Математика

DOI 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24
Оригинальная статья
ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.642.4

О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

Аннотация. Представленная работа посвящена развитию итерационных методов решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами. Предложен новый подход к построению их решений, основанный на использовании метода последовательных приближений и полиномиальной интерполяции функций на отрезке $[-1, 1]$. При этом исходное интегральное уравнение сведено к уравнению типа Вольтерра, в котором неизвестная функция подлежит определению на отрезке $[-1, 1]$. В качестве начального приближения принимается свободный член рассматриваемого уравнения. На каждой итерации метода последовательных приближений осуществлено представление ядра интегрального уравнения в виде частичной суммы ряда по ортогональным на отрезке $[-1, 1]$ многочленам Чебышева. Коэффициенты в записанном разложении найдены с использованием ортогональности системы векторов, образованных значениями этих многочленов в нулях многочлена со степенью, равной числу неизвестных коэффициентов. Путем интерполяции по полученным значениям функции решения в узлах Чебышева на каждой итерации произведено приближение искомого решения. В работе также выполнено построение решения интегрального уравнения, свободный член которого имеет точку разрыва первого рода. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения Фредгольма, метод последовательных приближений, многочлены Чебышева, узлы Чебышева

Для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 1. С. 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24

Об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 17, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич, д.ф.-м.н, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, Набережная Северной Двины, 17, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

Original article

MSC2020 45B05

On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels

O. V. Germider, V. N. Popov

Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. The work is devoted to the development of iterative methods for solving nonlinear Fredholm integral equations of the second kind with piecewise-smooth kernels. A new approach to constructing their solutions is proposed which combines the method of successive approximations with polynomial interpolations of functions on the segment $[-1, 1]$. In this case, the original integral equation is reduced to a Volterra-type equation where the unknown function is defined on the segment mentioned. The free term of the equation is chosen as the initial approximation. At each iteration of successive approximations method, the kernel of the integral equation is represented as a partial sum of a series in Chebyshev polynomials orthogonal on the segment $[-1, 1]$. The coefficients in this expansion are found using the orthogonality of vectors formed by the values of these polynomials at the zeros of the polynomial whose degree is equal to the number of unknown coefficients. An approximation of the solution is made by interpolation of the obtained values of the solution at the Chebyshev nodes at each iteration. The work also constructs a solution to an integral equation whose free term has a discontinuity point of the first kind. The results of the computational experiments are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: nonlinear Fredholm integral equations, method of successive approximations, Chebyshev polynomials, Chebyshev nodes

For citation: *O. V. Germider, V. N. Popov.* On the method of solving nonlinear Fredholm integral equation of the second kind with piecewise-smooth kernels. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:1(2025), 11–24. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202501.11-24

About the authors:

Oksana V. Germider, Ph. D. in Phys. and Math., associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2112-805X, o.germider@narfu.ru

Vasily N. Popov, D. Sc. in Phys. and Math., Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (Severnaya Dvina Emb. 17, Arkhangelsk, 163002, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0803-4419, v.popov@narfu.ru

1. Введение

Многие классы нелинейных интегральных уравнений используются в качестве универсального инструмента при моделировании физических процессов [1], [2]. К одному из таких классов относятся уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами. Точные решения этих уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальным является разработка эффективных численных методов их решения и развитие уже существующих. Так в [3] для решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода разработан численный метод, основанный на тригонометрических базисных функциях. Применение этого метода при построении решения интегрального уравнения приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений для получения коэффициентов в разложении решения по базисным функциям. Основная концепция метода, предложенного в [2], заключается в представлении неизвестной функции с помощью двухточечного метода интерполяции Эрмита или двухточечной формулы Тейлора. В этом методе для аппроксимации решения использованы значения функции и ее производных в конечных точках рассматриваемого интервала. В [4] и [5] для аппроксимации решения нелинейных интегральных уравнений использованы функции и вейвлеты Хаара, при этом численное интегрирование в [2] выполнено методом Ньютона–Котеса. Вопрос существования и единственности решения рассмотрен в [6]. Численное исследование систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядрами, имеющими конечные разрывы вдоль непрерывных кривых, проведено в [7] итерационным методом с использованием линеаризации интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича.

