

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.929:519.6:539.3

Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах

Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А.

*ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)*

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель системы контроля за изменением давления в камере сгорания авиационного двигателя, составными частями которой являются трубопровод и датчик. Исследование исходной задачи сведено к решению линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом второго порядка, которое позволяет по величине деформации чувствительного элемента датчика определять давление рабочей среды в камере сгорания в каждый момент времени. В работе построены решения этого уравнения и рассмотрены применения их в прикладных задачах аэрогидроупругости, а именно при исследовании динамики упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с газом или жидкостью. Для уравнения с отклоняющимся аргументом указаны некоторые точные решения. Предложен численный метод исследования этого уравнения на основе метода Рунге – Кутты, проведены численные расчеты в системе Mathematica, на основе которых построены графики изменения деформации упругого элемента датчика с течением времени. Также рассмотрен численно-аналитический метод решения уравнения с отклоняющимся аргументом с помощью метода шагов (метода последовательного интегрирования). Исследования, проведенные в статье, предоставляют возможность на этапе проектирования определять оптимальные значения параметров механических систем измерения давления.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, метод Рунге – Кутты, система измерения давления, аэрогидроупругость, динамика

Для цитирования: Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А. Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 442–457. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.442-457>

Об авторах:

Вельмисов Пётр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Маценко Пётр Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027 Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8781-7401>, m.peter.k@mail.ru

Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

© Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А.



MSC2020 35Q74:65Q10

Application of Equations with Deviating Argument to Mathematical Modeling of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media

P. A. Velmisov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. This article discusses a mathematical model of a system for monitoring pressure changes in the combustion chamber of an aircraft engine, whose components are a pipeline and a sensor. The study of the original problem is reduced to solving a linear second-order differential equation with a deviating argument, which allows one to determine the pressure of the working medium in the combustion chamber at each moment of time basing on the deformation magnitude of the sensor's sensitive element. The aim of the work is to construct solutions to this equation and to use them in applied problems of aerohydroelasticity, namely, in studying the dynamics of elastic elements of pressure sensors interacting with gas or liquid. Some exact solutions are given for the equation with a deviating argument. A numerical method for studying this equation based on the Runge-Kutta method is proposed. Calculations are carried out in the Mathematica system; basing on their results graphs of changes in the elastic element deformation over the time are constructed. A numerical-analytical method for solving the equation with a deviating argument using the step method (the method of successive integration) is also considered. The research conducted in the article provides the opportunity to determine the optimal values for the parameters of mechanical pressure measurement systems at the design stage.

Keywords: differential-difference equations, Runge-Kutta method, pressure measurement system, aerohydroelasticity, dynamics

For citation: P. A. Velmisov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova. Application of Equations with Deviating Argument to Mathematical Modeling of Pressure Measurement Systems in Gas-Liquid Media. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 442–457. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.442-457>

About the authors:

Petr A. Velmisov, D. Sci. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Petr K. Macenko, Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8781-7401>, m.peter.k@mail.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

1. Введение

Во многих областях современной науки и техники широко используются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в частности дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, которые применяются для описания процессов с последействием [1–6]. Учет результата последействия важен для корректного качественного и количественного описания различных систем и процессов (например модель работы смесительных баков, представляющих собой типовой элемент химико-технологических процессов; модель силовой установки самолета, создающей тягу, обеспечивающую требуемую скорость полета самолета; модели с последействием для описания напряженно-деформированного состояния ряда материалов, например полимеров и пластмассы, и т. д.). Однако исследование систем с последействием связано со значительными трудностями, поэтому разработка различных методов решения задач как аналитических, так и численных, ориентированных на определенные классы систем с последействием, является актуальной проблемой. Вопросам существования и единственности периодических решений для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка с отклоняющимся аргументом посвящена, например, работа [7]. В исследовании [8] построены решения нелинейных дробно-дифференциальных систем с отклоняющимися аргументами с помощью монотонного итерационного метода.

