

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202404.404-423

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных ЭйлераЛадонкина М. Е.^{1,2}, Повещенко Ю. А.^{1,2}, Чжан Х.^{1,2}¹ ИИМ им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. В итерационных алгоритмах для полностью консервативных разностных схем (ПКРС) для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера разработаны новые методы выбора адаптивной искусственной вязкости (АИВ), применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе отдельных прогонок. В работе рассматриваются различные методы включения АИВ, в том числе для эффективного подавления осцилляций в профилях скорости. Все итерационные методы подробно описаны, приведены блок-схемы. Предложен метод сеточных вложений для моделирования на пространственно неравномерных сетках. Выполнены расчёты классической задачи распада произвольного разрыва (задачи Сода) с использованием ПКРС и разработанных методов АИВ в различных итерационных процессах. Проведён их сравнительный анализ и показана эффективность разработанных улучшенных итерационных процессов и подходов к выбору АИВ по сравнению с работами других авторов. Все расчёты проиллюстрированы. На рисунках приведены варианты решений задачи Сода на равномерной и неравномерной сетках, а также сравнение предложенных в работе методов при расчёте задачи Сода на равномерной сетке.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика, задача Сода

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Сравнительный анализ некоторых итерационных процессов для реализации полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 4. С. 404–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.404-423>

Об авторах:

Ладонкина Марина Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Повещенко Юрий Андреевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

© Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х.



Чжан Хаочэнь, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

Original article

MSC2020 57N10

Comparative analysis of some iterative processes for realization of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables

M. E. Ladonkina^{1,2}, Yu. A. Poveschenko^{1,2}, H. Zhang^{1,2}

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow, Russian Federation)*

² *Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow, Russian Federation)*

Abstract. In iterative algorithms for fully conservative difference schemes (FCDS) for the equations of gas dynamics in Euler variables, new methods for selecting adaptive artificial viscosity (AAV) have been developed, which are used both in explicit iterative processes and in the separate tridiagonal matrix algorithm. Various methods for incorporating AAV are discussed in this paper, including those for effectively suppressing oscillations in velocity profiles. All iterative methods are described in detail and block diagrams are given. A grid embedding method for modeling on spatially irregular sects is proposed. Calculations of the classical arbitrary discontinuity decay problem (the Sod problem) using FCDS and the developed AAV methods in different iterative processes have been performed. Comparative analysis is carried out and the efficiency of the developed improved iterative processes and approaches to the choice of AAV in comparison with the works of other authors is shown. All calculations are illustrated. The figures show variants of solutions of the Sod problem on uniform and non-uniform meshes, as well as a comparison of the methods proposed in the paper for the calculation of the Sod problem on a uniform grid.

Keywords: completely conservative difference scheme, method of reference operators, gas dynamics, Sod problem

For citation: M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, H. Zhang. Comparative analysis of some iterative processes for realization of fully conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:4(2024), 404–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202404.404-423>

About the authors:

Marina E. Ladonkina, Ph.D. (Phys. and Math.), Senior researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Yurii A. Poveschenko, D. Sci. (Phys. and Math.), Leading researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Haochen Zhang, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

1. Введение

Уравнения газовой динамики представляют собой выражения основных законов сохранения массы, импульса и энергии в сплошной среде. Поэтому естественно строить дискретную модель изучаемой среды так, чтобы в ней также выполнялись аналоги этих законов. Практика показывает, что применение таких схем особенно эффективно при использовании в том числе для задач, в которых профили решений резко изменяются во времени и пространстве. Дальнейшее развитие принципов интегральных согласований массы, импульса и различных видов энергий привело к понятию полностью консервативных разностных схем (ПКРС) [1], применяемых при лагранжевых и эйлеровых способах описания сплошной среды [2–5]. А введение адаптивной искусственной вязкости (АИВ) [6] в ПКРС позволяет подавлять возникающие в численном решении осцилляции локально, управляя пространственной аппроксимацией дискретной модели, и не изменяя при этом её консервативно согласованных свойств по компонентам различных видов энергий, массопереносу и импульсу. При этом обеспечивается получение качественного физического решения задачи. Отметим также, что выбор описываемых в работе различных итерационных процессов, применяемых в неявных ПКРС, также влияет на используемые в разностной схеме виды АИВ и тем самым определяет динамически формируемую локальную аппроксимацию задачи.

Настоящее исследование представляет собой продолжение работ [7–10]. Предлагается простая реализация ПКРС с АИВ различными итерационными процессами. Также в данной работе разработаны новые методы выбора АИВ, применяемые как в явных итерационных процессах, так и в методе раздельных прогонок. В данном исследовании рассматриваются различные методы включения АИВ в том числе для эффективного подавления осцилляций в профилях скорости. Предложен метод сеточных вложений для моделирования на пространственно неравномерных сетках. Выполнены расчёты классической задачи распада произвольного разрыва (задачи Сода) с использованием ПКРС и разработанных методов АИВ в различных итерационных процессах. Также проведён их сравнительный анализ и показана эффективность разработанных улучшенных итерационных процессов и подходов к выбору АИВ по сравнению с работами других авторов.

В параграфе 2 приведена исходная постановка задачи газовой динамики в эйлеровых переменных и двухслойная по времени полностью консервативная разностная схема и также операторы аппроксимации для системы уравнений Эйлера. В параграфе 3 описываются методы, разработанные и использованные в нашей работе: метод явных итераций, метод прогонки, улучшенный метод явных итераций, подход скоростной вязкости и метод сеточных вложений. В параграфе 4 демонстрируются результаты расчётов, полученные различными методами, приводится их сравнительный анализ.

2. Полностью консервативная разностная схема для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных

Рассмотрим пространственно-одномерное течение сжимаемого газа в переменных Эйлера в декартовой системе координат.

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \frac{\partial \mu}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{D}{Dt}(udM) = -dV \frac{\partial P}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu u) + df, \tag{2.2}$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \frac{\partial u}{\partial x} - dV \frac{\partial}{\partial x}(\mu \varepsilon) + dQ. \tag{2.3}$$

здесь \vec{u} – скорость течения, ρ – плотность среды, $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ – плотность потока массы, P – давление, ε – удельная внутренняя энергия. Считается, что масса dM заключена в объём dV , через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu}E$.