В представленной работе предложен новый итерационный подход построения решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с кусочно-гладкими ядрами, основанный на использовании метода последовательных приближений [8] и полиномиальной интерполяции ядра интегрального уравнения на каждой итерации. Осуществлен переход к новым переменным, которые принимают значения, принадлежащие отрезку $[-1, 1]$, а исходное уравнение при этом сведено к уравнению типа Вольтерра. В качестве базисной системы функций при разложении ядра использованы многочлены Чебышева [9], областью определения которых является отрезок $[-1, 1]$. Коэффициенты в записанном разложении найдены с использованием ортогональности системы векторов, образованных значениями этих многочленов в нулях многочлена со степенью, равной числу неизвестных коэффициентов. При таком выборе узлов интерполяции минимизируется ошибка округлений полученных значений для коэффициентов [9] и [10]. На каждой итерации число узлов Чебышева остается неизменным, что позволяет снизить вычислительные затраты при реализации метода с использованием операций над матрицами. В результате решение интегрального уравнения на каждой итерации получается путем полиномиальной интерполяции полученных значений искомой функции в рассматриваемых узлах. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода. В работе также выполнено построение решения интегрального уравнения, свободный член которого имеет точку разрыва первого рода. Предложенный подход обобщает решения нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами, не требует решения системы алгебраических уравнений, необходимая точность построенного решения при этом достигается на основе итеративных приближений решений нелинейных интегральных уравнений интерполяционными многочленами по узлам Чебышева.

2. Постановка задачи. Построение решения уравнения Фредгольма

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу, которая представляет большой интерес в магнитной гидродинамике [3], [4] и [11]

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = \exp u(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.1}$$

с граничными условиями $u(0) = 0$ и $u(1) = 0$. Аналитическое решение этой двухточечной краевой задачи имеет вид [4]:

$$u(x) = -\ln 2 + 2 \ln \left(\frac{c}{\cos\left(\frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)} \right), \tag{2.2}$$

где c – корень уравнения $c = \sqrt{2}\cos(c/4)$, принадлежащий отрезку $[0, \pi]$, с точностью до 10^{-10} равный $c = 1.3360556949$.

Интегрируя уравнение (2.1), получаем следующее однородное нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] и [4]

$$u(x) - \int\limits_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2.3}$$

где $K(x, y, u(y))$ – ядро интегрального уравнения (2.3):

$$K(x, y, u(y)) = \begin{cases} -y(1-x)\exp u(y) & 0 \leq y \leq x, \\ -x(1-y)\exp u(y) & x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Для получения решения уравнения (2.3) с использованием многочленов Чебышева первого рода введем новые переменные x^* и y^*: $x^* = 2x - 1$, $y^* = 2y - 1$. Запишем уравнение (2.3) в виде

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \quad -1 \leq x^* \leq 1. \tag{2.4}$$

Решение интегрального уравнения (2.4) находим путем сведения к уравнению типа Вольтерра

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* - \frac{1}{2}\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \tag{2.5}$$

где

$$K_1(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(y^*+1)(1-x^*)\exp u(y^*)}{4},$$

$$K_2(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(x^*+1)(y^*-1)\exp u(y^*)}{4}.$$

Найдем решение уравнения (2.5) методом последовательных приближений [8]

$$2u_i(x^*) = \int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* + \int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^*, \tag{2.6}$$

где $u_0(x^*) = 0$ и $i \geq 1$. Получим u_i методом коллокации с использованием полиномов Чебышева первого рода и корней этих полиномов в качестве точек коллокаций. Доказательство существования и единственности решений интегральных уравнений (2.4) и (2.5) приведено в [6] и [12], соответственно.