В данной работе рассматривается уравнение с отклоняющимся аргументом, полученное при исследовании начально-краевой задачи, которая соответствует трехмерной модели системы измерения давления в камере сгорания двигателя. Такая система измерения давления содержит трубопровод и датчик. Трубопровод нужен для того, чтобы отнести датчик на некоторое расстояние от двигателя с целью ослабления вибрационного и теплового воздействия. Описанию инженерных характеристик датчиков давления (в частности гибких датчиков, высокочувствительных МЭМС-датчиков) и их применению в практических задачах посвящены работы многих современных авторов, например, [9–14]. В работах [15–18] изучаются проблемы динамики и устойчивости трубопроводов при протекании в них жидкости. В данной статье авторами указаны некоторые точные решения линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Для решения этого уравнения разработан численный метод, основанный на методе Рунге – Кутты, а также метод шагов (метод последовательного интегрирования). С помощью разработанной программы в пакете Mathematica проведены численные расчеты, на основе которых получены графики деформации упругого элемента датчика. Статья является продолжением исследований авторов, представленных в работах [19–23].

2. Сведение математической модели системы измерения давления к уравнению с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим механическую систему измерения давления в камере сгорания двигателя, содержащую трубопровод длиной l , поперечное сечение которого имеет вид сектора, образованного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$. В конце трубопровода ($x = l$) размещен датчик, содержащий упругий элемент в виде деформируемой пластины в форме сектора. Функцией $w(r, \theta, t)$ обозначим деформацию пластины. Потенциал скорости $\varphi(x, r, \theta, t)$ описывает движение рабочей среды в трубопроводе (среда считается сжимаемой). На входе в трубопровод ($x = 0$) задается закон изменения $P(r, \theta, t)$ избыточного давления рабочей среды. Для описания динамики механической системы предложена математическая модель [19–21]

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.1)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.2)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (2.3)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2.5)$$

$$mw_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta(\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, \theta, t) - P_*, \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2). \quad (2.6)$$

Оператор Лапласа Δw и бигармонический оператор $\Delta^2 w$ определяются выражениями

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (2.1)–(2.6) индексы снизу обозначают частные производные; $P_0, \rho_0, a_0, P_*, m, D, N, \beta$ – некоторые физические постоянные; $f(w_t, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации w и скорости деформации w_t и характеризующая упругие силы и силы демпфирования внешних связей; x, r, θ – цилиндрические координаты, t – время.

Задачу (2.1)–(2.6) необходимо дополнить начальными условиями, а также граничными условиями для функции $w(r, \theta, t)$, соответствующими типу закрепления элемента.

Авторами в работах [19, 21] введены интегральные характеристики основных динамических величин задачи (2.1)–(2.6). Тогда решение задачи сводится к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом

$$m_0 \left[\ddot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\psi\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \psi\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) связывает функцию $\psi(t)$, характеризующую деформацию упругого элемента датчика, и функцию $G(t)$, характеризующую закон изменения давления рабочей среды в двигателе. В уравнении (2.7) введены обозначения [19, 21]:

$$G(t) = \iint_H P(r, \theta, t) r dr d\theta, \quad H = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

$$m_0 = m \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta, \quad w_0 = \iint_H r g(r, \theta) dr d\theta,$$

$$\alpha_0 = \alpha \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta + \beta \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta,$$

$$\gamma_0 = D \iint_H \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta + N \iint_H \Delta g(r, \theta) r dr d\theta + \gamma \iint_H g(r, \theta) r dr d\theta.$$

При этом деформация пластины $w(r, \theta, t)$ и функция $\psi(t)$ связаны соотношением $w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta)$, а функция $f(w, w_t)$ задана в виде $f(w, w_t) = \alpha w_t + \gamma w$ (α, γ – физические постоянные). Функция $g(r, \theta)$ должна удовлетворять граничным условиям, которые соответствуют жесткому закреплению: $g(R, \theta) = g_r(R, \theta) = 0$, $g(r, \theta_k) = g_\theta(r, \theta_k) = 0$, $k = 1, 2$, и задавалась в виде

$$g(r, \theta) = [1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3] (\theta - \theta_1)^2 (\theta - \theta_2)^2.$$

3. Примеры точных решений уравнения с отклоняющимся аргументом

Для уравнения (2.7) рассмотрим некоторые точные решения:

а) при периодическом возмущении постоянного рабочего давления функция $G(t)$ имеет вид:

$$G(t) = [a \cos \theta t + b \sin \theta t] + G_0.$$

В этом случае функцию $\psi(t)$ можно задать выражением

$$\psi(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t + C,$$

где a, b, G_0, A, B, C – некоторые постоянные. После подстановки $G(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (2.7) коэффициенты выражаются следующим образом:

$$A = \frac{4}{\Delta} \left[\frac{a}{m_0} \left((-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) - \frac{b}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right],$$

$$B = \frac{4}{\Delta} \left[\frac{b}{m_0} \left((-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0}) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right) + \frac{a}{m_0} \frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \cos \frac{\theta l}{a_0} \right],$$

$$C = \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2} \right],$$

где

$$\Delta = 4 \left[\frac{a}{m_0} \left(-\theta^2 + \frac{\gamma_0}{m_0} \right) \cos \frac{\theta l}{a_0} - \frac{\rho_0 a_0 w_0 \theta}{m_0} \sin \frac{\theta l}{a_0} \right]^2 + 4 \left(\frac{\alpha_0 \theta}{m_0} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta l}{a_0}. \quad (3.1)$$

б) в случае, когда

$$G(t) = at^2 + bt + G_0,$$

функция $\psi(t)$ отыскивается в виде

$$\psi(t) = At^2 + Bt + C.$$

Подставляя в (2.7), получим:

$$A = \frac{a}{\gamma_0}, \quad B = \frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2},$$

$$C = -\frac{m_0 a}{\gamma_0^2} \left(2 + \frac{\gamma_0 l^2}{m_0 a_0^2} + \frac{2\rho_0 w_0 l}{m_0} \right) - \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \left(\frac{b}{\gamma_0} - \frac{2a\alpha_0}{\gamma_0^2} \right) + \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right].$$

в) при наложении на постоянное рабочее давление экспоненциального возмущения функция $G(t)$ задается в виде:

$$G(t) = G_0 + ae^{\lambda t}.$$

Если $\lambda < 0$, то для давления получим график с насыщением; если $\lambda > 0$, то имеет место экспоненциальный рост давления. Функция $\psi(t)$ имеет вид:

$$\psi(t) = C + Ae^{\lambda t}.$$

После подстановки $G(t)$ и $\psi(t)$ в уравнение (2.7) получим выражения для коэффициентов A и C :

$$A = \frac{a}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right) \left[m_0 \lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \gamma_0 + \rho_0 a_0 w_0 \operatorname{th}\left(\frac{\lambda l}{a_0}\right) \right]},$$

$$C = \frac{1}{\gamma_0} \left[G_0 + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \quad (3.2)$$

Несложно получить «отклики» $\psi(t)$ и для некоторых других «сигналов» $G(t)$, например:

$$G(t) = G_0 + \sum_k [P_{mk}(t) \cos(\theta_k t) + Q_{lk}(t) \sin(\theta_k t)] e^{\lambda_k t},$$

в частности

$$G(t) = G_0 + (a \cos(\theta t) + b \sin(\theta t)) e^{\lambda t},$$

$$G(t) = G_0 + f(t) e^{\lambda t},$$

$$G(t) = G_0 + [P_m(t) \cos \theta t + Q_l(t) \sin \theta t] e^{\lambda t},$$

где $f(t)$ – многочлен заданной степени, $P_m(t), Q_l(t)$ – многочлены степени m и l , $P_{mk}(t), Q_{lk}(t)$ – многочлены степени m_k, l_k .

4. Численное решение уравнения с отклоняющимся аргументом. Примеры расчетов

Численное решение уравнения (2.7) будем строить методом Рунге – Кутты. Введем функцию $y(t) = \psi(t + \frac{l}{a_0})$. Тогда уравнение (2.7) примет вид:

$$y''(t) + y''\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_1 \left[y'(t) + y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) \right] + a_2 \left[y(t) + y\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) \right] =$$

$$= h(t) + a_3 y'\left(t - \frac{2l}{a_0}\right). \quad (4.1)$$

В (4.1) введены следующие обозначения: $a_1 = \frac{\alpha_0 + \rho_0 a_0 w_0}{m_0}$, $a_2 = \frac{\gamma_0}{m_0}$, $a_3 = \frac{2\rho_0 w_0}{m_0}$,

$$h(t) = \frac{2}{m_0} \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \right].$$