Для системы уравнений (2.1) – (2.3) выпишем двухслойную по времени полностью консервативную разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера.

$$m_t = -vDIN_D \vec{\mu}_D^{\sim}, \tag{2.4}$$

$$(mu)_t = -vGRAD_{\sigma} \pi^{\sim} - vDIT_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \cdot \vec{u}_D^{\sim}), \tag{2.5}$$

$$(m\varepsilon)_t = -\frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} (\pi^{\sim} VDIV_{\sigma} \vec{u}^{\sim})_{\Omega} - vDIN_D \vec{\mu}_{ED}^{\sim}, \tag{2.6}$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -v(u^{\sim}, GRAD_{\sigma} \pi^{\sim}) - vDIN_D(\vec{\mu}_D^{\sim} \frac{\vec{u}_D^{\sim 2}}{2}), \tag{2.7}$$

где

$$\vec{\mu} = \rho \vec{u}, \quad \vec{\mu}_E = \varepsilon \vec{\mu} = E \vec{u}, \quad E = \rho \varepsilon, \quad \rho^{\sim} = \rho^{(\psi_{\rho})}, \quad \psi_{\rho} = const,$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}, \quad \mu_D^{\sim} = M_D^{\sim} - \nu^{\sim} GRAN_D \rho^{\sim},$$

$$\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_{\sigma}(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)}), \quad P_{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} P_{\omega}, \quad \psi_u = const,$$

$$M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}, \quad \mu_{ED}^{\sim} = M_{ED}^{\sim} - \nu_E^{\sim} GRAN_D(\rho^{\sim} \varepsilon^{(\psi_{\varepsilon})}), \quad \psi_{\varepsilon} = const,$$

$$M_D^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (\rho_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)} \quad \text{и} \quad M_{ED}^{\sim} = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} (E_{\omega} u_{\omega})^{(0.5)}.$$

Здесь ω – узлы разностной сетки, Ω – ячейки. Термодинамические величины ρ , ε , P и внутренняя энергия $E = \rho \varepsilon$ относятся к узлам ω . Будем также относить скорость \vec{u} , объём v и приузловую массу $m = \rho v$ к узлам ω , а объём V – к ячейкам сетки.

Очевидно

$$v_{\omega} = \check{h}_k = \frac{h_{k+1/2} + h_{k-1/2}}{2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}, \quad V_{\Omega} = h_i, \quad \rho_{\omega} = \frac{m_{\omega}}{v_{\omega}} = \rho_k,$$

где под h и \check{h} понимаются размеры ячеек Ω и узловых доменов ω соответственно.

Величины из набора искусственных вязкостей $\{\nu, \nu_u, \nu_E\}$ определяются в ячейках формулами $\nu = \beta \frac{h^2}{\tau}$, $\nu_u = \beta_u \frac{h^2}{\tau}$ и $\nu_E = \beta_E \frac{h^2}{\tau}$ в [9], где $\{\beta, \beta_u, \beta_E\}$ – приведенные

вязкости зависимые от числа Куранта. Также в ячейке, образованной узлами ω и ω' , введены величины

$$\vec{u}_D^{\sim} = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)} + \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}), \quad \vec{u}_D^{2\sim} = (\vec{u}_\omega^{(\delta_\omega)}, \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}).$$

На слоях по времени t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введены разностные производные по времени и пространственно-точечные временные интерполяции: $a_t = \frac{\hat{a} - a}{\tau}$, $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может связываться с узлами пространственной сетки ω , например, по закону: $\delta = \sqrt{\hat{m}}/(\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$, ψ – постоянные интерполяционные веса по времени. Под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a и \hat{a} между слоями t и \hat{t} понимаются некоторые интерполяционные величины a^{\sim} , например, для скорости полагаем $u^{\sim} = u^{(\delta)}$.

Разностные аналоги операций векторного анализа, используемые в (2.4)–(2.7), определяются следующим образом:

$$DIN_D \vec{\mu}_D = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega), \quad DIN_D : (\Omega), \rightarrow (\omega), \quad (2.8)$$

$$DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = \frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega), \quad DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (2.9)$$

$$GRAN_D P = \frac{1}{v} \Delta_\Omega P, \quad GRAN_D : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (2.10)$$

$$GRAD_\sigma \pi = \frac{1}{v} \Delta_\sigma \pi, \quad GRAD_\sigma : (\Omega) \rightarrow (\omega), \quad (2.11)$$

$$DIV_\sigma \vec{u} = -\frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) u_\omega, \quad DIV_\sigma : (\omega) \rightarrow (\Omega), \quad (2.12)$$

где $\Delta_\Omega P = -\sum_{\omega(\Omega)} S_\Omega(\omega) P_\omega$, $\Delta_\sigma \pi = +\sum_{\Omega(\omega)} S_\Omega(\omega) \pi_\Omega + S_{\partial\omega} \pi_{\partial\omega}$.

Знаковая функция $S_\Omega(\omega)$, на границе приузлового домена узла ω равна $+1$ справа и -1 слева. $\sum_{\omega(\Omega)}$ подразумевает суммирование по узлам ω , образующих ячейку Ω . Также $\sum_{\Omega(\omega)}$ – суммирование по ячейкам Ω , смежных в узле ω . Наконец, в выражении для $\Delta_\sigma \pi$, в граничном узле $\omega = \partial\omega$, добавлено слагаемое $\pi_{\partial\omega}$ на границе области со знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, зависящей от направления граничной нормали.

3. Методы вычислений ПКРС

В данной работе для реализации нелинейной неявной ПКРС применяются два метода – метод явных итераций (пп. 4.1 и 4.3) и метод прогонки (п. 4.2). Также при аппроксимации уравнения (2.5) нами используется искусственная скоростная вязкость в форме (3.9). Для моделирования задач на неравномерной сетке предложен метод сеточных вложений (см. п. 3.5)

Здесь и далее все величины определяются в узлах кроме числа Куранта и вязкости (приведенная вязкость β и искусственная вязкость ν). Кроме этого переменными, например ρ, u, E обозначаются величины на явном слое по времени, а $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{E}$ – величины на неявном. Внешние итерации используются для вычисления значений с явного слоя на неявный слой по времени и обозначаются индексом s , в то время как внутренние итерации также применяются в итерационном процессе или процедуре внутри одной внешней итерации.

3.1. Метод явных итераций

В работе [12] для реализации нелинейной неявной ПКРС применялся метод явных итераций (далее – Метод 1, см. Алгоритм 3.1).