Представляем функции K_1 и K_2 в виде частичной суммы ряда по многочленам Чебышева первого рода

$$K_l(x^*, y^*, u_{n,i-1}(y^*)) = \sum_{j=0}^{n} a_{l,i-1,j}(x^*)T_j(y^*) = \mathbf{T}(y^*)\mathbf{A}_{l,i-1}(x^*), \tag{2.7}$$

где $u_{n,i-1}$ – приближенное решение уравнения (2.5), полученное на $(i-1)$-й итерации при разложении функций K_1 и K_2 по многочленам Чебышева степени не выше n, $\mathbf{T}(y^*) = \big(T_0(y^*)\, T_1(y^*) \ldots T_n(y^*)\big)$, $\quad \mathbf{A}_{l,i-1} = \big(a_{l,i-1,0}\, a_{l,i-1,1} \ldots a_{l,i-1,n}\big)^T$ $\quad (l = 1, 2;$ $i \geq 1)$. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов в матрицах начинаем с нуля. Многочлены Чебышева определяем согласно [9] следующим образом

$$T_j(y^*) = \cos(j \arccos y^*), \quad y^* \in [-1,\, 1],\, j \geq 0. \tag{2.8}$$

Рекуррентная формула для многочленов Чебышева имеет вид [6]

$$T_0(y^*) = 1, \quad T_1(y^*) = y, \quad T_{j+1}(y^*) = 2yT_j(y^*) - T_{j-1}(y^*), \quad j \geq 1. \tag{2.9}$$

В качестве узлов в (2.6) и (2.7) выберем корни многочлена T_{n+1} [9] и [13]

$$x_k^* = y_k^* = \cos\left(\frac{\pi(2n-2k+1)}{2(n+1)}\right), \quad k = \overline{0, n}. \tag{2.10}$$

Используя представление (2.7), для интегралов в (2.6) получаем

$$\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \left(\int\limits_{-1}^{x^*} \mathbf{T}(y^*)\mathrm{d}y^*\right) \mathbf{A}_{1,i-1}(x^*), \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \left(\int\limits_{x^*}^{1} \mathbf{T}(y^*)\mathrm{d}y^*\right) \mathbf{A}_{2,i-1}(x^*). \tag{2.12}$$

Найдем интегралы в (2.11) и (2.12) от многочленов Чебышева первого рода. Из (2.9) вытекает, что

$$\int\limits_{-1}^{x^*} T_0(y^*)\mathrm{d}y^* = T_1(x^*) + T_0(x^*), \quad \int\limits_{-1}^{x^*} T_1(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_2(x^*)}{4} - \frac{T_0(x^*)}{4}, \tag{2.13}$$

$$\int_{x^*}^{1} T_0(y^*)\mathrm{d}y^* = -T_1(x^*) - T_0(x^*), \quad \int_{x^*}^{1} T_1(y^*)\mathrm{d}y^* = -\frac{T_2(x^*)}{4} - \frac{T_0(x^*)}{4}. \tag{2.14}$$

Для полиномов Чебышева степени $j \geq 2$ согласно [13] имеем

$$2\int T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_{j+1}(y^*)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(y^*)}{j-1}.$$

Тогда, учитывая, что $T_j(1) = 1$ и $T_j(-1) = (-1)^j$ [13], получаем

$$2\int_{-1}^{x^*} T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = \frac{T_{j+1}(x^*)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x^*)}{j-1} + \frac{(-1)^{j+1}2}{j^2-1}, \tag{2.15}$$

$$2\int_{x^*}^{1} T_j(y^*)\mathrm{d}y^* = -\frac{T_{j+1}(x^*)}{j+1} + \frac{T_{j-1}(x^*)}{j-1} - \frac{2}{j^2-1}. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.13) и (2.15) в (2.11) и используя равенство $T_{n+1}(x_k^*) = 0$, имеем

$$\int_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{H}_1\mathbf{A}_{1,i-1}(x^*), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{H}_1$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$ $(n' = n+1)$, в которой элементы, отличные от нуля:

$$H_{1,0\,0} = 1, \quad H_{1,0\,1} = -\frac{1}{4}, \quad H_{1,0\,j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j^2-1}, \quad j = \overline{2,n},$$

$H_{1,1\,0} = 1$, $H_{1,1\,2} = -1/2$, $H_{1,n\;n-1} = 1/(2n)$, парные элементы остальных строк:

$$H_{1,j\;j+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{2j}, \quad i = 1,2,\; j = \overline{2,n-1}.$$