Согласно работам [1–6], уравнение (4.1) будем решать с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (4.2)$$

и условиями на начальном множестве $t \leq 0$

$$y(t) = y_0 \eta_0(t), \quad y'(t) = y'_0 \eta_1(t), \quad y''(t) = y''(0) \eta_2(t), \quad t \in \left[-\frac{2l}{a_0}, 0 \right], \quad (4.3)$$

где $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ - непрерывные функции, которые удовлетворяют условию

$$\eta_0(0) = \eta_1(0) = \eta_2(0) = 1.$$

Для удобства вычислений считаем, что

$$\eta_0\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_1\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = \eta_2\left(-\frac{2l}{a_0}\right) = 0. \quad (4.4)$$

Для непрерывности решения уравнения (4.1), учитывая (4.4), найдем $y''(0)$ из (4.1) при $t = 0$:

$$y''(0) = h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0.$$

Рассмотрим алгоритм построения решения уравнения (4.1) на каждом из отрезков

$$[t_k, t_{k+1}], \quad t_k = \frac{2l}{a_0} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1) $k = 0$, отрезок $\left[0, \frac{2l}{a_0}\right]$. Уравнение (4.1) запишется следующим образом:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = h(t) - [h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0] \eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - \\ - a_1 y'_0 \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - a_2 y_0 \eta_2\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) + a_3 y'_0 \eta_1\left(t - \frac{2l}{a_0}\right). \quad (4.5)$$

В (4.5) правая часть задана. Методом Рунге – Кутты решаем задачу Коши для функции $y(t)$ с начальными условиями (4.2).

2) $k = 1, 2, 3, \dots$, отрезки $[t_k, t_{k+1}]$. После ввода функции $v_k(t) = y_k(t) + y_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$ получим уравнение

$$v_k''(t) + a_1 v_k'(t) + a_2 v_k(t) = h(t) + a_3 y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right).$$

Правая часть полученного уравнения содержит производную $y'_k\left(t - \frac{2l}{a_0}\right)$, которая определена на $(k - 1)$ -ом отрезке. Из значений функций, полученных на предыдущем шаге, находятся начальные условия. Таким образом, на каждом шаге для функции $v_k(t)$ решаем задачу Коши методом Рунге – Кутты.

Разработана программа в пакете Mathematica согласно вышеописанному алгоритму, которая в цикле просчитывает значения функции $y(t)$, а затем строит ее график. Программа позволяет задавать параметры механической системы, в частности закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод.

Пример 4.1. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.2$), пластина изготовлена из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$, $\rho_{pl} = 7.8 \cdot 10^3$). Параметры системы: $P_0 = 101325$, $a_0 = 343$ (при $t = 20^{\circ}C$), $l = 3$, $h_{pl} = 0.002$, $m = 15.6$, $D = 146.5$, $R = 0.025$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 100.1$, $N = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

На рисунках 4.1 – 4.4 представлены примеры расчетов при $r = 0.0125$, $\theta = \frac{\pi}{8}$ и различном задании $P(r, \theta, t)$.