Алгоритм 3.1. Метод явных итераций (Метод 1)

Algorithm 3.1. Explicit iteration method (Method 1)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
 $Convergence = false$

while $Convergence == false$ **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;
 $monotonicity = false$, $\beta = 0$, $\beta_u = 0$, $\beta_E = 0$;

while $monotonicity = false$ **do**

Compute ρ^{s+1} using formula (3.1);

$monotonicity = true$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k ($(\rho_{k+1}^{s+1} - \rho_k^{s+1})(\rho_k^{s+1} - \rho_{k-1}^{s+1}) < 0$)

between cell i and $i - 1$) **AND** ($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k after small addends to density in k -th nodel ($(\rho_{k+1}^{s+1} - (\rho_k^{s+1} + \varepsilon))((\rho_k^{s+1} + \varepsilon) - \rho_{k-1}^{s+1}) < 0$, ε – tiny value) between cells i and $i - 1$ in zone of expansion wave and contact discontinuity) **AND**

($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}$, $i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

Do the same cycle for $\{u_k, E_k\}$ to set viscosity;

if $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$ **else**

$Convergence = true$;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

На каждой итерации использовался внутренний итерационный процесс для выбора АИВ. В данной работе (Метод 1) также используются подробно описанные в [12] дополнительные оптимизационные критерии выбора АИВ в структурах волны разрежения, ударной волны и контактного разрыва, которые тестировались на решении задачи Сода [11]. В излагаемых ниже пп. 4.2, 4.3 такая оптимизация не требовалась. При использовании данного метода были получены удовлетворительные результаты (см. Рис. (4.1)), однако процессорное время потраченное на итерационные процессы, оказалось значительным.

В Методе 1 для вычисления величин на следующем шаге по времени выполняется итерационный процесс. Формулы этого итерационного процесса для уравнений (2.4) – (2.6) имеют следующий вид

$$\rho_k^{s+1} = f_\rho(\rho, \rho^s, u, u^s, \beta) = \rho_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{i-1}^{\sim} - \mu_i^{\sim}), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_k^{s+1} &= f_u(\rho, \rho^{s+1}, u, u^s, E, E^s, \beta_u) = \\ &= \frac{1}{\rho_k^{s+1}}(\rho_k u_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\pi_{i-1}^{\sim} - \pi_i^{\sim}) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{i-1}^{\sim} u_{i-1}^{\sim} - \mu_i^{\sim} u_i^{\sim})), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} E_k^{s+1} &= f_\varepsilon(\rho, \rho^{s+1}, u, u^{s+1}, E, E^s, \beta_E) = \\ &= E_k - \frac{\tau}{2\hbar_k}(\pi_i^{\sim}(u_{k+1}^{\sim} - u_k^{\sim}) + \pi_{i-1}^{\sim}(u_k^{\sim} - u_{k-1}^{\sim})) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{E,i}^{\sim} - \mu_{E,i-1}^{\sim}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

При определении вязкости в потоке μ^{\sim} в уравнении (3.1) используется интерполяция по времени $\rho^{\sim} = \psi_\rho \rho^s + (1 - \psi_\rho)\rho$. Так же для уравнений (3.2) $u^{\sim} = \psi_u u^s + (1 - \psi_u)u$ и (3.3) $E^{\sim} = \psi_E E^s + (1 - \psi_E)E$. В s -ой итерации величины обозначаются верхним индексом s , например, ρ^s, u^s, E^s . На этапе внешних итераций при вычислении ρ^{s+1} выбирается вязкость следующим образом: в начале данной внешней итерации полагается $\beta = 0$, и выполняются вычисления. При наличии осцилляций, β увеличивается, и внутренняя итерация повторяется в цикле, если значение β не достигает своего лимитера [10]. Аналогичные действия производятся в импульсной (3.2) и энергетической (3.3) группах при вычислениях u^{s+1} и E^{s+1} . Сходимость внешнего итерационного процесса определяется следующим образом. Если $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}, y = \{\rho, u, E\}, k = \overline{1, n}$, то результат внешнего процесса сходится и получаются величины на следующем слое по времени.

3.2. Метод совместных итераций

В текущей работе для оптимизации вычислительного процесса реализации ПКРС и выбора АИВ предложен метод совместных итераций (далее – Метод 2, см. Алгоритм 3.2), одновременно уточняющих итерационное разностное решение и корректирующих АИВ.

Наряду с Методом 1 в Методе 2 применяется метод отдельных прогонок для разностных балансов (2.1) – (2.3), в котором вычисляются приращения на трех узлах с s -ой итерации на $s + 1$ -ую итерацию.

Данный метод реализуется следующим образом. Если при вычислении ρ^{s+1} возникли осцилляции, то их неограниченное лимитером подавление производится только один раз на данном шаге по времени на итерации, следующей после $(s + 1)$ -ой. Этот процесс происходит следующим образом. К коэффициенту приведённой вязкости q добавляется соответствующая конкретной переменной, например ρ , константа $const_\rho$ где приведённая вязкость β является произведением коэффициента q на число Куранта $\beta = q \times kr$; затем вычисляется приращение плотности $\delta\rho^{s+2}$, которое добавляется к ρ^{s+1} , т. е. $\rho^{s+2} = \delta\rho^{s+2} + \rho^{s+1}$. Далее, аналогичным образом данный алгоритм повторяется для вычисления скорости и давления. Если полученные на данной итерации величины удовлетворяют условию сходимости $|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}, y = \{\rho, u, E\}, k = \overline{1, n}$, и дальнейшая монотонизация не производится (осцилляции отсутствуют или соответствующие β достигают своего лимитера), то итерационный процесс заканчивается и

Алгоритм 3.2. Метод совместных итераций (Метод 2)

Algorithm 3.2. Joint iteration method (Method 2)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
 $\beta = 0, \beta_u = 0, \beta_E = 0$,

$Convergence = false, monotonicity = false$

while ($Convergence == false$) **OR** ($monotonicity == false$) **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

$monotonicity = true$;

if (there is nonmonotonicity in nodel k between cell i and $i - 1$) **AND**

 ($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

$monotonicity = false$;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}, i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

 Compute $\{\delta\rho_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$ using tridiagonal matrix algorithm;

 Update: $\rho_k^{s+1} = \delta\rho_k^{s+1} + \rho_k^s$, $k = \overline{1, n}$;

 Do the same thing for $\{u_k, E_k\}$ and get $\{u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

if ($|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$) **else**

$Convergence = true$;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

происходит переход на следующий шаг по времени, с величинами, вычисленными на последней итерации. Иначе итерационный процесс продолжается. Согласно [10], с целью ограничения увеличения приведённой вязкости β вводится лимитер β_0 , который по принципу максимума должен быть меньше единицы и больше числа Куранта. Так же для выполнения метода прогонки в импульсной группе (2.5) проверяется условие диагонального преобладания.

В начале каждого шага по времени перед началом итераций все вязкости полагаются равными 0, величины на первой итерации равные величинам на явном слое $\{\rho_k^1, u_k^1, E_k^1\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$, и выбирается локальное число Куранта для каждой ячейки. Здесь и в дальнейшем, число Куранта выбирается локально по следующей формуле:

$$kr_i = 0.5 \left| \frac{u_k + u_{k+1}}{2} + C_i \right| \frac{\tau}{h_i}, \quad (3.4)$$

где $C_i = \sqrt{\frac{\gamma(P_k + P_{k+1})}{\rho_k + \rho_{k+1}}}$ - локальная скорость звука.