Аналогично, из (2.14) и (2.16) в (2.12), получим

$$\int_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{H}_2\mathbf{A}_{2,i-1}(x^*), \tag{2.18}$$

где элементы квадратной матрицы $\mathbf{H}_2$ определяем на основе элементов $\mathbf{H}_1$

$$H_{2,0\,k} = (-1)^k H_{1,0\,k}, \quad H_{2,j\,k} = -H_{1,j\,k}, \quad j = \overline{1,n};\; k = \overline{0,n}.$$

Для $n = 6$ квадратная матрица $\mathbf{H}_1$ имеет вид

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{15} & \dfrac{1}{24} & -\dfrac{1}{35} \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4} & 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{6} & 0 & -\dfrac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{8} & 0 & -\dfrac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{10} & 0 & -\dfrac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя точки x_k^* ($k = \overline{0,n}$) в (2.7), приходим к уравнению относительно $\mathbf{A}_{l,i-1}$

$$\mathbf{J}\mathbf{A}_{l,i-1}(x_k^*) = \mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*), \tag{2.19}$$

где $\mathbf{J}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой k-я строка $\mathbf{T}(y_k^*)$ $(k = \overline{0,n})$, матрица $\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*)$ имеет размер $n' \times 1$: $\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*) = (K_l(x_k^*, y_0^*, u_{n,i-1}(y_0^*))\ K_l(x_k^*, y_1^*, u_{n,i-1}(y_1^*))\ \ldots\ K_l(x_k^*, y_n^*, u_{n,i-1}(y_n^*)))^T$. Из (2.19) находим $\mathbf{A}_{l,i-1}$:

$$\mathbf{A}_{l,i-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_{l,i-1} \quad l = 1, 2. \tag{2.20}$$

В силу равенства [13]

$$\sum_{k=0}^{n} T_{j_1}(y_k^*) T_{j_2}(y_k^*) = \gamma_{T,j_1}\delta_{j_1,j_2},$$

где δ_{j_1,j_2} – символ Кронекера, $\gamma_{T,0} = n+1$, $\gamma_{T,j} = (n+1)/2$ $(j > 0)$, получаем $\mathbf{J}^{-1}$ из матрицы $2/(n+1)\mathbf{J}^T$, в которой элементы первой строки делим на 2.

Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.6), получаем для $i \geq 1$

$$2\mathbf{U}_{n,i} = \left(\left(\mathbf{J}\mathbf{H}_1\mathbf{J}^{-1}\right) \circ \mathbf{W}_{1,n,i-1} + \left(\mathbf{J}\mathbf{H}_2\mathbf{J}^{-1}\right) \circ \mathbf{W}_{2,n,i-1}\right)\mathbf{V}, \quad i \geq 1, \tag{2.21}$$

где $\mathbf{U}_{n,i} = \left(u_{n,i}(x_0^*)\, u_{n,i}(x_1^*) \ldots u_{n,i}(x_n^*)\right)^T$, $\mathbf{W}_{l,n,i-1}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой k-я строка равна $\left(\mathbf{K}_{l,i-1}(x_k^*)\right)^T$ $(k = \overline{0,n};\ l = 1,2)$; $\mathbf{V} = (1\ 1\ 1 \ldots\ 1)^T$. Знаком $\circ$ обозначено поэлементное произведение Адамара двух матриц [14].

Функцию $u_{n,i}(x^*)$ находим, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева с определением коэффициентов в этом разложении аналогично (2.7). В итоге

$$u_{n,i}(x^*) = \sum_{j=0}^{n} b_{i,j} T_j(x^*) = \mathbf{T}(x^*)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}_{n,i}. \tag{2.22}$$

В случае, когда свободный член интегрального уравнения имеет точку разрыва первого рода, рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] и [5]

$$u(x) - \int\limits_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = b(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.23}$$

где $K(x, y, u(y)) = xy\sqrt{u(y)}$,

$$b(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x & x \le \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x} + \alpha x & x > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\alpha = -10\cos 1 + \frac{11}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^2\frac{1}{8} + 6\sin 1 - 9\sin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналитическое решение уравнения (2.23) имеет вид [3]:

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & x \le \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x} & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.24}$$

