.46298/cm.10193

15. Cushing D., Stagg G. W., Stewart D. I. A Prolog assisted search for new simple Lie algebras // Math. Comp. 2024. Vol. 93. P. 1473–1495. DOI: 10.48550/arXiv.2207.01094

Поступила 27.12.2024; доработана после рецензирования 07.02.2025; принята к публикации 26.02.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Ch. VII, VIII*, Hermann, Paris, 1975.

2. V. W. Guillemin, S. Sternberg, “An algebraic model of transitive differential geometry”, *Bull. AMS*, **10**:1 (1964), 16–47, 342 p.

3. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, “Filtered deformations of graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras”, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **68**:9 (2024), 86–90. DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-100-105.

4. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, “Nonalternating Hamiltonian Forms over a Divided Power Algebra of Characteristic 2”, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **67**:6 (2023), 82–87. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-6-95-100.

5. A. V. Kondrateva, “Non-alternating Hamiltonian Lie algebras of Characteristic Two in three variables”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2841–2853. DOI: 10.1134/S1995080221120209.

6. L. Lin, “Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic two”, *Communications in Algebra*, **21**:2 (1993), 399–411.

7. A. V. Kondrateva, M. I. Kuznetsov, “On an embedding theorem for filtered deformations of graded nonalternating Hamiltonian Lie algebras”, *Zhurnal SVMO*, **26**:4 (2024), 392–403. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.392-403 (In Russ.).

8. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I: Structure theory*, de Gruyter Expositions in Math., Berlin, 2004 DOI: 10.1515/9783110197945, 540 p.

9. G. Brown, “Families of simple Lie algebras of characteristic two”, *Comm. Algebra*, **23** (1995), 941–954. DOI: 10.1080/00927879508825259.

10. I. Kaplansky, “Some simple Lie algebras of characteristic 2”, *Lecture Notes in Math.*, **993** (1982), 127–129.

11. S. M. Skryabin, “Toral rank one simple Lie algebras of low characteristics”, *J. Algebra*, **200**:2 (1998), 650–700.

12. M. Vaughan-Lee, “Simple Lie algebras of low dimension over $GF(2)$”, *London Math. Soc. J. Comput. Math.*, **9** (2006), 174–192. DOI: 10.1112/S1461157000001248.

13. B. Eick, “Some new simple Lie algebras in characteristic 2”, *J. Symbolic Comput.*, **45**:9 (2010), 943–951. DOI: 10.1007/BFb0093357.

14. B. Eick, T. Moede, “Computing subalgebras and $\mathbb{Z}_2$-gradings of simple Lie algebras over finite fields”, *Commun. Math.*, **30**:2 (2022), 37–50. DOI: 10.46298/cm.10193.

15. D. Cushing, G. W. Stagg, D. I. Stewart, “A Prolog assisted search for new simple Lie algebras”, *Math. Comp.*, **93** (2022), 1473–1495. DOI: 10.48550/arXiv.2207.01094.

Submitted 27.12.2024; Revised 07.02.2025; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.