3.3. Улучшенный метод явных итераций

Эффективность Метода 2, дающая хорошую точность в тестовых задачах, и малое затрачиваемое процессорное время привело к модификации Метода 1, повышающей его запас неявности. Такой алгоритм (далее – Метод 3) представляется следующим образом (см. Алгоритм 3.3.).

Алгоритм 3.3. Полный улучшенный метод явных итераций (Метод 3)

Algorithm 3.3. Full improved iterative method (Method 3)

Input: $\{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$

Initial Parameters: $\{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}$, $k = \overline{1, n}$,
Convergence = false

while *Convergence* == false **do**

$\{\rho_k^s, u_k^s, E_k^s\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;
monotonicity = false, $\beta = 0, \beta_u = 0, \beta_E = 0$;

while (*monotonicity* = false) **do**

Compute ρ^{s+1} using algorithm 3.4 for ρ ;

monotonicity = true;

if (there is nonmonotonicity in nodel k between cell i and $i - 1$) **AND**

($\beta_i, \beta_{i-1} < \beta_{limiter}$) **else**

$\beta_{i-1} = \beta_{i-1} + const_\rho \times kr_{i-1}$, $\beta_i = \beta_i + const_\rho \times kr_i$;

monotonicity = false;

if ($\beta_i > \beta_{limiter}, i = \overline{0, n}$) **else**

$\beta_i = \beta_{limiter}$, where $\beta_i > \beta_{limiter}$;

$\nu_{\rho, i} = \frac{\beta_i h^2}{\tau}$;

Do the same cycle for $\{u_k, E_k\}$ to set viscosity;

if ($|y_k^{s+1} - y_k^s| < \varepsilon_{rel} \cdot y_{max} + \varepsilon_{abs}$, $y = \{\rho, u, E\}$ $k = \overline{1, n}$) **else**

Convergence = true;

Value on next layer: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\} = \{\rho_k^{s+1}, u_k^{s+1}, E_k^{s+1}\}$, $k = \overline{1, n}$;

Output: $\{\hat{\rho}_k, \hat{u}_k, \hat{E}_k\}$, $k = \overline{1, n}$

На s -ой итерации сначала выполняются вычисления явной схемой и получаются предикторные величины на неявной $(s + 1)$ -ой итерации. Затем, используются эти предикторные величины и выполняется предикторно-корректирующая процедура, сходящаяся к $s + 1$ -ому неявному значению внешней итерации (см. Алгоритм 3.4).

Эта процедура может повторяться 1 или более раз, приближая $(s + 1)$ -ое итерационное значение к его сходимости. Предикторно-корректирующая процедура выполняется с фиксированной вязкостью. При необходимости корректировки вязкости (при наличии осцилляций) итерационный процесс будет продолжаться, так же и, как при нарушении условий его сходимости. Соответственно, уравнения (3.1) – (3.3) в Метод 3 для итера-

Алгоритм 3.4. Предикторно-корректирующая процедура

Algorithm 3.4. Predictive-corrective procedure

Input: $\{y_k, y_k^s\}, k = \overline{1, n}$
Initial Parameters: $\{y_{predictor, k}^{s+1}\} = \{y_k^s\} k = \overline{1, n},$
 $(\delta y_k)_{old} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|,$
 $Convergence = false$
while $Convergence = false$ (or fixed number of iterations) **do**
 Compute equation using $\{y_{predictor, k}^{s+1}\}$ and other nonchanged variables;
 Update $\{y_{predictor, k}^{s+1}\}$ (for each value using corresponding formula (3.5)-(3.7));
 $(\delta y_k)_{new} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|;$
 if $(|(\delta y_k)_{new} - (\delta y_k)_{old}| < \varepsilon_{rel} \cdot \delta y_k + \varepsilon_{abs}, k = \overline{1, n})$ **else**
 $Convergence = true;$
 $(\delta y_k)_{old} = |y_{predictor, k}^{s+1} - y_k^s|;$
 $\{y_k^{s+1}\} = y_{predictor, k}^{s+1};$
Output: $\{y_k^{s+1}\}, k = \overline{1, n}$

ций будут иметь следующий вид:

$$\rho_k^{s+1} = f_\rho(\rho, \rho_{predictor}^{s+1}, u, u^s, \beta) = \rho_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim), \tag{3.5}$$

$$u_k^{s+1} = f_u(\rho, \rho^{s+1}, u, u_{predictor}^{s+1}, E, E^s, \beta_u) = \frac{1}{\rho_k^{s+1}}(\rho_k u_k - \frac{\tau}{\hbar_k}(\pi_i^\sim - \pi_{i-1}^\sim) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_i^\sim u_i^\sim - \mu_{i-1}^\sim u_{i-1}^\sim)), \tag{3.6}$$

$$E_k^{s+1} = f_\varepsilon(\rho, \rho^{s+1}, u, u^{s+1}, E, E_{predictor}^{s+1}, \beta_E) = E_k - \frac{\tau}{2\hbar_k}(\pi_i^\sim(u_{k+1}^\sim - u_k^\sim) + \pi_{i-1}^\sim(u_k^\sim - u_{k-1}^\sim)) - \frac{\tau}{\hbar_k}(\mu_{E,i}^\sim - \mu_{E,i-1}^\sim). \tag{3.7}$$

При определении вязкости в потоке μ^\sim в уравнении (3.5) используется интерполяция по времени $\rho^\sim = \psi_\rho \rho_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_\rho)\rho$. Так же для уравнений (3.6) – $u^\sim = \psi_u u_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_u)u$ и (3.7) – $E^\sim = \psi_E E_{predictor}^{s+1} + (1 - \psi_E)E$.

Такой процесс реализации решения явными итерациями вводит внутренний итерационный процесс с фиксированной вязкостью. Далее при наличии осцилляций, вязкости увеличиваются и внешний итерационный процесс заканчивается при коррекции осцилляций и наличии сходимости к решению.

Таким образом, Метод 3 отличается от Метода 1 процедурой вычисления на $(s+1)$ -ой итерации значений $\{\rho^{s+1}, u^{s+1}, E^{s+1}\}$ внутренним предикторно-корректирующим итерационным процессом. Процедура же выбора вязкости в Методе 1 и Методе 3 аналогична. Локальные числа Куранта для каждой ячейки выбираются по формуле (3.4). В начале каждой следующей $(s + 1)$ -ой итерации вязкость β полагается равной нулю.

Так же в начале каждого шага по времени перед началом итераций все вязкости полагаются равными 0, величины на первой итераций равны величинам на явном слое $\{\rho_k^1, u_k^1, E_k^1\} = \{\rho_k, u_k, E_k\}, k = \overline{1, n}$ и выбирается локальное число Куранта для каждой ячейки по формуле 3.4.