С использованием метода последовательных приближений и полиномиальной интерполяции найдем решение интегрального уравнения (2.23), в котором свободный член имеет точку разрыва первого рода $x = \dfrac{1}{2}$. Уравнение (2.23) при этом сводим к решению системы интегральных уравнений

$$u_l(x_l) = \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{\beta_{l,1}}^{\beta_{l,2}} K(x_l, y_l, u_l(y_l))\mathrm{d}y_l + b_l(x_l), \quad \beta_{l,1} \le x_l \le \beta_{l,2};\ l = 1,\ 2; \tag{2.25}$$

где $\beta_{1,1} = 0$, $\beta_{1,2} = \beta_{2,1} = \dfrac{1}{2}$, $\beta_{2,2} = 1$, $b_1(x) = x^2 + \alpha$, $b_2(x) = \sqrt{x} + \alpha x$.

Вводим новые переменные x_l^*, $y_l^* \in [-1,\ 1]$:

$$x_l = \frac{\beta_{l,2} - \beta_{l,1}}{2}x_l^* + \frac{\beta_{l,1} + \beta_{l,2}}{2}, \quad l = 1,\ 2. \tag{2.26}$$

Решение системы уравнений (2.25) в новых переменных x_l^*, $y_l^* \in [-1,\ 1]$ находим методом последовательных приближений

$$u_{l,n,i}(x_l^*) = \sum_{l=1}^{2} \kappa_l \int\limits_{-1}^{1} K(x_l^*, y_l^*, u_{l,n,i-1}(y_l^*))\mathrm{d}y_l^* + b_l(x_l^*), \tag{2.27}$$

где $u_{l,n,0}(x_l^*) = b_l(x_l^*)$, $\kappa_l = \dfrac{1}{4}$ и $(l = 1, 2;\ i \ge 1)$.

Представляем функции $K_l(x^*, y^*, u_{l,n,i-1}(y^*)) = K(x^*, y^*, u_{l,n,i-1}(y^*))$ $(l = 1, 2)$ в виде частичной суммы ряда по многочленам Чебышева (2.7). Для интегралов в (2.27) имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} K_l(x_l^*, y_l^*, u_{l,n,i-1}(y_l^*))\mathrm{d}y_l^* = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{T}(y_l^*)\mathrm{d}y_l^*\right)\mathbf{A}_{l,i-1}(x_l^*) = \mathbf{G}\mathbf{A}_{l,i-1}(x_l^*), \tag{2.28}$$

где $\mathbf{G}$ – матрица размером $1 \times n'$, в которой элементы, отличные от нуля:

$$G_{0\,0} = 2, \quad G_{0\,j} = \frac{2}{1-j^2}, \quad j - \text{чет.},\ j = \overline{1, n}.$$

Для $n = 6$ матрица $\mathbf{G}$ имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 & -\dfrac{2}{15} & 0 & -\dfrac{2}{35} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (2.7) в (2.27) и используя (2.28), получаем для $i \geq 1$

$$\mathbf{U}_{l,n,i} = \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{W}_{1,n,i-1} + \mathbf{W}_{2,n,i-1}\right) + \mathbf{B}_l, \quad i \geq 1, \tag{2.29}$$

где $\mathbf{U}_{l,n,i} = (u_{l,n,i}(x_{l,0}^*)\, u_{l,n,i}(x_{l,1}^*)\, \ldots\, u_{l,n,i}(x_{l,n}^*))$, элементы квадратной матрицы $\mathbf{W}_{l,n,i-1}$ определяются ядром уравнения (2.27): $W_{l,n,i-1,j\,k} = K_l(x_{l,j}^*, y_{l,k}^*, u_{l,n,i-1}(y_{l,k}^*))$ $(j,\ k = \overline{0, n};\ l = 1, 2)$; $\mathbf{B}_l = (b_l(x_0^*)\ b_l(x_1^*)\ b_l(x_2^*) \ldots\ b_l(x_n^*))$.