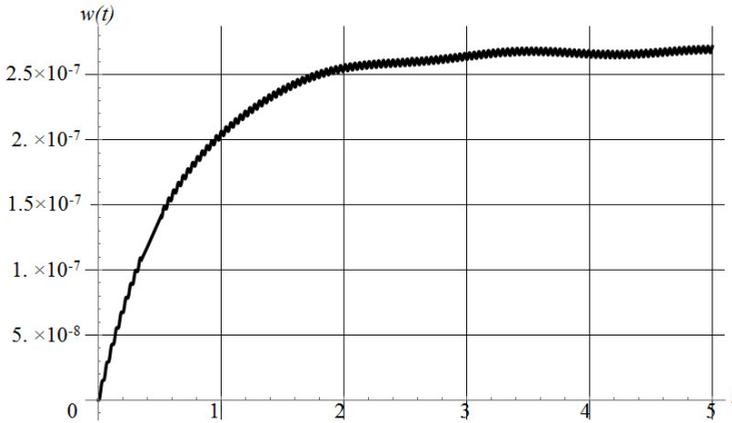


Рис. 4.1. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(4t)$

Fig. 4.1. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(4t)$

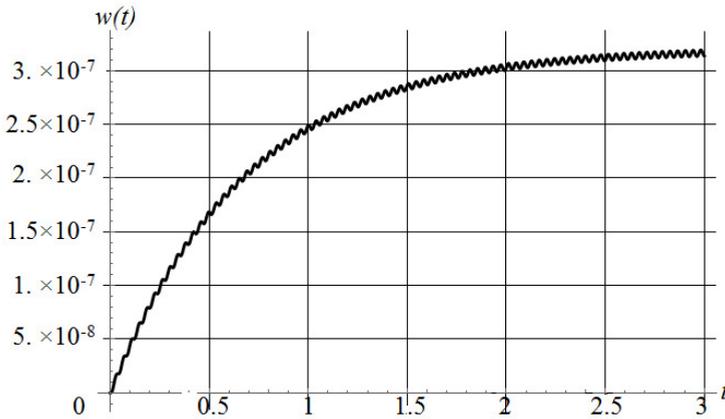


Рис. 4.2. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 6 \cdot 10^6$

Fig. 4.2. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 6 \cdot 10^6$

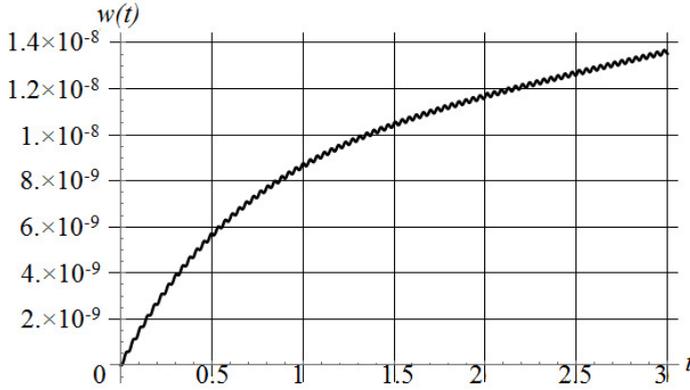


Рис. 4.3. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$

Fig. 4.3. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 10^5 \cdot e^{0.2t}$

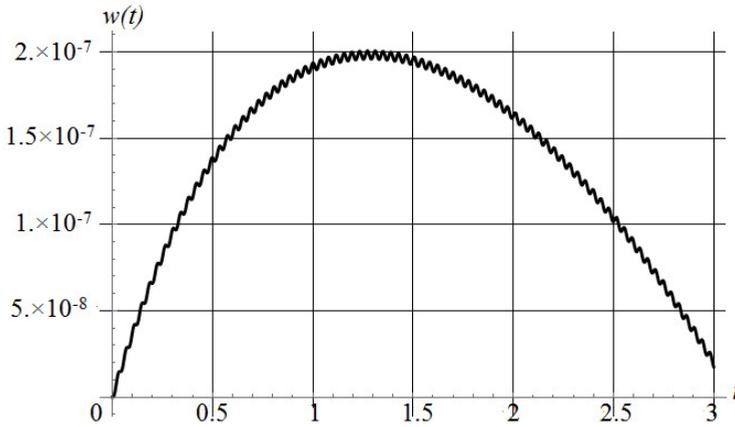


Рис. 4.4. Деформация пластины при $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 t^2$

Fig. 4.4. Plate deformation at $P(r, \theta, t) = 5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 t^2$

5. Численно-аналитический метод решения уравнения с отклоняющимся аргументом

Уравнение (4.1) будем решать методом шагов [1–5]. Обозначим $t_k = \frac{2l}{a_0} k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Через $y_k(t)$ обозначим решение задачи (4.1)–(4.3) на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) (Рис. 5.1).

В дальнейшем будем опираться на лемму.