3.4. Переход с импульсной вязкости на скоростную вязкость

При численном решении данными методами возможно возникновение осцилляций в профилях плотности и скорости, при отсутствии осцилляций в профилях импульса. Оказалось, что это явление вызывает импульсная вязкость $\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} DIV_{\sigma}(\rho^{\sim} u^{(\psi_u)})$. В этой формуле вязкость выбиралась по условию монотонности импульса. При этом так как скорость определяется делением импульса на плотность, существует риск возникновения осцилляций в профилях скорости. Поэтому в уравнении сохранения импульса АИВ выбирается, учитывая возможность возникновения немонотонности скорости и добавляется к давлению следующим образом:

$$\pi_{\Omega}^{\sim} = P_{\Omega}^{(0.5)} - v_u^{\sim} \rho^{\sim} DIV_{\sigma}(u^{(\psi_u)}) \quad (3.8)$$

На Рис. (3.1) представлено сравнение профилей скорости для расчётов с применением Метода 3 с использованием скоростной и импульсной вязкостей. При этом показана эффективность работы скоростной вязкости сглаживающей осцилляции за зоной волны разрежения, также в зоне контактного разрыва.

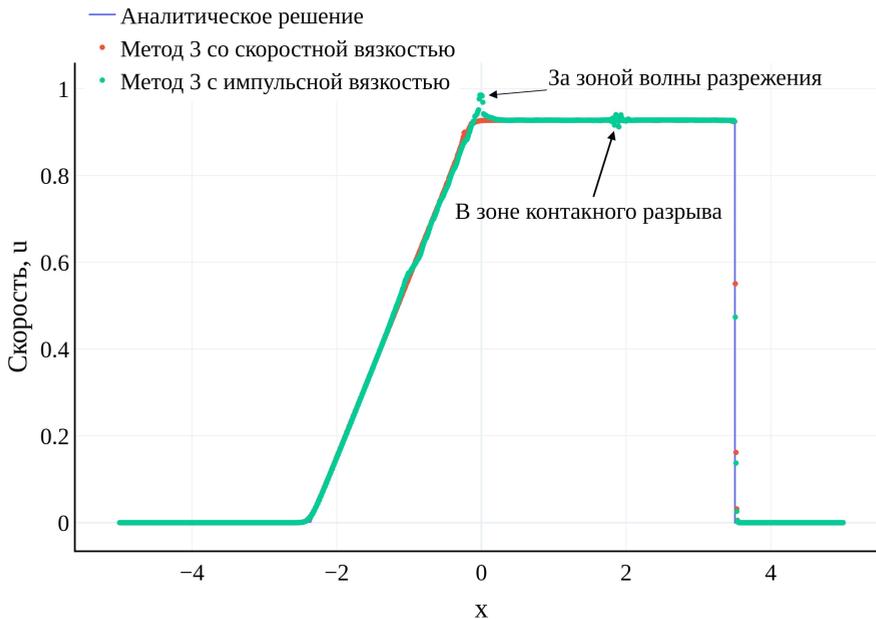


Рис. 3.1. Сравнение расчётов выполненных Методом 3 с импульсной вязкостью и с скоростной вязкостью

Fig. 3.1. Comparison of calculations using Method 3 with pulse viscosity and with velocity viscosity

3.5. Метод вложенных сеток

При расчёте на пространственно неравномерной сетке с большим коэффициентом неравномерности может происходить потеря точности решения вокруг точки перехода с ячеек одного размера на другой. В этом случае предлагается вычислительные значения газодинамических величин определять не в исходных узлах сетки, а в центрах тяжести узловых доменов. Для повышения точности расчёта на неравномерной сетке используется представленный ниже метод вложенных сеток.

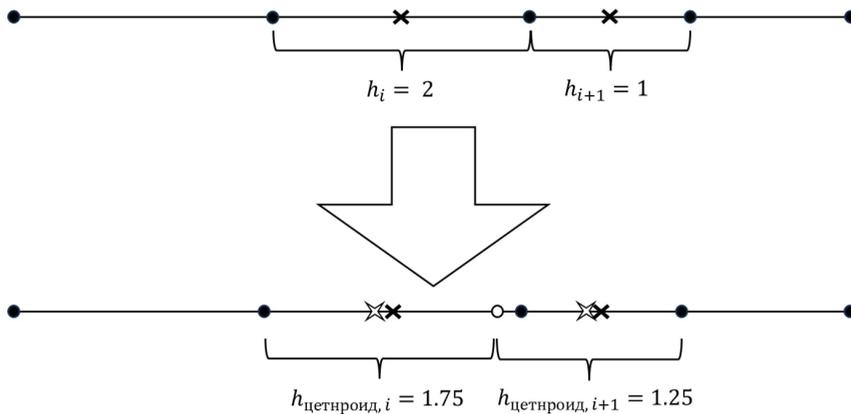


Рис. 3.2. Пример вложения сетки

Fig. 3.2. Example of a grid attachment

В зоне разрыва равномерности сетки (узел, вокруг которого две соседние ячейки разной длины) определяется новый узел как центр тяжести двух соседних полуячеек. Таким образом, генерируется новая сетка (в случае равномерной сетки, полностью совпадающая со старой), называемая центроидной сеткой с вложением первого порядка. Например, для одномерной сетки с изменением длины ячейки с 2 на длину 1, после одного такого вложения коэффициент неравномерности центроидной сетки становится $\frac{8}{7}$ по сравнению с коэффициентом неравномерности исходной сетки, равным 2 (см. 3.2). Этот процесс может повторяться до тех пор, пока коэффициент неравномерности не становится приемлемым и количество таких сеточных вложений невелико. После нахождения центроидной сетки выполняется решение системы разностных уравнений (2.4) – (2.6) на новой сетке.

4. Численные эксперименты и анализ результатов

Для тестирования построенной схемы и разработанных методов выполнены расчёты классической задачи Сода (*Sod problem*)[11] о распаде произвольного разрыва. В Таблице 4.1 представлены начальные условия этой задачи. За систему единиц измерения в расчетах принята система СИ. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Расчётная область является отрезком с -5 до 5 . Момент времени $T = 2.0$ s.