Функцию $u_{l,n,i}(x_l^*)$ находим, используя ее представление в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева

$$u_{l,n,i}(x_l^*) = \mathbf{T}(x_l^*)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}_{l,n,i}^T. \tag{2.30}$$

3. Анализ полученных результатов

В таблице 3.1 приведены значения отклонения построенного решения (2.22) от аналитического решения (2.2) по бесконечной норме векторов значений этих функций, вычисленных в равномерно распределенных точках на отрезке [0, 1]:

$$e_{\infty,n,i} = \max_{0 \leq j \leq 100} |u(x_j) - u_{n,i}(x_j)|,$$

где i – минимальные значения, при которых соответственно $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-30}$. Величина $\zeta_{n,i}$ определяется следующим образом: $\zeta_{n,i} = \|\mathbf{U}_{n,i} - \mathbf{U}_{n,i+1}\|_\infty$, где векторы $\mathbf{U}_{n,i}$ и $\mathbf{U}_{n,i+1}$ состоят из элементов, найденых в точках x_k, которые соответствуют узлам (2.10). Результаты вычисления $e_{\infty,n,i}$ представлены в таблице 3.1, в которой также приведены значения величин $e_{n,i} = \max\limits_{0 \leq j \leq 100} |u_{n,i}(x_j) - u_{n-1,i}(x_j)|$ и $\tilde{e}_{\infty,n} = \max\limits_{0 \leq j \leq 100} |u(x_j) - g_n(x_j)|$, где $g_n(x^*)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $u(x^*)$ при выборе узлов (2.10).

Из таблицы 3.1 видно, что с увеличением значений числа узлов $n + 1$ наблюдается уменьшение величины отклонения построенного решения (2.22) от аналитического решения по бесконечной норме. При выполнении условия $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ минимальное значение i равно 20 для всех значений n, приведенных в таблице 3.1. В случае $\zeta_{n,i} < 10^{-30}$ это

Таблица 3.1. Значения величин $e_{\infty,n,i}$, $e_{n,i}$ и $\tilde{e}_{\infty,n}$ для уравнения (2.3)
Table 3.1. Values of $e_{\infty,n,i}$, $e_{n,i}$ and $\tilde{e}_{\infty,n}$ for equation (2.3)

n	$\zeta_{n,i} < 10^{-20}$		$\zeta_{n,i} < 10^{-30}$		$\tilde{e}_{\infty,n}$
	$e_{\infty,n,i}$	$e_{n,i}$	$e_{\infty,n,i}$	$e_{n,i}$	
8	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$3.34 \cdot 10^{-10}$
12	$4.92 \cdot 10^{-13}$	$1.19 \cdot 10^{-12}$	$4.92 \cdot 10^{-13}$	$1.19 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-14}$
15	$1.64 \cdot 10^{-16}$	$5.65 \cdot 10^{-15}$	$1.64 \cdot 10^{-16}$	$5.65 \cdot 10^{-15}$	$1.64 \cdot 10^{-16}$
20	$8.55 \cdot 10^{-21}$	$9.59 \cdot 10^{-21}$	$8.38 \cdot 10^{-21}$	$9.59 \cdot 10^{-21}$	$3.65 \cdot 10^{-22}$

значение i становится равным 30. Из сравнения значений $e_{\infty,n,i}$ и $\tilde{e}_{\infty,n}$, следует что $u_{n,i}$ приближается к результату полиномиальной интерполяции функции $u(x) = \exp(-x)$. При этом для фиксированного числа узлов $n+1$ полученные значения отклонений $e_{n,i}$ между $u_{n,i}$ и $u_{n-1,i}$ не превышают по бесконечной норме соответствующих значений отклонений $e_{\infty,n,i}$, что согласуется с критерием практической оценки погрешности в случае полиномиальной интерполяции непрерывной функции [9]. В качестве сравнения полученных результатов с [3] и [4] приведем значение $e_{\infty,n,i}$ при $n = 15$. В [3] $e_{\infty,n,i}$ равно $2.2 \cdot 10^{-7}$, в [4] $e_{\infty,n,i} < 10^{-6}$.