Л е м м а 5.1. *Задача Коши для уравнения*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \quad t \geq t_{k-1} \quad (5.1)$$

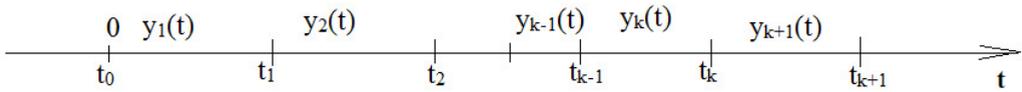


Рис. 5.1. Разбиение на отрезки

Fig. 5.1. Splitting into segments

с начальными условиями $y(t_{k-1}) = y_{k-1}, y'(t_{k-1}) = y'_{k-1}$ имеет решение

$$y(t) = A_k(t) + \int_{t_{k-1}}^t M_0(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $A_k(t), M_0(t, \tau)$ определяются выражениями

$$A_k(t) = \frac{-1}{W(t_{k-1})} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_{k-1}) & u_2(t_{k-1}) & y_{k-1} \\ u'_1(t_{k-1}) & u'_2(t_{k-1}) & y'_{k-1} \end{vmatrix}, \quad M_0(t, \tau) = \frac{1}{W(\tau)} \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix},$$

$u_1(t), u_2(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (5.1), $W(t)$ – определитель Вронского.

Уравнение (4.1) решаем на первом промежутке $t \in [t_0, t_1]$. С учетом условий (4.2), (4.3) на начальном множестве преобразуем уравнение (4.1) к виду (5.1)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = h_1(t), \tag{5.2}$$

где

$$h_1(t) = h(t) - [h(0) - a_1 y'_0 - a_2 y_0] \eta_2(t - \frac{2l}{a_0}) - a_1 y'_0 \eta_1(t - \frac{2l}{a_0}) - a_2 y_0 \eta_2(t - \frac{2l}{a_0}) + a_3 y'_0 \eta_1(t - \frac{2l}{a_0}). \tag{5.3}$$

Согласно лемме, уравнение (5.2) с начальными условиями (4.2) имеет решение

$$y_1(t) = A_1(t) + \int_{t_0}^{t_1} M_0(t, \tau) h_1(\tau) d\tau, \quad A_1(t) = \frac{-1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_0) & u_2(t_0) & y_0 \\ u'_1(t_0) & u'_2(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Обозначим $z_k(t) = y'_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Из формулы (5.4) находим

$$z_1(t) = A'_1(t) + \int_{t_0}^{t_1} M(t, \tau) h_1(\tau) d\tau, \tag{5.5}$$

где $M(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} M_0(t, \tau)$.

На следующих промежутках $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) уравнение (4.1) будем решать методом индукции. Предположим, что на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ функция $z_k(t) = y'_k(t)$ уже найдена. Функцию $y_k(t)$ мы можем найти по формуле

$$y_k(t) = y_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t z_k(\tau) d\tau. \tag{5.6}$$

В самом деле, $y_k(t) = y_k(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t z_k(\tau) d\tau$, но $y_k(t_{k-1}) = y_{k-1}(t_{k-1})$.

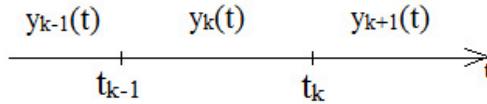


Рис. 5.2. Отрезок $[t_{k-1}, t_k]$

Fig. 5.2. The segment $[t_{k-1}, t_k]$

Из формулы (5.6) находим

$$y_k(t_k) = y_{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} z_k(\tau) d\tau. \tag{5.7}$$

Теперь уравнение (4.1) преобразуем так

$$\begin{aligned} y''(t) + y''(t - \frac{2l}{a_0}) + a_1[y'(t) + y'(t - \frac{2l}{a_0})] + a_2[y(t) + y(t - \frac{2l}{a_0})] = \\ = h(t) + a_3y'(t - \frac{2l}{a_0}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

В уравнении (5.8) сделаем замену $v(t) = y(t) + y(t - \frac{2l}{a_0})$, получим уравнение

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_2v(t) = h(t) + a_3y'(t - \frac{2l}{a_0}). \tag{5.9}$$

На основании леммы уравнение (5.9) на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ эквивалентно уравнению

$$v(t) = A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3y'(\tau - \frac{2l}{a_0})] d\tau, \tag{5.10}$$