Таблица 4.1. Начальные условия в задаче Сода**Table 4.1.** Initial conditions in the Soda problem

Левая область			Правая область		
ρ	u	P	ρ	u	P
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

Полученные результаты полностью совпадают с [6]. В дальнейших всех расчётах полагается $\nu_E = \nu$. Выбираются веса по времени $\psi_\rho = 0.5, \psi_u = 0.5, \psi_E = 0.5$. В расчётах с использованием Методов 1 и 3 выполнено $\nu_u \geq \nu$, поскольку перед вязкой коррекцией для баланса импульса полагается $\nu_u = \nu, \beta_u = \beta$. Но в Методе 2 это не так, поскольку начальные вязкие коррекции считаются нулевыми. В Методе 1 выбраны лимитер приведенной вязкости $\beta = 0.2$ и параметры накопления АИВ $const_\rho = 0.1, const_u = 0.1$. Расчёты проведены на равномерных и неравномерных сетках. Длина шага по пространству равномерной сетки $h = 0.01$. Неравномерная сетка разделяется на 4 зоны - в двух из которых длина шага по пространству $h = 0.02$, а в двух других зонах пространственная длина $h = 0.01$:

$$h(x) = \begin{cases} 0.02, & -5 \leq x \leq -2, \\ 0.01, & -2 < x \leq 0, \\ 0.02, & 0 < x \leq 3, \\ 0.01, & 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

4.1. Расчёт с использованием метода совместных итераций на равномерной сетке

Из Рис. 4.1 видим, что Метод 2 улучшает результаты расчётов в зонах волны разрежения и контактного разрыва. При этом графики расчётов, выполненных Методом 2, в большей мере приближаются к аналитическому решению чем график расчёта, выполненного Методом 1, в зонах волны разрежения во всех профилях. Так же благодаря выбору скоростной вязкости в зоне контактного разрыва в Методе 2 полностью отсутствуют осцилляции, в то время как в Методе 1 наблюдается их небольшая амплитуда. Метод 2 существенно сокращает процессорное время, потраченное на вычисления и точнее приближается к аналитическому решению, чем Метод 1. Это происходит в силу неявности нахождения приращений методом прогонки в итерационном процессе. Также во всех расчётах Методом 2 вязкий лимитер β_0 [10] достигался выбираемыми АИВ в силу неявности метода прогонки. При этом полагалось $\beta_0 = 0.8$. В расчётах полагалось $const_\rho = 0.2, const_u = 1.0$.

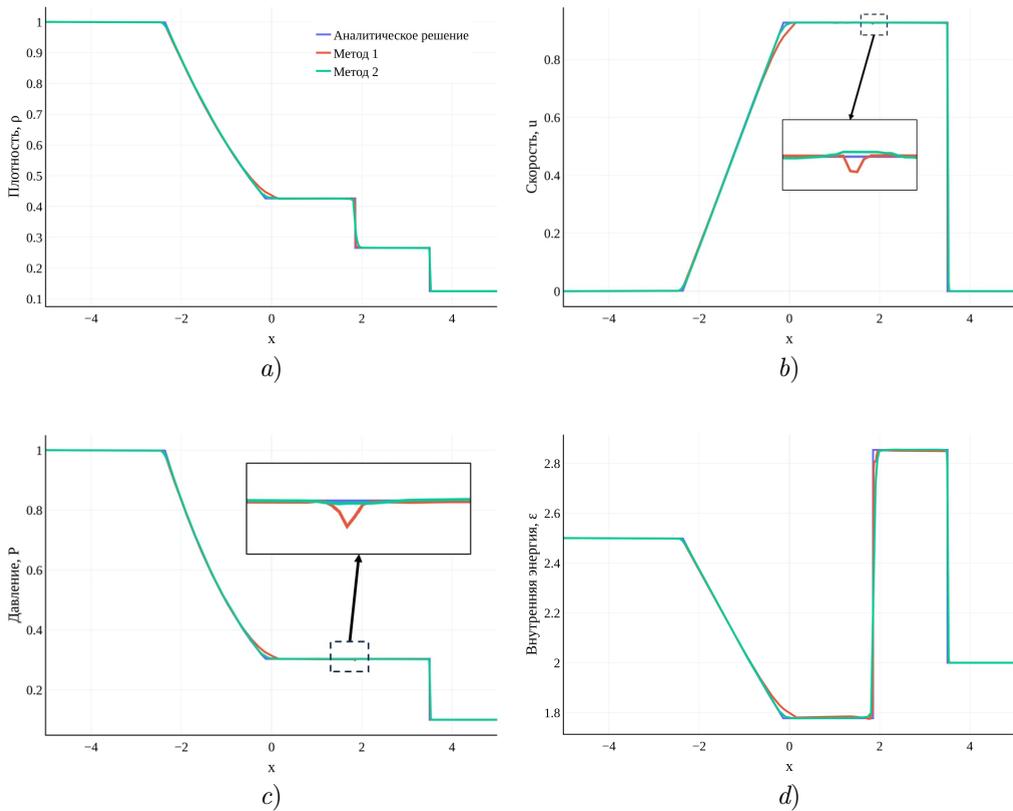


Рис. 4.1. Сравнение Методов 1 и 2 при расчёте задачи Сода на равномерной сетке: а) плотность, б) скорость, в) давление, д) внутренняя энергия

Fig. 4.1. Comparison of Methods 1 and 2 for calculating the Soda problem on a uniform grid: а) density, б) velocity, в) pressure, д) internal energy

4.2. Расчёт с использованием улучшенного метода явных итераций на равномерной сетке

Улучшенный метод явных итераций (Метод 3) действительно уменьшил процессорное время и количество итераций для сходимости, по сравнению с Методом 1. На Рис. 4.2 показано, что по точности результаты, выполненные Методом 3, тоже ближе к аналитическому решению, чем результаты, выполненные Методом 1. Из Рис. 4.2 видим, что точность решений в Метод 3 существенно выше (в смысле приближения к аналитическому решению), чем в Метод 1. Также в зоне контактного разрыва в Метод 3 не наблюдается пика в профилях скорости и давления. Процессорное время в Метод 3 на порядок меньше, чем в Метод 1, и примерно такое же, как в Метод 2.

В Метод 3 лимитер $\beta_0 = 0.2$ и константы приращений АИВ $const_\rho = 1.0$, $const_u = 0.5$.