Значения $e_{\infty,n,i}$ для уравнения (2.23) представлены в таблице 3.2 при $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ в сравнении с результатами [3] и [5]. В этом случае минимальное значение i равно 29 для всех значений n, приведенных в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Значения величины $e_{\infty,n,i}$ для уравнения (2.23)
Table 3.2. Values of $e_{\infty,n,i}$ for the equation (2.23)

n	7	15	31
(2.30)	$2.41 \cdot 10^{-8}$	$5.61 \cdot 10^{-15}$	$6.64 \cdot 10^{-22}$
[3]	$4.07 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$
[5]	$7.27 \cdot 10^{-4}$	$1.88 \cdot 10^{-4}$	$4.77 \cdot 10^{-5}$

Из таблиц 3.1, 3.2 видно, что решения уравнений Фредгольма второго рода, полученные представленным методом с использованием многочленов Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n. Полученные значения отклонений $e_{n,i}$ для числа узлов $n+1$ и n не превышают по бесконечной норме соответствующих значений отклонений $e_{\infty,n,i}$ и могут использованы для практической оценки погрешности.

Распределение величины $u(x) - u_{n,i}(x)$ на отрезке [0, 1] при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.3) продемонстрировано на рисунке 3.1.

Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.23) показано на рисунке 3.2. Из рисунка 3.2 видно, что вблизи точки разрыва $x = 1/2$, отклонение построенного решения от аналитического не превосходит $0.6 \cdot 10^{-15}$ и приближается к точному значению.

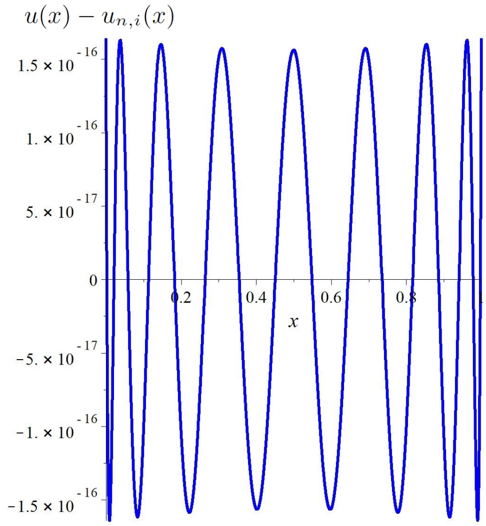

Рис. 3.1. Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ для уравнения (2.3)

Fig. 3.1. The deviation of $u(x) - u_{n,i}(x)$ for $n = 15$ and $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ for the equation (2.3)

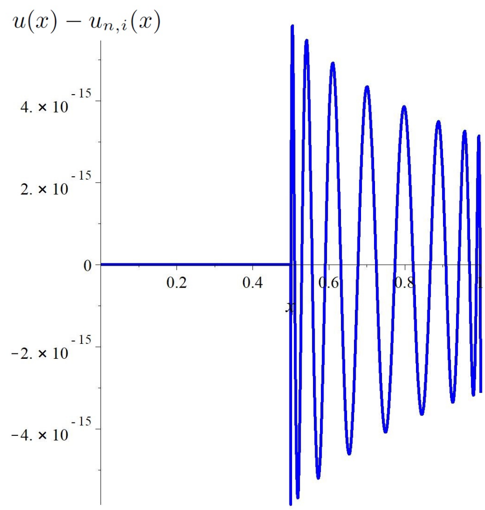

Рис. 3.2. Отклонение $u(x) - u_{n,i}(x)$ при $n = 15$ и $\zeta_{n,i}a < 10^{-20}$ для уравнения (2.23)

Fig. 3.2. The deviation of $u(x) - u_{n,i}(x)$ for $n = 15$ and $\zeta_{n,i} < 10^{-20}$ for the equation (2.23)

4. Заключение

В работе предложен новый комбинированный подход, который позволяет находить решения интегральных уравнений типа Фредгольма в отсутствии выполнения условия гладкости для ядра интегрального уравнения и вблизи точек разрыва, при этом необходимая точность достигается на основе итеративных аппроксимаций ядра и решений нелинейных интегральных уравнений ортогональной системой многочленов Чебышева. Представленные результаты вычислительных экспериментов показывают эффективность предложенного подхода, который может применен для построения решений нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, Фредгольма–Вольтерра и их систем.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