где

$$A_{k+1}(t) = \frac{-1}{W(t_k)} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_1(t_k) & u_2(t_k) & v(t_k) \\ u'_1(t_k) & u'_2(t_k) & v'(t_k) \end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Итак, на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ уравнение (4.1) эквивалентно уравнению

$$y_{k+1}(t) + y_k(t - \frac{2l}{a_0}) = A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3 y'_k(\tau - \frac{2l}{a_0})]d\tau.$$

Продифференцировав полученное уравнение, получим формулу для вычисления $z_{k+1}(t)$

$$z_{k+1}(t) = -z_k(t - \frac{2l}{a_0}) + A_{k+1}(t) + \int_{t_k}^t M_0(t, \tau)[h(\tau) + a_3 z_k(\tau - \frac{2l}{a_0})]d\tau. \quad (5.12)$$

При этом величины $v'(t_k)$, $v(t_k)$ в формуле (5.11) находятся с учетом (5.6), (5.7) по формулам

$$\begin{aligned} v'(t_k) &= y'_k(t_k) + y'_k(t_{k-1}) = z_k(t_k) + z_k(t_{k-1}), \\ v(t_k) &= y_k(t_k) + y_k(t_{k-1}) = 2y_k(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} z_k(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Определив $z_{k+1}(t)$, находим $y_{k+1}(t)$ аналогично (5.6) по формуле

$$y_{k+1}(t) = y_k(t_k) + \int_{t_k}^t z_{k+1}(\tau)d\tau.$$

В системе Mathematica проведен расчет для уравнения (4.1) методом шагов на десяти отрезках длиной $\frac{2l}{a_0}$ при тех же значениях параметров механической системы, как и в примере 1. Результаты решения уравнения (4.1) методом шагов совпадают с численным решением этого уравнения методом Рунге–Кутта.

6. Заключение

Предложен метод исследования механической системы измерения давления в газожидкостных средах, приводящий к линейному дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом второго порядка, которое определяет связь между величиной деформации чувствительного элемента датчика и значением давления рабочей среды в камере сгорания двигателя. Получены точные решения уравнения, разработан численный метод, основанный на методе Рунге–Кутта, и метод шагов. Приведены примеры численных расчетов, которые позволяют исследовать динамику упругого элемента. Разработанный метод позволяет дополнить и усовершенствовать базу современного проектирования систем измерения давления в газожидкостных средах, а применение численных исследований дает возможность сократить время и средства, необходимые для натурных экспериментов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последствием. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 336 с.
4. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990. 168 с.
5. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. 356 с.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 448 с.
7. Wang Zh., Qian L., Lu S. On the existence of periodic solutions to a fourth-order p -Laplacian differential equation with a deviating argument // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2010. Vol.11, Issue 3. P. 1660-1669. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.03.018>.
8. Bica A.M., Curila M., Curila S. About a numerical method of successive interpolations for two-point boundary value problems with deviating argument // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol.217, Issue 19. P. 7772-7789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.085>.
9. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
10. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // *Измерительная техника*. 2008. № 3. С. 26–30.
11. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. Кн.2; пер. с франц. М.: Мир, 1992. 419 с.
12. Андреев А.И., Жуков А.В., Яковишин А.С. Разработка методики в области проектирования мембранных датчиков давления // *Вестник ПНИПУ. Машиностроение. Материаловедение*. 2022. Т. 24, № 1. С. 28–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9877/2022.1.04>.
13. Басов М. В., Пригодский Д. М., Холодков Д. А. Моделирование чувствительного элемента датчика давления на основе биполярного тензотранзистора // *Датчики и системы*. 2017. №6. С.17–24.
14. Chen J. Flexible pressure sensors and their applications // *Highlights in Science, Engineering and Technology*. 2023. Vol. 44. P. 54–60. DOI: <https://doi.org/10.54097/hset.v44i.7193>.

15. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S*. 2014. Vol. 7, Issue 6. P. 1133-1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>.
16. Paidoussis M. P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across *Applied Mechanics // Journal. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 310, Issue. 3. P. 462–492. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>.
17. Kheiri M., Paidoussis M.P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2015. Vol. 55. P. 204-217. DOI:[10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013).
18. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support // *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 14. P. 2986-2993. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.07.376>.
19. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование динамики аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления» // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>
20. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2020. Т. 22, № 3. С. 352-367. DOI: [10.15507/2079-6900.22.202003.352-367](https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367).
21. Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2021. Т. 23, № 4. С. 461-471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>.
22. Velmisov P., Tamarova Y., Pokladova Y. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // *AIP Conference Proceedings*, 2021, Vol.2333, Issue 1. Article number: 120004. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041778>.
23. Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. Vol. 255, Issue 5. P. 587-594. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05395-2>.

*Поступила 15.10.2024; доработана после рецензирования 12.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. R. Bellman, K. L. Kuk, *Differential-difference equations*, Mir, Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.

2. A. D. Myshkis, *Linear differential equations with retarded argument*, Nauka, Moscow, 1972 (In Russ.), 352 p.
3. E. A. Andreeva, V. B. Kolmanovsky, L. E. Shaikhet, *Control of systems with aftereffect*, Science. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1992 (In Russ.), 336 p.
4. V. G. Kurbatov, *Linear differential-difference equations*, Voronezh State University Publishing House, Voronezh, 1990 (In Russ.), 168 p.
5. S. V. Norkin, *Differential equations of the second order with retarded argument*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, M., 1965 (In Russ.), 356 p.
6. V. B. Kolmanovsky, V. R. Nosov, *Stability and periodic regimes of regulated systems with consequences*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1981 (In Russ.), 448 p.
7. Z. Wang, L. Qian, S. Lu, “On the existence of periodic solutions to a fourth-order p-Laplacian differential equation with a deviating argument”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11:3** (2010), 1660–1669. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.03.018>.
8. A. M. Bica, M. Curila, S. Curila, “About a numerical method of successive interpolations for two-point boundary value problems with deviating argument”, *Applied Mathematics and Computation.*, **217:19** (2011), 7772–7789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.085>.
9. L. G. Etkin, *Vibration sensors. Theory and practice*, Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
10. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, “Universal pressure transducer”, *Measurement Techniques*, **51:3** (2008), 269–275. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11018-008-9035-z> (In Russ.).
11. J. Ash, P. Andre, Zh. Bofron, *Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2*, Mir, Moscow, 1992 (In Russ.), 419 p.
12. A. I. Andreev, A. V. Zhukov, A. S. Yakovishin, “Development of a methodology for the design of membrane pressure sensors”, *Bulletin of PNRPU. Mechanical engineering, materials science*, **24:1** (2022), 28–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9877/2022.1.04>.
13. M. V. Basov, D. M. Prigodskiy, D. A. Kholodkov, “Modeling of a sensitive element for pressure sensor based on a bipolar strain gauge piezotransistor”, *Sensors & Systems*, **6** (2017), 17–24.
14. J. Chen, “Flexible pressure sensors and their applications”, *Highlights in Science, Engineering and Technology*, **44** (2023), 54–60. DOI: <https://doi.org/10.54097/hset.v44i.7193>.

15. E. Aulisa, A. Ibragimov, E.Y. Kaya-Cekin, “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **7**:6 (2014), 1133–1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>.
16. M.P. Paidoussis, “The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics”, *Journal of Sound and Vibration*, **310**:3 (2008), 462–492. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>.
17. M. Kheiri, M.P. Paidoussis, “Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **55** (2015), 204–217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>.
18. R.T. Faal, D. Derakhshan, “Flow-Induced vibration of pipeline on elastic support”, *Procedia Engineering*, **14** (2011), 2986–2993. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>.
19. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, “Mathematical modeling of the dynamics of the aeroelastic "pipeline – pressure sensor" system”, *PNRPU Mechanics Bulletin*, **2** (2024), 69–78. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.2.08>.
20. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, “Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **22**:3 (2020), 352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>.
21. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin, “Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media”, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **23**:4 (2021), 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>.
22. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova, “Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media”, *AIP Conference Proceedings*, **2333**:1 (2021), 120004. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041778>.
23. P. A. Velmisov, Y. A. Tamarova, Y. V. Pokladova, “Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 587–594. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05395-2>.

Submitted 15.10.2024; Revised 12.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.