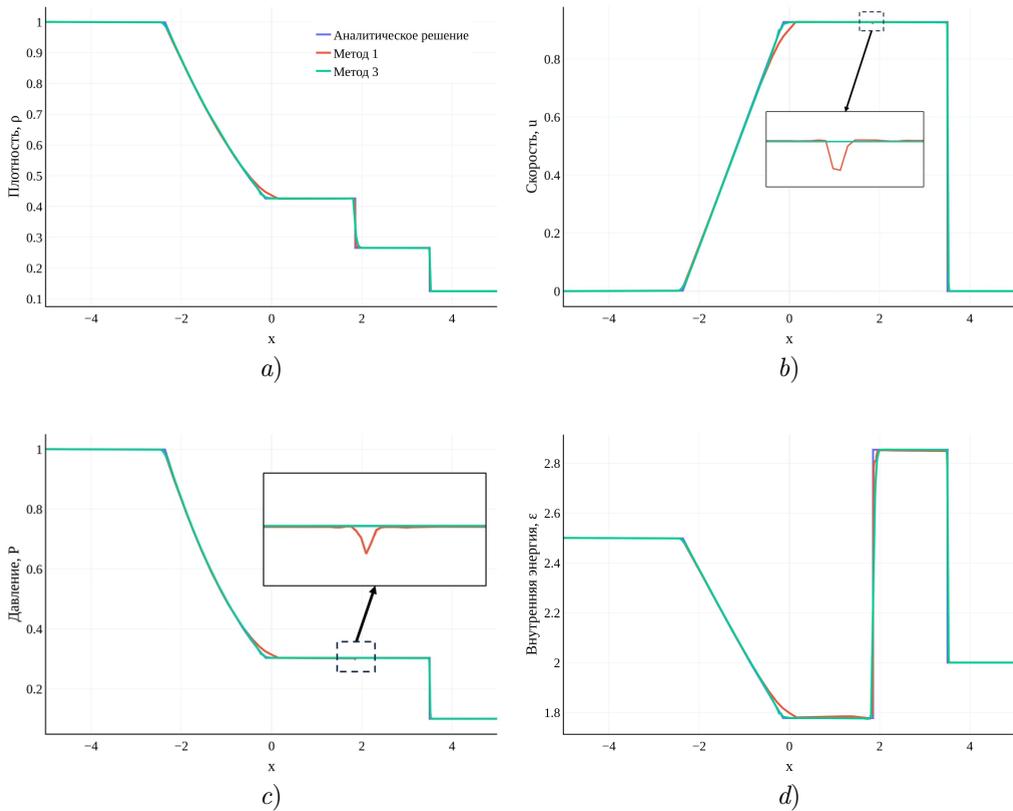


Рис. 4.2. Сравнение Методов 1 и 3 при расчёте задачи Сода на равномерной сетке: а) плотность, б) скорость, в) давление, д) внутренняя энергия

Fig. 4.2. Comparison of Methods 1 and 3 for calculating the Soda problem on a uniform grid: a) density, b) velocity, c) pressure, d) internal energy

4.3. Расчёт с использованием улучшенного метода явных итераций на неравномерной сетке

На Рис. 4.3 показаны результаты расчёта задачи Сода с использованием метода 3 на неравномерной сетке и результаты того же метода на равномерной сетке. Наблюдаются удовлетворительные результаты как без использования метода вложения, так и с использованием метода сеточных вложений. Хотя в двух зонах шаги по пространству неравномерной сетки крупнее на 2 раза чем шаги по пространству равномерной сетки, результаты фактически совпадают.

На Рис. 4.4 показан сильно увеличенный масштаб профиля плотности после прохождения перехода (разрыва) сетки с крупной на мелкую в направлении движения ударной волны. На этом масштабе можно увидеть уменьшение пика плотности на центроидной сетке.

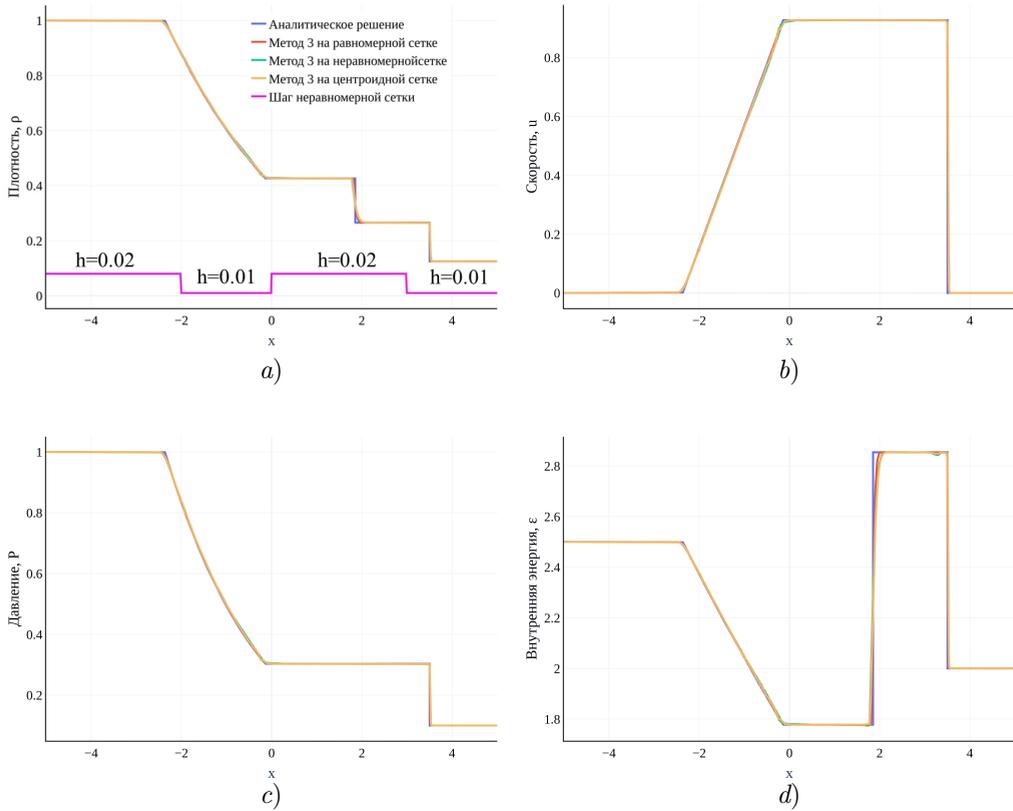


Рис. 4.3. Сравнение вариантов решений Методом 3 при расчёте задачи Сода на равномерной и неравномерной сетках: *a)* плотность, *b)* скорость, *c)* давление, *d)* внутренняя энергия

Fig. 4.3. Comparing variants of Method 3 solution for calculating the Soda problem on non-uniform and uniform grids: *a)* density, *b)* velocity, *c)* pressure, *d)* internal energy

4.4. Сравнение результатов

Задача Сода является наиболее распространенной при тестировании программных комплексов вычислительной газовой динамики, поскольку содержит в себе и зону разрежения, контактного разрыва и ударной волны. Сравнивая наши расчёты с [13] отметим, что обе работы имеют достаточно хорошие результаты (без осцилляций в обычном масштабе) хотя расчёты в [13] выполнены на более мелкой сетке (длина шага которой равна $1/200$). Сравнивая данную работу с [14] (Метод IST) видим, что точность наших расчётов существенно лучше (см. Таблицу (4.2)). Также структура фронта при использовании Метода IST размывается на 3-4 узла, что больше, чем 2 узла сетки в нашей работе. В [14] на основе схемы Годунова клеточно-центрированного метода контрольных объёмов предложена техника заточки интерфейса (Interface Sharpening Technique, IST), как постпроцессор для уменьшения ошибки диффузии и сохранения тонкости