Список литературы

1. Wazwaz A. M. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Beijing. Springer-Verlag. 2011. 658 p. DOI:10.1007/978-3-642-21449-3

2. Karamollahi N., Heydari M., Loghmani Gh. B. Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. Vol. 187. pp. 414–432. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.015

3. Amiri S., Hajipour M., Baleanu D. On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 150. pp. 478–490. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.10.017

4. Ordokhani Y., Razzaghi M. Solution of nonlinear Volterra-Fredholm–Hammerstein integral equations via a collocation method and rationalized Haar functions // Applied Mathematics Letters. 2008. Vol. 21, Issue 1. pp. 4–9. DOI: 10.1016/j.aml.2007.02.007

5. Islam S., Aziz I., Al-Fhaid A. An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014. Vol. 260. pp. 449–469. DOI: 10.1016/j.cam.2013.10.024

6. Bazm S., Hosseini A., Azevedo J. S., Pahlevani F. Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 439. Article number: 115602. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115602

7. Тында А. Н., Сидоров Д. Н., Муфтахов И. Р. Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, №. 1, С. 55–63. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63

8. Davis H. T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. New York: Dover Publications, 1962. 566 p.

9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.

10. Гермидер О. В., Попов В. Н. Оценка константы Лебега для Чебышевского распределения узлов // Журнал Средневолжского математического общества, 2023. Т. 25, №. 4. С. 242–254. DOI: 2079-6900.25.202304.242-254

11. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems. New York: Elsevier, 1965. 62 p.

12. Bazm S., Limaand P., Nemati S. Analysis of the Euler and trapezoidal discretization methods for the numerical solution of nonlinear functional Volterra integral equations of Urysohn type // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 398. Article number: 113628. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113628

13. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. New York: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p. DOI: 10.1201/9781420036114

14. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. Vol. 4, Issue 1. pp. 160–177.

Поступила 15.10.2024; доработана после рецензирования 12.01.2025; принята к публикации 26.02.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Beijing, 2011 DOI: 10.1007/978-3-642-21449-3, 658 p.

2. N. Karamollahi, M. Heydari, Gh. B. Loghmani, “Approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using a class of Hermite interpolation polynomials”, *Mathematics and Computers in Simulation*, **187** (2021), 414–432. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.015.

3. S. Amiri, M. Hajipour, D. Baleanu, “On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind”, *Applied Numerical Mathematics*, **150** (2020), 478–490. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.10.017.

4. Y. Ordokhani, M. Razzaghi, “Solution of nonlinear Volterra-Fredholm–Hammerstein integral equations via a collocation method and ationalized Haar functions”, *Applied Mathematics Letters*, **21** (2008), 4–9. DOI: 10.1016/j.aml.2007.02.007.

5. S. Islam, I. Aziz, A. Al-Fhaid, “An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **260** (2014), 449–469.

6. S. Bazm, A. Hosseini, J.S. Azevedo, F. Pahlevani, “Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **439** (2024), 115602. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115602.

7. A. N. Tynda 4, D. N. Sidorov 5, Ildar R. Muftahov, “Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **20**:1 (2018), 55–63. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63 (In Russ.).

8. H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, New York, 1962, 566 p.

9. N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel’kov, *Chislennyye metody*, Laboratoriya znaniy, M., 2020 (In Russ.), 636 p.

10. O.V. Germider, V.N. Popov, “Estimating the Lebesgue constant for the Chebyshev distribution of nodes”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:4 (2023), 242–254. DOI: 10.15507/2079-6900.25.202304.242-254 (In Russ.).

11. R. Bellman, R. Kalaba, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*, Elsevier, New York, 1969, 62 p.

12. S. Bazm, P. Limaand, S. Nemati, “Analysis of the Euler and trapezoidal discretization methods for the numerical solution of nonlinear functional Volterra integral equations of Urysohn type”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **398** (2021), 113628. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113628.

13. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002 DOI: 10.1201/9781420036114, 360 p.

14. S. Liu, G. Trenkler, “Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products”, *International Journal of Information and Systems Sciences*, **4**:1 (2008), 160–177.

Submitted 15.10.2024; Revised 12.01.2025; Accepted 26.02.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.