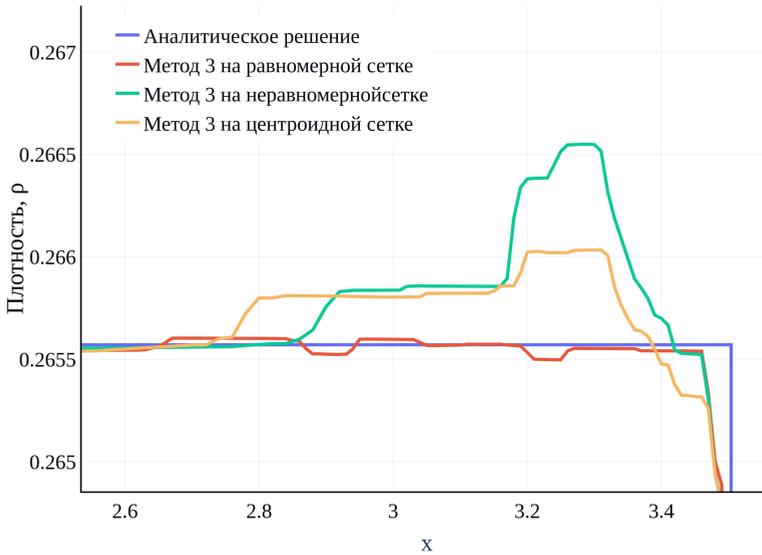


Рис. 4.4. Увеличение масштаба профиля плотности

Fig. 4.4. Zooming-in on the density profile

структуры ударной волны.

Таблица 4.2. Погрешность в C -норме для задачи Сода при различном методе (показан лучший вариант в работе [14]: размер сетки – 800, шаг по пространству – 0.00125)

Table 4.2. Error in the C -norm for the Soda problem with different methods (the best option in the work of [14] is shown: grid size – 800, spatial step – 0.00125)

	Δ_ρ	Δ_u	Δ_P
Метод 1	0.00190	0.00343	0.00064
Метод 2	0.00112	0.00097	0.00043
Метод 3	0.00074	0.00038	0.00011
Метод IST	0.04577	0.08545	0.02997

В Таблице 4.2 показано, что Метод 2 и Метод 3 достаточно повысил точность расчёта наряду с Методом 1 и методом IST, уменьшив погрешность в 2 раза и более. Кроме этого в наших расчётах меньше точек в зоне ударной волны, чем в расчётах [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 352 с.

2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953–958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123–132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171–181.
5. Головизнин В. М., Краюшкин И. В., Рязанов М. А., Самарский А. А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринт ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105. 33 с.
6. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метода адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2014. 288 с.
7. Повещенко Ю. А., Ладонкина М. Е., Подрыга В. О., Рагимли О. Р., Шарова Ю. С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша. 2019. № 14. 23 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
8. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-Layer Completely Conservative Difference Scheme of Gas Dynamics in Eulerian Variables with Adaptive Regularization of Solution. In: Large Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11958 / eds by I. Lirkov, S. Margenov. Springer: Cham, 2020. pp. 618–625. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71
9. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>
10. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретическое исследование устойчивости узловых полностью консервативных разностных схем с вязким наполнением для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330>
11. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics, Elsevier, 1978. Vol. 27, Issue 1. pp. 1–31. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90023-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90023-2)
12. Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Чжан Х. Об одной полностью консервативной разностной схеме с вязким наполнением для уравнений газовой динамики // Молодежная научная конференция «Новые горизонты прикладной математики – 2024». ИПМ им. М. В. Келдыша. № 1. С. 48–49.

13. Wu Z., Ren Y.-X. A Shock Capturing Artificial Viscosity Scheme in Consistent with the Compact High-Order Finite Volume Methods // *Journal of Computational Physics*. 2024. Vol. 516, Issue 8. Article number: 113291. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113291>
14. Nguyen V.-T., Phan T.-H., Park W.-G. Numerical Modeling of Multiphase Compressible Flows with the Presence of Shock Waves Using an Interface-Sharpener Five-Equation Model // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. Vol. 135. Article number: 103542. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103542>

*Поступила 06.10.2024; доработана после рецензирования 13.11.2024;
принята к публикации 27.11.2024*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Samarsky, Yu. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics*, Nauka. Chief Editorial Board of Physical and Mathematical literature, Moscow, 1980 (In Russ.), 352 p.
2. Yu. P. Popov, A. A. Samarsky, “Completely conservative difference schemes”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9:4** (1969), 296–305. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90049-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90049-4) (In Russ.).
3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, “An algorithm for constructing completely conservative difference schemes”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **22:1** (1982), 128–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90170-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90170-7) (In Russ.).
4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, V. G. Meladze, “A completely conservative difference scheme for gas-dynamics equations of in Eulerian variables”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20:1** (1980), 187–198. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90072-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90072-5) (In Russ.).
5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarsky, “Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with separated velocities”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, **105** (1983) (In Russ.), 33 p.
6. Yu. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Adaptive artificial viscosity method numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand, Moscow, 2014 (In Russ.), 288 p.
7. Yu. A. Poveschenko, M. E. Ladonkina, V. O. Podryga, O. R. Rahimly, Yu. S. Sharova, “On a two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution”, *Keldysh Institute Preprints*, 2019, 14. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>, 23 p.
(In Russ.)

8. O. Rahimly, V. Podryga, Y. Poveshchenko, P. Rahimly, Y. Sharova, “Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution.”, *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2019. Lecture Notes in Computer Science*, **11958**, Springer, Cham, 2020, 618–625 DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2_71.
9. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical analysis of fully conservative difference schemes with adaptive viscosity”, *Zhurnal SVMO*, **23**:4 (2021), 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423> (In Russ.).
10. M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko, O. R. Rahimly, H. Zhang, “Theoretical study of stability of nodal completely conservative difference schemes with viscous filling for gas dynamics equations in Euler variables”, *Zhurnal SVMO*, **24**:3 (2022), 317–330. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.317-330> (In Russ.).
11. G. A. Sod, “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **27**:1 (1978), 1–31.
12. M. E. Ladonkina, Y. A. Poveschenko, H. Zhang, “On one completely conservative difference scheme with viscous filling for gas dynamics equations”, Youth Scientific Conference “New horizons of applied mathematics – 2024” (Keldysh Institute of Applied Mathematics), **1**, 2024 (In Russ.).
13. Z. Wu, Y.-X. Ren, “A shock capturing artificial viscosity scheme in consistent with the compact high-order finite volume methods”, *Journal of Computational Physics*, **516**:8 (2024), 113291. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113291>.
14. V.-T. Nguyen, T.-H. Phan, W.-G. Park, “Numerical modeling of multiphase compressible flows with the presence of shock waves using an interface-sharpening five-equation model”, *International Journal of Multiphase Flow*, **135** (2021), 103542. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103542>.

Submitted 06.10.2024; Revised 13.11.2024; Accepted 27.11.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.